

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Г.А. Нефедова
В.А. Ащеулов

ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В КОНСПЕКТИВНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Рекомендовано УМО по образованию в области геодезии
и фотограмметрии в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
120100 «Геодезия» специальностям 120101 «Прикладная геодезия»,
120102 «Астрономогеодезия», 120103 «Космическая геодезия»,
120202 «Аэрофотогеодезия»

Новосибирск
СГГА
2009

УДК 528.02:519.6
Н58

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор
Г.Г. Асташенков
кандидат технических наук, профессор
И.Я. Барлиани

Нефедова, Г.А.

Н 58 Теория математической обработки геодезических измерений в конспективном изложении [Текст]: учеб. пособие / Г.А. Нефедова, В.А. Ащеулов. – Новосибирск: СГГА, 2009.

ISBN 978-5-87693-347-8

Учебное пособие подготовлено к. т. н., доцентом Г.А. Нефедовой, к. т. н., профессором В.А. Ащеуловым на кафедре вычислительной математики СГГА. Пособие содержит краткий курс лекций, охватывающий основные вопросы, определенные программой, составленной на основе требований Государственного образовательного стандарта по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений», и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 120100 «Геодезия» специальностям 120101 «Прикладная геодезия», 120102 «Астрономогеодезия», 120103 «Космическая геодезия», 120202 «Аэрофотогеодезия».

Рекомендовано к изданию ученым советом Института геодезии и менеджмента СГГА.

Ответственный редактор: кандидат технических наук, профессор В.А. Падве

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГГА

УДК 528.02:519.6

ISBN 978-5-87693-347-8 © ГОУ ВПО «Сибирская государственная геодезическая академия» (СГГА), 2009

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	6
1. Вероятностные основы теории ошибок измерений.....	7
1.1. Результаты измерений как случайные величины. Равноточные и неравноточные, независимые и зависимые, необходимые и избыточные измерения	7
1.2. Задачи теории ошибок	8
1.3. Классификация ошибок измерений.....	8
1.4. Постулаты теории ошибок	9
1.5. Свойства случайных ошибок измерений	10
1.6. Показатели точности результатов равноточных измерений и связь между ними.....	12
1.6.1. Средняя квадратическая ошибка	12
1.6.2. Средняя ошибка	13
1.6.3. Вероятная (срединная) ошибка.....	13
1.7. Оценка точности функций результатов измерений	15
1.7.1. Средняя квадратическая ошибка функции коррелированных аргументов	16
1.7.2. Средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных аргументов	17
1.7.3. Средняя квадратическая ошибка функции линейного вида	17
1.8. Расчет точности аргументов по заданной точности функции	20
1.8.1. Способ равных средних квадратических ошибок аргументов.....	21
1.8.2. Способ равных влияний	21
1.9. Веса результатов измерений.....	24
1.9.1. Общие сведения	24
1.9.2. Порядок назначения весов в системе измерений	25
1.9.3. Обратный вес функции независимых результатов измерений.....	27
1.10. Математическая обработка ряда независимых равноточных измерений одной величины	28
1.10.1. Постановка задачи	28
1.10.2. Задачи математической обработки и их решение.....	28
1.10.3. Вспомогательные и контрольные формулы	30
1.10.4. Выбраковка экстремального члена ряда (критерий Грэббса – Смирнова)	31
1.11. Математическая обработка ряда независимых неравноточных измерений одной величины	33
1.11.1. Постановка задачи	33
1.11.2. Задачи математической обработки измерений и их решение ..	33
1.11.3. Вспомогательные и контрольные формулы	37
1.12. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений. Выявление остаточной систематической ошибки	39
1.13. Сравнительная характеристика способов оценки точности геодезических измерений.....	42

2.	Элементы матричной алгебры.....	43
2.1.	Основные определения.....	43
2.2.	Операции над матрицами.....	45
2.3.	Обратная матрица.....	46
2.4.	Транспонирование матриц и матричных выражений.....	46
2.5.	Матричная запись систем линейных уравнений.....	47
2.6.	Решение системы линейных уравнений методом обращения.....	49
2.7.	Дифференцирование матриц и матричных выражений.....	49
3.	Математическая обработка систем геодезических измерений.....	51
3.1.	Общие сведения.....	51
3.2.	Связи между измеряемыми величинами и способы их фиксации.....	51
3.3.	Обоснование принципа наименьших квадратов для решения задачи уравнивания системы измерений.....	54
3.4.	Структура корреляционной матрицы вектора измерений. Связь корреляционной и весовой матриц.....	58
3.5.	Обобщенная теорема оценки точности (формула перехода ошибок).....	60
4.	Теория коррелятного способа уравнивания.....	62
4.1.	Постановка задачи.....	62
4.2.	Принципиальное решение задачи.....	63
4.2.1.	Линеаризация исходной системы условных уравнений связи.....	63
4.2.2.	Решение системы условных уравнений поправок по методу наименьших квадратов.....	64
4.2.3.	Вычисление уравненных измерений.....	66
4.3.	Оценка точности по материалам уравнивания.....	68
4.3.1.	Оценка точности результатов измерений.....	68
4.3.2.	Оценка точности уравненных элементов сети.....	69
4.3.3.	Частные случаи.....	72
4.3.4.	О повышении точности после уравнивания.....	74
4.3.5.	Виды условных уравнений в нивелирных сетях.....	75
4.4.	Блок-схема коррелятного способа уравнивания и оценки точности.....	76
5.	Теория параметрического способа уравнивания.....	78
5.1.	Постановка задачи.....	78
5.2.	Принципиальное решение задачи.....	78
5.3.	Оценка точности в параметрическом способе уравнивания.....	81
5.4.	Блок-схема параметрического способа уравнивания и оценки точности.....	86
6.	Дополнительные вопросы и способы уравнивания.....	89
6.1.	Понятие о рекуррентном уравнивании.....	89
6.2.	Обобщенный способ уравнивания и его частные случаи.....	89
6.3.	Строгое и приближенное уравнивание.....	90
6.4.	Понятие об уравнивании обширных геодезических сетей.....	91
6.5.	Дисперсионный анализ в геодезии.....	93
6.5.1.	Однофакторный дисперсионный анализ.....	94

6.5.2. Оценка влияния фактора α	96
6.5.3. Многофакторный дисперсионный анализ.....	97
6.5.4. Оценка влияния отдельных факторов.....	98
Библиографический список	100
Приложения	101

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений». В нем рассматриваются вероятностные основы теории ошибок измерений, приводятся краткие сведения из матричной алгебры, излагается теория коррелятного и параметрического способов уравнивания и оценки точности систем геодезических измерений (геодезических сетей) по методу наименьших квадратов. Кроме того, в пособии рассматриваются некоторые дополнительные вопросы и способы уравнивания.

Материал представлен в лекционном изложении и сопровождается решением практических задач по оценке точности и математической обработке рядов измерений. В приложении приводятся примеры уравнивания и оценки точности одной и той же нивелирной сети классическими способами: коррелятным и параметрическим. Примеры ориентированы на выполнение основных вычислений на компьютере в среде MathCAD.

Содержание учебного пособия апробировано в течение пяти лет в Линевском филиале СГГА при подготовке бакалавров по направлениям 120100 «Геодезия» и 120300 «Землеустройство и земельный кадастр».

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Теория математической обработки геодезических измерений».

1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Результаты измерений как случайные величины. Равноточные и неравноточные, независимые и зависимые, необходимые и избыточные измерения

Разработки и выводы теории вероятностей и математической статистики лежат в основе многих прикладных научных теорий. Знание основ этих дисциплин помогает правильно с научной точки зрения понимать и формулировать условия конкретных задач и вырабатывать пути их решения. В частности, изложение теории ошибок измерений на основе выводов теории вероятностей и математической статистики заметно упрощается, и мы будем постоянно ссылаться на эти выводы. Так, например, результаты измерений мы будем рассматривать как случайные величины, а любой набор измерений одной величины – как репрезентативную выборку из генеральной совокупности и т. д.

Под *измерением* мы будем понимать количественное сравнение определяемой физической величины с другой, однородной ей величиной, значение которой известно.

По *точности* измерения можно разделить на *равноточные*, т. е. выполняемые с одинаковой дисперсией (например, одним и тем же измерительным прибором) и *неравноточные* – выполняемые с различными дисперсиями.

Кроме того, измерения могут быть *зависимыми* и *независимыми*. В геодезии результаты непосредственных (прямых) измерений принято считать *независимыми* случайными величинами. Зависимыми будут так называемые «косвенные» измерения, полученные (вычисленные) как *функции* непосредственных измерений, но *рассматриваемые* как *результаты* непосредственных измерений. Например, в качестве измерений могут приниматься углы, хотя на самом деле измерялись направления.

По *количеству* все выполненные измерения делятся на *необходимые* и *избыточные*. Число необходимых измерений совпадает с числом измерений *минимально необходимых* для решения поставленной задачи. Например, для определения длины линии необходимо выполнить одно измерение, а для определения координат точки в прямоугольной системе координат – два измерения. На самом деле *число необходимых измерений всегда равно числу элементов, для определения которых и выполняется данный комплекс измерений*. Измерения, выполненные сверх необходимых, называются избыточными.

Результаты любых измерений одной величины, являясь случайными величинами, как правило, в той или иной степени отличаются друг от друга, так как содержат ошибки, вызванные *непостоянством комплекса условий измерений*. Под комплексом условий измерений понимается влияние внешней среды, несовершенство измерительных приборов и инструментов, а также человеческий фактор, т. е. квалификация наблюдателя. Колебания результатов измерений отражают непрестанное изменение комплекса условий измерений.

1.2. Задачи теории ошибок

Важно понимать, что любые измерения *всегда* сопровождаются ошибками.

Теория ошибок занимается изучением причин и закономерностей возникновения ошибок в результатах разнообразных измерений, а также анализом законов распределения этих ошибок.

В ней разрабатываются способы вычисления наиболее точного по вероятности значения измеряемой величины из результатов ее многократных измерений и способы получения характеристик точности этого значения.

Кроме того, теория ошибок занимается предвычислением ожидаемой точности проектируемых измерений и оценкой точности выполненных измерений.

Теория ошибок устанавливает допуски к измерениям и разрабатывает критерии выявления грубых ошибок измерений.

1.3. Классификация ошибок измерений

По природе возникновения ошибки измерений можно разделить на три группы.

1. *Грубые ошибки или промахи.*

Их причина часто кроется в человеческом факторе – в невнимательности и недосмотре наблюдателя. Грубые ошибки должны быть обязательно выявлены и исключены из измерений. Разработаны специальные критерии и способы выявления грубых ошибок.

2. *Систематические ошибки.*

Причиной систематических ошибок чаще всего является несовершенство измерительной техники и нарушение методики измерений, а также одностороннее действие некоторых малоизученных или трудно учитываемых параметров внешней среды. Систематические ошибки должны быть по возможности исключены или сильно ослаблены. Их стараются исключить соответствующей организацией наблюдений. Остаточные систематические ошибки могут быть выявлены, например, методами дисперсионного или корреляционного анализа и т. п.

3. *Случайные ошибки.*

Случайные ошибки порождаются в основном непостоянством внешних условий измерений: температуры и влажности воздуха, атмосферного давления, скорости ветра и т. п. Случайные ошибки невозможно исключить из результатов измерений в силу их природы.

По источникам возникновения ошибки измерений разделяются на инструментальные, внешние (ошибки среды) и личные.

Рассмотрим подробнее вопрос формирования ошибки при измерениях некоторой физической величины X .

Введем ψ – абстрактное понятие *истинного значения измеряемой величины* X . Оценкой неизвестного значения измеряемой случайной величины является математическое ожидание M_X , такое, что $M_X = \psi$.

Пусть x_i – результат i -го измерения величины X , причем $M_{x_i} = M_{\bar{X}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. измеряется одна и та же случайная величина.

В таких условиях разность $x_i - \psi = \theta_i$ – *истинная ошибка* i -го измерения – отклонение результата измерений от истинного значения измеряемой величины.

Разность $M_X - \psi = \delta$ – *постоянная систематическая ошибка* измерений. Ее наличие в измерениях приводит к смещению математического ожидания от истинного значения измеряемой величины на величину δ , т. е. к неравенству $M_X \neq \psi$.

Разность $x_i - M_X = \Delta_i$ – *случайная ошибка* i -го измерения – отклонение результата измерений от математического ожидания измеряемой величины.

И, наконец, $x_i - \psi = \delta + \Delta_i$ или

$$\theta_i = \delta + \Delta_i, \quad (1)$$

т. е. *истинная ошибка* θ_i каждого i -го измерения складывается из двух частей – *постоянной систематической составляющей* δ и *случайной* Δ_i .

Подчеркнем еще раз, что систематическая составляющая ошибки измерений должна быть исключена или сильно ослаблена, так как ее наличие приводит к искажению определяемого значения измеряемой величины на величину этой ошибки.

1.4. Постулаты теории ошибок

В основе теории ошибок измерений лежат два *постулата*:

1. Систематические ошибки в измерениях отсутствуют, т. е. $M_X = \psi$, а математическое ожидание случайной ошибки равно нулю, т. е. $M_{\Delta} = 0$.

2. Случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения с плотностью вероятности (рис. 1):

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_{\Delta}^2}}, \quad (2)$$

т. е. $\Delta \in N(0, \sigma_{\Delta})$.

Вся теория ошибок измерений построена на этих постулатах. Если они нарушаются, то методы математической обработки и оценки точности измерений, разработанные на их основе, не могут применяться строго, так как будут давать искаженные результаты.

Поэтому на практике необходимо контролировать выполнение этих постулатов. Такой контроль заключается, в частности, в проверке свойств случайных ошибок.

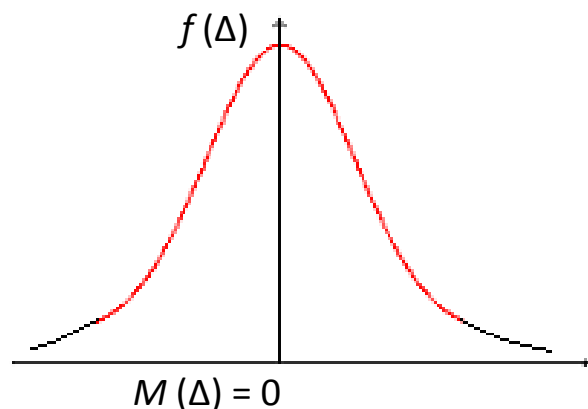


Рис. 1. Плотность распределения случайных ошибок измерений

1.5. Свойства случайных ошибок измерений

Свойства случайных ошибок вытекают из постулатов теории ошибок.

1. Среднее арифметическое достаточно большого количества случайных ошибок стремится к нулю, т. е.

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n} \approx 0. \quad (3)$$

Другими словами, случайные ошибки при увеличении числа измерений обладают свойством компенсации. Это свойство вытекает из первого постулата, а именно, из того, что математическое ожидание случайной ошибки равно нулю ($M_{\Delta} = 0$).

2. Положительные и отрицательные случайные ошибки в измерениях встречаются одинаково часто, т. е.

$$p(\Delta > 0) = p(\Delta < 0), \quad (4)$$

где $p(\Delta > 0)$ – количество положительных ошибок, а $p(\Delta < 0)$ – количество отрицательных.

Это свойство вытекает из того, что нормальные случайные ошибки распределены симметрично относительно нуля. Следовательно, вероятности появления положительной и отрицательной ошибок равны между собой и равны $\frac{1}{2}$ (рис. 2), поскольку численно эти вероятности равны соответственно

площадям между кривой распределения и положительной и отрицательной областями оси абсцисс, а вся площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице, как известно из теории вероятностей, т. е.

$$P(\Delta > 0) = P(\Delta < 0) = \frac{1}{2}.$$

С определенной вероятностью β , близкой к единице, случайные ошибки по абсолютной величине не превышают некоторого предельного значения $\Delta_{пред.}$, т. е.

$$|\Delta| < \Delta_{пред.} \quad (5)$$

или

$$P(|\Delta| < \Delta_{пред.}) = \beta.$$

Это свойство вытекает из второго постулата, точнее, из свойств кривой нормального распределения, которому подчиняются случайные ошибки.

Предельное значение $\Delta_{пред.}$ зависит от принятой доверительной вероятности β , означающей вероятность

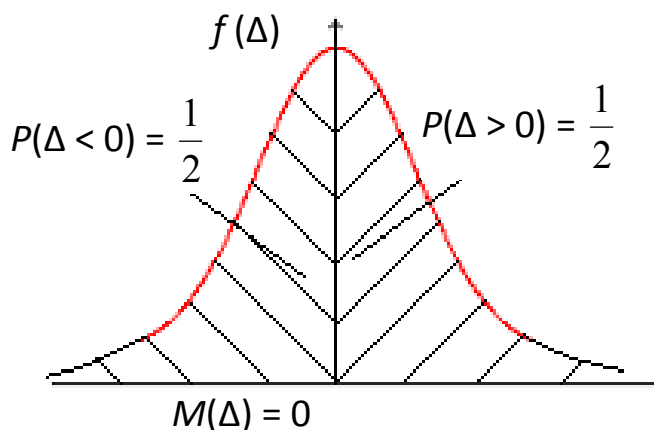


Рис. 2. Положительные и отрицательные случайные ошибки равновероятны

попадания случайной ошибки Δ в интервал с симметричными границами:

$$P(-\Delta_{пред.} < \Delta < +\Delta_{пред.}) = \beta.$$

Задаваясь требуемым значением этой вероятности, по таблицам значений функции $\Phi(t)$ Лапласа [3], содержащей вероятности попадания случайной величины в интервалы с симметричными границами, – можно найти аргумент t_β , соответствующий этой вероятности и использовать его для определения предельного значения ошибки следующим образом:

$$\beta = \Phi(t_\beta) = \Phi\left(\frac{\Delta_{пред.}}{\sigma_\Delta}\right); \quad t_\beta = \frac{\Delta_{пред.}}{\sigma_\Delta}; \quad \Delta_{пред.} = t_\beta \sigma_\Delta.$$

Практически для вероятности $\beta = 0,997$: $\Delta_{пред.} = 3\sigma_\Delta$ или

$$P(|\Delta| < 3\sigma_\Delta) = 0,997, \quad (6)$$

т. е. вероятность того, что ошибка измерений по абсолютной величине не превзойдет утроенного значения среднего квадратического отклонения измерений, равна 0,997.

Для вероятности $\beta = 0,955$: $\Delta_{пред.} = 2\sigma_\Delta$ или

$$P(|\Delta| < 2\sigma_\Delta) = 0,955, \quad (7)$$

т. е. вероятность того, что ошибка измерений по абсолютной величине не превзойдет удвоенного значения среднего квадратического отклонения измерений, равна 0,955.

Для вероятности $\beta = 0,683$: $\Delta_{пред.} = \sigma_\Delta$ или

$$P(|\Delta| < \sigma_\Delta) = 0,683, \quad (8)$$

т. е. вероятность того, что ошибка измерений по абсолютной величине не превзойдет значения среднего квадратического отклонения измерений, равна 0,683.

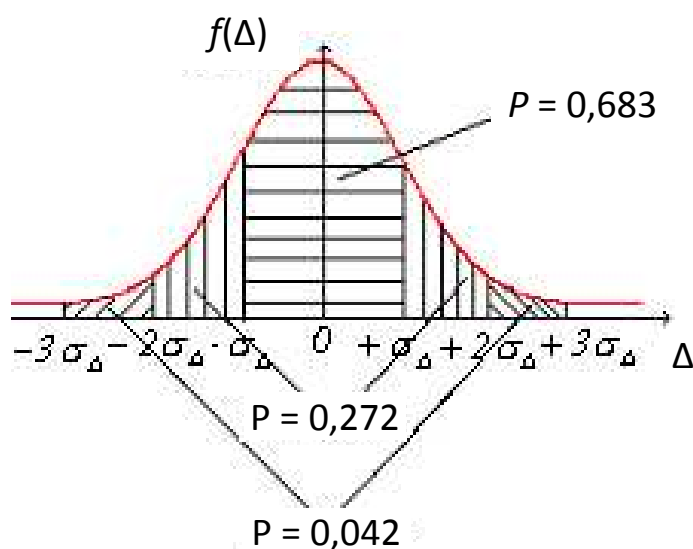


Рис. 3. Малые по абсолютной величине случайные ошибки вероятнее, чем большие

На практике предельное значение случайной ошибки измерений принято определять с вероятностью $\beta = 0,997$, следовательно, $\Delta_{пред.} = 3\sigma_\Delta$. Если в измерении содержится ошибка, превышающая предельное значение, то она считается *грубой* и такое измерение обычно бракуется.

3. Малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие (рис. 3), так как

$$P(|\Delta| < \sigma_\Delta) = 0,683 > P(\sigma_\Delta < |\Delta| < 2\sigma_\Delta)$$

что легко понять из предыдущего свойства.

Практически $n(|\Delta| < \sigma_{\Delta}) > n(\sigma_{\Delta} < |\Delta| < 2\sigma_{\Delta}) > n(2\sigma_{\Delta} < |\Delta| < 3\sigma_{\Delta})$, где n означает количество ошибок.

1.6. Показатели точности результатов равноточных измерений и связь между ними

1.6.1. Средняя квадратическая ошибка

Основным показателем точности результатов равноточных измерений является *средняя квадратическая ошибка*, обозначаемая m или m_x .

Средней квадратической ошибкой называется *оценка* среднего квадратического отклонения [4]:

$$m_x = \tilde{\sigma}_x \approx \sigma_x. \quad (9)$$

Из математической статистики известно, что если математическое ожидание M_X измеряемой величины известно, то несмещенная и состоятельная оценка дисперсии может быть получена по формуле

$$\bar{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2}{n}. \quad (10)$$

Если же математическое ожидание измеряемой величины не известно, а известна лишь его оценка – среднее арифметическое $\bar{X}$, то несмещенная и состоятельная оценка дисперсии

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}. \quad (10a)$$

На основании этих формул и с учетом того, что $x_i - \bar{X} = v_i$, а $x_i - M_X = \Delta_i$, можно написать следующие формулы для вычисления средней квадратической ошибки результатов измерений:

$$a) \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad \text{или} \quad m_x = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (11)$$

где принято обозначение $[\Delta^2] = \sum_{i=1}^n \Delta^2$;

$$б) \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v^2}{n-1}} \quad \text{или} \quad m_x = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad (12)$$

где обозначено $[v^2] = \sum_{i=1}^n v^2$.

Формула (11) носит имя *Гаусса*, а формула (12) – имя *Бесселя*, впервые получивших их.

В формуле Гаусса величины $\Delta_i = x_i - M_X$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. отклонения результатов измерений от математического ожидания измеряемой величины – случайные истинные ошибки измерений.

В формуле Бесселя значения $v_i = \bar{X} - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. *отклонения результатов измерений от среднего арифметического, называются поправками в результаты измерений*. При этом $[v] = 0$, как сумма отклонений от среднего арифметического.

1.6.2. Средняя ошибка

Следующим показателем точности результатов равноточных измерений является средняя ошибка V , определяемая как математическое ожидание абсолютного значения случайной ошибки

$$V = M[|\Delta|]. \quad (13)$$

Оценка $\bar{V}$ средней ошибки может быть получена по формуле

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta_i|}{n} = \frac{[|\Delta|]}{n},$$

т. е. по Δ – случайным истинным ошибкам измерений или по формуле

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{[v]}{n-0,5},$$

т. е. по поправкам v к результатам измерений.

1.6.3. Вероятная (срединная) ошибка

Вероятная или срединная ошибка ρ определяется соотношением

$$P(|\Delta| > \rho) = P(|\Delta| < \rho) = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Оценка $\bar{\rho}$ на практике находится следующим образом: из всех значений случайных ошибок Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) составляется *ранжированный ряд* вида

$$|\Delta_1|, |\Delta_2|, |\Delta_3|, \dots, |\Delta_n|,$$

где $|\Delta_i| \leq |\Delta_{i+1}|$. Значение оценки средней ошибки выбирается *из середины* ранжированного ряда. Таким образом, если число ошибок n *нечетное*, то

$$\bar{\rho} = \left| \Delta_{\frac{n+1}{2}} \right|, \text{ а если четное, то } \bar{\rho} = \frac{\left| \Delta_{\frac{n}{2}} \right| + \left| \Delta_{\frac{n}{2}+1} \right|}{2}.$$

Между показателями точности равноточных, нормально распределенных измерений существует следующая *связь*:

$$\sigma_x \approx 1,48\rho \text{ или } \rho \approx 0,67\sigma_x \text{ и } \sigma_x \approx 1,25V \text{ или } V \approx 0,80\sigma_x.$$

При проверке свойств случайных ошибок следует принимать во внимание, выполняются или нет соотношения между ними.

Отметим, что и случайные ошибки результатов измерений Δ_i , и средняя квадратическая ошибка измерений m_x , и средняя ошибка V , и, наконец, вероятная ошибка ρ являются *абсолютными* значениями. В теории математической обработки результатов измерений широко используются *относительные* значения тех же ошибок.

Относительной ошибкой называется отношение соответствующей абсолютной ошибки к значению измеряемой величины. Относительную ошибку чаще всего выражают в виде дроби с единицей в числителе и целым числом с двумя или тремя значащими цифрами в знаменателе. Понятие относительной ошибки используется, в основном, для характеристики точности линейных измерений. Например, линия измерена со средней квадратической ошибкой $m_S = 0.25$ м, ее длина равна $S = 296$ м. Относительная средняя квадратическая ошибка измерения длины линии в этом случае будет:

$$\frac{m_S}{S} = \frac{0,25}{296} = \frac{1}{1200}.$$

Задача 1. Для ряда случайных ошибок измерений, приведенных в табл. 1, вычислить показатели точности измерений и проверить свойства ошибок.

Таблица 1.

№ п/п i	Δ_i	№ п/п i	Δ_i
1	0,46	11	-0,52
2	-2,53	12	0,21
3	-0,63	13	0,23
4	3,52	14	-2,13
5	2,94	15	-1,67
6	-0,93	16	0,48
7	1,09	17	-1,79
8	0,75	18	-0,62
9	0,86	19	0,13
10	1,03	20	-0,53

$$\begin{aligned} [\Delta] &= 0,35 \\ [|\Delta|] &= 23,05 \\ [\Delta^2] &= 44,2693 \end{aligned}$$

Решение

Вычислим показатели точности измерений.

1. Средняя квадратическая ошибка

$$m_x = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{44,3}{20}} = 1,49.$$

2. Средняя ошибка

$$\bar{V} = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{23,05}{20} = 1,15.$$

3. Вероятная ошибка.

Составим ранжированный ряд ошибок, расположив ошибки в порядке возрастания их абсолютных величин.

Номер ошибки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ошибка	0,13	0,21	0,23	0,46	0,48	0,52	0,53	0,62	0,63	0,75	0,86	0,93

Номер ошибки	13	14	15	16	17	18	19	20
Ошибка	1,03	1,03	1,67	1,79	2,13	2,53	2,94	3,52

Число ошибок $n = 20$ – четное, поэтому

$$\bar{\rho} = \frac{|\Delta_{10}| + |\Delta_{11}|}{2} = \frac{0,75 + 0,86}{2} = 0,80.$$

Проверим, выполняются ли соотношения между показателями точности.

Вычислим коэффициенты k_1 и k_2 .

$$k_1 = \frac{m_x}{\bar{V}} = 1,30; \text{ теоретическое значение } k_1 = 1,25;$$

$$k_2 = \frac{m_x}{\bar{\rho}} = 1,86; \text{ теоретическое значение } k_2 = 1,48.$$

Проверим, выполняются ли свойства случайных ошибок:

$$\text{а) } \bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n} = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{0,35}{20} = 0,02 \approx 0, \text{ т. е. среднее арифметическое из}$$

ошибок приближенно равно нулю;

б) $n(\Delta > 0) = 11$, $n(\Delta < 0) = 9$, т. е. $n(\Delta > 0) \approx n(\Delta < 0)$, т. е. положительные и отрицательные ошибки встречаются приблизительно одинаково часто;

в) $n(|\Delta| < m_x) = 14$, $n(m_x < |\Delta| < 2m_x) = 5$, $n(2m_x < |\Delta| < 3m_x) = 1$, т. е. малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие;

г) предельная ошибка $\Delta_{пред.} = 3 m_{\Delta} = 4,47$.

Все значения ошибок не превышают предельного значения, т. е. $|\Delta_i| < \Delta_{пред.}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Выводы:

1) соотношения между показателями точности приближенно выполняются;

2) свойства данного ряда ошибок измерений в основном соответствуют свойствам случайных ошибок.

1.7. Оценка точности функций результатов измерений

На практике приходится иметь дело не только с результатами непосредственных измерений. Очень часто бывает, что интересующую нас величину нельзя или трудно определить из ее измерений. Например, координаты точек на поверхности земли или отметки пунктов. С целью определения таких величин выполняются измерения других, более доступных для измерений элементов, а интересующие нас величины получают из вычислений как функции последних. Так, для определения плановых координат точек измеряют длины линий и горизонтальные углы, а для определения отметок пунктов – превышения между ними. Ясно, что точность величины, вычисляемой как функция некоторых измерений, зависит как от точности этих

измерений, так и от вида функции, связывающей измеряемые величины. Говорят, что происходит *переход (перенос) ошибок аргументов на функцию*.

Отметим, что истинные ошибки результатов измерений (аргументов функции) обычно остаются неизвестными, а истинная ошибка функции может быть известна в тех случаях, когда известно истинное (теоретическое) значение функции. Например, сумма углов в треугольнике или сумма превышений в замкнутом высотном ходе и т. д. В этих случаях можно получить истинные ошибки функций как разность между практическим, т. е. вычисленным по измеренным аргументам (углам, превышениям и т. д.), и теоретическим значениями функции. Эта разность в геодезии называется *невязкой*.

1.7.1. Средняя квадратическая ошибка функции коррелированных аргументов

Из теории вероятностей мы знаем, что дисперсия σ_y^2 функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ коррелированных случайных аргументов, имеющих корреляционную (ковариационную) матрицу

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

может быть получена после линеаризации функции по формуле

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) K_{ij}. \quad (15)$$

В матрице K_X : σ_i – средние квадратические отклонения аргументов, а $K_{ij} = K_{ji}$ – ковариации или корреляционные моменты связи каждой пары x_i и x_j аргументов.

Воспользуемся этой формулой и применим ее при решении геодезических задач для оценки точности функций коррелированных аргументов с учетом того, что вместо теоретических значений σ_i (средних квадратических отклонений аргументов) нам известны их несмещенные состоятельные оценки – средние квадратические ошибки $m_{x_i} = m_i$.

Таким образом, в общем случае, если известна функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

вектора коррелированных измерений

$$X = X_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с известной корреляционной матрицей

$$K_X = \begin{pmatrix} m_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & m_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & m_n^2 \end{pmatrix},$$

то средняя квадратическая ошибка m_y этой функции может быть вычислена по формуле

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) K_{ij}.$$

Матричная запись:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) K_X \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T, \quad (16)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ – вектор частных производных оцениваемой функции по аргументам.

Рассмотрим теперь частные случаи, которые на практике встречаются повсеместно.

1.7.2. Средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных аргументов

Результаты непосредственных измерений в геодезии принято считать *независимыми*, следовательно, все недиагональные элементы в корреляционной матрице аргументов равны нулю, т. е. эта матрица является диагональной (дисперсионная матрица)

$$K_X = \begin{pmatrix} m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & m_n^2 \end{pmatrix}.$$

Формула для вычисления средней квадратической ошибки функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *некоррелированных* аргументов имеет вид

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 m_i^2. \quad (17)$$

1.7.3. Средняя квадратическая ошибка функции линейного вида

Функции линейного вида

$$y = \pm a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm \dots \pm a_n x_n + a_0$$

в геодезии встречаются очень часто. Если аргументы линейной функции *коррелированы*, то оценка точности таких функций может быть выполнена по формуле

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}, \quad (18)$$

а если не коррелированы, то по формуле

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 m_i^2. \quad (19)$$

Если линейная функция имеет *простейший вид* $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$, то

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2. \quad (20)$$

И, наконец, если имеем линейную функцию одного аргумента $y = cx$, то в этом случае

$$m_y = cm_x. \quad (21)$$

Можно рекомендовать следующую *методику решения задач* по оценке точности функций измеренных величин:

1. Сначала, исходя из существа задачи, необходимо правильно *установить вид оцениваемой функции*, т. е. написать конкретную формулу, выражающую элемент, подлежащий оценке точности, через измеряемые величины (аргументы).

2. Установить из условия задачи, коррелированы или нет аргументы.

3. Применить соответствующую формулу для оценки точности функции.

Задача 2. Функция $y = x_1 + x_2 + x_3$ характеризуется следующей корреляционной матрицей аргументов

$$K_X = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется:

1) вычислить среднюю квадратическую ошибку функции, т. е. выполнить строгую оценку точности;

2) вычислить среднюю квадратическую ошибку функции, считая значения $K_{ij} = 0$, т. е. не учитывать корреляцию аргументов (нестрогая оценка точности);

3) сравнить результаты строгой и нестрогой оценки точности.

Решение

1) оцениваемая функция линейного вида и имеет четыре аргумента. Запишем формулу для оценки ее точности и выполним вычисления:

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2K_{12} + 2K_{13} + 2K_{23} = 1 + 2 + 3 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 = 8;$$

$$m_y = \sqrt{8} = 2,8;$$

2) без учета корреляции аргументов:

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 + 2 + 3 = 6; \quad m_y = \sqrt{6} = 2,4;$$

3) сравнение результатов вычислений показывает, что в данном случае не учет корреляции аргументов привел к завышению показателя точности функции.

Таким образом, отметим, что пренебрежение корреляцией аргументов может привести к завышению оценки точности функции, т. е. к ее искажению в «опасную» сторону. Поэтому при оценке точности любых вычисляемых величин нужно использовать всю имеющуюся информацию о точности аргументов.

Задача 3. Определить среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического из n равноточных независимых измерений.

Решение

Оцениваемая функция имеет вид:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{[x]}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Аргументы функции равноточные и не коррелированы, т. е.

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_x \text{ и } K_{ij} = 0.$$

Применим формулу (15) для оценки точности:

$$m_{\bar{X}}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_n^2 = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_x^2 = \frac{m_x^2}{n}.$$

$$\text{Отсюда } m_{\bar{X}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}.$$

Задача 4. Получить формулу для вычисления средней квадратической ошибки независимо измеренных равноточных углов треугольников в сети триангуляции по невязкам треугольников (*формула Ферреро*).

Решение

Имеем ряд невязок треугольников триангуляционной сети (рис. 4): $w_1, w_2, \dots, w_n$. Они являются коррелированными истинными ошибками сумм независимо и равноточно измеренных углов треугольников. Пренебрегая корреляцией невязок, по формуле Гаусса можно вычислить среднее

$$\text{квадратическое значение невязки } m_w = \sqrt{\frac{[w^2]}{n}}.$$

По условию задачи углы измерены равноточно, следовательно, их средние квадратические ошибки $m_1 = m_2 = m_3 = m_\beta$.

Значение невязки в каждом треугольнике можно получить как функцию измеряемых углов по формуле $w_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^\circ$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Оценим точность этой функции: $m_w^2 = m_1^2 +$

$$m_2^2 + m_3^2 = 3m_\beta^2, \text{ отсюда } m_\beta^2 = \frac{m_w^2}{3}. \text{ И, наконец, } m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}.$$

Полученная формула носит название *формулы Ферреро* и применяется в геодезии для приближенной оценки точности измерений углов в сетях триангуляции.

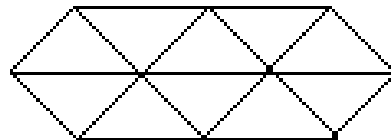


Рис. 4. Сеть триангуляции

Задача 5. Получить среднюю квадратическую ошибку приращения абсциссы $\Delta x = S \cos \alpha$, если длина линии $S = 220 \pm 0,10$ м, а дирекционный угол $\alpha = 36,5^\circ$ известен с точностью $m_\alpha = 15''$ (измерения S и α – независимые процессы).

Решение

Имеем функцию некоррелированных аргументов: $\Delta x = S \cos \alpha$. Формально средняя квадратическая ошибка этой функции $m_{\Delta x}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2$.

Теоретически множитель m_α выражен в радианах, а результаты измерений угла α – в минутах, секундах или долях града (один градус – это 1/100 прямого угла). Переход от угловых или градусных величин к радианам осуществляется по одной из следующих формул:

$$m_\alpha = \frac{m''_\alpha}{\rho''} = \frac{m'_\alpha}{\rho'} = \frac{m^\circ_\alpha}{\rho^\circ} = \frac{m^g_\alpha}{\rho^g} = \frac{m^{cg}_\alpha}{\rho^{cg}} = \frac{m^{ccg}_\alpha}{\rho^{ccg}},$$

где

$$\rho^\circ \approx 57,3^\circ; \rho' \approx 3\,438'; \rho'' \approx 206\,265'';$$

$$\rho^g \approx 63,7^g; \rho^{cg} \approx 6\,366^{cg}; \rho^{ccg} \approx 636\,620^{ccg}.$$

$$\text{В нашем случае } m_{\Delta x}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{(m''_\alpha)^2}{(\rho'')^2}, \rho \approx 206\,265'' \approx 206'' \cdot 10^3.$$

Возьмем частные производные и выполним вычисления:

$$m_{\Delta x}^2 = \cos^2 \alpha m_S^2 + S^2 \sin^2 \alpha \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} =$$

$$= (0,804)^2 (0,1)^2 + (220)^2 (0,595)^2 \frac{(15'')^2}{(206\,265'')^2} = 0,027 \text{ м}^2.$$

Следовательно, $m_{\Delta x} = \sqrt{0,027} \approx 0,16$ м.

1.8. Расчет точности аргументов по заданной точности функции

При проектировании геодезических работ возникает другая задача – задача расчета необходимой точности измерений для достижения заданной точности функции, аргументами которой будут являться эти измерения. Под точностью будем понимать среднюю квадратическую ошибку.

Итак, пусть дана функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

значение которой требуется вычислить по измеренным аргументам с заданной точностью – средней квадратической ошибкой m_y . Какова должна быть точность аргументов, чтобы заданная точность функции была достигнута?

Для решения этой задачи применяются два способа – способ равных средних квадратических ошибок аргументов и способ равных влияний.

1.8.1. Способ равных средних квадратических ошибок аргументов

Используется, если все аргументы функции *однородные величины*, например, углы или длины линий примерно одного порядка. В этом способе принимается, что расчетная точность аргументов будет одинаковой, т. е.

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_x.$$

Напишем формулу для вычисления средней квадратической ошибки функции:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2 = m_x^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2.$$

Отсюда

$$m_x = \frac{m_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}}. \quad (22)$$

1.8.2. Способ равных влияний

Используется, при разнородных аргументах x_i , а также, если аргументы – длины линий, существенно различающиеся между собой (на порядок и выше). В этом способе для функции

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и заданной точности m_y в формуле вычисления средней квадратической ошибки функции приравнивают слагаемые

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 = \dots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2,$$

т. е. принимают вклад каждого слагаемого в формирование ошибки функции одинаковым. Тогда

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_i^2,$$

и точность каждого i -го аргумента можно рассчитать по формуле:

$$m_i = \frac{m_y}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Задача 6. Непрístupное расстояние a предполагается получить на местности по схеме, приведенной на рис. 5. При этом проектируются следующие значения базиса b и углов A и B :

$$b \approx 580 \text{ м}; \quad m_b = 0,05 \text{ м}; \quad \frac{m_b}{b} \approx \frac{1}{11000};$$

$$A = 60^\circ; \quad B = 30^\circ; \quad m_a = m_b = 10''; \quad a = 1\,000 \text{ м}.$$

Определить ожидаемую точность неприступного расстояния a .

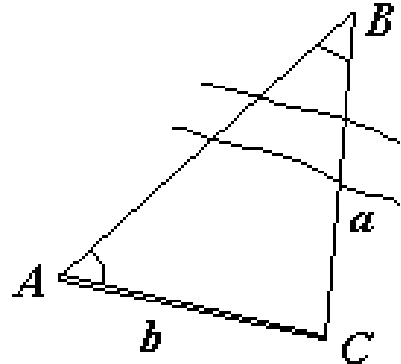
Решение

Оцениваемая функция имеет вид

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Ее средняя квадратическая ошибка может быть получена из формулы:

$$m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}$$



или

$$m_a^2 = \left(\frac{\sin A}{\sin B} \right)^2 m_b^2 + \left(b \frac{\cos A}{\sin B} \right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(-b \frac{\sin A \cos B}{\sin^2 B} \right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}$$

Рис. 5. Схема определения неприступного расстояния

$$(1,73)^2 0,05^2 + (580)^2 \frac{10^2}{(206 \cdot 10^3)^2} + (-1740)^2 \frac{10^2}{(206 \cdot 10^3)^2} = 0,015 \text{ м}^2,$$

т. е. ожидаемая средняя квадратическая ошибка определения неприступного расстояния равна $m_a = 0,12$ м. Относительная ошибка

$$\frac{m_a}{a} = \frac{0,12}{1000} = \frac{1}{8100} < \frac{m_b}{b}.$$

Задача 7. По условию предыдущей задачи требуется получить значение неприступного расстояния с относительной ошибкой не менее $\frac{1}{10000}$. Как при этом должна быть изменена точность измерения базиса b

и углов A и B ?

Решение

$$m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}.$$

1. Так как аргументы в оцениваемой функции неоднородные, то примем по способу равных влияний:

$$\frac{1}{2} m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)^2 m_b^2 \text{ и } \frac{1}{2} m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}.$$

$$\text{Тогда } m_b^2 = \frac{m_a^2}{2\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2} \text{ и } m_b = \frac{m_a}{\sqrt{2}\left|\frac{\partial a}{\partial b}\right|} = \frac{0,1}{1,73\sqrt{2}} = 0,04 \text{ м, т. е. точность}$$

измерения базиса нужно повысить до 0,04 м, а в относительном выражении до $\frac{m_a}{a} = \frac{1}{14000}$.

2. В выражении $\frac{1}{2}m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}$ примем $m_A = m_B = m_\beta$, т. е. применим способ равных средних квадратических ошибок.

Тогда

$$\frac{1}{2}m_a^2 = \left[\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2\right] \frac{m_\beta^2}{\rho^2},$$

откуда

$$m_\beta'' = \frac{m_a \cdot \rho}{\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2}} = \frac{0,10 \cdot 206 \cdot 10^3}{\sqrt{2}\sqrt{(580)^2 + (-1740)^2}} = 7,95'' \approx 8''.$$

Таким образом, для достижения требуемой точности измерения неприступного расстояния нужно также повысить точность измерения углов до 8''.

Задача 8. С какой точностью нужно измерить стороны a и b прямоугольника, чтобы получить его площадь S с точностью $m_S = 0,5 \text{ м}^2$ $\left(\frac{m_S}{S} = \frac{1}{4000}\right)$, если $a \approx 100 \text{ м}$, а $b \approx 20 \text{ м}$? Для расчета точности аргументов применить способ равных средних квадратических ошибок аргументов и способ равных влияний. Сравнить результаты вычислений и сделать выбор.

Решение

Оцениваемая функция имеет вид $S = ab$. Формула для оценки ее точности: $m_S^2 = b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2$.

1. В соответствии со способом равных средних квадратических ошибок аргументов потребуем, чтобы $m_a = m_b = m$, тогда $m_S^2 = (b^2 + a^2)m^2$ и

$m^2 = \frac{m_S^2}{b^2 + a^2} = \frac{(0,5)^2}{100^2 + 20^2} = 0,0000024$, $m \approx 0,005 \text{ м}$, т. е. стороны прямоугольника нужно измерять со средней квадратической ошибкой $m_a = m_b = m = 0,5 \text{ см}$, что соответствует относительным ошибкам $\frac{m_a}{a} = \frac{0,005}{100} \approx \frac{1}{20000}$ и $\frac{m_b}{b} = \frac{0,005}{20} \approx \frac{1}{4000}$. Как видим, относительные

ошибки сторон a и b разные, т. е. их нужно измерять разными приборами, что неудобно и экономически невыгодно.

2. В соответствии со способом равных влияний назовем $\frac{1}{2} m_S^2 = b^2 m_a^2$

и $\frac{1}{2} m_S^2 = a^2 m_b^2$, откуда получим: $m_a = \frac{m_S}{b\sqrt{2}} = 0,018$ м

и $m_b = \frac{m_S}{a\sqrt{2}} = 0,0035$ м, и относительные ошибки $\frac{m_a}{a} = \frac{0,018}{100} \approx \frac{1}{5700}$

и $\frac{m_b}{b} = \frac{0,0035}{20} \approx \frac{1}{5700}$, т. е. взяв прибор, обеспечивающий точность измерения сторон $\frac{1}{5700}$, мы получим площадь прямоугольника с требуемой

точностью.

1.9. Веса результатов измерений

1.9.1. Общие сведения

Понятие *веса результата измерения* вводится в случае *неравноточных* измерений одной или нескольких величин (системы величин), т. е. таких, которые выполнены с разными дисперсиями или разными средними квадратическими ошибками.

Вес P выражает степень доверия к результату измерения. Наряду со средней квадратической ошибкой вес является полноправной характеристикой точности *неравноточных* измерений и широко используется при математической обработке измерений.

Вес определяется как величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки:

$$P_i = \frac{c}{m_i^2}, \quad (24)$$

где $c = \text{const}$ – произвольное число, которое вводится для удобства вычислений и подбирается таким образом, чтобы значения весов P_i были близки к единице.

Величина $\mu = \sqrt{c}$ называется *ошибкой единицы веса* и является средней квадратической ошибкой *реального или фиктивного измерения*, вес которого произвольным выбором значения c оказывается равным единице.

Ошибка единицы веса служит общим показателем точности системы неравноточных измерений.

С введением понятия ошибки единицы веса формула для вычисления веса i -го измерения принимает вид

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (25)$$

Чем меньше средняя квадратическая ошибка, тем больше вес и тем точнее выполнено измерение.

Из формулы (25):

$$\mu = m_i \sqrt{P_i}, \quad (26)$$

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_i}}, \quad (27)$$

где $\frac{1}{P_i}$ – *обратный вес* i -го измерения. Понятие обратного веса при математической обработке измерений применяется так же широко, как и понятие веса.

При решении различных задач оказывается полезной очевидная *формула отношения весов*

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}. \quad (28)$$

1.9.2. Порядок назначения весов в системе измерений

Рассмотрим порядок назначения весов в системе неравноточных измерений.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результаты неравноточных измерений; $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$ – их средние квадратические ошибки.

Введем произвольно значение ошибки единицы веса μ , например, $\mu = m_2$ и вычислим веса результатов измерений по формуле $P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{m_2^2}{m_i^2}$.

Получим

$$P_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}; \quad P_2 = 1; \quad \dots \quad P_n = \frac{\mu^2}{m_n^2}.$$

Отметим, что в системе неравноточных измерений важны не абсолютные значения весов, а их соотношение, показывающее *сравнительную точность* измерений.

Веса всех равноточных измерений одинаковы.

В геодезической практике бывают случаи, когда средние квадратические ошибки измерений неизвестны, а веса для них назначить нужно, хотя нельзя воспользоваться формулой (25).

Рассмотрим такие случаи для угловых и линейных измерений.

Угловые измерения

Пусть угол $\bar{\alpha}$ измерен n_1 приемами и получено его среднее арифметическое $\bar{\alpha} = \frac{[\alpha]}{n_1}$, а угол β измерен n_2 приемами и получено его значение $\bar{\beta} = \frac{[\beta]}{n_2}$. Пусть

измерения в приемах были равноточными, т. е. $m_a = m_\beta = m$, но точность этих измерений не известна. Установим веса углов $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$.

Напишем формулу (28) отношения весов:

$$\frac{P_{\bar{\alpha}}}{P_{\bar{\beta}}} = \frac{m_{\bar{\beta}}^2}{m_{\bar{\alpha}}^2}.$$

С учетом того, что $m_{\bar{\alpha}} = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_1}} = \frac{m}{\sqrt{n_1}}$ и $m_{\bar{\beta}} = \frac{m_\beta}{\sqrt{n_2}} = \frac{m}{\sqrt{n_2}}$, получим

$$\frac{P_{\bar{\alpha}}}{P_{\bar{\beta}}} = \frac{m^2 n_1}{m^2 n_2} \text{ или } \frac{P_{\bar{\alpha}}}{P_{\bar{\beta}}} = \frac{n_1}{n_2}. \text{ Таким образом, } P_{\bar{\alpha}} = c n_1, \text{ а } P_{\bar{\beta}} = c n_2, \text{ т. е. веса}$$

равноточных углов прямо пропорциональны числу приемов, которыми они были измерены.

Линейные измерения

Пусть линия длиной S измерена устаревшим, но еще встречающимся в геодезической практике методом отложения мерного прибора. Пусть длина мерного прибора равна l , его точность m_l , а число уложений мерного прибора в линии равно n , т. е.

$$S = \underbrace{l + l + \dots + l}_n.$$

Тогда средняя квадратическая ошибка линии $m_S^2 = m_l^2 n = m_l^2 \frac{S}{l}$ или

$$m_S = \frac{m_l}{\sqrt{l}} \sqrt{S} = \mu_S \sqrt{S}, \text{ т. е., средняя квадратическая ошибка измерения линии}$$

пропорциональна корню квадратному из ее длины.

Если измерены две линии длиной S_1 и S_2 , и требуется определить их веса, то по формуле (28)

$$\frac{P_{S_1}}{P_{S_2}} = \frac{m_{S_2}^2}{m_{S_1}^2}$$

можно написать: $\frac{P_{S_1}}{P_{S_2}} = \frac{\mu_S^2 S_2}{\mu_S^2 S_1}$ или

$$\frac{P_{S_1}}{P_{S_2}} = \frac{S_2}{S_1}, \text{ откуда } P_{S_1} = \frac{c}{S_1} \text{ и } P_{S_2} = \frac{c}{S_2}, \text{ т. е. вес}$$

каждой линии обратно пропорционален ее длине.

Задача 9. В треугольнике (рис. 6) измерены два угла: угол α — тремя приемами, инструментом, обеспечивающим точность измерения $m_1 = 10''$, и угол β — четырьмя приемами, прибором, дающим точность

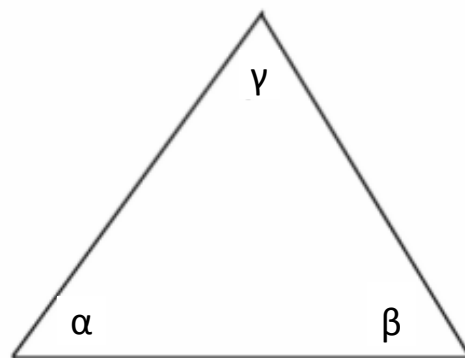


Рис. 6. Треугольник

измерения $m_2 = 5''$. Найти точность третьего угла γ треугольника, получаемого как дополнение до 180° , и определить веса всех трех углов, приняв за ошибку единицы веса среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического второго угла треугольника.

Решение

1. Угол γ треугольника вычислим по формуле

$$\gamma = 180^\circ - \bar{\alpha} - \bar{\beta},$$

где $\bar{\alpha} = \frac{[\alpha]}{n}$ и $\bar{\beta} = \frac{[\beta]}{n}$ – средние арифметические значения углов α и β

соответственно. Среднюю квадратическую ошибку угла γ определим по формуле $m_\gamma^2 = m_{\bar{\alpha}}^2 + m_{\bar{\beta}}^2$, где $m_{\bar{\alpha}} = \frac{m_1}{\sqrt{3}} = \frac{10''}{\sqrt{3}} = 5,8''$ и $m_{\bar{\beta}} = \frac{m_2}{\sqrt{4}} = \frac{5''}{\sqrt{4}} = 2,5''$.

Тогда $m_\gamma = \sqrt{39,6} = 6,3''$.

2. Веса углов определим по формуле $P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$, приняв по условию задачи

$$\mu = m_{\bar{\beta}} = 2,5'' \quad . \quad \text{Таким образом,} \quad P_{\bar{\alpha}} = \frac{\mu^2}{m_{\bar{\alpha}}^2} = \frac{(2,5)^2}{(5,8)^2} = 0,19 \quad ; \quad P_{\bar{\beta}} = 1 \quad ;$$

$$P_\gamma = \frac{\mu^2}{m_\gamma^2} = \frac{(2,5)^2}{(6,3)^2} = 0,16.$$

1.9.3. Обратный вес функции независимых результатов измерений

Если дана функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – независимые неравноточные измерения, т. е. $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$, то обратный вес этой функции можно получить следующим образом.

Напишем формулу средней квадратической ошибки этой функции:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 m_n^2.$$

В этой формуле $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}}$, т. е. $m_i^2 = \frac{\mu^2}{P_i}$. Определим аналогично

$$m_y^2 = \frac{\mu^2}{P_y}, \text{ тогда}$$

$$\frac{\mu^2}{P_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\mu^2}{P_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\mu^2}{P_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\mu^2}{P_n}$$

или

$$\frac{1}{P_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{P_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{P_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \frac{1}{P_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{P_i}. \quad (29)$$

Таким образом, получена формула (29) для вычисления *обратного веса* функции независимых неравноточных измерений.

Задача 10. Дана функция $y = x_1^2 - x_2 + x_2 \cos x_1$. Написать формулы для вычисления средней квадратической ошибки и обратного веса этой функции.

Решение

Средняя квадратическая ошибка функции:

$$m_y^2 = (2x_1 - x_2 \sin x_1)^2 m_1^2 + (-1 + \cos x_1)^2 m_2^2.$$

Обратный вес функции:

$$\frac{1}{P_y} = (2x_1 - x_2 \sin x_1)^2 \frac{1}{P_1} + (-1 + \cos x_1)^2 \frac{1}{P_2}.$$

1.10. Математическая обработка ряда независимых равноточных измерений одной величины

1.10.1. Постановка задачи

Пусть некоторая величина X , истинное значение которой есть ψ , измерена n раз независимо и с одинаковой точностью. Результаты измерений величины X обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они образуют случайный вектор

$$X = X_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с корреляционной матрицей

$$K_X = \begin{pmatrix} m_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_x^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m_x^2 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что систематические ошибки устранены, т. е. $M_x = \psi$, а $X \in N(M_X, \sigma_x)$.

1.10.2. Задачи математической обработки и их решение

Сформулируем задачи математической обработки ряда многократных измерений одной величины.

1) Определение наиболее надежного значения измеряемой величины из результатов всех измерений (окончательного результата).

2) Оценка точности измерений.

3) Оценка точности наиболее надежного значения измеряемой величины (окончательного результата).

4) Интервальная оценка точности.

Первые три задачи – основные, они выполняются всегда. Последняя задача – дополнительная, выполняется в случае необходимости.

Рассмотрим решение этих задач:

– *наиболее надежным значением* измеряемой величины (окончательным результатом) является ее математическое ожидание M_X , несмещенная и состоятельная оценка которого, как известно из математической статистики, – среднее арифметическое $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{[x]}{n}; \quad (30)$$

– *оценка точности результатов измерений* заключается в вычислении оценки среднего квадратического отклонения σ_x . Ею является средняя квадратическая ошибка m_x , которая может быть вычислена по формуле Бесселя:

$$m_x = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (31)$$

где $v_i = \bar{X} - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – поправки в результаты измерений;

– *оценка точности наиболее надежного значения* измеряемой величины (окончательного результата) состоит в вычислении оценки среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{X}}$ величины $\bar{X}$. Этой оценкой является $m_{\bar{X}}$ – средняя квадратическая ошибка среднего арифметического:

$$m_{\bar{X}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}; \quad (32)$$

– *интервальная оценка точности* заключается в построении доверительных интервалов для параметров M_X и σ_x , а именно:

а) доверительный интервал для математического ожидания M_X измеряемой величины

$$P(\bar{X} - t_\beta m_{\bar{X}} \leq M_X \leq \bar{X} + t_\beta m_{\bar{X}}) = \beta, \quad (33)$$

где коэффициент t_β выбирается из таблиц распределения Стьюдента [6] по принятой доверительной вероятности β (или уровню значимости $q = 1 - \beta$) и числу степеней свободы $\nu = n - 1$;

б) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ_x результатов измерений

$$P(\gamma_1 m_x \leq \sigma_x \leq \gamma_2 m_x) = \beta, \quad (34)$$

где γ_1 и γ_2 выбираются из специальных таблиц [4] по доверительной вероятности β (или уровню значимости $q = 1 - \beta$) и числу степеней свободы $\nu = n - 1$.

По этой же схеме можно приближенно получить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{X}}$ среднего арифметического, т. е.

$$P(\gamma_1 m_{\bar{X}} \leq \sigma_{\bar{X}} \leq \gamma_2 m_{\bar{X}}) = \beta. \quad (35)$$

1.10.3. Вспомогательные и контрольные формулы

Получим вспомогательные и контрольные формулы, которые полезно использовать в процессе математической обработки ряда равноточных измерений одной величины.

1. Для упрощения вычислений среднего арифметического по формуле

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{[x]}{n}$ выделим из x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) *постоянную часть* x_0 , т. е. представим результаты измерений x_i в виде суммы $x_i = x_0 + \varepsilon_i$, где, например, $x_0 = x_{min}$. Тогда $\bar{X} = \frac{[x]}{n} = \frac{[x_0 + \varepsilon_i]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}$, т. е.

$$\bar{X} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}. \quad (36)$$

2. Для контроля вычислений поправок v к результатам измерений воспользуемся свойством поправок $[v] = 0$ (как суммы уклонений от среднего арифметического). Если принятое среднее арифметическое $\bar{X}$ содержит ошибку округлений $\Delta_{ок}$, то будет справедлива контрольная формула

$$[v] = n \cdot \Delta_{ок}, \quad (37)$$

где $\Delta_{ок} = \bar{X} - \bar{X}_{точное}$, а $\bar{X}_{точное}$ – значение, полученное с большим числом знаков, чем принятое $\bar{X}$.

3. Для контроля вычислений средней квадратической ошибки по формуле Бесселя, а точнее, для контроля вычислений суммы квадратов поправок $[v^2]$, запишем формулу $v_i = \bar{X} - x_i$, умножим левую и правую ее части на v_i и просуммируем по $i = 1, 2, \dots, n$. Получим $[v^2] = \underbrace{\bar{X}[v]}_0 - [vx]$ или $[v^2] = -[vx]$.

Так как $x_i = x_0 + \varepsilon_i$, то $[v^2] = -[vx] = -[v(x_0 + \varepsilon)] = -x_0 \underbrace{[v]}_0 - [v\varepsilon]$, т. е.

$$[v^2] = -[v\varepsilon]. \quad (38)$$

Далее преобразуем ту же формулу $v_i = \bar{X} - x_i$ вычисления поправки к результатам измерений: $v_i = \bar{X} - x_i = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} - (x_0 + \varepsilon_i) = \frac{[\varepsilon]}{n} - \varepsilon_i$, т. е.

$v_i = \frac{[\varepsilon]}{n} - \varepsilon_i$. Возведя обе части последней формулы в квадрат и суммируя по $i = 1, 2, \dots, n$, получим вторую контрольную формулу

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \quad (39)$$

Все контроли должны сходиться в пределах точности вычислений.

1.10.4. Выбраковка экстремального члена ряда (критерий Грэббса – Смирнова)

Если ряд многократных равноточных измерений одной величины содержит *резко выделяющееся (экстремальное) измерение* $x_{\mathcal{E}}$, то нужно проверить, не содержит ли это измерение грубой ошибки. Другими словами, нужно проверить нулевую гипотезу о принадлежности значения этого измерения к общей совокупности нормально распределенных результатов измерений, т. е. гипотезу

$$H_0 = \{x_{\mathcal{E}} \in N(M_X, \sigma_x)\}. \quad (40)$$

Отклонение этой гипотезы будет означать, что результат измерений $x_{\mathcal{E}}$ должен быть *отбракован*, как содержащий грубую ошибку.

Критерием проверки нулевой гипотезы служит статистика $\xi_{\mathcal{E}}$:

$$\xi_{\mathcal{E}} = \frac{|x_{\mathcal{E}} - \bar{X}|}{\sigma_x^*}, \quad (41)$$

$$\text{где } \sigma_x^* = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}.$$

Эта статистика распределена по Стьюденту с n степенями свободы. Поэтому критическое значение ξ_T для нее находится в таблицах распределения Стьюдента и выбирается по уровню значимости $q = 1 - \beta$, соответствующему принятой доверительной вероятности β , и числу степеней свободы n .

Если $\xi_{\mathcal{E}} < \xi_T$, то с вероятностью β можно считать, что нулевая гипотеза (40) не противоречит данным и $x_{\mathcal{E}}$ не содержит грубой ошибки. В противном случае делается противоположный вывод, и измерение $x_{\mathcal{E}}$ должно быть забраковано, а математическая обработка ряда должна быть выполнена заново.

Проверке подвергаются, как правило, экстремальные результаты наблюдений, т. е. $x_{\min}$ и $x_{\max}$. Описанный критерий носит название *критерия Грэббса – Смирнова*.

Задача 11. Выполнить математическую обработку ряда равноточных измерений длины линии S по данным, приведенным в табл. 2.

Решение

1. Вычисление наиболее надежного значения измеряемой длины линии.

$$\bar{S} = S_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 382,60 + 0,0125 = 382,612 \approx 382,6 \text{ м} - \text{окончательный}$$

результат.

Таблица 2.

Номера измерений	S_i , м	ε_i , см	v_i , см	v_i^2	ε_i^2
1	382,55	–5	6,2	38,4	25
2	,62	2	–0,8	0,6	4
3	,58	–2	3,2	10,2	4
4	,70	10	–8,8	77,4	100
Σ		5	–0,2	126,6	133

$$\begin{array}{rcl} S_0 & & 382,60 \\ \frac{[\varepsilon]}{n} & & 0,0125 \\ \bar{S} & & 382,612 \end{array}$$

2. Оценка точности результатов измерений.

$m_S = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{126,6}{3}} = 6,5 \text{ см}$ – средняя квадратическая ошибка результатов измерений.

3. Оценка точности наиболее надежного значения измеряемой величины (окончательного результата).

$m_{\bar{S}} = \frac{m_S}{\sqrt{n}} = \frac{6,5}{\sqrt{4}} = 3,2 \text{ см}$ – средняя квадратическая ошибка окончательного результата.

Окончательная длина линии $S = 382,61 \pm 0,03 \text{ м}$.

4. Интервальная оценка точности:

а) доверительный интервал для математического ожидания M_S измеряемого расстояния

$$P(\bar{S} - t_\beta m_{\bar{S}} \leq M_S \leq \bar{S} + t_\beta m_{\bar{S}}) = \beta.$$

Примем значение доверительной вероятности $\beta = 0,95$. Найдем $t_\beta = 4,3$ из таблиц распределения Стьюдента. Тогда

$$P(382,61 - 4,3 \cdot 0,03 \leq M_S \leq 382,61 + 4,3 \cdot 0,03) = \beta, \text{ и окончательно}$$

$$P(382,47 \leq M_S \leq 382,75) = 0,95;$$

б) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения окончательного результата $P(\gamma_1 m_{\bar{S}} \leq \sigma_{\bar{S}} \leq \gamma_2 m_{\bar{S}}) = \beta$.

Для $\beta = 0,95$, $\gamma_1 = 0,57$ и $\gamma_2 = 3,7$. Тогда $P(0,57 \cdot 0,032 \leq \sigma_{\bar{S}} \leq 3,7 \cdot 0,032) = \beta$ и окончательно $P(0,018 \leq \sigma_{\bar{S}} \leq 0,12) = 0,95$.

5. Проверка экстремального члена ряда на наличие грубой ошибки измерений.

$$x_{\mathcal{Q}} = x_4 = 382,70; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{126,6}{4}} = 5,6 \text{ см};$$

$$\xi_{\mathcal{Q}} = \frac{|x_{\mathcal{Q}} - \bar{S}|}{\sigma_x^*} = \frac{|382,70 - 382,612|}{5,6 \text{ см}} = \frac{8,8 \text{ см}}{5,6 \text{ см}} = 1,6; \quad \xi_T = 1,71.$$

$\xi_{\mathcal{Q}} < \xi_T$, следовательно, $x_4 = 382,70$ не содержит грубой ошибки.

Контроли вычислений

$$1. \quad [v] = n \cdot \Delta_{\text{ок}}; \quad \frac{[\varepsilon]}{[n]} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ см} = 0,0125 \text{ м}; \quad \bar{S}_{\text{точное}} = 382,6125 \text{ м};$$

$$\Delta_{\text{ок}} = -0,05 \text{ см}; \quad [v] = -0,2; \quad n \cdot \Delta_{\text{ок}} = -0,05 \cdot 4 = -0,2 - \text{контроль выполняется};$$

$$2. [v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}; [v^2] = 126,6; [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 133 - \frac{5^2}{4} = 126,8 - \text{контроль}$$

выполняется с точностью ошибок округлений.

1.11. Математическая обработка ряда независимых неравноточных измерений одной величины

1.11.1. Постановка задачи

Пусть некоторая величина X , истинное значение которой есть ψ , измерена n раз с различной точностью. Результаты измерений величины X обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они образуют случайный вектор

$$X = X_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с диагональной корреляционной (ковариационной) матрицей

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Результаты измерений величины X подчиняются закону нормального распределения, т. е. $X \in N(M_X, \sigma_i)$ и $M_{x_i} = M_X$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Будем считать, что систематические ошибки устранены, т. е. $M_X = \psi$.

Средние квадратические отклонения σ_i результатов измерений могут быть выражены через общий показатель точности неравноточных измерений σ_0 и вес P_i , т. е.

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i}}, \quad (42)$$

где σ_0 – среднее квадратическое отклонение единицы веса, оценкой которого является средняя квадратическая ошибка единицы веса μ : $\mu = \tilde{\sigma}_0$.

Тогда можно написать, что $x_i \in N\left(M_X, \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i}}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

1.11.2. Задачи математической обработки измерений и их решение

С точки зрения теории ошибок вновь возникают прежние задачи, т. е.

1. Определение наиболее надежного значения измеряемой величины из результатов всех измерений (окончательного результата).
2. Оценка точности измерений.
3. Оценка точности наиболее надежного значения измеряемой величины (окончательного результата).
4. Интервальная оценка точности.

Рассмотрим решение этих задач:

– *получение окончательного результата*; окончательный результат должен представлять собой несмещенную, эффективную и состоятельную оценку $\tilde{M}_X$ математического ожидания M_X измеряемой величины, вычисляемую по результатам *неравноточных* измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Будем искать эту оценку в виде линейной функции результатов измерений, т. е. в виде

$$\tilde{M}_X = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \quad (43)$$

Так как мы хотим получить несмещенную оценку, то должно выполняться *требование несмещенности* $M(\tilde{M}_X) = M_X$, т. е.

$$M(\tilde{M}_X) = M\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i M_{x_i} = M_X \sum_{i=1}^n a_i = M_X.$$

Ясно, что условие несмещенности искомой оценки $\tilde{M}_X$ будет выполнено, если

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (44)$$

Будем искать несмещенную оценку с минимальной дисперсией $D(\tilde{M}_X) = \min$, т. е.

$$D(\tilde{M}_X) = \sigma_{\tilde{M}_X}^2 = D\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 = \min.$$

Таким образом, получили задачу на условный экстремум функции

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 &= \min \\ \sum_{i=1}^n a_i - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Для решения этой задачи составим функцию Лагранжа

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 - 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right) = \min$$

и приравняем к нулю частные производные этой функции по неизвестным коэффициентам a_i :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 2a_i \sigma_i^2 - 2\lambda = 0,$$

откуда получим $a_i = \frac{\lambda}{\sigma_i^2}$. Множитель Лагранжа λ найдем из условия (44)

несмещенности оценки, т. е. $\sum_{i=1}^n a_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\sigma_i^2} = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = \lambda \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\sigma_0^2} = \frac{\lambda}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n P_i = \frac{\lambda}{\sigma_0^2} [P_i] = 1; \lambda = \frac{\sigma_0^2}{[P_i]}.$$

Теперь $a_i = \frac{\lambda}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{[P]\sigma_i^2} = \frac{P_i}{[P]}$ и $\tilde{M}_X = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{P_i x_i}{[P]} = \frac{[Px]}{[P]}$ – среднее

весовое или *весовая арифметическая середина*. Обозначим найденную оценку через $\bar{X}$.

Итак, наиболее надежным значением из результатов многократных неравноточных измерений одной величины является *среднее весовое*

$$\bar{X} = \frac{[Px]}{[P]}, \quad (46)$$

которое является несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания измеряемой величины;

– *оценка точности результатов измерений*; выполнение оценки точности результатов неравноточных измерений означает нахождение *ошибки единицы веса μ* , как *общего показателя точности* этих измерений.

Напомним, что ошибка единицы веса является оценкой среднего квадратического отклонения единицы веса ($\mu = \tilde{\sigma}_0$).

Формулу для вычисления этого показателя точности получим следующим образом.

Известно, что ряд равноточных измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующий ему ряд истинных случайных ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, где $\Delta_i = x_i - M_X$, имеет несмещенную оценку m_x среднего квадратического отклонения σ_x , вычисляемую, при известном математическом ожидании M_X измеряемой величины, по формуле Гаусса (11), т. е.

$$m_x = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

Ряд неравноточных измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующий ему ряд истинных случайных ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ имеют веса $P_1, P_2, \dots, P_n$. Этот ряд можно преобразовать в равноточный с весами, равными единице, если умножить каждое значение Δ_i на $\sqrt{P_i}$. Получим новые ошибки $\Delta'_i = \Delta_i \sqrt{P_i}$,

веса которых $\frac{1}{P'_i} = (\sqrt{P_i})^2 \frac{1}{P_i} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Следовательно, ряд ошибок $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ равноточный и имеет показатель точности $m_x = \sqrt{\frac{[\Delta'\Delta']}{n}}$. Но $\Delta'_i = \Delta_i \sqrt{P_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), отсюда

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}}. \quad (47)$$

Последняя формула – формула Гаусса для оценки точности неравноточных измерений при известном математическом ожидании измеряемой величины. Она дает несмещенную оценку среднего квадратического отклонения единицы веса, а именно среднюю квадратическую ошибку μ единицы веса.

Если математическое ожидание неизвестно, а известна лишь его оценка $\bar{X}$, то замена M_X на $\bar{X}$ приведет к поправкам $v_i = \bar{X} - x_i$ и, как известно из математической статистики, к занижению оценки в $\frac{n-1}{n}$. Поэтому

несмещенной будет оценка $\mu = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}} \cdot \frac{n}{n-1}$, т. е.

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{n-1}}. \quad (48)$$

Последняя формула – формула Бесселя для оценки точности неравноточных измерений.

Таким образом, оценка точности результатов неравноточных измерений одной величины заключается в вычислении ошибки единицы веса μ . Она может быть выполнена по формулам Гаусса или Бесселя для неравноточных измерений. При необходимости могут быть вычислены средние квадратические ошибки отдельных измерений по известной формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}};$$

– оценка точности наиболее надежного значения измеряемой величины (окончательного результата); средняя квадратическая ошибка окончательного результата – весовой арифметической середины – может быть получена по формуле

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\bar{X}}}}. \quad (49)$$

где $P_{\bar{X}}$ – вес среднего весового, который найдем по известному правилу теории ошибок, а именно напишем формулу для вычисления среднего весового $\bar{X}$, т. е. функцию результатов измерений, и определим ее обратный вес.

Функция имеет вид

$$\bar{X} = \frac{[Px]}{[P]} = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n}{[P]},$$

и ее обратный вес

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\bar{X}}} &= \left(\frac{P_1}{[P]}\right)^2 \frac{1}{P_1} + \left(\frac{P_2}{[P]}\right)^2 \frac{1}{P_2} + \dots + \left(\frac{P_n}{[P]}\right)^2 \frac{1}{P_n} = \\ &= \frac{P_1}{[P]^2} + \frac{P_2}{[P]^2} + \dots + \frac{P_n}{[P]^2} = \frac{[P]}{[P]^2} = \frac{1}{[P]}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P_{\bar{X}} = [P], \quad (50)$$

т. е. вес среднего весового измерений равен сумме весов этих измерений.

Следовательно, средняя квадратическая ошибка окончательного результата – весовой арифметической середины – может быть получена по формуле

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}}; \quad (51)$$

– интервальная оценка точности; она заключается в построении доверительных интервалов по обычной схеме:

а) доверительный интервал для математического ожидания измеряемой величины, оценкой которого является среднее весовое $\bar{X}$, т. е.

$$P(\bar{X} - t_{\beta} m_{\bar{X}} \leq M_X \leq \bar{X} + t_{\beta} m_{\bar{X}}) = \beta; \quad (52)$$

б) доверительный интервал для σ_0 – среднего квадратического отклонения единицы веса, оценкой которого является ошибка μ единицы веса, т. е.

$$P(\gamma_1 \mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \mu) = \beta. \quad (53)$$

1.11.3. Вспомогательные и контрольные формулы

В процессе вычислений так же, как при математической обработке ряда равноточных измерений, полезно использовать вспомогательные и контрольные формулы. Эти формулы выводятся аналогично соответствующим формулам, полученным выше для ряда равноточных измерений, и выглядят следующим образом:

Для упрощения вычисления среднего арифметического по формуле $\bar{X} = \frac{[Px]}{[P]}$ применяется формула

$$\bar{X} = x_0 + \frac{[P\varepsilon]}{[P]}, \quad (54)$$

где x_0 – постоянная часть измерений x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (например, $x_0 = x_{\min}$), представляемых в виде суммы $x_i = x_0 + \varepsilon_i$.

Для контроля вычислений поправок v к результатам измерений используется теоретическое свойство поправок $[Pv] = 0$. Практически $[Pv] = \Delta_{\text{ок}}[P]$, где $\Delta_{\text{ок}} =$

$\bar{X} - \bar{X}_{\text{точное}}$ – ошибка округления принятого значения $\bar{X}$, а $\bar{X}_{\text{точное}}$ – значение, полученное с большим числом знаков, чем принятое $\bar{X}$.

Для контроля вычислений средней квадратической ошибки по формуле Бесселя используются формулы $[Pv^2] = -[Pv\varepsilon]$ и $[Pv^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}$.

Контроли должны сходиться в пределах точности вычислений.

Задача 12. Выполнить математическую обработку ряда независимых неравноточных измерений угла α по данным, приведенным в табл. 3.

Решение

Необходимые вычисления выполним в табл. 3.

Таблица 3.

Номера измерений	α	P_i	ε_i''	$P_i \varepsilon_i$	v_i''	$P_i v_i$	$P_i v_i^2$	$P_i \varepsilon_i^2$
1	18°19'16,4"	2	-1,0	-2,0	1,8	3,6	6,48	2,00
2	18,5"	2	1,1	2,2	-0,3	-0,6	0,18	2,42
3	21,8"	1	4,4	4,4	-3,6	-3,6	12,96	19,36
4	17,4"	1	0	0	0,8	0,8	0,64	0
Σ		6		4,6		0,2	20,26	23,78

$$\alpha_0 \quad 18^\circ 19' 17,4''$$

$$\frac{[P\varepsilon]}{[P]} \quad 0,77''$$

$$\bar{\alpha} \quad 18^\circ 19' 18,2''$$

1. Наиболее надежное значение угла (окончательный результат)

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 + \frac{[P\varepsilon]}{[P]} = 18^\circ 19' 18,2''.$$

2. Ошибка единицы веса (оценка точности измерений)

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{20,26}{3}} = 2,6''.$$

3. Средняя квадратическая ошибка наиболее надежного значения угла

$$m_{\bar{\alpha}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \frac{2,6''}{\sqrt{6}} = 1,1''.$$

4. Интервальная оценка точности.

а) доверительный интервал для математического ожидания измеренного угла

$$P(\bar{\alpha} - t_{\beta} m_{\bar{\alpha}} \leq M_{\alpha} \leq \bar{\alpha} + t_{\beta} m_{\bar{\alpha}}) = \beta.$$

Примем доверительную вероятность $\beta = 0,95$, $t_{\beta} = 4,3$ – из таблиц распределения Стьюдента. Тогда $P(\bar{\alpha} - 4,3 \cdot 1,1 \leq M_{\alpha} \leq \bar{\alpha} + 4,3 \cdot 1,1) = \beta$ или окончательно:

$$P(18^\circ 19' 13,9'' \leq M_{\alpha} \leq 18^\circ 19' 22,5'') = 0,95;$$

б) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения единицы веса

$$P(\gamma_1 \mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \mu) = \beta$$

Для доверительной вероятности $\beta = 0,95$, $\gamma_1 = 0,57$, $\gamma_2 = 3,7$, тогда $P(0,57 \cdot 2,6'' \leq \sigma_0 \leq 3,7 \cdot 2,6'') = \beta$ или окончательно:

$$P(1,5'' \leq \sigma_0 \leq 9,6'') = 0,95.$$

Контроли вычислений

$$1. [Pv] = \Delta_{\text{ок}}[P]; \frac{[P\varepsilon]}{[P]} = \frac{4,6}{6} = 0,767; \bar{\alpha}_{\text{точное}} = 18^\circ 19' 18,167''; \Delta_{\text{ок}} = 0,033;$$

$[Pv] = 0,2; \Delta_{\text{ок}}[P] = 0,033 \cdot 6 = 0,198 \approx 0,2$ – контроль выполняется.

$$2. [Pv^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]} \quad ; \quad [Pv^2] = \quad = \quad 20,26;$$

$$\left[P\varepsilon^2 \right] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]} = 23,78 - \frac{(4,6)^2}{6} = 20,25 \text{ – контроль выполняется.}$$

1.12. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений.

Выявление остаточной систематической ошибки

Пусть имеется ряд независимых равноточных парных измерений однородных величин. Это могут быть, например, длины линий теодолитного хода, измеренные в прямом и обратном направлениях одним прибором: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – прямо; $x_1', x_2', \dots, x_n'$ – обратно.

Требуется по этим данным оценить точность результатов измерений, т. е. вычислить среднюю квадратическую ошибку m_x .

Получим для каждой пары измерений разности

$$d_i = x_i - x_i' \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

На практике в общем случае $d_i \neq 0$, так как результаты измерений содержат не одинаковые ошибки. Теоретическое (истинное) значение каждой разности равно нулю, поэтому каждую разность d_i можно рассматривать как *истинную ошибку* самой разности. Следовательно, по определению средней квадратической ошибки, можно написать $m_d^2 = M(d^2)$ или, положив в основу формулу Гаусса:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}},$$

где m_d – средняя квадратическая *ошибка разности парных измерений*.

Нас же интересует средняя квадратическая ошибка m_x самих измерений. Применим к функции, выражающей разность $d_i = x_i - x_i'$ ($i = 1, 2, \dots, n$), формулу оценки точности функций, и получим $m_d^2 = m_i^2 + (m_i')^2 = 2 m_x^2$, так как

измерения равноточные и $m_i = m_i' = m_x$. Отсюда $m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}}$ или, с учетом

выражения для m_d ,

$$m_x = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}.$$

Таким образом, получена формула оценки точности двойных равноточных измерений по их разностям.

Заметим, что окончательным результатом каждой пары измерений является среднее арифметическое, т. е. $\bar{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}$, средняя квадратическая ошибка которого

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (55)$$

На практике в разностях d_i часто содержатся *остаточные систематические ошибки*. Они называются *остаточными* потому, что двойные измерения выполняются в одинаковых условиях, значит, систематические ошибки первого и второго измерений близки между собой и в разностях в значительной мере погашаются (компенсируются). Тем не менее, при наличии даже остаточных систематических ошибок, формула Гаусса даст искаженные показатели точности, поэтому в таких случаях ее использовать нельзя.

Обозначим среднюю величину остаточной систематической ошибки δ_{cp} . Тогда разности d_i , содержащие остаточные систематические ошибки могут быть представлены в виде $d_i = \Delta_i + \delta_{cp}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где Δ_i – случайная часть разности, а δ_{cp} – остаточная систематическая ее часть.

Просуммируем разности: $[d] = [\Delta] + n\delta_{cp}$, откуда $\delta_{cp} = \frac{[d]}{n}$.

Исключим δ_{cp} из разностей d_i и получим новые разности d'_i , свободные от влияния остаточной систематической ошибки:

$$d'_i = d_i - \delta_{cp} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Новые разности обладают свойством поправок, т. е. $[d'] = 0$. Поэтому в основу оценки точности разностей d_i следует положить формулу Бесселя, т. е.

$$m_d = \sqrt{\frac{[(d')^2]}{n-1}}.$$

Тогда средняя квадратическая ошибка результатов измерений

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[(d')^2]}{2(n-1)}}, \quad (56)$$

и средняя квадратическая ошибка среднего из парных измерений

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[(d')^2]}{n-1}}. \quad (57)$$

На практике значение δ_{cp} редко бывает равно нулю в точности. Какое же значение δ_{cp} нужно считать отличающимся от нуля существенно, чтобы выбрать правильную формулу для оценки точности? Другими словами, нужен критерий

значимости остаточной систематической ошибки. Если примем, например, $|\delta_{cp}| \leq \frac{1}{5} m_d$, то в левой части неравенства $|\delta_{cp}| = \left| \frac{[d]}{n} \right| = \frac{[d]}{n}$, а в правой части $\frac{1}{5} m_d = \frac{1}{5} \cdot 1,25V = 0,25V = 0,25 \frac{[d]}{n}$ – на основании известного соотношения $m_x = 1,25V$ между средней V и средней квадратической ошибкой m_x . Отсюда получим критерий значимости остаточной систематической ошибки в виде: $[d] \leq 0,25 [d]$. Если это соотношение выполняется, то остаточные систематические ошибки в разностях можно считать несущественными и использовать для оценки точности измерений формулу, полученную на основе формулы Гаусса. В противном случае следует применить формулу, полученную на основе формулы Бесселя.

Задача 13. Выполнить оценку точности по разностям двойных равноточных измерений по данным, приведенным в табл. 4.

Решение

Применим критерий значимости остаточных систематических ошибок

$$[d] \leq 0,25 [d]$$

$$[d] = 14,0; [d] = 19,4; 0,25 [d] \approx 4,8.$$

Так как $[d] \leq 0,25 [d]$, то влиянием остаточных систематических ошибок пренебрегать нельзя

$$\delta_{cp} = \frac{[d]}{n} = \frac{14,0}{4} = 3,5 \text{ см.}$$

Таблица 4.

Н омер линии	x_i , м	x'_i , м	d_i , см	d'_i , см	$(d'_i)^2$
1	967,489	967,398	9,1	5,6	31,4
2	692,223	692,250	2,7	6,2	38,4
3	1 017,080	1 017,080	0	3,5	12,2
4	675,158	675,082	7,6	4,1	16,8
Σ			14 ,0	0,0	98,8

Средняя квадратическая ошибка результатов измерений:

$$m_x = \sqrt{\frac{[(d')^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{98,8}{6}} \approx 4,1 \text{ см.}$$

Средняя квадратическая ошибка среднего из парных измерений:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{4,1 \text{ см}}{\sqrt{2}} \approx 2,9 \text{ см}.$$

Относительная точность результатов измерений:

$$\frac{m_S}{S} = \frac{m_x}{S_{cp}} = \frac{4,1 \text{ см}}{83\,800 \text{ см}} = \frac{1}{20\,000}.$$

Относительная точность окончательных результатов:

$$\frac{m_S}{S} = \frac{m_{\bar{x}}}{S_{cp}} = \frac{2,9 \text{ см}}{83\,800 \text{ см}} = \frac{1}{29\,000}.$$

1.13. Сравнительная характеристика способов оценки точности геодезических измерений

Формула Гаусса дает надежный результат, если в невязках – истинных ошибках измерений – отсутствуют ошибки исходных данных и если количество невязок достаточно велико. Эта формула отражает некоторые средние условия наблюдений.

Формула Бесселя – формула оценки точности *по внутренней сходимости*. Она отражает конкретные условия выполненных измерений, например, при измерениях углов на одном пункте. На оценку точности по внутренней сходимости влияют односторонне действующие погрешности, поэтому результаты оценки точности получаются преуменьшенными. Недостатком является малый объем используемой информации.

Формулы оценки точности *по разностям двойных измерений* отражают влияние в основном только случайных ошибок измерений. Влияние систематических ошибок в разностях в значительной степени погашается, результаты оценки точности получаются преуменьшенными.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Приведем кратко необходимые сведения из алгебры матриц, поскольку при дальнейшем изложении вопросов математической обработки систем измерений будем использовать аппарат матричной алгебры.

2.1. Основные определения

Алгебраический объект вида

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей* (таблицей) размера $m \times n$, где m – число строк матрицы, а n – число ее столбцов. Величины a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) называются *элементами* матрицы, индексы i и j указывают координаты элемента матрицы внутри таблицы.

В зависимости от размера матрицы, значений элементов и расположения их внутри таблицы различают следующие *виды матриц*:

1. Прямоугольная, т. е. $m \neq n$.
2. Квадратная порядка n (или m), т. е. $n = m$:

$$A = A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратная матрица называется *симметрической*.

Различают следующие виды квадратных матриц:

- а) верхняя треугольная, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i > j$

$$A = A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix};$$

- б) нижняя треугольная, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i < j$

$$A = A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

- в) диагональная, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$

$$A = A_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \{a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}\};$$

г) скалярная, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \alpha$ (скаляр)

$$A = A_{nn} = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \alpha \end{pmatrix} = \{\alpha \ \alpha \ \dots \ \alpha\};$$

д) единичная, т. е. такая скалярная, в которой $\alpha = 1$

$$E = E_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица играет роль единицы в матричной алгебре в том смысле, что $EA = AE = A$ и $EE = E$.

Различают также следующие виды прямоугольных и квадратных матриц:

1) нулевая матрица

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

2) матрица-строка (вектор-строка)

$$A = A_{n1} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n);$$

3) матрица-столбец

$$A = A_{n1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов *квадратной* матрицы A называется *следом* этой матрицы и обозначается tr или Sp , например, $SpA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Выражение $\Phi = X^T \cdot A \cdot X$, где $A = A_{nn}$ – симметрическая матрица, а $X = X_{n1}$ – вектор-столбец, называется *квадратичной формой*. Результатом вычисления квадратичной формы является *число*.

2.2. Операции над матрицами

1. Сравнение матриц.

Матрицы A_{tp} и B_{pq} будут равны, если $t = p$, $p = q$ и $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Алгебраическое сложение матриц.

Операция сложения применима только к матрицам одинакового размера. Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица C того же размера, что и слагаемые матрицы. Элементы матрицы C получаются суммированием элементов с одинаковыми индексами, т. е.

$$A \pm B = C; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Свойства алгебраической суммы матриц:

- $A \pm B = B \pm A$ – переместительный закон;
- $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$ – сочетательный закон;
- $0 + A = A + 0$, где 0 – нулевая матрица.

1. Умножение матрицы на скаляр (число) α :

$$C_{mn} = \alpha \cdot A_{mn} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$;
- $\alpha (A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

2. Умножение матриц.

Умножение матриц определено только для матриц *подходящего размера*, а именно, число столбцов левой матрицы должно быть равно числу строк правой матрицы, т. е.

$$A_{mn} \cdot B_{nq} = C_{mq},$$

где A – левая матрица, а B – правая матрица. Размеры матрицы-результата C определяются крайними индексами в выражении $A_{mn} \cdot B_{nq}$, т. е. $m \times q$, например, $A_{72} \cdot B_{23} \cdot C_{36} \cdot D_{61} = F_{71}$.

Произведение двух матриц A_{mn} и B_{nq} подходящего размера представляет собой третью матрицу C_{mq} , каждый элемент c_{ij} которой, расположенный в i -й строке и j -м столбце, равен сумме произведений элементов i -й строки левой матрицы на элементы j -го столбца правой матрицы, т. е.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, q$; $k = 1, 2, \dots, n$ – индекс суммирования.

Пример: $A_{32} B_{21} = C_{31}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $A(BC) = (AB)C$ – свойство ассоциативности;
- $AB \neq BA$ – в общем случае, поэтому различают *умножение на матрицу слева* и *умножение на матрицу справа*.

Иногда имеет место равенство $AB = BA$, тогда говорят, что матрицы A и B *коммутируют*. Ясно, что это должны быть квадратные матрицы одного порядка, например:

- $A \cdot E = E \cdot A$, где E – единичная матрица (перестановочная);
- $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$, где 0 – нулевая матрица;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad AB = BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и др.

Операция деления матриц заменяется умножением на так называемую *обратную матрицу*.

2.3. Обратная матрица

Обратной матрицей A^{-1} по отношению к матрице A называется такая матрица, которая, будучи умножена на исходную как слева, так и справа, дает в результате единичную матрицу, т. е.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \quad (58)$$

Обратная матрица по определению (58) может быть получена *только для квадратной матрицы*.

Не каждая квадратная матрица может иметь обратную матрицу, а лишь та, у которой определитель отличен от нуля, т. е. $\det A \neq 0$. Такая матрица называется *невырожденной* (неособенной).

Если определитель $\det A = 0$, то матрица A называется *вырожденной* (особенной) и для нее нельзя получить обратную матрицу под условием (58) (для прямоугольных и вырожденных матриц существует операция их *псевдообращения*).

Свойства:

- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$;
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A \ B \ C)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$, т. е. обратная матрица произведения равна произведению обратных матриц, записанных в *обратном порядке*.

2.4. Транспонирование матриц и матричных выражений

Каждой матрице A_{mn} с элементами a_{ij} соответствует матрица A_{nm} с элементами a_{ji} . Она называется *транспонированной* к A и обозначается A_{mn}^T . Транспонированная матрица получается в результате замены строк на столбцы, например:

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A_{32}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- $(A^T)^T = A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;
- $(A \ B \ C)^T = C^T \ B^T \ A^T$;
- $\det A_{nn}^T = \det A_{nn}$;
- если $A = A^T$, то A – симметрическая квадратная матрица;
- $\left. \begin{array}{l} A_{nn}^T \cdot A_{nn} = B_{nn} \\ A_{nn} \cdot A_{nn}^T = C_{nn} \end{array} \right\}, B \text{ и } C \text{ – симметрические матрицы, причем } B \neq C!$

Примеры:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 17 \end{pmatrix}; A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Преобразовать матричное выражение:

$$\begin{aligned} B(A^{-1}B)^{-1} + (A^T B)^T - (B + A^T C)^T A &= \underbrace{BB^{-1}}_E A + B^T A - (B^T + C^T A)A = \\ &= A + B^T A - B^T A + C^T AA = A + C^T AA = (E + C^T A)A. \end{aligned}$$

2.5. Матричная запись систем линейных уравнений

Матричная запись систем линейных уравнений применяется для удобства и сокращения записей.

Исходная система линейных уравнений в обычной алгебраической записи

$$\left. \begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + l_1 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + l_2 = 0 \\ \\ r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n + l_n = 0 \end{array} \right\}$$

заменяется записью с переименованными коэффициентами

[illegible]

В матричном виде она представляется так: $AX + L = 0$ или

$$A_{rn} X_{n1} + L_{r1} = 0_{r1}, \quad (59)$$

где обозначено: $A = A_{rn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов

системы размера $r \times n$;

$$X = X_{n1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – вектор неизвестных размера } n \times 1;$$

$$L = L_{r1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_r \end{pmatrix} \text{ – вектор свободных членов размера } r \times 1;$$

$$0 = 0_{r1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – нулевой вектор размера } r \times 1.$$

Пример: представить систему уравнений в матричной записи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1,6 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - 1,8 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Матричная запись: $A_{rn} X_{n1} + L_{r1} = 0_{r1}$,

где $A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

$$X_{31} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ – вектор неизвестных;}$$

$$L_{31} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -1,8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – вектор свободных членов;}$$

$$0_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{нулевой вектор.}$$

При необходимости возможен обратный переход от матричной записи системы к алгебраической. Он выполняется в обратном порядке по правилам умножения и сложения матриц, например, выполняя алгебраические действия с матрицами в выражении

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,6 \\ -1,8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1,6 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - 1,8 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

2.6. Решение системы линейных уравнений методом обращения

Если для системы линейных уравнений

$$AX + L = 0$$

известна обратная матрица ее коэффициентов A^{-1} , то, умножив обе части этого уравнения на обратную матрицу *слева*, получим $A^{-1}(AX + L) = 0$ или

$$\underbrace{A^{-1}A}_E X + A^{-1}L = 0,$$

т. е. можно вычислить неизвестные по формуле

$$X = -A^{-1}L. \quad (60)$$

Решение системы уравнений с помощью обратной матрицы ее коэффициентов называется решением *методом обращения*.

2.7. Дифференцирование матриц и матричных выражений

Вектор $Y = Y_{m1}$, элементы которого являются функциями другого вектора $X = X_{n1}$, называется *вектор-функцией* и записывается в виде $Y = \varphi(X)$ или $Y_{m1} = \varphi_{m1}(X_{n1})$, т. е.

$$Y = Y_{m1} = \begin{pmatrix} \varphi_1(X_{n1}) \\ \varphi_2(X_{n1}) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(X_{n1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Выражение

$$A_{mn} = \frac{\partial Y_{m1}}{\partial X_{n1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (62)$$

называется производной вектора Y по вектору X или *производной вектор-функции* и представляет собой матрицу A , i -я строка которой формируется из частных производных i -й функции по элементам вектора.

Пример:

$$Y = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_2^2 \\ \operatorname{tg} x_1 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ 0 & 2x_2 \\ \frac{1}{\cos^2 x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Частные случаи.

1. Если имеем линейное преобразование $Y = AX + B$, то $\frac{\partial Y}{\partial X} = A$.
2. Если имеем так называемую квадратичную форму $\Phi = X^T \cdot A \cdot X$, где $A_{mn} = A_{nm}^T$ – симметрическая матрица, а X_{n1} – вектор-столбец, то $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2X^T \cdot A$.
3. Если имеем сложную вектор-функцию $Z = f(Y)$, где $Y = \varphi(X)$, то $\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X}$.

Пример:

$$Z = AY;$$

$$Z = B^T X;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X} = AB^T.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СИСТЕМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Общие сведения

Конечной целью *геодезических* измерений являются, как правило, координаты и отметки точек на земной поверхности. Они не всегда могут быть измерены непосредственно, а получаются косвенным путем – из вычислений, как функции других элементов, *специально измеряемых* для этой цели.

Например, для определения *плановых координат* точек строится *плановая геодезическая сеть* – сеть триангуляции, трилатерации, полигонометрии (или их комбинации), в которых выполняются *угловые и (или) линейные* измерения.

Для определения *отметок* пунктов развивается высотная сеть, и измеряются *превышения* между пунктами.

Обработать измерения – значит извлечь из них сведения об интересующем нас предмете или явлении, т. е. в нашем случае – получить информацию о координатах и отметках вновь определяемых пунктов.

Любая геодезическая сеть, с теоретической точки зрения, представляет собой *систему*, объединяющую все измеренные элементы.

Из теории вероятностей известно, что при анализе систем необходимо учитывать все связи между ее отдельными элементами, т. е. в данном случае – связи между измеренными величинами.

Математическая обработка *систем* геодезических измерений выполняется в два этапа.

На *первом этапе* производится математическая обработка *рядов* многократных измерений всех величин *по отдельности*. В результате для каждого измеряемого элемента получают окончательный результат (оценку математического ожидания) с некоторой точностью. На этом этапе обработки *не учитываются* связи между измеряемыми величинами. Целью является получение для каждого измеряемого элемента *наиболее надежного значения* (по возможности не искаженного грубыми и систематическими ошибками) *и его точности* – *средней квадратической ошибки*.

На *втором этапе* в качестве непосредственных измерений выступают окончательные результаты математической обработки *первого этапа*, и выполняется их дальнейшая математическая обработка уже *с учетом всех связей* между ними.

3.2. Связи между измеряемыми величинами и способы их фиксации

Совокупность математических зависимостей, привлекаемых для описания изучаемого объекта или явления, называется *математической моделью* этого объекта или явления.

Рассмотрим, какие зависимости (связи) могут иметь место в системах геодезических измерений, и какими способами эти связи можно установить и зафиксировать.

Число измеряемых величин в геодезии всегда больше необходимого их количества, т. е. такого, какое достаточно для однократного определения

элементов, являющихся конечной целью измерений. Именно наличие избыточных измерений позволяет установить и зафиксировать объективные связи между измеряемыми величинами.

Например, если требуется найти координаты X_k и Y_k точки k из прямой угловой засечки (рис. 7), то для однократного их определения достаточно выполнить только два измерения – углы β_i и β_j , и найти X_k и Y_k . Однако всегда измеряется и третий угол треугольника β_k – для контроля измерений, так как

объективно должно выполняться теоретическое условие – уравнение связи

$$\beta_i + \beta_j + \beta_k - 180^\circ = 0, \quad (63)$$

где β – истинные значения измеряемых углов.

Если вместо истинных значений подставить в уравнение связи измеренные значения углов β' , то в правой части, как правило, всегда образуется невязка, как бы точно не были измерены значения этих углов, т. е.

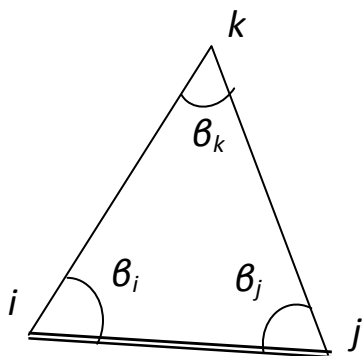


Рис. 7. Схема треугольника

$$\beta'_i + \beta'_j + \beta'_k - 180^\circ = w_\beta.$$

Причина появления невязки заключается в том, что значения углов β' , полученные на первом этапе из предварительной математической обработки рядов их многократных измерений, не равны истинным значениям. Они являются лишь оценками математических ожиданий, найденными с некоторой точностью, т. е. содержат ошибки измерений.

Если в треугольнике измерить еще один «лишний» элемент, например длину S_{ik} стороны треугольника, то возникнет еще одно теоретическое условие, которое справедливо для истинных значений измеряемых величин, а именно, в соответствии с теоремой синусов $\frac{b}{\sin \beta_k} = \frac{S_{ik}}{\sin \beta_j}$ должно выполняться условие

– уравнение связи

$$S_{ik} - b \frac{\sin \beta_j}{\sin \beta_k} = 0.$$

После замены всех истинных значений измеренными величинами в правой части также получим невязку

$$S'_{ik} - b \frac{\sin \beta'_j}{\sin \beta'_k} = w_S,$$

где S_{ik} , β'_j , β'_k – измеренные значения, b – базис.

Вообще каждое избыточное измерение доставляет какое-либо свое объективное, независимое от других, математическое условие, связывающее

истинные значения измеряемых величин. Это условие всегда может быть записано аналитически и называется *условным уравнением связи*.

В каждой геодезической сети *число t необходимых измерений* совпадает с числом определяемых элементов, являющихся конечной целью геодезических измерений. Реальное число выполняемых измерений $n > t$. Следовательно, в любой геодезической сети выполняется $r = n - t$ *избыточных измерений* и возникает r конкретных независимых условий, которые образуют *систему условных уравнений связи* вида

$$\varphi(Y) = 0, \quad (64)$$

где Y – вектор истинных значений измеряемых величин, а φ – символ неявной функции.

После подстановки в условные уравнения связи вместо истинных значений Y их измеренных величин Y' получим в правой части невязки

$$\varphi(Y') = W. \quad (65)$$

Ясно, что все условия, будут выполнены, если устранить невязки в уравнениях связи. Это значит, что нужно найти такие поправки V к результатам измерений, чтобы невязки исчезли, т. е. чтобы

$$\varphi(Y' + V) = 0. \quad (66)$$

При этом необходимо, чтобы все поправки V были малыми и возможно ближе к истинным ошибкам измерений величин Y' , так как каждый результат измерений сам по себе получен достаточно надежно и не должен быть испорчен введением неоправданно большой поправки.

Математическая обработка, имеющая целью устранение невязок путем введения малых поправок в результаты измерений, называется *уравниванием геодезической сети*. Эта задача и решается на втором этапе математической обработки систем геодезических измерений.

Таким образом, для устранения невязок в условных уравнениях связи нужно выполнить уравнивание геодезической сети.

Через условные уравнений связи измеряемые величины связаны в систему непосредственно, явно.

Можно указать *другой способ* выражения этой связи – *косвенно*, через некоторые общие параметры. Так истинные значения углов β в нашем примере теоретически могут быть выражены через истинные значения X и Y координат вершин треугольника (параметры) и представлены в виде *системы параметрических уравнений связи*:

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= \arctg \frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} - \arctg \frac{Y_i - Y_k}{X_i - X_k} \\ \beta_j &= \arctg \frac{Y_j - Y_k}{X_j - X_k} - \arctg \frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i} \\ \beta_k &= \arctg \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i} - \arctg \frac{Y_k - Y_j}{X_k - X_j} \end{aligned} \right\}. \quad (67)$$

Параметрические уравнения связи по существу выражают то же требование необходимости устранения невязок в условных уравнениях связи, но в иной (параметрической) форме. Удовлетворение этих уравнений и будет означать устранение всех невязок в условных уравнениях связи или *уравнивание геодезической сети*.

Итак, наиболее важным для математической обработки геодезических измерений является то, что между измеряемыми величинами объективно существуют математические соотношения, которые должны быть удовлетворены. Из совокупности всех измерений мы должны найти такие оценки всех интересующих нас величин, которые, будучи вычисленными через разные измерения (разными путями), должны совпадать в пределах точности вычислений.

Рассмотренные два способа отображения связей между измеряемыми величинами обуславливают два *классических* способа уравнивания геодезических сетей – *коррелятный* и *параметрический*.

Эти способы, решая одну и ту же задачу устранения невязок в уравнениях связи, дают одинаковые результаты уравнивания и одинаковую их точность.

Выводы:

1) количество необходимых измерений t в любой геодезической сети равно числу элементов, для определения которых был выполнен данный комплекс измерений;

2) избыточные измерения играют в геодезии важную роль. Их наличие позволяет обнаружить невязки в системе измерений, что, в свою очередь, вызывает задачу уравнивания и позволяет ее поставить. Невязки обеспечивают контроль измерений и их отбраковку. Избыточные измерения повышают точность определяемых величин;

3) причиной уравнивания являются невязки, вызванные ошибками измерений;

4) цель уравнивания – ликвидация невязок путем введения поправок в измеренные величины.

3.3. Обоснование принципа наименьших квадратов для решения задачи уравнивания системы измерений

Рассмотрим теоретическую постановку и возможные пути решения задачи уравнивания.

Пусть для определения t элементов выполнено $n > t$ измерений $Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n$, т. е. произведено $r = n - t$ избыточных измерений.

В рамках конкретной геодезической сети все измерения образуют систему n случайных величин и могут быть объединены в n -мерный случайный вектор

$$Y' = Y'_{nl} = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ \dots \\ Y'_n \end{pmatrix}.$$

Введем вектор Y – вектор истинных значений измеряемых величин:

$$Y = Y_{n1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Так как число избыточных измерений $r = n - t > 0$, то в геодезической сети возникнет r независимых условных уравнений связи, которые образуют вектор-функцию

$$\varphi_{r1}(Y_{n1}) = 0_{r1}$$

или, опуская размер векторов,

$$\varphi(Y) = 0.$$

Заменяя истинные значения измеряемых величин на измеренные, получим невязки

$$\varphi(Y') = W.$$

Цель уравнивания – найти вектор V истинных поправок к результатам измерений

$$V = V_{n1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix},$$

такой, чтобы невязки исчезли, т. е. чтобы $\varphi(Y' + V) = 0$.

Для этого нужно решить систему уравнений $\varphi(Y' + V) = 0$ относительно поправок, но число неизвестных $V = V_{n1}$ в этой системе, равное n , больше, чем число уравнений, равное r и система не имеет единственного решения.

Для получения однозначного решения необходимо поставить дополнительное требование. Потребуем, чтобы плотность вероятности совместного распределения данной системы измерений была максимальной, т. е.

$$f(Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n) = \max. \quad (68)$$

Это требование означает максимальную вероятность получить фактически измеренные значения наблюдаемых величин и выражает *принцип максимального правдоподобия результатов уравнивания* [8].

В геодезии принято считать результаты измерений независимыми случайными величинами, подчиняющимися закону нормального распределения, т. е.

$$Y'_i \in N\left(M_{Y'_i}, \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i}}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $M_{Y'_i}$ – математическое ожидание i -го измерения, P_i – вес i -го измерения, σ_0 – среднее квадратическое отклонение (стандарт) единицы веса и

$$f(Y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_i^2}{2}},$$

где $t_i = \frac{Y'_i - M_{Y_i}}{\sigma_{Y'_i}}.$

Для независимых случайных величин справедливо

$$f(Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n) = f(Y'_1) f(Y'_2) \dots f(Y'_n),$$

т. е. плотность вероятности совместного распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей вероятностей случайных величин, образующих систему.

Следовательно,

$$f(Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)} = \max. \quad (69)$$

Анализируя последнее выражение, приходим к выводу, что максимум функция будет иметь при

$$\sum_{i=1}^n t_i^2 = \min.$$

Значение t_i – нормированное значение случайной величины Y'_i , т. е. i -го результата измерения:

$$t_i = \frac{Y'_i - M_{Y_i}}{\sigma_{Y'_i}} \approx \frac{Y'_i - \tilde{M}_{Y_i}}{m_i},$$

где $\tilde{M}_{Y_i}$ и m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – оценки математических ожиданий результатов измерений и их средних квадратических ошибок, подлежащих определению из уравнивания, т. е. $\tilde{M}_{Y_i} \approx M_{Y_i}$ и $m_i \approx \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим $\tilde{M}_{Y_i} - Y'_i = \tilde{v}_i$ – оценки поправок к измерениям или

$Y'_i - \tilde{M}_{Y_i} = -\tilde{v}_i$, тогда $\sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{v}_i^2}{m_i^2} = \min$. Введем $\mu = \text{const}$ ($\mu > 0$) – ошибку

единицы веса. Тогда $\sum_{i=1}^n \frac{\mu^2 \tilde{v}_i^2}{m_i^2} = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{v}_i^2 = \min$ или $[P\tilde{v}^2] = \min$.

Полученное условие, вытекающее из принципа максимального правдоподобия результатов уравнивания, известно под названием принципа или метода наименьших квадратов (МНК). В матричной записи это условие записывается как

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V}, \quad (70)$$

т. е. является квадратичной формой, где

$$\tilde{V} = \tilde{V}_{n1} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \dots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} - \text{вектор поправок к результатам измерений;}$$

$$P = P_{nn} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & P_n \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица весов измерений;}$$

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} - \text{по определению веса.}$$

Оценки $\tilde{V}$ поправок, найденные под условием метода наименьших квадратов, называются МНК-поправками.

Следовательно, уравнивание систем геодезических измерений следует выполнять по принципу наименьших квадратов, который приводит к вероятнейшим результатам, что следует из функции правдоподобия. Убедимся в этом на простом примере.

Пусть даны результаты измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$ некоторой случайной величины X и их веса $P_1, P_2, \dots, P_n$. Найдем наиболее надежное значение $\bar{X}$ измеряемой величины по методу наименьших квадратов, т. е. под условием $[P\tilde{v}^2] = \min$.

Напишем формулу для вычисления поправки:

$$v_i = \bar{X} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Составим функцию $\Phi = [P\tilde{v}^2] = \sum_{i=1}^n P_i (\bar{X} - x_i)^2 = \min$. Найдем экстремум

функции, приравняв к нулю ее производную по искомому параметру $\bar{X}$, т. е.

$$\Phi'_{\bar{X}} = 2 \sum_{i=1}^n P_i (\bar{X} - x_i) = 0, \quad \text{откуда} \quad \sum_{i=1}^n P_i \bar{X} - \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0; \quad \bar{X} \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_i x_i \quad \text{и}$$

$$\text{окончательно получим} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i} = \frac{[Px]}{[P]} - \text{среднее весовое.}$$

Как видим, определение наиболее надежного значения $\bar{X}$ измеряемой величины по методу наименьших квадратов привело нас к весовой арифметической середине, которая, как известно из математической статистики, является несмещенной, состоятельной и эффективной, т. е. наилучшей оценкой этого значения.

Таким образом, задача уравнивания системы геодезических измерений, т. е. геодезической сети, по МНК заключается в решении системы условных уравнений связи

$$\varphi(Y' + V) = 0 \quad (71)$$

под условием $\tilde{V}^T P \tilde{V} = \min$. Это задача на нахождение экстремума функции. Для ее решения в математике существует два основных способа: способ Лагранжа с неопределенными множителями (коррелатами) для нахождения условного экстремума и способ, основанный на представлении всех измеренных величин в виде функций некоторых общих параметров, для нахождения абсолютного экстремума.

Отыскание экстремума по способу Лагранжа лежит в основе коррелятного способа уравнивания геодезических построений, а отыскание абсолютного экстремума – в основе параметрического способа. Существуют и другие способы уравнивания – комбинированные, групповые, рекуррентные и т. д. Но в основе их всех лежат параметрический или коррелятный способы, называемые классическими.

Для простоты изложения мы рассмотрели обоснование принципа наименьших квадратов для случая некоррелированных измерений. Однако условие МНК справедливо и для коррелированных измерений, когда весовая матрица P результатов измерений не диагональная, а полная (квадратная).

3.4. Структура корреляционной матрицы вектора измерений. Связь корреляционной и весовой матриц

Из теории вероятностей известно, что если имеется система случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ или n -мерный случайный вектор

$$X = X_{n1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix},$$

то обобщенным показателем точности этого вектора является корреляционная (ковариационная) матрица

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

где σ_i^2 – дисперсии отдельных случайных величин, а $K_{ij} = K_{ji}$ – ковариации или корреляционные моменты связи величин X_i и X_j , определяемые, как центральные смешанные моменты второго порядка:

$$K_{ij} = M[(X_i - M_{X_i})(X_j - M_{X_j})].$$

Результаты измерений Y' в геодезии рассматриваются как случайные величины и в рамках одной сети образуют вектор

$$Y' = Y'_{n1} = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ \dots \\ Y'_n \end{pmatrix}.$$

Его обобщенный показатель точности – *корреляционная матрица* $K_{Y'}$ –

будет иметь ту же структуру, т. е. $K_{Y'} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$, где

$$K_{ij} = M \left[(Y'_i - M_{Y'_i})(Y'_j - M_{Y'_j}) \right].$$

Умножим корреляционную матрицу $K_{Y'}$ на $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2}$ (σ_0^2 – дисперсия единицы веса):

$$K_{Y'} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & \sigma_2^2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \frac{K_{12}}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{K_{1n}}{\sigma_0^2} \\ \frac{K_{21}}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{K_{2n}}{\sigma_0^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{K_{n1}}{\sigma_0^2} & \frac{K_{n2}}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_0^2 \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix} = \sigma_0^2 Q_{Y'},$$

т. е. $K_{Y'} = \sigma_0^2 Q_{Y'}$.

Матрица $Q_{Y'} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей весовых*

коэффициентов вектора измерений. Ее элементы называются *весовыми*

коэффициентами. Диагональные элементы $Q_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{P_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

являются обратными весами отдельных измерений, а недиагональные

$Q_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_0^2} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{P_i P_j}}$ характеризуют связь между i -м и j -м измерениями.

Матрица $P = Q_{Y'}^{-1}$, обратная по отношению к матрице весовых коэффициентов, называется *весовой матрицей*.

Между корреляционной и весовой матрицами существует связь, а именно: так как $K_{Y'} = \sigma_0^2 Q_{Y'}$, а $P = Q_{Y'}^{-1}$ то $K_{Y'} = \sigma_0^2 P^{-1}$.

В геодезии оценкой σ_0^2 является значение μ^2 – дисперсия единицы веса, поэтому можно написать $K_{Y'} = \mu^2 Q_{Y'}$ и $K_{Y'} = \mu^2 P^{-1}$.

Если элементы вектора измерений Y' не коррелированы, что имеет место при независимых измерениях в геодезии, то весовая матрица P представляет собой *диагональную матрицу весов измерений*

$$P = Q_{Y'}^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & P_n \end{pmatrix} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}.$$

Матрица весовых коэффициентов в этом случае является диагональной *матрицей обратных весов результатов измерений*, т. е.

$$Q_{Y'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & & & \\ & \frac{1}{P_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \frac{1}{P_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & & & \\ & \pi_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \pi_n \end{pmatrix}.$$

3.5. Обобщенная теорема оценки точности (формула перехода ошибок)

Обобщим формулу (16) оценки точности функции на случай нескольких функций.

Если имеем m функций

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

.....

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

т. е. *вектор-функцию* $Y = F(X)$, то характеристикой ее точности будет являться корреляционная матрица K_Y , которую можно получить по формуле

$$K_Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right) K_X \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right)^T, \quad (72)$$

$$\text{где } \frac{\partial Y}{\partial X} = A_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \text{матрица частных производных}$$

вектор-функции Y .

Формула (72) выражает *обобщенную теорему оценки точности*. Ее называют *формулой перехода (переноса) ошибок*.

На главной диагонали матрицы K_Y находятся дисперсии функций, а недиагональные элементы характеризуют парную корреляционную зависимость функций. Легко понять, что формула (16) является частным случаем формулы (72), когда $m = 1$.

Итак, оценка точности функций в общем случае заключается в определении их корреляционной матрицы. Для этого *необходимо оцениваемые элементы представить в виде функций любых величин, для которых корреляционная матрица известна*. Тогда корреляционная матрица оцениваемых элементов может быть получена по формуле (72).

Поскольку любая корреляционная матрица $K = \sigma_0^2 Q$, где Q – матрица весовых коэффициентов, а σ_0^2 – априорное значение дисперсии единицы веса, то формулу (72) можно представить в виде

$$Q_Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right) Q_X \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right)^T. \quad (73)$$

В тех случаях, когда значение σ_0^2 неизвестно, можно считать, что корреляционная матрица K известна с точностью до постоянного множителя σ_0^2 .

4. ТЕОРИЯ КОРРЕЛАТНОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

4.1. Постановка задачи

Пусть в некоторой геодезической сети для определения t элементов выполнено $n > t$ независимых измерений.

Введем обозначения:

$$Y = Y_{n1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} - \text{вектор истинных значений измеряемых величин;}$$

$$Y' = Y'_{n1} = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ \dots \\ Y'_n \end{pmatrix} - \text{вектор измеренных значений этих величин;}$$

$$P = P_{nn} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & P_n \end{pmatrix} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\} - \text{диагональная матрица весов}$$

результатов измерений;

$$Q_{Y'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & & & \\ & \frac{1}{P_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{P_n} \end{pmatrix} - \text{матрица обратных весов результатов}$$

измерений;

$$M_{Y'} = \begin{pmatrix} M_{Y'_1} \\ M_{Y'_2} \\ \dots \\ M_{Y'_n} \end{pmatrix} - \text{вектор математических ожиданий измеряемых величин;}$$

$f(Y') = (f(Y'_1) \ f(Y'_2) \ \dots \ f(Y'_n))$ – плотность вероятности совместного распределения результатов измерений.

Пусть $M_{Y'_i} = Y_i$, т. е. систематические ошибки в измерениях отсутствуют.

Так как $n > t$, то можно выполнить задачу уравнивания сети.

$$\varphi(Y) = \varphi(Y' + V) = \underbrace{\varphi(Y')}_W + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + R = 0,$$

где R – остаток, которым пренебрегают.

Обозначим $\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = B$ и получим линейную систему

$$BV + W = 0. \quad (77)$$

В ней матрица коэффициентов B размера $r \times n$

$$B = B_{rn} = \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial Y_i} \right\} \bigg|_{Y=Y'} \quad (j = 1, 2, \dots, r; i = 1, 2, \dots, n)$$

есть производная исходной вектор-функции уравнений связи по измеряемым величинам, а вектор свободных членов W размера $r \times 1$

$$W = W_{r1} = \varphi(Y') = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_r \end{pmatrix} \text{ – суть вектор невязок.}$$

Неизвестными является вектор V истинных поправок к результатам измерений:

$$V = V_{n1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Линеаризованная система условных уравнений связи (77) называется системой *условных уравнений поправок*.

4.2.2. Решение системы условных уравнений поправок по методу наименьших квадратов

Система условных уравнений связи $BV + W = 0$ содержит r уравнений с n неизвестными. Такие системы имеют бесконечное множество решений. Нас интересует одно из них, при котором

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V} = \min,$$

т. е. решение по методу наименьших квадратов.

С точки зрения математики требуется найти минимум функции

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V} = \min$$

при условии

$$B\tilde{V} + W = 0, \quad (78)$$

где $\tilde{V}$ – оценки истинных поправок V к измерениям, полученные под условием метода наименьших квадратов. Оценки $\tilde{V}$ называются МНК-поправками.

Таким образом, имеем задачу на определение условного экстремума функции, которая решается по методу Лагранжа в следующем порядке.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V} - 2K^T (B\tilde{V} + W) = \min,$$

$$\text{где } K = K_{r1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_r \end{pmatrix} - \text{вектор неопределенных множителей Лагранжа,}$$

которые называются коррелатами и играют вспомогательную роль.

Необходимым условием существования экстремума является равенство нулю вектора частных производных функции Лагранжа по неизвестным $\tilde{V}$, т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{V}} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{V}} = 2\tilde{V}^T P - 2K^T B = 0$$

или $\tilde{V}^T P = K^T B$. Транспонируем последнее выражение:

$$P\tilde{V} = B^T K;$$

умножим слева обе части полученного выражения на обратную матрицу P^{-1} :

$$\underbrace{P^{-1}P}_{E}\tilde{V} = P^{-1}B^T K.$$

Получим $\tilde{V} = P^{-1}B^T K$ или

$$\tilde{V} = Q_{Y'} B^T K \quad (79)$$

– коррелятное уравнение поправок.

Коррелятное уравнение поправок позволяет вычислить поправки к результатам измерений, используя коррелаты K – множители Лагранжа. Найдем вектор коррелат, подставив (79) в (78), т. е.

$$\underbrace{BQ_{Y'}B^T}_N K + W = 0 \text{ или}$$

$$NK + W = 0. \quad (80)$$

Выражение (80) есть система нормальных уравнений коррелат; матрица ее коэффициентов $N = N_{rr} = B_{rn} Q'_{Y'} B^T$ – симметрическая, а вектор свободных

$$\text{членов } W = W_{r1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_r \end{pmatrix} \text{ суть вектор невязок условных уравнений связи.}$$

Система уравнений (80) может быть решена любым способом, если ее определитель отличен от нуля ($\det N \neq 0$). Если получить обратную матрицу N^{-1} коэффициентов системы, то можно выполнить решение системы способом обращения и вычислить коррелаты по формуле

$$K = -N^{-1}W. \quad (81)$$

Теперь получим МНК-поправки к измерениям

$$\tilde{V} = Q_{Y'} B^T K. \quad (82)$$

4.2.3. Вычисление уравненных измерений

Теперь можно получить уравненные значения измеренных величин

$$\bar{Y} = Y' + \tilde{V},$$

после подстановки которых в исходную систему (74) условных уравнений связи невязки в правой части уже не возникнут:

$$\varphi(\bar{Y}) = 0.$$

Последнее равенство используется для контроля уравнивания, т. е. для контроля правильности как вычислений, так и корректности формирования вектор-функции (74).

С использованием современных средств вычислительной техники МНК-поправки $\tilde{V}$ к результатам измерений можно получить, минуя этап определения коррелят, по формуле:

$$\tilde{V} = -Q_{Y'} B^T (B Q_{Y'} B^T)^{-1} W. \quad (83)$$

Отметим, что уравненные результаты измерений не совпадают с истинными значениями измеряемых величин, хотя $\varphi(Y) = 0$ и $\varphi(\bar{Y}) = 0$, т. е. условные уравнения связи выполняются в том и другом случае. Нужно понимать, что, выполняя уравнивание по методу наименьших квадратов, мы получаем не истинные, а вероятнейшие поправки к измерениям, и в итоге – числовую модель геодезической сети, максимально правдоподобную реальному объекту.

Мы рассмотрели теорию коррелятного способа уравнивания для случая некоррелированных измерений, но она справедлива также и для коррелированных измерений. Разница лишь в том, что весовая матрица $P = Q_{Y'}^{-1}$ результатов измерений будет не диагональной, а полной и на ее главной диагонали уже не будет весов P_i .

Отметим также, что в случае независимых равноточных измерений весовая матрица $P = E$ – единичная матрица, и коррелятное уравнение поправок имеет вид $\tilde{V} = B^T K$, а матрица коэффициентов нормальных уравнений $N = B B^T$.

Задача 14. В нивелирной сети (рис. 8) измерены превышения. Составить условные уравнения связи и получить условные уравнения поправок.

Решение

1. Сформируем вектор Y измеряемых величин, т. е. вектор превышений h :

$$Y_{41} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} - \text{вектор истинных значений превышений.}$$

2. Подсчитаем число независимых условных уравнений связи, возникающих в данной сети. Оно равно числу $r = n - t$ избыточных измерений.

Число всех выполненных измерений $n = 4$, а число необходимых измерений $t = 2$, так как число определяемых пунктов в сети равно двум.

Следовательно, в сети возникает $r = n - t = 2$ независимых условных уравнения вида «сумма превышений в замкнутом ходе равна нулю» или «сумма превышений равна разности отметок конечной и начальной точек хода».

Выберем замкнутый ход I и разомкнутый ход II и наметим стрелками на схеме сети направление суммирования превышений в них.

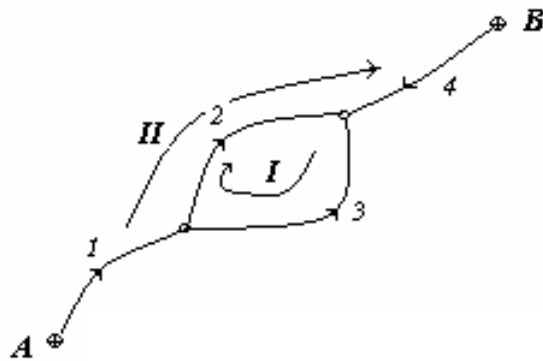


Рис. 8. Схема нивелирной сети

3. Составим систему условных уравнений связи $\varphi(Y) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} h_2 - h_3 &= 0 \\ (h_1 + h_2 - h_4) - (H_B - H_A) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

4. Получим систему условных уравнений поправок $BV + W = 0$.

Матрица коэффициентов системы $B = B_{rn} = \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_j} \right\} \bigg|_{Y=Y'}$, т. е.

$$B_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов $W = W_{r1} = \varphi(Y')$ – невязки условных уравнений, т. е.

$$w_1 = h'_2 - h'_3;$$

$$w_2 = (h'_1 + h'_2 - h'_4) - (H_B - H_A).$$

Здесь h' – измеренные значения превышений.

Итак, искомая система условных уравнений поправок имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} v_2 - v_3 + w_1 &= 0 \\ v_1 + v_2 - v_4 + w_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – истинные поправки к результатам измерений, составляющие вектор

$$V = V_{n1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

4.3. Оценка точности по материалам уравнивания

После уравнивания сети необходимо оценить точность выполненных измерений и точность уравненных элементов, в первую очередь тех, определение которых являлось конечной целью геодезических измерений.

Рассмотрим решение этих вопросов.

4.3.1. Оценка точности результатов измерений

Будем искать ее в виде оценки $\tilde{\sigma} = \mu$ среднего квадратического отклонения единицы веса.

Исследуем квадратичную форму

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V}. \quad (84)$$

Поскольку $\tilde{V} = Q_{Y'} B^T K$ и $K = -N^{-1}W$, то

$$\tilde{V}^T P \tilde{V} = W^T N^{-1} W. \quad (85)$$

Найдем след Sp левой и правой частей:

$$\tilde{V}^T P \tilde{V} = Sp(\tilde{V}^T P \tilde{V}) = Sp(W^T N^{-1} W).$$

Используя свойство следа $Sp(AB) = Sp(BA)$, можем написать

$$\tilde{V}^T P \tilde{V} = Sp(W W^T N).$$

Найдем математическое ожидание квадратичной формы

$$M(\tilde{V}^T P \tilde{V}) = Sp[M(W W^T) N^{-1}] = Sp[K_W N^{-1}], \quad (86)$$

так как $K_W = M[(W - M_W)(W - M_W)^T]$ – по определению корреляционной матрицы, а $M_W = 0$, так как $W = \varphi(Y')$; $M_W = \varphi(M_{Y'}) = \varphi(Y) = 0$ ($M_{Y'} = Y$ – из условия отсутствия систематических ошибок).

С другой стороны,

$$K_W = \sigma^2 Q_W.$$

Найдем Q_W – матрицу весовых коэффициентов невязок.

Напишем формулу вычисления невязок $W = \varphi(Y')$, и по обобщенной теореме оценки точности можно получить

$$Q_W = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y'} \right) Q_{Y'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y'} \right)^T.$$

Но $\frac{\partial \varphi}{\partial Y'} = B$, где B – матрица коэффициентов условных уравнений

поправок. Поэтому $Q_W = B Q_{Y'} B^T = N$, т. е. матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелят N является матрицей весовых коэффициентов невязок условных уравнений. Следовательно,

$$K_W = \sigma^2 N.$$

Тогда в (86)

$$M(\tilde{V}^T P \tilde{V}) = Sp[K_W N^{-1}] = \sigma^2 Sp(N N^{-1}) = \sigma^2 Sp(E)_{r \times r} = \sigma^2 r$$

или

$$\sigma^2 = \frac{M(\tilde{V}^T P \tilde{V})}{r}.$$

Таким образом, в качестве несмещенной оценки $\tilde{\sigma}$ среднего квадратического отклонения единицы веса σ естественно использовать следующие формулы:

$$\tilde{\sigma} = \mu = \sqrt{\frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{r}}, \text{ если измерения коррелированы и весовая матрица}$$

$P = Q_Y^{-1}$ полная;

$$\tilde{\sigma} = \mu = \sqrt{\frac{[P \tilde{V}^2]}{r}}, \text{ если измерения не коррелированы и неравноточны и}$$

весовая матрица $P = \{P_1 P_2 \dots P_n\}$ диагональная;

$$\tilde{\sigma} = \mu = \sqrt{\frac{[\tilde{V}^2]}{r}}, \text{ если измерения не коррелированы и равноточны и весовая}$$

матрица $P = E$ единичная.

Напомним, что r – число избыточных измерений.

4.3.2. Оценка точности уравненных элементов сети

В коррелятном способе для оценки точности любого интересующего нас уравненного элемента сети $\bar{F}$, как измеряемого, так и нет, нужно составлять *весовую функцию*. Это значит, что надо написать *конкретную формулу* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Y)$ выражающую данный оцениваемый элемент $\mathcal{F}$ *через измеряемые величины* или формулу $\bar{F} = \mathcal{F}(Y)$, позволяющую вычислить этот элемент *через уравненные значения* измеряемых величин (в обоих случаях естественно это будет одно и то же выражение).

Задача 15. В нивелирной сети (рис. 9) составить весовые функции для оценки точности превышений h_4 и h_6 и отметок реперов II и III.

Решение

Вектор $\bar{Y}$ уравненных измеряемых величин (превышений) имеет вид:

$$\bar{Y} = \bar{h}_{81} = \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \dots \\ \bar{h}_8 \end{pmatrix}$$

$$1. \bar{F}_1 = \bar{h}_4.$$

$$2. \bar{F}_2 = \bar{h}_6.$$

$$3. \bar{F}_3 = H_{II} = H_A + \bar{h}_1 + \bar{h}_2.$$

$$4. \bar{F}_4 = H_{III} = H_B + \bar{h}_8.$$

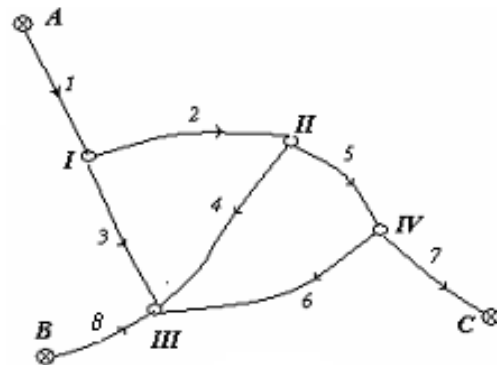


Рис. 9. Схема нивелирной сети

Если оценке точности после уравнивания подлежат S элементов, то их весовые функции объединяются в вектор-функцию $\bar{F}_{S1}$:

$$\bar{F}_{S1} = F_{S1}(\bar{Y}_{n1}) = \begin{pmatrix} F_1(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n) \\ F_2(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n) \\ \\ F_S(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n) \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Так в задаче 15 имеем вектор-функцию оцениваемых функций в виде

$$\bar{F}_{41} = \mathcal{F}_{41}(\bar{h}_{81}) = \begin{pmatrix} \bar{h}_4 \\ \bar{h}_6 \\ H_A + \bar{h}_1 + \bar{h}_2 \\ H_B + \bar{h}_8 \end{pmatrix}.$$

После уравнивания *все элементы сети становятся коррелированными*. Поэтому под оценкой точности весовых функций $\bar{F}$, составленных для требуемых элементов сети, в общем случае будем понимать нахождение их корреляционной матрицы

$$K_{\bar{F}} = \mu^2 Q_{\bar{F}},$$

которая полностью характеризует точность и взаимную парную корреляционную зависимость этих элементов. Задача сводится к определению матрицы $Q_{\bar{F}}$ весовых коэффициентов функций, так как

значение μ будет найдено по формуле $\mu = \sqrt{\frac{\tilde{\mathbf{V}}^T P \tilde{\mathbf{V}}}{r}}$.

Для отыскания матрицы $Q_{\bar{F}}$ нужно выразить все элементы, подлежащие оценке точности, через элементы с известной корреляционной матрицей, чтобы можно было применить обобщенную теорему оценки точности (формулу перехода ошибок). А точнее, их нужно выразить через результаты измерений Y' , для которых корреляционная матрица $Q_{Y'}$ известна с точностью до постоянного множителя σ_0^2 из постановки задачи уравнивания.

Итак, пусть оценке точности после уравнивания подлежат S элементов, весовые функции которых объединены в вектор-функцию

$$\overline{F} = F(\overline{Y}).$$

В общем случае эти функции нелинейные и подлежат линеаризации разложением в ряд Тейлора при $\bar{Y} = Y' + \tilde{V}$, т. е.

$$\bar{F} = F(\bar{Y}) = F(Y' + \tilde{V}) = F(Y') + \frac{\partial F}{\partial Y'} \tilde{V} + R = F(Y') + F\tilde{V} = F^\circ + F\tilde{V},$$

где $F(Y') = F^\circ$ – не уравненные значения функций;

$$F = F_{Sn} = \frac{\partial F}{\partial Y'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y'_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Y'_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Y'_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial Y'_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial Y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_S}{\partial Y'_1} & \frac{\partial F_S}{\partial Y'_2} & \cdots & \frac{\partial F_S}{\partial Y'_n} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матрица} \quad \text{частных}$$

производных оцениваемых функций по измеренным величинам (производные исходной вектор-функции);

R – остаток, которым пренебрегаем.

Таким образом, получен линейный эквивалент весовых функций в виде

$$\bar{F} = F^\circ + F\tilde{V}. \quad (88)$$

Задача 16. Сформировать матрицу F частных производных весовых функций по условию задачи 15.

Решение

$$n = 8; S = 4; F = \left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Y}} \right|_{\bar{Y}=Y'}.$$

$$F = F_{48} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее возьмем за основу линейную вектор-функцию

$$\bar{F} = F(Y') + F\tilde{V}$$

и представим правую часть в виде *функций только измерений Y'* :

$$\bar{F} = F(Y') + FV = F(Y') + FQ_{Y'}B^TK = F(Y') - FQ_{Y'}B^TN^{-1}W$$

или

$$\bar{F} = F(Y') - FQ_{Y'}B^TN^{-1}W\varphi(Y').$$

Теперь на основании обобщенной теоремы оценки точности можно написать:

$$Q_{\bar{F}} = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)_{Y'} Q_{Y'} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)_{Y'}^T. \quad (89)$$

Найдем матрицу $\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right|_{Y'}$:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial Y'} = \frac{\partial F}{\partial Y'} - FQ_{Y'}B^TN^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial Y'} = F - FQ_{Y'}B^TN^{-1}B.$$

Следовательно,

$$Q_{\bar{F}} = (F - FQ_{Y'}B^T N^{-1}B)Q_{Y'}(F - FQ_{Y'}B^T N^{-1}B)^T.$$

После преобразования получим

$$Q_{\bar{F}} = FQ_{Y'}F^T - \underbrace{FQ_{Y'}B^T N^{-1}BQ_{Y'}}_{Q_{\tilde{V}}}F^T = Q_{F'} - Q_{F\tilde{V}}, \quad (90)$$

где $Q_{F'} = FQ_{Y'}F^T$ – матрица весовых коэффициентов *неуравненных* весовых функций;

$Q_{\tilde{V}} = Q_{Y'}B^T N^{-1}BQ_{Y'}$ – матрица весовых коэффициентов МНК-поправок к измерениям;

$Q_{F\tilde{V}} = FQ_{\tilde{V}}F^T$ – матрица весовых коэффициентов поправок к оцениваемым функциям.

С использованием современных средств вычислительной техники матрицу $Q_{\bar{F}}$ можно получить, минуя этап получения нормальных уравнений коррелат, по формуле:

$$Q_{\bar{F}} = FQ_{Y'}F^T - FQ_{Y'}B^T (BQ_{Y'}B^T)^{-1} BQ_{Y'}F^T. \quad (91)$$

Таким образом, задача определения матрицы $Q_{\bar{F}}$ весовых коэффициентов оцениваемых функций решена и можно получить корреляционную матрицу

$$K_{\bar{F}} = \mu^2 Q_{\bar{F}}, \quad (92)$$

на главной диагонали которой находятся дисперсии оцениваемых функций.

До недавнего времени в геодезической практике не выполнялась сплошная оценка точности всех элементов. Обычно ограничивались определением только средней квадратической ошибки элемента, расположенного в «слабом месте» сети, и считали, что все другие элементы получены с не меньшей точностью. Слабое место сети определялось из анализа ее структуры. Как правило (но не всегда), это место, наиболее удаленное от исходных данных, причем «слабых мест» в сети может быть несколько. В настоящее время сплошная оценка точности стала возможной, благодаря появлению современных компьютеров.

4.3.3. Частные случаи

1. Оценка точности одной весовой функции.

Если для оценки точности после уравнивания намечен только один элемент, т. е. функция

$$\bar{F} = \bar{F}_{1 \times 1} = F(\bar{Y}) = F(\bar{Y}_1, \bar{Y}, ..., \bar{Y}_n),$$

то ее линейный эквивалент запишем в виде

$$\bar{F} = f^\circ + f\tilde{V},$$

где $f^\circ = F(Y')$ – неуравненное значение функции;

$$f = \left(\frac{\partial F}{\partial Y'_1} \frac{\partial F}{\partial Y'_2} \dots \frac{\partial F}{\partial Y'_n} \right) \Big|_{Y'} - \text{вектор-строка частных производных функции по}$$

измеренным величинам.

Для одной функции матрица весовых коэффициентов $Q_{\bar{F}}$ имеет размер 1×1 , т. е. является числом, и представляет обратный вес этой функции:

$$Q_{\bar{F}} = \frac{1}{P_{\bar{F}}} = f \cdot Q_{Y'} \cdot f^T - f \cdot Q_{Y'} \cdot B^T \cdot N^{-1} \cdot B \cdot Q_{Y'} \cdot f^T$$

или

$$\frac{1}{P_{\bar{F}}} = f \cdot Q_{Y'} \cdot f^T - f \cdot Q_{Y'} \cdot B^T \cdot (B Q_{Y'} B^T)^{-1} \cdot B \cdot Q_{Y'} \cdot f^T. \quad (93)$$

Средняя квадратическая ошибка функции

$$m_{\bar{F}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\bar{F}}}}.$$

Иногда вводят вектор $q = -N^{-1} B Q_{Y'} f^T$ – вектор так называемых переходных коэффициентов. Легко понять, что этот вектор получается из решения системы нормальных уравнений

$$Nq + B Q_{Y'} f = 0, \quad (94)$$

называемых переходными нормальными уравнениями.

$$\text{Тогда } \frac{1}{P_{\bar{F}}} = f Q_{Y'} f^T + f Q_{Y'} B^T q.$$

2. Оценка точности уравненных результатов измерений.

Если оценке точности подлежат уравненные результаты измерений $\bar{Y}$, то в этом случае весовые функции имеют линейный вид

$$\bar{F} = \bar{Y} = Y' + \tilde{V}. \quad (95)$$

$$\text{Тогда } \bar{F} = \bar{Y} = Y' + \tilde{V} = Y' - Q_{Y'} B^T N^{-1} \varphi(Y').$$

В соответствии с обобщенной теоремой оценки точности напомним

$$Q_{\bar{Y}} = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Y'} \right) Q_{Y'} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Y'} \right)^T. \quad (96)$$

Найдем

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial Y'} = \frac{\partial Y'}{\partial Y'} - Q_{Y'} B^T N^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial Y'} = E - Q_{Y'} B^T N^{-1} B,$$

тогда

$$Q_{\bar{Y}} = (E - Q_{Y'} B^T N^{-1} B) Q_{Y'} (E - Q_{Y'} B^T N^{-1} B)^T,$$

$$Q_{\bar{Y}} = Q_{Y'} - Q_{Y'} B^T N^{-1} B Q_{Y'} = Q_{Y'} - Q_{\tilde{V}},$$

или

$$Q_{\bar{Y}} = Q_{Y'} - Q_{Y'} B^T (B Q_{Y'} B^T)^{-1} B Q_{Y'}. \quad (97)$$

Корреляционная матрица вектора уравненных измерений

$$K_{\bar{Y}} = \mu Q_{\bar{Y}}. \quad (98)$$

Как видим, формулы оценки точности весовых функций (91), (93), (97) в коррелятном способе уравнивания являются громоздкими. Но на современном уровне развития вычислительной техники и существования большого количества прикладных пакетов, реализующих различные способы и методы вычислений, перемножение цепочки матриц не представляет никаких затруднений.

4.3.4. О повышении точности после уравнивания

Процедура уравнивания геодезической сети дает эффект повышения точности всех определяемых элементов сети. Убедимся в этом. Запишем выражения, позволяющие получать матрицы $Q_{\bar{Y}}$ и $Q_{\bar{F}}$, т. е. матрицы весовых коэффициентов уравненных результатов измерений и их функций, соответственно:

$$Q_{\bar{Y}} = Q_{Y'} - Q_{Y'} B^T N^{-1} B Q_{Y'};$$

$$Q_{\bar{F}} = F Q_{Y'} F^T - F Q_{Y'} B^T N^{-1} B Q_{Y'} F^T.$$

Найдем матрицу $Q_{\tilde{V}}$ весовых коэффициентов МНК-поправок $\tilde{V}$ к результатам измерений с использованием обобщенной теоремы оценки точности, согласно которой

$$\tilde{V} = Q_{Y'} B^T K = -Q_{Y'} B^T N^{-1} W,$$

тогда

$$Q_{\tilde{V}} = \left(-Q_{Y'} B^T N^{-1} \right) \underbrace{Q_W}_{\tilde{N}} \left(-Q_{Y'} B^T N^{-1} \right)^T = Q_{Y'} B^T N^{-1} \underbrace{N N^{-1}}_E B Q_{Y'} = Q_{Y'} B^T N^{-1} B Q_{Y'}.$$

Отсюда

$$Q_{\bar{Y}} = Q_{Y'} - Q_{\tilde{V}};$$

$$Q_{\bar{F}} = F Q_{Y'} F^T - F Q_{\tilde{V}} F^T.$$

Диагональные элементы всех матриц Q представляют собой обратные веса:

$(Q_{\bar{Y}})_{ii}$ – обратный вес i -го уравненного измерения;

$(Q_{Y'})_{ii}$ – обратный вес результата i -го измерения;

$(Q_{\tilde{V}})_{ii}$ – обратный вес поправки в i -е измерение;

$(Q_{\bar{F}})_{kk}$ – обратный вес k -ой весовой функции после уравнивания;

$(F Q_{Y'} F^T)_{kk} = (Q_{F'})_{kk}$ – обратный вес k -ой весовой функции до уравнивания;

$(F Q_{\tilde{V}} F^T)_{kk} = (Q_{F\tilde{V}})_{kk}$ – обратный вес суммарной поправки в k -ю весовую функцию ($i = 1, 2, \dots, n$, где n – число измерений; $k = 1, 2, \dots, S$, где S – число весовых функций).

Все эти величины – неотрицательные по определению веса, из чего следует, что обратные веса всех элементов сети после ее уравнивания уменьшаются, т. е. *веса повышаются*. Следовательно, процесс уравнивания сети по МНК приводит к повышению точности всех ее элементов.

4.3.5. Виды условных уравнений в нивелирных сетях

В нивелирных сетях возникают условные уравнения *ходов* и *полигонов*.

Условное уравнение *хода* выражает следующее теоретическое требование: *суммарное превышение h_i , измеренное между двумя твердыми точками, должно быть равно разности твердых отметок конечной и начальной точек хода*

$$(h_i - (H_{\text{кон.}} - H_{\text{нач.}}) = 0).$$

Так, условное уравнение хода, состоящего из *одного* превышения h_i , измеренного между твердыми путями А и В на рис. 10, имеет вид:

$$h_i - (H_B - H_A) = 0.$$

Условное уравнение хода, состоящего из n превышений, измеренных между твердыми путями А и В на рис. 11, имеет вид: $\sum_{i=1}^n h_i - (H_B - H_A) = 0$. Стрелой на рисунке указано направление хода – от начала к концу.

При вычислении суммы превышений по ходу учитывается направление, в котором измерялось каждое превышение и направление всего хода.

Например, для хода на рис. 12, условное уравнение имеет вид:

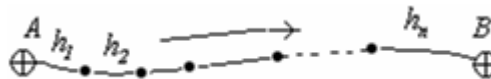


Рис. 10. Нивелирный ход из одного превышения

Рис. 11. Нивелирный ход из n превышений

$$(h_1 + h_2 - h_3 - h_4 + h_5 + h_6) - (H_B - H_A) = 0.$$

Условное уравнение *полигона* составляется для замкнутых ходов и выражает теоретическое требование *равенства нулю суммы превышений, образующих этот полигон*. При этом стрелой произвольно указывается направление суммирования превышений внутри полигона – «по» или «против» часовой стрелки – и учитывается направление, в котором измерялось каждое превышение.

Например, на рис. 13, условное уравнение полигона имеет вид:

$$h_1 - h_2 - h_3 + h_4 - h_5 = 0.$$

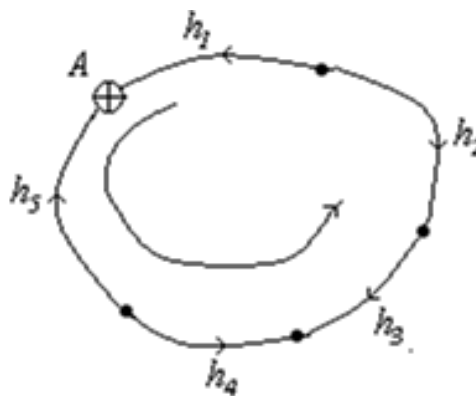


Рис. 13. Нивелирный полигон

4.4. Блок-схема коррелятного способа уравнивания и оценки точности

Задача уравнивания геодезической сети неразрывно связана с задачей оценки точности по материалам уравнивания. И если в методическом плане эти две задачи можно рассматривать по отдельности, то на практике они сливаются в одну общую задачу.

Порядок уравнивания и оценки точности геодезической сети коррелятным способом условно можно представить в виде следующей блок-схемы.

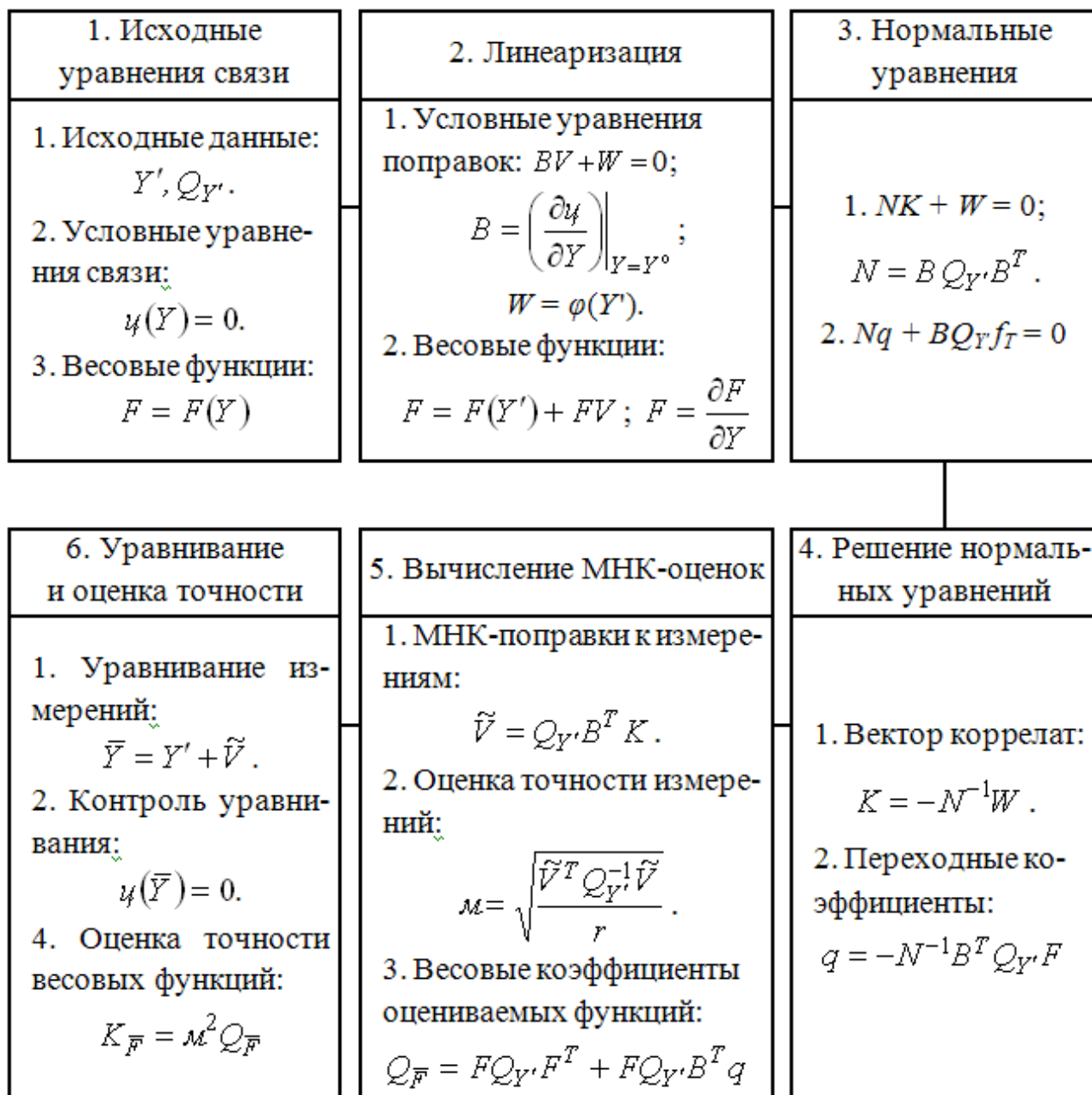


Рис. 14. Блок-схема коррелятного способа уравнивания и оценки точности

В первом блоке фиксируют число n выполненных измерений, число t необходимых измерений и устанавливают количество $r = n - t$ избыточных измерений, а также систематизируют измерительную информацию, формируют вектор $Y' = Y'_{n1}$ результатов измерений и матрицу его весовых коэффициентов $Q_{Y'} = (Q_{Y'})_{nn}$.

Здесь же составляют исходную систему условных уравнений связи $\varphi(Y)=0$, намечают элементы, для которых следует выполнить оценку точности после уравнивания, и составляют для них весовые функции.

Во втором блоке выполняют линеаризацию исходной системы уравнений связи и весовых функций, вычисляют невязки условных уравнений.

В третьем блоке получают нормальные уравнения коррелат и для каждой весовой функции – свободные члены переходных нормальных уравнений.

В четвертом блоке выполняют решение нормальных уравнений коррелат и переходных нормальных уравнений.

В пятом блоке вычисляют МНК-поправки $\tilde{V}$ к результатам измерений, среднюю квадратическую ошибку μ единицы веса, характеризующую точность измерений, а также получают матрицу $Q_{\bar{F}}$ весовых коэффициентов оцениваемых функций.

В шестом блоке вычисляют уравниваемые значения $\bar{Y}$ измерений и выполняют оценку точности весовых функций, вычисляя их корреляционную матрицу $K_{\bar{F}}$ или средние квадратические ошибки $m_{\bar{F}} = \mu \sqrt{(Q_{\bar{F}})_{kk}}$, $k = 1, 2, \dots$. Здесь же выполняют контроль уравнивания, подставляя в исходную систему условных уравнений связи уравниваемые измерения: невязки должны исчезнуть, т.е. обязано выполняться условие $\varphi(\bar{Y}) = 0$.

5. ТЕОРИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПОСОБА УРАВНИВАНИЯ

5.1. Постановка задачи

Пусть для определения t элементов в геодезической сети выполнено $n > t$ независимых неравноточных измерений. Так как число избыточных измерений $r = n - t > 0$, то можно выполнить задачу уравнивания сети.

Требуется выполнить уравнивание сети параметрическим способом.

Введем вектор истинных значений измеряемых величин

$$Y = Y_{n1} = (Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n)^T.$$

Сформируем *вектор результатов измерений* $Y' = Y'_{n1} = (Y'_1 \ Y'_2 \ \dots \ Y'_n)^T$ и *весовую матрицу* измеренных величин, представляющую собой диагональную матрицу весов:

$$P = Q_{Y'}^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ \dots & \dots & \dots \\ & & P_n \end{pmatrix} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}.$$

Выберем t *линейно независимых параметров уравнивания*, которые связывают истинные значения измеряемых величин в систему косвенно, и объединим их истинные значения в вектор X :

$$X = X_{t1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_t \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Выразим все измеряемые величины в виде функций выбранных параметров и получим *исходную систему параметрических уравнений связи*:

$$Y = Y_{n1} = Y_{n1}(Y_{t1}). \quad (100)$$

В качестве параметров уравнивания в геодезии чаще всего принимаются элементы, являющиеся конечной целью геодезических измерений, т. е. в высотных сетях это *отметки определяемых пунктов*, а в плановых сетях – *координаты определяемых точек*. Но в принципе в качестве параметров могут быть приняты *любые t независимых элементов* сети, функциями которых будут измеренные величины.

5.2. Принципиальное решение задачи

Исходная система параметрических уравнений связи в общем случае нелинейная и ее нужно привести к линейному виду разложением в ряд Тейлора. Для этого необходимо представить вектор X в виде суммы векторов

$$X = X^\circ + x,$$

где X° – вектор приближенных значений параметров, вычисляемый через измеренные значения от ближайших твердых пунктов, т. е. $X^\circ = X(Y')$;

x – вектор поправок к приближенным значениям параметров, $|x| \ll |X^\circ|$.

Тогда

$$Y = Y(X) = Y(X^\circ + x) = Y(X^\circ) + \frac{\partial Y}{\partial X} x + R,$$

где R – остаток, которым пренебрегаем.

В левой части представим $Y = Y' + V$, тогда получим

$$Y' + V = Y(X^\circ) + \frac{\partial Y}{\partial X} x$$

или

$$Ax + L = V \quad (101)$$

– линейную систему, которая называется *системой параметрических уравнений поправок*.

В ней $A = A_{nt} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right)$, $\begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, t \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов,

представляющая собой производную от исходной вектор-функции параметрических уравнений связи по параметрам, т. е.

$$A_{nt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_t} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_2}{\partial X_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_n}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial X_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & t_n \end{pmatrix};$$

$$x = x_{t1} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_t \end{pmatrix} \text{ – вектор неизвестных – истинных поправок к}$$

приближенным значениям параметров;

$$L = L_{n1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \text{ – вектор свободных членов уравнений поправок, его}$$

элементы представляют собой разность между приближенными значениями результатов измерений, т. е. вычисленными через приближенные значения параметров, и их измеренными значениями. Это можно записать в виде следующего выражения: $L = Y(X^\circ) - Y'$;

$$V = V_{n1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} - \text{вектор истинных поправок к результатам измерений.}$$

В линейной системе параметрических уравнений поправок $A_{nt}x_{t1} + L_{n1} = V_{n1}$ число неизвестных (V и x), равное $n + t$, больше числа уравнений, равного n . Поэтому для ее однозначного решения необходимо дополнительное условие, которым является условие принципа наименьших квадратов поправок к результатам измерений, т. е.

$$\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V} = \min, \quad (102)$$

где $\tilde{V}$ – вектор МНК-поправок к измерениям.

Задача уравнивания сводится к нахождению экстремума функции $\Phi = \tilde{V}^T P \tilde{V} = \min$ при условии

$$\tilde{V} = A\tilde{x} + L,$$

$$\text{где } \tilde{V} = \tilde{V}_{n1} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \dots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \tilde{x}_{t1} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_t \end{pmatrix} - \text{вектор МНК-поправок к}$$

приближенным значениям параметров.

Условие существования экстремума $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{V}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} = 2\tilde{V}^T P A = 0$$

или

$$A^T P \tilde{V} = 0 - \text{лемма Гаусса.}$$

$$\text{Далее } A^T P \tilde{V} = A^T P (A\tilde{x} + L) = 0 \text{ или } \overbrace{A^T P A}^R \tilde{x} + \overbrace{A^T P L}^G = 0, \text{ т. е.} \\ R\tilde{x} + G = 0. \quad (103)$$

Получили систему t нормальных уравнений с t неизвестными. В ней: $R = R_{tt} = A_{nt}^T P_{nn} A_{nt}$ – симметрическая матрица коэффициентов нормальных уравнений, а $G_{n1} = A_{nt}^T P_{nn} L_{n1}$ – вектор свободных членов нормальных уравнений.

Система нормальных уравнений может быть решена любым способом, если ее определитель отличен от нуля ($\det R \neq 0$). Найдем, например, обратную матрицу R^{-1} и умножим на нее систему нормальных уравнений слева, т. е.

$$R^{-1}(R\tilde{x} + G) = 0.$$

Получим решение системы в виде

$$\tilde{x} = -R^{-1}G \quad (104)$$

и найдем вектор $\tilde{x}$ поправок к приближенным значениям параметров, а затем вычислим уравненные значения параметров:

$$\bar{X}_j = X_j^0 + \tilde{x}_j \quad (j = 1, 2, \dots, t).$$

И, наконец, определим МНК-поправки к результатам измерений

$$\tilde{V} = A\tilde{x} + L \quad (105)$$

и сами уравненные измерения

$$\bar{Y} = Y' + \tilde{V}. \quad (106)$$

Заметим, что с использованием современных средств вычислительной техники МНК-поправки $\tilde{x}$ к параметрам и $\tilde{V}$ к результатам измерений можно получить сразу по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= -(A^T P A)^{-1} A^T P L = D L \\ \tilde{V} &= A\tilde{x} + L = -A R^{-1} A^T P L + L = (E - A(A^T P A)^{-1} A^T P) L = M L \end{aligned} \right\}, \quad (107)$$

где $D = -(A^T P A)^{-1} A^T P$ – матрица преобразования свободных членов параметрических уравнений в поправки к приближенным значениям параметров;

$M = E - A(A^T P A)^{-1} A^T P$ – матрица преобразования свободных членов параметрических уравнений в поправки к измерениям.

Уравненные параметры $\bar{X}$ можно использовать для контроля уравнивания, вычислив $\bar{Y} = Y(\bar{X})$. Должно выполняться равенство

$$Y' + \tilde{V} = Y(\bar{X}). \quad (108)$$

Таким образом, задача уравнивания решена. После завершения процедуры уравнивания все элементы геодезической сети называются *уравненными*.

Однако следует помнить, что пока не выполнена оценка точности, само по себе уравнивание не имеет должной практической ценности.

Отметим, что в случае равноточных измерений, т. е. когда $Q_{Y'} = P = E$, будем иметь $R = A^T A$ и $G = A^T L$.

5.3. Оценка точности в параметрическом способе уравнивания

Оценке точности после уравнивания подлежат результаты измерений, уравненные параметры и другие элементы геодезической сети, вычисляемые как функции уравненных параметров. Рассмотрим подробнее решение этих задач.

1. Оценка точности результатов измерений.

Оценка точности результатов измерений заключается в вычислении *средней квадратической ошибки μ единицы веса*, как общего показателя точности неравноточных измерений. Поскольку параметрический способ уравнивания решает ту же задачу устранения невязок, что и уравнивание коррелятным способом, то ошибку единицы веса можно вычислить по общей формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{r}} = \sqrt{\frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{n-t}}. \quad (109)$$

При этом в случае *коррелированных* измерений весовая матрица $P = Q_Y^{-1}$ – полная, для *некоррелированных* измерений $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ – диагональная, и для *равноточных* измерений $P = E$ – единичная.

2. Оценка точности уравненных параметров сети.

Оценку точности уравненных параметров $\bar{X}$ сети будем искать в виде корреляционной матрицы

$$K_{\bar{X}} = \mu^2 Q_{\bar{X}}, \quad (110)$$

на главной диагонали которой находятся квадраты средних квадратических ошибок (дисперсии) уравненных параметров.

Задача сводится к нахождению матрицы $Q_{\bar{X}}$ – матрицы весовых коэффициентов уравненных параметров, так как множитель μ^2 нам уже известен. Найдем матрицу $Q_{\bar{X}}$ с использованием обобщенной теоремы оценки точности (формулы перехода ошибок), согласно которой, если дана вектор-функция $Y = F(X)$ и известна корреляционная матрица K_X ее аргументов, то корреляционная матрица K_Y вектор-функции может быть получена по формуле

$$K_Y = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right) K_X \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^T.$$

Поскольку в левой и правой частях $K = \mu^2 Q$, то справедливо равенство

$$Q_Y = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right) Q_X \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^T. \quad (111)$$

Таким образом, нужно представить уравненные параметры в виде функций тех величин, для которых корреляционная матрица известна, и применить обобщенную теорему оценки точности. В нашем случае $\bar{X} = X^\circ + \tilde{x}$, где $X^\circ = \text{const}$ – точные значения. Поэтому $K_{\bar{X}} = K_{\tilde{x}}$ и $Q_{\bar{X}} = Q_{\tilde{x}}$. Выразим $\tilde{x}$ через результаты измерений Y' , так как их матрица весовых коэффициентов $Q_{Y'} = P^{-1}$ нам известна из условий задачи уравнивания (см. разд. 5.1):

$$\tilde{x} = -R^{-1}G = -R^{-1}A^T P L = -R^{-1}A^T P [Y(X^\circ) - Y'].$$

И далее:

$$\tilde{x} = -R^{-1}A^T P Y(X^\circ) + R^{-1}A^T P Y'.$$

Теперь найдем $Q_{\tilde{x}} = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial Y'} \right) Q_{Y'} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial Y'} \right)^T$:

$$Q_{\tilde{x}} = (R^{-1} A^T P) Q_{Y'} (R^{-1} A^T P)^T = R^{-1} \underbrace{A^T \overbrace{P Q_{Y'}}^E P A R^{-1}}_R = \underbrace{R^{-1} R R^{-1}}_E = R^{-1},$$

т. е.

$$Q_{\bar{X}} = R^{-1} \quad (112)$$

и

$$K_{\bar{X}} = \mu^2 R^{-1}. \quad (113)$$

Следовательно, обратная матрица R^{-1} коэффициентов нормальных уравнений является матрицей весовых коэффициентов уравненных параметров сети.

Поскольку в качестве параметров уравнивания геодезической сети принимаются, как правило, элементы, являющиеся конечной целью измерений, то ясно, что оценка точности этих элементов сводится к обращению матрицы $R = A^T P A$ коэффициентов нормальных параметрических уравнений и вычислению по материалам уравнивания значения μ – ошибки единицы веса.

Корреляционная матрица $K_{\bar{X}}$ дает относительно полную информацию о точности параметров сети после ее уравнивания, так как на ее главной диагонали находятся квадраты средних квадратических ошибок $m_{\bar{X}j}^2$, а недиагональные элементы характеризуют парную корреляционную зависимость между ними.

На практике обычно ограничиваются вычислением средних квадратических ошибок уравненных параметров по известной формуле:

$$m_{\bar{X}j} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\bar{X}j}}} = \mu \sqrt{(Q_{\bar{X}})_{jj}} = \mu \sqrt{(R^{-1})_{jj}} \quad (j = 1, 2, \dots, t), \quad (114)$$

где Q_{jj} – диагональные элементы обратной матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

3. Оценка точности функций от уравненных параметров.

Другие элементы сети, подлежащие оценке точности, как измеряемые, так и нет, должны быть представлены в виде функций уравненных параметров, так как для них корреляционная матрица нам уже известна. Это значит, что для каждого оцениваемого элемента должна быть написана конкретная формула, позволяющая вычислить его значение через параметры. Функции, выражающие оцениваемые элементы через параметры уравнивания называются весовыми функциями.

Пусть оценке точности после уравнивания подлежат S элементов и для каждого из них составлена весовая функция вида $f = f(X_1, X_2, \dots, X_t)$, где X – истинные значения параметров. Объединим эти весовые функции в вектор-функцию

$$\Phi = \Phi_{S1} = \Phi_{S1}(X_{t1}) = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_t) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_t) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_S(X_1, X_2, \dots, X_t) \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Вид весовых функций в общем случае нелинейный, поэтому выполним их линеаризацию разложением в ряд Тейлора при $X = X^\circ + x$, где $|x| \ll |X^\circ|$, т. е.

$$\Phi = \Phi(X) = \Phi(X^\circ + x) = \Phi(X^\circ) + \frac{\partial \Phi}{\partial X} x + R = F^\circ + Fx$$

или

$$\Phi = F^\circ + Fx, \quad (116)$$

где R – остаток, которым пренебрегаем. Заменяя истинные значения x поправок к параметрам МНК-поправками $\tilde{x}$, можно записать линеаризованные весовые функции в виде:

$$\bar{F} = F^\circ + F\tilde{x}, \quad (117)$$

где $\bar{F} = \Phi(\bar{X})$ – уравненные значения функций (вычисляемые через уравненные параметры $\bar{X} = X^\circ + \tilde{x}$);

$F^\circ = \Phi(X^\circ)$ – главный член разложения, не влияющий на оценку точности;

$$F = F_{St} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{X=X^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_S}{\partial X_1} & \frac{\partial f_S}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_S}{\partial X_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1t} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{S1} & f_{S2} & \dots & f_{St} \end{pmatrix} -$$

матрица частных производных исходной вектор-функции, в которую объединены весовые функции всех оцениваемых элементов по параметрам

$$\left(f_{kj} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_j}; \quad k = 1, 2, \dots, S; \quad j = 1, 2, \dots, t \right).$$

Применим к линеаризованным весовым функциям $\bar{F} = F^\circ + F\tilde{x}$ теорему обобщенной оценки точности и получим матрицу $Q_{\bar{F}}$ весовых коэффициентов оцениваемых функций: $Q_{\bar{F}} = FQ_{\tilde{x}}F^T$ или

$$Q_{\bar{F}} = FR^{-1}F^T, \quad (118)$$

так как $Q_{\tilde{x}} = R^{-1}$.

Корреляционная матрица оцениваемых функций может быть получена по формуле

$$K_{\bar{F}} = \mu^2 Q_{\bar{F}}. \quad (119)$$

На главной диагонали корреляционной матрицы $K_{\bar{F}}$ находятся квадраты средних квадратических ошибок уравненных значений оцениваемых функций, а недиагональные элементы матрицы характеризуют парную корреляционную зависимость между этими функциями.

Для каждой функции легко вычислить среднюю квадратическую ошибку

$$m_{\bar{F}_k} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\bar{F}_k}}} = \mu \sqrt{(Q_{\bar{F}})_{kk}} \quad (k = 1, 2, \dots, S), \quad (120)$$

где $(Q_{\bar{F}})_{kk}$ – диагональные элементы матрицы $Q_{\bar{F}}$.

В частном случае, когда оценке точности после уравнивания подлежат *измеряемые величины*, будем иметь:

$$\Phi = \bar{Y} = Y(\bar{X}) = Y(X^\circ + x) = Y(X^\circ) + \frac{\partial Y}{\partial X} x + R = Y^\circ + Ax$$

или

$$\bar{Y} = Y^\circ + A\tilde{x},$$

т. е. $F = A$ – матрица F частных производных от весовых функций по параметрам совпадает с матрицей A коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Поэтому матрица $Q_{\bar{Y}}$ весовых коэффициентов уравненных измерений равна

$$Q_{\bar{Y}} = A Q_{\bar{X}} A^T \quad (121)$$

и корреляционная матрица

$$K_{\bar{Y}} = \mu^2 Q_{\bar{Y}} = \mu^2 A Q_{\bar{X}} A^T = \mu^2 A R^{-1} A^T. \quad (122)$$

Если оценке точности подлежит только одна функция $\Phi = f(X_1, X_2, \dots, X_t)$, то после ее линеаризации будем иметь $\Phi = F^\circ + f x$ или $\bar{F} = f^\circ + \tilde{f} x$, где

$f = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial x_t} \right)$ – вектор частных производных исходной функции по

параметрам. Далее получим $Q_{\bar{F}} = \frac{1}{P_{\bar{F}}} = f \cdot R^{-1} \cdot f^T$ – обратный вес функции и

$m_{\bar{F}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\bar{F}}}}$ – ее среднюю квадратическую ошибку.

Напомним, что в геодезии обычно выполняется оценка точности элементов, находящихся в «слабом месте» сети.

5.4. Блок-схема параметрического способа уравнивания и оценки точности

Порядок уравнивания и оценки точности геодезической сети параметрическим способом условно можно представить в виде блок-схемы на рис. 15.

В первом блоке фиксируют число n выполненных измерений и число t необходимых измерений, затем систематизируют измерительную информацию и формируют вектор $Y' = Y'_{n1}$ результатов измерений и матрицу его весовых коэффициентов $Q_{Y'} = (Q_{Y'})_{nn}$.

Далее назначают вектор $X = X_{t1}$ линейно независимых параметров и составляют исходную вектор-функцию $Y_{n1} = Y_{n1}(X_{t1})$ параметрических уравнений связи, выражая каждый результат измерений как функцию соответствующих параметров.

Кроме того, на этом этапе составляют весовые функции для всех элементов сети, подлежащих оценке точности после уравнивания.

Во втором блоке от ближайших твердых пунктов через подходящие измеренные величины вычисляют приближенные значения $X^{\circ} = X^{\circ}_{t1}$ параметров.

Затем вычисляют вектор свободных членов $L_{n1} = Y_{n1}(X^{\circ}_{t1}) - Y'$ параметрических уравнений поправок, как разность между приближенными, т. е. вычисленными через приближенные значения параметров и измеренными значениями всех измеренных элементов сети.

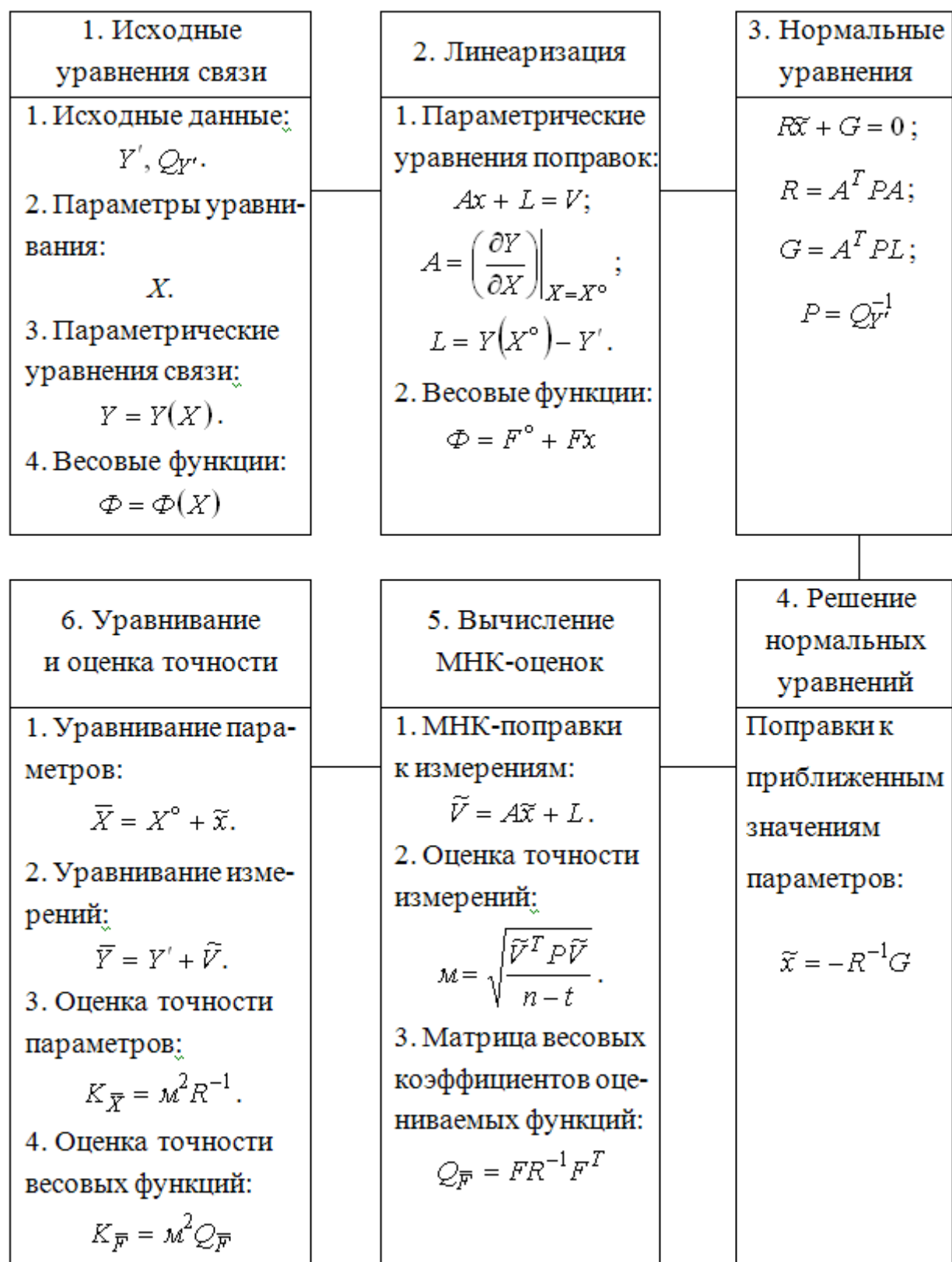


Рис. 15. Блок-схема параметрического способа уравнивания и оценки точности

Далее определяют матрицу $A = A_{nt}$ коэффициентов параметрических уравнений поправок, как матрицу частных производных исходной вектор-функции по параметрам:

$$A = A_{nt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_t} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_2}{\partial X_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \ddot{Y}_n}{\partial X_1} & \frac{\partial \ddot{Y}_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial \ddot{Y}_n}{\partial X_t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получают линейную систему $A_{nt}x_{t1} + L_{n1} = V_{n1}$ параметрических уравнений поправок.

Кроме того, на этом этапе выполняют линейризацию весовых функций, составленных ранее в предыдущем блоке.

В третьем блоке $R_{tt}\tilde{x}_{t1} + G_{t1} = 0$ получают систему t нормальных уравнений с t неизвестными.

В четвертом блоке выполняют решение системы нормальных уравнений, из которого получают вектор $\tilde{x} = \tilde{x}_{t1}$ МНК-поправок к приближенным значениям X° параметров.

В пятом блоке вычисляют МНК-поправки $\tilde{V}_{n1} = A_{nt}\tilde{x}_{t1} + L_{n1}$ к результатам измерений и используют их для вычисления μ – средней квадратической ошибки единицы веса, характеризующей точность результатов измерений.

Кроме того, определяют матрицу весовых коэффициентов $Q_{\bar{F}}$ оцениваемых функций.

В шестом блоке вычисляют уравненные (окончательные) значения параметров $\bar{X}_{t1} = X_{t1}^\circ + \tilde{x}_{t1}$ и уравненные (скорректированные за условия системы) значения измеренных величин $\bar{Y}_{n1} = Y'_{n1} + \tilde{V}_{n1}$. По окончании уравнивания должен выполняться контроль: $Y' + \tilde{V} = Y(\bar{X})$.

Здесь же определяют корреляционную матрицу $K_{\bar{X}}$ уравненных параметров, на главной диагонали которой находятся квадраты $m_{\bar{X}_i}^2$ ($i = 1, 2, \dots, t$) их средних квадратических ошибок, и корреляционную матрицу $K_{\bar{F}}$ весовых функций. На ее главной диагонали представлены квадраты $m_{\bar{F}_k}^2$ ($k = 1, 2, \dots, S$) средних квадратических ошибок этих функций.

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ

6.1. Понятие о рекуррентном уравнивании

Рекуррентное или последовательное уравнивание – сравнительно новый перспективный способ уравнивания геодезических сетей, разрабатываемый и внедряемый проф. Ю.И. Маркузе, и получивший широкое развитие в последние два десятилетия.

Рекуррентное уравнивание дает возможность без составления и решения нормальных уравнений сразу получать матрицу обратных весов определяемых элементов сети – по мере включения в сеть новых измерений.

Сущность рекуррентного уравнивания состоит в последовательном присоединении к уже уравненной сети новых измерений как по одному, так и группами.

Рекуррентное уравнивание позволяет [5]:

- легко присоединять к уже уравненной сети новые измерения и новые неизвестные;
- значительно сократить объем вычислений при уравнивании обширных сетей с одновременным контролем грубых ошибок измерений и ошибок исходных данных;
- дает новые возможности для решения широкого круга задач уравнивательных вычислений.

Алгоритм рекуррентного способа уравнивания подробно излагается, например, в [3], где автор отмечает, что «...рекуррентное уравнивание обладает как достоинствами параметрического, так и коррелятного способа, но позволяет избежать сложную процедуру составления условных уравнений и оценки точности неизвестных...».

6.2. Обобщенный способ уравнивания и его частные случаи

Обобщенным способом уравнивания называется обобщенный параметрический способ, из которого можно получить все известные и новые способы уравнивания с помощью «переключателя» способов [5]. Переключение способов выполняется различной спецификацией матриц коэффициентов и матрицы весов результатов измерений.

Идея обобщенного способа уравнивания состоит в следующем.

Система параметрических уравнений поправок в виде

$$\bar{V} = \bar{A}\bar{X} + \bar{L} \quad (123)$$

разделяется на блоки:

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} V \\ \hat{V} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} L \\ \hat{L} \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ \hat{X} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим матрица $\bar{P}$ так же будет иметь блочную структуру:

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \hat{P} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система (123) разделена на две системы, размеры которых устанавливаются, исходя из существа решаемой задачи.

Далее вводится вспомогательный вектор

$$K = \hat{P}BX + \hat{P}\beta\hat{X} + \hat{P}L.$$

Решение уравнений (123) под условием МНК $\Phi = \bar{V}^T \bar{P} \bar{V} = \min$ приводит, в конечном итоге, к системе

$$\begin{pmatrix} R & R_\alpha & B^T \\ R_\alpha^T & R_{\alpha\alpha} & \beta^T \\ B & \beta & -\hat{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \hat{X} \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ G_\alpha \\ \hat{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (124)$$

где матрицы определяются по формулам: $R = A^T P A$, $R_\alpha = A^T P \alpha$, $R_{\alpha\alpha} = \alpha^T P \alpha$; а $G = A^T P L$, $G_\alpha = \alpha^T P L$ – векторы.

При этом условие МНК преобразуется к виду:

$$\Phi = \bar{V}^T \bar{P} \bar{V} = L^T P L + \beta^T X + \beta_\beta^T \hat{X} + \hat{L}^T K. \quad (125)$$

Система уравнений (124) и формула (125) выражают сущность идеи обобщенного уравнивания.

Если принять $\alpha = 0$, $B = 0$, $\beta = 0$, $\hat{L} = 0$, то получим обычный *параметрический способ* уравнивания с системой нормальных уравнений $RX + G = 0$.

Если в системе (124) матрицы $A = E$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и вектор $L = 0$, то получим систему

$$\begin{pmatrix} P & B^T \\ B & -\hat{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (126)$$

Приняв в ней $\hat{P}^{-1} = 0$ при $W = \hat{L}$, получим *коррелятный способ* с системой нормальных уравнений $NK + W = 0$.

Если принять $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то получим новую модель

$$\begin{cases} RX + B^T K + G = 0 \\ BX - P^{-1} K + \hat{L} = 0 \end{cases},$$

которую целесообразно применять, когда часть измерений (с вектором поправок $\hat{V}$) имеет большие веса.

Из обобщенного способа уравнивания вытекает также параметрический способ с условиями, который полностью совпадает с *рекуррентным способом* учета уравнений поправок, и коррелятный способ с дополнительными неизвестными, который применяется в случае, если введение дополнительных неизвестных упрощает вид условных уравнений связи.

6.3. Строгое и приближенное уравнивание

Уравнивание геодезической сети будет строгим только тогда, когда при формировании весовой матрицы результатов измерений учитывается вся

имеющаяся информация о точности и коррелированности этих измерений. Только в этом случае в результате уравнивания по МНК получим числовую модель сети, максимально правдоподобную реальному объекту.

Можно утверждать, что практически все возможные отступления от строгого уравнивания сводятся к неправильному установлению весов измерений. Кроме того, деформирующее влияние на результаты уравнивания оказывают ошибки исходных данных и систематические ошибки.

Любое отступление от строгого уравнивания приведет к приближенным результатам. Точность таких результатов не может быть выше той точности, что получается из строгого уравнивания. Можно показать [3], что

$$\tilde{\tilde{V}}^T \tilde{\tilde{P}} \tilde{\tilde{V}} \leq \tilde{V}^T P \tilde{V} \text{ и } \tilde{\tilde{V}}^T \tilde{\tilde{P}} \tilde{\tilde{V}} \leq \tilde{V}^T \tilde{\tilde{P}} \tilde{V}, \quad (127)$$

где P и $\tilde{P}$ – строгая и приближенная матрицы весов измерений;

$\tilde{\tilde{V}}$ и $\tilde{\tilde{V}}$ – МНК-поправки к измерениям соответственно из строгого и приближенного уравнивания.

Если по каким-либо причинам (например, для сокращения объема вычислений) вместо строгого уравнивания выполняется приближенное, то оценка точности результатов приближенного уравнивания должна быть строгой. Иначе может получиться парадоксальный вывод о том, что точность результатов приближенного уравнивания выше точности результатов строгого уравнивания.

Строгая оценка точности означает, что *в формулах, предназначенных для оценки точности, весовая матрица $P = Q_Y^{-1}$ не должна быть упрощенной, а должна содержать всю имеющуюся информацию о точности измерений*, даже если в процессе самого уравнивания эта информация не использовалась или использовалась не полностью.

Таким образом, если уравнивание сети проводилось с весовой матрицей результатов измерений $\tilde{P}$ вместо матрицы $P = Q_Y^{-1}$, то строго получать, например, матрицу весовых коэффициентов уравненных параметров нужно по формуле

$$Q_{\bar{X}} = (R^{-1} A^T \tilde{P}) Q_{Y'} (R^{-1} A^T \tilde{P})^T = R^{-1} A^T \tilde{P} Q_{Y'} \tilde{P} A R^{-1}, \quad (128)$$

а квадратичную форму – по формуле $\Phi = \tilde{\tilde{V}}^T \tilde{\tilde{P}} \tilde{\tilde{V}}$.

На практике частым отступлением от строгости является пренебрежение корреляцией уравниваемых величин, особенно в случаях, когда уравниваются не сами измерения, а их функции. Так, если выполнялось уравнивание коррелированных измерений без учета их корреляции, т. е. с диагональной весовой матрицей $P = Q_Y^{-1}$, то при выполнении строгой оценки точности эта матрица должна быть полной.

6.4. Понятие об уравнивании обширных геодезических сетей

Строгие способы уравнивания обширных геодезических сетей основаны на требовании обязательного *совместного* решения всех возникающих в них уравнений поправок и нормальных уравнений. Поэтому при уравнивании

больших геодезических сетей возникает необходимость совместного решения систем нормальных уравнений с таким большим числом неизвестных, что их решение представляет собой сложную научную и техническую проблему даже в настоящее время, в эпоху бурного развития быстродействующей вычислительной техники.

Уменьшение числа совместно решаемых уравнений может быть достигнуто, например, при использовании *многогруппового способа* уравнивания в параметрической форме. Этот способ был предложен Ф. Гельмертом и И.Ю. Пранис-Праневичем.

Сущность этого способа заключается в разделении всей уравниваемой сети на отдельные участки. Пункты, расположенные по граничным линиям этих участков, называются *связующими* пунктами и нумеруются последними – после «внутренних» пунктов. Внутренним пунктам соответствуют неизвестные Δ_i . Неизвестные Δ_0 , соответствующие связующим пунктам, называются *связующими неизвестными*.

Рассматривая каждый участок как отдельную сеть, можно составить в нем нормальные уравнения, поставив связующие неизвестные *на последние места*.

Тогда общая система нормальных уравнений, например, для сети, состоящей из трех участков, распадается на три частично независимых и одно связующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \Delta_1 &+ R_{10} \Delta_0 + b_1 = 0 \\ R_2 \Delta_2 &+ R_{20} \Delta_0 + b_2 = 0 \\ R_3 \Delta_3 &+ R_{30} \Delta_0 + b_3 = 0 \\ R_{10}^T \Delta_1 + R_{20}^T \Delta_2 + R_{30}^T \Delta_3 + R_0 \Delta_0 + b_0 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (129)$$

Далее на каждом i -м участке ($i = 1, 2, \dots, s$) из частично независимых уравнений выражаются только «внутренние» неизвестные по формуле

$$\Delta_i = -R_i^T R_{i0} \Delta_0 - R_i^{-1} b_i \quad (130)$$

и после подстановки этих выражений в связующие уравнения получают *преобразованные* уравнения, в которых неизвестными являются только «связующие» неизвестные:

$$[R_0 \cdot s] \Delta_0 + [b_0 \cdot s] = 0, \quad (131)$$

$$\text{где } [R_0 \cdot s] = R_0 - \sum_{i=1}^s R_{i0}^T R_i^{-1} R_{i0}; \quad [b_0 \cdot s] = b_0 - \sum_{i=1}^s R_{i0}^T R_i^{-1} b_i.$$

Таким образом, полученные в каждом участке преобразованные уравнения объединяют для всей сети, суммируя коэффициенты при одноименных неизвестных. Затем решают полученную систему (131) и получают «связующие» неизвестные Δ_0 , после чего на каждом участке находят внутренние неизвестные Δ_i по формуле (130).

Такова общая схема многогруппового способа уравнивания. Оценка точности неизвестных в этом способе не является затруднительной. Недостаток этого способа в том, что система связующих нормальных уравнений может иметь высокий порядок, а также в том, что практически невозможно выполнить контроль грубых ошибок.

Возможен также *рекуррентный способ блочного уравнивания*, при котором стыковка блоков (участков) выполняется не по идентичным пунктам, а по связующим измерениям.

Кроме того, для уравнивания больших сетей применяют различные *итерационные способы, метод сопряженных градиентов и др.*, в которых трудновыполнима задача оценки точности.

В последнее время разработаны и другие способы уравнивания больших сетей, позволяющие сократить число совместно решаемых уравнений [3]. В них принимается во внимание тот факт, что измерения в геодезической сети являются *статистическими данными*. Назовем, например, *способ подвижной корреляционной зоны*, в котором учитывается, что, с увеличением объема сети, возникает момент, когда избыточные измерения практически перестают оказывать влияние на расположенные далеко от них уже уравненные неизвестные и их точность. Или способы *подвижного блока* и *подвижного треугольника*, в основу которых положено рекуррентное уравнивание и большое значение имеет эффективная нумерация пунктов сети.

Для объединения плановых сетей, уравненных отдельно и имеющих общие пункты, известен *способ Гельмерта*, при котором выполняется преобразование координат одной из сетей в систему координат другой. Затем необходимо осуществить соединение этих сетей.

6.5. Дисперсионный анализ в геодезии

На любые испытания (результаты эксперимента) воздействуют несколько факторов, вызывающих *изменчивость* результатов наблюдаемых величин. Эти факторы могут принадлежать к одному или многим источникам. Исследование влияния тех или иных факторов на изменчивость результатов и их функций и является задачей дисперсионного анализа.

Дисперсионный анализ *состоит в выделении и оценке отдельных факторов, вызывающих изменчивость*.

Например, повышение точности геодезических измерений связано с тщательным изучением условий измерений, и дисперсионный анализ может служить в геодезии для обнаружения систематических ошибок. Он позволяет выделить влияние *изменений* какого-либо фактора на результаты измерений и найти закономерность такого влияния. Закономерности совместного действия случайных и систематических ошибок можно исследовать и другими методами, например, при помощи корреляционного анализа, однако точной и общепринятой границы между этими видами анализа нет.

Дисперсионный анализ основан на разложении общей дисперсии на составляющие, порождаемые действием отдельных *независимых* факторов (условий наблюдений).

Техника дисперсионного анализа изменяется в зависимости от числа изучаемых одновременно независимых источников изменчивости. Если факторы, вызывающие изменчивость средних значений, принадлежат к одному источнику, то будем иметь *однофакторный* дисперсионный анализ, если к двум источникам, то *двухфакторный* дисперсионный анализ и т. д.

В основе дисперсионного анализа лежат следующие постулаты.

2. Все ряды измерений имеют одно и то же математическое ожидание, т. е. берется одна и та же величина.

3. Все ряды измерений имеют одинаковую дисперсию, т. е. измерения точны.

Пусть при различных значениях фактора α выполнены ряды независимых равноточных измерений, характеризующиеся дисперсией σ^2 и имеющих нормальное распределение:

Таким образом, имеем t групп измерений объема n_i ($i = 1, 2, \dots, t$), при этом

Среднее по выборке i -й группы равно

а среднее по полной выборке равно

Теперь рассмотрим сумму квадратов отклонений каждого наблюдения x_{ij} относительно общего среднего:

$$\begin{aligned}
SS_y &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i + \bar{x}_i - \bar{x})^2 = \\
&= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}).
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое обращается в нуль, согласно равенствам (133) и (134), поэтому

$$SS_y = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^t n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad (135)$$

или

$$SS_y = SS_\alpha + SS_R. \quad (136)$$

Первое слагаемое этой формулы называется *суммой квадратов уклонений групповых средних от общего среднего*, обусловленной наблюдениями при различных значениях фактора α , а второе слагаемое – это *сумма квадратов уклонений внутри групп*, когда фактор α постоянен.

Таким образом, полная сумма квадратов распадается на две суммы квадратов с различными «источниками»: первая зависит от фактора α , а вторая – только от случайных ошибок.

Сумма квадратов SS_α характеризует изменчивость групповых средних по различным значениям фактора (рассеивание по значениям фактора), она изменяется по мере колебаний средних значений $\bar{x}_i$.

Сумма квадратов SS_R характеризует изменчивость наблюдений внутри групп, т. е. отражает влияние случайных погрешностей.

Уравнение (136) в дисперсионном анализе играет фундаментальную роль. Можно сказать, что в нем в зародыше содержится весь дисперсионный анализ.

Каждая сумма квадратов связана с числом v , называемым «числом степеней свободы». Это число связано с объемом избыточной информации, использованной для образования некоторой суммы квадратов.

Числа степеней свободы для указанных сумм равны соответственно $v = n - 1$, $v = t - 1$, и $v = n - t$.

При делении каждой суммы квадратов на соответствующее ей число степеней свободы получаются соответствующие *средние квадраты*, обозначаемые MS , т. е.

$$\left. \begin{aligned}
MS_y = s^2 &= \frac{SS_y}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 \\
MS = s_\alpha^2 &= \frac{SS_\alpha}{t-1} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \\
MS = s_R^2 &= \frac{SS_R}{n-t} = \frac{1}{n-t} \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2
\end{aligned} \right\}. \quad (137)$$

Средние квадраты представляют собой несмещенные оценки дисперсии выполненных наблюдений, а именно:

s^2 – общая эмпирическая дисперсия;

s_α^2 – факториальная (межрядная) эмпирическая дисперсия,

s_R^2 – случайная (внутрирядная) эмпирическая дисперсия.

Суммы квадратов (136) можно вычислять, используя любое из двух эквивалентных выражений для каждой из формул:

$$\left. \begin{aligned} SS_y &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n\bar{x}^2 \\ SS_\alpha &= \sum_{i=1}^t n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^t n_i \bar{x}_i^2 - n\bar{x}^2 \\ SS_R &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - n_i \bar{x}_i^2 \end{aligned} \right\}. \quad (138)$$

Вторые выражения в каждой строке (138) вычислять обычно легче.

6.5.2. Оценка влияния фактора α

Для равноточных измерений возрастающее влияние фактора α проявляется во все бóльшем и бóльшем превышении эмпирической дисперсии s_α^2 над эмпирической дисперсией s_R^2 .

Критерием влияния фактора α может служить статистика

$$F = \frac{s_\alpha^2}{s_R^2}. \quad (139)$$

Она называется дисперсионным отношением. По величине отклонения дисперсионного отношения от единицы можно судить о степени влияния фактора α на результаты измерений. Когда фактор α несущественно влияет на результаты измерений, то s_α^2 и s_R^2 будут близки между собой и близки к общей эмпирической дисперсии s^2 , отражающей весь комплекс условий измерений, т. е. только когда под воздействием фактора α оценки дисперсии σ^2 не меняются, получим $s_\alpha^2 \approx s_R^2 \approx s^2$.

Далее выдвигается нулевая гипотеза о постоянстве фактора α :

$$H_0 = \{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t\}, \quad (140)$$

т. е. о незначимости влияния изменений фактора α на результаты измерений.

Проверка нулевой гипотезы выполняется по известной схеме: подбирается подходящий критерий проверки гипотезы, вычисляется его эмпирическое значение, которое сопоставляется с критическим, т. е.

допустимым в рамках нулевой гипотезы, значением. Если эмпирическое значение не превышает критического, то нулевая гипотеза не отвергается.

Критерий проверки данной гипотезы – статистика $F = \frac{s_{\alpha}^2}{s_R^2}$. Критическое

значение критерия $F_{1-q}(t-1, n-t)$ находится из таблиц F-распределения Фишера [2] на уровне значимости $q = 1 - \beta$ по числам степеней свободы $v_1 = t$

– 1 и $v_2 = n - t$. Если $F = \frac{s_{\alpha}^2}{s_R^2} > F_{1-q}(t-1, n-t)$, то нулевая гипотеза отвергается

и изменение значения фактора α на результаты измерений статистически значимо.¹

Результаты дисперсионного анализа сводят в таблицу (табл. 5), имеющую следующий вид.

Таблица 5. Таблица однофакторного дисперсионного анализа ANOVA2 (основное разложение)

Источник дисперсии (вариации)	SS (сумма квадратов)	ν (число степеней свободы)	MS (средний квадрат)	F-отношение
Между группами	$SS_{\alpha} = \sum_{i=1}^t n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$\nu_{\alpha} = t - 1$	$s_{\alpha}^2 = \frac{SS_{\alpha}}{t - 1}$	$F = \frac{s_{\alpha}^2}{s_R^2}$
Внутри групп	$SS_R = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$\nu_R = n - t$	$s_R^2 = \frac{SS_R}{n - t}$	
Полная сумма квадратов	$SS_y = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$	$\nu_y = n - 1$	$s^2 = \frac{SS_y}{n - 1}$	

6.5.3. Многофакторный дисперсионный анализ

При исследовании влияния изменений нескольких факторов на результаты измерений применяют *многофакторный* дисперсионный анализ. Принципиальная схема этого анализа остается прежней, усложняются только вычисления.

Так, например, при *двухфакторном* дисперсионном анализе, позволяющем исследовать влияние изменения двух факторов α и β на результаты измерений, следует учитывать все сочетания (вариации) факторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, иначе – учитывать различные *уровни факторов* α и β .

¹ Статистика $F = s_{\alpha}^2 / s_R^2$ предполагает, что дробь $F > 1$. Если она меньше единицы, то вычисляют $F = s_R^2 / s_{\alpha}^2$. Дальнейшие действия те же.

² ANOVA аббревиатура английской фразы «ANalysis Of Variance» – «Дисперсионный анализ»

Это значит, что должны быть рассмотрены ряды измерений при всевозможных комбинациях (уровнях) факторов: $\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \dots, \alpha_1\beta_S; \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_2\beta_S; \dots, \alpha_m\beta_1, \alpha_m\beta_2, \dots, \alpha_m\beta_S$.

В этом случае общая сумма квадратов SS_y распадается на слагаемые, обусловленные действиями факторов α, β и $\alpha\beta$ и действиями остальных факторов, т. е.

$$SS_y = SS_\alpha + SS_\beta + SS_{\alpha\beta} + SS_r. \quad (141)$$

Возможно отсутствие взаимодействия факторов α и β .

Существенность влияния изменения факторов α и β на результаты измерений можно определить при помощи дисперсионных отношений

$$F_\alpha = \frac{s_\alpha^2}{s_R^2}; \quad F_\beta = \frac{s_\beta^2}{s_R^2},$$

где s_α^2, s_β^2 и s_R^2 – эмпирические дисперсии (средние квадраты).

Числа степеней свободы, на которые нужно разделить соответствующие суммы квадратов, чтобы получить эти дисперсии, равны

$$v_\alpha = m - 1; v_\beta = S - 1; v_R = n - m \cdot S. \quad (142)$$

Критические значения для дисперсионных отношений находятся так же, как в случае однофакторного дисперсионного анализа.

Вычисление сумм квадратов выполняется по более сложным формулам, чем при однофакторном дисперсионном анализе. Можно представить, насколько сложными будут вычисления этих сумм при увеличении числа факторов. Однако с использованием ЭВМ задача вычислений существенно ускоряется.

6.5.4. Оценка влияния отдельных факторов

Если дисперсионный анализ выявляет наличие существенного влияния факторов на изменчивость средних значений в целом, то переходят к оценке влияния отдельных факторов. С этой целью оценивается расхождение между средними значениями, полученными при испытаниях по отдельным факторам. В этом случае должна проверяться нулевая гипотеза *о равенстве математических ожиданий* во всех группах наблюдений.

Критерий проверки этой гипотезы – *t-критерий*, эмпирическое значение которого для любых двух групп вычисляется по формуле

$$t_\Theta = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – средние в 1-й и 2-й группах соответственно,

$s = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$ – общая оценка дисперсии, s_1 и s_2 – дисперсии в 1-й

и 2-й группах, n_1 и n_2 – число наблюдений в 1-й и 2-й группах.

Критическое значение t_T находим в таблицах распределения Стьюдента [4] для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Таким образом, дисперсионный анализ может быть использован также для проверки *однородности* рядов наблюдений.

Если нарушается постулат о независимости измерений, то при их анализе нужно применить *корреляционный* анализ, основанный на исследовании корреляционной матрицы результатов наблюдений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белугин Д.А. Теория обработки результатов геодезических и астрономических измерений. – М., Недра, 1984.
2. Видуев Н.Г., Кондра Г.С. Дисперсионный анализ в теории и практике геодезических измерений. – М., Недра, 1968.
3. Теория математической обработки геодезических измерений: Учебное пособие в двух книгах; Под ред. Ю.И. Маркузе. – Кн. 2. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. – М.: МИИГАиК, 2005.
4. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М., Недра, 1989.
5. Маркузе Ю.И. и др. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: Справочное пособие / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1994.
6. Нефедова Г.А., Ащеулов В.А. Теория вероятностей и математическая статистика в конспективном изложении: Учеб. пособие. – Новосибирск: СГГА, 2006.
7. Лесных Н.Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов. – Новосибирск: СГГА, 2003.
8. Фигурин В.А., Оболонкин В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – Минск: ООО «Новое знание», 2000.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Пример уравнивания геодезической сети коррелятным способом

Исходные данные:

1. Схема сети (рис. П.1):
2. Отметки исходных «твердых» пунктов: $H_A = 20,000$ м
 $H_B = 16,000$ м

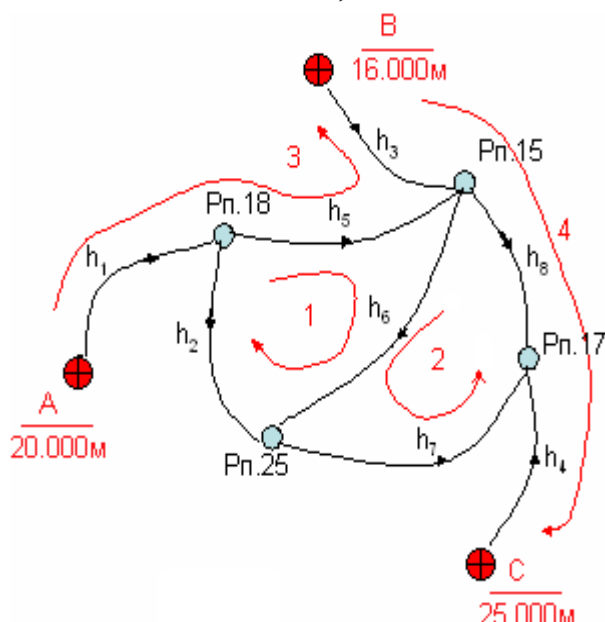


Рис. П.1

$H_C = 25,000$ м.

3. Результаты измерений (табл. П.1):

Таблица П.1.

Номера измерений i	Измеренные превышения $h'_i, \text{м}$	Длины ходов $D_i, \text{км}$
1	-1,978	7,0
2	7,038	8,0
3	-0,966	7,0
4	-7,981	7,0
5	-2,969	8,0
6	9,975	10,0
7	-8,031	9,0
8	1,979	7,5

Решение

1. Из условия задачи $n = 8$ — число всех выполненных измерений

(превышений);

$t = 4$ — число необходимых измерений (равно числу определяемых отметок узловых пунктов);

$r = n - t = 4$ — число избыточных измерений, равное числу линейно независимых условных уравнений связи.

Пре́вышения h'_i в сети — неравноточные, так как измерены по ходам неодинаковой длины D_i . Веса превышений h'_i в нивелирных ходах назначаются обратно пропорционально длинам ходов D_i в километрах, т. е. $p = \frac{C}{D_i}$, где C —

произвольная константа (условный ход в км, вес которого принят за единицу). Заметим, что средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu = m_C$, полученная после уравнивания сети, будет являться оценкой точности превышения, измеренного по ходу длиной C .

Примем $C = 10$ км. Вычислим веса превышений по формуле: $p_i = \frac{10}{D_i}$ ($i =$

1, 2, ..., 8) и представим их в виде весовой матрицы P :

$$P = \begin{pmatrix} 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,33 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q = P^{-1}$ – матрица весовых коэффициентов вектора измерений имеет вид

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

В нивелирных сетях имеют место и должны удовлетворяться условия двух видов:

а) сумма превышений внутри замкнутого полигона должна быть равна нулю – условие полигона;

б) сумма превышений, измеренных между двумя «твердыми» пунктами должна быть равна разности отметок конечного и начального пунктов хода – условие хода.

Выберем и отметим на схеме сети, *в первую очередь*, замкнутые полигоны 1 и 2, укажем стрелками направление суммирования превышений внутри них.

Затем выберем и наметим, например, ходы 3 и 4 и укажем стрелками направление от начальной до конечной точки хода (произвольно).

Далее составим исходную систему условных уравнений связи $\varphi(h) = 0$ для истинных значений h измеряемых превышений:

- 1) $-h_2 + h_5 + h_6 = 0$;
- 2) $h_6 + h_7 - h_8 = 0$;
- 3) $(h_1 + h_5 - h_3) - (H_B - H_A) = 0$;
- 4) $(h_3 + h_8 - h_4) - (H_C - H_B) = 0$.

Составим также весовую функцию для оценки точности после уравнивания отметки, например, Рп. 25 («слабое место» сети, как наиболее удаленное от исходных реперов):

$$F_1 = H_{Pn.25} = H_B + h_4 - h_7$$

и проконтролируем ее другим путем:

$$F_2 = H_{Pn.25} = H_A + h_1 + h_2.$$

Сформируем вектор-строку f частных производных по измеряемым величинам для каждой весовой функции:

$$f_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0);$$

$$f_2 = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

2. Представив истинные значения превышений в виде суммы $h_i = h'_i + v_i$, получим условные уравнения поправок $BV + W = 0$ в виде:

$$1) -v_2 + v_5 + v_6 + w_1 = 0;$$

$$2) v_6 + v_7 - v_8 + w_2 = 0;$$

$$3) v_1 + v_5 - v_3 + w_3 = 0;$$

$$4) v_3 + v_8 - v_4 + w_4 = 0.$$

Выделим матрицу B коэффициентов:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим невязки w_i – свободные члены условных уравнений поправок:

$$1) w_1 = -h'_2 + h'_5 + h'_6 = 0,032 \text{ м} = -3,2 \text{ см};$$

$$2) w_2 = h'_6 + h'_7 - h'_8 = -0,035 \text{ м} = -3,5 \text{ см};$$

$$3) w_3 = (h'_1 + h'_5 - h'_3) - (H_B - H_A) = 0,019 \text{ м} = 1,9 \text{ см};$$

$$4) w_4 = (h'_3 + h'_8 - h'_4) - (H_C - H_B) = -0,006 \text{ м} = -0,6 \text{ см}.$$

Вектор невязок W имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -3,2 \\ -3,5 \\ 1,9 \\ -0,6 \end{pmatrix} \text{ см}.$$

Дальнейшие вычисления выполним на компьютере, например, в среде MathCAD.

Исходная информация, необходимая для последующих вычислений, выше заключена в рамки. Это – весовая матрица измерений P , матрица B коэффициентов условных уравнений поправок, вектор-столбец невязок W и вектор-строка f частных производных весовой функции по измеряемым величинам.

1. Вычислим МНК-поправки к измерениям по формуле $\tilde{V} = -P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W$, получим:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} -0,89 \\ -1,03 \\ 1,01 \\ -0,12 \\ 0,01 \\ 2,17 \\ 0,80 \\ -0,53 \end{pmatrix} \text{ см} = \begin{pmatrix} -0,0089 \\ -0,0103 \\ 0,0101 \\ -0,0012 \\ 0,0001 \\ 0,0217 \\ 0,0080 \\ -0,0053 \end{pmatrix} \text{ м}.$$

2. Вычислим уравненные значения измеренных превышений по формуле $\bar{h} = h' + \tilde{V}$, получим:

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} -1,987 \\ 7,028 \\ -0,956 \\ -7,982 \\ -2,969 \\ 9,997 \\ -8,023 \\ 1,974 \end{pmatrix} \text{ м}.$$

Выполним контроль правильности вычислений по формуле $\varphi(\bar{h}) = 0$, т. е. проверим факт исчезновения невязок в условных уравнениях связи:

- 1) $1) -\bar{h}_2 + \bar{h}_5 + \bar{h}_6 = 0,000;$
- 2) $2) -\bar{h}_6 - \bar{h}_7 + \bar{h}_8 = 0,000;$
- 3) $3) (\bar{h}_1 + \bar{h}_5 - \bar{h}_3) - (H_B - H_A) = 0,000;$
- 4) $4) (\bar{h}_3 + \bar{h}_8 - \bar{h}_4) - (H_C - H_B) = 0,000.$

Контроль выполняется.

3. Выполним оценку точности:

а) измерений:

$$\mu_C = \mu_{10} = \sqrt{\frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{r}} = 0,0156 \text{ м} = 1,56 \text{ см} - \text{ошибка единицы веса} - \text{ср. кв.}$$

ошибка измерения превышения по ходу длиной $C = 10 \text{ км};$

$$\mu_{1 \text{ км}} = \frac{\mu_C}{\sqrt{C}} = \frac{\mu_{10}}{\sqrt{10}} = 0,0049 \text{ м} = 0,49 \text{ см} - \text{километровая ошибка} - \text{ср. кв.}$$

ошибка измерения превышения по ходу длиной 1 км.

б) весовой функции, т. е. отметки Рп. 25 («слабое место» сети):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_{F_1}} &= f_1 P^{-1} f_1^T - f_1 P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1} f_1^T = 0,53 \\ \frac{1}{P_{F_2}} &= f_2 P^{-1} f_2^T - f_2 P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1} f_2^T = 0,53 \end{aligned} \right\} - \text{обратный вес}$$

функций;

$$m_F = m_{H_{Pn.25}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 0,011 \text{ м} = 1,1 \text{ см.}$$

4. Вычислим отметки определяемых пунктов по формулам

$$H_{Pn.18} = H_A + \bar{h}_1;$$

$$H_{Pn.15} = H_B + \bar{h}_3;$$

$$H_{Pn.17} = H_C + \bar{h}_4;$$

$$H_{Pn.25} = H_A + \bar{h}_1 + \bar{h}_2 = H_C + \bar{h}_4 - \bar{h}_7 = H_B + \bar{h}_3 + \bar{h}_6$$

и поместим их в **каталог отметок определяемых пунктов** (табл. П.2).

Таблица П.2.

Номера п/п	Реперы	Отметки, м	Ср. кв. ошибка, мм
1	Рп. 18	18,013	
2	Рп. 15	15,044	
3	Рп. 17	17,018	
4	Рп. 25	25,041	11

Совпадение урвненных отметок Рп. 25, полученных по разным урвненным превышениям, подтверждает факт реализации уравнивания.

Пример уравнивания геодезической сети параметрическим способом
Уравниваем параметрическим способом ту же нивелирную сеть.

Исходные данные:

1. Схема сети (рис. П.2).
2. Отметки исходных «твердых» пунктов:

$$H_A = 20,000 \text{ м};$$

$$H_B = 16,000 \text{ м};$$

$$H_C = 25,000 \text{ м}.$$

3. Результаты измерений оформим в табл. П.3.

Таблица П.3.

Номера измерений, i	Измеренные превышения h'_i , м	Длины ходов, D_i , км
1	-1,978	7,0
2	7,038	8,0
3	-0,966	7,0
4	-7,981	7,0
5	-2,969	8,0
6	9,975	10,0
7	-8,031	9,0
8	1,979	7,5

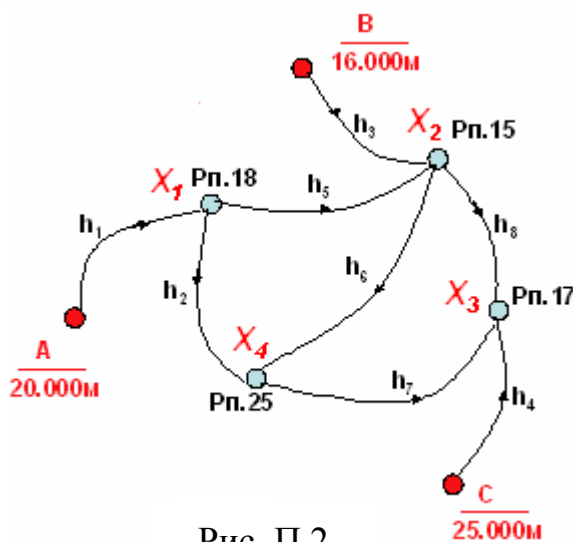


Рис. П.2

Решение

1. По условию задачи $n = 8$ – число всех выполненных измерений

(превышений);

$t = 4$ – число необходимых измерений (равно числу определяемых отметок узловых пунктов) и числу линейно независимых параметров уравниваний связи;

число избыточных измерений $r = n - t > 0$, поэтому возникает задача уравнивания сети.

Вычислим веса превышений по формуле: $p_i = \frac{10}{D_i}$ и представим их в виде весовой матрицы P :

$$P = \begin{pmatrix} 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,33 \end{pmatrix}.$$

2. Примем в качестве параметров уравнивания истинные значения отметок определяемых реперов и отметим их на схеме сети:

$$X_1 = H_{Pn.18};$$

$$X_2 = H_{Pn.15};$$

$$X_3 = H_{Pn.17};$$

$$X_4 = H_{Pn.25}.$$

3. Составим исходную систему параметрических уравнений связи $h = h(X)$:

$$1) h_1 = X_1 - H_A;$$

$$2) h_2 = X_4 - X_1;$$

$$3) h_3 = X_2 - H_B;$$

$$4) h_4 = X_3 - H_C;$$

$$5) h_5 = X_2 - X_1;$$

$$6) h_6 = X_4 - X_2;$$

$$7) h_7 = X_3 - X_4;$$

$$8) h_8 = X_3 - X_2.$$

Вычислим приближенные значения параметров:

$$X_1^\circ = H_A + h_1' = 20,000 \text{ м} - 1,978 \text{ м} = 18,022 \text{ м};$$

$$X_2^\circ = H_B + h_3' = 26,000 \text{ м} - 0,966 \text{ м} = 15,034 \text{ м};$$

$$X_3^\circ = H_C + h_4' = 25,000 \text{ м} - 7,981 \text{ м} = 17,019 \text{ м};$$

$$X_4^\circ = X_1^\circ + h_2' = 18,022 \text{ м} + 7,038 \text{ м} = 25,060 \text{ м}.$$

Представим истинные значения превышений и параметров в виде сумм

$$h_i = h_i' + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$X_i = X_i^\circ + \delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, t)$$

и подставим их в исходную систему уравнений связи:

- 1) $h'_1 + V_1 = X_1^\circ + \delta x_1 - H_A$;
- 2) $h'_2 + V_2 = X_4^\circ + \delta x_4 - X_1^\circ - \delta x_1$;
- 3) $h'_3 + V_3 = X_2^\circ + \delta x_2 - H_B$;
- 4) $h'_4 + V_4 = X_3^\circ + \delta x_3 - H_C$;
- 5) $h'_5 + V_5 = X_2^\circ + \delta x_2 - X_1^\circ - \delta x_1$;
- 6) $h'_6 + V_6 = X_4^\circ + \delta x_4 - X_2^\circ - \delta x_2$;
- 7) $h'_7 + V_7 = X_3^\circ + \delta x_3 - X_4^\circ - \delta x_4$;
- 8) $h'_8 + V_8 = X_3^\circ + \delta x_3 - X_2^\circ - \delta x_2$.

Система параметрических уравнений поправок $Ax + L = V$ имеет вид:

$$\left. \begin{array}{lcl} \delta x_1 & & + l_1 = V_1 \\ -\delta x_1 & & + \delta x_4 + l_2 = V_2 \\ & \delta x_2 & + l_3 = V_3 \\ & \delta x_3 & + l_4 = V_4 \\ -\delta x_1 + \delta x_2 & & + l_5 = V_5 \\ & -\delta x_2 & + \delta x_4 + l_6 = V_6 \\ & \delta x_3 + \delta x_4 & + l_7 = V_7 \\ & -\delta x_2 + \delta x_3 & + l_8 = V_8 \end{array} \right\}.$$

Вычислим свободные члены $L = h(X^\circ) - h'$:

$$\begin{aligned} l_1 &= (X_1^\circ - H_A) - h'_1 = 18,022 - 20,000 - (-1,978) = 0; \\ l_2 &= (X_4^\circ - X_1^\circ) - h'_2 = 20,060 - 18,022 - 7,038 = 0; \\ l_3 &= (X_2^\circ - H_B) - h'_3 = 15,034 - 16,000 - (-0,966) = 0; \\ l_4 &= (X_3^\circ - H_C) - h'_4 = 17,019 - 25,000 - (-7,981) = 0; \\ l_5 &= (X_2^\circ - X_1^\circ) - h'_5 = 15,034 - 18,022 - (-2,969) = -0,019 \text{ м} = -1,9 \text{ см}; \\ l_6 &= (X_4^\circ - X_2^\circ) - h'_6 = 25,060 - 15,034 - 9,975 = 0,051 \text{ м} = 5,1 \text{ см}; \\ l_7 &= (X_3^\circ - X_4^\circ) - h'_7 = 17,019 - 25,060 - (-8,031) = -0,010 \text{ м} = -1,0 \text{ см}; \\ l_8 &= (-X_3^\circ - X_2^\circ) - h'_8 = 17,019 - 15,034 - 1,979 = 0,006 \text{ м} = 0,6 \text{ см}. \end{aligned}$$

Выделим матрицу A коэффициентов параметрических уравнений поправок и вектор L свободных членов:

$$A = \frac{\partial h}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,9 \\ 5,1 \\ -1,0 \\ 0,6 \end{pmatrix} \text{ см.}$$

4. Составим весовую функцию для оценки точности, например, превышения h_8 («слабое место» сети):

$$F = h_8 = X_3 - X_2.$$

Сформируем вектор-строку f частных производных весовой функции по параметрам:

$$f = (0 \quad -1 \quad 1 \quad 0).$$

Дальнейшие вычисления выполним на компьютере, например, в среде MathCAD.

Исходная информация, необходимая для последующих вычислений, выше заключена в рамки. Это – весовая матрица измерений P , матрица A коэффициентов параметрических уравнений поправок, вектор-столбец свободных членов L и вектор-строка f частных производных весовой функции по параметрам.

1. Вычислим МНК-поправки к приближенным значениям параметров по формуле $\tilde{x} = -(A^T P A)^{-1} A^T P L$.

Получим вектор

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0,892 \\ 1,013 \\ -0,121 \\ -1,918 \end{pmatrix} \text{ см} = \begin{pmatrix} 0,0089 \\ 0,0101 \\ -0,0012 \\ -0,0192 \end{pmatrix} \text{ м.}$$

2. Вычислим уравненные значения параметров (отметок определяемых пунктов) по формуле $\bar{X} = X^\circ + \tilde{x}$:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 18,013 \\ 15,044 \\ 17,018 \\ 25,041 \end{pmatrix} \text{ м.}$$

3. Вычислим МНК-поправки к измеренным превышениям по формуле $\tilde{V} = A\tilde{x} + L$, получим вектор:

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} -0,89 \\ -1,03 \\ 1,01 \\ -0,12 \\ 0,01 \\ 2,17 \\ 0,80 \\ -0,53 \end{pmatrix} \text{ см} = \begin{pmatrix} -0,0089 \\ -0,0103 \\ 0,0101 \\ -0,0012 \\ 0,0001 \\ 0,0217 \\ 0,0080 \\ -0,0053 \end{pmatrix} \text{ м.}$$

4. Вычислим уравненные значения превышений по формуле $\bar{h} = h' + \tilde{V}$ и для контроля, как функции уравненных параметров, по формуле $\bar{h} = h(\bar{X})$. Результаты вычислений представим в табл. П.4.

Таблица П.4.

Номера превышений	$\bar{h}_i = h'_i + \tilde{V}_i, \text{ м}$	$\bar{h} = h(\bar{X}), \text{ м}$	
1	-1,9869	$H_A - \bar{X}_1$	-1,9869
2	7,0277	$\bar{X}_4 - \bar{X}_1$	7,0277
3	-0,9559	$\bar{X}_2 - H_B$	-0,9559
4	-7,9822	$\bar{X}_3 - H_C$	-7,9822
5	-2,9689	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$	-2,9689
6	9,9967	$\bar{X}_4 - \bar{X}_2$	9,9967
7	-8,023	$\bar{X}_3 - \bar{X}_4$	-8,023
8	1,9737	$\bar{X}_3 - \bar{X}_2$	1,9737

5. Выполним оценку точности:

а) измерений:

$$\mu = m_C = m_{10 \text{ км}} = \sqrt{\frac{\tilde{V}^T P \tilde{V}}{r}} = 0,0156 \text{ м} = 1,56 \text{ см} - \text{ошибка единицы веса} -$$

ср. кв. ошибка измерения превышения по ходу длиной $C = 10 \text{ км}$;

$$m_{1 \text{ км}} = \frac{m_C}{\sqrt{C}} = \frac{m_{10}}{\sqrt{10}} = 0,0049 \text{ м} = 0,49 \text{ см} - \text{километровая ошибка} - \text{ср. кв.}$$

ошибка измерения превышения по ходу длиной 1 км ;

б) уравненных параметров сети.

$$\text{Корреляционная матрица уравненных параметров } K_{\bar{X}} = \mu^2 R^{-1},$$

$$K_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} 0,9455 & 0,4380 & 0,3193 & 0,5875 \\ 0,4380 & 0,8227 & 0,4421 & 0,5538 \\ 0,3193 & 0,4421 & 0,9413 & 0,5615 \\ 0,5875 & 0,5538 & 0,5615 & 1,2926 \end{pmatrix};$$

в) весовой функции – превышения $\bar{h}_8$.

Обратный вес функции: $\frac{1}{P_F} = f \cdot R^{-1} \cdot f^T = f \cdot (A^T P A)^{-1} \cdot f^T = 0,3617$;

ср. кв. ошибка функции: $m_F = m_{\bar{h}_8} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 0,094 \text{ м} = 9,4 \text{ см}$ – ср. кв.

ошибка 8-го превышения («слабое место» сети) после уравнивания.

После выполнения всех вычислений окончательно заполняем **каталог отметок определяемых пунктов** (табл. П.5), внося туда названия реперов, значения отметок и их ср. кв. ошибок.

Таблица П.5.

Номера п/п	Реперы	Отметки, м	Ср. кв. ошибки, мм
1	Рп. 18	18.013	10
2	Рп. 15	15.044	9
3	Рп. 17	17.018	10
4	Рп. 25	25.041	11