

Министерство образования Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В.Плеханова  
(технический университет)

О.Н.ТИХОНОВ

# ТЕОРИЯ СЕПАРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

*Учебное пособие*

Часть 1

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2003

1

УДК 622.7 (075.80)  
ББК 33.4я7  
Т464

Изложены главные положения теории сепарационных процессов, применяемых в обогащении полезных ископаемых, включая гравитационные, магнитные, флотационные и другие методы. Даны понятия о фракционном составе обогащаемого минерального сырья и сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов. Рассмотрены закономерности сепарационного массопереноса в рабочих зонах обогатительных аппаратов с использованием законов сохранения минеральных фракций и баланса сепарационных сил. В уравнения массопереноса введены специфические силы, учитывающие стесненность движения минеральных частиц: силы типа архимедовой, градиентные силы и др., что позволяет вычислять сепарационные характеристики промышленных аппаратов. Приведены методы анализа и прогнозирующих расчетов любых технологических схем обогащения руд. Даны современные и перспективные методы изучения фракционного состава и обогатимости любых видов минерального сырья. Рассмотрены новые направления аналитического проектирования и оптимизации технологических схем при комбинированном обогащении и комплексном использовании сырья. Рассмотрены методы проектирования минимально-машинемких технологических циклов и схем.

Пособие предназначено для студентов специальности 090300 «Обогащение полезных ископаемых», направление 650600 «Горное дело», а также может быть полезно научным и инженерно-техническим работникам научно-исследовательских и проектных организаций и обогатительных фабрик.

Научный редактор доц. *В.Б.Кусков*.

Рецензенты: Горно-металлургическая секция МАНЭБ; генеральный директор объединения ИНТЕКОС А.А.Дементьев.

**Тихонов О.Н.**

Т464. Теория сепарационных процессов: Учеб. пособие: Ч.1/О.Н.Тихонов; Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2003. 99 с. + 5 вклеек.

ISBN 5-94211-151-0

**УДК 622.7 (075.80)**  
**ББК 33.4**

ISBN 5-94211-151-0

© Санкт-Петербургский горный институт им. Г.В.Плеханова, 2003 г.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Автор начал читать курс «Теория сепарационных процессов» на кафедре обогащения полезных ископаемых СПГТИ около 25 лет назад. Сопровождающим было учебное пособие О.Н.Тихонова «Теоретические основы сепарационных процессов обогащения полезных ископаемых» / Ленингр. горный ин-т. Л., 1978. В соответствии с новой учебной программой назрела необходимость подготовки нового учебного пособия.

В ряде разделов пособия излагаются понятия о фракционном составе минерального сырья, закономерности движения минеральных частиц и сепарационные характеристики обогатительных аппаратов, анализ и прогнозирующий расчет технологических схем при комбинированном и комплексном обогащении сырья.

Основное внимание уделено переработке минерального сырья, которая в значительной мере осуществляется методами обогащения полезных ископаемых: гравитационными, магнитными, флотационными, электрическими, радиометрическими и др. Большие объемы переработки минерального сырья, разработка бедных месторождений, необходимость комплексного использования сырья и охраны окружающей среды, экономические аспекты требуют продуктивных теоретических подходов к процессам переработки. Эти обстоятельства приходится учитывать не только при проектировании обогатительных фабрик для разработки новых месторождений, но и на многочисленных действующих фабриках, применяющих разнообразные технологии и оборудование. В связи с этим возникает множество проблем, решить которые может помочь рассматриваемая в данном пособии теория, основанная на работах отечественных и зарубежных обогатителей, а также на исследованиях автора.

Обобщающая и компактная теория всех разнообразных процессов обогащения полезных ископаемых основана на понятиях о фракционном составе минерального сырья и сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов и технологических схем. Фракционный состав минерального сырья и продуктов обогащения позволяет оценивать распределение твердой фазы и ценных компонентов по фракциям, различающимся физическими свойствами частиц. Сепарационная характеристика дает оценку степени извлечения каждой из фракций в концентрат по отношению к сырью. В гравитационных методах обогащения руд используют фракции различной плотности, они содержат и переносят в концентрат и хвосты различные количества ценных (или вредных) компонентов. Во флотационных методах основными являются фракции различной флотуемости, они также содержат различные количества компонентов. В магнитных методах фракции различной магнитной восприимчивости также содержат и переносят различные количества компонентов.

Понятия о фракционном составе и сепарационных характеристиках позволяют надежно прогнозировать технологические результаты обогащения (выход, содержание, извлечение) любого сырья с помощью любой технологической схемы, оценивать эффективность работы и сравнивать друг с другом обогатительные аппараты различных конструкций, самые сложные технологические схемы независимо от типа перерабатываемого сырья, решать задачи экономической оптимальной стратегии обогащения сложного сырья, проектировать детальные технологические схемы.

В учебном пособии изложены закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых, основы теории сепарации минерального сырья разнообразного состава. Рассмотрены экспериментальные методы анализа и количественные характеристики вещественного состава минерального сырья и продуктов обогащения. Приведен общий метод составления уравнений сепарационного массопереноса, определяющих ход разделения частиц в зонах обогатительных аппаратов, а вместе с этим и технологических показателей обогащения. Рассмотрены новые методы прогнозирующего расчета любых технологических схем обогащения минерального сырья. Освещены вопросы оптимизации обо-

гатительных процессов. Материал пособия служит базой для компьютерного моделирования любых сепарационных обогатительных процессов и сложных технологических схем. В эпоху безграничных возможностей и доступности компьютерной техники теоретическая база математического моделирования, закладываемая рассматриваемой теорией сепарационных процессов, становится важнейшим фактором практической работы студентов, инженеров и ученых.

Предлагаемая теория сепарационных процессов была в течение ряда лет апробирована на лекциях для студентов, аспирантов и инженеров, повышающих квалификацию в Санкт-Петербургском горном институте; кроме того, на лекциях и семинарах для студентов и аспирантов в Университете штата Юта, в Калифорнийском университете Беркли, в Высшей горной школе штата Колорадо (США), где автор выступал по программе Фулбрайта (раздел «Науки о Земле»), а также в Лувенском университете (Бельгия) и в университете штата Квинсленд (Брисбейн, Австралия). Положения теории были использованы при разработке новых технологий, оптимизации режимов работы действующих обогатительных фабрик в ряде стран (Россия, США, Куба, Монголия, Египет и др.).

Работа может быть полезна студентам вузов обогатительной специальности, а также для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций и обогатительных фабрик.

Автор выражает благодарность студентам Анне Геннадьевне Галинской и Артему Павловичу Золотухину за помощь в подготовке учебного пособия к изданию.

## 1. ФРАКЦИОННЫЙ СОСТАВ МИНЕРАЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ И СЕПАРАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ И СХЕМ

В первом приближении обогатительная технология объединяет два понятия: минеральные материалы (сырье, концентраты, хвосты, промежуточные продукты – далее промпродукты) и технологические схемы (аппараты) обогащения. Для количественной оценки минеральных продуктов вводятся понятия распределения минеральных частиц  $\gamma(\xi)$  и ценных компонентов  $\beta(\xi)$  по фракциям с различными физическими свойствами  $\xi$ , а для количественной оценки аппаратов и схем – сепарационные характеристики  $\varepsilon(\xi)$ , оценивающие извлечение  $\varepsilon$  узких минеральных фракций в продукты. На этой основе многообразные факты обогащения обобщаются до уровня общетеоретических положений, включая анализ и классификацию сырья, аппаратов и схем обогащения, прогноз результатов обогащения, оптимизацию схем и режимов аппаратов. Все положения теории доведены до такой степени общности, что они соответствуют любому частному процессу обогащения.

В этой главе рассмотрим следующие вопросы:

- обзор рудоподготовки и основных методов обогащения;
- физические свойства материалов, используемые при обогащении руд;
- понятие о диапазоне изменения физических свойств смесей минералов и сростков;
- понятие о фракционном составе сырья и продуктов обогащения (функции распределения и содержания);
- понятие об идеальной и неидеальной сепарационной характеристике;
- понятие о рабочей точке (границе) разделения;
- интегральные формулы для расчета технологических показателей по одному физическому свойству;
- идеальную и неидеальную сепарации по нескольким физическим свойствам и сепарационные характеристики;
- интегральные формулы для расчета технологических показателей в общем случае.

## 1.1. Рудоподготовка и основные методы обогащения

На обогатительных фабриках перерабатывается твердое минеральное сырье, поступающее с шахт, рудников, карьеров: уголь, горючие сланцы, железные и марганцевые руды, руды цветных металлов, неметаллические полезные ископаемые. Суммарная переработка исчисляется миллиардами тонн сырья в год и ускоренно нарастает. Обогащению подвергается 95 % добываемого минерального сырья, которое проходит два основных этапа переработки: рудоподготовку и сепарацию.

Данное учебное пособие посвящено сепарации, или собственно процессам обогащения полезных ископаемых. Рудоподготовка рассматривается только в связи с сепарацией.

Рудоподготовка предусматривает главным образом дробление и измельчение горной массы. Чтобы сделать сырье способным к сепарации, необходимо уменьшить размеры минеральных частиц нередко до 0,1 мм и менее, что раскрывает сростки и освобождает частицы различных минералов друг от друга. Такая смесь раскрытых, т.е. не связанных друг с другом, различных минералов является исходным продуктом сепарации [3].

Собственно обогащение полезных ископаемых – сепарация – имеет в своем арсенале целый ряд эффективных методов разделения минеральных частиц: по крупности (грохочение, классификация), гравитационный, магнитный, флотационный, электрический, радиометрические [7].

При сепарации *по крупности*  $l$  (например, на грохотах) частицы мельче отверстий сита ( $l_p = \text{const}$ ) попадают в нижний подрешетный продукт ( $l < l_p$ ), а остальные – в надрешетный ( $l > l_p$ ) [7]. Исходный продукт крупностью  $l_{\min} < l < l_{\max}$  разделяется на два продукта крупностью  $l_{\min} < l < l_p$  и  $l_p < l < l_{\max}$ .

В *гравитационном* методе обогащения (например, в конусном тяжелосредном сепараторе) тяжелые частицы, имеющие плотность  $\rho$ , большую плотности суспензии  $\rho_p = \text{const}$ , под действием сил гравитации и сил Архимеда  $\sum F_i > g(\rho - \rho_p)$  попадают в нижний тяжелый продукт ( $\rho > \rho_p$ ), а остальные – в легкий продукт ( $\rho < \rho_p$ ).

Таким образом, исходный продукт, частицы которого имеют различную плотность ( $\rho_{\min} > \rho > \rho_{\max}$ ), разделяется на два продукта с частицами плотностью  $\rho_{\min} < \rho < \rho_p$  и  $\rho_p < \rho < \rho_{\max}$ . Частицы, плотность которых равна плотности разделения  $\rho = \rho_p$ , распределяются поровну по этим продуктам.

Гравитационным методом обогащается подавляющая часть углей, при этом легкий продукт является угольным концентратом, так как легкие частицы содержат мало золы.

При *магнитном* методе обогащения [7] (например, в барабанном сепараторе) магнитные частицы, имеющие большую магнитную восприимчивость  $\chi$ , притягиваются магнитной системой с силой  $\chi H \text{ grad } H$  и попадают в магнитный продукт  $\chi > \chi_p$ . Остальные частицы отбрасываются радиальной силой инерции  $x_{\text{окр}}^2 \rho / R$  в немагнитный продукт  $\chi < \chi_p$  (здесь  $H$  – напряженность магнитного поля в зоне сепарации;  $x_{\text{окр}}$  – окружная скорость барабана;  $R$  – радиус барабана). В этом сепараторе разделение частиц происходит под действием суммарной силы  $\sum F_i = \chi H \text{ grad } H - x_{\text{окр}}^2 \rho / R$ . При  $\sum F_i > 0$  соответствующая частица стремится попасть в магнитный продукт, при  $\sum F_i < 0$  – в немагнитный. Для частиц, имеющих магнитную восприимчивость, равную магнитной восприимчивости разделения  $\chi_p = \text{const}$ ,  $\sum F_i = 0$ , поэтому они распределяются поровну в магнитном и немагнитном продуктах. В рассматриваемом примере

$$\chi_p = \frac{x_{\text{окр}}^2 \rho}{RH \text{ grad } H}.$$

Таким образом, исходный продукт с частицами, имеющими магнитную восприимчивость  $\chi_{\min} < \chi < \chi_{\max}$ , разделяется на два продукта с магнитной восприимчивостью  $\chi_{\min} < \chi < \chi_p$  и  $\chi_p < \chi < \chi_{\max}$ .



В ряде случаев магнитную восприимчивость минералов руды можно изменить магнетизирующим обжигом, ведущим к образованию сильномагнитного магнетита  $Fe_3O_4$  из слабомагнитного  $Fe_2O_3$ .

Магнитным методом обогащается подавляющая часть железных руд, при этом магнитный продукт является железным концентратом.

Флотационный метод обогащения (например, пенная флотация), основан на селективном прилипании минеральных частиц, отличающихся флотиремостью  $k$ , к пузырькам воздуха, поднимающимся через пульпу [6]. Прилипшие частицы – хорошо флотируемые – выносятся в пенный продукт ( $k > k_p$ ), неприлипшие остаются в камерном продукте ( $k < k_p$ ). Причиной прилипания (согласно термодинамике) является освобождение поверхностной энергии границы раздела фаз: до прилипания суммарная свободная энергия  $E_1$  поверхностей воздух пузырька – вода и минерал – вода больше энергии  $E_2$  после прилипания.

По К.А.Разумову, изменение энергии  $E_1 - E_2$  на единицу образованной поверхности газ – твердое  $S_{г-т}$  оценивает флотиремость частиц

$$k = \frac{(E_1 - E_2)}{S_{г-т}} = \sigma_{г-ж}(1 - \cos \theta),$$

где  $\sigma_{г-ж}$  – удельная поверхностная энергия границы газ – жидкость;  $\cos \theta = \frac{\sigma_{г-т} - \sigma_{ж-т}}{\sigma_{г-ж}}$  – косинус краевого угла смачивания.

Могут быть и другие меры флотиремости, например: краевой угол смачивания  $\theta = k$  или показатель  $k$  скорости кинетики флотации узкой флотационной фракции, концентрация которой  $C_i(t)$  в камере периодической флотации убывает по закону  $dC_i / dt = -kS_{г-ж}C_i$  (здесь  $S_{г-ж}$  – свободная поверхность, степень аэрации, пузырьков в единице объема пульпы).

При флотации частицы, флотиремость которых равна флотиремости разделения  $k_p = \text{const}$ , поровну распределяются в пенный продукт и хвосты. Частицы, флотиремость которых  $k > k_p$ ,

преимущественно попадают в пенный продукт, а с флотуемостью  $k < k_p$  остаются в камерном продукте. Чем больше для данной флотационной машины время флотации  $t_{\text{ф}} = \text{const}$  и степень аэрации  $S_{\text{г-ж}} = \text{const}$ , тем меньше  $k_p$ , и наоборот.

С флотуемостью  $k$  частиц коррелируется содержание  $\beta$  в них ценных компонентов. Например, при флотации молибденитовых руд частицы с большей флотуемостью  $k$  содержат больше молибдена и наоборот. Поэтому в пенном продукте ( $k > k_p$ ) среднее содержание ценного компонента выше, чем в руде.

Флотационный метод обогащения преобладает для руд цветных металлов. Его можно применять для самых разных руд, так как флотуемость минералов можно селективно изменять с помощью различных реагентов, сорбирующихся на их поверхности.

При *электрическом* методе обогащения, например в сепараторе с коронным разрядом, минеральные частицы в зоне сепарации – между заземленным барабаном и коронирующими электродами – селективно получают электрический заряд  $q$ . Отрицательно заряженные частицы ( $q < q_p$ ) движутся в сторону положительных коронирующих (и, возможно, отклоняющих) электродов под действием силы  $Eq$ , определяемой по закону Кулона, и силы инерции; остальные частицы  $q < q_p$  движутся в другую сторону.

В некоторых случаях селективность заряда  $q$  коррелируется с электропроводностью  $\lambda$  частиц: электропроводные частицы ( $\lambda > \lambda_p$ ), скользя по металлической поверхности барабана, получают заряд  $q < q_p$ , толкающий их к коронирующему электроду, и наоборот. Этим путем минералы разделяются на проводники, полупроводники и диэлектрики.

Селективность заряда частиц можно предварительно изменять с помощью реагентной обработки поверхности минералов, что расширяет число руд, способных разделяться в электрическом поле.

*Радиометрические* (флотометрический, рентгенолюминесцентный и др.) методы обогащения основаны на различии в светимости  $\phi$  (излучательной способности) минеральных частиц. Частицы

с высокой светимостью  $\varphi > \varphi_p$  попадают в «светящийся» продукт, остальные с  $\varphi < \varphi_p$  – в «несветящийся». Может быть использовано излучение как видимой, так и невидимой части электромагнитного спектра.

Распознавание частиц осуществляется с помощью автоматизированных быстродействующих светочувствительных систем, состоящих из источника, облучающего каждую частицу в зоне сепарации, и приемника вторичного излучения от распознаваемой частицы. Из-за необходимости «просматривать» отдельно каждую частицу производительность радиометрических сепараторов при обогащении мелкого материала уменьшается (пропорционально кубу размера частиц). Светимость разделения  $\varphi_p = \text{const}$  регулируется изменением порога чувствительности автоматической системы.

Обобщенно сущность сепарации минералов сводится к следующему (рис.1.1, а). Цель сепарации – выделить в концентрат из исходного минерального сырья те или иные полезные минералы на основе различия их физических свойств  $\xi$  ( $l, \rho, \chi, k, q, \varphi$ ). В рабочих зонах обогатительных сепарационных аппаратов под действием тех или иных физических сил  $\sum F_i$  происходит расслоение, разъединение, разделение частиц, причем частицы с одними физическими свойствами ( $\xi > \xi_p$ ) движутся в одну часть рабочей зоны (концентрат), а частицы с другими свойствами ( $\xi < \xi_p$ ) – в другую (хвосты).

С физическим свойством  $\xi$  каждой минеральной частицы коррелируется содержание в ней ценного компонента  $\beta$ : с ростом  $\xi$  растёт  $\beta$  (или наоборот). Поэтому в концентрате ( $\xi > \xi_p$ ) среднее содержание ценного компонента  $\bar{\beta}_k$  много выше, чем в исходной руде  $\bar{\beta}_{\text{исх}}$  и тем более в хвостах ( $\xi < \xi_p$ ), т.е.  $\bar{\beta}_k > \bar{\beta}_{\text{хв}}$ . Так получается обогащенный ценным компонентом готовый продукт – концентрат. Ценным компонентом может быть металл или химическое соединение, например  $P_2O_5$ .

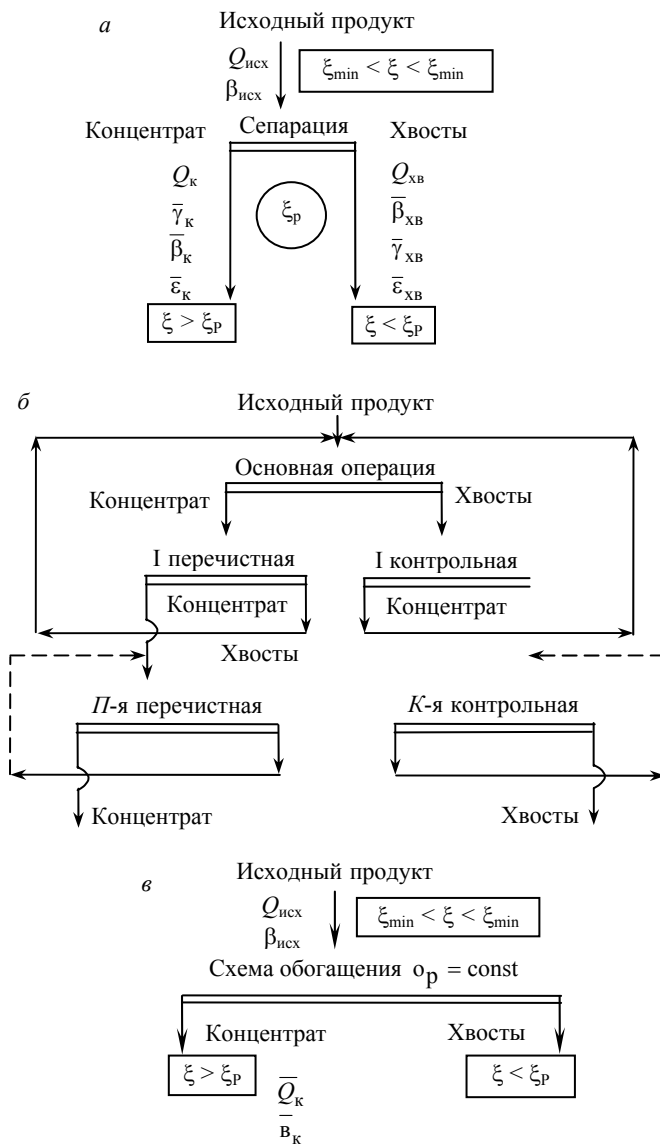


Рис.1.1. Схема операции (а), детальная каноническая схема (б) и принципиальная блок-схема (в) обогащения

Часто, чтобы получить четкое без взаимного засорения фракциями разделение на два продукта  $\xi > \xi_p$  и  $\xi < \xi_p$ , одной операции сепарации недостаточно, поэтому применяют технологические схемы, состоящие из нескольких операций (рис.1.1, б). Схемы, в которых промежуточные циркулирующие продукты присоединяются к исходному питанию предыдущей операции, наиболее распространены.

В целом технологическая схема обогащения представляет собой высокоточный сепаратор, который разделяет исходное сырье на два продукта ( $\xi > \xi_p$  и  $\xi < \xi_p$ ) почти без их взаимного засорения (рис.1.1, в). В большинстве случаев ценный компонент находится не только в «концентратных» частицах ( $\xi > \xi_p$ ), но и в «хвостовых»  $\xi < \xi_p$ , хотя здесь содержание ниже. Из-за этого даже при идеальной сепарации, когда все без исключения частицы  $\xi > \xi_p$  попадают в концентрат, а все частицы с  $\xi < \xi_p$  в хвосты, часть ценного компонента теряется в хвостах. Таким образом, идеальная сепарация еще не дает идеального обогащения; последнему способствует правильная рудоподготовка. Сепарация по физическому свойству  $\xi$  – необходимое, но недостаточное условие обогащения одного из продуктов ценным компонентом.

*Технологические показатели обогащения* отдельной операции или схемы в целом: выход концентрата  $\bar{\gamma}_k$ , содержание ценного (вредного) компонента в концентрате  $\bar{\beta}_k$ , извлечение ценного компонента в концентрат  $\bar{\epsilon}_k$ , – оценивают эффективность обогащения.

Выход концентрата в процентах определяется отношением производительности по концентрату  $Q_k$  к производительности по исходной руде  $Q_{исх}$  :

$$\bar{\gamma}_k = 100 Q_k / Q_{исх} .$$

**Извлечение** определяется отношением производительности (масс) ценного компонента:

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{100 Q_k \bar{\beta}_k}{Q_{исх} \bar{\beta}_{исх}} = \frac{\bar{\gamma}_k \bar{\beta}_k}{\bar{\beta}_{исх}}.$$

Аналогичная формула для хвостов

$$\bar{\gamma}_{хв} = 100 Q_{хв} / Q_{исх};$$

$$\bar{\varepsilon}_{хв} = \frac{100 Q_{хв} \bar{\beta}_{хв}}{Q_{исх} \bar{\beta}_{исх}} = \frac{\bar{\gamma}_{хв} \bar{\beta}_{хв}}{\bar{\beta}_{исх}}.$$

Очевидны балансные соотношения:

$$Q_k + Q_{хв} = Q_{исх}; \quad \bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_{хв} = \bar{\gamma}_{исх} = 100\%;$$

$$\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{хв} = \bar{\varepsilon}_{исх} = 100\%.$$

Эти общепринятые технологические показатели справедливы как для отдельной операции сепарации (сепаратора), так и для любой технологической схемы в целом.

Выделим три главных элемента обогатительной сепарации.

1. Минеральные частицы сырья после рудоподготовки, включающей дробление, измельчение и возможную обработку реагентами, различаются по физическому свойству  $\xi$  в диапазоне  $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$  (или даже по нескольким свойствам, например  $\rho$  и  $\chi$ ).

2. Содержание  $j$ -го ценного компонента  $\beta_j$  в отдельных частицах зависит от физического свойства  $\xi$ .

3. Отдельные сепараторы или схемы обогащения разделяют частицы, используя различия физических свойств, на концентрат ( $\xi_p < \xi < \xi_{\max}$ ) и хвосты ( $\xi_{\min} < \xi < \xi_p$ ). При этом вследствие зависимости содержания  $\beta_j$  ценного компонента в частицах от их физического свойства  $\xi$  происходит обогащение одного из продуктов, концентрата, ценным компонентом, т.е.  $\bar{\beta}_k < \bar{\beta}_{исх}$ .

Таким образом, используя физическое свойство  $\xi$ , сепаратор механически перемещает частицу, и она несет ценный компонент  $\beta_j$  в концентрат, т.е.  $\xi$  – первично,  $\beta_j$  – вторично.

## 1.2. Понятия о фракционном составе минеральных материалов

Перейдем к выбору методов количественной характеристики минерального сырья (а также концентратов, хвостов, промпродуктов и любых минеральных смесей), необходимых и достаточных для оценки обогатимости.

Частицы обогащаемого материала – сырье или промежуточные продукты, как, например, в рассмотренных технологических схемах, – различаются прежде всего физическими свойствами  $\xi$ , где общим символом  $\xi$  обозначается любое частное физическое свойство.

Для сепарации при обогащении используют физические свойства минеральных частиц и сростков:

Свойство, единицы	Обогатительные процессы, в которых свойство используется как главное, – примеры сырья
Крупность $l$ , мм	Грохочение, классификация (в некоторых аппаратах влияет еще и плотность)
Плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup> , т/м <sup>3</sup>	Гравитационные методы: отсаднотяжелосредная сепарация, шлюзы, струйные желоба, винтовые сепараторы (в ряде аппаратов оказывает влияние крупность) – уголь
Магнитная восприимчивость $\chi$ , см <sup>3</sup> /г	Магнитная сепарация – железные руды
Флотируемость $k$ , м/с	Флотация – полиметаллические руды
Удельная электропроводность, $\lambda$ , Ом <sup>-1</sup> ·см <sup>-1</sup>	Электрическая сепарация – ильменитовые, рутиловые, хромитовые руды
Удельный электрический заряд (наведенный) $q$ , Кл/см <sup>3</sup>	Электрическая сепарация – асбестовые руды, полевошпатное сырье
Светимость, отражательная способность, излучательная способность и т.п. $\phi$ , различные единицы	Радиометрическая сепарация – фотометрические, рентгенолюминесцентные и др. сепараторы – флюоритовые, алмазные, урановые руды.

Обогатительные сепараторы «чувствуют» именно различие частиц по  $\xi$ , а не разницу в содержании  $\beta$  ценного (вредного) компонента в частицах. Как упоминалось, для обогащения «с точки зрения» любых сепараторов физическое свойство частиц первично, а содержание вторично; для потребителей концентратов, наоборот,

интерес представляет, как правило, только содержание, что на практике часто вуалирует важнейшую роль физических свойств частиц.

*Физические свойства*  $\xi$  начнем рассматривать с понятия «диапазон изменения физического свойства смеси частиц». Запись: физическое свойство  $\xi$  смеси частиц изменяется в диапазоне  $[\xi_{\min} - \xi_{\max}]$ ,  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  или  $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$ , – означает, что в смеси имеются частицы, у которых  $\xi = \xi_{\min}$ ,  $\xi = \xi_{\min} + \Delta\xi$ ,  $\xi = \xi_{\min} + 2\Delta\xi$  и так далее до  $\xi = \xi_{\max}$ .

Особенность минерального сырья и продуктов обогащения заключается в том, что из-за наличия сростков любое физическое свойство  $\xi$  смеси частиц изменяется внутри диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  непрерывно. Дискретное изменение является частным случаем, например, для смеси, состоящей из чистых минералов.

*Конечная фракция*  $[\xi_i, \xi_i + \Delta\xi_i]$  – это частицы из какой-либо части диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ ; ее представляют только те частицы смеси, для которых физическое свойство находится между границами фракции  $\xi_i < \xi < \xi_i + \Delta\xi_i$  или  $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}$ . Размер (ширина) фракции определяется как  $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ . Например, фракция плотности для угля между границами  $\rho_i = 1,5 \text{ т/м}^3$  и  $\rho_{i+1} = 1,7 \text{ т/м}^3$  имеет размер  $\Delta\rho_i = 1,7 - 1,5 = 0,2 \text{ т/м}^3$ .

В частных случаях гравитационного, магнитного, флотационного, электрического, радиометрического обогащения получим из общей фракции  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  следующие частные фракции: плотности  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ , магнитной восприимчивости  $[\chi_i, \chi_{i+1}]$ , флотуемости  $[k_i, k_{i+1}]$ , удельной электропроводности  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ , удельного заряда  $[q_i, q_{i+1}]$ , светимости  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ .

*Бесконечно узкая, или элементарная, фракция*  $[\xi_i, \xi_i + d\xi]$  получается, когда размер конечной фракции стремится к нулю  $\Delta\xi_i = d\xi \rightarrow 0$ ; это понятие необходимо для строгих количественных соотношений, характеризующих процессы обогащения.



Разбиение диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  на конечные фракции может быть произведено с различным шагом  $\Delta\xi_i$  – равномерным или неравномерным. При равномерном разбиении на  $n$  фракций границы их находят в точках:  $\xi_{\min}, \xi_{\min} + \Delta\xi, \xi_{\min} + 2\Delta\xi, \dots, \xi_{\max}$ . При этом  $\Delta\xi = (\xi_{\max} - \xi_{\min})/n$ . Например, при неравномерном разбиении диапазон крупности [0; 20 мм] руды разбит на фракции: [0; 3 мм], [3; 8 мм] и [8; 20 мм].

Массовая доля (выход)  $i$ -й фракции  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  определяется отношением массы  $P_i$  ее частиц к суммарной массе  $\sum P_i$  частиц всех фракций, т.е. к массе всех частиц смеси в диапазоне  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ . Долю  $i$ -й фракции будем обозначать двояко:

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i(\xi_i)\Delta\xi_i = P_i / \sum_{i=1}^n P_i. \quad (1.1)$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i = 1. \quad (1.2)$$

Обозначение  $\gamma_i(\xi_i)\Delta\xi_i$  в формуле (1.1) позволяет разбивать долю (выход)  $\bar{\gamma}_i$  на два сомножителя: второй сомножитель представляет собой размер фракции  $\Delta\xi_i$ , а первый –  $\gamma(\xi_i)$  вводит новое важнейшее понятие, которое рассмотрим ниже.

Предварительно заметим, что при равномерном шаге  $\Delta\xi_i = \Delta\xi = \text{const}$  множитель  $\gamma(\xi_i)$  пропорционален доле  $i$ -й фракции, так как

$$\gamma(\xi_i) = \bar{\gamma}_i / \Delta\xi_i. \quad (1.3)$$

Величина  $\gamma(\xi_i)$  характеризует массовый вклад каждой  $i$ -й фракции в смеси и зависит от  $\xi_i$ , так как доля одних фракций может быть больше, а других меньше; поэтому вводим этот сомножитель как функцию от  $\xi_i$ .

Чтобы эта функция была пригодна не только для дискретных границ фракций  $\xi_i$ , но и для любого непрерывно изменяющегося

значения  $\xi$  внутри диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ , устремим размер фракций к нулю  $\Delta\xi = d\xi \rightarrow 0$ . Тогда получим следующее строгое определение: *дифференциальная функция распределения*  $\gamma(\xi)$  частиц смеси по физическому свойству  $\xi$  – такая функция, для которой произведение  $\bar{\gamma}_{эл} = \gamma(\xi)d\xi$  равно массовой доле элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в смеси. Эквивалентное определение: функция  $\gamma(\xi)$  представляет собой отношение доли  $\bar{\gamma}_{эл}$  элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  к ее размеру  $d\xi$ . Поскольку доля – величина безразмерная, то размерность функции  $\gamma(\xi)$  всегда обратна размерности соответствующего физического свойства  $\xi$ :

$$[\gamma(\xi)] = 1/[\xi]. \quad (1.4)$$

Например,  $[\gamma(\rho)] = [м^3/т]$ , если  $[\rho] = [т/м^3]$ ;  $[\gamma(t)] = [мм^{-1}]$  при  $[l] = [мм]$ .

Возможно другое определение: функция  $\gamma(\xi)$  представляет собой дифференциальное распределение, или плотность распределения твердого по элементарным фракциям. В сходном смысле набор выходов фракций  $\bar{\gamma}_i (\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n)$  представляет собой интегральное распределение твердого по конечным фракциям. Полный набор выходов фракций  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n$  совместно с заданными размерами фракций приближенно эквивалентен функции  $\bar{\gamma}(\xi)$ . Последняя заменяет и обобщает этот набор при  $\Delta\xi_i \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$ .

Приближенно значения функции  $\gamma(\xi)$  в дискретных точках  $\xi_i$  могут быть вычислены по известным выходам (долям) конечных фракций с помощью формулы (1.3) делением выхода  $\bar{\gamma}_i$  на размер фракции  $\Delta\xi_i$ . Это относится как к равномерному, так и к неравномерному разбиению диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$

Введением функции  $\gamma(\xi)$  – дифференциального распределения минеральных частиц по свойству  $\xi$ , заканчивается первая,

количественная характеристика фракционного состава минеральных материалов, учитывающая физические свойства  $\xi$  частиц (рис.1.2).

Введем функцию содержания  $\beta(\xi)$  ценных компонентов (или вредных примесей) в частицах. Для этого достаточно знать среднее содержание компонента  $\bar{\beta}_i$  в каждой  $i$ -й фракции  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ , т.е. набор значений  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$ . При уменьшении размера фракций  $\Delta \bar{\xi}_{i1} \rightarrow 0$  и соответствующем увеличении их числа в диапазоне  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  набор чисел заменяется непрерывной функцией  $\beta(\xi)$ . Например, в угле при изменении плотности частиц от  $\rho$  до  $\rho_{\max} = 2,5 \text{ т/м}^3$  содержание золы  $\beta_3(\rho)$  линейно нарастает от нуля до 100 %.

Внутри каждой узкой, или элементарной, фракции отдельные частицы могут иметь различные содержания; набор  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$  и функция  $\beta(\xi)$  отражают средние содержания внутри фракции. Число функций содержания  $\beta(\xi)$  равно числу интересующих нас компонентов сырья. Например, для медно-никелевой руды одна функция указывает содержание во фракциях меди, а вторая – никеля. Зависимость содержания компонента от физического свойства частиц  $\beta(\xi)$  является второй и последней характеристикой состава сырья.

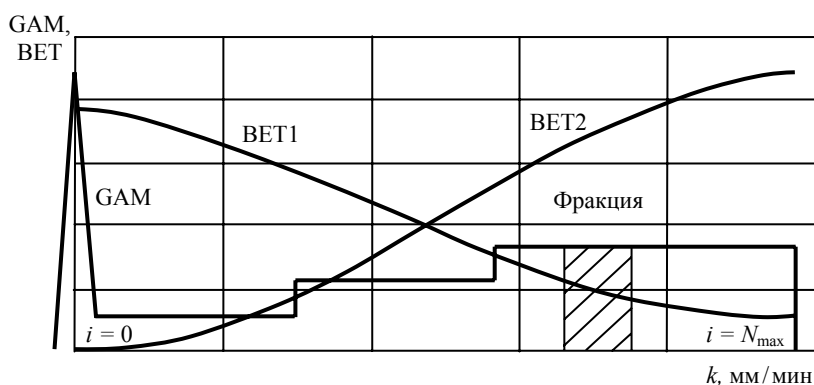


Рис.1.2. Пример фракционного состава сырья; физическим свойством  $\xi$  здесь является флотуемость  $k$  минеральных частиц ( $\xi = k, \gamma = \text{GAM}, \beta = \text{BET}$ ).

Идея типового метода *экспериментального определения* выходов  $\bar{\gamma}_i = \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i$  фракций и содержаний  $\bar{\beta}_i$  в них компонента, а также функций  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  сводится к следующему. Пробу исходного материала взвешивают для получения  $\sum P_i$  [см. формулу (1.1)]. Затем внутри диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  ее разделяют на  $n = 4 - 10$  фракций с размерами  $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \dots, \Delta\xi_n$ . Для сепарации в зависимости от исследуемого физического свойства применяют те или иные методы и аппаратуру. Так, при разделении по крупности ( $\xi = 1$ ) применяют ситовой или седиментационный анализ, по плотности ( $\xi = \rho$ ) – денсиметрический, по магнитной восприимчивости ( $\xi = \chi$ ) – магнитный, и т.д. После сепарации каждую  $i$ -ю фракцию взвешивают для нахождения  $P_i$  и  $\bar{\gamma}_i = P_i / \sum P_i$ ; параллельно в каждой фракции определяют содержание компонента  $\bar{\beta}_i$ . По этим данным ( $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\beta}_i$ ) находят функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  (табл.1.1).

Таблица 1.1

**Фракционный состав угля, полученный денсиметрическим анализом (разделением пробы в тяжелых жидкостях)**

Границы фракции $\rho_i, \text{т/м}^3$	Масса фракции $P_i, \text{кг}$	Фракционный состав		
		Доля фракции $\bar{\gamma}_i = \gamma(\rho_i)\Delta\rho_i =$ $= P_i / \sum P_i$	Содержание золы во фракции $\bar{\beta}_i \approx \beta(\rho), \%$	$\gamma$ -функция $\gamma(\rho) \approx \gamma_i / \Delta\rho_i, \text{м}^3/\text{т}$
1	2	3	4	5
1,1-1,4	0,4	0,4	10	1,33
1,4-1,7	0,2	0,2	30	0,67
1,7-2	0,15	0,15	50	0,5
2-2,3	0,15	0,15	70	0,5
2,3-2,6	0,1	0,1	90	0,33

Итак, фракционный состав минерального материала может быть охарактеризован дискретно наборами чисел  $\Delta\xi_i$ ,  $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\beta}_i$  либо непрерывно функциями  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ .

Функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  являются наиболее точными и полными обогатительными характеристиками состава, они необходимы и достаточны для определения состава минерального материала. Так, по известным функциям  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  вычисляют любые другие характеристики материала.

Выход любой конечной фракции  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  определяется по формуле

$$\bar{\gamma}_i = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \gamma(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

В частном случае, при постоянстве подынтегральной функции, получается формула (1.1).

Среднее содержание компонента в конечной фракции  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  определяется по формуле

$$\bar{\beta}_i = \bar{\gamma}_i^{-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \beta(\xi) \gamma(\xi) d\xi, \quad (1.6)$$

где  $\bar{\gamma}_i$  – относительная масса всего твердого в  $i$ -й конечной фракции (выход) (%), интеграл равен относительной массе компонента в этой фракции.

Если функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  аппроксимировать к ступенчатому дискретному виду с шагами  $\Delta\xi_i$  внутри диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ , то формулы (1.5) и (1.6) вследствие постоянства подынтегральных функций  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  на каждом  $\Delta\xi_i$  дадут упомянутые выходы  $\bar{\gamma}_i$  и содержания  $\bar{\beta}_i$  для всех фракций.

Если в формуле (1.5) конечная фракция занимает весь диапазон  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ , то доля ее равна единице. В результате получается следующее условие нормировки функции  $\gamma(\xi)$ :

$$\int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \gamma(\xi) d\xi = 1. \quad (1.7)$$

В этом случае формула (1.6) показывает *среднее содержание компонента* в исследуемом материале (например, в исходном продукте, концентрате) в целом:

$$\bar{\beta}_i = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \gamma(\xi) d\xi.$$

Вместо  $\beta(\xi)$  можно, что иногда целесообразно, ввести распределение компонента по фракциям  $\gamma_{\text{комп}}(\xi) = \gamma(\xi)\beta(\xi)/\bar{\beta}$ , которое сравнимо с распределением твердого по фракциям  $\gamma(\xi)$ . Применение  $\beta(\xi)$  делает теорию более простой.

### 1.3. Понятие о сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов и схем обогащения

Перейдем к характеристикам обогатительных аппаратов и схем обогащения.

*Извлечение твердого конечной фракции*  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  или  $[\xi_i, \xi_i + \Delta\xi_i]$  в концентрат отдельной операции или схемы обогащения (рис.1.3) равно соотношению масс (производительностей) твердого этой фракции в концентрате  $P_{ик}$  и в исходном продукте  $P_{исх}$ :

$$\bar{\varepsilon}_{ик} = \frac{P_{ик}}{P_{исх}} = \frac{Q_k \bar{\Gamma}_{ик}}{Q_{исх} \bar{\Gamma}_{исх}} = \frac{Q_k \Gamma_{ик}(o_i) D o_i}{Q_{исх} \Gamma_{исх}(o_i) D o_i}, \quad (1.8)$$

где  $Q_k$  и  $Q_{исх}$  – полные производительности по твердому соответственно для концентрата и исходного материала, т/ч.

В числителе формулы (1.8) произведение  $Q_k$  на выход (долю) фракции  $\bar{\gamma}_{ik} = \gamma_k(\xi_i) \Delta \xi_i$  дает производительность по этой фракции для концентрата; в знаменателе – то же для исходного продукта. Здесь  $\gamma_k(\xi)$  характеризует распределение твердого по фракциям в концентрате, а  $\gamma_{исх}(\xi)$  – в исходном продукте.

«Разделительные числа», или ряд извлечений конечных фракций  $\bar{\varepsilon}_{1k}, \bar{\varepsilon}_{2k}, \dots, \bar{\varepsilon}_{nk}$ , получим разбиением полного диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  на  $n$  конечных фракций  $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \dots, \Delta \xi_n$ , применив для каждой фракции формулу (1.8).

При  $\Delta \xi_i \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  этот ряд превращается в непрерывную функцию – сепарационную характеристику

$$\varepsilon_k(o) = \frac{Q_k \Gamma_k(o) do}{Q_{исх} \Gamma_{исх}(o) do} = \frac{\bar{\Gamma}_k \Gamma_k(o)}{\Gamma_{исх}(o)}, \quad (1.9)$$

где  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{исх}$  – выход концентрата, доли единицы.

Сепарационная характеристика операции или схемы (рис.1.3) представляет собой непрерывную функцию  $\varepsilon_k(\xi)$ , показывающую зависимость извлечения элементарных фракций  $[\xi, \xi + d\xi]$  в концентрат от физического свойства  $\xi$ . Другие возможные термины для  $\varepsilon_k(\xi)$  – разделительная функция, главная технологическая характеристика сепаратора (или схемы), кривая извлечений фракций в концентрат и т.д.

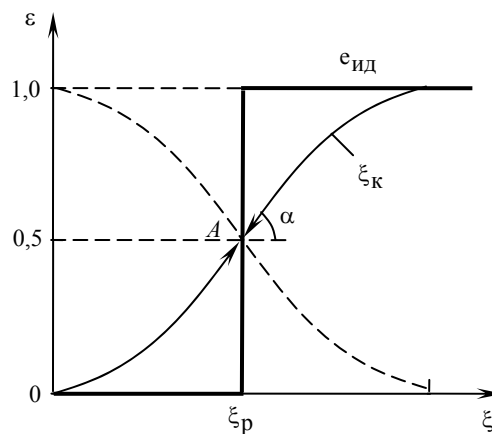


Рис.1.3. Сепарационные характеристики

Сепарационная характеристика по хвостам  $\varepsilon_{\text{хв}}(\xi)$  получается из  $\varepsilon_{\text{к}}(\xi)$  по формуле

$$\varepsilon_{\text{к}}(\xi) + \varepsilon_{\text{хв}}(\xi) = 1$$

Благодаря этому равенству для двухпродуктовых схем и сепараторов достаточно знать только одно из слагаемых:  $\varepsilon_{\text{к}}(\xi)$  или  $\varepsilon_{\text{хв}}(\xi)$ .

*Баланс по любой элементарной фракции* для двухпродуктовой операции (или схемы в целом)

$$q_{\text{к}}(\xi) + q_{\text{хв}}(\xi) = q_{\text{исх}}(\xi); \quad q_{\text{к}}(\xi) = \varepsilon_{\text{к}}(\xi) q_{\text{исх}}(\xi),$$

где  $q_{\text{к}}(\xi) = Q_{\text{к}} \gamma_{\text{к}}(\xi) d\xi$ ;  $q_{\text{хв}}(\xi) = Q_{\text{хв}} \gamma_{\text{хв}}(\xi) d\xi$  – производительности по узкой фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$ .

Идеальная сепарационная характеристика имеет ступенчатый вид (рис.1.3).

$$\varepsilon_{\text{ид}}(\xi) = 1(\xi - \xi_{\text{р}}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \xi < \xi_{\text{р}}; \\ 0,5 & \text{для } \xi = \xi_{\text{р}}; \\ 1 & \text{для } \xi > \xi_{\text{р}}. \end{cases}$$

Здесь для краткости применен символ единичной ступенчатой функции  $1(\xi - \xi_{\text{р}})$ ; константа  $\xi_{\text{р}}$  указывает точку, в которой происходит скачок на единицу.

*Неидеальная сепарационная характеристика* плавно изменяется от нуля до единицы (рис.1.3). Здесь в зависимости от типа сепаратора или схемы возможны разные кривые. Реальные сепараторы и схемы, как правило, имеют неидеальные сепарационные характеристики.

*Граница разделения*  $\xi_{\text{р}} = \text{const}$  соответствует элементарной фракции, которая наполовину извлекается в концентрат, наполовину – в хвосты. Координата границы  $\xi_{\text{р}}$  может быть вычислена по известной  $\varepsilon_{\text{к}}(\xi)$  из уравнения:  $\varepsilon_{\text{к}}(\xi_{\text{р}}) = 0,5$ .



При графическом решении этого уравнения достаточно на высоте  $0,5\varepsilon$  провести горизонтальную линию и из точки пересечения  $A$  опустить перпендикуляр на ось абсцисс.

Во всех сепараторах и схемах обогащения предусмотрены возможности для изменения положения границы разделения в желаемом направлении, в тяжелосреднем сепараторе, например, изменением плотности разделения.

Крутизна сепарационной характеристики

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{d\varepsilon_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi = \xi_p}$$

в рабочей точке  $A$ , соответствующей границе разделения  $\xi = \xi_p$ , является одной из оценок степени несовершенства сепарации для операции или схемы.

Чем больше крутизна, тем ближе сепарационная характеристика к идеальной. Совершенствование сепаратора или схемы – это, в первую очередь, повышение крутизны в рабочей точке.

Граница разделения  $\xi_p$  и крутизна в рабочей точке  $\operatorname{tg} \alpha$  – главные параметры сепарационной характеристики  $\varepsilon_k(\xi)$ . По этим параметрам можно приближенно оценить функцию  $\varepsilon_k(\xi)$ , например, нарисовав для наглядности ее график.

Идея типового метода *экспериментального определения сепарационной характеристики* основана на определяющей формуле (1.9). Для работающего сепаратора или схемы нужно измерить производительности  $Q_{\text{исх}}$  и  $Q_k$  и вычислить выход концентрата  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{\text{исх}}$ ; взять пробы питания и концентрата и провести их фракционный анализ для определения функций распределения  $\gamma_{\text{исх}}(\xi)$  и  $\gamma_k(\xi)$ ; произвести расчет по формуле (1.9). Определения функций  $\beta(\xi)$  в пробах не требуется.

Важными являются теоретические методы нахождения сепарационных характеристик, основанные на изучении закономерностей движения минеральных частиц в зонах сепарации под действием

различных сил. Такой подход позволяет найти общие пути совершенствования аппаратов и схем обогащения.

Рассмотренная сепарационная характеристика является необходимой и достаточной для двухпродуктовых аппаратов и схем.

Введенные функции  $\gamma(o)$ ,  $\nu(o)$  и  $\epsilon(o)$  могут быть представлены любой из трех обычных форм: графиком, таблицей, математической формулой. Для практических расчетов (особенно при использовании ЭВМ) удобнее таблицы.

#### **1.4. Прогнозирующее вычисление технологических показателей обогащения и фракционного состава продуктов для двухпродуктовых аппаратов и схем**

Итак, минеральный материал можно охарактеризовать двумя функциями  $\gamma(o)$  и  $\nu(o)$ , а сепаратор или схему – одной  $\epsilon_k(o)$ . Эти характеристики применимы для прогноза технологических показателей обогащения, а также прогноза фракционного состава концентрата и хвостов.

Начнем с *примера идеальной сепарации*. Исходный материал (уголь) засорен породой; надо отделить малозольные компоненты угля от зольной породы, которая является более плотной. Материал сначала дробят, чтобы отделить друг от друга малозольные легкие и зольные тяжелые частицы.

В результате рудоподготовки диапазон изменения физического свойства, т.е. плотности  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , растягивается от  $\rho_{\min} = 1,2 \text{ т/м}^3$  до  $\rho_{\max} = 3 \text{ т/м}^3$ , а зольность частиц в этом диапазоне изменяется от нуля до 100 % (рис.1.3). Далее необходимо сепарировать из исходной смеси в концентрат по возможности все легкие частицы с  $\rho < \rho_p$ . Для этого исходный материал направляется в сепаратор с тяжелой суспензией, имеющей плотность разделения  $\rho_p = 1,8 \text{ т/м}^3$ . Порода с  $\rho > \rho_p$  тонет, уголь с  $\rho < \rho_p$  всплывает – так происходит гравитационное разделение в суспензионном сепараторе. В результате утонувший продукт (хвосты) обогащается золой, среднее

содержание золы  $\bar{\beta}_{\text{хв}}$  в нем выше, чем среднее содержание ее в исходном  $\bar{\beta}_{\text{исх}}$ ; всплывший продукт (концентрат) обедняется золой и  $\bar{\beta}_{\text{к}} < \bar{\beta}_{\text{исх}}$ . Для функции  $\gamma_{\text{исх}}(\rho)$  считаем распределение равномерным. Если плотность суспензии в упомянутом сепараторе  $\rho_{\text{сусп}} = \rho_{\text{р}} = 1,8 \text{ т/м}^3$ , то всплывают частицы, имеющие  $\rho < 1,8 \text{ т/м}^3$  ( $1,2 < \rho < 1,8 \text{ т/м}^3$ ), а тонут частицы с  $\rho > 1,8 \text{ т/м}^3$ . Таким образом, происходит разделение смеси по физическому свойству  $\rho$  частиц.

Вычислив площади под графиком функции  $\gamma_{\text{исх}}(\rho)$  на участках  $\rho < 1,8 \text{ т/м}^3$  и  $\rho > 1,8 \text{ т/м}^3$ , найдем выход всплывших (концентрата) и утонувших (хвостов) частиц:

$$\bar{\gamma}_{\text{к}} = \int_{c_{\text{min}}}^{c_{\text{р}}} \gamma_{\text{исх}}(\rho) d\rho; \quad \bar{\gamma}_{\text{хв}} = \int_{c_{\text{р}}}^{c_{\text{max}}} \gamma_{\text{исх}}(\rho) d\rho = 1 - \bar{\gamma}_{\text{к}}. \quad (1.10)$$

Функция  $\beta(\rho)$  – линейная:  $\beta = -66,7 + 55,5\rho$ ; для многих месторождений зольность зависит от плотности частиц именно линейно.

С помощью функций  $\gamma(\rho)$  и  $\beta(\rho)$  можно вычислить средние содержания компонента (золы) в исходном – продукте, концентрате и хвостах:

$$\bar{B}_{\text{исх}} = \int_{c_{\text{min}}}^{c_{\text{max}}} \Gamma_{\text{исх}}(c) \mathbf{B}(c) dc; \quad (1.11)$$

$$\bar{B}_{\text{к}} = \bar{\Gamma}_{\text{к}}^{-1} \int_{c_{\text{min}}}^{c_{\text{р}}} \mathbf{B}(c) \Gamma_{\text{исх}}(c) dc; \quad (1.12)$$

$$\bar{B}_{\text{хв}} = \bar{\Gamma}_{\text{хв}}^{-1} \int_{c_{\text{р}}}^{c_{\text{max}}} \mathbf{B}(c) \Gamma_{\text{исх}}(c) dc. \quad (1.13)$$

Эти формулы являются частным случаем формулы (1.6) для содержания в конечной фракции, когда за конечные фракции приняты  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ ,  $[\rho_{\min}, \rho_p]$ ,  $[\rho_p, \rho_{\max}]$ . Из  $\bar{\gamma}_k$ ,  $\bar{\gamma}_{XB}$ ,  $\bar{B}_k$ ,  $\bar{B}_{XB}$ ,  $\bar{B}_{исх}$  обычным путем можно найти извлечения.

Для рассматриваемого примера получим следующие численные результаты:

$$\bar{\gamma}_k = \int_{1,2}^{1,8} \frac{d\rho}{3-1,2} = 0,55\rho \Big|_{1,2}^{1,8} = 0,55(1,8-1,2) = 0,333 = 33,3\% ;$$

$$\bar{\gamma}_{XB} = 1 - \bar{\gamma}_k = 1 - 0,333 = 0,667 = 66,7\% ;$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{исх} &= \int_{1,2}^3 (3-1,2)^{-1} (-66,7 + 55,5\rho) d\rho = (3-1,2)^{-1} \times \\ &\times \left( -66,7\rho + \frac{55,5\rho^2}{2} \right) \Big|_{1,2}^3 = 50\% ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_k &= 0,333^{-1} \int_{1,2}^{1,8} (3-1,2)^{-1} (-66,7 + 55,5\rho) d\rho = [0,333(3-1,2)]^{-1} \times \\ &\times \left( -66,7\rho + \frac{55,5\rho^2}{2} \right) \Big|_{1,2}^{1,8} = 16,6\% ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{XB} &= 0,667^{-1} \int_{1,8}^3 (3-1,2)^{-1} (-66,7 + 55,5\rho) d\rho = [0,667(3-1,2)]^{-1} \times \\ &\times \left( -66,7\rho + \frac{55,5\rho^2}{2} \right) \Big|_{1,8}^3 = 66,7\% . \end{aligned}$$

Прогноз показателей идеальной сепарации по формулам (1.10) – (1.13) можно сделать для любой плотности разделения, а также для любой формы функций фракционного состава сырья.

После сепарации по физическому свойству  $\rho$  произошло изменение содержания компонента в обоих продуктах, полученных из одного исходного. Если бы функция  $\beta(\rho)$  была горизонтальной, т.е. содержания во всех фракциях были бы одинаковы, то даже при идеальной сепарации средние содержания в концентрате и хвостах были бы равны друг другу и обогащения бы не произошло. Следовательно, идеальная сепарация не дает идеального обогащения; для этого требуется еще и идеальная рудоподготовка со ступенчатой функцией  $\beta(\xi)$ .

Формулы (1.10) – (1.13) характеризуют идеальную гравитационную сепарацию, когда сепарационная характеристика имеет ступенчатый характер.

Формулы прогноза технологических показателей для любого метода обогащения при идеальной сепарации имеют вид

$$\bar{\gamma}_k = \int_{\xi_p}^{\xi_{\max}} \gamma_{\text{исх}} \approx \sum_{\xi_p}^{\xi_{\max}} \gamma_{\text{исх}}(\xi_i) \Delta \xi_i = \sum_{\xi_p}^{\xi_{\max}} \bar{\gamma}_{\text{исх}} ; \quad (1.14)$$

$$\beta_k = \bar{\gamma}_k^{-1} \int_{\xi_p}^{\xi_{\max}} \beta(\xi) \gamma(\xi) d\xi \approx \bar{\gamma}_k^{-1} \sum_{\xi_p}^{\xi_{\max}} \beta(\xi_i) \gamma_{\text{исх}}(\xi_i) \Delta \xi_i . \quad (1.15)$$

Если подынтегральные выражения  $\gamma_{\text{исх}}(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  не являются простыми, как в рассмотренном примере, то при расчетах интегрирование заменяется суммированием: в формуле (1.14) суммируются доли (выходы)  $\bar{\gamma}_{\text{исх}}$  фракций в диапазоне концентрата  $[\xi_p, \xi_{\max}]$ ; в формуле (1.15) – произведения этих долей  $\bar{\gamma}_{\text{исх}}$  на содержания  $\beta(\xi_i)$  во фракциях в том же диапазоне концентрата. Формул для  $\bar{\gamma}_k$  и  $\bar{\beta}_k$  достаточно, так как  $\bar{\gamma}_{\text{хв}}$ ,  $\bar{B}_{\text{хв}}$ ,  $\bar{B}_{\text{исх}}$ ,  $\bar{e}_k$ ,  $\bar{e}_{\text{хв}}$  вычисляются по балансным формулам:

$$\bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_{\text{хв}} = 1; \quad \bar{\gamma}_k \bar{B}_k + \bar{\gamma}_{\text{хв}} \bar{B}_{\text{хв}} = \bar{B}_{\text{исх}} .$$

Разделение («разрезание») полного диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  в точке  $\xi = \xi_p = \text{const}$  на зону концентрата  $\xi > \xi_p$  и зону хвостов  $\xi < \xi_p$ ,  $[\xi_{\min}, \xi_p]$  без взаимного засорения фракций концентрата и хвостов является главной отличительной чертой идеальной сепарации.

При идеальной сепарации фракционный состав концентрата  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(o)$  (и хвостов) получается как часть  $\gamma_{исх}(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ , взятая для зоны концентрата. Вследствие нормировки на единицу [см. формулу (1.7)] ординаты функции  $\gamma_{исх}(o)$  надо изменить в  $1/\bar{\gamma}_k$  раз:

$$\gamma_k(o) = \frac{\gamma_{исх}(o)}{\bar{\gamma}_k} \text{ при } o_p < o < o_{\max}; \quad (1.16)$$

аналогично для хвостов

$$\gamma_{хв}(o) = \frac{\gamma_{исх}(o)}{\bar{\gamma}_{хв}} \text{ при } o_{\min} < o < o_p. \quad (1.17)$$

Таким образом, для концентрата график функции  $\gamma_k(o)$  повторяет график функции  $\gamma_{исх}(o)$  в зоне концентрата  $[o_p, o_{\max}]$  с тем лишь отличием, что все ординаты его в  $1/\bar{\gamma}_k$  раз больше; вне зоны  $[o_p, o_{\max}]$  функция  $\gamma_k(\xi) = 0$ . Для хвостов график функции  $\gamma_{хв}(\xi)$  повторяет график функции  $\gamma_{исх}(\xi)$  при увеличении ординат в  $1/\bar{\gamma}_{хв}$  раз в зоне  $[o_{\max}, o_p]$ ; вне этой зоны  $\gamma_{хв}(\xi) = 0$ .

Функции  $\beta_k(\xi)$  и  $\beta_{хв}(\xi)$  в точности повторяют функцию  $\beta(\xi)$  для исходного материала (каждая в своей зоне).

Справедлива имеющая большое значение формула о неизменности функции содержания  $\beta(\xi)$  для продуктов сепарации

$$\beta_k(\xi) = \beta_{хв}(\xi) = \beta_{исх}(\xi).$$

При *неидеальной сепарации* отдельным аппаратом или схемой обогащения (рис.1.3) в формулы прогноза технологических показателей дополнительно вводится сепарационная характеристика

$$\bar{\gamma}_k = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi \approx \sum_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi_i) \gamma_{\text{исх}}(\xi_i) \Delta \xi_i; \quad (1.18)$$

$$\bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_k^{-1} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi) \beta(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi \approx \bar{\gamma}_k^{-1} \sum_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_k(\xi_i) \beta(\xi_i) \gamma_{\text{исх}}(\xi_i) \Delta \xi_i. \quad (1.19)$$

По сравнению с формулами (1.14) и (1.15) для интегрирования сепарации здесь имеем два новых элемента: множитель  $\varepsilon_k(\xi)$  и интегрирование в пределах полного диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ , а не от границы разделения  $\xi_p$ . Пределы интегрирования можно заменить, взяв их от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что не изменит результата, так как вне диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  функция  $\gamma_{\text{исх}}(\xi) = 0$ . Если в формулы (1.18) и (1.19) подставим  $\varepsilon_k(\xi) = \xi_{\text{ид}}(\xi) = 1(\xi - \xi_p)$ , то как частный случай получим рассмотренные формулы для идеальной сепарации. Действительно, в первом интеграле  $\varepsilon_k(\xi) = 1$  при  $\xi > \xi_p$  и  $\varepsilon_k(\xi) = 0$  при  $\xi < \xi_p$ . Эти рассуждения действительны и для второго интеграла.

Ввиду исключительной важности формул (1.18) и (1.19) рассмотрим их *доказательство*. Поток (в тоннах в час) произвольной элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в концентрате определяется по формуле

$$Q_k \gamma_k(\xi) d\xi = Q_{\text{исх}} \varepsilon_k(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi. \quad (1.20)$$

Это следует из определения понятия сепарационной характеристики. Проинтегрировав равенство (1.20) от  $\xi_{\min}$  до  $\xi_{\max}$ , что соответствует суммированию вкладов всех потоков элементарных фракций в концентрат, получим общий поток твердого в концентрате

$$Q_k = Q_{исх} \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \varepsilon_k(\xi) \gamma_{исх}(\xi) d\xi.$$

Здесь учтено условие нормировки для функции распределения концентрата

$$\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \gamma_k(\xi) d\xi = 1.$$

Далее, учитывая, что выход концентрата  $\bar{\gamma}_k = Q/Q_{исх}$ , получаем формулу (1.18).

Поток (в тоннах в час) ценного (вредного) компонента (например, металла или золы), переносимого в концентрат с упомянутым потоком твердого произвольной элементарной фракции, определяется по формуле

$$\left[ \frac{\beta(\xi)}{100} \right] Q_k \gamma_k(\xi) d\xi = \left[ \frac{\beta(\xi)}{100} \right] Q_{исх} \varepsilon_k(\xi) \gamma_{исх}(\xi) d\xi. \quad (1.21)$$

где  $\beta(\xi)$  – содержание компонента в элементарной фракции в процентах, а  $\beta(\xi)/100$  – его массовая доля.

Проинтегрировав равенство (1.21) от  $\xi_{min}$  до  $\xi_{max}$ , что соответствует суммированию вкладов всех элементарных потоков компонента, получим суммарный поток компонента в концентрате

$$\left( \frac{Q_k}{100} \right) \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \beta(\xi) \gamma_k(\xi) d\xi = \left( \frac{Q_{исх}}{100} \right) \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \varepsilon_k \beta(\xi) \gamma_{исх}(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что интеграл в левой части равен среднему содержанию компонента в концентрате  $\bar{\beta}_k$ , получаем формулу (1.19). Данное доказательство поясняет также и физический смысл формул (1.18) и (1.19).

*Мнемоническое правило* запоминания формул (1.18) и (1.19): для вычисления выхода концентрата  $\bar{\gamma}_k$  надо интегрировать произведение двух функций:  $\varepsilon_k(\xi)$  и  $\gamma_{исх}(\xi)$ ; для получения среднего содержания в концентрате  $\bar{\beta}_k$  надо интегрировать произведение



трех функций:  $\varepsilon_k(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  и  $\gamma_{исх}(\xi)$  в пределах полного диапазона  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ .

Фракционный состав концентрата и хвостов рассчитывается согласно формуле (1.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_k(\xi) &= \frac{\varepsilon_k(\xi)\gamma_{исх}(\xi)}{\bar{\gamma}_k}; \\ \gamma_{хв}(\xi) &= \frac{\varepsilon_{хв}(\xi)\gamma_{исх}(\xi)}{\bar{\gamma}_{хв}} = \frac{[1 - \varepsilon_k(\xi)]\gamma_{исх}(\xi)}{1 - \bar{\gamma}_k}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Эти формулы являются обобщением формул (1.16) и (1.17) для идеальной сепарации и показывают, что при неидеальной сепарации «разрезание» функции  $\gamma_{исх}(\xi)$  в точке границы разделения  $\xi_p$  сопровождается взаимозасорением продуктов: часть фракций из зоны концентрата попадает в хвосты и наоборот.

Положение о неизменности функции  $\beta(\xi)$  для неидеальной сепарации также действительно:

$$\beta_k(\xi) = \beta_{хв}(\xi) = \beta_{исх}(\xi) = \beta(\xi). \quad (1.23)$$

Таким образом, зная характеристики питания  $\gamma_{исх}(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ , а также  $\varepsilon_k(\xi)$  для операции или схемы обогащения, по формулам (1.18), (1.19) и (1.22) можно предсказать технологические показатели  $\bar{\gamma}_k$ ,  $\bar{\beta}_k$  и фракционный состав продуктов.

Рассмотрим *прогнозирующий расчет технологических показателей* в табличной форме на примере табл.1.2. Фракционный состав угля  $\gamma_{исх}(\rho)$  и  $\beta(\rho)$  в питании операции (или схемы) дан в первых трех графах, причем диапазон от  $\rho_{\min} = 1,2 \text{ т/м}^3$  до  $\rho_{\max} = 3 \text{ т/м}^3$  разбит на пять фракций. Там же вычислено среднее содержание золы в питании  $\bar{\beta}_{исх} = 0 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,4 + 45 \cdot 0,2 + 65 \cdot 0,1 + 90 \cdot 0,1 = 30,5\%$ . Графа 4 представляет собой неидеальную сепарационную характеристику, показывающую, что легкая фракция извлекается в концентрат почти полностью (0,97), а тяжелая – почти не извлекается (0,03); граница разделения  $\rho_p = 1,5 \text{ т/м}^3$ , для нее  $\varepsilon_k(\rho_p) = 0,5$ .

Таблица 1.2

## Пример прогнозирующего расчета технологических показателей

Фракционный состав питания			Сепарационная хар-ка, $\varepsilon_k(\rho_i)$ доли ед.	Поток твердого во фракциях концентрата, т/ч	Поток золы во фракциях концентрата, т/ч
Границы фракции $\Delta\rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i, \text{т/м}^3$	Выход фракции $\gamma(\rho_i)\Delta\rho_i$ , доли ед.	Содержание золы $\beta(\rho_i)$ , %			
1	2	3	4	5	6
1,2-1,4	0,2	0	0,97	$0,97 \cdot 0,2$	$(0/100) 0,97 \cdot 0,2$
1,4-1,6	0,4	15	0,6	$0,6 \cdot 0,4$	$(15/100) 0,6 \cdot 0,4$
1,6-1,8	0,2	45	0,4	$0,4 \cdot 0,2$	$(45/100) 0,4 \cdot 0,2$
1,8-2,2	0,1	65	0,1	$0,1 \cdot 0,1$	$(65/100) 0,1 \cdot 0,1$
2,2-3,0	0,1	90	0,03	$0,03 \cdot 0,1$	$(90/100) 0,03 \cdot 0,1$
1,2-3,0	$\Sigma = 1$	$\bar{\beta}_{\text{исх}} = 30,5$		$Q_k = \Sigma \bar{q}_i = 0,527 Q_{\text{исх}}$	$\Sigma = 0,08 Q_{\text{исх}}$

В графе 5 вычислены потоки отдельных фракций по формуле (1.20). Суммируя их, т.е. применяя основную формулу (1.18), получаем

$$Q_k = Q_{\text{исх}}(0,97 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,03 \cdot 0,1) = 0,527 Q_{\text{исх}},$$

т.е. выход концентрата  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_{\text{исх}} = 0,527 = 52,7 \%$ .

В графе 6 по формуле (1.21) вычислены потоки компонента (золы), переносимые в концентрат фракциями. Суммируя потоки золы и деля на полный поток твердого концентрата  $Q_k$ , т.е. применяя основную формулу (1.19), получаем среднее содержание золы в концентрате:

$$\bar{\beta}_k = \left[ \frac{100}{0,527 Q_{\text{исх}}} \right] Q_{\text{исх}} \left[ \left( \frac{0}{100} \right) 0,97 \cdot 0,2 + \dots + \left( \frac{90}{100} \right) 0,03 \cdot 0,1 \right] = 15,4 \%$$

В рассматриваемом примере из каждых 100 кг твердого в питании, содержащих 30,5 кг золы, в концентрат уходит 52,7 кг твердого и 8,12 кг золы, тогда содержание золы в концентрате  $8,12 : 52,7 = 0,154 = 15,4 \%$ . При этом самая легкая фракция  $\Delta\rho_1 = 1,2 - 1,4 \text{ т/м}^3$  несет в концентрат 19,4 кг твердого без золы (из 20 кг твердого этой фракции в питании); следующая фракция  $\Delta\rho_2 = 1,4 - 1,6 \text{ т/м}^3$  несет 24 кг твердого с содержанием золы 15 % (из 40 кг этой фракции в питании); фракция  $\Delta\rho_3 = 1,6 - 1,8 \text{ т/м}^3$  несет 8 кг твердого с содержанием золы 45 % (из 20 кг твердого в питании); фракция  $\Delta\rho_4 = 1,8 - 2,2 \text{ т/м}^3$  несет 1 кг твердого с содержанием золы 65 % (из 10 кг твердого в питании);  $\Delta\rho_5 = 2,2 - 3 \text{ т/м}^3$  несет 0,3 кг твердого с содержанием золы 90 % (из 10 кг твердого в питании).

В графе 7 по формуле (1.22) вычислен фракционный состав концентрата  $\gamma_k(\rho_i)\Delta\rho_i$ ; функция же  $\beta_k(\rho_i)$  для него остается такой же, как в графе 3 для питания.

Этот расчет рассмотрен более подробно, чем требует формальное применение формул (1.18) и (1.19), чтобы показать логику переноса отдельными узкими фракциями в концентрат как минеральных частиц в целом (твердого), так и золы (компонента), содержащейся в минеральных частицах.

### 1.5. Обобщение на случай сложного минерального сырья и схем

Частицы сырья могут различаться не одним, а несколькими ( $n$ ) физическими свойствами  $o \rightarrow o_i, \dots, \xi_n$  и содержать несколько ( $m$ ) ценных (учитываемых) компонентов. Тогда фракционный состав нужно оценивать  $n$ -мерными функциями  $\gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)$  и  $\beta_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \beta_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , которые являются обобщением рассмотренных функций  $\gamma(o)$  и  $\beta(o)$ . Обобщение сепарационной характеристики для  $i$ -го продукта технологической схемы (например,  $i$ -го концентрата)  $\varepsilon(\xi) \rightarrow \varepsilon_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Формулы для расчета технологических показателей имеют следующий вид: выход  $i$ -го продукта

$$\bar{\gamma}_i = \int \dots \int_D \varepsilon_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \gamma_{исх}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n; \quad (1.24)$$

содержание  $i$ -го компонента в  $i$ -м продукте

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{ij} = \bar{\gamma}_i^{-1} \int \dots \int_D \beta_j(\xi_1, \dots, \xi_n) \varepsilon_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \times \\ \times \gamma_{исх}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $D$  –  $n$ -мерная область изменения физических свойств сырья (рис.1.4).

Формулы (1.24) и (1.25) обобщают формулы (1.18) и (1.19).

Среднее содержание  $i$ -го компонента в сырье

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{jисх} = \int \dots \int_D \beta_j(\xi_1, \dots, \xi_n) \gamma_{исх} \times \\ \times (\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n, \end{aligned} \quad (1.26)$$

а среднее значение  $i$ -го физического свойства частиц сырья

$$\bar{\xi}_{jисх} = \int \dots \int_D \xi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n. \quad (1.27)$$

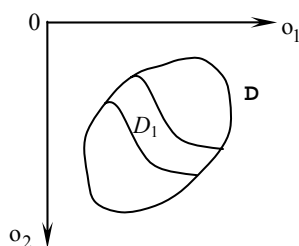


Рис.1.4. Двухмерная область  $D$  и подобласть  $D_1$  изменения физических свойств

Под интегралом фигурирует произведение интересующего нас физического свойства и функции распределения частиц по фракциям для сырья или минерального продукта. Физическим свойством может быть крупность, плотность и т.д.

## 2. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ МИНЕРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В РАБОЧИХ ЗОНАХ ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Рассмотрим теоретические аспекты, позволяющие предсказать ход процесса сепарации минеральных частиц в пространстве рабочей зоны  $(x, y, z)$  и во времени  $t$  для любого обогатительного аппарата. Для этого введем понятие о функции состояния  $\gamma(\xi, x, z, t)$  минерального материала в зоне; рассмотрим общую методику составления уравнений сепарации, решения которых предсказывают функцию состояния. Уравнения сепарации по своей физико-математической природе сравнимы с уравнениями математической физики (например, с уравнениями диффузии/теплопроводности). Однако специфика процессов обогащения руд, в частности, необходимость учитывать непрерывно изменяющиеся физические свойства минеральных частиц ( $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$ ), делает эти уравнения далеко выходящими за пределы известных типов уравнений математической физики; составление и исследование этих уравнений сепарации открывает интересные возможности для развития теории обогатительных аппаратов.

В этой главе рассмотрим следующие понятия:

- фракционный состав минерального материала в рабочей зоне;
- понятие о поле усредненных скоростей движения частиц в зоне;
- законы сохранения узкой фракции;
- основные силы, действующие на минеральные частицы в зонах различных сепараторов: гравитации, архимедова, стокова, магнитная, пондермоторная, кулонова, механического сопротивления, градиентная вероятностная сила, силы типа архимедовой;
- закон баланса сил, действующих на единицу объема узкой фракции;
- уравнение сепарации и его роль для предсказания фракционного состава в зоне.

## 2.1. Фракционный состав (функция состояния) минерального материала в рабочей зоне и фундаментальная задача его предсказания

Рабочая зона обогатительного аппарата – это часть его пространства, в которой исходные минеральные частицы подвергаются действию сил (причин), заставляющих часть из них ( $\xi > \xi_p$ ) двигаться в сторону разгрузки концентрата, а другую ( $\xi < \xi_p$ ) – в сторону разгрузки хвостов. Границы зоны могут иметь различные геометрические формы: чаще всего сепарация происходит в объеме пространства (например, в постели отсадочной машины, рис.2.1), реже на поверхности (например, сепарация по трению на наклонной плоскости), еще реже на линии (например, радиометрическая сепарация на линии отсечки летящих частиц). В любом из этих случаев местоположение любой локальной точки зоны можно указать прямоугольными координатами  $x, y, z$  для трехмерного пространства ( $x, y$  – для двумерного и  $x$  – для одномерного). Для рабочих зон существенно непрямоугольной формы (например, для гидроциклона) может потребоваться иная система координат (например, цилиндрическая).

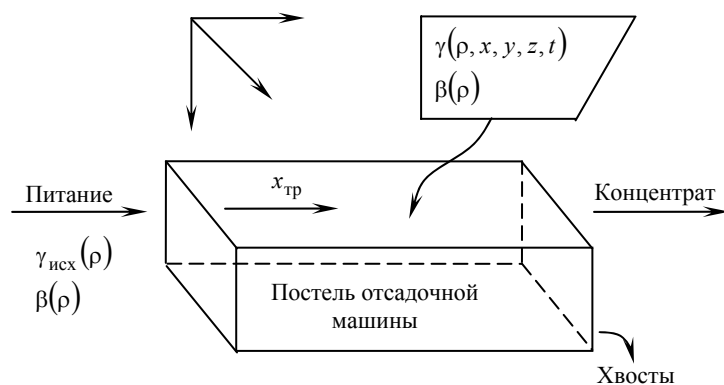


Рис.2.1. Пример рабочей зоны

Материал, подвергаемый обогащению в пространстве рабочей зоны, неоднороден, т.е. его фракционный состав зависит от координат пространства  $x, y, z$  и меняется от точки к точке. Этот переменный фракционный состав будем по-прежнему характеризовать функцией распределения типа  $\gamma(\xi)$  или в общем случае  $\gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)$  с добавлением зависимости от координат  $\gamma(\xi) \rightarrow \gamma(\xi, x, y, z)$ .

Если режим работы аппарата не стационарен, например вследствие изменения во времени производительности по питанию  $Q_{исх} = Q_{исх}(t)$  или фракционного состава питания  $\gamma_{исх}(\xi) = \gamma_{исх}(\xi, t)$  и  $\beta = \beta(\xi, t)$ , в функцию  $\gamma(\xi, x, y, z)$  нужно ввести еще зависимость от времени:  $\gamma(\xi, x, y, z, t)$  или в общем случае  $\gamma(\xi_1, \dots, \xi_n, x, y, z, t)$ .

Число  $\gamma(\xi_1, \dots, \xi_n, x, y, z, t)d\xi$  представляет собой массовую или объемную долю (концентрацию) частиц элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в окрестности точки  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ . При другом определении число  $\gamma(\xi, x, y, z, t)$  есть вероятность обнаружения 1 кг (1 мг, 1 м<sup>3</sup>) частиц фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в 1 кг (1 мг, 1 м<sup>3</sup>) смеси в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t$ . Массовые и объемные меры связаны между собой выражением  $\gamma_{мас}(\xi) = \gamma_{об}(\xi)\rho(\xi)/\bar{\rho}$ , где  $\bar{\rho}$  – средняя плотность частиц смеси;  $\rho(\xi)$  – зависимость плотности фракций от их физического свойства.

Функция  $\gamma(\xi, x, y, z, t)$  определяет состояние смеси частиц в любой точке зоны, поэтому ее можно называть функцией фракционного состояния. Эта функция может быть определена экспериментально взятием пробы из точки  $(x, y, z)$  с последующим ее анализом или теоретически с помощью уравнений, рассмотренных ниже.

*Средний фракционный состав* в любой конечной части  $V_i$  зоны вычисляются интегрированием по координатам пространства

$$\gamma_{V_i}(\xi_1, \dots, \xi_n) = V_i^{-1} \iiint_{V_i} \gamma(\xi_1, \dots, \xi_n, x, y, z) dx dy dz. \quad (2.1)$$

Эта формула имеет практическое значение для нахождения фракционного состава концентрата или хвостов; тогда интегрирование

ведется по зоне разгрузки концентрата  $V_i = V_k$  или по зоне разгрузки хвостов  $V_i = V_{xb}$ .

Имеет силу *независимость* функции  $\beta_j(\xi)$  для любого  $j$ -го ценного компонента от координат пространства зоны, т.е. в любой точке зоны справедливо соотношение [ср. с формулой (1.23)]

$$\beta_j(\xi, x, y, z, t) = \beta_{исх}(\xi) = \beta_j(\xi).$$

*Среднее содержание  $j$ -го ценного компонента* в произвольной точке  $(x, y, z)$  зоны определяется по формуле

$$\bar{\beta}_j(x, y, z, t) = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta_j(\xi) \gamma(\xi, x, y, z, t) d\xi, \quad (2.2)$$

а содержание ценного компонента в выделенной части объема  $V_i$  зоны в стационарном режиме – по формуле

$$\begin{aligned} \beta_{jV_i} &= V_i^{-1} \iiint_{V_i} dx dy dz \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta_j(\xi) \gamma(\xi, x, y, z) d\xi = \\ &= V_i^{-1} \iiint_{V_i} \beta_j(\xi) \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (2.3)$$

По формуле (2.3) можно вычислить содержание ценного компонента в концентрате и хвостах, беря для усредняющего интегрирования зоны отвода концентрата и хвостов  $V_i = V_k$  и  $V_i = V_{xb}$ .

*Фундаментальная задача* научного детерминизма применительно к описанию хода сепарации минерального материала в зоне ставится следующим образом: требуется предсказать функцию состояния  $\gamma(o, x, y, z, t)$  или  $\gamma(o_1, \dots, o_2, x, y, z, t)$  в любой точке  $(x, y, z)$  при  $t > 0$ , если она задана в загрузке зоны в виде фракционного состава питания  $\gamma_{исх}(\xi)$  и внутри зоны в момент  $t_0 = 0$ . Особенно важно предсказание в точках отвода концентрата



и хвостов. Подобные задачи являются главными во всех точных науках: в астрономии – предсказание движения планет, в химии – предсказание изменения концентраций реагирующих веществ в зоне реакторов и т.д. Функцию  $\beta(\xi)$  предсказывать не надо из-за ее неизменности.

Это еще одна из причин выбора функций типа  $\beta(\xi)$  в качестве указателя распределения ценных компонентов во фракциях.

Решение этой задачи ведет ко многим практическим приложениям, в частности, позволяет вычислить теоретическим путем сепарационную характеристику  $\epsilon(o)$  через фракционный состав концентрата по формуле (2.1).

Фундаментальная задача может иметь ряд названий: предсказание хода сепарации, предсказание массопереноса, предсказание фракционного состава; но, строго говоря, суть одна – предсказание функции состояния  $\Gamma(o, x, y, z, t)$  или в общем случае  $\Gamma(o_1, \dots, o_2, x, y, z, t)$ ; далее по формуле (2.2) легко находится распределение  $j$ -го компонента по зоне.

В окрестности любой точки  $(x, y, z)$  зоны обогащаемый минеральный материал занимает не весь объем (или представляет не всю массу), а только часть его  $m = m(x, y, z, t)$ ; остальная часть, равная  $1 - m$ , приходится на долю среды.

Во многих случаях для простоты можно допускать  $m(x, y, z, t) = m = \text{const}$ , т.е. условие равномерной степени заполнения. Степень заполнения не имеет никакого значения при подсчете технологических показателей обогащения, так как среда при этих подсчетах не взвешивается и может выступать как промежуточный фактор при решении фундаментальной задачи предсказания в ряде аппаратов. Тогда может потребоваться  $\gamma$ -функция вида

$$\Gamma_{\text{полн}}(\xi, x, y, z, t) = m\Gamma_{\text{мат}}(\xi) + (1 - m)\gamma_{\text{ср}}(\xi),$$

где  $\gamma_{\text{полн}}$  – полное распределение материала по фракциям, объединяющее материал  $\gamma_{\text{мат}}$  и среду  $\gamma_{\text{ср}}$ .

## 2.2. Понятие о поле статистических усредненных скоростей движения частиц элементарных фракций в зоне

В зоне сепарации аппарата под действием приложенных сил минеральные частицы любой элементарной фракции  $[o, o + do]$  движутся с усредненной скоростью  $\bar{x}$ , зависящей от  $o, x, y, z, t$ :

$$\bar{x}(o, x, y, z, t) = x_x(o, x, y, z, t)\bar{i} + x_y(o, x, y, z, t)\bar{j} + x_z(o, x, y, z, t)\bar{k},$$

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – единичные векторы вдоль осей координат  $x, y, z$ .

Здесь вектор скорости  $\bar{x}$  разложен на составляющие вдоль осей координат. Усредненная скорость – это такая скорость, из которой исключена хаотическая случайная составляющая.

Векторная функция  $\bar{x}(o, x, y, z, t)$  для  $o = \text{const}$  во всех точках зоны сепарации определяет поле скоростей элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$ . Поля скоростей различных фракций различны, поэтому одни фракции движутся к разгрузке концентрата  $o > o_p$ , а другие – к разгрузке хвостов  $o < o_p$ . Объединенное поле скоростей всех фракций в диапазоне  $[o_{\min}, o_{\max}]$  определяется функцией  $\bar{x}(o, x, y, z, t)$  при переменном  $o_{\min} < o < o_{\max}$ .

Нахождение поля скоростей  $\bar{x}(o, x, y, z, t)$  является важнейшим промежуточным шагом в решении поставленной выше фундаментальной задачи предсказания: по известной функции  $\bar{x}(o, x, y, z, t)$  однозначно и строго вычисляется и предсказывается искомая функция состояния  $\gamma(o, x, y, z, t)$ .

## 2.3. Взаимосвязь между полем скоростей и функцией состояния в виде закона сохранения

*Локальный закон сохранения для элементарной фракции.* Между функциями  $\gamma(o, x, y, z, t)$  и  $\bar{x}(o, x, y, z, t)$  существует взаимосвязь, называемая законом сохранения.

Физический смысл закона (а также его следствий и разновидностей) можно выразить следующей словесной формулой:

Секундное накопление материала в произвольном объеме =  
 = Входящий через границу поток – Выходящий через границу поток +  
 + Поток источника внутри объема.

Локальный фракционный, т.е. справедливый для окрестности любой локальной точки  $(x, y, z)$  и любой элементарной фракции, закон сохранения может быть записан в следующем виде:

$$\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t} = -\operatorname{div}(m\gamma\vec{x}) + W = -\frac{\partial(m\gamma x_x)}{\partial x} - \frac{\partial(m\gamma x_y)}{\partial y} - \frac{\partial(m\gamma x_z)}{\partial z} + W, \quad (2.4)$$

где  $m = m(x, y, z, t)$ ;  $\gamma = \gamma(o, x, y, z, t)$  и  $\vec{x} = \vec{x}(o, x, y, z, t)$  или в общем случае  $\gamma = \gamma(o_1, \dots, o_n, x, y, z, t)$  и  $\vec{x} = \vec{x}(o_1, \dots, \xi_n, x, y, z, t)$ ;  $W = W(o, x, y, z, t)$  – подводимый (отводимый) поток источника (стока) фракций.

Напомним, что дивергенцией любой векторной функции  $\vec{A}$ , зависящей от  $x, y, z, t$  (здесь  $\vec{A} = \gamma\vec{x}$  или  $\vec{A} = m\gamma\vec{x}$ ), является скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{V \rightarrow 0} V^{-1} \oint_S \vec{A} d\vec{S},$$

где  $A_x, A_y, A_z$  – проекции  $\vec{A}$  на соответствующие оси  $x, y, z$ ;  $V$  – локальный объем;  $S$  – ограничивающая поверхность вокруг точки  $(x, y, z)$ .

При  $m = \text{const}$  и  $W = 0$  вместо уравнения (2.4) можно записать

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\operatorname{div}(\gamma\vec{x}).$$

Идея доказательства такова. Для элемента  $dx$  пространства (рис.2.2, а):

$$\frac{dxS\partial[m(x,t)\gamma(o,x,t)do]}{\partial t} = Sm(x,t)x_x(o,x,t)\gamma(o,x,t)do - \\ - Sm(x+dx,t)x_x(\xi,x+dx,t)\gamma(\xi,x+dx,t)do.$$

При нескольких физических свойствах и трехмерном пространстве идея вывода аналогична, но учитывается, что накопление частиц элементарной фракции происходит в произвольном элементе объема  $V$  (рис.2.2, б). В этом общем случае суммирование потоков элементарной фракции  $do_1, \dots, do_n m\vec{x}$  производится по замкнутой поверхности  $S$  вокруг объема  $V$ , поэтому баланс «сумма потоков равна накоплению» имеет вид (аргументы функций  $m, \gamma, \vec{x}$  опущены)

$$do_1, \dots, do_n \oint_S m\gamma\vec{x}d\vec{S} = - \frac{do_1, \dots, do_n V \partial m\gamma}{\partial t},$$

где  $\vec{x}d\vec{S}$  – скалярное произведение, характеризующее поток, перпендикулярный к элементу  $d\vec{S}$  поверхности  $S$  (вектор  $d\vec{S}$  направлен наружу нормально к  $S$  и по значению равен  $dS$ ).

В соответствии с определением дивергенции левая часть преобразуется следующим образом:

$$\lim_{V \rightarrow 0} V^{-1} \oint_S m\gamma\vec{x}d\vec{S} = \text{div}(m\gamma\vec{x}),$$

и равенство выражает закон сохранения (2.4).

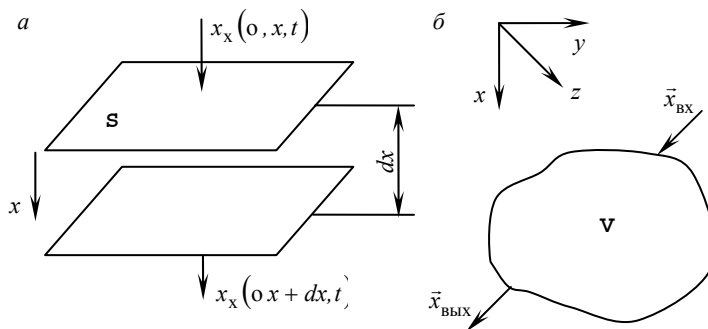


Рис. 2.2. К накоплению элементарной фракции в элементе одномерного (а) и трехмерного (б) пространства

В распространенном на практике случае постоянной степени заполнения  $m = \text{const}$  величина  $m$  в левой и правой частях уравнения (2.4) сокращается.

С точки зрения математики закон (2.4) представляет собой одно уравнение с двумя неизвестными функциями  $\gamma$  и  $\bar{x}$ , поэтому его решение не позволяет определить функцию состояния  $\gamma$  для конкретного обогатительного аппарата, т.е. решить фундаментальную задачу предсказания (и потребуется еще равенство с учетом сил, действующих на частицы).

Дополнительно, как следствие, отметим локальный закон сохранения для всей суммы фракций, получаемый интегрированием по  $o$  от  $o_{\min}$  до  $o_{\max}$  из уравнения (2.4):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\text{div}(m\bar{x}_y) + Q_{\text{ист}}, \quad (2.5)$$

где  $\bar{x}_y(x, y, z, t) = \int_{o_{\min}}^{o_{\max}} \gamma \bar{x} do$  – средняя по фракциям скорость минеральных частиц, т.е. скорость транспортировки всей смеси в зоне;  $Q_{\text{ист}}$  – суммарный поток частиц всех фракций источника.

Из уравнения (2.5) следует условие постоянства ( $m = \text{const}$ ) в виде  $\bar{x}_y = \text{const}$ .

До сих пор мы рассматривали законы сохранения без учета источников (или стоков) материала внутри зоны. Однако такие источники могут иметь место, причем они могут быть или распределены по пространству, части пространства или сосредоточены в точке, плоскости, на линии, поверхности.

Подвод и отвод удобно количественно характеризовать производительностью источника по любой элементарной фракции на единицу объема пространства:

$$W = W_{\text{ист}}(\xi, x, y, z, t) = Q_{\text{ист}}(x, y, z, t) \gamma_{\text{ист}}(\xi, x, y, z, t),$$

где  $Q_{\text{ист}}$  – суммарный поток всех фракций,  $\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$  или  $\text{м}^3/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ;  $\gamma_{\text{ист}}$  – распределение этого потока по фракциям,  $1/[o]$ .

Функция  $\gamma_{\text{ист}}$  не эквивалентна функции состояния  $\gamma$ , характеризующей материальный состав зоны аппарата. В фундаментальной задаче предсказания массопереноса  $\gamma_{\text{ист}}$  обычно является заданной (например, характеризует фракционный состав исходного питания).

Рассмотрим в качестве примера сосредоточенного источника *точечный источник*. Такие источники практически не существуют, и понятие о точечном источнике является упрощением, при котором небольшая часть пространства, где материал вводится (отводится), умышленно стягивается в точку, что позволяет упростить математические операции. Если точечный источник расположен в  $i$ -й точке  $(x_i, y_i, z_i)$  зоны, то для него функцию производительности можно записать в виде

$$W_{\text{точ}} = Q_{\Sigma}(t)\delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i)\mathcal{E}_{\text{ист}}(o, t)$$

где  $Q_{\Sigma}$  – полная производительность источника, кг/с или м<sup>3</sup>/с;  $\delta$  – дельта-функция, указывающая местоположение источника, 1/м<sup>3</sup>.

Таким образом, если материал вводится в зону в точке, то его можно охарактеризовать двумя простыми (по сравнению с общим случаем) функциями – суммарной производительностью  $Q_{\Sigma}$  и фракционным составом  $\gamma_{\text{ист}}$ .

Чтобы сосредоточить (стянуть) распределенный по объему источник в точку  $(x_i, y_i, z_i)$ , расположенную внутри объема  $V$ , надо из функций  $Q_{\text{ист}}(x, y, z, t)$  и  $\gamma_{\text{ист}}(\xi, x, y, z, t)$ , заданных в этом объеме, найти

$$Q_{\Sigma}(t) = \iiint_V Q_{\text{ист}}(x, y, z, t) dV;$$

$$\gamma_{\text{ист}}(\xi, t) = V^{-1} \iiint_V \gamma_{\text{ист}}(\xi, x, y, z, t) dV.$$

Этим путем все распределенные источники можно сосредоточить в одной точке или нескольких.

Важный для практики случай: в одну точку стягивается подвод исходного питания аппарата  $W_{\text{исх}} = Q_{\text{исх}}\Gamma_{\text{исх}}(o)$ , в другие точки – отвод концентрата  $W_{\text{к}} = -Q_{\text{к}}\Gamma_{\text{к}}(o)$  и хвостов  $W_{\text{хв}} = Q_{\text{хв}}\Gamma_{\text{хв}}(o)$ ; причем

соответствующие  $\delta$ -функции указывают координаты этих точек. Тогда для равенства (2.4) производительность всех потоков можно объединить в виде  $W = W_{исх} + W_k + W_{хв}$ .

Аналогичные рассуждения имеют место, когда сосредоточивание производится не в точку, а на линию или поверхность.

Для стационарного режима  $\partial/\partial t = 0$  локальные законы (2.4) и (2.5) принимают вид

$$\operatorname{div}(m\vec{x}) = W; \operatorname{div}(m\vec{x}_V) = Q_{ист}.$$

*Интегральный закон сохранения для зоны сепарации.* Интегрирование по  $dV = dx dy dz$  локального закона сохранения по объему  $V$  всей зоны сепарации дает следующий интегральный закон сохранения для элементарной фракции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V m \Gamma dV = \iiint_V W dV. \quad (2.6)$$

Объемный интеграл от  $\operatorname{div}(m\vec{x})$  равен нулю, так как, во-первых, на границах зоны скорость

$$\vec{x}_{гр} = \vec{x}(0, x_{гр}, y_{гр}, z_{гр}) = 0$$

и, во-вторых, в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV.$$

Поскольку  $\vec{A} = m\vec{x}$  и на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , зоны  $\vec{x}_{гр} = 0$  и  $\vec{A}_{гр} = 0$ , левый интеграл по поверхности, а следовательно, и правый по объему равны нулю.

В частном случае, если производительность  $W$  сосредоточена в точках подвода питания и отвода концентрата и хвостов, интегральный закон (2.6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V m \Gamma dV = Q_{исх}(t) \gamma_{исх}(t) - Q_k(t) \gamma_k(t) - Q_{хв}(t) \gamma_{хв}(t).$$

Физический смысл интегрального закона следующий: секундное изменение суммарного количества любой фракции, запасенной в зоне, равно разности потоков этой фракции, подводимых с исходным питанием и отводимых с концентратом и хвостами.

При отсутствии источников ( $W = 0$ ) интегральный закон имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V m \Gamma dV = 0$$

или после преобразований

$$\iiint_V m \Gamma dV = V m_{\text{средн}} \gamma_{\text{средн}}(\xi) = M \gamma_{\text{средн}}(\xi), \quad (2.7)$$

где  $V$  и  $M$  – соответственно полный объем и запас материала в зоне;  $m_{\text{средн}}$  и  $\gamma_{\text{средн}}$  – соответственно средняя степень заполнения и фракционный состав.

В этом случае физический смысл интегрального закона следующий: средний фракционный состав в зоне без источников (и стоков) не меняется с течением времени.

Аналогично интегрирование по  $dV = dx dy dz$  локального закона (2.5) дает интегральный закон сохранения для всего материала:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V m dV = \iiint_V Q_{\text{ист}} dV.$$

В упомянутом частном случае сосредоточения  $Q_{\text{ист}}$  в трех точках

$$\frac{dM}{dt} = Q_{\text{исх}}(t) - Q_{\text{к}}(t) - Q_{\text{хв}}(t),$$

где  $M = \iiint_V m dV$  – суммарное количество минерального материала, запасенного в зоне, кг или  $\text{м}^3$ .



В качестве примера рассмотрим постель отсадочной машины (см. рис.2.1). Здесь достаточно одномерной задачи, так как сепарация проходит в вертикальном направлении  $x$  между границами  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ . Продвижение минерала от загрузки к разгрузке со скоростью транспортировки  $x_{\text{тр}} = \text{const}$  можно заменить временем  $t = y/x_{\text{тр}}$ . Функцией состояния является  $\gamma(c, x, t)$ . В этом случае интегральный закон (2.7) принимает вид

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} m\gamma(c, x, t) dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} m\gamma(c, x, t_0) dx = (x_{\max} - x_{\min}) m_{\text{средн}} \gamma_{\text{исх}}(c)$$

и показывает зависимость между фракционным составом исходного материала  $\gamma_{\text{исх}}(c)$  и функцией состояния  $\gamma(c, x, t)$ .

## 2.4. Силы, действующие на минеральные частицы

Для предсказания функций состояния  $\gamma(o, x, y, z, t)$  недостаточно знать закон сохранения, так как он выражается одним уравнением с двумя неизвестными  $\gamma$  и  $\vec{x}$ . Чтобы получить два уравнения с двумя неизвестными, необходимо еще одно соотношение между  $\gamma$  и  $\vec{x}$ . Перейдем к нахождению этого соотношения или, точнее говоря, соотношений, так как для различных обогатительных аппаратов оно будет отличаться. Необходимо найти такое соотношение, которое может оценить векторное поле  $\vec{x}(o, x, y, z, t)$  скоростей частиц.

Для получения этих соотношений можно применять различные законы физики. Для единообразия, простоты и наглядности в качестве основного соотношения возьмем уравнение баланса статистически усредненных сил, действующих на частицы любой элементарной фракции, которое запишем для начала в нерасшифрованном виде:

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (2.8)$$

т.е. сумма сил, действующих на частицу (или на единицу объема элементарной фракции  $[o, o + do]$ ), равна нулю.

Равенство (2.8) связано с законом сохранения импульса (количества движения): сумма сил (внешних и взаимодействия), действующих на группу частиц любой элементарной фракции  $[o, o + do]$ , равна скорости изменения полного импульса  $(\sum m_i x_i)$  всех этих частиц. В равенстве (2.8) допускается, что упомянутый полный импульс не изменяется (хотя из-за случайных движений импульсы отдельных частиц изменяются).

Уравнение типа (2.8) является вторым и последним (после закона сохранения) условием нахождения функций  $\gamma(o, x, t)$  и  $x(o, x, t)$ ; оно содержит две эти функции и вместе с законом сохранения позволяет получать два уравнения с двумя неизвестными. В отличие от универсального закона сохранения уравнение баланса сил специфично для каждого аппарата; закон сохранения абсолютно точен, уравнение баланса сил всегда приближенно, степень точности его зависит от правильности выбора главных сил для данного аппарата.

Рассмотрим различные силы  $\vec{F}_i$ , действующие в обогащенных аппаратах. Их классифицируют на традиционные детерминированные и нетрадиционные среднестатистические. Можно группировать также по виду процессов обогащения, в которых они встречаются: силы в гравитационном обогащении, силы в магнитном обогащении и т.д. Поскольку одни и те же силы, например сила гравитации, часто встречаются в различных процессах, вначале рассмотрим природу отдельных сил. Все силы будем измерять в ньютонах на кубический метр, т.е. относить их действие к единице объема минеральных частиц.

*Гравитационная сила*, отнесенная к единице объема частицы с плотностью  $\rho$ , определяется по формуле

$$\vec{F}_{\text{грав}} = \bar{g}\rho.$$

*Сила Архимеда* в однородной среде (вода, суспензия) с плотностью  $\rho_{\text{ср}} = \text{const}$  – по формуле

$$\vec{F}_{\text{Арх}} = -\bar{g}\rho_{\text{ср}}.$$

Силы  $\vec{F}_{\text{грав}}$  и  $\vec{F}_{\text{Арх}}$  важны в гравитационных обогатительных аппаратах (отсадочных машинах, суспензионных сепараторах), когда сепарация основана на различии плотностей частиц.

Сила Стокса в однородной среде (воздух, вода, суспензия) определяется по формуле

$$\vec{F}_{\text{Стокс}} = \frac{-\alpha_c (\vec{x} - \vec{x}_{\text{ср}})}{l^2},$$

где  $\alpha_c$  – коэффициент сопротивления, пропорциональный вязкости среды, при шарообразной форме частиц  $\alpha_c = 18\eta$ ;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости среды;  $\vec{x}$  и  $\vec{x}_{\text{ср}}$  – скорость соответственно частицы и среды, м/с;  $l$  – (гидравлический) размер частицы, м.

Сила  $\vec{F}_{\text{Стокс}}$  имеет большое значение при сепарации в сгустителях и классификаторах частиц, отличающихся крупностью  $l$ .

*Магнитная сила*

$$\vec{F}_{\text{магн}} = \chi H \text{ grad } H,$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля, А/м, имеет большое значение при разделении в магнитных сепараторах частиц, обладающих магнитной восприимчивостью  $\chi$ .

*Электростатическая сила Кулона*

$$\vec{F}_{\text{Кул}} = q\vec{E},$$

где  $q$  – удельный заряд частицы, Кл/м<sup>3</sup>;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, В/м, играет важную роль при разделении в электрических сепараторах.

*Сила инерции* определяется по формуле

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\rho \vec{a},$$

где  $\vec{a}$  – ускорение частицы, м/с<sup>2</sup>.

Во многих обогатительных аппаратах движение сепарируемых частиц происходит в стесненных условиях, и они, соударяясь, взаимодействуют друг с другом. Это действие весьма типично и

вносит существенный вклад в специфику обогащения. Оценка этого взаимодействия вводит в рассмотрение целую группу особых (нетрадиционных) сил, которые имеют одну общую черту: они являются статистическими средними упомянутых ударных взаимодействий.

Рассмотрим две силы: градиентную  $\vec{F}_{\text{град}}$  и сопротивления  $\vec{F}_{\text{сопр}}$  движению. Действие *градиентной (ударной, диффузионной) силы* для одномерной зоны сепарации (например, постели отсадочной машины) рассмотрим на примере рис.2.1. Представим частицы элементарной фракции  $[o, o+do]$  в виде черных кружков; концентрация их убывает, например, сверху вниз. Мысленно проведем горизонтальную поверхность  $AB$  внутри зоны. Поскольку концентрация узкой фракции вверху выше, чем внизу, и движение частиц хаотическое, сверху вниз будет переходить частиц больше, чем снизу вверх. Создается поток частиц узкой фракции сверху вниз, причем тем больший, чем больше перепад концентраций; такие потоки вызваны градиентной силой

$$\vec{F}_{\text{град}} = -[k / \Gamma(o, x, y, z, t)] \text{grad } \Gamma(o, x, y, z, t),$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, который может зависеть от физического свойства  $\xi$ .

Напомним определение градиента любого скалярного поля:

$$\text{grad } U = \lim_{V \rightarrow 0} V^{-1} \oint_S U d\vec{S} = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

При  $m \neq \text{const}$  имеем

$$\vec{F}_{\text{град}} = -\frac{k \text{grad}(m\Gamma)}{m\Gamma} = -k \left( \frac{1}{m} \text{grad } m + \frac{1}{\Gamma} \text{grad } \Gamma \right).$$

При рассмотрении  $\vec{F}_{\text{град}}$  с точки зрения кинетической теории имеем  $k = c\bar{x}^2 / 3 \approx \text{const}$  (где  $\bar{x}^2$  – средний квадрат скорости хаотического движения частиц).

Градиентные силы имеют большое, причем вредное влияние на процессы обогащения. Сам процесс обогащения нацелен на то, чтобы сконцентрировать некоторые частицы в одной части рабочего пространства, а другие (с другими физическими признаками) – в другой. Другими словами, полезные (в основном детерминированные) силы стремятся создать возможно больший градиент концентрации, а градиентные силы, наоборот, этому препятствуют – стремятся выровнять концентрацию.

Перейдем к *силе сопротивления движению* (трения). Заметим, что она состоит из двух компонентов: сопротивление среды и сопротивление окружающих минеральных частиц при стремлении данной частицы продвигаться сквозь них. Сопротивление однородной среды может быть учтено традиционными детерминированными силами, например силой Стокса.

Поясним силу сопротивления, возникающую вследствие соударений; для этого временно примем, что среда отсутствует. Выделим одну частицу элементарной фракции  $[0, 0 + d0]$  и представим, что на нее действуют какие-либо детерминированные силы. Частица начнет разгоняться с постоянным ускорением, но, пройдя некоторый путь, ударится о другую частицу и потеряет набранную направленную скорость (хаотическая составляющая скорости у нее останется, причем она может быть значительно больше направленной скорости). После удара частица опять начнет направленно ускоряться. Затем при следующем ударе опять потеряет направленную набранную скорость и т.д. При этих торможениях рассматриваемая частица будет терять часть своего импульса (количества движения).

Усредненная тормозящая сила равна потере импульса ( $m_{\text{част}} \bar{x}$ ) частицы в единицу времени (изменению импульса, которое передается от рассматриваемой частицы окружающим ее при ударах), т.е. сила равна  $-d(m_{\text{част}} \bar{x})/dt$  (где  $m_{\text{част}}$  – масса частицы). Приближенно ее можно вычислять следующим образом. Пусть среднее время пробега частицы между столкновениями равно  $\tau$ , и при каждом столкновении частица полностью теряет направленную скорость  $\bar{x}$ . Тогда потеря количества движения за одно столкновение равна  $m_{\text{част}} \bar{x}$ , а за единицу времени

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -m_{\text{част}} \vec{x} / \phi = -\alpha_{\text{част}} \vec{x},$$

где  $\alpha_{\text{част}}$  – коэффициент пропорциональности (при переходе от отдельной частицы к единице ее объема заменяем  $\alpha_{\text{част}}$  на  $\alpha$ ).

В нестесненных условиях, когда сепарируемые минеральные частицы «одинок», не взаимодействуя друг с другом, движутся сквозь однородную среду типа воды или воздуха, силы градиентная и сопротивления пропадают (сопротивление среды остается).

Рассмотрим *диффузионные эффекты* совместного действия градиентной силы и силы сопротивления. Если на частицы элементарной фракции  $[o, o + do]$  действуют только две силы  $\vec{F}_{\text{град}}$  и  $\vec{F}_{\text{сопр}}$ , то частицы ведут себя в зоне сепарации, как при свободной диффузии. Для доказательства возьмем за исходные уравнения сохранения (2.4) и (2.8) при  $m = \text{const}$  и уравнения баланса сил:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= -\text{div}(\gamma \vec{x}); \\ \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i &= -k \frac{1}{\gamma} \text{grad} \gamma - \alpha \vec{x} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Исключив  $\vec{x} = \vec{x}(o, x, y, z, t)$ , с помощью подстановки получим уравнение диффузии для функции состояния  $\Gamma = \Gamma(o, x, y, z, t)$ :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = k \frac{1}{\alpha} \text{div}(\text{grad} \Gamma) = D \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right), \quad (2.10)$$

где введен коэффициент макродиффузии  $D = k/\alpha$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Обозначим концентрацию элементарной  $i$ -й фракции при  $o = o_i = \text{const}$  через  $C_i = \Gamma(o_i, x, y, z, t) do$ , тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right).$$

Таким образом, получили традиционное уравнение диффузии, но нетрадиционным путем, взяв в качестве первопричины не законы Фика, а только две силы  $\vec{F}_{град}$  и  $\vec{F}_{сеп}$ . Математические решения уравнения диффузии и практика свободной диффузии показывают стремление частиц равномерно распределиться по пространству, не концентрироваться и не сепарироваться.

*Силы типа архимедовой* являются другой группой нетрадиционных сил, принимающих участие в сепарационных процессах [4].

*Ускорительно-архимедова сила* возникает в обогащительных аппаратах, где частицы и среда движутся с ускорением  $\vec{a}$ , и появляется сила реакции границ рабочей зоны

$$\vec{F}_{y-a} = \rho \vec{a}. \quad (2.11)$$

*Центробежно-архимедова сила* возникает в гидроциклонах, винтовых сепараторах и подобных аппаратах с круговым движением среды и частиц, где

$$\vec{F}_{ц-а} = \rho \vec{a}_{ц}, \quad (2.12)$$

где  $\vec{a}_{ц} = V_{окр}^2 / R$

*Магнитно-архимедова сила* возникает в магнитных суспензиях или пульпах с магнитными частицами в рабочих зонах, помещенных в магнитное поле  $H \text{ grad}H$ ,

$$\vec{F}_{м-а} = \chi_{ср} H \text{ grad}H. \quad (2.13)$$

В рабочих зонах сепараторов возможны и другие силы типа архимедовой.

## 2.5. Уравнения сепарации в рабочих зонах

Методика составления уравнений сепарации в рабочих зонах включает объединение уравнений закона сохранения и баланса сил, специфичных для различных обогащительных аппаратов. Рассмотрим методику на типичном примере одномерной ( $x$ ) рабочей зоны отсадочной машины. Два совокупных исходных уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \gamma / \partial t &= \partial(\gamma x_x) / \partial x; \\ \sum \bar{F}_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставляя скорость  $x_x$  из второго уравнения (2.14) в первое, получим одно уравнение сепарации, которое содержит только одну неизвестную функцию  $\gamma = \gamma(o_i, x, y, z, t)$ ; решения уравнения сепарации предсказывают фракционный состав в зоне. Наоборот, подставляя функцию  $\gamma = \gamma(o_i, x, y, z, t)x_x$  из одного уравнения в другое (2.14), получим одно уравнение для поля скоростей, которое содержит только одну неизвестную функцию  $x = x(o_i, x, y, z, t)$  для предсказания сепарационных скоростей частиц в зоне.

В частном случае, для отсадочной машины с естественной постелью, получим следующее уравнение сепарации:

$$\partial \gamma / \partial t = D \partial^2 \gamma / \partial x^2 - g \alpha^{-1} \partial \left[ \gamma \left( \rho - \int_{\min}^{\max} \rho \gamma d\rho \right) \right] / \partial x, \quad (2.15)$$

где  $D = k/\alpha$  – коэффициент макродиффузии,  $m^2/c$ .

Для других аппаратов получают другие конкретные уравнения сепарации.

Математические решения уравнений сепарации предсказывают картину движения минеральных фракций в рабочих зонах, т.е. фракционный состав  $\gamma = \gamma(\xi_i, x, y, z, t)$  – при заданных краевых (начальных и граничных) условиях.

### 3. НАХОЖДЕНИЕ СЕПАРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Сепарационные характеристики основных обогатительных аппаратов могут быть найдены с использованием закономерностей массопереноса минеральных фракций, рассмотренных выше.

В этой главе рассмотрим следующие вопросы:



- методику перехода от уравнений сепарации в зоне к сепарационным характеристикам;
- сепарационные характеристики аппаратов гравитационного обогащения;
- сепарационные характеристики грохотов и классифицирующих аппаратов;
- специфику основных сил и уравнение их баланса;
- формулы сепарационных характеристик для стесненных (закон интеграла вероятности) и полустесненных (закон гиперболического тангенса) условий;
- сепарационные характеристики магнитных сепараторов;
- магнитные поля и силы в магнитных сепараторах различного типа;
- составление уравнений сепарации, формулы для сепарационных характеристик;
- сепарационные характеристики флотомашин;
- выбор меры флотуемости частиц;
- экспоненциальный закон для сепарационной характеристики флотомашин;
- формулу флотуемости разделения;
- независимость сепарационных характеристик флотомашин от реагентного режима.

### **3.1. Нахождение сепарационных характеристик аппаратов по известному фракционному составу в рабочей зоне**

Путем математического решения уравнений сепарации найдем функцию состояния  $\gamma = \gamma(\xi, x, y, z, t)$  в рабочей зоне интересующего нас сепаратора. Решение уравнений сепарации может быть аналитическим либо с применением численных методов и ЭВМ; аналитическое решение, как правило, связано с упрощающими допущениями. Здесь возможно применить упрощающее допущение о предельном расслоении минеральных частиц к моменту их разгрузки из зоны концентрата и хвостов. Тогда распределение частиц в

зоне при предельно достижимом расслоении соответствует статистическому распределению Гиббса.

Для найденного тем или иным путем решения, усредняя функцию  $\gamma = \gamma(\xi_i, x, y, z, t)$  в зоне разгрузки концентрата и хвостов, получим фракционный состав концентрата  $\gamma_{\text{кон}}(\xi)$  и хвостов  $\gamma_{\text{хв}}(\xi)$  и вычислим сепарационную характеристику по формуле

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\xi) = Q_{\text{кон}} \gamma_{\text{кон}}(\xi) / [Q_{\text{кон}} \gamma_{\text{кон}}(\xi) + Q_{\text{хв}} \gamma_{\text{хв}}(\xi)]. \quad (3.1)$$

Сепарационная характеристика по хвостам

$$\varepsilon_{\text{хв}}(\xi) = 1 - \varepsilon_{\text{кон}}(\xi). \quad (3.2)$$

Так получают формулы сепарационных характеристик для различных обогатительных аппаратов.

### 3.2. Аппараты гравитационного обогащения

Работа отсадочной машины основана на различии плотности частиц  $\rho$ . Сепарация происходит в вертикальном направлении  $x$ ; материал расслаивается при продвижении в горизонтальном направлении  $t$ . Баланс сил  $\sum \vec{F}_i = 0$  включает четыре основные силы: гравитации, архимедову, градиентную и сопротивления. Отсюда выражение для сепарационной скорости движения частиц получается в виде

$$x = g(\rho - \rho_{\text{ср}}) / \alpha - D \partial \gamma / \partial x, \quad (3.3)$$

где фигурирует средняя плотность смеси минеральных частиц в окрестности локальной точки

$$\rho_{\text{ср}} = \int_{\min}^{\max} \rho \gamma d\rho. \quad (3.4)$$

Подставляя выражение (3.4) в закон сохранения, получим уравнение сепарации (2.15).

После нахождения математического решения уравнения сепарации (для стационарного режима) и подстановки его в равенство

(3.1) получим *сепарационную характеристику отсадочной машины* с естественной постелью в виде деформированного интеграла вероятности:

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi [(\rho - \rho_p) (gh(\alpha D)^{-1} \gamma_{\text{кон}}(\rho))^{-1/2}], \quad (3.5)$$

где  $\Phi$  – интеграл вероятности;  $h$  – толщина постели;  $\alpha$  и  $D$  – коэффициенты сопротивления и макродиффузии.

Для *гравитационных аппаратов с постоянной плотностью разделяющей среды*, с учетом условия постоянства плотности постели  $\rho_{\text{ср}} = \rho_p = \text{const}$ , сепарационная характеристика получается тем же методом в виде гиперболического тангенса:

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\rho) = 0,5 + 0,5\text{th}[gh(4\alpha D)^{-1} (\rho - \rho_p)], \quad (3.6)$$

где  $\text{th}$  – гиперболический тангенс;  $h$  – толщина постели;  $\alpha$  и  $D$  – коэффициенты сопротивления и макродиффузии.

### 3.3. Аппараты грохочения и классификации

Для *грохотов* сепарационная характеристика по надрешетному продукту получается в виде деформированного экспоненциального закона

$$\varepsilon_{\text{надр}}(l) = 1 - \exp[-V(l) M / (h Q_{\text{исх}})], \quad (3.7)$$

где  $l$  – крупность частиц, см;  $V(l)$  – зависимость скорости просеивания от размера частиц, см/с;  $M$  – запас материала на грохоте;  $h$  – толщина постели;  $Q_{\text{исх}}$  – производительность грохота.

Для *классификации в нестесненных условиях* сепарационная характеристика – идеальная ступенчатая,

$$\varepsilon_{\text{нижн}}(l) = 1(l - l_p). \quad (3.8)$$

Граница разделения  $l_p$  зависит от плотности частиц:

$$l_p = \alpha_{\text{ср}} V_{\text{ср}} / g(\rho - \rho_{\text{ср}}), \quad (3.9)$$

где  $\alpha_{\text{ср}}$  – вязкость среды;  $V_{\text{ср}}$  – скорость среды;  $\rho$  и  $\rho_{\text{ср}}$  – плотность частиц и среды.

Для классификации в стесненных условиях, например в механических классификаторах, сепарационная характеристика получается с учетом градиентной силы в виде гиперболического тангенса:

$$\varepsilon_{\text{слива}}(l, \rho) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}(Ah/4D), \quad (3.10)$$

где  $A = -V_{\text{ср}} + g(\rho - \rho_{\text{ср}}) l^2 / \alpha_{\text{с}}$ .

Для гидроциклонов сепарационная характеристика с учетом градиентной силы, силы сопротивления и центробежно-архимедовой силы получается в виде гиперболического тангенса:

$$\varepsilon_{\text{слива}}(l, \rho) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}(Ah/4D), \quad (3.11)$$

где  $A = -V_{\text{ср}} + a_{\text{ц}}(\rho - \rho_{\text{ср}}) l^2 / \alpha_{\text{сопр}}$  – коэффициент сноса, м/с;  $a_{\text{ц}}$  – центростремительное ускорение.

### 3.4. Магнитные сепараторы

Для барабанного или роликового магнитного сепаратора сепарационная характеристика близка к ступенчатой идеальной:

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\chi, \rho) = 1 (\chi - \chi_{\text{р}}). \quad (3.12)$$

Граница разделения определяется равенством

$$\chi_{\text{р}} H \operatorname{grad} H / [(V^2/R) - \rho_{\text{р}}] = 0,$$

где  $V, R$  – окружная скорость и радиус барабана.

Для ленточного магнитного сепаратора в стесненных условиях

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\chi) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}[(4\alpha D)^{-1} h H \operatorname{grad} H (\chi - \chi_{\text{р}})], \quad (3.13)$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля;  $\operatorname{grad} H$  – градиент напряженности магнитного поля.

С учетом переменной плотности частиц получим

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\chi, \rho) = 0,5 + 0,5 \operatorname{th}(Ah/4D), \quad (3.14)$$

где  $A = \alpha^{-1} [g(\rho - \rho_{\text{ср}}) - H \operatorname{grad} H (\chi - \chi_{\text{р}})]$ .

### 3.5. Флотационные машины

Кинетическая мера флотиремости фракций вытекает из экспоненциального уравнения кинетики флотации узкой фракции по уравнению Белоглазова – Годэна  $\varepsilon_{\text{ТВ}}(t) = 1 - \exp(-\varphi t)$ . Эта мера флотиремости равна скорости флотации  $\varphi$ , деленной на степень аэрации  $S$ . Сепарационная характеристика флотационной машины (и отдельной операции флотации) получается в виде экспоненциального закона

$$\varepsilon_{\text{кон}}(k) = 1 - \exp(-St_{\phi}k), \quad (3.15)$$

где  $k$  – переменная флотиремость минеральных частиц, м/с;  $S$  – степень аэрации  $\text{м}^2/\text{м}^3$ ;  $t_{\phi}$  – время флотации, с.

Полученная формула (3.15) позволяет проанализировать роль степени аэрации и времени флотации. Флотиремость разделения  $k_p$  получается из уравнения

$$\varepsilon_{\text{кон}}(k) = 1 - \exp(-St_{\phi}k) = 0,5. \quad (3.16)$$

Уравнение имеет точное решение:

$$k_p = \ln 2 / (St_{\phi}). \quad (3.17)$$

Сепарационные характеристики флотомашин не зависят от реагентного режима (от реагентного режима зависит распределение минеральных частиц по флотиремости).

Для промышленных флотомашин сепарационная характеристика модифицируется с учетом уровня пульпы и других факторов. Например, для обычной пенной флотации (рис.3.1) компьютерная программа вычислила частные сепарационные характеристики операций (рис.3.2 и 3.3).

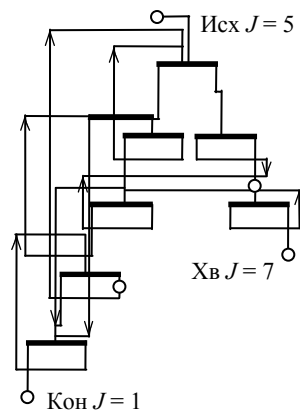


Рис. 3.1. Схема флотации

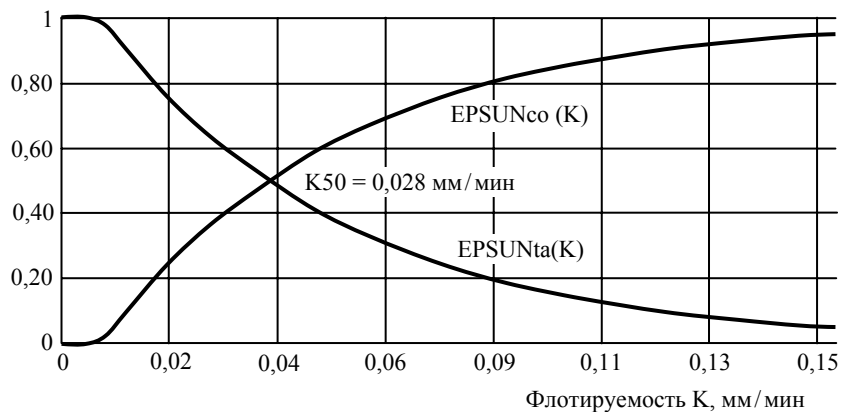


Рис.3.2. Сепарационные характеристики основной операции флотации по концентрату EPSUNco и хвостам EPSUNta

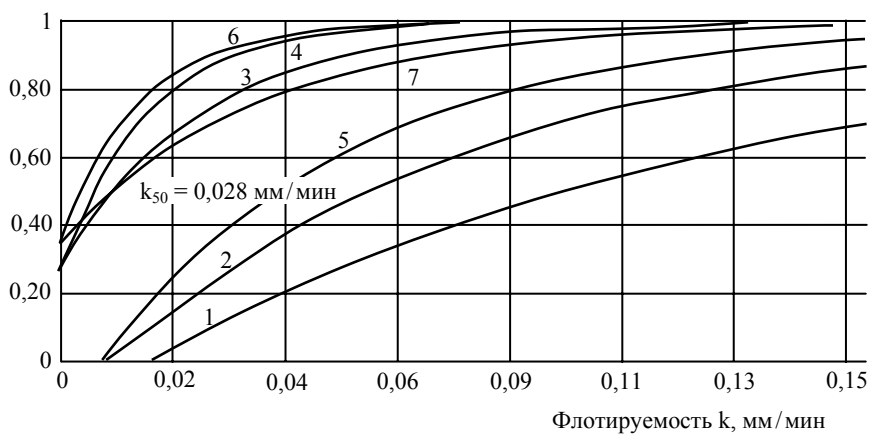


Рис.3.3. Сепарационные характеристики основной операции флотации по концентрату EPSUNco и хвостам EPSUNta

### 3.6. Экспериментальное нахождение сепарационных характеристик

Экспериментально определить сепарационные характеристики  $\varepsilon_{\text{кон}}(\xi)$  любых обогатительных аппаратов можно с использованием формулы

$$\varepsilon_{\text{кон}}(\xi) = Q_{\text{кон}} \gamma_{\text{кон}}(\xi) / [Q_{\text{кон}} \gamma_{\text{кон}}(\xi) + Q_{\text{хв}} \gamma_{\text{хв}}(\xi)]. \quad (3.18)$$

Экспериментальное опробование должно дать количественную информацию о производительностях аппарата  $Q_{\text{кон}}$ ,  $Q_{\text{хв}}$  и о фракционном составе продуктов  $\gamma_{\text{кон}}(\xi)$ ,  $\gamma_{\text{кон}}(\xi)$ ,  $\gamma_{\text{хв}}(\xi)$ .

Экспериментальным путем можно численно определить сепарационные характеристики для грохотов, гидроциклонов, гидроклассификаторов, отсадочных машин, суспензионных сепараторов, тяжелосредных гидроциклонов, флотомашин, магнитных и электрических сепараторов и т.д.

## 4. НАХОЖДЕНИЕ СЕПАРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

В главе 3 рассмотрены сепарационные характеристики основных обогатительных аппаратов, что позволяет перейти к анализу промышленных технологических схем, состоящих из таких аппаратов. В задачах анализа схема является заданной. Требуется количественно представить работу схемы, в частности, найти ее сепарационные характеристики и предсказать технологические показатели для того или иного типа сырья.

В этой главе рассмотрим следующие вопросы:

- сепарационные характеристики технологических схем;
- вывод формул для вычисления результирующей сепарационной характеристики схемы в целом по частным отдельным операций;
- общую формулу для любого числа перечистных и контрольных операций; влияние увеличения числа перечистных и контрольных операций на рост крутизны характеристики в рабочей точке;

- простой закон для симметричных схем;
- анализ сепарационных характеристик разветвленных флотационных схем;
- эквивалентирование схем;
- схемы с увеличенной крутизной в рабочей точке;
- прогнозирующий расчет технологических схем;
- общую методику расчета количества и состава всех продуктов по известным характеристикам сырья и отдельных операций;
- примеры расчета для схем гравитационного, магнитного и флотационного обогащения.

#### 4.1. Сепарационные характеристики технологических схем

Сепарационные характеристики для конечных продуктов схем более важны, чем для внутренних продуктов, поэтому начнем с них. Для большинства обогатительных аппаратов сепарационная характеристика  $\varepsilon(\xi)$  далека от идеальной ступенчатой; примером является флотационная машина с экспоненциальной сепарационной характеристикой. Именно поэтому аппараты соединяют в технологические схемы таким образом, чтобы результирующая сепарационная характеристика  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  схемы в целом была ближе к идеальной.

Типичный путь, выработанный практикой, – это канонические схемы. В них имеется одна основная, П перечистных и К контрольных операций; промпродукты любой перечистой и контрольной операции возвращаются в питание предыдущей. Особенно разветвленными являются перечистные и контрольные ветви в схемах флотации вследствие весьма неидеальной сепарационной характеристики отдельной операции флотации (флотационной машины).

В соответствии с общим подходом результирующей сепарационной характеристикой (двухпродуктовой) схемы назовем отношение масс (производительностей) элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в концентрате и исходном питании, т.е.



$$\varepsilon_{\text{рез}}(\xi) = q_{\text{к}} / q_{\text{исх}} = Q_{\text{к}} \gamma_{\text{к}}(\xi) d\xi / [Q_{\text{исх}} \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi]. \quad (4.1)$$

Производительности по элементарной фракции в концентрате и исходном питании схемы соответственно

$$q_{\text{к}} = Q_{\text{к}} \gamma_{\text{к}}(\xi) d\xi \quad (4.2)$$

и

$$q_{\text{исх}} = Q_{\text{исх}} \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi.$$

Знание  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  позволяет из уравнения (4.2) находить  $\gamma_{\text{к}}(\xi)$  и содержание  $j$ -го компонента в продукте

$$\bar{\beta}_{\text{к}} = \int_{\xi_{\text{min}}}^{\xi_{\text{max}}} \beta(\xi) \gamma_{\text{к}}(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Формулы (4.1)-(4.3) получаются решением линейных алгебраических уравнений баланса по произвольной элементарной фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  для всех продуктов схемы; число таких уравнений равно удвоенному числу операций в схеме. Для любой  $i$ -й операции имеем два уравнения. Первое показывает, что сумма входящих потоков фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  равна сумме выходящих:

$$q_{\text{исх } i} = q_{\text{к } i} + q_{\text{хв } i}. \quad (4.4)$$

Второе уравнение отражает, что поток фракции в концентрате равен потоку ее в питании, умноженному на сепарационную характеристику, т.е.  $q_{\text{к } i} = \varepsilon_i(\xi) q_{\text{исх } i}$ . Последнее равенство иногда удобнее переписать в виде

$$q_{\text{к } i} / \varepsilon_i(\xi) = q_{\text{хв } i} / [1 - \varepsilon_{ii}(\xi)]. \quad (4.5)$$

Составив пары равенств для всех операций схемы, исключив все  $q_i$  для внутренних промежуточных продуктов, вычислим отношение  $q_{\text{к}} / q_{\text{исх}}$  [уравнение (4.1)].

Например, для схемы с тремя операциями (рис.4.1, з) получим ( $q_4 = q_{\text{к}}$ ):

$$\begin{aligned}
 q_2 + q_3 - q_5 - q_6 &= q_{\text{исх}}; \\
 q_2 - q_k - q_5 &= 0; \\
 q_3 - q_6 - q_7 &= 0; \\
 q_2 - \varepsilon_0 q_5 - \varepsilon_0 q_6 &= \varepsilon_0 q_{\text{исх}}; \\
 \varepsilon_{\text{п}} q_2 - q_k &= 0; \\
 \varepsilon_k q_3 - q_6 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Система (4.6) содержит шесть линейных уравнений с шестью неизвестными; для упрощения решения можно использовать еще три равенства типа (4.5):

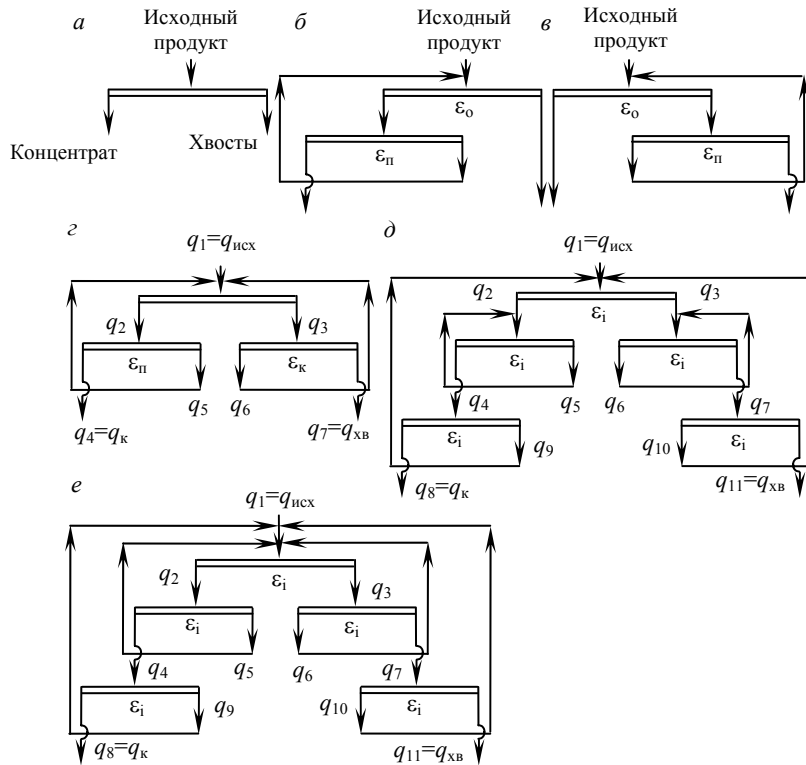


Рис.4.1. Канонические (а-д) и полуканоническая (е) схемы

$$\begin{aligned}
q_2 / q_3 &= \varepsilon_o / (1 - \varepsilon_o); \\
q_4 / q_5 &= \varepsilon_n / (1 - \varepsilon_n); \\
q_6 / q_7 &= \varepsilon_k / (1 - \varepsilon_k).
\end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (4.6) в первой и шестой строках заменим  $q_3 = q_2(1 - \varepsilon_o) / \varepsilon_o$ , в пятой заменим  $q_4 = q_5 \varepsilon_n / (1 - \varepsilon_n)$ , при этом получим:

$$\begin{aligned}
[1 + (1 - \varepsilon_o) / \varepsilon_o] q_2 - q_5 - q_6 &= q_{исх}; \\
\varepsilon_n q_2 - \varepsilon_n q_5 / (1 - \varepsilon_n) &= 0; \\
\varepsilon_k (1 - \varepsilon_o) q_2 / \varepsilon_o - q_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Подставим  $q_5$  и  $q_6$  в первое из этих уравнений:

$$[1 + (1 - \varepsilon_o) / \varepsilon_o] q_2 - (1 - \varepsilon_n) q_2 - \varepsilon_k [(1 - \varepsilon_o) / \varepsilon_o] q_2 = q_{исх}.$$

Далее последовательно найдем

$$\begin{aligned}
q_2(\xi) &= q_{исх}(\xi) \varepsilon_o / (1 - \varepsilon_o - \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k); \\
q_3(\xi) &= q_{исх}(\xi) (1 - \varepsilon_o) / (1 - \varepsilon_o - \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k); \\
q_k = q_4(\xi) &= q_{исх}(\xi) \varepsilon_o \varepsilon_n / (1 - \varepsilon_o \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k); \\
q_5(\xi) &= q_{исх}(\xi) \varepsilon_o (1 - \varepsilon_n) / (1 - \varepsilon_o - \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k); \\
q_6(\xi) &= q_{исх}(\xi) \varepsilon_k (1 - \varepsilon_o) / (1 - \varepsilon_o - \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k); \\
q_7(\xi) &= q_{исх}(\xi) (1 - \varepsilon_o) (1 - \varepsilon_k) / (1 - \varepsilon_o - \varepsilon_k + \varepsilon_o \varepsilon_n + \varepsilon_o \varepsilon_k).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Результующую сепарационную характеристику находят из третьей строки как отношение  $q_k / q_{исх} = \varepsilon_{рез}(\xi)$  [см. формулу (4.3)].

Результующая сепарационная характеристика является необходимой и достаточной для оценки и анализа схемы в целом как «большого» сепаратора с одним исходным питанием  $q_{исх}$  и двумя конечными продуктами  $q_k$  и  $q_{хв}$ .

Сепарационные характеристики для промежуточных продуктов (участков) схем также имеют важное значение, спецификой

их является наличие максимумов в окрестности границы разделения схемы. Сепарационная характеристика  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  для любого  $i$ -го продукта (по отношению к исходному питанию) равна отношению производительностей (масс) по фракции  $[\xi, \xi + d\xi]$  в данном продукте и в питании схемы:

$$e_{1,i}(o) = q_i/q_1 = Q_i \Gamma_i(o) do / [Q_{исх} \Gamma_{исх}(o) do].$$

Для всех продуктов схемы ее находят решением упомянутых линейных алгебраических уравнений аналогично  $\varepsilon_{рез}(\xi)$ ; она является частным случаем, когда  $q_i = q_k$ . Для рассматриваемого примера (см. рис. 4.1, з) все эти внутренние характеристики приведены в формулах (4.7) в виде  $q_i = \varepsilon_{1,i}(\xi) q_{исх}$ .

Практически важной является только половина набора характеристик  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  (например, для частных концентратов всех операций), остальные характеристики легко находят по формуле (4.5).

Таким образом, первоначальное описание схемы с помощью  $P + K + 1$  частных сепарационных характеристик  $\varepsilon_i(\xi)$  отдельных операций (аппаратов) превращается в описание, состоящее из такого же числа «абсолютных» сепарационных характеристик  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  для концентратов отдельных операций. Из  $P + K + 1$  характеристики важнейшей является результирующая  $\varepsilon_{рез}(\xi) = \varepsilon_{к1}(\xi)$ .

Например, для схемы, приведенной на рис. 4.1, з, вместо  $\varepsilon_o, \varepsilon_{п}$  и  $\varepsilon_k$  вводятся

$$\varepsilon_{1,2} = q_2/q_1, \quad \varepsilon_{1,6} = q_6/q_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{рез} = \varepsilon_{1,4} = q_4/q_1.$$

Заметим, что иногда при анализе отдельных участков сложных схем могут представлять интерес «перекрестные» сепарационные характеристики от  $j$ -го до  $i$ -го промпродукта. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.1, з, от концентрата  $q_6$  контрольной операции до окончательного концентрата  $q_4$  получается

$$e_{6,4}(o) = q_4/q_6 = e_o e_{п} / [e_k (1 - e_o)].$$

Каноническая и полуканоническая схемы с любым числом операций важны для анализа из-за их распространенности. Действуя по рассмотренной выше методике для общего случая канонической схемы с любым числом перечистных  $\Pi$  и контрольных  $K$  операций, можно получить результирующую сепарационную характеристику в виде

$$e_{\text{рез}}(o) = A(o) / [A(o) + B(o)];$$

$$A(o) = e_o e_{\Pi} \dots e_{\Pi\Pi} [(1 - e_{K1}) \dots (1 - e_{KK}) + e_{K1}(1 - e_{K2}) \dots (1 - e_{KK}) + \dots + e_{K1} \dots e_{KK}]; \quad (4.8)$$

$$B(o) = (1 - e_o)(1 - e_{K1}) \dots (1 - e_{KK}) [e_{\Pi1} \dots e_{\Pi\Pi} + (1 - e_{\Pi1})e_{\Pi2} \dots e_{\Pi\Pi} + (1 - e_{\Pi1}) \dots (1 - e_{\Pi\Pi})],$$

где  $e_o = e_o(o)$ ,  $e_{\Pi i} = e_{\Pi i}(o)$ ,  $e_{K i} = e_{K i}(o)$  – сепарационные характеристики соответственно основной, перечистных и контрольных операций. Известны другие формы записи для  $e_{\text{рез}}(o)$ .

Для полуканонической схемы (рис.4.1, e), в которой все обратные продукты возвращаются в голову основной операции, результирующая сепарационная характеристика имеет вид

$$e_{\text{рез}}(o) = e_o e_{\Pi1} e_{\Pi2} \dots e_{\Pi\Pi} / [e_o e_{\Pi1} e_{\Pi2} \dots e_{\Pi\Pi} + (1 - e_o)(1 - e_{K1})(1 - e_{K2}) \dots (1 - e_{KK})]. \quad (4.9)$$

Формулы (4.8), (4.9) получены теми же методами, что и формула (4.3), т.е. решением системы линейных алгебраических уравнений баланса по узкой фракции  $[o, o + do]$ .

Важным является частный случай симметричной схемы (с одинаковым числом перечистных и контрольных операций  $\Pi = K = n$  и дополнительным условием взаимной идентичности всех частных сепарационных характеристик)  $e_{\Pi i}(o) = e_{K i}(o) = e_o(o)$ . Такие симметричные схемы с идентичными операциями (и канонические, и полуканонические) имеют следующее простое выражение для результирующей сепарационной характеристики:

$$e_{\text{рез}}(o) = e_o^{n+1}(o) / \{e_o^{n+1}(o) + [1 - e_o(o)]^{n+1}\}. \quad (4.10)$$

Эта формула получается из формул (4.8) и (4.9) как частный случай при  $\Pi = K = n$  и  $\varepsilon_{\Pi i} = \varepsilon_{K i} = \varepsilon_o$ .

Профессором К.А.Разумовым была выведена формула, позволяющая определить извлечение металла в окончательный концентрат для канонической схемы при любом числе перечистных П и контрольных К операций,

$$E_{\text{рез}} = \frac{\prod_{i=0}^{\text{П}} E_{\text{пи}} \left[ \prod_{i=1}^{\text{К}} (1-E_{\text{ки}}) + E_{\text{к1}} \prod_{i=3}^{\text{К}} (1-E_{\text{ки}}) + \prod_{i=2}^3 E_{\text{ки}} \prod_{i=5}^{\text{К}} (1-E_{\text{ки}}) + \dots \right]}{\prod_{i=0}^{\text{П}} E_{\text{пи}} \left[ \prod_{i=1}^{\text{К}} (1-E_{\text{ки}}) + \dots \right] + \prod_{i=1}^{\text{К}} (1-E_{\text{ки}}) \left[ (1-E_0) \prod_{i=2}^{\text{П}} E_{\text{пи}} + \prod_{i=0}^2 (1-E_{\text{пи}}) \prod_{i=4}^{\text{П}} E_{\text{пи}} + \dots \right]}, \quad (4.11)$$

где  $E_{\text{по}}$  – частное извлечение металла в концентрат основной операции;  $E_{\text{п1}}, E_{\text{п2}}, \dots, E_{\text{пп}}$  – частные извлечения металла в концентрат соответственно I, II, ..., П-й перечистных операций;  $E_{\text{к1}}, E_{\text{к2}}, \dots, E_{\text{кк}}$  – частные извлечения металла в концентрат соответственно I, II, ..., К-й контрольных операций.

Если в формуле (4.11) заменить частные извлечения металла на частные сепарационные характеристики операций  $E_{\text{по}} \rightarrow e_0(o)$ ,  $E_{\text{пи}} \rightarrow e_{\text{пи}}(o)$ ,  $E_{\text{кj}} \rightarrow e_{\text{кj}}(o)$ , то формула (4.11) становится эквивалентной формуле (4.8). Выражения (4.8) и (4.11) внешне не совпадают, но дают одинаковые результаты и каждое пригодно к вычислению и  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$ , и  $E_{\text{рез}}$ , однако физическая и техническая сущность  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  и  $E_{\text{рез}}$  резко различаются: с помощью  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  прослеживается движение по схеме любой элементарной фракции  $[o, o + do]$ , а с помощью  $E_{\text{рез}}$  движение одного ценного компонента.

Формула (4.8) проще для практического применения, ее иногда удобнее использовать в иной, более симметричной, записи:

$$e_{\text{рез}} = A / (A + B);$$

$$A = e_0 e_{\text{п1}} \dots e_{\text{пп}} [(1 - e_{\text{к1}}) \dots (1 - e_{\text{кк}}) + e_{\text{к1}} (1 - e_{\text{к2}}) \dots (1 - e_{\text{кк}}) + \dots + e_{\text{к1}} \dots e_{\text{кк}}];$$

$$B = e_{\text{охв}} e_{\text{к1хв}} \dots e_{\text{ккхв}} [(1 - e_{\text{п1хв}}) \dots (1 - e_{\text{ппхв}}) + e_{\text{п1хв}} (1 - e_{\text{п2хв}}) \dots (1 - e_{\text{ппхв}}) + \dots + e_{\text{п1хв}} \dots e_{\text{ппхв}}];$$

Здесь в члене  $B$  объединены все частные сепарационные характеристики операций  $\varepsilon_o$ ,  $\varepsilon_{ki}$ ,  $\varepsilon_{kj}$ , которые, как было условлено, относятся к концентратам, и заменены на  $\varepsilon_{охв} = 1 - \varepsilon_o$ ,  $\varepsilon_{пiхв} = 1 - \varepsilon_{пi}$  и  $\varepsilon_{кjхв} = 1 - \varepsilon_{кj}$ , которые относятся к хвостам. При такой записи члены  $A$  и  $B$  отличаются только числами  $\Pi$  и  $K$ .

*Пример.* По уравнениям (4.8) и (4.12) для канонической схемы, содержащей две перечистные ( $\Pi = 2$ ) и одну контрольную ( $K = 1$ ) операции, сразу получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{рез} &= \frac{e_o e_{п1} e_{п2} [(1 - e_{к1}) + e_{к1}]}{e_o e_{п1} e_{п2} + (1 - e_o)(1 - e_{к1}) [e_{п1} e_{п2} + (1 - e_{п1}) e_{п2} + (1 - e_{п1})(1 - e_{п2})]} = \\ &= \frac{e_o e_{п1} e_{п2}}{e_o e_{п1} e_{п2} + e_{охв} e_{к1хв} (1 - e_{п2хв} + e_{п1хв} e_{п2хв})}. \end{aligned}$$

Аналогично для симметричной схемы  $\Pi = K = 2$  получаем

$$\varepsilon_{рез} = \frac{e_o e_{п1} e_{п2} (1 - e_{к2} + e_{п1} + e_{к1} e_{к2})}{e_o e_{п1} e_{п2} (1 - e_{к2} + e_{к1} e_{к2}) - e_{охв} e_{к1хв} e_{к2хв} (1 - e_{п2хв} + e_{п1хв} e_{п2хв})}. \quad (4.13)$$

Рассмотренные формулы для  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  в общем случае (при любом числе  $\Pi$  и  $K$ ), во-первых, позволяют избежать трудоемкого решения уравнений баланса типа (4.6), во-вторых, по ним можно сравнительно легко «подобраться» к  $\varepsilon_{i,j}(\xi)$  для внутренних продуктов схемы с помощью формул (4.4) и (4.5). Все формулы справедливы не только для одномерных сепарационных характеристик  $\varepsilon_{рез}(\xi)$ ,  $\varepsilon_o(\xi)$ ,  $\varepsilon_{пi}(\xi)$ , но и для двухмерных и многомерных  $\varepsilon_{рез}(\xi_1 \dots \xi_n)$ ,  $\varepsilon_o(\xi_1 \dots \xi_n)$ ,  $e_{пi}(o_1 \dots o_n)$ ,  $e_{кj}(o_1 \dots o_n)$ , причем теперь прослеживается движение по схеме не одномерной фракции  $[o, o + do]$ , а произвольной многомерной размером  $d\xi_1 \dots d\xi_n$ .

Подчеркнем, что  $\varepsilon_{i,i}(\xi)$  и  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  показывают извлечение любой фракции  $[o, o + do]$  в  $i$ -й (в частности, конечный) продукт от исходного питания.

#### 4.2. Анализ сепарационных характеристик гравитационных, магнитных, флотационных и других схем

Задачи анализа – выяснить, как влияют конфигурация схемы, тип сепараторов в операциях, настроечные параметры сепараторов на  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  и  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$ .

Сепарационные характеристики  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  и  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  для конкретной схемы обогащения – гравитационной, магнитной, флотационной и других – получаются подстановкой сепарационных характеристик конкретных аппаратов (операций)  $\varepsilon_o(\xi)$ ,  $\varepsilon_{пi}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{к1}(\xi)$  схемы (рис.4.2), в рассмотренные выше общие формулы для  $\varepsilon_{рез}(\xi)$  и  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$ .

**Примеры.** 1. Для гравитационной схемы с одной перемешивающей операцией  $\Pi = 1$ ,  $K = 0$  и частными генерационными характеристиками операций для отсадочных машин или тяжелосредных сепараторов по формуле (4.2) получаем

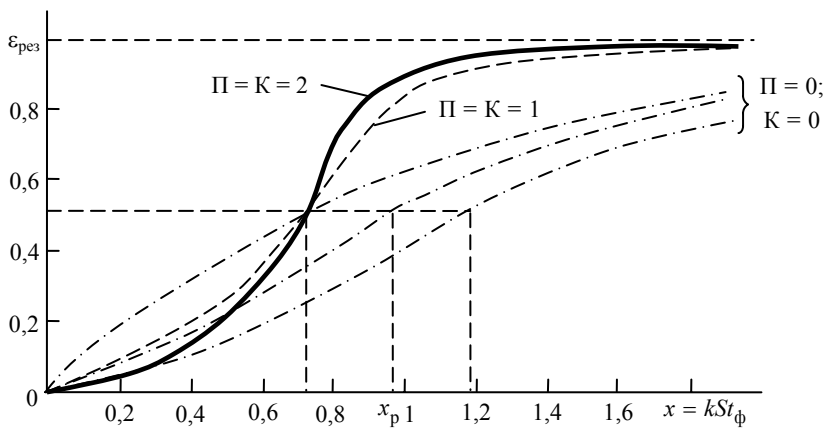


Рис.4.2. Результирующие сепарационные характеристики различных флотационных схем



$$\varepsilon_{\text{рез}}(\rho) = (0,5 + 0,5\Phi)^2 / (0,75 + 0,25\Phi^2),$$

где  $\Phi = \Phi \left[ (c - c_p) \sqrt{(\delta D)^{-1} gh \Gamma_{\text{исх}}(c)} \right]$ .

Окончательно  $\varepsilon_{\text{рез}}$  можно рассчитать при численном задании всех параметров, в частности  $(\alpha D)^{-1} gh = 22,5 \text{ м}^3/\text{т}$ ;  $c_p = 3 \text{ т}/\text{м}^3$ .

2. Для симметричной флотационной схемы с одной перекисткой  $\Pi = 1$  и одной контрольной  $K = 1$  операциями с идентичными  $e_o(k) = e_{\Pi}(k) = e_k(k) = 1 - \exp(-St_{\phi}k)$  по формулам (4.3) или (4.10) получаем

$$e_{\text{рез}}(k) = \frac{[1 - \exp(-St_{\phi}k)]^2}{1 - 2[1 - \exp(-St_{\phi}k)] + 2[1 - \exp(-St_{\phi}k)]^2}. \quad (4.14)$$

Конкретные параметры могут иметь следующие значения: удельная поверхность раздела фаз  $S = 800 \text{ м}^2/\text{м}^3$ ; время флотации  $t_{\phi} = 2,5 \text{ мин}$ .

Из этих примеров ясно, как можно получить сепарационные характеристики любых конкретных схем обогащения.

График или таблица любой сепарационной характеристики  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  вычисляется «вручную» или с помощью ЭВМ в дискретных точках интересующего диапазона  $\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$ , в частности,  $\xi = 0, \Delta\xi, 2\Delta\xi, 3\Delta\xi$  и т.д. График или таблица  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  могут быть построены и по исходным экспериментальным данным  $\varepsilon_o(\xi)$ ,  $\varepsilon_{\Pi i}(\xi)$ ,  $\varepsilon_{kj}(\xi)$ , также представленным графиками или таблицами.

На рис.4.2 показаны  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  для нескольких флотационных схем, причем для простоты в этих примерах взяты одинаковые сепарационные характеристики в операциях  $e(k) = 1 - \exp(-x)$ ,  $x = kSt_{\phi}$ .

Положение границы разделения  $\xi_p$  и крутизна в рабочей точке  $\varepsilon'_{\text{рез}}(\xi_p)$  являются важнейшими параметрами результирующей

характеристики схемы  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$ . Величина  $\xi_p$  является корнем уравнения  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi_p) = 0,5$ .

Это уравнение не всегда легко решается аналитически, особенно для сложных схем, поэтому на практике лучше пользоваться графическим методом: построить график  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$ ; на высоте  $\varepsilon_{\text{рез}} = 0,5$  провести горизонтальную линию до пересечения с графиком; опустить перпендикуляр в искомую точку  $\xi_p$ .

Так, например, из графиков  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$  для флотационных схем, приведенных на рис.4.2, в случаях симметричных схем ( $\Pi = K = 0$ ,  $\Pi = K = 1$  и  $\Pi = K = 2$ ) получается одно и то же значение флотиремости разделения:

$$k_p = x_p / St_\phi = \ln 2 / (St_\phi) \approx 0,693 / (St_\phi).$$

Для несимметричной схемы ( $\Pi = 1$ ,  $K = 0$ ) имеем  $k_p \approx 0,95 / (St_\phi)$ , а для схемы  $\Pi = 2$ ,  $K = 1$  получаем  $k_p \approx 1,5 / (St_\phi)$ .

Крутизна  $\varepsilon'_{\text{рез}}(\xi_p)$  вычисляется после нахождения  $\xi_p$  по формуле

$$e'_{\text{рез}}(o_p) = de_{\text{рез}}(o) / d\xi |_{o = o_p}.$$

Это всегда можно сделать по аналитической формуле для  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  либо графическим дифференцированием по тангенсу угла наклона касательной к  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  в рабочей точке  $\varepsilon_p$ .

Например, для флотационной схемы  $\Pi = K = 1$  с  $\varepsilon_p(k)$  вида уравнения (4.14) при  $k_p = \ln 2 / (St_\phi)$  получаем  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = St_\phi$ , а для симметричной флотационной схемы ( $\Pi = K = 2$ ) получаем  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = 1,5 St_\phi$ .

Для одной операции флотации ( $\Pi = K = 0$ ) крутизна  $e'(k_p) = 0,5 St_\phi$ .

Видим, в частности, что по мере увеличения числа перечистных и контрольных операций крутизна кривых растет, т.е.  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$  приближается к идеальной ступенчатой функции.

Докажем, что соотношение между ростом крутизны и увеличением числа перемешивающих и контрольных операций, пригодное только для симметричных схем ( $\Pi = K$ ) с идентичными операциями  $e_o(o) = e_{pi}(o) = e_{ki}(o)$ , имеет вид

$$\varepsilon'_{рез}(\xi_p) = (n+1)\varepsilon'_o(\xi_p), \quad (4.15)$$

где  $\varepsilon_o(\xi)$  – крутизна для основной (и всех других) операций.

При добавлении к основной операции первой пары операций ( $\Pi = K = 1$ ) крутизна схемы увеличивается вдвое, при добавлении еще одной пары операций ( $\Pi = K = 2$ ) крутизна увеличивается втрое и т.д.

Доказательство основывается на формуле (4.10), дифференцируя которую по  $\xi$  получаем

$$\varepsilon'_{рез}(\xi) = \frac{[\varepsilon_o^{n+1} + (1-\varepsilon_o)^{n+1}](n+1)\varepsilon_o^n \varepsilon'_o(\xi) - \varepsilon_o^{n+1}[(n+1)\varepsilon_o^n \varepsilon'_o(\xi) - (n+1)(1-\varepsilon_o)^n \varepsilon'_o(\xi)]}{[\varepsilon_o^{n+1} + (1-\varepsilon_o)^{n+1}]^2}.$$

Подставляя  $\xi = \xi_p$  с учетом  $\varepsilon_o(\xi_p) = 0,5$ , получаем формулу (4.15).

Формула (4.15) общая и справедлива для гравитационных, магнитных, флотационных и других схем обогащения; с ее помощью по известной крутизне отдельной операции  $\varepsilon'_o(\xi_p)$  легко получить крутизну  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  для симметричной схемы в целом с любым  $\Pi = K = n$ . Практически целесообразно пользоваться ею совместно с вычислением  $\varepsilon'_o(o_p)$  для типовых сепараторов. Например, для гравитационных схем с отсадочными машинами формула (4.15) принимает вид

$$\varepsilon'_{рез}(\rho_p) = (n+1)\sqrt{gh/[2\pi\alpha D(\rho_{max} - \rho_{min})]};$$

для флотационных схем

$$\varepsilon'_{рез}(k_p) = 0,5(n+1)St_\phi. \quad (4.16)$$

Аналогичные формулы получаются для других схем.

К сожалению, простая формула (4.15) пригодна только для симметричных схем с идентичными операциями ( $\varepsilon_o = \varepsilon_{ni} = \varepsilon_{kj}$ ) и канонических схем. Для несимметричных же схем и даже для симметричных схем при неидентичных операциях нужно исходить из формул (4.8) и (4.9), что усложняет анализ.

*Анализ циркулирующих нагрузок для симметричных флотационных схем* представляет интерес. До сих пор речь шла в основном о  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$ , теперь рассмотрим  $\varepsilon_{1,i}(\xi)$  на примере симметричных схем флотации, причем будем анализировать циркулирующие нагрузки простой схемы  $\Pi = K = 1$ .

Если для всех операций симметричной схемы флотации характеристики  $\varepsilon_i(k)$  одинаковы, т.е. если одинаковы произведения  $S_i t_{\phi_i} = S t_{\phi}$ , то схема в целом является «сбалансированной», и ее результирующая сепарационная характеристика  $\varepsilon_{\text{рез}}(k) = \varepsilon_{1,4}$  имеет флотируемость разделения  $k_p = \ln 2 / (S t_{\phi})$  и крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = 0,5(n+1)S t_{\phi}$ ;  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$  наиболее близка к идеальному ступенчатому закону  $\varepsilon_{\text{ид}}(k) = 1(k - k_p)$ .

Если же функции  $\varepsilon_i(k)$  для отдельных операций не одинаковы, (т.е.  $S, t_{\phi}$  отклоняются от среднего значения), то симметричная схема становится «несбалансированной», в результате чего  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$  сильнее отклоняется от  $\varepsilon_{\text{ид}}(k)$ , а циркулирующие нагрузки не соответствуют норме.

Сепарационные характеристики  $\varepsilon_{1,5}(k)$  и  $\varepsilon_{1,6}(k)$  для циркулирующих нагрузок (продукты  $q_5$  и  $q_6$  на рис.4.1, *з*) имеют, согласно формулам (4.7), следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,5} &= \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\Pi}) / \varepsilon_{\Pi}; \\ \varepsilon_{1,6} &= \varepsilon_{\text{рез}} \varepsilon_K (1 - \varepsilon_o) / (\varepsilon_o \varepsilon_{\Pi}), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где  $\varepsilon_{\text{рез}}$  определяется по формуле (4.1).

Для общности анализа в дальнейшем величину  $S_0 t_{\Phi_0} k$  в основной операции обозначим через  $x$ , т.е. для основной операции флотации берем  $\varepsilon_0(k) = \varepsilon_0(x) = 1 - \exp(-x)$ . Если во всех операциях  $\varepsilon_i(x)$  одинаковы (сбалансированный режим), то имеем  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_{\kappa} = 1 - \exp(-x)$ . Подставив эти значения  $\varepsilon_i(x)$  в формулы (4.3) и (4.17), получим формулы  $\varepsilon_{1i}(x)$  для сбалансированного режима. По этим (опущенным здесь) формулам на **рис.4.3, а** построены соответствующие графики (расчеты сделаны на вычислительной машине).

Если время флотации в перечистной и контрольной операциях схемы, показанной на рис.4.1, з, увеличить, например, вдвое, то получим (несбалансированный режим)  $\varepsilon_0 = 1 - \exp(-x)$ ;  $\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_{\kappa} = 1 - \exp(-2x)$ . Теперь  $\varepsilon_{рез}$ ,  $\varepsilon_{1,5}$  и  $\varepsilon_{1,6}$  для этой схемы изменятся так, как показано на **рис.4.3, б**.

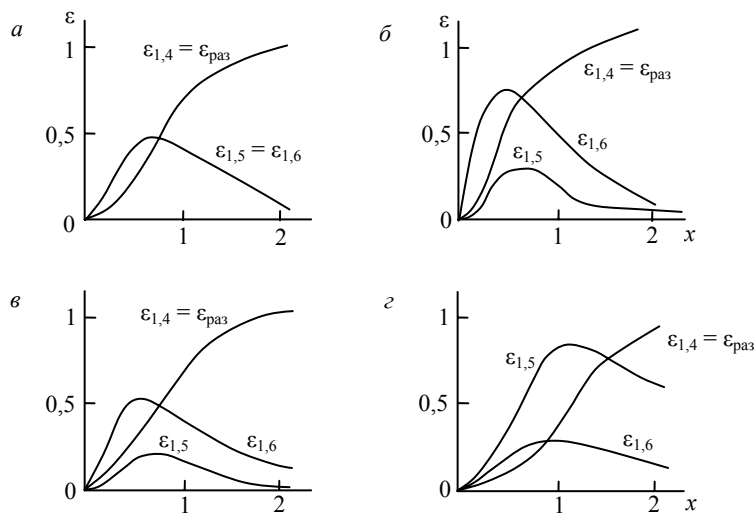


Рис.4.3. Сепарационные характеристики простой симметричной схемы флотации

Если время перечистной флотации будет вдвое больше, а контрольной – вдвое меньше, чем основной, то получим  $\varepsilon_o = 1 - \exp(-x)$ ;  $\varepsilon_{II} = 1 - \exp(-2x)$ ;  $\varepsilon_K = 1 - \exp(-0,5x)$ . Соответствующие графики  $\varepsilon_{рез}(x)$ ,  $\varepsilon_{1,5}(x)$ ,  $\varepsilon_{1,6}$  показаны на рис.4.3, в.

На рис.4.3, з показаны графики для других несбалансированных режимов схемы, представленной на рис.4.1, з.

Графики, представленные на рис.4.3, позволяют сделать следующие выводы. В сбалансированном режиме (рис.4.3, а) оба циркулирующих потока  $q_5 = \varepsilon_{1,5}q_1$ ;  $q_6 = \varepsilon_{1,6}q_1 = \varepsilon_{1,6}Q_{исх}\gamma_{исх}(k)dk$  идентичны по фракционному составу, причем в них максимально извлекаются минеральные частицы с флотиремостью  $k$ , равной флотиремости разделения  $k_p = x_p / S_o t_{\Phi_o} = \ln 2 / (S_o t_{\Phi_o})$ , которую находят из графиков  $\varepsilon_{рез}(k)$  по уравнению  $\varepsilon_{рез}(k_p) = 0,5$ ; в концентрат  $q_4$  сепарируются преимущественно частицы с флотиремостью  $k > k_p$ , на что указывает график  $\varepsilon_{1,4} = \varepsilon_{рез}$ .

При одновременном увеличении фронтов перечистной и контрольной операций (рис.4.3, б) циркулирующие потоки становятся различными, причем  $q_6(k) > q_5(k)$  для любой фракции флотиремости  $[k, k + dk]$  при  $0 < k < k_{max}$  и любом исходном питании  $\gamma_{исх}(k)$ .

Наоборот, при уменьшении фронтов перечистной и контрольной операции (рис.4.3, з) получается  $q_6(k) < q_5(k)$ .

Оба циркулирующих потока существенно возрастают при уменьшении фронта перечистки и увеличении фронта контрольной флотации.

Во всех несбалансированных режимах график  $\varepsilon_{рез}(k)$  больше отклоняется от ступенчатой  $\varepsilon_{ид}$ , чем для сбалансированного режима (рис.4.3, а).

Подобный анализ для схем, в которых  $\Pi = K = 2$ , выявляет резкое увеличение циркулирующих потоков  $q_5$  и  $q_6$  при уменьшении фронтов перечистных и увеличении фронтов контрольных операций по сравнению с фронтом основной операции; циркулирующие потоки от  $\Pi$  перечистной и  $\Pi$  контрольной операций колеблются

меньше. Для схем, в которых  $\Pi = K = 2$ , анализ опустим, приведем только исходные формулы для  $\varepsilon_{1,j}(k)$ .

Для канонической схемы  $\Pi = K = 2$  (см. рис.4.1, д): циркуляция от I перечистой и I контрольной операций

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\text{п1}}) / (\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}});$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}\varepsilon_{\text{к2}}(1 - \varepsilon_o)[1 - \varepsilon_{\text{п1}}(1 - \varepsilon_{\text{п2}})] / \{\varepsilon_o\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}}[1 - \varepsilon_{\text{к2}}(1 - \varepsilon_{\text{к1}})]\};$$

циркуляция от II перечистой и II контрольной операций

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\text{п21}}) / \varepsilon_{\text{п2}};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_o)(1 - \varepsilon_{\text{к1}})\varepsilon_{\text{к2}}[1 - \varepsilon_{\text{п1}}(1 - \varepsilon_{\text{п2}})] / \{\varepsilon_o\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}}[1 - \varepsilon_{\text{к2}}(1 - \varepsilon_{\text{к1}})]\}.$$

Для полуканонической схемы  $\Pi = K = 2$  (рис.4.1, е) циркуляция от I перечистой и I контрольной операций

$$\varepsilon_{1,5} = q_5 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\text{п1}}) / (\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}});$$

$$\varepsilon_{1,6} = q_6 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}\varepsilon_{\text{к1}}(1 - \varepsilon_o) / (\varepsilon_o\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}});$$

циркуляция от II перечистой и II контрольной операций

$$\varepsilon_{1,9} = q_9 / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}(1 - \varepsilon_{\text{п2}}) / \varepsilon_{\text{п2}};$$

$$\varepsilon_{1,10} = q_{10} / q_1 = \varepsilon_{\text{рез}}\varepsilon_{\text{к2}}(1 - \varepsilon_{\text{к1}})(1 - \varepsilon_o) / (\varepsilon_o\varepsilon_{\text{п1}}\varepsilon_{\text{п2}}).$$

Надо учесть, что  $\varepsilon_{\text{рез}}$  для канонической схемы вычисляются из выражений (4.8) или (4.13), а для полуканонической – из выражения (4.9).

Видим, что анализ каждой конкретной схемы – новая самостоятельная задача.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности флотационных схем различной конфигурации. Различные по числу и взаимному соединению операций схемы могут иметь одинаковые или близкие значения  $\varepsilon_{\text{рез}}$ , такие схемы взаимозаменяемы. Это позволяет искать наиболее простую схему. Рассмотрим подход на примере флотации.

Две схемы различной конфигурации эквивалентны, если их сепарационные характеристики  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$  одинаковы (такие схемы дают одинаковые технологические показатели для любого сырья в питании). Для практической эквивалентности схем достаточно потребовать одинаковых границ разделения  $k_p$  и крутизны  $\varepsilon'(k_p)$ , так как это дает близкие значения  $\varepsilon_{\text{рез}}(k)$ . Для общности введем величину  $k_p = \ln 2 / (St)$ , реализуемую одной операцией – схемой на рис.4.1, а, где  $\varepsilon(k) = 1 - \exp(-Stk)$ .

Параметры отдельных операций схем  $S_i, t_i$  и их конфигурация влияют на  $k_p$  и  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$ . Это влияние проанализировано предыдущими формулами. Рассмотрим три схемы, для которых имеем: схема П = 1, К = 0 (рис.4.1, б)

$$\varepsilon_{\text{рез}}(k) = 1 - \exp(S_0 t_0 k) / \{1 - \exp(-S_n t_n k) + \exp[-(S_0 t_0 + S_n t_n)k]\}; \quad (4.18)$$

схема П = 0, К = 1 (рис.4.1, в)

$$\varepsilon_{\text{рез}}(k) = [1 - \exp(-S_0 t_0 k)]^2 / \{1 - 2[1 - \exp(-S_0 t_0 k)] + 2[1 - \exp(-S_0 t_0 k)]^2\}; \quad (4.19)$$

схема П = К = 1 (см. рис.4.1, г)

Схема на рис.4.1, б совпадает по  $k_p = \ln 2 / St$  со схемой из одной операции, представленной на рис.4.1, а, если на  $S_0 t_0$  и  $S_n t_n$  наложить ограничения, которые сводятся к изменению  $S_0 t_0 = \alpha_0 St, S_n t_n = \alpha_n St$  в основной операции в  $\alpha_0$  раз, а в перечистной – в  $\alpha_n$  раз по сравнению с одной операцией с  $St$ .

Подставляя в  $k_p = \ln 2 / (St)$  уравнение (4.18) и принимая  $\varepsilon_{\text{рез}}(k_p) = 0,5$ , получаем связь между коэффициентами  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$ :

$$1 - [\exp(-\alpha_0 \ln 2)] / \{1 - \exp(-\alpha_n \ln 2) + \exp[-(\alpha_0 + \alpha_n) \ln 2]\} = 0,5 \quad (4.20)$$



Если изменять  $\alpha_o$  и  $\alpha_n$  согласно ограничению (4.20), то величина  $k_p$  будет оставаться неизменной и равной  $\ln 2 / (St)$ . При этом крутизна  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon'(k_p) = & A^{-1} \{ [1 - \exp(-\alpha_n \ln 2) + \exp[-(\alpha_o + \alpha_n) \ln 2]] \times \\ & \times \alpha_o \exp(-\alpha_o \ln 2) + A^{-1} \exp(-\alpha_o \ln 2) \times \\ & \times \{ \alpha_n \exp(-\alpha_n \ln 2) - (\alpha_o + \alpha_n) \exp[-(\alpha_o + \alpha_n) \ln 2] \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где  $A = \{1 - \exp(-\alpha_n \ln 2) + \exp[-(\alpha_o + \alpha_n) \ln 2]\}^2$ , что получается дифференцированием уравнения (4.18) по  $k$  с последующей заменой  $k = k_p = \ln 2 / (St)$ .

По формулам (4.20) и (4.21) построена табл.4.1. Из нее видно, в частности, что крутизна возрастает вдвое, от  $0,5St$  до  $St$ , если взять  $S_o t_o = 2,2St$  и  $S_n t_n = 0,58St$ .

Аналогично схема типа  $\Pi = 1$ ,  $K = 1$  (рис.4.1, в) совпадает по  $k_p = \ln 2 / (St)$  со схемой, показанной на рис.4.1, а, при условии

$$\begin{aligned} & [1 - \exp(-\alpha_o \ln 2)] / \{1 - \exp(-\alpha_o \ln 2) + \\ & + \exp[-(\alpha_o + \alpha_n) \ln 2]\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

которое получается из формулы (4.19) с учетом  $S_o t_o = \alpha_o St$ ,  $S_n t_n = \alpha_n St$ .

Таблица 4.1

**Увеличение крутизны  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  с увеличением фронта основной  $\alpha_o$  и уменьшения фронта перечистой  $\alpha_n$  операций для схемы типа  $\Pi = 1$ ,  $K = 0$ ,  $k_p = \ln 2 / (St)$  (рис.4.1, в)**

$\alpha_o = S_o t_o / (St)$	$\alpha_n = S_n t_n / (St)$	$\varepsilon'_{рез}(k_p)$
1	Без перечистой	$0,5St$
1,2	2	$0,6St$

Окончание таблицы 4.1

$\alpha_o = S_o t_o / (St)$	$\alpha_n = S_n t_n / (St)$	$\varepsilon'_{рез}(k_p)$
1,35	1,35	0,744St
1,5	1,1	0,819St
1,76	0,76	0,903St
2,2	0,55	St
3	0,215	1,19St
4,33	0,15	1,5St
5	0,047	1,645St
6,5	0,02	2St
7	0,0114	2,123St

Крутизна  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  для схемы, показанной на рис.4.1, в, изменяется по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{рез}(k_p) = & A^{-1} \{1 - \exp(-\alpha_o \ln 2) + \exp[-\alpha_o + \alpha_k] \ln 2\} \times \\ & \times \alpha_o \exp(-\alpha_o \ln 2) - A^{-1} [1 - \exp(-\alpha_o \ln 2)] \times \\ & \times \{\alpha_o \exp(-\alpha_o \ln 2) - (\alpha_o + \alpha_k) \exp[-(\alpha_o + \alpha_k) \ln 2]\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $A = \{1 - \exp(-\alpha_o \ln 2) + \exp[-(\alpha_o + \alpha_k) \ln 2]\}^2$ , что получается дифференцированием уравнения (4.19) по  $k$  с последующей заменой  $k = k_p = \ln 2 / (St)$ .

По формулам (4.22) и (4.23) строим табл.4.2, показывающую, в частности, что увеличение крутизны вдвое (от  $0,5St$  до  $St$ ) получается при  $S_o t_o = 0,25St$  и  $S_k t_k = 2,42St$ . Схема на рис.4.1, з совпадает по  $k_p = \ln 2 / (St)$  со схемой, показанной на рис.4.1, а, при условии

$$S_o t_o = S_n t_n = S_k t_k = St. \quad (4.24)$$

При этом крутизна  $\varepsilon'_{рез}(k_p)$  получается вдвое большей, чем для схемы, представленной на рис.4.1, а:  $\varepsilon'_{рез}(k_p) = St$ .

Таблица 4.2.

Увеличение крутизны  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$  с уменьшением фронта основной  $\alpha_o$  и увеличением фронта перечистной  $\bar{b}_n$  операций для схемы типа  $\Pi = 0$ ,  $K = 1$ ,  $k_p = -\ln 2 / (St)$  (рис.4.1, в)

$\alpha_o = S_o t_o / (St)$	$\alpha_k = S_k t_k / (St)$	$\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$
1	Без контрольной	$0,5St$
0,7	0,677	$0,623St$
0,5	1,27	$0,74St$
0,3	2,09	$0,93St$
0,25	2,42	$St$
0,2	2,74	$1,07St$
0,1	3,8	$1,345St$
0,067	4,5	$1,5St$
0,05	4,83	$1,579St$
0,02	6,53	$2St$
0,01	7,17	$2,158St$

Симметричная схема с одинаковым числом перечистных  $\Pi$  и контрольных  $K$  операций (и с возвратом продуктов в предыдущие операции либо в начало схемы) совпадает по  $k_p = \ln 2 / St$  со схемой на рис.4.1, а при выполнении условия (4.24) для всех операций, т.е.  $S_i t_i$  всех операций должны быть одинаковы (случай неодинаковых  $S_i t_i$  для симметричных схем здесь не анализируется). Крутизна  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$  таких схем возрастает в  $n+1$  раз по сравнению со схемой на рис.4.1, а (см. формулу (4.16)).

На основе предыдущего анализа можно перейти к вопросу эквивалентирования схем (сепарационных свойств) на основе совпадения их  $k_p$  и  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$ . Для всех схем будем брать  $k_p = \ln 2 / (St)$  для сравнимости с простейшей схемой на рис.4.1, а. Будем рассматривать схемы с увеличивающейся крутизной, двигаясь дискретными

шагами  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$ , равными  $0,5St$ ;  $St$ ;  $1,5St$ ;  $2St$  и т. д. (промежуточные значения  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$  не рассматриваются).

Крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = St$  можно получить в трех схемах, представленных: на рис.4.1, б – при  $S_0 t_0 = 2,2St$  и  $S_{\text{п}} t_{\text{п}} = 0,55St$  (согласно табл.4.1); на рис.4.1, в – при  $S_0 t_0 = 0,25St$  и  $S_{\text{к}} t_{\text{к}} = 2,42St$  (согласно табл.4.2); на рис.4.1, г – при  $S_0 t_0 = S_{\text{п}} t_{\text{п}} = S_{\text{к}} t_{\text{к}} = St$  (по формуле (4.16)). Эти три схемы эквивалентны друг другу: они имеют одинаковую флотируемость разделения  $k_p = \ln 2 / (St)$  и одинаковую крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = St$ .

Условия эквивалентности упрощаются при одинаковой аэрации во всех машинах  $S_0 = S_{\text{п}} = S_{\text{к}} = S$ : для схемы на рис.4.1, б –  $t_0 = 2,2t$ ;  $t_{\text{п}} = 0,55t$ ; для схемы на рис.4.1, в –  $t_0 = 0,25t$ ;  $t_{\text{к}} = 2,42t$ ; для схемы на рис.4.1, г –  $t_0 = t_{\text{п}} = t_{\text{к}} = t$ .

Крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = 1,5St$  можно рассчитать в следующих эквивалентных схемах, представленных: на рис.4.1, д – при одинаковых значениях  $S_i t_i$  во всех пяти операциях (согласно формуле (4.16)); на рис.4.1, е – при одинаковых значениях  $S_i t_i$  во всех пяти операциях (согласно формуле (4.16)); на рис.4.1, б – при условии  $S_0 t_0 = 4,33St$ ;  $S_{\text{п}} t_{\text{п}} = 0,15St$  (согласно табл.4.1); на рис.4.1, в – при условии  $S_0 t_0 = 0,067St$ ;  $S_{\text{к}} t_{\text{к}} = 4,5St$  (согласно табл.4.2).

Простые схемы, представленные на рис.4.1, могут быть составными частями более сложных схем, для анализа которых обобщим формулу (4.16): если составные части эквивалентны между собой (имеют одинаковые  $k_p = \ln 2 / (St)$ , крутизну  $\varepsilon'_{\text{частн}}(k_p)$ , равную  $0,5St$ ;  $St$ ;  $1,5St$ , и соединены в симметричную схему типа рис.4.1, г-е, то сложная схема имеет ту же флотируемость разделения  $k_p = \ln 2 / (St)$  и увеличивает крутизну по закону

$$\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = (n+1)\varepsilon'_{\text{частн}}(k_p),$$

где  $n$  – число перечистных и равное ему число контрольных частей.

Например, если на рис.4.1, *з* заменить операции  $\varepsilon_o$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_k$  схемой рис.4.1, *б* с крутизной  $\varepsilon'_{\text{частн}}(k_p) = 1,5St$  (при  $S_o t_o = 4,33St$  и  $S_n t_n = 0,15St$ ), то для такой составной схемы ( $n=1$ ) получим  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_n) = 3St$ ; если добавить еще одну перечистную и контрольную пару, то  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = (2+1)1,5St$ , т.е. крутизна возрастет в 9 раз по сравнению с одной операцией на рис.4.1, *а*.

Вернемся к эквивалентности схем, но более сложных, чем представленные на рис.4.1. Крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = 2St$  (при  $k_p = \ln 2 / (St)$ ) можно получить в схемах, представленных: на рис.4.4, *а* – при  $S_o t_o = 2,2St$  и  $S_n t_n = 0,55St$  (схема составлена из трех частей типа рис.4.1, *б*); на рис.4.4, *б* – при  $S_o t_o = 0,25St$ ;  $S_k t_k = 2,42St$  (схема составлена из трех частей типа рис.4.1, *в*); на рис.4.4, *в* – при  $S_i t_i = St$  (схема составлена из трех частей типа рис.4.1, *з*).

Три схемы эквивалентны. Все составные части схем (по три в каждой) взаимноэквивалентны, поэтому, комбинируя их друг с другом в любом сочетании, можно получить множество эквивалентных схем.

Крутизну  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p)$  схем, показанных на рис.4.4, *а, б*, при сохранении  $k_p = \ln 2 / (St)$  можно менять в широких пределах, варьируя  $S_o t_o$  и  $S_n t_n$  в соответствии с табл. 4.1, а  $S_o t_o$  и  $S_k t_k$  в соответствии с табл. 4.2.

Так,  $\varepsilon'_{\text{рез}}(k_p) = 4St$  для схем, представленных на рис.4.4, *а*, получается при  $S_o t_o = 6,5St$  и  $S_n t_n = 0,02St$ ; на рис.4.4, *б* – при  $S_o t_o = 0,02St$  и  $S_k t_k = 6,53St$  (время флотации и степень аэрации операций всех схем соотнесены с простейшей схемой, представленной на рис.4.1, *а*).

Рассмотренный подход позволяет эквивалентировать схемы различной конфигурации. Заметим, что эквивалентности по сепарационной характеристике соответствует и эквивалентность схем по окончательным технологическим показателям: выходу концентрата

$$\bar{\gamma}_k = \int \gamma_{\text{исх}}(k) \varepsilon_{\text{рез}}(k) dk,$$

содержанию металла в концентрате

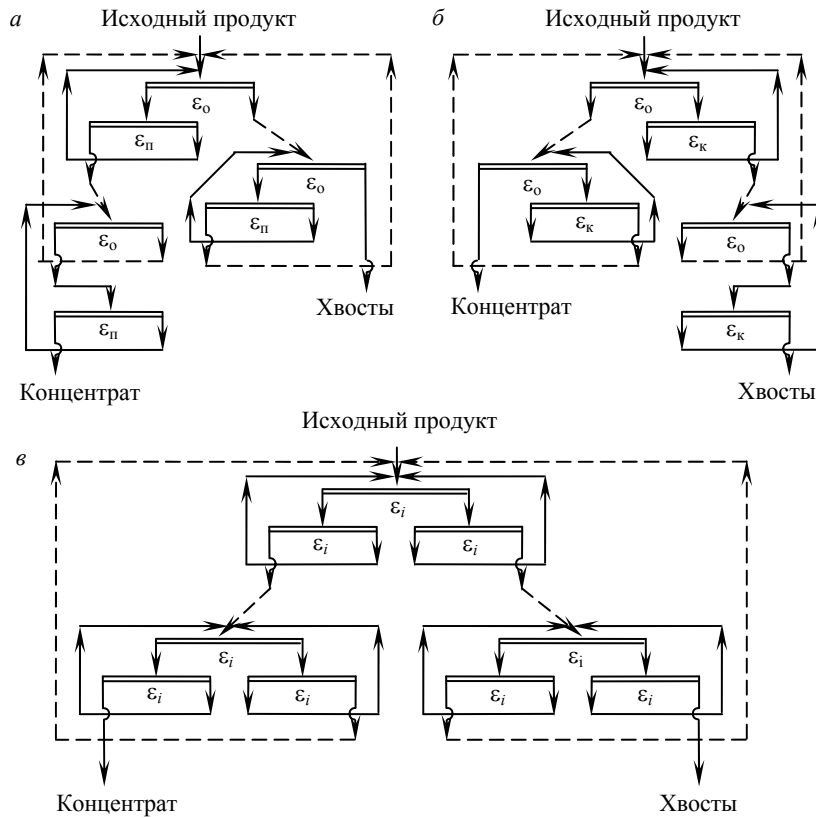


Рис.4.4. Эквивалентирование схем содержанию металла в концентрате

$$\bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_k^{-1} \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} \epsilon_{\text{рез}}(k) \beta_{\text{Ме}}(k) \gamma_{\text{исх}}(k) dk ;$$

для одного и того же питания, характеризующегося распределением частиц по флотуемости  $\gamma_{\text{исх}}(k)$  и зависимостью содержания ценного металла от флотуемости частиц  $\beta_{\text{Ме}}(k)$ . Для сравнения требуемого объема флотационных машин в схемах необходимы дополнительные расчеты.

Рассмотренный подход – эквивалентирование по  $\xi_p$  и  $\varepsilon'_{рез}(\xi_p)$  – применим не только к флотационным, но и к гравитационным, магнитным и другим схемам.

### 4.3. Прогнозирующий фракционно-балансный расчет технологических показателей

Задачей расчета является нахождение выходов  $\bar{\gamma}_i$  (или производительностей  $Q_i$  и содержаний интересующих компонентов  $\bar{\beta}_{ji}$ , для каждого из продуктов схемы.

Традиционная методика компонентно-балансного расчета заключается в следующем. Сырье характеризуют только средним содержанием  $\bar{\beta}_{jисх}$  интересующего  $i$ -го компонента и производительностью  $Q_{исх}$ . Операции характеризуют частными выходами  $\bar{\gamma}_ч$  и частными извлечениями  $E_{ji}$   $j$ -го компонента (металла). Для каждой операции исходят из балансов по твердому компоненту

$$Q_{исх} = Q_k + Q_{хв}; \quad Q_k = \bar{\gamma}_k Q_{исх}$$

и по  $j$ -му компоненту (металлу)

$$\bar{\beta}_{исх} Q_{исх} = \bar{\beta}_k Q_k + \bar{\beta}_{хв} Q_{хв}; \quad \bar{\beta}_k Q_k = E_{ик} \bar{\beta}_{исх} Q_{исх}.$$

Совместное решение этих уравнений для всех операций схемы позволяет вычислять искомые абсолютные выходы  $\bar{\gamma}_i$ , абсолютные извлечения  $E_{исхi}$  (от исходного) и содержания  $\bar{\beta}_{ji}$  компонентов для всех продуктов.

Иногда вместо частных извлечений  $E_{ji}$  задают содержания в некоторых продуктах. Эта методика компонентно-балансного расчета используется для технологических балансов на обогатительных фабриках. Заметим, что абсолютное результирующее извлечение  $E_{рез}$   $j$ -го компонента находят по известным частным  $E_{ji}$  в операциях

по тем же формулам, что и  $\varepsilon_{\text{рез}}(\xi)$  по  $\varepsilon_i(\xi)$  (см. уравнения (4.8) и (4.9)). По традиционной методике исходные данные  $\bar{\gamma}_i$  и  $E_{ji}$  могут быть получены только экспериментальным путем, например, по данным опробования действующей фабрики, поэтому методика не обладает прогнозирующими свойствами.

*Прогнозирующий фракционно-балансный расчет технологических схем* на основе фракционного состава сырья и сепарационных характеристик ведется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_i &= \int q_i(\xi) d\omega = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_{1i}(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi; \\ \bar{\beta}_{ji} &= \int \beta_j(\xi) q_i(\xi) d\xi = \bar{\gamma}_i^{-1} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \beta_j(\xi) \varepsilon_{1j}(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi,\end{aligned}\tag{4.25}$$

где  $q_i(\xi)d\xi$  – поток элементарной фракции в  $i$ -м продукте;  $\varepsilon_{1i}(\xi)$  – сепарационная характеристика для  $i$ -го продукта (извлечение элементарной фракции от исходного);  $j$  – номер ценного компонента ( $\varepsilon_{1j}(\xi)$  находится из сепарационных характеристик отдельных операций).

В этой методике исходными данными являются фракционный состав сырья  $\gamma_{\text{исх}}(\xi)$  и  $\beta_j(\xi)$ , а также сепарационные характеристики отдельных операций схемы  $\varepsilon_i(\xi)$ . В сущности здесь характеристики  $\varepsilon_i(\xi)$  отдельных операций превращаются в  $\varepsilon_{1i}(\xi)$  путем использования двух уравнений баланса по элементарным фракциям для каждой операции:  $q_{\text{исх}}(\xi) = q_{\text{к}}(\xi) + q_{\text{хв}}(\xi)$ ;  $q_{\text{к}}(\xi) = \varepsilon_i(\xi) q_{\text{исх}}(\xi)$ , причем  $q_i(\xi) = Q_i \gamma_i(\xi)$ . Составив такие пары уравнений для всех  $\Pi + \text{K} + 1$  операций любой схемы (не только канонической или полуканонической) и решив их, получим для каждого продукта ключевое соотношение  $Q_i \gamma_i(\xi) = \varepsilon_{1i}(\xi) Q_{\text{исх}} \gamma_{\text{исх}}(\xi)$ , из которого и следуют формулы (4.25). Заметим, что эта методика легко позволяет вычислить и фракционный состав  $\gamma_i(\xi)$   $i$ -го продукта по последнему



ключевому соотношению (напомним, что функция  $\beta_j(\xi)$  остается идентичной для всех продуктов).

Формулы (4.25) справедливы также для  $n$ -мерного случая  $(o_1, \dots, o_n)$  и обобщают аналогичные формулы для одного аппарата. Расчет по ним обладает прогнозирующей силой, так как позволяет заранее рассчитать схемы любой конфигурации с известными аппаратами в операциях.

Сравнивая фракционно-балансный расчет с традиционным компонентно-балансным расчетом, отметим, что традиционные исходные данные по схеме  $\bar{\gamma}_k$  (или  $\bar{\gamma}_i$ ) и  $E_i$  (или  $E_{i\text{исх}}$ ) зависят не только от выбранных аппаратов в операциях, но и от фракционного состава сырья. Так, абсолютное извлечение компонента (металла) в  $i$ -й продукт

$$E_{i\text{исх}} = \bar{\beta}_i \bar{\gamma}_i / \bar{\beta}_{\text{исх}} = \bar{\beta}_{\text{исх}}^{-1} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_{i_i}(\xi) \beta_{\text{Me}}(\xi) \gamma_{\text{исх}}(\xi) d\xi.$$

Во второй методике исходные данные по схеме зависят только от сепарационных характеристик аппаратов, что позволяет естественно и просто разделить влияние типа сырья и типа схемы на технологические показатели.

При расчете многостадийных и многоцикловых схем обогащения надо учитывать факты переподготовки материала к обогащению – изменение крупности сырья (доизмельчение) в питании каждой стадии и реагентного режима (реагентной обработки) в начале нового цикла флотации и т.п., что ведет к деформации функций  $\gamma_{\text{исх}}(\xi)$  и  $\beta_{\text{Me}}(\xi)$ . Независимо от вида переподготовки функции  $\gamma_{\text{исх}}(\xi)$  и  $\beta_{\text{Me}}(\xi)$  деформируются с сохранением среднего содержания любого ценного компонента, т.е.  $\int_D \beta(\xi) \gamma(\xi) d\xi$  при переподготовке не изменяется.

**Пример 1.** Для схемы гравитационного обогащения железной руды с одной основной и одной перечистой операциями имеются следующие исходные данные. Плотность частиц подготовленной к сепарации руды, содержащей магнетит, кварц, их сродки и

примесные минералы,  $2,5 < \rho < 5 \text{ т/м}^3$ . Функция  $\gamma_{\text{исх}}(\rho)$  характеризуется равномерным распределением частиц по плотности, т.е.  $\gamma_{\text{исх}}(\rho) = 1/(5 - 2,5) = 0,4 \text{ м}^3/\text{т}$ . Содержание полезного металла (Fe) в частицах возрастает линейно с увеличением плотности частиц от нуля при  $\rho = \rho_{\text{min}} = 2,5 \text{ т/м}^3$  до 70% при  $\rho = \rho_{\text{max}} = 5 \text{ т/м}^3$ , т.е.  $\beta_{\text{Fe}}(\rho) = -70 + 28\rho$ ;  $\beta_{\text{исх}} = \int_{\text{Fe}} \gamma_{\text{исх}} d\rho = 35\%$ . В обеих операциях обогащения применены одинаковые (тяжелосредные) сепараторы с характеристиками

$$\varepsilon_o(\rho) = \varepsilon_{\text{II}}(\rho) = 0,5 + 0,5\Phi[3(\rho - 3)] = 0,5 + 0,5\Phi.$$

На основе этих исходных данных делается следующий расчет. Для чернового концентрата

$$\begin{aligned} q_2(\rho) &= \varepsilon_{1,2}(\rho) \gamma_{\text{исх}} Q_{\text{исх}} = (0,5 + 0,5\Phi) \times \\ &\times Q_{\text{исх}} \gamma_{\text{исх}} / (0,5 - 0,5\Phi + 0,25 + 0,5\Phi + 0,25\Phi^2) = \\ &= 0,4 Q_{\text{исх}} (1 + \Phi) / (1,5 + 0,5\Phi); \end{aligned}$$

$$Q_2 = \int_{2,5}^5 0,4 Q_{\text{исх}} [(1 + \Phi) / (1,5 + 0,5\Phi^2)] d\rho \approx 0,88 Q_{\text{исх}};$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_2 &= Q_2^{-1} \int_{2,5}^5 \beta_{\text{Fe}}(\rho) q_2(\rho) d\rho = (0,88 Q_{\text{исх}})^{-1} \int_{2,5}^5 (-70 + 28\rho) 0,4 Q_{\text{исх}} \times \\ &\times [(1 + \Phi) / (1,5 + 0,5\Phi)] d\rho \approx 40\% \text{ Fe}. \end{aligned}$$

Аналогично для окончательного концентрата

$$q_4(\rho) = 0,4 Q_{\text{исх}} (0,5 + 0,5\Phi)^2 / (0,5 + 0,25 + 0,25\Phi^2);$$

$$Q_4 = 0,4 Q_{\text{исх}} \int_{2,5}^5 [(0,5 + 0,5\Phi)^2 / (0,75 + 0,25\Phi^2)] d\rho \approx 0,74 Q_{\text{исх}};$$

$$\bar{\beta}_1 = (Q_{\text{исх}})^{-1} \int_{2,5}^5 (-70 + 28\rho) 0,4 Q_{\text{исх}} \times \\ \times (0,5 + 0,5\Phi)^2 / (0,75 + 0,25\Phi^2) d\rho \approx 45 \% \text{ Fe}.$$

Все интегралы здесь приближенно заменены суммами. Значения интеграла вероятности  $\Phi[3(\rho - 3)]$  следующие:

$\rho, \text{т/м}^3$	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\Phi$	-0,866	0	0,866	0,997	0,999	1

**Пример 2.** Для схемы флотационного обогащения полиметаллической руды, состоящей из основной, перечистой и контрольной операций, имеются следующие исходные данные. Флотируемость частиц  $0 < k < k_{\text{max}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ , причем 70 % частиц – нефлотируемые ( $k = 0$ ), остальные 30 % равномерно распределены в диапазоне флотируемости  $0 < k < k_{\text{max}}$ , т.е. исходная  $\gamma$  – функция имеет вид  $\gamma_{\text{исх}}(k) = 0,7\delta(k) + 0,3/k_{\text{max}} = 0,7\delta(k) + 0,6 \cdot 10^3$ . Первый член с  $\delta$ -функцией относится к нефлотируемым частицам (график его – узкий импульс в точке  $k = 0$  с площадью импульса, равной 0,7); второй член относится к флотируемым частицам (график его – плоский, ограниченный, с площадью 0,3).

Флотируемые минералы представлены галенитом (PbS), сфалеритом (ZnS) и халькопиритом (CuFeS<sub>2</sub>), а также сростками. Содержание свинца в частицах возрастает линейно с увеличением их флотируемости от нуля при  $k = 0$  до 86 % при  $k = k_{\text{max}}$ , т.е. первая («свинцовая»)  $\beta$ -функция имеет вид  $\beta_{\text{Pb}}(k) = 86k / k_{\text{max}} = 17,2 \cdot 10^4 k$ . Содержание цинка в частицах возрастает с флотируемостью их от нуля при  $k = 0$  до 6,7 % при  $k = k_{\text{max}}$ , т.е. вторая («цинковая»)  $\beta$ -функция имеет вид  $\beta_{\text{Zn}}(k) = 6,7k / k_{\text{max}} = 1,34 \cdot 10^4 k$ . Содержание меди в частицах также возрастает линейно с флотируемостью от нуля при  $k = 0$  до 3,4 % при  $k = k_{\text{max}}$ , т.е. третья («медная»)  $\beta$ -функция имеет вид  $\beta_{\text{Cu}}(k) = 3,4k / k_{\text{max}} = 0,68 \cdot 10^4 k$ .

Во всех трех операциях обогащения применены флотационные машины с одинаковыми  $\varepsilon$ -характеристиками

$$\varepsilon_o(k) = \varepsilon_n(k) - \varepsilon_k(k) = 1 - \exp(-kSt) = 1 - \exp(-30000k).$$

Расчет для окончательного концентрата (без расчетов для промежуточных продуктов) сводится к следующему. По формуле (4.3) находим

$$\varepsilon_{\text{рез}}(k) = (1 - e)^2 / [1 - 2(1 - e) + 2(1 - e)^2],$$

где  $e = \exp(-30000k)$ .

Результирующая сепарационная характеристика схемы флотации следующая:

$k \cdot 10^{-4}, \text{ м/с}$	0	0,125	0,25	0,375	1	5
$\varepsilon_{\text{рез}}(k)$	0	0,15	0,5	0,75	0,95	0,99

Вычислим показатели, относящиеся к окончательному концентрату:

$$q_4(k) = \varepsilon_{\text{рез}}(k) Q_{\text{исх}} \gamma_{\text{исх}}(k) = (1 - e)^2 Q_{\text{исх}} [0,7\delta(k) + 0,6 \cdot 10^3] / [1 - 2(1 - e) + 2(1 - e)^2];$$

$$Q_4 = 0,6 \cdot 10^3 Q_{\text{исх}} \int_0^{5 \cdot 10^{-4}} \varepsilon_{\text{рез}}(k) dk \approx 0,6 \cdot 10^3 Q_{\text{исх}} [(0,15 + 0,5 + 0,75) 0,125 \cdot 10^{-4} + 0,95 \cdot 0,625 \cdot 10^{-4} + 0,99 \cdot 4 \cdot 10^{-4}] = 0,28 Q_{\text{исх}}.$$

При вычислении  $Q_4$  влияние нефлотируемой части сырья пропадает, так как  $\delta(k)$ -функция умножается под интегралом на  $\varepsilon_{\text{рез}}(0) = 0$ . Содержание металлов в концентрате

$$\bar{\beta}_{4\text{Pb}} = (0,28 Q_{\text{исх}})^{-1} \int_0^{5 \cdot 10^{-4}} \beta_{\text{Pb}}(k) q_4(k) dk =$$

$$= 0,28^{-1} \int_0^{5 \cdot 10^{-4}} 17,2 \cdot 10^4 k \varepsilon_{\text{рез}} 0,6 \cdot 10^3 dk \approx 45 \% ;$$

$$\bar{\beta}_{4\text{Zn}} = (0,28)^{-1} \int_0^{5 \cdot 10^{-4}} 1,34 \cdot 10^4 k \varepsilon_{\text{рез}} 0,6 \cdot 10^3 dk = 3,5 \% ;$$

$$\bar{\beta}_{4\text{Zn}} = (0,28)^{-1} \int_0^{5 \cdot 10^{-4}} 0,68 \cdot 10^4 k \varepsilon_{\text{рез}} 0,6 \cdot 10^3 dk = 1,8 \% .$$

**Пример 3.** Схема радиометрического обогащения содержит одну основную  $\varepsilon_o(\varphi)$  и одну незамкнутую контрольную  $\varepsilon_k(\varphi)$  операции с рентгенолюминесцентными сепараторами; частные концентрации обеих операций объединяют в общий концентрат, т.е. результирующая сепарационная характеристика схемы имеет вид (табл.4.3)

$$\varepsilon_{\text{рез}} = \varepsilon_o + (1 - \varepsilon_o) \varepsilon_k .$$

Фракционный состав исходного сырья показан в табл.4.4, причем за меру излучательной способности частиц берется сила тока  $\varphi$  на выходе стандартной фотоизмерительной системы, в которую поступает излучение минеральной частицы.

Таблица 4.3

Сепарационная характеристика схемы при нормальной производительности

$\varphi$ , мкА	$\varepsilon_{\text{рез}}(\varphi)$	$\varphi$ , мкА	$\varepsilon_{\text{рез}}(\varphi)$
0-0,2	0	1,2-1,4	0,90
0,2-0,4	0,01	1,4-1,6	0,95
0,4-0,6	0,2	1,6-1,8	0,95
0,6-0,8	0,4	1,8-2	0,95
0,8-1	0,5	2-2,5	0,95
1-1,2	0,8	>2,5	1

Таблица 4.4

## Результаты радиометрического анализа флюоритовой руды

φ, мкА	γ <sub>исх</sub> (φ)Δφ	β <sub>CaF<sub>2</sub></sub> , %	φ, мкА	γ <sub>исх</sub> (φ)Δφ	β <sub>CaF<sub>2</sub></sub> , %
0-0,2	0,0136	39	1,2-1,4	0,1	70
0,2-0,4	0,01	35	1,4-1,6	0,111	80
0,4-0,6	0,005	49	1,6-1,8	0,14	90
0,6-0,8	0,007	56	1,8-2	0,16	97
0,8-1	0,0814	59	2-2,5	0,2	100
1-1,2	0,04	61	>2,5	0,179	100

Расчет показателей по окончательному концентрату дает

$$\bar{\gamma}_k = \int_0^{2,5} \varepsilon_{\text{рез}}(\varphi) \gamma_{\text{исх}}(\varphi) d\varphi = (0 \cdot 0,0136 + 0,01 \cdot 0,01 + \dots + \\ + 0,95 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,179) \approx 0,7 = 70 \% ;$$

$$\bar{\beta}_k = \bar{\gamma}_k^{-1} \int_0^{2,5} \beta_{\text{CaF}_2}(\varphi) \varepsilon_{\text{рез}}(\varphi) \gamma_{\text{исх}}(\varphi) d\varphi \approx (28 \cdot 0 \cdot 0,0136 + 35 \cdot 0,01 \cdot 0,01 + \\ + \dots + 100 \cdot 0,95 \cdot 0,2 + 100 \cdot 1 \cdot 0,179) \approx 95 \% \text{ CaF}_2 .$$

Прогнозирующие расчеты технологических показателей сложных промышленных схем целесообразно делать с помощью специализированных компьютерных программ.

#### 4.4. Компьютерные расчеты сепарационных характеристик

Программа BF (Balancing Fraction Calc, UniFlot) вычисляет частные и абсолютные сепарационные характеристики (EPS-функции) для всех операций и продуктов схемы любой конфигурации и с любым числом операций.

Частная сепарационная характеристика J-й операции флотации EPSUN(J,K) или EPSUN(J,I) берется как отношение масс

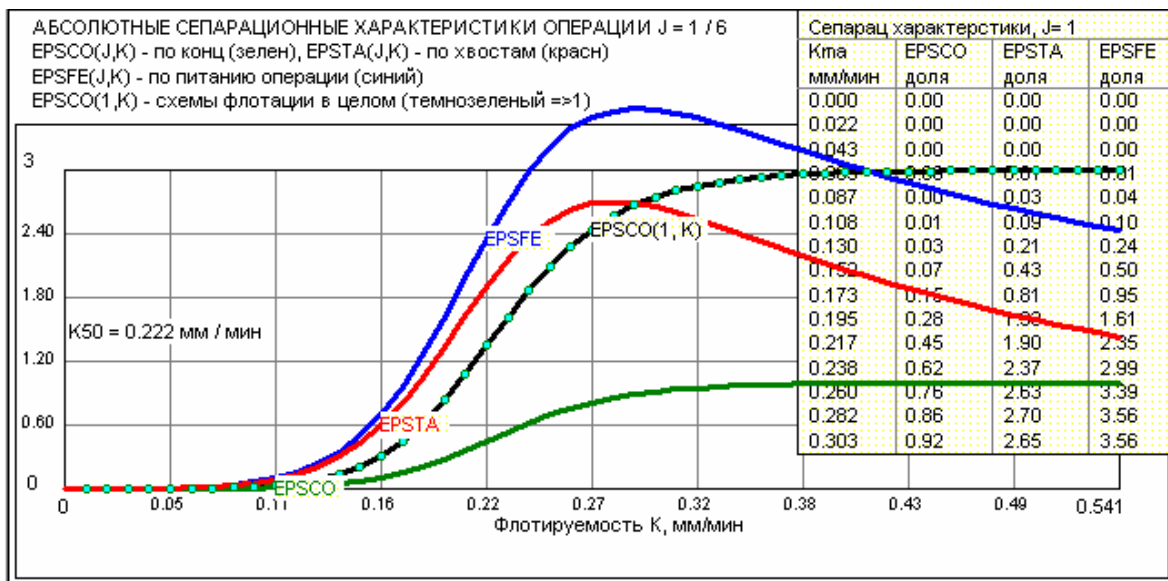


Рис.4.5. Пример вычисления абсолютных сепарационных характеристик для продуктов операции J = 1 (последняя перечистка в схеме из шести операций на рис.4.6)

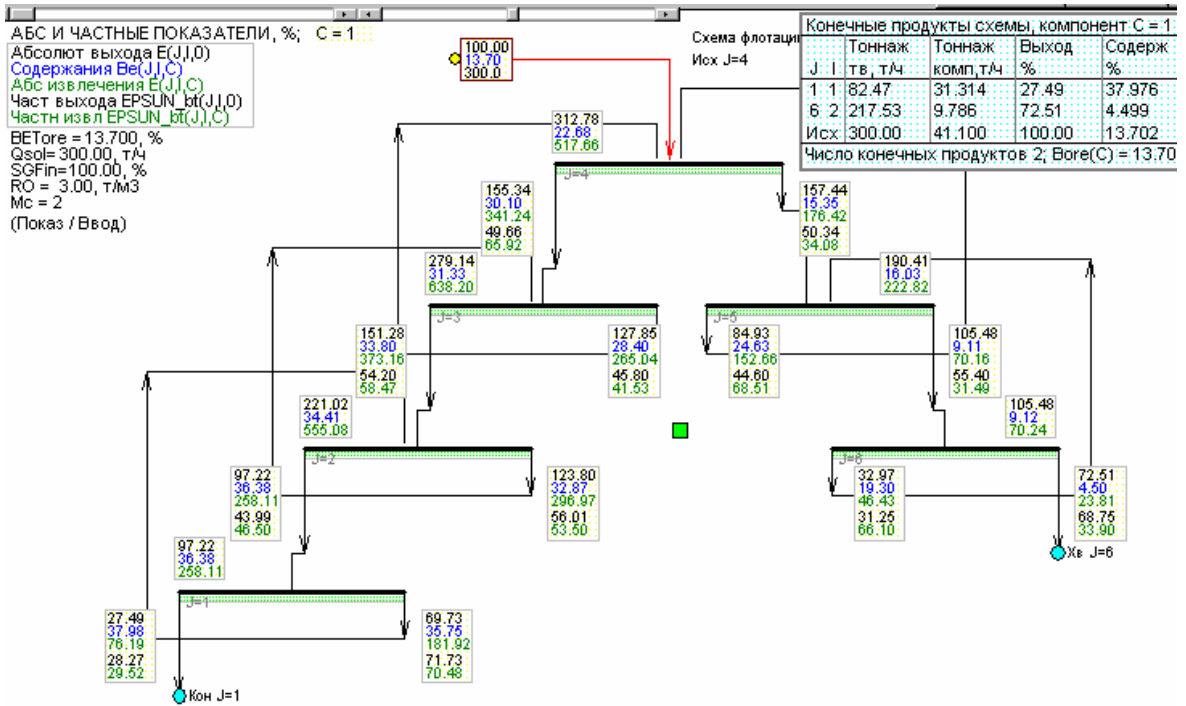


Рис.4.6. Пример вычисленных сбалансированных выходов, содержаний и извлечений на масштабируемой технологической схеме



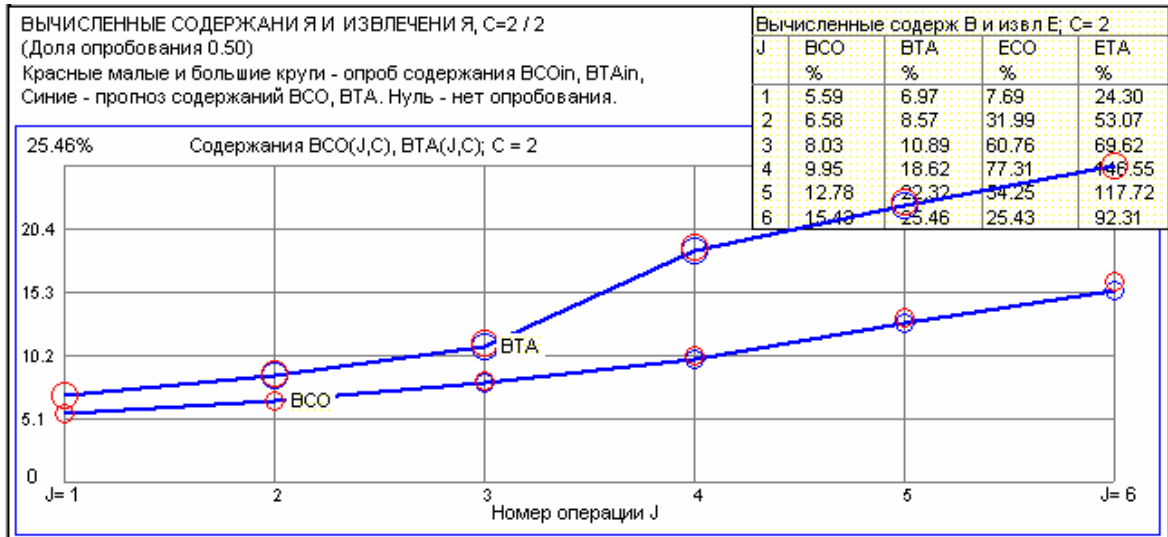


Рис.4.7. Пример вычисленных сбалансированных содержаний на графике развертки

Ж / Т: ПОТОКИ ПИТАНИЯ ОПЕРАЦИЙ  
 Qfe - поток твердого в операции, т/ч  
 Qw - поток воды, м3/ч  
 Qsl - поток пульпы, м3/ч  
 ROsl - плотность пульпы, т/м3

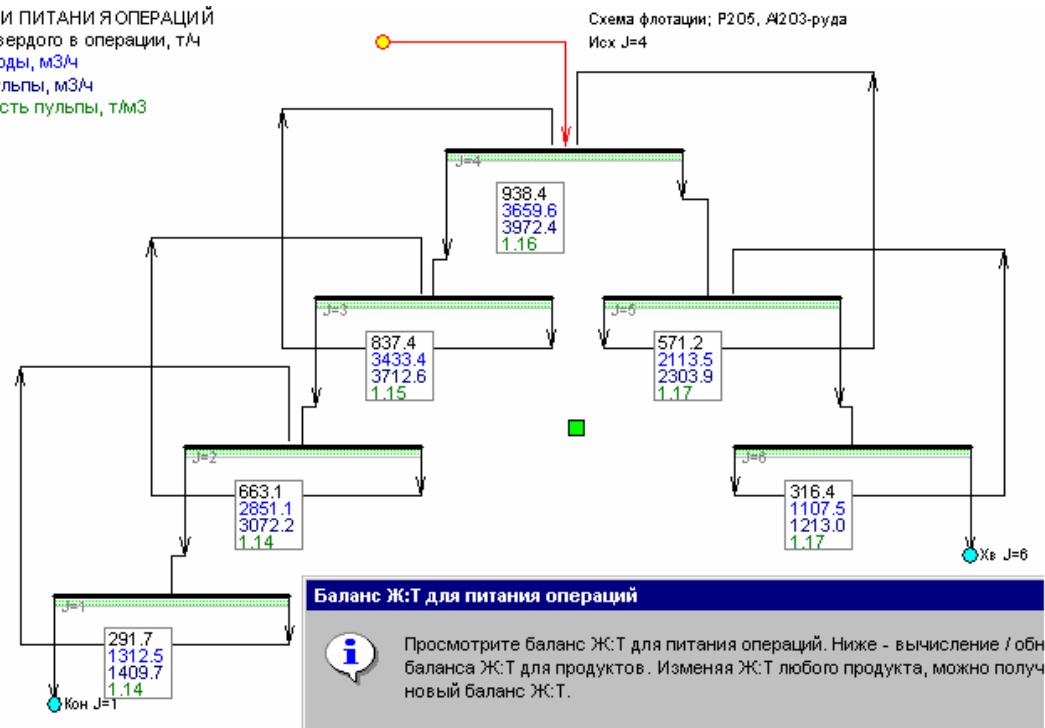


Рис.4.8. Результаты расчета водно-шламового баланса для питания операций (пример)

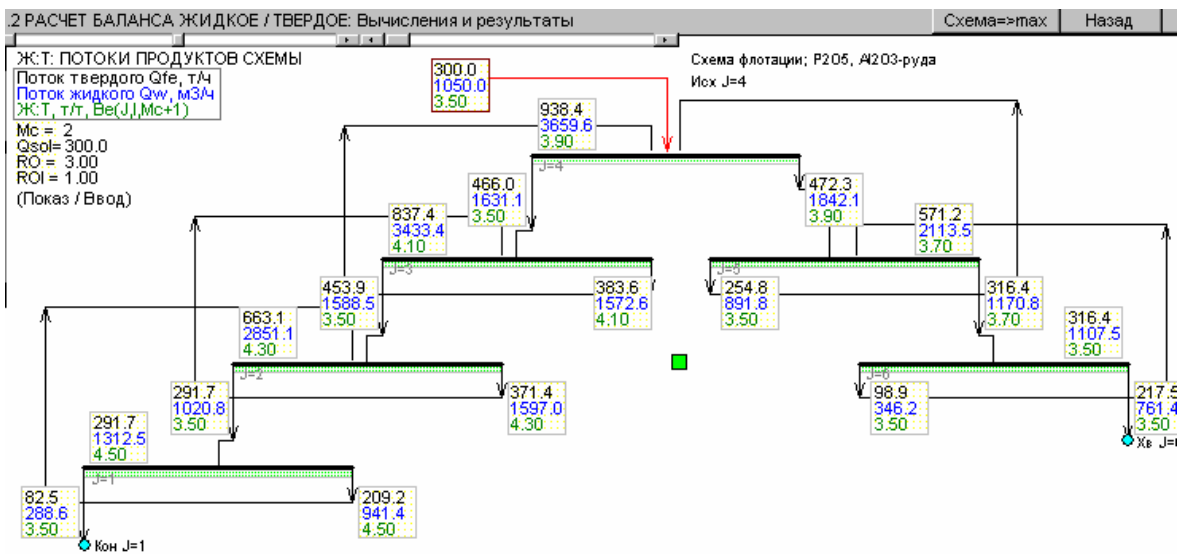


Рис.4.9. Пример расчета водно-шламового баланса для продуктов операций

(производительностей) узкой К-флотофракции (1-я фракция) в концентрате и питании операции.

*Абсолютная сепарационная характеристика участка* от питания схемы до концентрата J-й операции EPSCO(J,K) или EPSCO(J,I) берется как отношение масс (производительностей) узкой К-флотофракции (1-я фракция) в питании схемы и в концентрате J-й операции. Аналогично для хвостов EPSTA(J,K) и питания EPSFE(J,K) операции. (От англ. COncentrate, TAilings, FEed). В программных расчетах все сепарационные характеристики вычисляются для 50 ординат (рис.4.5 на вклейке). Определяются абсолютные сепарационные характеристики для всех главных участков схемы флотации: EPSFE(J,K) – от исходного питания схемы до питания J-й операции (отношение масс фракции в питании операции и в питании схемы флотации); EPSCO(J,K) – от исходного питания схемы до концентрата J-й операции (отношение масс фракции в концентрате операции и в питании схемы флотации); EPSTA(J,K) – от исходного питания схемы до хвостов J-й операции (отношение масс фракции в хвостах операции и в питании схемы флотации).

Для *визуализации* информация о частных и абсолютных EPS-функциях представляется в графической и табличной формах. Графики EPS-функций представляются в полном диапазоне изменения флотируемости фракций 0-Kmax.

В сопровождающих таблицах помещается только начальная наиболее изменчивая часть EPS-кривых, как правило, с экстремумом, перекрывающая примерно начальную треть полного диапазона флотируемости 0-Kmax.

Результирующая сепарационная характеристика схемы флотации в целом берется *по конечному концентрату* и соответствует концентрату последней перечистки. Ее показывают на всех графиках в виде линии с кружками, шкалируемой на единицу отдельно от остальных графиков.

Также вычисляется и показывается на всех графиках флотируемость разделения схемы в целом K50, которая соответствует граничной фракции между фракциями конечного концентрата и хвостов схемы флотации. Кроме того, вычисляются частные сепарационные характеристики операций EPSUN(J,K). Ординаты функций

EPSUN(J,K) расположены в строках таблицы данных); причем по горизонтали указан номер операции J (как обычно), а по вертикали – верхняя граница флотуемости фракций (одна нефлотуемая фракция и 10 флотуемых фракций). Ординаты всех EPSUN(J,K) изменяются в пределах от нуля и выше и измеряются в долях массы (отношение масс фракции в концентрате и в питании операции).

#### **4.5. Компьютерные прогнозирующие фракционно-балансные расчеты**

Прогнозирующие расчеты технологических показателей по главным интегральным формулам здесь названы фракционно-балансными (в отличие от традиционных компонентно-балансных расчетов).

Вычисляемые по главным интегральным формулам *технологические показатели* (выходы, содержания и извлечения) представляются на графике схемы (рис.4.6 на вклейке). Кроме того, для наглядности показатели иллюстрируются графиками развертки по операциям флотации с дополнительным вычислением производительности и извлечений компонентов (рис.4.7 на вклейке). Конечные продукты схемы флотации, окончательные концентраты и хвосты выделяются рамками.

На основе вычисленных технологических показателей производится расчет водно-шламового баланса (рис.4.8, 4.9 на вклейке).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели фракционный состав минерального сырья и минеральных продуктов, закономерности движения минеральных частиц и сепарационные характеристики обогатительных аппаратов, методы анализа и прогнозирующих расчетов технологических схем обогащения полезных ископаемых.

Другие разделы теории сепарационных процессов: оптимизация обогатительных процессов, комбинированное обогащение минерального сырья, комплексное использование сложного многоминерального сырья, конструктивное применение компьютерных программ для соответствующих расчетов, – выходят за рамки допустимого объема учебного пособия и, возможно, будут опубликованы дополнительно.

Материал пособия дает базу для компьютерного моделирования любых сепарационных обогатительных процессов и сложных технологических схем. В эпоху безграничных возможностей и доступности компьютерной техники теоретическая база математического моделирования, закладываемая рассматриваемой теорией сепарационных процессов, становится важнейшим фактором практической работы студентов, инженеров и ученых.

**РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ  
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. *Андреев Е.Е.* Анализ фракционного состава и обогатимости апатито-нефелиновой руды Хибинского массива / Е.Е.Андреев, О.Н.Тихонов и др. // Обогащение руд. 1999. № 6. С.9-13.
2. *Белоглазов И.Л.* Методы расчета обогатительно-гидрометаллургических аппаратов и комбинированных схем / И.Л.Белоглазов, О.Н.Тихонов, В.В.Хайдов. М.: Metallurgia, 1995. 300 с.
3. *Тихонов О.Н.* Введение в динамику массопереноса процессов обогатительной технологии. Л.: Недра, 1973. 240 с.
4. *Тихонов О.Н.* Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. М.: Недра, 1984. 200 с.
5. *Тихонов О.Н., Андреев Е.Е.* Опыт применения прогнозирующих и оптимизирующих компьютерных программ для процессов рудоподготовки и флотации на обогатительных фабриках СНГ / О.Н.Тихонов, Е.Е.Андреев // Обогащение руд. 1995. № 4-5. С. 81-84.
6. *Тихонов О.Н.* Теоретические основы сепарационных процессов обогащения полезных ископаемых / Ленинградский горный ин-т. Л., 1978. 100 с.
7. *Тихонов О.Н.* Теория и практика комплексной переработки полезных ископаемых в странах Азии, Африки и Латинской Америки / О.Н.Тихонов, Ю.П.Назаров. М.: Недра, 1989. 300 с.
8. Computer Modeling Helping in Optimization of Pechenganickel Flotation Plant. Proceedings of the III International Conference on Clean Technologies for the Mining Industry / *I.A.Blatov, L.V.Zelenskaia, E.E.Andreev, O.N.Tikhonov et al.* Santiago, Chile, May 15-17, 1996. P. 503-511.
9. Computerized Flotometric and Granulo-flotometric Analysis of Flotation Mineral Materials / *E.E.Andreev, I.A.Blatov, O.N.Tikhonov, L.V.Zelenskaja* Proceedings of International Conference "Processing of Nickel Ores", Vanckouver, Canada, 1998.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Фракционный состав минеральных продуктов и сепарационные характеристики обогатительных аппаратов и схем.....	6
1.1. Рудоподготовка и основные методы обогащения .....	7
1.2. Понятия о фракционном составе минеральных материалов .....	15
1.3. Понятие о сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов и схем обогащения .....	22
1.4. Прогнозирующее вычисление технологических показателей обогащения и фракционного состава продуктов для двухпродуктовых аппаратов и схем .....	26
1.5. Обобщение на случаи сложного минерального сырья и схем .....	35
2. Общие закономерности движения минеральных частиц в рабочих зонах обогатительных аппаратов .....	37
2.1. Фракционный состав (функция состояния) минерального материала в рабочей зоне и фундаментальная задача его предсказания .....	38
2.2. Понятие о поле статистических усредненных скоростей движения частиц элементарных фракций в зоне .....	42
2.3. Взаимосвязь между полем скоростей и функцией состояния в виде закона сохранения .....	42
2.4. Силы, действующие на минеральные частицы.....	49
2.5. Уравнения сепарации в рабочих зонах.....	55
3. Нахождение сепарационных характеристик обогатительных аппаратов.....	56
3.1. Нахождение сепарационных характеристик аппаратов по известному фракционному составу в рабочей зоне.....	57
3.2. Аппараты гравитационного обогащения.....	58
3.3. Аппараты грохочения и классификации .....	59
3.4. Магнитные сепараторы.....	60
3.5. Флотационные машины .....	61
3.6. Экспериментальное нахождение сепарационных характеристик .....	63
4. Нахождение сепарационных характеристик, анализ и расчет промышленных технологических схем .....	63
4.1. Сепарационные характеристики технологических схем .....	64
4.2. Анализ сепарационных характеристик гравитационных, магнитных, флотационных и других схем.....	72
4.3. Прогнозирующий фракционно-балансный расчет технологических показателей .....	87
4.4. Компьютерные расчеты сепарационных характеристик .....	94
4.5. Компьютерные прогнозирующие фракционно-балансные расчеты .....	96
Заключение .....	97
Рекомендательный библиографический список .....	98