

Проф. М. К. ВЕНТЦЕЛЬ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ



ГЕОДЕЗИЗАТ

Москва — 1948

Проф. М. К. ВЕНТЦЕЛЬ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Краткий курс

Издание 2-е, исправленное и дополненное

Министерством высшего образования СССР
допущено в качестве учебника для инсти-
тутов геодезии, аэросъемки и картографии

Издательство геодезической и картографической литературы

МОСКВА 1948

АННОТАЦИЯ

При составлении настоящего курса имелось в виду применение сферической тригонометрии при изучении астрономии, в особенности сферической и практической, и геодезии, главным образом, высшей.

Книга предназначена служить в качестве учебника для студентов младших курсов геодезических и землеустроительных институтов и факультетов, а также для учащихся различных отделений геодезических, топографических и землеустроительных техникумов при изучении сферической тригонометрии. Она может служить также учебным пособием для студентов старших курсов и аспирантов специальных кафедр тех же вузов. Кроме того, она принесет существенную методическую пользу преподавателям математики этих вузов при чтении лекций и ведении упражнений по сферической тригонометрии, а также будет полезна и инженерам-геодезистам различных уклонов и специализаций.

Изложение предмета дано в объеме, необходимом и достаточном для всех вышеуказанных целей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время преподавание сферической тригонометрии в геодезических и землеустроительных вузах и техникумах ведут математики, и притом на младших курсах. Астрономам и геодезистам часто приходится отмечать недостаточную подготовку в этой области студентов старших курсов, приступающих к изучению этих основных специальных дисциплин. В свою очередь, преподаватели математики также не всегда ясно представляют себе объем и специфический уклон, в котором было бы наиболее целесообразно вести преподавание этого предмета.

Желание дать преподавателям математики исчерпывающий ответ на их многократные запросы, а студентам старших курсов возможность восполнить пробелы и освежить свои знания в этой маленькой области математики, без которой, однако, невозможно сколько-нибудь сознательное и продуктивное занятие сферической и практической астрономией и высшей геодезией, побудило меня составить это краткое руководство по сферической тригонометрии в объеме, строго необходимом и минимально достаточном для прохождения и усвоения астрономии и геодезии.

При подготовке к печати настоящего, 2-го издания мною руководило желание учесть, по возможности, указания и замечания рецензентов, а также свой личный опыт преподавания за последние годы, не изменяя в то же время сколько-нибудь существенно ни объема и содержания этого краткого курса, ни, в особенности, самого характера изложения. Интересы и запросы астрономии и высшей геодезии были и неизменно остаются в центре внимания автора. Для этого издания мною написаны вновь §§ 3, 20, 26, главы VII и VIII и большая часть „Приложений“.

В соответствии с пожеланиями рецензентов я вновь написал: § 26 (Формулы синуса половины сферического избытка треугольника), § 33 (Об измерении углов), § 40 (Дифференциальные соотношения сферического треугольника) и § 41 (Решение сферических треугольников с малыми сторонами по способу

аддитаментов) и основательно переработал: § 22 (Решение прямоугольных треугольников) и § 27 (Решение косоугольных треугольников). В двух последних параграфах мною увеличено число разобранных случаев решения сферических треугольников того и другого вида и способов решения в каждом случае, и, кроме того, на каждый случай приведен пример, который решен всеми рассмотренными способами. В связи с этим добавлен и § 39 (Практическое замечание о решении треугольников) о так называемом правиле Лаланда, так как это „правило“ использовано во втором и третьем случаях решения косоугольных треугольников при решении их по аналогиям Непера и формулам Делямбра-Гаусса.

Параграфы 34, 35 и 36 главы VII, написанной вновь, посвящены изложению элементов аналитической геометрии на сфере с точки зрения применения ее в астрономии и геодезии и адресованы по преимуществу преподавателям математики специальных вузов и факультетов. Эти параграфы вводят в круг вопросов, которые могут встретиться при применении сферической тригонометрии на практике. В этом именно смысле они и могут быть использованы при преподавании предмета.

Наоборот, § 3 (Обобщенные треугольники) и § 37 (Вторая система сферических координат) имеют целью ознакомить астрономов и геодезистов, хотя бы отчасти, с обобщенной трактовкой сферической тригонометрии и имеют в виду, главным образом, аспирантов специальных кафедр геодезических вузов. Что касается § 42 (Сферические треугольники с верхтупыми углами), то он, дополняя и § 3 и § 36, представляет некоторый интерес и для тех и для других читателей этой книжки.

В „Приложениях“ приведены задачи по сферической геометрии и тригонометрии, дающие материал для ведения упражнений и для самостоятельной работы учащихся.

Не перечисляя более подробно, отметим только, что большие или меньшие добавления сделаны еще в §§ 5, 8, 9, 14, 25, 33, часть в интересах большей доказательности и связи изложения, часть и по другим соображениям аналогичного характера.

В последнее время выяснилось, что основательные сведения по сферической тригонометрии необходимы также и при прохождении курсов картографии, фотограмметрии и других родственных дисциплин. Полагаю, что и эти запросы будут здесь в достаточной мере удовлетворены, в особенности в связи с теми дополнениями, которые сделаны в настоящем издании.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность всем лицам, оказавшим мне помощь при переработке этой книги для второго издания, в особенности же рецензенту, доктору техн. наук инженер-полковнику А. В. Мазаеву и ответственному редактору, кандидату техн. наук доценту А. И. Витман за их весьма ценные указания и замечания, принятые мною во внимание при окончательном редактировании книги.

Д-р техн. наук проф. *М. К. Венцель*

Глава I

ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ

§ 1. Элементы фигур на сфере. Аналогия между сферой и плоскостью

Сферическая тригонометрия занимается решением треугольников, расположенных на сфере, и имеет большое применение в астрономии (особенно в сферической и практической), в геодезии (особенно в высшей), в инструментоведении, в картографии, в фотограмметрии, в кристаллографии и в ряде других наук.

Причины этого указать не трудно. В астрономии часто пользуются вспомогательной небесной сферой и постоянно выполняют на ней ряд построений, пользуясь методом сферических координат. В геодезии идеальную поверхность земли в первом приближении рассматривают как сферическую. В картографии пользуются сферой как промежуточной ступенью между реальной земной поверхностью и изображением ее на плоскости. В инструментоведении и в кристаллографии применяют вспомогательную сферу для изучения взаимного расположения в пространстве осей инструмента или кристалла и различных плоскостей, рассматривая на сфере относительное положение точек и линий пересечения этих осей и плоскостей с ее поверхностью и т. д.

Роль сферической тригонометрии заключается в том, что она дает исследователю систему математических формул и соотношений, помогающих ему выражать законы изучаемых явлений кратким, точным и выразительным языком математики, математического анализа — в самом широком смысле этого слова.

В дальнейшем сферическая тригонометрия излагается в объеме, необходимом для изучения астрономии и геодезии.

Однако, прежде чем приниматься за изучение сферической тригонометрии, нужно познакомиться с некоторыми основными положениями элементарной геометрии на сфере. Хотя геометрические построения на сферической поверхности и на плоскости весьма различаются между собой, но все же между ними можно провести некоторые аналогии, облегчающие изучение сферической геометрии. Сферическая геометрия или геометрия на сфере рассматривает геометрические свойства фигур, расположенных на поверхности шара.

Рассмотрим в первую очередь простейшие элементы фигур на сфере. На плоскости элементарными геометрическими образами, так сказать, простейшими элементами фигур, прежде всего являются точка и прямая. На сфере такими элементами будут в первую очередь точка и дуга большого круга.

Как известно, через две точки на плоскости (и в пространстве) можно провести прямую и притом только одну, т. е. прямая вполне определяется двумя точками, через которые она проходит.

Точно так же и через две точки на сфере всегда можно провести дугу большого круга и, вообще говоря, только одну.

Теорему эту можно доказать следующим образом. Известно, что через три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Проведем через две точки A и B (черт. 1) и центр сферы C плоскость. Всякая плоскость, проходящая через центр сферы,

A diagram of a circle with a sector ABC . The sector is formed by radii AB and AC , and the arc BC . The angle at vertex A is labeled 60° .

прямой с центром сферы; это случится, когда они будут лежать на концах одного и того же диаметра (черт. 2).

The diagram shows a sphere with a vertical axis labeled AB and a horizontal axis labeled XP . The center of the sphere is marked with a small circle and labeled C . Several vertical lines (meridians) are drawn as solid curves, and several horizontal lines (parallels) are drawn as dashed curves. On the lower hemisphere, points V , U , T , S , and Q are marked along a parallel. On the upper hemisphere, points y , w , and n are marked along a parallel. The point P is at the rightmost point of the horizontal axis.

A diagram of a sphere with two great circles intersecting. The intersection points are labeled A and B. The regions are labeled M, N, and C.

Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками. В элементарной геометрии и в анализе доказывается, что и дуга большого круга есть кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере.

Это положение является второй аналогией между прямой на плоскости и дугой большого круга на сфере.

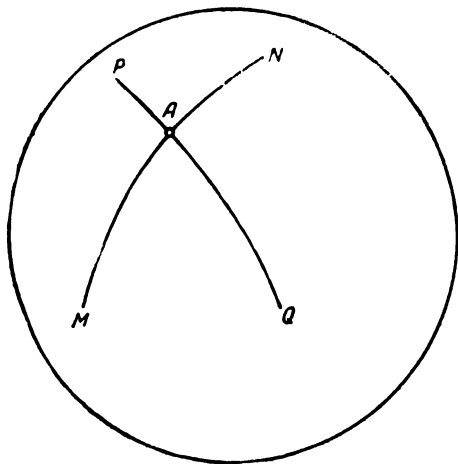
6

относительно кратчайшего расстояния относится только к дуге AMB , меньшей 180° . Таким образом, это положение более точно следует сформулировать так: дуга большого круга, меньшая 180° , есть кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере; причем здесь, конечно, подразумевается, что это есть сферическое расстояние, т. е. расстояние, измеренное по поверхности сферы. Следовательно, дуга большого круга (меньшая 180°) есть геодезическая линия на сфере.

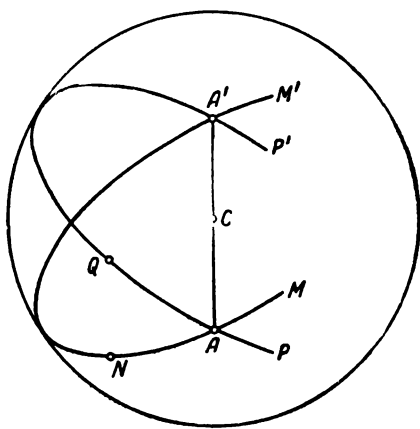
Для того чтобы не делать каждый раз такие и подобные им оговорки, в сферической геометрии и тригонометрии принято, по предложению Эйлера, как правило, рассматривать только дуги, меньшие 180° . Это правило известно под названием „ограничение Эйлера“.

Действительно, при соблюдении ограничения Эйлера ни первая, ни вторая теоремы о дуге большого круга не нуждаются ни в каких оговорках.

Две прямые пересекаются только в одной точке; значит, точка вполне определяется двумя прямыми, в ней пересекающимися.



Черт. 4



Черт. 5

Две дуги большого круга, удовлетворяющие ограничению Эйлера, пересекаются только в одной точке. Следовательно, точка на сфере определяется двумя такими пересекающимися в ней дугами (черт. 4).

Это есть третья аналогия между дугой большого круга на сфере и прямой на плоскости.

Особенность по сравнению с плоскостью есть и здесь. Она состоит в том, что две дуги больших кругов, при достаточном их продолжении, непременно пересекутся в двух диаметрально противоположных точках (черт. 5).

Ввиду всего вышеизложенного в элементарной сферической геометрии и в сферической тригонометрии, как правило, рассматриваются только те фигуры, которые составлены из дуг больших кругов, удовлетворяющих ограничению Эйлера.

Кроме таких фигур в сферической геометрии рассматривается еще малый круг, являющийся, так сказать, простейшей „кривой“ на сфере, так же, как окружность, рассматриваемая в элементарной геометрии (в планиметрии), есть простейшая кривая на плоскости.

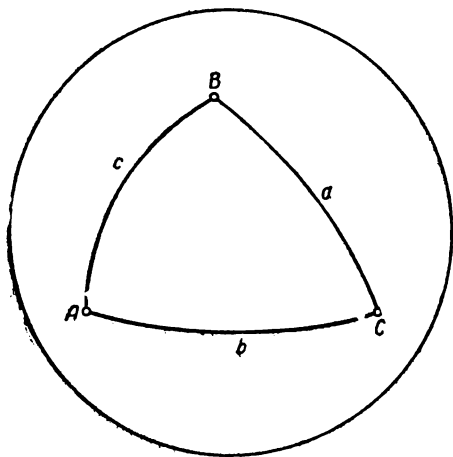
§ 2. Простейшие сферические фигуры

При соблюдении ограничения Эйлера, на сфере, так же как и на плоскости, простейшей фигурой является треугольник.

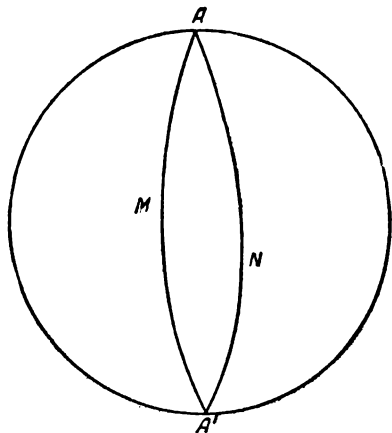
Сферическим треугольником называется фигура, составленная тремя дугами больших кругов, пересекаю-

щимися в трех точках, например, треугольник ABC на черт. 6. Дуги, образующие треугольник, называются сторонами, а точки их пересечения — вершинами треугольника. Способ обозначения вершин и сторон сферических треугольников такой же, как и для плоских треугольников. В то время как стороны плоского треугольника являются прямыми линиями и выражаются в линейных мерах, стороны сферического треугольника суть дуги больших кругов и выражаются поэтому в дуговых мерах, обычно в градусах, минутах и секундах.

В сферической тригонометрии обычно рассматриваются только треугольники, стороны которых удовлетворяют ограничению Эйлера.



Черт. 6



Черт. 7

Если мы, не отказываясь от ограничения Эйлера, возьмем предельный случай, т. е. рассмотрим сферическую фигуру, составленную дугами, равными 180° , то получим замкнутую фигуру, ограниченную двумя такими дугами, пересекающимися в двух диаметрально противоположных точках A и A' (черт. 7). Такая фигура называется сферическим двуугольником или фюзом и является еще более простой сферической фигурой, чем сферический треугольник.

§ 3. Обобщенные треугольники

Иногда обыкновенный плоский треугольник определяют, как систему трех точек с соединяющими их кратчайшими линиями, т. е. прямыми. По аналогии можно определить и сферический треугольник, как систему трех точек на сфере, из которых никакие две не лежат на концах одного и того же диаметра; с кратчайшими на поверхности сферы линиями, их соединяющими, т. е. дугами больших кругов, не превосходящими полуокружности. Такие треугольники называются эйлеровыми. Характерные особенности этих треугольников следующие:

- 1) стороны и углы эйлерова треугольника лежат между 0° и 180° ;
- 2) три точки на поверхности сферы определяют один и только один эйлеров треугольник, если никакие две из них не расположены диаметрально друг другу.

Мёбиус обобщил понятие сферического треугольника, показав, что ограничение величины сторон и углов, установленное Эйлером, имеет только практическое значение, а с теоретической точки зрения целесообразно допустить также стороны и углы, большие 180° , но меньшие 360° (так называемые сверхтупые углы).

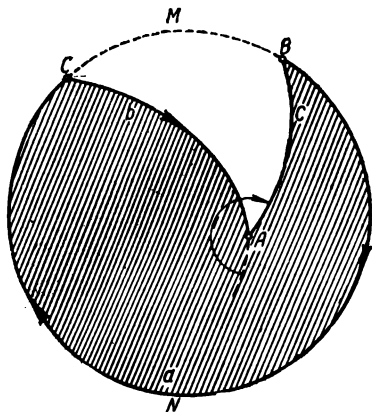
Треугольники, у которых стороны и углы могут принимать значения от 0° до 360° , как, например, у треугольника ABC , заполняющего на черт. 8 затухеванную часть поверхности полусферы, называются треугольниками

Мёбиуса. У такого треугольника два его элемента — угол при вершине A и сторона $a = \widehat{BNC}$ — оба больше 180° .

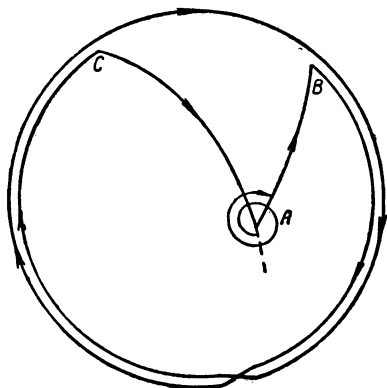
Два характерных свойства треугольника Мёбиуса заключаются в следующем:

- 1) стороны и углы треугольника Мёбиуса заключаются между 0° и 360° ;
- 2) три точки на поверхности сферы определяют 16 треугольников Мёбиуса, если никакие две из этих точек не расположены диаметрально.

Дальнейшее обобщение понятия о сферическом треугольнике было указано Гауссом и разработано Стюди. Оно заключается в том, что стороны и углы треугольника не ограничиваются никакими пределами. Такие треугольники называются треугольниками Гаусса-Стюди. Геометрически можно составить себе представление о треугольнике Гаусса-Стюди, если вообразить, что треугольник сделан из нитей, а углы между его сторонами стянуты спиральными пружинками; нить может обвивать сферу несколько раз, а спиральная пружинка иметь несколько оборотов.



Черт. 8



Черт. 9

На чертеже 9 схематически изображен треугольник Гаусса-Стюди.

Таким образом, характерные свойства треугольника Гаусса-Стюди можно сформулировать так:

- 1) стороны и углы треугольника Гаусса-Стюди могут изменяться без всякого ограничения;
- 2) трем данным точкам на сфере, из которых никакие две не расположены диаметрально, соответствует бесчисленное множество треугольников Гаусса-Стюди.

Так как треугольники Мёбиуса и Гаусса-Стюди представляют чисто теоретический интерес, то в дальнейшем изложении мы будем рассматривать только эйлеровы треугольники*).

§ 4. О полюсах

Проведем через центр сферы C плоскость CQN и получим таким образом окружность большого круга QNR (черт. 10). Проведем диаметр AA' , перпендикулярный к плоскости CQN . В таком случае прямая AA' называется геометрической осью дуги или окружности большого круга QNR , а точки A и A' , лежащие на сфере, — геометрическими полюсами этой дуги или окружности. Большой круг QNR иногда называют геометрическим экватором или полярной точек A и A' .

Теорема I. Все точки полярности отстоят от своего полюса на сферическом или дуговом расстоянии, равном 90° .

*) Несколько подробнее о треугольниках Мёбиуса см. § 42.

Доказательство. Возьмем на полюсе сколько угодно точек Q, M, N, R и т. д. и проведем в плоскости QNR прямые CQ, CM, CN, CR и т. д. По определению $AC \perp$ пл. QNR . Следовательно, $CQ \perp AC, CM \perp AC, CN \perp AC, CR \perp AC$ и т. д., так как прямые CQ, CM, CN, CR и т. д. проходят через основание перпендикуляра AC и лежат в плоскости QNR .

Следовательно,

$$\angle AQ = \angle AM = \angle AN = \angle AR = \dots = 90^\circ,$$

что и доказывает нашу теорему.

Итак, полюс данной дуги большого круга есть точка на сфере, удаленная от всех точек этой дуги на 90° .

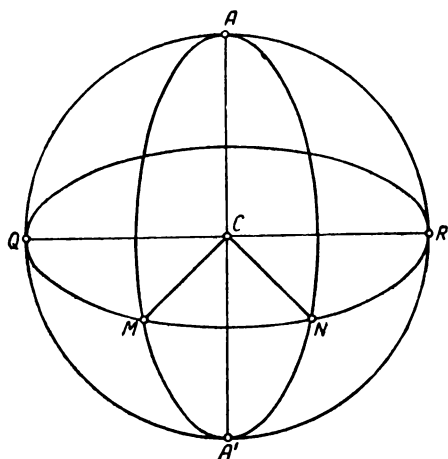
Теорема II. Если данная точка отстоит на 90° от двух каких-либо точек данной дуги, не лежащих на концах одного и того же диаметра, то она является полюсом этой дуги большого круга.

Доказательство. Пусть дано, что точки M и N дуги QNR (черт. 10), не лежащие на одном и том же диаметре, отстоят от точки A на 90° , т. е.

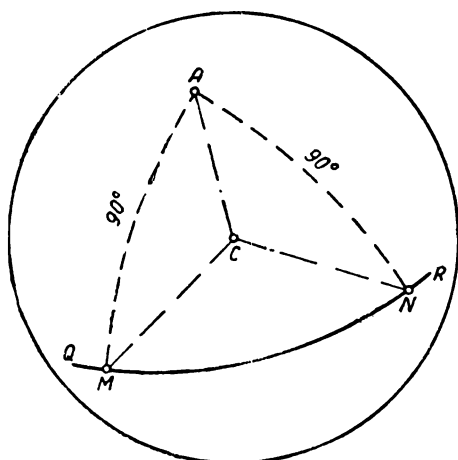
$$\angle MA = \angle NA = 90^\circ.$$

Проведя в плоскости QNR прямые CM и CN , убеждаемся, что они будут перпендикулярны к прямой AC . Следовательно, прямая AC , перпендикулярная к двум прямым, проходящим через ее основание и лежащим в плоскости

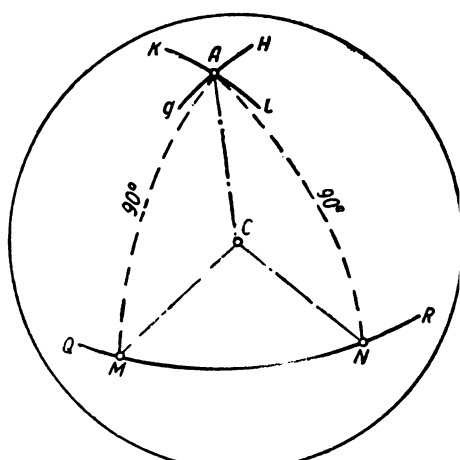
QNR , будет перпендикулярна и к плоскости QNR , а, следовательно, и ко всякой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через ее основание, т. е. через точку C , например, к прямой QC и т. д., а это значит, что



Черт. 10



Черт. 11



Черт. 12

все точки дуги QNR отстоят от точки A на 90° , и точка A является полюсом этой дуги.

Задача 1. Найти дугу, для которой данная точка является полюсом.

Решение. Из данной точки A (черт. 11) сферическим радиусом*), равным 90° , опишем дугу QR ; это и будет искомая дуга большого круга, для которой точка A будет полюсом.

Доказательство. Если взять на дуге QR какие-нибудь две точки M и N , не лежащие на одном диаметре, и соединить их дугами AM и AN с точкой A , то по построению

$$\frown AM = \frown AN = 90^\circ,$$

а, значит, точка A и есть полюс дуги QR .

Задача 2. Найти полюс данной дуги большого круга.

Решение. Из двух каких-нибудь точек M и N данной дуги QR (черт. 12), не лежащих на одном диаметре, проведем две дуги сферическим радиусом, равным 90° ; получим соответственно дуги KL и gH . Точка пересечения этих дуг A и будет полюсом дуги QR .

Доказательство. Соединим точку A с точками M и N дугами больших кругов; по построению будем иметь:

$$\frown AM = \frown AN = 90^\circ.$$

Следовательно, точка A , отстоящая от двух точек дуги QR на 90° , и есть полюс этой дуги большого круга.

§ 5. Сферические углы и их измерение

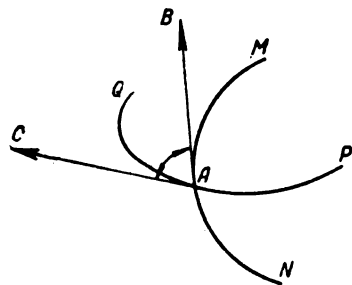
Две дуги большого круга MN и PQ (см. черт. 4), пересекаясь в точке A , образуют сферический угол MAQ . Точка A называется его вершиной, дуги MA и QA — сторонами.

В высшей математике угол между двумя любыми кривыми MN и PQ (черт. 13), пересекающимися в точке A , определяется, как угол между касательными AB и AC к этим кривым, проведенным в точке их пересечения.

Это общее определение применяется и к сферическому углу. Таким образом, мы можем сказать, что сферический угол MAQ (черт. 14) измеряется углом между касательными AB и AC , проведенными к его сторонам, через вершину угла A . Короче говорят, что сферический угол MAQ равен углу BAC между касательными, т. е. сф. $\angle MAQ = \angle BAC$.

Теорема III. Сферический угол MAQ (черт. 15) измеряется дугой QM , заключенной между его сторонами, для которой вершина угла, точка A , является полюсом, т. е.

$$\text{сф. } \angle MAQ = \frown MQ.$$

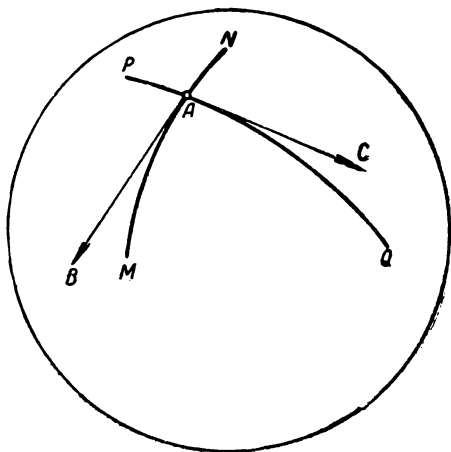


Черт. 13

*) Сферическим центром окружности (или дуги) большого или малого круга называется точка сферы, от которой все точки этой окружности (или дуги) лежат на одинаковом или дуговом расстоянии, не большем 90° . Сферическим радиусом окружности (или дуги) большого или малого круга называется дуга большого круга, соединяющая сферический центр этой окружности (или дуги) с любой точкой, лежащей на окружности. Очевидно, для большого круга его сферический центр совпадает с полюсом, а сферический радиус равен 90° . Для малого круга сферический радиус меньше 90° . Проведение на сфере дуг и окружностей больших и малых кругов выполняется с помощью сферического циркуля, который, в отличие от обыкновенного циркуля, имеет изогнутые ножки. Легко сообразить, что линейное расстояние между концами (остриями) ножек сферического циркуля, так сказать, его растворение, должно быть равно хорде дуги большого круга, равной сферическому радиусу описываемой окружности.

Доказательство. Проведем плоскости $AA'M$ и $AA'Q$ через диаметр AA' и точки M и Q соответственно. Эти плоскости, очевидно, можно назвать плоскостями сторон сферического угла MAQ . Плоскости эти образуют двугранный угол $MAA'Q$, который мы можем назвать соответствующим сферическому углу MAQ .

К каждой из сторон угла в точке A проведем касательные AB и AC соответственно. По свойству касательной, каждая из этих прямых лежит в плоскости той дуги, которой она касается, и будет перпендикулярна к радиусу OA , проведенному в точку касания, т. е.



Черт. 14

$$AB \perp AA' \text{ и } AC \perp AA'.$$

Следовательно, угол BAC , являясь линейным углом двугранного угла $MAA'Q$, измеряется тем же числом градусов, минут и проч. Короче это выражают, говоря, что угол BAC равняется двугранному углу $MAA'Q$.

Проведем через центр сферы O плоскость RMQ , перпендикулярную к диаметру AA' . В сечении получим дугу большого круга QMR , для которой точка A будет полюсом,

По построению

$$OQ \perp AA' \text{ и } OM \perp AA'.$$

Следовательно, угол MOQ тоже будет линейным углом двугранного угла $MAA'Q$. Так как угол MOQ центральный, то он измеряется дугой окружности MQ , на которую он опирается.

Таким образом, можем записать, что

$$\text{сф. } \angle MAQ = \angle BAC,$$

согласно определению;

$$\angle BAC = \text{двугранному углу } MAA'Q,$$

по свойству линейных углов;

$$\text{двугранный угол } MAA'Q = \angle MOQ$$

на таком же основании, а по свойству центрального угла

$$\angle MOQ = \text{дуга } MQ.$$

Объединив эти четыре равенства, получим:

$$\text{сф. } \angle MAQ = \angle BAC = \text{дв. уг. } MAA'Q = \angle MOQ = \text{дуга } MQ, \quad (1)$$

а следовательно,

$$\text{сф. } \angle MAQ = \text{дуга } MQ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Сферический угол и соответствующий ему двугранный угол имеют одну и ту же меру, т. е.

$$\text{сф. } \angle MAQ = \text{двугранному углу } MAA'Q.$$

Это непосредственно следует из равенства (1).

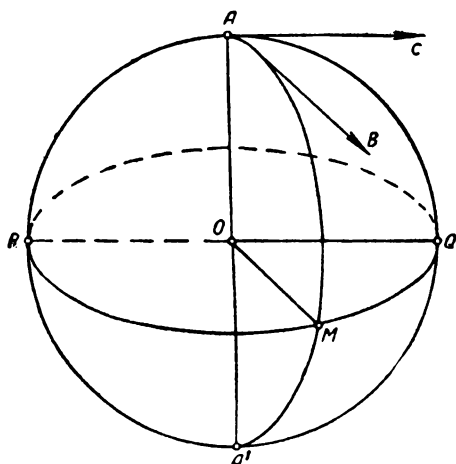
Следствие 2. Дуга большого круга, проходящая через полюс, перпендикулярна к полюсу, т. е.

$$\text{дуга } AM \perp \text{дуга } MQ.$$

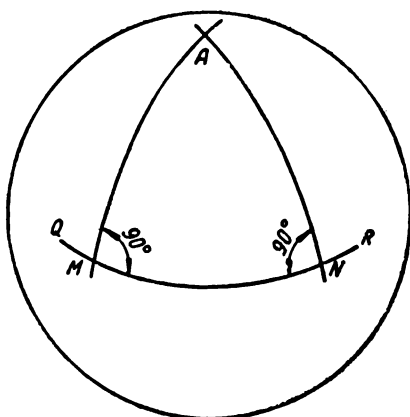
Доказательство. Из стереометрии известно, что плоскость MAA' (черт. 15), проходящая через прямую AA' , перпендикулярную к плоскости RQM , будет также перпендикулярна к этой плоскости. Значит, двугранный угол $QMOA$, составленный этими плоскостями, будет равняться 90° , а, стало быть, и соответствующий ему сферический угол QMA тоже будет равняться 90° , а это и значит, что

$$\frown AM \perp \frown MQ.$$

Дуга AM называется сферическим перпендикуляром к дуге QM , если сферический угол между ними равняется 90° .



Черт. 15



Черт. 16

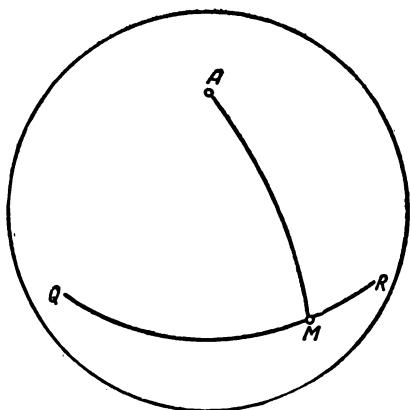
Следствие 3. Сферический перпендикуляр к данной дуге большого круга проходит через ее полюс.

Доказательство. Через две пересекающиеся прямые OM и OA (черт. 15) можно провести только одну плоскость AOM ; эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости RQM , будет проходить через точки M и A и в сечении со сферой даст дугу AM , перпендикулярную к дуге MQ и проходящую через точку A , что и доказывает следствие 3.

Следствие 4. Задача о нахождении полюса данной дуги большого круга (см. задачу 2 предыдущего параграфа) теперь может быть решена другим способом, а именно: на дуге QR (черт. 16) возьмем две произвольные точки M и N , не лежащие на одном диаметре, и восставим в этих точках сферические перпендикуляры MA и NA к дуге QR . Точка их пересечения будет полюсом дуги QR .

Доказательство. Согласно следствию 3 полюс дуги большого круга QR должен лежать одновременно на обоих сферических перпендикулярах к этой дуге. Следовательно, он лежит в точке их пересечения A .

Задача 3. Дана дуга большого круга QR и ее полюс, точка A (черт. 17). Из точки M , лежащей на этой дуге, восставить в ней сферический перпендикуляр.

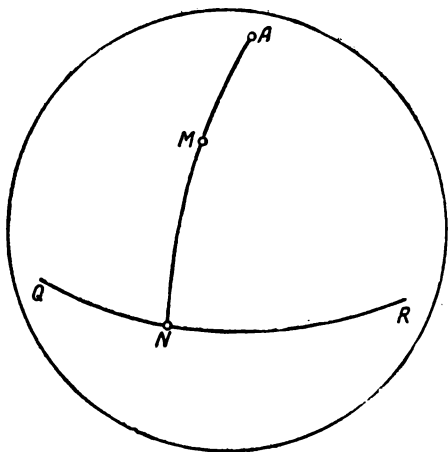


Черт. 17

Решение. Соединим полюс A и точку M дугой большого круга. Дуга AM и будет сферическим перпендикуляром к дуге QR в точке M . Это вытекает из следствия 2.

Задача 4. Дана дуга большого круга QR и ее полюс, точка A (черт. 18). Из точки M , не лежащей на дуге QR , опустить на нее сферический перпендикуляр.

Решение. Соединим полюс A с точкой M дугой большого круга и продолжим дугу AM до пересечения с дугой QR в точке N . Дуга AMN и будет сферическим перпендикуляром к дуге QR . Это также вытекает из следствия 2.



Черт. 18

Следствие 5. Вертикальные сферические углы равны.

Доказательство. Вертикальными сферическими углами называются такие сферические углы, у которых стороны одного будут продолжением дуг, являющихся сторонами другого сферического угла, как, например, углы MAQ и NAP на черт. 14. Если мы продолжим касательные AB и AC к сторонам AM и AQ сферического угла MAQ в направлении точек N и P соответственно, то угол между продолжениями этих касательных будет, с одной стороны, равен сферическому углу NAP , согласно определению, а, с другой стороны, будет равен углу BAC , как вертикальный. Следовательно,

$$\text{сф. } \angle NAP = \text{сф. } \angle MAQ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 6. Смежные сферические углы равны в сумме 180° .

Доказательство. Смежными сферическими углами называются углы, которые имеют общую вершину и одну общую сторону и у которых две другие стороны лежат на одном и том же большом круге, как, например, сф. $\angle QAM$ и сф. $\angle MAR$ на черт. 15. Из чертежа видно, что дуга QM есть мера сф. $\angle QAM$, а дуга MR — мера сф. $\angle MAR$, т. е.

$$\text{сф. } \angle QAM = \text{дуга } QM;$$

$$\text{сф. } \angle MAR = \text{дуга } MR.$$

Складывая почленно, получим:

$$\text{сф. } \angle QAM + \text{сф. } \angle MAR = \text{дуга } QM + \text{дуга } MR = \text{дуга } QR.$$

Но из чертежа видно, что дуга QR есть половина окружности большого круга QMR и, следовательно, равняется 180° . Таким образом,

$$\text{сф. } \angle QAM + \text{сф. } \angle MAR = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

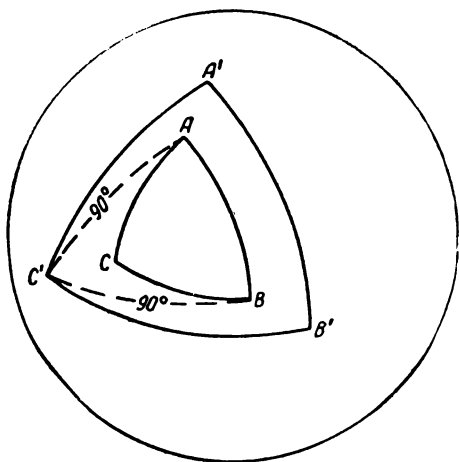
§ 6. Полярные треугольники

Если вершины треугольника ABC являются полюсами сторон другого сферического треугольника $A'B'C'$, то этот последний треугольник называется полярным по отношению к данному.

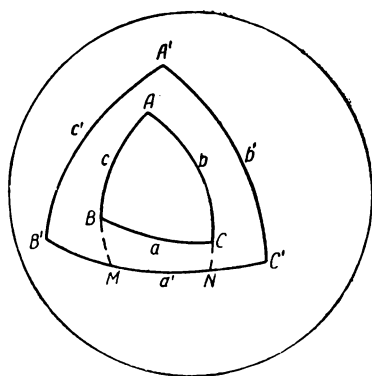
Теорема IV. Если треугольник $A'B'C'$ полярен по отношению к треугольнику ABC , то и, наоборот, треугольник ABC будет полярным по отношению к треугольнику $A'B'C'$ (черт. 19).

Доказательство. Соединим вершину данного треугольника A (черт. 19) с какой-нибудь из точек стороны $B'C'$ другого треугольника, для которой точка A служит полюсом, например, с вершиной C' , дугой большого круга AC' . По свойству полюса, дуга AC' будет равняться 90° . Соединим также вершину B треугольника ABC дугой большого круга с какой-нибудь из точек стороны $A'C'$, для которой эта вершина является полюсом, например, опять с точкой C' . Дуга BC' будет также равна 90° .

Мы получили, что вершина C' треугольника $A'B'C'$ отстоит от двух точек A и B стороны AB треугольника ABC на 90° . Следовательно, на основании теоремы II, вершина C' есть полюс стороны AB . Таким же образом можно показать, что точки A' и B' являются полюсами сторон CB и CA треугольника ABC . Итак, все вершины треугольника $A'B'C'$ суть полюсы сторон треугольника ABC ; значит, этот треугольник является полярным по отношению к треугольнику $A'B'C'$, что и требовалось доказать.



Черт. 19



Черт. 20

На основании этой теоремы выводим заключение, что сферические треугольники ABC и $A'B'C'$ взаимно полярны друг другу.

Иначе это можно формулировать таким определением. Если вершины одного сферического треугольника являются полюсами сторон другого, то такие треугольники называются взаимно полярными*).

Теорема V. Угол данного треугольника и соответствующая ему сторона полярного с ним треугольника в сумме равняются 180° , т. е. (черт. 20)

$$A + a' = 180^\circ.$$

Доказательство. Возьмем треугольник ABC и взаимно полярный с ним треугольник $A'B'C'$ (черт. 20). Продолжим стороны AB и AC до пересечения со стороной $B'C'$ соответственно в точках M и N . Так как вершина A есть полюс дуги $B'C'$, то дуга MN , на основании теоремы III, является мерой угла A . Из чертежа видно, что сторона $B'C'$, которую мы обозначили через a' , делится точками M и N на три части — $B'M$, MN и NC' .

*) При пересечении трех больших кругов получается 8 сферических треугольников. Из них взаимно полярны с данным лишь тот, у которого любая вершина A' , являющаяся полюсом стороны BC , и вершина A треугольника ABC , противолежащая стороне BC , лежат по одну сторону от этой стороны.

Это можно записать так:

$$A = MN;$$

$$a' = B'M + MN + NC'.$$

Складывая, находим:

$$A + a' = B'M + MN + MN + NC' = B'N + MC'.$$

Но

$$\angle B'N = 90^\circ,$$

так как B' есть полюс дуги AC , на продолжении которой лежит точка N , и

$$\angle MC' = 90^\circ,$$

так как C' есть полюс дуги AB , на продолжении которой лежит точка M .
Следовательно,

$$A + a' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

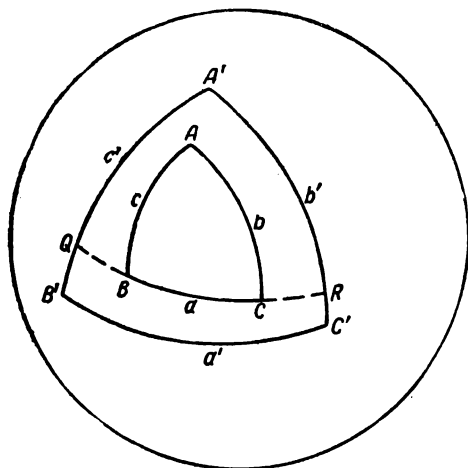
что и требовалось доказать.

Применяя теорему V к каждому из углов треугольника ABC , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A + a' &= 180^\circ \\ B + b' &= 180^\circ \\ C + c' &= 180^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Теорема VI. Сторона данного треугольника и соответствующий ей угол полярного с ним треугольника в сумме равняются 180° , т. е. (черт. 21)

$$a + A' = 180^\circ.$$



Черт. 21

Доказательство. Это соотношение вытекает уже из того, что треугольники ABC и $A'B'C'$ взаимно полярны; однако, оно может быть доказано и независимо от предыдущей теоремы.

Для этого продолжим дугу BC в обе стороны до пересечения ее с дугами $A'B'$ и $A'C'$ в точках Q и R (черт. 21). Дуга QR является мерой угла A' , так как вершина A' есть полюс этой дуги, и она заключена между сторонами угла A' . В то же время дуга QR точками B и C делится на три части QB , BC и CR .

Таким образом, на основании чертежа можем записать:

$$a = BC;$$

$$A' = QB + BC + CR.$$

Складывая, найдем:

$$a + A' = QB + BC + BC + CR = QC + BR.$$

Но

$$\angle QC = 90^\circ,$$

так как C есть полюс дуги $A'B'$ и точка Q есть одна из точек этой дуги, а

$$\angle BR = 90^\circ,$$

так как B есть полюс дуги $A'C'$ и точка R лежит на этой дуге.

Следовательно,

$$a + A' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Применяя теорему VI к каждой из сторон треугольника ABC , можем записать:

$$\left. \begin{aligned} a + A' &= 180^\circ \\ b + B' &= 180^\circ \\ c + C' &= 180^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Свойства взаимно полярных треугольников, выражаемые равенствами (2) и (3), имеют весьма важное значение в сферической геометрии и тригонометрии. Они, например, позволяют какие-либо свойства и формулы, выведенные для сторон сферического треугольника, распространять, с соответствующими изменениями, на его углы и, наоборот, — и облегчают, таким образом, вывод целого ряда формул и соотношений.

§ 7. Сферический треугольник и соответствующий ему трехгранный угол

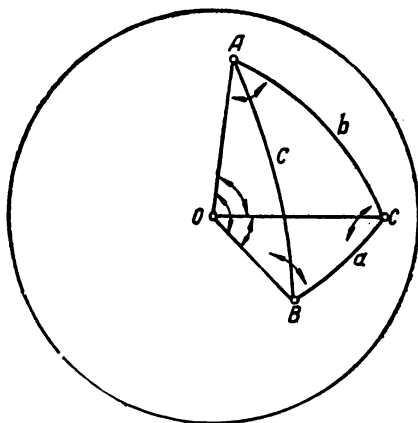
Если вершины сферического треугольника ABC (черт. 22) соединим радиусами OA , OB , OC с центром сферы O и через каждую пару радиусов проведем плоскости, которые будут плоскостями соответствующих сторон треугольника ABC , то получим трехгранный угол $OABC$, соответствующий данному сферическому треугольнику ABC . Вершиной этого трехгранного угла является центр сферы O , ребрами — радиусы сферы OA , OB , OC , а гранями — плоскости сторон сферического треугольника OAB , OBC и OCA .

В стереометрии рассматриваются следующие шесть элементов трехгранного угла: три плоских угла, составленных попарно его ребрами, т. е. углы AOB , BOC и COA , и три двугранных угла, составленных попарно его гранями, т. е. двугранные углы $AOBC$, $BOCA$, $COAB$.

В стереометрии доказываются следующие свойства плоских и двугранных углов трехгранного угла:

- Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.
- Разность двух плоских углов трехгранного угла меньше третьего плоского угла.
- Сумма всех трех плоских углов трехгранного угла больше нуля и меньше 360° .

В справедливости первых двух свойств можно легко убедиться на подвижной модели трехгранного угла. Справедливость третьего свойства станет очевидной на основании следующих рассуждений. Если мы будем уменьшать плоские углы нашего трехгранного угла, сдвигая между собой его ребра, т. е. радиусы OA , OB и OC , то и сумма плоских углов будет уменьшаться; в пределе сумма этих углов может стать равной нулю; однако, это произойдет только в том случае, если каждое из слагаемых, т. е. каждый из плоских углов в отдельности, станет равным нулю. Но тогда ребра должны будут слиться между собой в одну прямую и трехгранный угол исчезнет, он обратится в прямую. Значит, если трехгранный угол существует, сумма его плос-



Черт. 22

ких углов должна быть больше нуля. Если, наоборот, мы будем увеличивать плоские углы нашего трехгранного угла, раздвигая его ребра, то и сумма его плоских углов будет увеличиваться. В пределе, когда сумма эта достигнет 360° , трехгранный угол исчезнет — он обратится в плоскость. Значит, пока трехгранный угол существует, сумма его плоских углов должна быть меньше 360° .

г) Сумма всех двугранных углов трехгранного угла больше 180° и меньше 540° . Доказательство этого свойства можно найти в некоторых полных курсах элементарной геометрии.

Между элементами сферического треугольника ABC и элементами соответствующего ему трехгранного угла $OABC$ существуют определенные взаимосвязи, а именно:

1) Плоские углы трехгранного угла равняются соответствующим сторонам сферического треугольника.

Это вытекает из того, что плоские углы трехгранного угла измеряются, как углы центральные, дугами, на которые они опираются, т. е. как раз сторонами треугольника ABC .

2) Двугранные углы трехгранного угла равняются соответствующим сферическим углам треугольника ABC .

Это свойство явствует из следствия 1 теоремы III (см. стр. 12). Формулами эти зависимости можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned} a &= \angle BOC \\ b &= \angle COA \\ c &= \angle AOB \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{сф. } \angle A = \text{двугранному углу } COAB \\ \text{сф. } \angle B = \text{ " } A O B C \\ \text{сф. } \angle C = \text{ " } B O C A \end{array} \right\}. \quad (5)$$

§ 8. Свойства сторон и углов сферического треугольника

Свойства элементов сферического треугольника вытекают из свойств элементов трехгранного угла, перечисленных в предыдущем параграфе.

На основании свойства а) и формул (4) выводим следующее свойство сторон треугольника:

1) Сумма двух сторон сферического треугольника больше третьей, т. е.

$$a + b > c. \quad (6)$$

На основании свойства б) и формул (4) имеем:

2) Разность двух сторон сферического треугольника меньше третьей его стороны, т. е.

$$c - b < a. \quad (7)$$

3) Сумма сторон сферического треугольника больше нуля и меньше 360° , т. е.

$$0 < a + b + c < 360^\circ. \quad (8)$$

Это вытекает из формул (4) и свойства в), а также может быть доказано следующим простым рассуждением.

Если мы будем уменьшать стороны сферического треугольника, то в пределе он исчезнет, превратясь в точку, и, следовательно, сумма его сторон обратится в нуль. Если мы будем увеличивать стороны сферического треугольника, то в пределе он тоже исчезнет, он превратится в окружность большого круга, и, следовательно, сумма его сторон будет стремиться к 360° , как к пределу. Значит, пока сферический треугольник существует, сумма его сторон должна быть больше нуля и меньше 360° .

4) Сумма углов сферического треугольника больше 180° и меньше 540° , т. е.

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ. \quad (9)$$

Это вытекает из формул (5) и свойства г) двугранных углов трехгранного угла, приведенных в предыдущем параграфе.

Ввиду важности этого свойства, докажем его еще иным путем.

Возьмем двойное неравенство (8) и разобьем его на два простых:

$$a + b + c < 360^\circ$$

и

$$a + b + c > 0.$$

Применим эти неравенства к треугольнику $A' B' C'$ (черт. 21), взаимно полярному с данным треугольником ABC , т. е. запишем:

$$a' + b' + c' < 360^\circ \quad (I)$$

и

$$a' + b' + c' > 0. \quad (II)$$

По свойству взаимно полярных треугольников, по формулам (2) § 6 получим:

$$\left. \begin{aligned} a' &= 180^\circ - A \\ b' &= 180^\circ - B \\ c' &= 180^\circ - C \end{aligned} \right\}. \quad (III)$$

Подставляя в неравенство (I) вместо a' , b' и c' их выражения через правые части равенств (III), получим:

$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) < 360^\circ,$$

или

$$540^\circ - (A + B + C) < 360^\circ,$$

$$\text{или } 540^\circ - 360^\circ < A + B + C,$$

$$\text{или } 180^\circ < A + B + C,$$

$$\text{т. е. } A + B + C > 180^\circ.$$

Таким образом, первая часть неравенства (9) доказана.

Теперь выполним такую же подстановку выражений (III) в неравенство (II):

$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) > 0,$$

$$\text{или } 540^\circ - (A + B + C) > 0,$$

$$\text{или } 540^\circ > A + B + C,$$

$$\text{т. е. } A + B + C < 540^\circ.$$

Таким образом, неравенство (9) полностью доказано. Попутно этим доказательством дан пример применения свойств взаимно полярных треугольников, о котором было упомянуто в конце § 6.

Итак, сумма углов сферического треугольника всегда больше 180° на некоторую величину, которая называется сферическим избытком или эксцессом и обозначается буквой ϵ . Таким образом, мы можем записать

$$A + B + C = 180^\circ + \epsilon. \quad (10)$$

Сравнивая равенство (10) с неравенством (9), видим, что

$$0 < \epsilon < 360^\circ,$$

т. е. сферический избыток больше нуля и меньше 360° .

Первые два свойства сферического треугольника аналогичны свойствам плоского треугольника, последние два свойства присущи только сферическому треугольнику. Следует отметить и еще некоторые свойства сферических треугольников, аналогичные свойствам плоских, — а именно: в сферическом треугольнике:

5) против равных сторон лежат равные углы;

6) против равных углов лежат равные стороны;

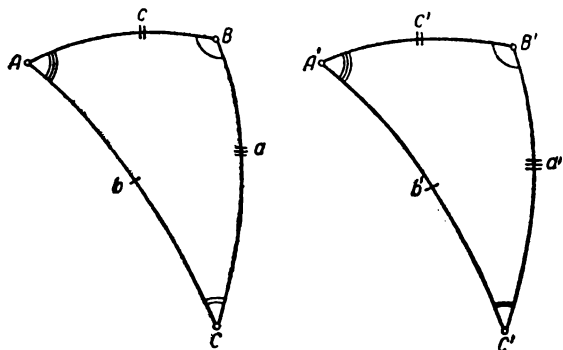
7) против большей стороны лежит больший угол;

8) против большего угла лежит большая сторона.

Свойства 5) — 8) могут быть доказаны с помощью построений и рассуждений, аналогичных тем, которые служат для доказательства подобных же теорем в планиметрии.

§ 9. Равные и симметричные сферические треугольники

Равными называются такие сферические треугольники, которые при наложении совпадают. Очевидно, у равных треугольников и все соответственные элементы равны, как, например, у треугольников ABC и $A'B'C'$ на черт. 23.



Черт. 23

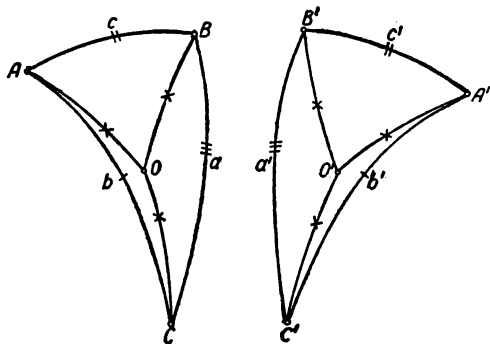
Однако, обратное утверждение не всегда справедливо, как например, для треугольников ABC и $A'B'C'$ на черт. 24. Хотя у этих треугольников все части одного треугольника соответственно равны всем частям другого, однако, эти треугольники не равны, так как вследствие их сферичности и неодинакового расположения их частей они при наложении не совпадают. Такие треугольники называются симметричными.

Условие равенства сферических треугольников может быть сформулировано так: если три какие-либо элемента одного сферического треугольника соответственно равны трем элементам другого и расположены у обоих треугольников одинаково, то такие треугольники равны. Наоборот, если три элемента одного сферического треугольника соответственно равны трем элементам другого, но расположены у обоих треугольников неодинаково, то такие треугольники симметричны друг другу.

Теорема VII. Симметричные треугольники равновелики, т. е. занимают одинаковую часть поверхности сферы, на которой они лежат.

Доказательство.

Пусть точка O (черт. 24) отстоит от точек A, B и C на одинаковом, сферическом расстоянии, а точка O' так же расположена относительно точек A', B' и C' . Иначе сказать, точки O и O' являются сферическими центрами окружностей, описанных около соответствующих сферических треугольников.



Черт. 24

Так как сферический центр окружности малого круга, описанного около сферического треугольника, лежит на сферическом перпендикуляре, восстановленном в середине каждой из его сторон, то двукратным наложением убеждаемся, что сферические радиусы окружностей, вписанных в два симметричных треугольника, равны между собой. В самом деле, наложим сперва сторону $B'A'$ на сторону AB , совместив точку B' с точкой A ; точка A' совместится тогда с точкой B вследствие равенства сторон AB и $A'B'$, а точки O и O' обе расположатся где-нибудь на сферическом перпендикуляре, восстановленном к совпавшим сторонам AB и $A'B'$. Наложим теперь сторону $B'C'$ на сторону BC , совместив при этом точку C' с точкой B , тогда, след-

ствие равенства сторон BC и $B'C'$, точка B' попадет в точку C . При этом точки O и O' будут лежать где-нибудь на перпендикуляре, восстановленном к совпавшим сторонам BC и $C'B'$ в их середине. Так как при этих наложениях точка O остается неподвижной и лежит в точке пересечения этих сферических перпендикуляров, то точка O' должна лежать на пересечении тех же перпендикуляров и, следовательно, должна каждый раз совпадать с точкой O ; а так как при этих наложениях совпадают каждый раз по две вершины треугольников, то это и доказывает, что сферические радиусы описанных окружностей равны, и самые окружности при этих наложениях совпадают. Итак, мы доказали, что

$$AO = OB = OC = O'A' = O'B' = O'C'.$$

Следовательно, треугольники ABO , BOC , COA , $A'B'O'$, $B'O'C'$, $C'O'A'$ — равнобедренные. Так как по свойству симметричных треугольников $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $CA = C'A'$, то эти треугольники попарно равны между собой, как имеющие по три равные и одинаково расположенные стороны, т. е.

$$\triangle AOB = \triangle B'O'A';$$

$$\triangle BOC = \triangle C'O'B';$$

$$\triangle COA = \triangle A'O'C'.$$

Складывая почленно эти три равенства, получим:

$$\triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA = \triangle B'O'A' + \triangle C'O'B' + \triangle A'O'C',$$

или

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Но так как данные треугольники при наложении не совпадают, то это равенство и показывает, что треугольники равновелики, что и требовалось доказать.

Отметим еще, что в равных и в симметричных сферических треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 10. Формула косинуса стороны сферического треугольника

Формула косинуса стороны читается следующим образом:

Косинус стороны сферического треугольника равняется произведению косинусов двух других его сторон, сложенному с произведением синусов тех же сторон на косинус угла между ними.

Возьмем сферический треугольник ABC (черт. 25) и обозначим его стороны малыми буквами a , b и c так, чтобы угол и противолежащая ему сторона обозначались одной и той же буквой. Тогда формула косинуса стороны a напишется таким образом:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Докажем справедливость этой формулы.

Для этого, прежде всего, соединим вершины треугольника A , B и C с центром сферы O и построим таким образом соответствующий треугольнику ABC трехгранный угол $OABC$.

Затем, предположив, что стороны этого треугольника AB и AC , т. е. стороны c и b , каждая меньше 90° , проведем касательные AM и AN соответственно к сторонам AB и AC в их общей точке, вершине A , и продолжим их до пересечения с продолжениями радиусов OB и OC в точках M и N

Проведя прямую MN , получим два плоских треугольника AMN и OMN , для которых эта прямая будет общей стороной. Напишем выражение для квадрата стороны MN по известной формуле прямолинейной тригонометрии из треугольника AMN и из треугольника OMN и полученные выражения приравняем друг другу. При этом учтем, что

$$\angle MAN = \text{сф. } \angle A,$$

как угол между касательными, и

$$\angle MON = a$$

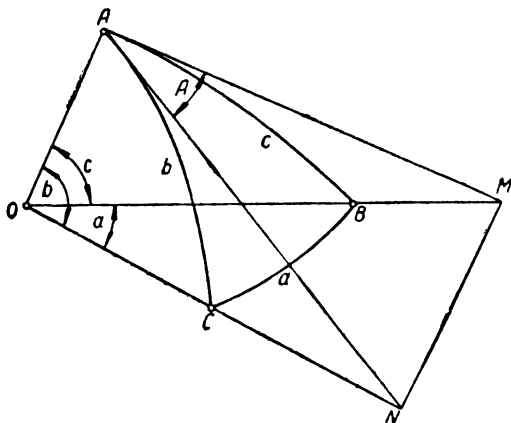
по свойству трехгранного угла.

Таким образом, будем иметь:

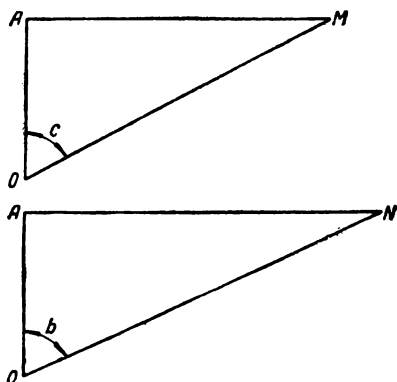
$$\overline{AM^2} + \overline{AN^2} - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos A = \overline{OM^2} + \overline{ON^2} - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a^*),$$

или, по перенесении членов:

$$2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a = \overline{OM^2} - \overline{AM^2} + \overline{ON^2} - \overline{AN^2} + 2AM \cdot AN \cdot \cos A.$$



Черт. 25



Черт. 26

Рассмотрим треугольники OAM и OAN , изображенные в отдельности в плане на черт. 26.

Эти треугольники прямоугольные, так как при точке A , по свойству касательных, у них углы прямые, а следовательно, на основании теоремы Пифагора, имеем из треугольника OAM :

$$\overline{OM^2} - \overline{AM^2} = \overline{OA^2},$$

а из треугольника OAN :

$$\overline{ON^2} - \overline{AN^2} = \overline{OA^2}.$$

Внося эти выражения в только что полученную формулу, по приведении подобных членов и сокращении на 2, получим:

$$OM \cdot ON \cdot \cos a = \overline{OA^2} + AM \cdot AN \cdot \cos A,$$

или, разделив почленно обе части на произведение $OM \cdot ON$:

$$\cos a = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AM}{OM} \cdot \frac{AN}{ON} \cdot \cos A.$$

*) Черточка, стоящая сверху квадратичных членов, означает, что квадрат относится не к одной крайней правой букве, а ко всей стороне сферического треугольника.

Из треугольника OAM (черт. 26) находим:

$$\frac{OA}{OM} = \cos c,$$

$$\frac{AM}{OM} = \sin c,$$

так как $\angle AOM = c$ по свойству трехгранного угла; из треугольника OAN находим:

$$\frac{OA}{ON} = \cos b,$$

$$\frac{AN}{ON} = \sin b,$$

так как $\angle AON = b$ на таком же основании.

Подставляя эти выражения в соотношение для $\cos a$, получаем:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

что и требовалось доказать.

Полученную формулу мы можем применить к каждой из сторон сферического треугольника ABC , т. е. записать:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Обращаем внимание на то, что каждая из этих формул, начинаясь в левой части косинусом стороны, в правой части заканчивается косинусом противолежащего ей угла.

При выводе формул (11) мы сделали предположение, что каждая из сторон нашего треугольника b и c меньше 90° . Однако это ограничение несущественно, и формулы (11) могут быть распространены на треугольники со сторонами любой длины.

§ 11. Формула косинуса угла сферического треугольника

Формула косинуса угла сферического треугольника читается так:

Косинус угла сферического треугольника равен произведению косинусов двух других углов, взятому с обратным знаком, сложенному с произведением синусов тех же углов на косинус стороны между ними.

Для угла A треугольника ABC (черт. 27) эта формула будет иметь такой вид:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Для доказательства применим к сферическому треугольнику $A'B'C'$, взаимно полярному с треугольником ABC , уже выведенную нами формулу косинуса стороны:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

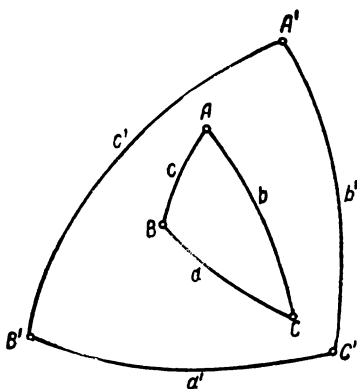
Но в силу формул (2) и (3) § 6 предыдущей главы имеем:

$$a' = 180^\circ - A,$$

$$b' = 180^\circ - B,$$

$$c' = 180^\circ - C,$$

$$A' = 180^\circ - a.$$



Черт. 27

Заменяя теперь стороны и угол треугольника $A'B'C'$ только что выписанными выражениями, мы получим:

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) + \\ + \sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a)$$

или

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a;$$

или, окончательно,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

что и требовалось доказать.

Рассуждая точно таким же образом, мы можем получить аналогичные формулы для всех углов треугольника ABC , так что будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Заметим, что формулы (12), начинаясь в левой стороне с косинуса угла, кончаются справа косинусом противоположащей ему стороны.

Следствие. Сферический треугольник вполне определяется тремя своими углами A , B и C .

Для доказательства этого положения решим равенства (12) относительно $\cos a$, $\cos b$ и $\cos c$ соответственно:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Из написанных выражений видно, что если даны три угла A , B и C сферического треугольника ABC , то могут быть вычислены все три его стороны a , b и c , так как правые части этих выражений зависят только от функций данных углов A , B и C , что и доказывает приведенное выше утверждение.

§ 12. Теорема синусов для сферического треугольника

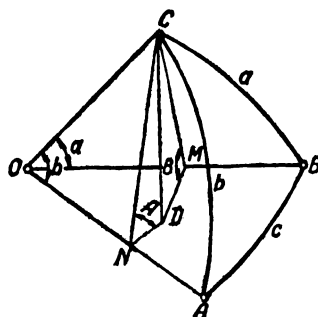
Для сферического треугольника теорема синусов читается лишь с небольшим изменением по сравнению с формулировкой этой теоремы в прямолинейной тригонометрии, а именно:

Синусы сторон пропорциональны синусам углов

Применительно к треугольнику ABC (черт. 28) это можно записать такой формулой:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (13)$$

Доказательство. Соединим вершины треугольника ABC (черт. 28) радиусами OA , OB и OC с центром сферы и построим трехгранный угол $OABC$, соответствующий этому треугольнику. Из вершины треугольника C опустим перпендикуляр CD на противоположную грань OAB трехгранного угла; и из полученной таким образом точки D , в свою очередь, опустим перпендикуляры DN и DM на радиусы OA и OB . Наконец, соединим точку C с точками M и N прямыми CM и CN .



Черт. 28

Теперь применим так называемую теорему о трех перпендикулярах, которая гласит: „прямая, перпендикулярная к проекции наклонной, перпендикулярна и к самой наклонной“. На основании этой теоремы прямая OA , перпендикулярная по построению к проекции ND наклонной CN , будет перпендикулярна также и к самой этой наклонной. Точно так же прямая OB , перпендикулярная к проекции MD наклонной CM , будет перпендикулярна к самой наклонной CM , т. е.

$$CN \perp OA \text{ и } CM \perp OB.$$

Таким образом, угол CND есть линейный угол двугранного угла $COAB$, а угол CMD — линейный угол двугранного угла $COBA$. Следовательно, на основании равенства (1) § 5 получаем:

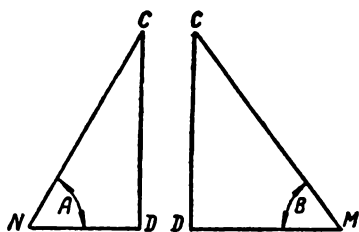
$$\angle CND = \text{сф. } \angle A$$

и

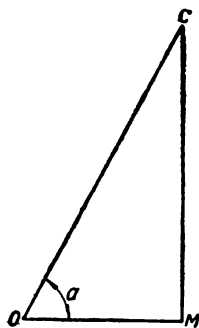
$$\angle CMD = \text{сф. } \angle B.$$

Теперь рассмотрим треугольники NDC и MDC , изображенные отдельно в плане на черт. 29. Оба они по построению прямоугольны (при точке D) и имеют общий катет CD . Выразив катет CD из обоих треугольников, приравняем полученные выражения:

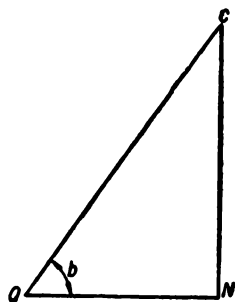
$$CM \sin B = CN \sin A.$$



Черт. 29



Черт. 30



Черт. 31

Чтобы выразить CM и CN , рассмотрим треугольники OCM и OCN , изображенные отдельно в плане на черт. 30 и 31. По доказанному, они прямоугольны при точках M и N . Углы же этих треугольников $MOС$ и $NOС$ по свойству плоских углов трехгранного угла равны соответствующим сторонам сферического треугольника a и b , т. е.

$$\angle MOC = a,$$

$$\angle NOC = b.$$

На основании этого можем записать:

$$CM = OC \sin a,$$

$$CN = OC \sin b.$$

Внесем эти выражения в предыдущее равенство:

$$OC \sin a \sin B = OC \sin b \sin A,$$

или, по сокращении на OC ,

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \quad (14)$$

Разделив почленно равенство (14) на произведение $\sin B \sin A$, получим:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}. \quad (1)$$

Подобным же образом можно доказать, что

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (\text{II})$$

Соединяя выражения (I) и (II) вместе, получаем окончательно:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

что и требовалось доказать.

Попутно мы получили формулу (14), которая дает произведение синуса стороны на синус прилежащего угла и, являясь очень удобным выражением теоремы синусов, часто применяется на практике. Полезно запомнить и словесную ее формулировку, а именно:

Произведение синуса стороны на синус прилежащего угла равняется произведению синусов противолежащих им элементов сферического треугольника.

§ 13. Формула произведения синуса стороны на косинус прилежащего угла

Формула эта называется еще „формулой пяти элементов“, так как в нее входят все три стороны сферического треугольника и два из его углов. Словами она выражается следующим образом:

Произведение синуса стороны на косинус прилежащего угла равняется произведению косинуса противолежащей этому углу стороны на синус третьей стороны без произведения синуса противолежащей стороны на косинус третьей и на косинус угла между ними.

Для стороны a и угла B треугольника ABC (черт. 32) эта формула напишется так:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

Для доказательства воспользуемся следующими, выведенными в § 10 формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \end{aligned} \right\}.$$

Последний член правой части второй из этих формул содержит как раз нужное нам произведение $\sin a \cos B$. Поэтому прежде всего, на основании этой формулы, запишем:

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c \cos a.$$

Вместо $\cos a$ подставим его выражение на основании первой из выписанных формул:

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A),$$

или, по раскрытии скобок,

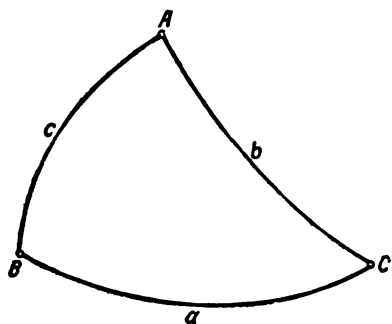
$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos b \cos^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A.$$

Иначе это можно переписать так:

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b (1 - \cos^2 c) - \sin b \sin c \cos c \cos A,$$

или

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A.$$



Черт. 32

Отсюда, сокращая на $\sin c$, найдем окончательно:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

что и требовалось доказать.

Применяя эту формулу к каждой из трех сторон треугольника и к каждому из двух прилежащих к данной стороне углов, получим следующие шесть формул:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Эти формулы начинаются с синуса стороны, а кончаются косинусом противолежащего угла.

§ 14. Формула произведения синуса угла на косинус прилежащей стороны

Эта формула часто также называется формулой пяти элементов; в нее входят три угла и две стороны сферического треугольника.

Для ее вывода применим первую из формул (15) к стороне a' и углу B' треугольника $A'B'C'$, взаимно полярного с треугольником ABC (черт. 27):

$$\sin a' \cos B' = \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos A'.$$

Но на основании свойств взаимно полярных треугольников имеем:

$$\left. \begin{aligned} a' &= 180^\circ - A \\ b' &= 180^\circ - B \\ c' &= 180^\circ - C \\ A' &= 180^\circ - a \\ B' &= 180^\circ - b \end{aligned} \right\}.$$

Внося в написанную формулу, вместо сторон и углов треугольника $A'B'C'$, их выражения через углы и стороны треугольника ABC , будем иметь:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - A) \cos(180^\circ - b) &= \cos(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) - \\ &\quad - \sin(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a), \end{aligned}$$

или

$$-\sin A \cos b = -\cos B \sin C - \sin B \cos C \cos a,$$

или, окончательно,

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a.$$

Это и будет искомая формула; словами ее можно выразить так:

Произведение синуса угла на косинус прилежащей стороны равняется произведению косинуса угла, противолежащего этой стороне, на синус третьего угла, сложенному с произведением синуса противолежащего угла на косинус третьего угла и на косинус сторон между ними.

Применяя полученную формулу к каждому из трех углов сферического треугольника в комбинации с каждой из двух прилежащих к нему сторон,

получим следующие шесть формул:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Обращаем внимание на то, что эти формулы начинаются с синуса угла и заканчиваются в правой части косинусом противолежащей стороны.

§ 15. Формула котангенсов

Формула котангенсов иначе называется формулой четырех элементов, так как в нее входят четыре рядом расположенных элемента сферического треугольника — две стороны и два угла, например, сторона a , угол C , сторона b и угол A (черт. 32). При этом сторона и угол, которыми начинается и заканчивается этот ряд, например, сторона a и угол A , условно называются крайними, а сторона и угол, расположенные между ними, например, сторона b и угол C , — внутренними. При этом условии формула четырех элементов будет читаться так:

Произведение котангенса крайней стороны на синус внутренней равняется произведению косинусов внутренних элементов, сложенному с произведением синуса внутреннего угла на котангенс крайнего.

Применительно к четырем элементам треугольника ABC (черт. 32) a , C , b , A , это можно записать так:

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A.$$

Для доказательства этой формулы напомним для стороны c и прилежащего к ней угла A по формуле пяти элементов (15) и по теореме синусов (14) выражения для $\sin c \cos A$ и $\sin c \sin A$, т. е.

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

и

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C.$$

Деля почленно первое из этих выражений на второе, получим:

$$\frac{\sin c \cos A}{\sin c \sin A} = \frac{\cos a \sin b}{\sin a \sin C} - \frac{\sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C},$$

или

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C} - \frac{\cos b \cos C}{\sin C},$$

или

$$\sin C \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} a \sin b - \cos b \cos C,$$

или, после перестановки членов,

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A,$$

что и требовалось доказать.

Применяя доказанную формулу ко всем возможным в треугольнике случаям, получаем следующие шесть формул:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A \\ \operatorname{ctg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A \\ \operatorname{ctg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B \\ \operatorname{ctg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B \\ \operatorname{ctg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{ctg} C \\ \operatorname{ctg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{ctg} C \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Все эти формулы начинаются с котангенса стороны и кончаются котангенсом противолежащего угла.

Глава III

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 16. Сферический двуугольник

Простейшей фигурой на сфере, как мы знаем, является сферический двуугольник или фюзоз AA' (черт. 33), составленный двумя дугами больших кругов, пересекающимися в двух диаметрально противоположных точках A и A' . Каждая сторона сферического двуугольника равняется 180° , а углы A и A' равны между собой, так как оба эти угла измеряются одним и тем же двугранным углом, составленным плоскостями сторон двуугольника.

Следовательно, если задан угол A , то этим определен и двуугольник AA' ; никаких особых формул для сферического двуугольника и его решения не требуется.

§ 17. Классификация сферических треугольников

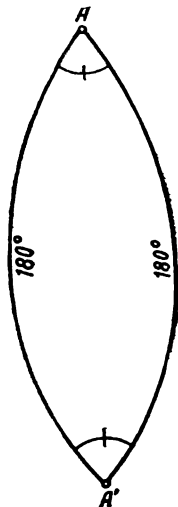
Классификация сферических треугольников аналогична классификации плоских треугольников, но необходимо отметить здесь некоторые различия.

Если все углы сферического треугольника меньше 90° , т. е. острые, то такие сферические треугольники называются остроугольными (черт. 34, а).

Если хотя бы один из углов больше 90° , т. е. тупой, то треугольник получает название тупоугольного (черт. 34, б). Остроугольные и тупоугольные треугольники вместе называются косоугольными, в отличие от прямоугольных сферических треугольников, у которых хотя бы один из углов равен 90° , т. е. прямой (черт. 34, в).

В противоположность геометрии на плоскости, на сфере могут быть такие косоугольные треугольники, у которых два угла (черт. 34, д) или даже все три угла (черт. 34, е) тупые. Точно так же могут быть прямоугольные сферические треугольники, у которых два угла (черт. 35, а) или даже все три угла (черт. 35, б) прямые. Также возможны сферические треугольники, у которых один угол прямой, а другой тупой (черт. 35, д) или два других тупые (черт. 35, е), или два угла прямых, а третий тупой (черт. 35, с).

Треугольник с двумя прямыми углами легко построить, если взять сферический двуугольник AA' (см. черт. 35, а) и провести в нем дугу BC так, чтобы вершины A и A' были полюсами этой дуги; тогда (см. § 5) углы при точках B и C будут прямыми и сферический двуугольник разобьется на два сферических прямоугольных треугольника ABC и $A'BC$. Если при этом угол A будет острым, то получим случай, изображенный на чертеже 35, а; если же

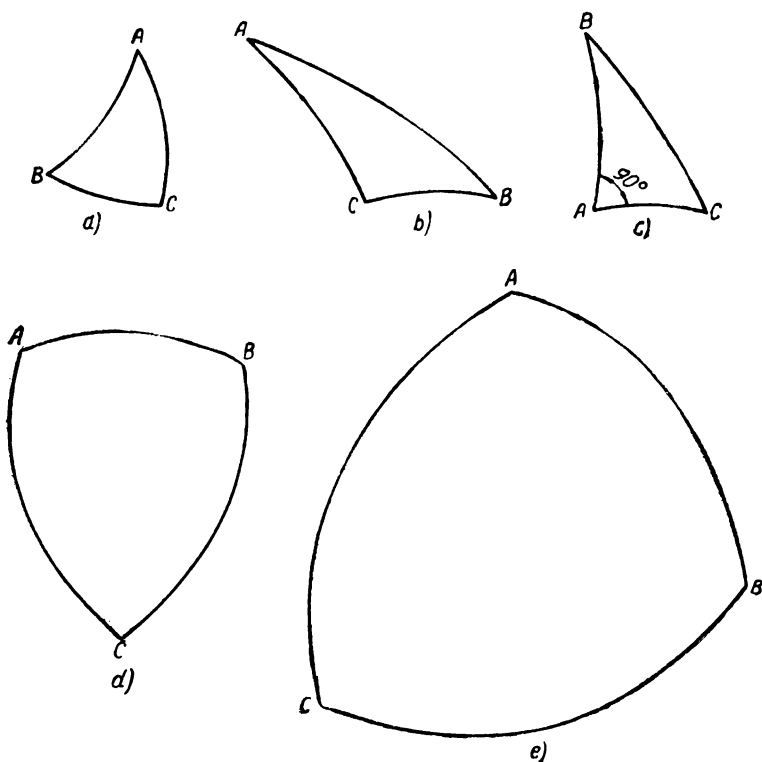


Черт. 33

угол A будет тупой, то получится треугольник, представленный на черт. 35, с. Так как вершина A есть полюс дуги BC , то, обозначая сторону BC , как обычно, буквой a , на основании теоремы III § 5, имеем:

$$a = A.$$

Так как в этом треугольнике остальные две стороны равны каждая 90° , то прямоугольный сферический треугольник ABC с двумя прямыми углами вполне будет определен, если будет дан либо угол A , либо противолежащая ему сторона a . Если же, в частном случае, угол A прямой, то все углы такого треугольника и все его стороны будут равны 90° . Такой треугольник составляет $\frac{1}{8}$ часть поверхности сферы и потому часто называется октантом.



Черт. 34

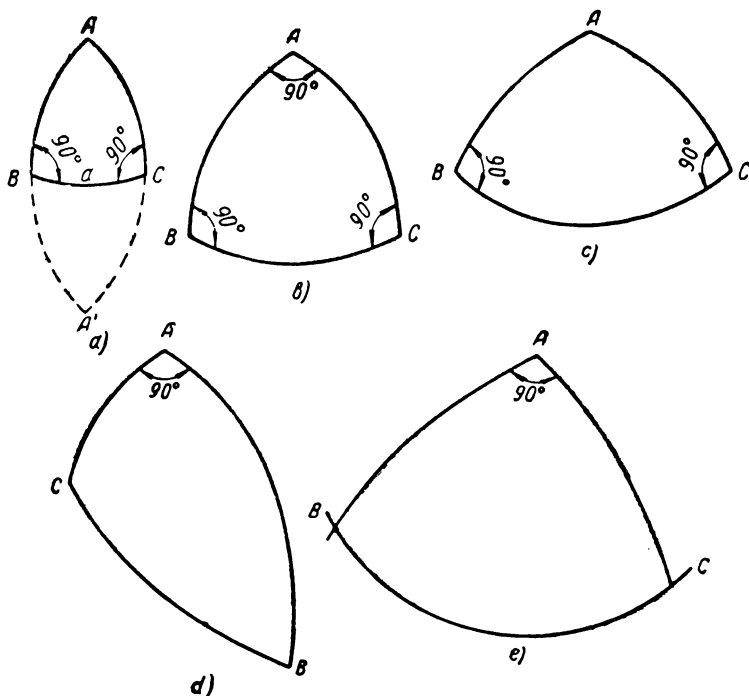
Обычно под термином „прямоугольный сферический треугольник“ подразумевается треугольник, у которого один только угол равняется 90° . В дальнейшем мы будем обозначать прямой угол буквой A , а противолежащую ему сторону, которая, так же как и на плоскости, называется гипотенузой, буквой a . Точно так же B и C будут косвенными углами прямоугольного сферического треугольника, а b и c — его катетами. Формулы для прямоугольных сферических треугольников будут выведены в следующем параграфе.

Следует еще упомянуть о треугольнике, у которого одна из сторон равняется 90° . Такой треугольник часто называется **к в а д р а н т н ы м**. Особых формул мы для него не выводим; так как треугольник, полярный с этим треугольником, очевидно, прямоуголен, то часто бывает удобнее решить этот последний треугольник, а потом уже перейти к элементам первого, пользуясь соотношениями для взаимно полярных сферических треугольников.

§ 18. Формулы для прямоугольных сферических треугольников

Возьмем сферический прямоугольный треугольник ABC (черт. 36) и применим к нему основные формулы, выведенные нами в предыдущей главе. Так как у треугольника ABC угол $A = 90^\circ$, то

$$\sin A = 1, \cos A = 0 \text{ и } \operatorname{ctg} A = 0.$$



Черт. 35

Поэтому, если мы возьмем те формулы, в которые входит угол A , то эти формулы значительно упростятся после подстановки в них вышеуказанных значений функций угла A . Таким образом, из формулы (11):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

после этой подстановки получаем:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

т. е. косинус гипотенузы равняется произведению косинусов катетов.

Из формул (12):

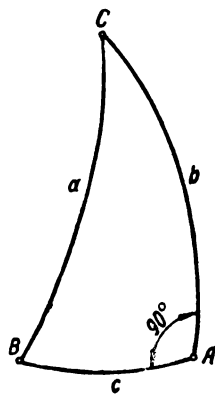
$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

таким же образом выводим:

$$\cos B = \cos b \sin C,$$

$$\cos C = \cos c \sin B.$$



Черт. 36

По теореме синусов (14), с помощью такой же подстановки, из формул:

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B,$$

$$\sin A \sin c = \sin a \sin C$$

находим:

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin a \sin B, \\ \sin c &= \sin a \sin C.\end{aligned}$$

Далее, взяв формулу (12):

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

сначала, после подстановки $\cos A = 0$, можем написать:

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C,$$

а затем, по разделении обеих частей равенства на $\sin B \sin C$, получим:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Из формул четырех элементов (17) возьмем следующие:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A, \\ \operatorname{ctg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A, \\ \operatorname{ctg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{ctg} C, \\ \operatorname{ctg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B.\end{aligned}$$

После подстановки значений функций угла A они примут такой вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} a \sin c &= \cos c \cos B, \\ \operatorname{ctg} a \sin b &= \cos b \cos C, \\ \operatorname{ctg} c \sin b &= \operatorname{ctg} C, \\ \operatorname{ctg} b \sin c &= \operatorname{ctg} B.\end{aligned}$$

Выполнив незначительные преобразования, мы их можем переписать так:

$$\begin{aligned}\cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c, \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b, \\ \sin b &= \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \\ \sin c &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B.\end{aligned}$$

Таким образом мы получим следующие 10 формул, по две для каждого из пяти элементов сферического прямоугольного треугольника:

$$\left. \begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c \\ \cos B &= \cos b \sin C \\ \cos C &= \cos c \sin B \\ \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C\end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned}\cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \\ \sin b &= \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C \\ \sin c &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B\end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

§ 19. Мнемоническое правило Непера

Чтобы облегчить запоминание формул для прямоугольного сферического треугольника, выведенных в предыдущем параграфе, можно предложить очень простое мнемоническое правило. Только сначала нужно придать этим формулам более однородный вид. С этой целью везде, вместо катетов b и c , подставим дополнения их до 90° , т. е. $(90^\circ - b)$ и $(90^\circ - c)$. Тогда фор-

мулы (18) и (19) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c) \\ \cos B &= \sin(90^\circ - b) \sin C \\ \cos C &= \sin(90^\circ - c) \sin B \\ \cos(90^\circ - b) &= \sin a \sin B \\ \cos(90^\circ - c) &= \sin a \sin C \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - c) \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \\ \cos(90^\circ - b) &= \operatorname{ctg}(90^\circ - c) \operatorname{ctg} C \\ \cos(90^\circ - c) &= \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \operatorname{ctg} B \end{aligned} \right\} \quad (19')$$

Как видим, в правых частях формул (18') стоят произведения синусов, а у формул (19') — котангенсов; в левых же частях везде стоят косинусы одного из элементов треугольника. Чтобы уяснить себе расположение элементов треугольника, обуславливающее применение формулы из той или другой группы, представим себе расположение этих элементов в треугольнике следующей простой схемой (черт. 37).

Как видит читатель, мы расположили по окружности все элементы треугольника в таком именно порядке, как они идут в самом треугольнике; прямой угол, как известный уже сам по себе, в схему не включен; катеты заменены их дополнениями до 90° . С помощью этой схемы мы убеждаемся, что в группе формул (19') все три элемента, входящие в каждую из этих формул, стоят рядом, причем искомый элемент находится в середине; в группе же формул (18') искомый элемент стоит отдельно, а два элемента, через которые он выражается, стоят рядом, но они не смежны с искомым. На основании этих соображений можно сформулировать два следующих правила:

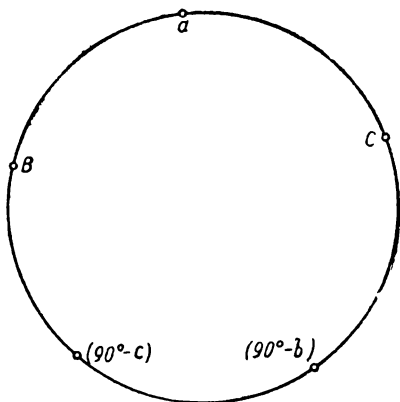
I. Косинус отдельно стоящего элемента сферического треугольника равняется произведению синусов элементов, не смежных с ним.

II. Косинус среднего элемента равняется произведению котангенсов крайних, смежных с ним элементов.

Короче эти правила можно выразить так: косинус каждого из элементов сферического треугольника равняется произведению или котангенсов смежных с ним элементов или синусов не смежных.

При пользовании данными правилами нужно всегда помнить: во-первых, что прямой угол при этом не принимается во внимание, т. е. катеты считаются лежащими рядом, и, во-вторых, что вместо катетов нужно брать их дополнения до 90° ; при небольшом навыке можно сразу вместо косинуса дополнения писать синус катета, вместо синуса — косинус и вместо котангенса — тангенс.

Заметим, что правило Непера может быть математически обосновано с помощью теории групп. Следует иметь в виду, что иногда его называют также правилом Модюи.



Черт. 37

§ 20. Два инварианта прямоугольного сферического треугольника

Приложим к прямоугольному сферическому треугольнику ABC (черт. 36) формулы пяти элементов (15), содержащие в правой части $\cos A$, т. е.

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

и

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A.$$

Так как

$$\cos A = \cos 90^\circ = 0,$$

то эти формулы для нашего треугольника перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Формулы (20) полезно запомнить, т. к. они иногда встречаются на практике. Словами их можно выразить так:

Произведение синуса гипотенузы на косинус косвенного угла равняется произведению косинуса противолежащего этому углу катета на синус другого катета.

Разделив теперь первую из этих формул почленно на вторую, получим

$$\frac{\sin a \cos B}{\sin a \cos C} = \frac{\cos b \sin c}{\cos c \sin b}$$

или

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b},$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} b \cos B = \operatorname{tg} c \cos C. \quad (21)$$

Это и есть первый инвариант прямоугольного сферического треугольника, т. к. формула (21) показывает, что в таком треугольнике произведение тангенса катета на косинус противолежащего угла есть величина постоянная.

Возьмем, далее, из формул пяти элементов (16) те, которые в правой части содержат $\sin A$ и $\cos A$, т. е.

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,$$

$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c.$$

Учитывая, что

$$\sin A = 1, \text{ а } \cos A = 0,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos a \sin B &= \cos b \cos C \\ \cos a \sin C &= \cos c \cos B \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

то-есть произведение косинуса гипотенузы на синус косвенного угла равняется произведению косинуса противолежащего этому углу катета на косинус другого катета.

Деля, в свою очередь, первую из этих формул почленно на вторую, найдем:

$$\frac{\cos a \sin B}{\cos a \sin C} = \frac{\cos b \cos C}{\cos c \cos B},$$

или, по сокращении и перемещении некоторых множителей,

$$\frac{\sin B \cos B}{\cos b} = \frac{\sin C \cos C}{\cos c},$$

или, наконец, по умножении на 2 и упрощении,

$$\sin 2B \sec b = \sin 2C \sec c, \quad (23)$$

то-есть произведение синуса двойного косвенного угла на секанс противолежащего этому углу катета есть для данного прямоугольного сферического треугольника величина постоянная.

Это и является вторым инвариантом рассматриваемого вида треугольников.

Оба инварианта могут быть истолкованы с геометрической точки зрения. Первый инвариант равняется синусу сферического перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Если мы обозначим этот перпендикуляр буквою h , то формулу (21) можем переписать так:

$$\operatorname{tg} b \cos B = \operatorname{tg} c \cos C = \sin h. \quad (21')$$

Чтобы доказать это, напомним по правилу Непера-Модюи:

$$\operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b = \sin c \text{ и } \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c = \sin b.$$

Умножая первое равенство на $\sin B$, а второе — на $\sin C$, получим:

$$\cos B \operatorname{tg} b = \sin c \sin B \text{ и } \cos C \operatorname{tg} c = \sin b \sin C. \quad (a)$$

Далее, определяя дважды $\sin h$ из тех двух сферических треугольников, на которые сферический перпендикуляр h разбивает данный треугольник, по правилу Непера-Модюи будем иметь:

$$\sin h = \sin b \sin C = \sin c \sin B. \quad (б)$$

Сопоставляя равенства (a) и (б), получаем формулу (21').

Второй инвариант равняется удвоенному произведению синусов косвенных углов прямоугольного сферического треугольника, т. е.

$$\sin 2B \sec b = \sin 2C \sec c = 2 \sin B \sin C. \quad (23')$$

Из данного треугольника по правилу Непера-Модюи имеем:

$$\cos B = \sin C \cos b \text{ и } \cos C = \sin B \cos c,$$

откуда

$$\frac{\cos B}{\cos b} = \sin C \text{ и } \frac{\cos C}{\cos c} = \sin B.$$

Умножая первое равенство на $2 \sin B$, а второе — на $2 \sin C$, получим:

$$\frac{2 \sin B \cos B}{\cos b} = \frac{2 \sin C \cos C}{\cos c} = 2 \sin B \sin C,$$

откуда и следует равенство (23').

Чтобы не возвращаться более к этому вопросу в дальнейшем изложении, отметим, что оба инварианта могут быть использованы в качестве контрольных формул при решении прямоугольных сферических треугольников (§ 22), а также при вычислении сферического избытка прямоугольного сферического треугольника с малыми сторонами (§ 33).

§ 21. Соотношение между катетом и противолежащим ему углом

Теорема. Катет и противолежащий ему острый угол суть величины одного и того же порядка.

Доказательство. Для прямоугольного сферического треугольника на основании формул (18) и (19) всегда имеют место следующие соотношения между одинаковыми функциями катета и противолежащего ему угла:

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin B \sin a, \\ \cos B &= \cos b \sin C, \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} B \sin c. \end{aligned}$$

В правых частях этих формул вторыми множителями везде стоят синусы тех или других элементов треугольника. Так как элементы сферического треугольника — как стороны, так и углы — должны быть меньше 180° , то синусы их всегда положительны. Поэтому синусы, косинусы и тангенсы катета и противолежащего ему угла всегда имеют соответственно одни и те же знаки. Следовательно, катет и противолежащий ему угол всегда либо оба больше, либо оба меньше 90° .

Так как эти вторые множители, как синусы, всегда меньше единицы, то, если a , c и C не бесконечно малы, синусы, косинусы и тангенсы катета и противолежащего ему угла, очевидно, будут величинами одного и того же порядка. Следовательно, катет и противолежащий ему угол, при этих условиях, также будут величинами одного и того же порядка, что и требовалось доказать.

Случай, когда какая-либо или какие-либо из величин a , c и C бесконечно малы, требует более подробного исследования, которое выходит за рамки настоящего курса. Здесь возможен, например, случай, когда все стороны сферического треугольника будут бесконечно малы, а углы будут иметь конечную величину. Это будут так называемые треугольники, „с малым изгибом“ сторон. Такие треугольники можно рассматривать и решать как плоские. Возможен также случай, когда треугольник будет бесконечно мало отличаться от сферического двуугольника, т. е. одна его сторона бесконечно мала, а две другие близки к 180° .

§ 22. Решение прямоугольных сферических треугольников

Если три элемента сферического треугольника даны, то можно найти три остальных его элемента, т. е. решить треугольник. При этом в теории принято искомые элементы выражать непосредственно через данные, на практике же часто для удобства уже найденный элемент рассматривают в дальнейшем как данный и выражают через него искомые.

Так как в прямоугольном треугольнике один элемент, т. е. прямой угол, всегда известен, то для решения прямоугольного сферического треугольника достаточно знать какие-либо два из его остальных пяти элементов. Это подтверждают и формулы (18) и (19), ибо в каждую из этих формул входят только три элемента, так что, зная какие-либо два из них, можно определить третий. Вместе с тем, как это явствует из следствия, сформулированного в § 11, этими двумя элементами могут быть и оба косвенных угла треугольника, так как сферический треугольник вполне определяется тремя своими углами. Общий план решения прямоугольного сферического треугольника таков: каждый из трех искомых его элементов, пользуясь правилом Непера-Модюи, выражают через данные, составляя одну из формул (18) или (19), смотря по взаимному расположению искомого и данных элементов. При этом вовсе не обязательно, чтобы искомый элемент с самого начала находился в левой части формулы, так как потом формулу можно алгебраически решить относительно этого искомого элемента.

После того как для каждого из искомых элементов получена рабочая формула, необходимо составить контрольную формулу, которая получается, если все три найденных элемента соединить одной формулой, составленной согласно правилу Непера-Модюи.

В подробных курсах сферической тригонометрии разбираются следующие шесть случаев решения прямоугольных сферических треугольников: 1) по гипотенузе и катету, 2) по двум катетам, 3) по гипотенузе и одному из косвенных углов, 4) по катету и прилежащему углу, 5) по катету и противолежащему углу, 6) по двум углам.

Из них только пятый случай дает два решения, так как все три искомых элемента находятся по синусам. Хотя в первом и третьем случаях тоже один из элементов вычисляется по синусу, но в этих случаях выбор между двумя возможными решениями (меньше 90° или больше 90°) можно сделать,

руководствуясь 7-м или 8-м свойствами сферического треугольника (см. § 8), а также соображениями, изложенными в § 21.

Следует, кроме того, иметь в виду, что иногда по синусам и косинусам искомые элементы получаются с недостаточной точностью. Это, как известно, для синуса бывает тогда, когда искомый угол или дуга близки к 90° , а для косинуса — к 0° или к 180° . Тогда стараются перейти к тангенсу, либо используя для получения подходящей формулы уже найденные элементы, либо преобразуя первоначальную формулу на основании известного соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Далее мы рассмотрим для примера четыре первых случая, как более часто встречающиеся.

I случай. Дана гипотенуза a и катет b . Найти углы B и C и катет c (см. черт. 38, где данные элементы отмечены кружком).

По правилу Непера-Модюи, для угла C сразу напишем:

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b. \quad (\text{I})$$

Далее, таким же образом будем иметь:

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

откуда

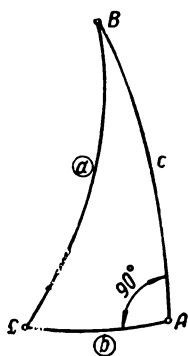
$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \quad (\text{II})$$

и, наконец,

$$\cos a = \cos b \cos c$$

или

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}. \quad (\text{III})$$



Черт. 38

Формулы (I), (II) и (III) решают задачу. Чтобы получить контрольную формулу, соединим C , B и c по правилу Непера-Модюи:

$$\cos C = \sin B \cos c. \quad (\text{IV})$$

Заметим, что контроль здесь получается двоякий. Формально элементы треугольника в контрольную формулу должны входить под знаками тех же самых функций, по которым они определялись в формулах (I) — (III). При подстановке же числовых значений контрольная формула должна обращаться в тождество.

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник, если гипотенуза $a = 83^\circ 4' 25''$ и катет $b = 142^\circ 17' 10''$.

Решение

Вычисление угла C	
$\lg \operatorname{ctg} a$	9.08 451
$\lg \operatorname{tg} b$	9.88 834 n
$\lg \cos C$	8.97 285 n
C	$95^\circ 23' 25''$

Вычисление катета c	
$\lg \cos a$	9.08 133
$\lg \sec b$	0.10 178 n
$\lg \cos c$	9.18 311 n
c	$98^\circ 46' 7''$

Вычисление угла B	
$\lg \sin b$	9.78 655
$\lg \operatorname{cosec} a$	0.00 318
$\lg \sin B$	9.78 973
B	$141^\circ 57' 38''$

Контроль	
$\lg \sin B$	9.78 973
$\lg \cos c$	9.18 311 n
Сумма	8.97 284 n
$\lg \cos C$	8.97 285 n

Как только вычислены все три логарифма функций искомых элементов, прежде всего делаем контрольные вычисления. „Контроль“ в нашем примере, как обычно говорят, „сошелся“. Расхождение на одну единицу последнего знака допустимо и объясняется неизбежными ошибками округлений. После

этого подыскиваем по логарифмам искомые элементы в таком порядке: сперва C и c , а затем уж B . Так как B находится по синусу, а синус в I и во II четвертях положителен, то вычисленному значению $\lg \sin B$ соответствуют два значения угла B : $38^\circ 2' 22''$ и $141^\circ 57' 38''$. Однако, на основании свойств сферических треугольников вообще и прямоугольных в частности (см. §§ 8 и 21), заключаем: так как $b > 90^\circ$ и $b > c$, то должно быть $B > 90^\circ$ и $B > C$. Следовательно, в нашем примере годится только второе значение, т. е. $B = 141^\circ 57' 38''$.

II случай. Даны два катета b и c . Найти углы треугольника B и C и гипотенузу a (черт. 39).

По правилу Непера-Модюи, для гипотенузы a непосредственно имеем:

$$\cos a = \cos b \cos c. \quad (I)$$

Затем, по тому же правилу, напомним:

$$\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin c}{\operatorname{tg} b}. \quad (II)$$

Точно так же получим сначала выражение

$$\sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c$$

Черт. 39

и затем отсюда найдем:

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\sin b}{\operatorname{tg} c}. \quad (III)$$

Формулы (I), (II) и (III) и будут рабочими формулами для второго случая. Контрольная же формула здесь будет иметь такой вид:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C. \quad (IV)$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник, если его катеты

$$b = 124^\circ 18' 17'',$$

$$c = 73 \quad 34 \quad 39.$$

Решение

Вычисление a

$\lg \cos b$	9.75 096 n
$\lg \cos c$	9.45 135
$\lg \cos a$	9.20 231 n
a	$99^\circ 10' 6''$

Вычисление C

$\lg \sin b$	9.91 701
$\lg \operatorname{ctg} c$	9.46 944
$\lg \operatorname{ctg} C$	9.38 645
C	$76^\circ 18' 59''$

Вычисление B

$\lg \sin c$	9.98 191
$\lg \operatorname{ctg} b$	9.83 396 n
$\lg \operatorname{ctg} B$	9.81 587 n
B	$123^\circ 12' 9''$

Контроль

$\lg \operatorname{ctg} B$	9.81 587 n
$\lg \operatorname{ctg} C$	9.38 645
Сумма	9.20 232 n
$\lg \cos a$	9.20 231 n

Контроль „сходится“ (см. пояснения к предыдущему примеру). Если стороны треугольника малы, то формула (I) не пригодна. Тогда сначала вычисляют углы B и C , а затем гипотенузу a , дважды по формулам:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B},$$

которые легко получаются из формул (19). Совпадение результатов, полученных при вычислении по обоим формулам, служит контролем.

III случай. Дана гипотенуза a и косвенный угол B . Найти катеты b и c и угол C (черт. 40).

Непосредственно по правилу Непера-Модью для катета b получим:

$$\sin b = \sin a \sin B. \quad (I)$$

Для получения другого катета c , сперва запишем:

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c,$$

а затем найдем:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\cos B}{\operatorname{ctg} a}. \quad (II)$$

Для угла C , подобным же образом будем иметь:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\cos a}{\operatorname{ctg} B}. \quad (III)$$

Получив рабочие формулы (I), (II) и (III), контрольную формулу составим обычным путем, т. е.

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C. \quad (IV)$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник по гипотенузе a и косвенному углу B , если $a = 37^\circ 48' 5''$ и $B = 123^\circ 17' 14''$.

Решение

Вычисление b

$\lg \sin a$	9.78 740
$\lg \sin B$	9.92 217
$\lg \sin b$	9.70 957
b	$149^\circ 10' 46''$

Вычисление C

$\lg \cos a$	9.89 770
$\lg \operatorname{tg} B$	0.18 273 n
$\lg \operatorname{ctg} C$	0.08 043 n
C	$140^\circ 16' 32''$

Вычисление c

$\lg \cos B$	9.73 944 n
$\lg \operatorname{tg} a$	9.88 970
$\lg \operatorname{tg} c$	9.62 914 n
c	$156^\circ 56' 20''$

Контроль

$\lg \operatorname{tg} c$	9.62 914 n
$\lg \operatorname{ctg} C$	0.08 043 n
Сумма	9.70 957
$\lg \sin b$	9.70 957

Контроль сошелся в точности. Катет b должен быть больше 90° , так как данный угол B больше 90° (§ 21). Условие, что $b < c$, т. к. $B < C$, не противоречит предыдущему. Если катет b близок к 90° , то его точнее можно получить вычислением по формуле:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

или по формуле:

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$$

после того, как c и C уже вычислены.

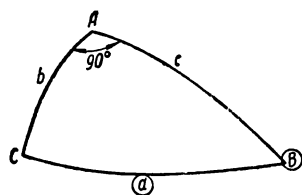
IV случай. Даны катет b и прилежащий к нему косвенный угол C . Найти гипотенузу a , катет c и другой косвенный угол B (черт. 41).

Формулу для вычисления угла B составим по правилу Непера-Модью непосредственно:

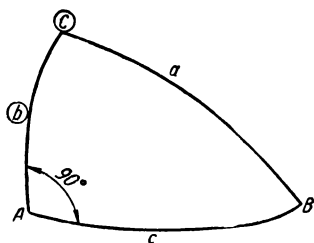
$$\cos B = \cos b \sin C. \quad (I)$$

Гипотенуза a может быть найдена из соотношения:

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b,$$



Черт. 40



Черт. 41

из которого имеем:

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\cos C}{\operatorname{tg} b}. \quad (\text{II})$$

Точно таким же образом для катета c запишем сначала:

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C,$$

откуда

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin b}{\operatorname{ctg} C}. \quad (\text{III})$$

Эти три формулы (I), (II) и (III) будут рабочими формулами для рассматриваемого случая. В качестве контрольной послужит формула:

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c. \quad (\text{IV})$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник по катету b и прилежащему косвенному углу C , если дано:

$$b = 44^{\circ}26'21''$$

$$C = 50 \quad 0 \quad 0.$$

Р е ш е н и е

Вычисление B	
$\lg \cos b$	9.85 370
$\lg \sin C$	9.88 425
$\lg \cos B$	9.73 795
B	56°50'30"

Вычисление c	
$\lg \sin b$	9.84 519
$\lg \operatorname{tg} C$	0.07 619
$\lg \operatorname{tg} c$	9.92 138
c	39°50'31"

Вычисление a	
$\lg \cos C$	9.80 807
$\lg \operatorname{ctg} b$	0.00 850
$\lg \operatorname{ctg} a$	9.81 657
a	56°45'19"

Контроль	
$\lg \operatorname{ctg} a$	9.81 657
$\lg \operatorname{tg} c$	9.92 138
Сумма	9.73 795
$\lg \cos B$	9.73 795

Контроль сходится точно. Если угол B близок к 0° , то точнее вычислять его по формуле:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

для чего нужно предварительно вычислить гипотенузу a .

Г л а в а IV

КОСОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 23. Формулы полупериметра

Так как почти все основные формулы, выведенные нами в главе II, неудобны для логарифмического вычисления, то для косоугольных треугольников выводятся еще несколько групп формул, свободных от этого недостатка.

Прежде всего получим формулы для синуса и косинуса половины угла сферического треугольника в функции его сторон. С этой целью возьмем первую из формул (11) (§ 10)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

и определим отсюда косинус входящего в нее угла A :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad (\text{a})$$

Далее, возьмем тождество $1 = 1$ и вычтем из него почленно предыдущее равенство:

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

или

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

При этом в числителе дроби в правой части мы сделали замену на основании известной формулы гониометрии:

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c = \cos(b - c).$$

Получившуюся в числителе той же дроби разность косинусов заменим произведением, также на основании известной формулы тригонометрии, т. е. напомним:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c},$$

откуда

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}}. \quad (I)$$

Теперь сложим почленно тождество $1 = 1$ и равенство (а):

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

или

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}.$$

При этом мы числитель предыдущей дроби (в правой части) сначала переписали так:

$$\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c),$$

а потом выражение в скобках заменили косинусом суммы двух углов b и c , основываясь на известной формуле гониометрии.

Заменяя, аналогично предыдущему, разность косинусов в числителе произведения, получим:

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c},$$

откуда

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c}}. \quad (II)$$

Выражения для $\sin \frac{A}{2}$ и $\cos \frac{A}{2}$ можно еще несколько упростить, если ввести обозначение

$$a + b + c = 2p,$$

где p — полупериметр рассматриваемого сферического треугольника. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{2}(a + b + c) = p.$$

Далее, отнимая от обеих частей этого равенства по стороне c , можем записать:

$$\frac{1}{2}(a + b + c) - c = p - c$$

или

$$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c.$$

Аналогично найдем

$$\frac{1}{2}(a-b+c)=p-b$$

и

$$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a.$$

Внося полученные выражения в формулы (I) и (II), окончательно получим:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Таким образом, синус половины угла сферического треугольника равняется корню квадратному из дроби, в числителе которой стоит произведение синусов разностей полупериметра и прилежащих к углу сторон, а в знаменателе — произведение синусов этих сторон.

Косинус половины угла сферического треугольника равняется корню квадратному из дроби, в числителе которой стоит произведение синуса полупериметра на синус разности полупериметра и противолежащей углу стороны, а в знаменателе — произведение синусов прилежащих сторон.

Так как угол сферического треугольника всегда меньше 180° , а половина его всегда меньше 90° , то перед квадратным корнем в обоих случаях подразумевается знак плюс.

Применяя выведенные формулы к каждому из углов треугольника, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c \sin a}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}} \end{aligned} \right\}; \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin c \sin a}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Это и есть формулы полупериметра для синусов и косинусов половинок углов треугольника.

Чтобы получить формулы полупериметра для тангенса, достаточно разделить выражение для синуса половинок угла на выражение для косинуса половинок того же угла.

Производя это действие последовательно для каждого из углов сферического треугольника на основании формул (24) и (25), после соответствующ-

щих сокращений будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Эти формулы можно представить в еще более простом виде путем следующих несложных преобразований.

Умножим числителя и знаменателя подкоренных дробей на синус разности, стоящий в знаменателе, т. е. соответственно на $\sin(p-a)$, $\sin(p-b)$ и $\sin(p-c)$, и, вынеся из-под корня получившийся в знаменателе квадратичный множитель, получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{1}{\sin(p-a)} \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{1}{\sin(p-b)} \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{1}{\sin(p-c)} \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}} \end{aligned} \right\}.$$

Введя обозначение

$$M = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}, \quad (27)$$

окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Формулы (28) и являются формулами полупериметра для тангенсов половинных углов сферического треугольника в наиболее удобном для практического применения виде.

Итак, тангенс половины угла сферического треугольника равняется вспомогательной величине M , деленной на синус разности полупериметра и противолежащей углу стороны. Вспомогательная величина M равняется корню квадратному из дроби, числитель которой — произведение синусов разностей полупериметра и каждой из сторон треугольника, а знаменатель — синус полупериметра.

§ 24. Формулы синуса и косинуса полусуммы и полуразности углов сферического треугольника

Эти формулы дают выражение для синуса и косинуса полусуммы и полуразности двух каких-либо углов сферического треугольника в функции противолежащих им сторон и третьего угла.

Выведем сначала формулы для синуса полусуммы и полуразности. Для этого возьмем $\sin \frac{A \pm B}{2}$ и подвергнем его ряду преобразований: во-первых,

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} \pm \frac{B}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \pm \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Затем подставим сюда, вместо синусов и косинусов половинных углов, их выражения из формул (24) и (25):

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin c \sin a}} \pm \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(p-c) \sin(p-a)}{\sin c \sin a}};$$

далее, перемножая и вынося из-под знака корня квадратические множители,

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} \pm \pm \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}},$$

или, вынося общие множители за скобки,

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}.$$

Корень в правой части на основании последней из формул (25) есть не что иное, как $\cos \frac{C}{2}$, так что предыдущее выражение можно переписать так:

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c} \cos \frac{C}{2}.$$

Дальнейшие преобразования поведем отдельно для синуса полусуммы и для синуса полуразности. Для синуса полусуммы будем, следовательно, иметь:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b) + \sin(p-a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{C}{2},$$

или, заменяя сумму синусов в числителе произведением и рассматривая $\sin c$ в знаменателе как синус двойного угла, легко получим:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (2p-a-b) \cos \frac{1}{2} (a-b)}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

Но

$$2p-a-b = a+b+c-a-b=c;$$

следовательно,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \cdot \cos \frac{C}{2},$$

или, наконец,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \cos \frac{1}{2} C. \quad (29)$$

Для синуса полуразности можем подобным же образом записать:

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{\sin(p-b) - \sin(p-a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{1}{2} C,$$

и далее, после аналогичных преобразований,

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} (2p-a-b)}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \cdot \cos \frac{1}{2} C,$$

или

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}C,$$

или, наконец,

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}C. \quad (30)$$

Теперь перейдем к выводу формул для косинуса полусуммы и полуразности углов.

Прежде всего имеем:

$$\cos \frac{A \pm B}{2} = \cos \left(\frac{A}{2} \pm \frac{B}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Затем, на основании (24) и (25),

$$\begin{aligned} \cos \frac{A \pm B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin c \sin a}} \mp \\ &\mp \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin (p-c) \sin (p-a)}{\sin c \sin a}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \cos \frac{A \pm B}{2} &= \frac{\sin p}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}} \mp \\ &\mp \frac{\sin (p-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}}, \end{aligned}$$

или

$$\cos \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin p \mp \sin (p-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Так как корень в правой части, на основании последней из формул (24), равен $\sin \frac{C}{2}$, то

$$\cos \frac{A \pm B}{2} = \frac{\sin p \mp \sin (p-c)}{\sin c} \sin \frac{C}{2}.$$

Продолжая далее преобразования отдельно, запишем:

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\sin p - \sin (p-c)}{\sin c} \sin \frac{C}{2}$$

или, заменяя разность синусов произведением,

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(2p-c)}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{C}{2}.$$

Но так как

$$2p-c = a+b+c-c = a+b,$$

то

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c} \sin \frac{1}{2}C. \quad (31)$$

Точно так же, для косинуса полуразности:

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{\sin p + \sin (p-c)}{\sin c} \sin \frac{C}{2},$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (2p-c) \cos \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{C}{2},$$

или, наконец,

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C. \quad (32)$$

Формулы (29) — (32) часто называют формулами Делямбра-Гаусса. Для наглядности сопоставим их вместе:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C \\ \sin \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C \\ \cos \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C \\ \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C \end{aligned} \right\}. \quad (33)$$

Теперь нетрудно подметить мнемонический закон составления этих формул. Если в левой части синус, то в правой должен быть обязательно минус, т. е. полуразность сторон; если же в левой части косинус, то в правой будет плюс, т. е. полусумма сторон. И наоборот, если в левой части плюс, т. е. полусумма углов, то в правой будет косинус, а если в левой части будет минус, т. е. полуразность углов, то в правой будет стоять синус. Кроме того, функция, под которой стоит в правой части половина третьего угла, не совпадает с той функцией, которая берется для полусуммы или полуразности углов в левой части.

§ 25. Аналогия Непера. Теорема тангенсов

Формулы, известные под названием аналогий Непера, дают выражения для тангенсов полусуммы и полуразности углов сферического треугольника через синусы и косинусы полусумм и полуразностей противолежащих им сторон, и наоборот, тангенсы полусуммы и полуразности сторон они выражают через синусы и косинусы полусумм и полуразностей противолежащих им углов.

Для получения первых двух аналогий Непера *) воспользуемся выведенными нами в предыдущем параграфе формулами Делямбра-Гаусса, а именно, разделим почленно формулу (29) на (31) и формулу (30) на (32); тогда, по

*) Непер (Neper, 1550 — 1617 гг.) выводил свои формулы непосредственно из теоремы синусов и формулы 5 элементов. Формулы Делямбра-Гаусса были опубликованы Делямбром (Delambre) в 1808 г. и Гауссом (Gauss) в 1809 г.

сокращении на $\cos \frac{1}{2} c$ и на $\sin \frac{1}{2} c$ соответственно, получим:

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C \end{aligned} \right\}. \quad (34)$$

Для вывода двух других аналогий сначала из формулы (32) определим $\sin \frac{1}{2} (a+b)$, из формулы (31) $\cos \frac{1}{2} (a+b)$, из формулы (30) $\sin \frac{1}{2} (a-b)$ и из формулы (29) $\cos \frac{1}{2} (a-b)$, т. е. перепишем эти формулы в следующем виде:

$$\sin \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c, \quad (32')$$

$$\cos \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c, \quad (31')$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} \sin \frac{1}{2} c, \quad (30')$$

$$\cos \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} \cos \frac{1}{2} c. \quad (29')$$

Разделив затем (32') на (31'), а (30') на (29'), получим третью и четвертую аналогии Непера:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} (A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

Мнемоническое правило „плюс — косинус, синус — минус“, приведенное в конце предыдущего параграфа, помогает также и при запоминании формул (34) и (35). Функция, под знаком которой стоит в формулах (34) половина третьего угла, не совпадает с функцией в левой части, а для третьей стороны, т. е. в формулах (35), соответственно совпадает.

Термин „аналогия“ в прежнее время был равнозначен слову „пропорция“ (*αναλογία* по-гречески — пропорциональность).

Формулы (34) и (35) получили это название потому, что они писались в виде равенства двух отношений. Например, для первой аналогии можно написать:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} : \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \cos \frac{a-b}{2} : \cos \frac{a+b}{2}.$$

Словами это можно выразить так: тангенс полусуммы двух углов сферического треугольника так относится к котангенсу половины третьего угла, как косинус полуразности противолежащих им сторон относится к косинусу полусуммы тех же сторон. Подобные формулировки могут быть даны и для остальных трех аналогий.

Из аналогий Непера легко выводится так называемая теорема тангенсов для сферического треугольника. В самом деле, разделив четвертую аналогию на третью (или вторую на первую), непосредственно получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)},$$

или словами: тангенс полуразности сторон сферического треугольника относится к тангенсу их полусуммы, как тангенс полуразности противолежащих им углов этого треугольника к тангенсу их полусуммы.

§ 26. Формулы синуса половины сферического избытка

Иногда бывает необходимо вычислить сферический избыток треугольника, не зная всех трех его углов. Для этого можно воспользоваться так называемыми формулами Каньоли (Cagnoli), которые дают выражение для синуса половины сферического избытка треугольника в функции его сторон и одного из углов или в функции полупериметра. Эти формулы применяются также и в том случае, если углы известны недостаточно точно для непосредственного вычисления избытка по формуле

$$\epsilon = (A + B + C) - 180^\circ.$$

Для вывода первой из формул прежде всего найдем выражение для $\sin p$, для чего выпишем первые две из формул полупериметра для косинуса половинного угла [формулы (25) § 23], т. е.

$$\begin{aligned}\cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}; \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin c \sin a}}.\end{aligned}$$

Перемножая эти выражения почленно и вынося из-под знака корня в правой части квадратичные множители, получим:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin p}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}}.$$

На основании третьей из формул (24) корень в правой части можно заменить через $\sin \frac{C}{2}$; таким образом, наша формула переписется:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin p}{\sin c} \sin \frac{C}{2},$$

откуда находим:

$$\sin p = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \sin c.$$

Применим полученную формулу к треугольнику, полярному с данным, т. е. напомним:

$$\sin p' = \frac{\cos \frac{A'}{2} \cos \frac{B'}{2}}{\sin \frac{C'}{2}} \sin c'.$$

По свойству взаимно полярных треугольников:

$$a' = 180^\circ - A;$$

$$b' = 180^\circ - B;$$

$$c' = 180^\circ - C.$$

Следовательно,

$$2p' = 540^\circ - (A + B + C),$$

или

$$2p' = 540^\circ - (180^\circ + \epsilon),$$

т. е.

$$2p' = 360^\circ - \epsilon;$$

отсюда:

$$p' = 180^\circ - \frac{\epsilon}{2}.$$

Далее, так как

$$A' = 180^\circ - a,$$

$$B' = 180^\circ - b,$$

$$C' = 180^\circ - c,$$

то

$$\frac{A'}{2} = 90^\circ - \frac{a}{2};$$

$$\frac{B'}{2} = 90^\circ - \frac{b}{2};$$

$$\frac{C'}{2} = 90^\circ - \frac{c}{2}.$$

Учитывая все эти соотношения, формулу для $\sin p'$ перепишем так:

$$\sin\left(180^\circ - \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)\cos\left(90^\circ - \frac{b}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{c}{2}\right)} \sin(180^\circ - C),$$

или

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C. \quad (36)$$

Это и есть первая формула для синуса половины сферического избытка.

Итак, синус половины сферического избытка треугольника равняется произведению синусов половин двух сторон сферического треугольника на синус угла между ними, деленному на косинус половины третьей стороны.

Пользуясь этой словесной формулировкой или просто выполняя круговую перестановку сторон и углов, можно получить для $\sin \frac{\epsilon}{2}$ еще два выражения, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\epsilon}{2} &= \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \sin A; \\ \sin \frac{\epsilon}{2} &= \frac{\sin \frac{c}{2} \sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Вторую формулу можно получить из формулы (36), только что выведенной нами, с помощью следующих простых преобразований. Заменим $\sin C$ по

формуле двойного угла произведением:

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} ;$$

синус и косинус половины угла C выразим по формулам полупериметра (24) и (25), полученные радикалы перемножим; вынесем квадратические множители из-под знака корня; заменим получившиеся в знаменателе $\sin a$ и $\sin b$ соответствующими произведениями, подобно предыдущему, и сделаем возможные сокращения.

Это запишется так:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C,$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin a \sin b}} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin a \sin b} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)},$$

и, наконец, по сокращении,

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \quad (38)$$

Это и есть вторая искомая формула. Таким образом, синус половины сферического избытка треугольника равняется корню квадратному из произведения синуса полупериметра на синусы разностей полупериметра и каждой из его сторон, деленному на удвоенное произведение косинусов половин всех трех сторон треугольника.

Круговая перестановка никаких результатов не дает, так как формула симметрична относительно всех трех сторон треугольника.

§ 27. Решение косоугольных треугольников

Для решения косоугольного сферического треугольника необходимо знать три какие-либо его элемента. При этом можно применять три различных приема решения.

1. Треугольник можно решать по соответствующим основным формулам. Это часто бывает удобно, если отыскивается какой-нибудь один элемент треугольника, а не все три, и в особенности тогда, когда вычисления выполняются на арифмометре. При вычислении по таблицам логарифмов приходится

большую часть основных формул сначала тем или иным путем приводить к виду, удобному для логарифмирования.

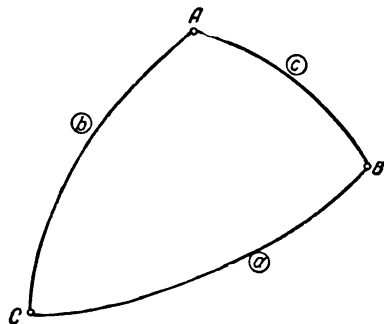
2. Часто косоугольный треугольник предварительно разбивают на два прямоугольных, опуская сферический перпендикуляр из какой-либо вершины треугольника на противоположную ей сторону. Затем последовательно решают получившиеся таким образом прямоугольные сферические треугольники.

3. Применяют формулы, специально выведенные для косоугольных треугольников, как, например, формулы полупериметра, аналогии Непера и другие, подобные им.

Решение треугольника всегда стараются проконтролировать, для чего либо выводят специальные контрольные формулы, либо выполняют решение того же треугольника по иным формулам, либо еще каким-нибудь другим путем.

В подробных курсах сферической тригонометрии разбираются следующие шесть случаев решения косоугольных сферических треугольников: 1) по трем сторонам — a , b и c (см. черт. 42); 2) по двум сторонам и углу между ними, например, a , b и C ; 3) по двум углам и стороне между ними, например, A , B и c ; 4) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, например a , b и A ; 5) по двум углам и стороне, противолежащей одному из них, например, A , B и a ; 6) по трем углам — A , B и C .

Из этих случаев 4-й и 5-й дают, вообще говоря, по два решения, так как здесь угол, противолежащий второй данной стороне, или, соответственно, сторона, противолежащая второму из данных углов, всегда определяется по синусу. В некоторых из остальных случаев также приходится тот или иной элемент определять по синусу, но тут двойственности не получается, так как, руководствуясь тем, что против большего угла лежит большая сторона и, наоборот, против большей стороны — больший угол (см. § 8, свойства 7 и 8), всегда бывает возможно решить, какое из двух значений искомого элемента следует взять для данного конкретного треугольника.



Черт. 42

При решении косоугольных сферических треугольников так же, как и прямоугольных, часто предпочитают, для большей точности, находить стороны или углы по их тангенсам (или котангенсам); если оказывается возможным, подбирают для этого соответствующие формулы, если нет, преобразуют в этом смысле выбранные основные формулы. Иногда с этой же целью переходят к функциям половинных углов или сторон, а также из двух возможных функций, синуса или косинуса, выбирают ту, по которой искомым элемент может быть найден более точно. Как известно, малые углы находятся точнее по синусу, а углы, близкие к 90° , — по косинусу.

Для примера рассмотрим первые три случая:

1 случай. Даны три стороны сферического треугольника a , b и c ; найти его углы (см. черт. 42, где данные элементы отмечены кружками).

1. Решение по основным формулам

Решение по основным формулам целесообразно проводить, если предполагается численно выполнять его на арифмометре, в особенности, если необходимо вычислить один или два угла, например, A и B .

Допустим, имеем последний случай. Применим формулы косинусов сторон к сторонам a и b [см. § 10, форм. (11)]:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A; \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.\end{aligned}$$

Отсюда определим косинусы искомых углов A и B :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

что иначе можно переписать так:

$$\cos A = \cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c - \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \quad (I)$$

$$\cos B = \cos b \operatorname{cosec} c \operatorname{cosec} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} a. \quad (II)$$

Обе эти формулы удобны для вычисления на арифмометре.

В качестве контрольной формулы применяется соотношение между синусами найденных углов и противолежащих им сторон, получаемое на основании теоремы синусов [см. § 12, форм. (14)]:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \quad (III)$$

Пример. Стороны сферического треугольника равны:

$$a = 43^\circ 4' 30'',$$

$$b = 68 \quad 17 \quad 20,$$

$$c = 75 \quad 48 \quad 10.$$

Найти его углы A и B .

Решение

Вычисление угла A

$\cos a$	0,73 0460
$\operatorname{cosec} b$	1,07 6356
$\operatorname{cosec} c$	1,03 1505
$\cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c$	0,81 1006
$— \quad \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$	0,10 0733
$\cos A$	1,71 0273
A	$44^\circ 44' 34'', 4$

Вспомогательная схема

$\operatorname{ctg} a$	1,06 9558
$\operatorname{ctg} b$	0,39 8173
$\operatorname{ctg} c$	0,25 2987

Вычисление угла B

$\cos b$	0,36 9927
$\operatorname{cosec} c$	1,03 1505
$\operatorname{cosec} a$	1,46 4225
$\cos b \operatorname{cosec} c \operatorname{cosec} a$	0,55 8721
$— \quad \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} a$	0,27 0584
$\cos B$	0,28 8137
B	$73^\circ 15' 12'', 8$

Контроль

$\sin a$	0,68 2955
$\sin B$	0,95 7589
$\sin a \sin B$	0,65 6990
$\sin b$	0,92 9061
$\sin A$	0,70 3927
$\sin b \sin A$	0,65 6992

Решение выполнено на арифмометре по „Шестизначным таблицам тригонометрических функций“ Петерса (Москва — Ленинград, 1932). Контроль сошелся удовлетворительно. Расхождение на две единицы шестого знака допустимо и объясняется накоплением ошибок округлений.

2) Решение по формулам полупериметра

По формулам полупериметра (28) для тангенсов половинных углов сферического треугольника (см. § 23) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ \frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

где, на основании формулы (27),

$$M = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}, \quad (II)$$

и, как известно,

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c). \quad (III)$$

Выведем контрольную формулу. Для этого перемножим почленно все три равенства (I):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M^3}{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

Но, очевидно,

$$M^3 = M \cdot M^2 = \frac{M \cdot \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}.$$

Внося это выражение, вместо M^3 , в числитель дроби в правой части полученного равенства, после сокращения получим контрольную формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}. \quad (IV)$$

Пример. Решить сферический треугольник, стороны которого равны:

$$a = 43^\circ 4' 30'',$$

$$b = 68 17 20,$$

$$c = 75 48 10$$

(тот же треугольник, что и в предыдущем примере).

Решение

Схема вычислений		Примечания
a	43° 4' 30"	p выписывается на полоску бумаги } Сумма этих трех строк равняется p , что служит контролем
b	68 17 20	
c	75 48 10	
$2p$	187 10 0	
p	93 35 0	
$p - a$	50 30 30	
$p - b$	25 17 40	
$p - c$	17 46 50	
$\lg \sin(p-a)$	9.88 746	$\lg M$ выписывается на полоску бумаги
$\lg \sin(p-b)$	9.63 070	
$\lg \sin(p-c)$	9.48 483	
доп. $\lg \sin p$	0.00 085	
$\lg M$	9.50 192	
$\lg M^2$	9.00 384	
$\lg \frac{M}{p}$	9.50 277	1-я контрольная строка
$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2}$	9.61 446	
$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2}$	9.87 122	
$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2}$	0.01 709	
Сумма	9.50 277	2-я контрольная строка
$\frac{A}{2}$	22° 22' 17"	
$\frac{B}{2}$	36 37 37	
$\frac{C}{2}$	46 7 37	
A	44° 44' 34"	
B	73 15 14	
C	92 15 14	

Вычисления выполнены как здесь, так и в дальнейших примерах, по „Пятизначным полным логарифмическим и тригонометрическим таблицам“ Ф. Г. Гаусса.

Контроль сошелся полностью (сравни 1-ю и 2-ю контрольные строки). Результаты вычислений совпадают с полученными в прошлом примере в пределах точности вычислений.

Когда требуется вычислить только один угол, например угол A , то часто предпочитают воспользоваться одной из формул (24), в нашем примере первой из них (см. § 23), которую обычно пишут тогда в виде:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}, \quad (V)$$

а иногда даже в виде:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b+c) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}, \quad (VI)$$

т. е. отыскивают половину угла A по его синусу, а не по тангенсу. Формула (V) удобнее для вычисления, т. к. для получения углов, стоящих под знаками синусов в числителе, необходимо сделать только 4 действия (1 сложение, 1 деление и 2 вычитания), тогда как в формуле (VI) для этой же цели требуется 6 действий (2 сложения, 2 вычитания и 2 деления). Заметим, что при вычислении одного только угла не представляется возможным проконтролировать полученный результат с таким удобством и уверенностью, как в предыдущих случаях. Удобство вычислений по формулам (V) или (VI) еще усугубляется, если пользоваться при этом такими сборниками таблиц, как, например: „Мореходные таблицы“ изд. 1905 г. (шестизначные), А. В. Граур, „Таблицы для вычисления азимута“ (Москва, 1939 г.), „Таблицы для астрономических вычислений“ (Труды ЦНИИГАиК, вып. 30, Москва, 1939 г.) и др. Дело в том, что в этих сборниках помещаются специальные таблицы, дающие $\lg \sin^2 \frac{1}{2}$ угла по аргументу „угол“, так что, войдя в них обратным входом, можно по $\lg \sin^2 \frac{A}{2}$ найти сразу угол A . Для предыдущего примера все вычисление по формуле (V) представится нижеследующей схемой:

a	43° 4' 30"
b	68 17 20
c	75 48 10
$2p$	187 10 0
p	93 35 0
$p-b$	25 17 40
$p-c$	17 46 50
$\lg \sin(p-b)$	9.63 070
$\lg \sin(p-c)$	9.48 483
доп. $\lg \sin b$	0.03 195
доп. $\lg \sin c$	0.01 347
$\lg \sin^2 \frac{A}{2}$	9.16 095
$\lg \sin \frac{A}{2}$	9.58 048
$\frac{A}{2}$	22° 22' 17"
A	44° 44' 34"

Как видим, результат получился такой же, как и по тангенсу. Если мы непосредственно по $\lg \sin^2 \frac{A}{2}$ по указанным выше таблицам найдем угол, то будем иметь $A = 44^\circ 44' 33''$.

II случай. Даны две стороны сферического треугольника a и b и угол между ними C .

Найти сторону c и углы A и B (см. черт. 43).

1) Решение по основным формулам

а) Для вычисления на арифмометре

Для стороны c по формулам (11) имеем:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad (I)$$

Для углов A и B по формулам котангенса (17) можем написать:

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A$$

$$\operatorname{ctg} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B.$$

Отсюда определим $\operatorname{ctg} A$ и $\operatorname{ctg} B$:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C} - \cos b \operatorname{ctg} C \quad (II')$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\sin C} - \cos a \operatorname{ctg} C \quad (III')$$

или же

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} a \sin b \operatorname{cosec} C - \cos b \operatorname{ctg} C \quad (II)$$

и

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin a \operatorname{cosec} C - \cos a \operatorname{ctg} C. \quad (III)$$

Формулы (I) — (III) удобны для вычисления на арифмометре.

Для контроля можно применить формулу (13):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad (IV)$$

которую можно переписать также в виде трех следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin A \sin b; \\ \sin a \sin C &= \sin A \sin c; \\ \sin b \sin C &= \sin B \sin c. \end{aligned} \right\} \quad (IV')$$

Пример. Решить сферический треугольник, у которого даны две стороны:

$$a = 120^\circ 31' 20''$$

$$b = 76^\circ 43' 43''$$

и угол между ними:

$$C = 108^\circ 12' 27''.$$

Решение

Вычисление стороны c

$\cos a$	$-0,50 \ 787$
$\cos b$	$+0,22 \ 955$
$+ \cos a \cos b$	$-0,11 \ 658$
$\sin a \sin b \cos C$	$-0,26 \ 197$
$\cos c$	$-0,37 \ 855$
c	$112^\circ 14' 38''$

$\sin a$	$+0,86 \ 143$
$\sin b$	$+0,97 \ 329$
$\cos C$	$-0,31 \ 246$

Вычисление угла A

$\operatorname{ctg} a$	$-0,58\ 957$
$\sin b$	$+0,97\ 329$
$\sin C$	$+0,94\ 993$
$\frac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C}$	$-0,60\ 407$
$-\cos b \operatorname{ctg} C$	$-0,07\ 550$
$\operatorname{ctg} A$	$-0,52\ 857$
A	$117^{\circ}51'34''$

$\cos a$	$-0,50\ 787$
$\operatorname{ctg} C$	$-0,32\ 891$
$\cos b$	$+0,22\ 955$

Вычисление угла B

$\operatorname{ctg} b$	$+0,23\ 586$
$\sin a$	$+0,86\ 143$
$\sin C$	$+0,94\ 993$
$\frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\sin C}$	$+0,21\ 389$
$-\cos a \operatorname{ctg} C$	$+0,16\ 704$
$\operatorname{ctg} B$	$+0,04\ 685$
B	$87^{\circ}19'4''$

Контроль

$\sin a$	$0,86\ 143$
$\sin b$	$0,97\ 329$
$\sin c$	$0,92\ 558$
$\sin A$	$0,88\ 410$
$\sin B$	$0,99\ 890$
$\sin C$	$0,94\ 993$
$\sin a \sin B$	$0,86\ 048_2$
$\sin A \sin b$	$0,86\ 048_6$
$\sin a \sin C$	$0,81\ 829_8$
$\sin A \sin c$	$0,81\ 830_5$
$\sin b \sin C$	$0,92\ 455_7$
$\sin B \sin c$	$0,92\ 456_2$

Решение выполнено по формулам (I), (II'), (III') на арифмометре и по „Пятизначным полным тригонометрическим и полигонометрическим таблицам для вычислений на арифмометре“ Ф. Г. Гаусса. Контроль выполнен по формулам (IV'). Контроль сошелся хорошо; сохраненный нами при этом шестой десятичный знак имеет условное значение и обнаруживает, как округление влияет на степень сходимости контроля. Формулы (II') и (III') выбраны для вычислений потому, что в таблицы Гаусса не включены натуральные значения секансов и косекансов — там помещены только синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

б) Для вычисления по таблицам логарифмов

Если требуется вычислить сторону c и только один из углов, например, угол A , и притом вычисление предполагается выполнить с помощью логарифмов, то оно выполняется следующим порядком. Выпишем для искомой стороны c и искомого угла A три из основных формул, а именно „косинус стороны“, т. е. форм. (11), „синус стороны на синус прилежащего угла“, т. е. форм. (14), и „синус стороны на косинус прилежащего угла“, т. е. форм. (15). Таким образом будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \\ \sin c \sin A &= \sin C \sin a, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Мы получили так называемую „астрономическую систему формул“, которая очень часто применяется при решении различных задач сферической и практической астрономии. Формулы (A) решают задачу. В самом деле, по первой из формул (A) можно вычислить сторону c , а затем, считая ее известной, по одной из остальных формул — угол A ; тогда третья формула может быть использована для контроля. Однако, при этом возникают два затруднения. Во-первых, искомые элементы отыскиваются здесь по их синусам или косинусам, а не по тангенсам или котангенсам, а во-вторых, первая и третья из формул (A) неудобны для логарифмического вычисления. Поэтому формулы (A) подвергаются ряду следующих преобразований.

Разделим вторую из этих формул на третью:

$$\frac{\sin c \sin A}{\sin c \cos A} = \frac{\sin C \sin a}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}.$$

Упрощая левую часть и деля числитель и знаменатель правой на $\sin a \cos C$, перепишем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C}{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b}.$$

Введём вспомогательный угол M по уравнению:

$$\operatorname{ctg} M = \frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C}. \quad (I)$$

Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin b \operatorname{ctg} M - \cos b},$$

или, умножая числитель и знаменатель дроби в правой части на $\sin M$,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C \sin M}{\sin b \cos M - \cos b \sin M},$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} C \sin M}{\sin(b - M)}. \quad (II)$$

Разделим теперь третью из формул (A) на первую:

$$\frac{\sin c \cos A}{\cos c} = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}.$$

Упростим левую часть и разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой, на то же выражение, как и в первом случае, т. е. на $\sin a \cos C$:

$$\operatorname{tg} c \cos A = \frac{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b}{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} \cdot \cos b + \sin b}.$$

Как видим, и здесь можно использовать тот же самый вспомогательный угол M , определяемый уравнением (I). Выполняя подстановку, получим:

$$\operatorname{tg} c \cos A = \frac{\sin b \operatorname{ctg} M - \cos b}{\cos b \operatorname{ctg} M + \sin b},$$

или, умножая числитель и знаменатель дроби в правой части на $\sin M$,

$$\operatorname{tg} c \cos A = \frac{\sin b \cos M - \cos b \sin M}{\cos b \cos M + \sin b \sin M},$$

или

$$\operatorname{tg} c \cos A = \frac{\sin(b - M)}{\cos(b - M)},$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} c \cos A = \operatorname{tg}(b - M),$$

откуда

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(b - M)}{\cos A}. \quad (III)$$

Формулы (I), (II) и (III) решают задачу, устраняя в то же время указанные выше затруднения. По данным a и c по формуле (I) вычисляем вспомогательный угол M . Так как он в уравнении (I) стоит под знаком котангенса, то всегда может быть найден угол, удовлетворяющий этому уравнению; по этой же причине он всегда найдется с достаточной точностью. Так как это угол вспомогательный, то мы сами имеем право поставить добавочные условия

для определения четверти окружности, в которой его следует взять. По практическим соображениям оказывается наиболее удобным брать угол M в пределах

$$-90^\circ \leq M \leq 90^\circ,$$

в зависимости от знака его котангенса.

Когда угол M вычислен, по формуле (II) находят угол A , а затем, считая этот угол уже известным, и сторону c , по формуле (III). Все три формулы удобны для логарифмического вычисления; искомые величины находятся по их тангенсам. Для контроля можно воспользоваться „теоремой синусов“:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}. \quad (IV)$$

Пример. В сферическом треугольнике даны две стороны a и b :

$$a = 120^\circ 31' 20'',$$

$$b = 76 \ 43 \ 43$$

и угол C , заключенный между ними

$$C = 108^\circ 12' 27''.$$

Найти угол A и сторону c (тот же треугольник, что и в предыдущем примере)

Схема вычислений		Решение	Контроль
	$\lg \operatorname{ctg} a$	9. 77 054 n	$\lg \sin c$ 9.96 642
	$\lg \cos C$	9. 49 479 n	$\lg \sin C$ 9. 97 769
	$\lg \operatorname{ctg} M$	0. 27 575	$\lg \frac{\sin c}{\sin C}$ 9.98 873
	M	27°55'20"	
	b	76 43 43	
	$b - M$	48 48 23	
	$\lg \operatorname{tg} C$	0. 48 290 n	$\lg \sin a$ 9. 93 522
	$\lg \sin M$	9. 67 050	$\lg \sin A$ 9. 94 650
доп.	$\lg \sin (b - M)$	0. 12 350	$\lg \frac{\sin a}{\sin A}$ 9.98 872
	$\lg \operatorname{tg} A$	0. 27 690 n	
	A	117°51'34"	
	$\lg \operatorname{tg} (b - M)$	0. 05 788	Контроль сошелся
	$\lg \cos A$	9. 66 960 n	
	$\lg \operatorname{tg} c$	0. 38 828 n	
	c	112°14'40"	

Контроль сошелся хорошо.

2) Решение с помощью разбивки на два прямоугольных треугольника

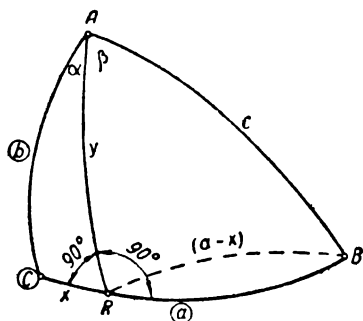
Опустим сферический перпендикуляр AR из вершины A на противоположную сторону BC (черт. 44). Получим два прямоугольных сферических треугольника ARC и ARB . Обозначим длину сферического перпендикуляра AR буквой y , длину отрезка стороны a от вершины угла C до основания перпендикуляра R — буквой x , а два угла, на которые перпендикуляр AR делит угол A , — α и β соответственно.

Таким образом:

$$x = CR; y = AR; \alpha = \angle CAR; \beta = \angle RAB.$$

Тогда из прямоугольного сферического треугольника ARC , в котором известна гипотенуза b и косвенный угол C , находим по правилу Непера-Модюля:

$$\cos C = \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} x,$$



Черт. 44

откуда

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} b \cos C. \quad (I)$$

Далее

$$\sin y = \sin b \sin C. \quad (II)$$

Затем

$$\cos b = \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos b \operatorname{tg} C. \quad (III)$$

Теперь переходим к треугольнику ARB . В нем нам теперь известны катеты AR и RB , так как, на основании чертежа,

$$\begin{aligned} AR &= y, \\ RB &= a - x, \end{aligned}$$

а x и y нами уже определены.

Решая этот треугольник по правилу Непера-Модюль, получаем:

$$\cos c = \cos y \cos (a - x). \quad (IV)$$

Далее,

$$\sin (a - x) = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} y,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} y \sin (a - x), \quad (V)$$

а также

$$\sin y = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} (a - x),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (a - x) \sin y. \quad (VI)$$

Зная теперь на основании (III) и (VI) углы α и β , легко найдем и угол A , так как на основании черт. 44:

$$A = \alpha + \beta. \quad (VII)$$

Формулы (I) — (VII) и решают задачу.

В качестве контрольной может быть использована та же формула, что и при решении по основным формулам, т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (VIII)$$

Пример. Решить сферический треугольник по двум сторонам и углу между ними по следующим данным:

$$\begin{aligned} a &= 120^\circ 31' 20'', \\ b &= 76^\circ 43' 43'', \\ C &= 108^\circ 12' 27'' \end{aligned}$$

(тот же треугольник, что и в двух предшествующих примерах).

Решение

а) Вычисление x

$$\begin{array}{r|l} \lg \operatorname{tg} b & 0.62734 \\ \lg \cos C & 9.49479n \\ \hline \lg \operatorname{tg} x & 0.12213n \\ x & -52^\circ 57' 7'' \end{array}$$

б) Вычисление y

$$\begin{array}{r|l} \lg \sin b & 9.98824 \\ \lg \sin C & 9.97769 \\ \hline \lg \sin y & 9.96593 \\ y & 67^\circ 36' 0'' \end{array}$$

в) Вычисление угла α

$$\begin{array}{r|l} \lg \cos b & 9.36\ 090 \\ \lg \operatorname{tg} C & 0.48\ 290n \\ \hline \lg \operatorname{ctg} \alpha & 9.84\ 380n \\ \alpha & -55^{\circ} 5' 18'' \end{array}$$

г) Вычисление стороны c

$$\begin{array}{r|l} a & 120^{\circ} 31' 20'' \\ - & x \\ \hline a-x & 173\ 28\ 27 \\ \lg \cos y & 9.58\ 107 \\ \lg \cos (a-x) & 9.99\ 717n \\ \hline \lg \cos c & 9.57\ 824n \\ c & 112^{\circ} 15' 0'' \end{array}$$

д) Вычисление угла B

$$\begin{array}{r|l} \lg \operatorname{ctg} y & 9.61\ 515 \\ \lg \sin (a-x) & 9.05\ 558 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} B & 8.67\ 073 \\ B & 87^{\circ} 19' 3'' \end{array}$$

е) Вычисление угла β

$$\begin{array}{r|l} \lg \operatorname{ctg} (a-x) & 0.94\ 160n \\ \lg \sin y & 9.96\ 593 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} \beta & 0.90\ 753n \\ \beta & 172^{\circ} 56' 48'' \end{array}$$

ж) Вычисление угла A

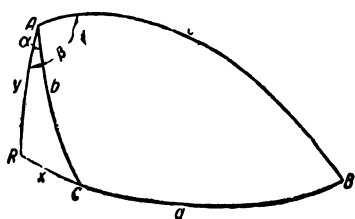
$$\begin{array}{r|l} \alpha & -55^{\circ} 5' 18'' \\ \beta & 172\ 56\ 48 \\ \hline A & 117\ 51\ 30 \end{array}$$

Контроль

$$\begin{array}{r|l} \lg \sin a & 9.93\ 522 \\ \lg \sin A & 9.94\ 650 \\ \hline \lg \frac{\sin a}{\sin A} & 9.98\ 872 \\ \lg \sin b & 9.98\ 824 \\ \lg \sin B & 9.99\ 952 \\ \hline \lg \frac{\sin b}{\sin B} & 9.98\ 872 \\ \lg \sin c & 9.96\ 640 \\ \lg \sin C & 9.97\ 769 \\ \hline \lg \frac{\sin}{\sin C} & 9.98\ 871 \end{array}$$

Контроль сошелся хорошо.

При вычислении вспомогательных геометрических величин x и α $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ получились отрицательными. Это произошло потому, что угол C — тупой. Если мы составим чертеж применительно к размерам сторон и углов нашего



Черт. 45

треугольника (черт. 45), то увидим, что по той же самой причине отрезок дуги большого круга CR , т. е. x , и угол CAR , т. е. α , откладываются в противоположном направлении от точки C и от стороны AC соответственно, по сравнению с построениями черт. 44. Поэтому необходимо одно из двух: или составить специальные формулы для треугольника, изображенного на черт. 45, или воспользоваться формулами, выведенными выше, но приписать величинам x и α , в согласии со знаком их тангенса и котангенса соответственно, знак минус. Окончательные результаты в обоих случаях получатся совершенно одинаковые. Однако второй путь, по которому мы и следовали выше при решении примера, предпочтительнее.

3) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьей стороны по теореме синусов (см. черт. 43)

По формулам (34)

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C \quad (II)$$

можем найти полусумму и полуразность искомых углов; а так как

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \\ B &= \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (III)$$

то тем самым найдем углы A и B .

После этого сторона c может быть найдена по теореме синусов из соотношений:

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}, \quad (IV)$$

$$\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}. \quad (V)$$

Тождественность результатов, найденных по формулам (IV) и (V), служит контролем решения.

Пример. Решить сферический треугольник, если дано

$$a = 120^\circ 31' 20'',$$

$$b = 76 \ 43 \ 43,$$

$$C = 108 \ 12 \ 27$$

(тот же треугольник, что и в предыдущих примерах).

Решение

а) Вычисление углов A и B

a	$120^\circ 31' 20''$	$\lg \cos \frac{1}{2}(a-b)$	9.96 748	$\lg \sin \frac{1}{2}(a-b)$	9.57 163
b	76 43 43	$\lg \sec \frac{1}{2}(a+b)$	0.82 398n	$\lg \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(a+b)$	0.00 494
$a+b$	197 15 3	$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C$	0.85 961	$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C$	9.85 961
$\frac{1}{2}(a+b)$	98 37 31,5	$\lg \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$	0.65 107n	$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$	9.43 618
$\frac{1}{2}(a-b)$	21 53 48,5				
$\frac{1}{2} C$	54 6 13,5				

$\frac{A+B}{2}$	$102^\circ 35' 19'',4$
$\frac{A-B}{2}$	15 16 12, 5
A	117.51 32
B	87 19 7

б) Вычисление стороны c и контроль

c	$112^\circ 14' 48''$
$\lg \sin c$	9.96 641
$\lg \sin a$	9.93 522
$\lg \operatorname{cosec} A$	0.05 350
$\lg \sin C$	9.97 769
$\lg \sin b$	9.98 824
$\lg \operatorname{cosec} B$	0.00 048
$\lg \sin c$	9.96 641
c	$112^\circ 14' 48''$

Контроль сошелся полностью. Так как сторона c отыскивается по синусу, то необходимо установить, какое из двух возможных значений следует взять для данного конкретного треугольника. Так как против большего угла должна лежать бо́льшая сторона и так как у нас

$$A > C > B,$$

то должно быть

$$a > c > b,$$

т. е. сторона c должна быть взята во второй четверти.

Обращаем внимание также на то, что полуразность $\frac{1}{2}(a-b)$ вычислена по тождеству:

$$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b) - b.$$

Кроме того, вычисление обеих этих величин, полусуммы $\frac{1}{2}(a+b)$ и полуразности $\frac{1}{2}(a-b)$, может быть проконтролировано по тождествам:

$$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) = a,$$

$$\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b.$$

4) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьей стороны по формулам Десямбра-Гаусса

Для удобства вычисления сделаем в формулах (34) (см. § 25) некоторые небольшие преобразования. Прежде всего заменим $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} C$ отношением косинуса к синусу, т. е. перепишем эти формулы в таком виде:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Теперь введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N &= \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(a-b), \\ D &= \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(a+b), \\ N' &= \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2}(a-b), \\ D' &= \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2}(a+b). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

С обозначениями (I) первую и вторую аналогии Непера можно переписать короче так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{N}{D}, \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \frac{N'}{D'}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Далее воспользуемся формулами Десямбра-Гаусса (33) (см. § 24); каждую из них разрешим относительно $\cos \frac{1}{2} c$ или $\sin \frac{1}{2} c$ соответственно и по-

лучим, таким образом, следующие четыре формулы:

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{2} c &= \frac{\cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (A+B)}, \\ \cos \frac{1}{2} c &= \frac{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)}, \\ \sin \frac{1}{2} c &= \frac{\cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (A-B)}, \\ \sin \frac{1}{2} c &= \frac{\sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} (A-B)}.\end{aligned}$$

Вводя в эти формулы обозначения (I), будем иметь окончательно:

$$\left. \begin{aligned}\cos \frac{1}{2} c &= \frac{N}{\sin \frac{1}{2} (A+B)}, \\ \cos \frac{1}{2} c &= \frac{D}{\cos \frac{1}{2} (A+B)}, \\ \sin \frac{1}{2} c &= \frac{N'}{\sin \frac{1}{2} (A-B)}, \\ \sin \frac{1}{2} c &= \frac{D'}{\cos \frac{1}{2} (A-B)}.\end{aligned}\right\} \quad (III)$$

Формулы (I), (II) и (III) и являются рабочими формулами. Углы A и B по отдельности определяются так же, как и в предыдущем решении, т. е. по равенствам:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} (A+B) + \frac{1}{2} (A-B), \\ B &= \frac{1}{2} (A+B) - \frac{1}{2} (A-B).\end{aligned}$$

По формулам (III) $\cos \frac{1}{2} c$ и $\sin \frac{1}{2} c$ не вычисляют дважды, а проводят вычисления согласно так называемому правилу Лаланда (об этом правиле см. § 39), т. е. следующим образом.

Когда логарифмы величин N , D , N' и D' найдены, и по таблицам подыскиваются $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B)$ и $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B)$, то из столбца, подписанного сверху tg или ctg , из которого только что выбирались эти логарифмы, непосредственно переходят в последний, крайний правый столбец, подписанный сверху $\cos$, и выписывают оттуда дополнение стоящего там логарифма, не обращая внимания на то, будет ли это доп. $\lg \sin \frac{1}{2} (A+B)$ или доп. $\lg \cos \frac{1}{2} (A+B)$ (или соответственно $A-B$); найденное таким образом дополнение логарифма прибавляют к большему из двух логарифмов, N или D , или соответственно N' или D' . Полученная сумма и будет $\lg \cos \frac{1}{2} c$ или соответственно $\lg \sin \frac{1}{2} c$. Дополнению приписывают такой же знак, как и у

величины, к которой его прибавляют. Иначе говоря, $\sin \frac{1}{2}c$ и $\cos \frac{1}{2}c$ всегда должны быть положительны. Смотря по значению $\frac{1}{2}c$, величина эта найдется более точно или по $\sin \frac{1}{2}c$ или по $\cos \frac{1}{2}c$: очевидно, для получения большей точности следует брать ту из этих величин, которая меньше. Если разность между логарифмами этих величин не слишком велика, то значение $\frac{1}{2}c$, найденное во второй из них, может служить контролем.

Пример. Для примера возьмем тот же самый сферический треугольник, как и выше, со сторонами:

$$a = 120^\circ 31' 20'',$$

$$b = 76 \ 43 \ 43$$

и углом между ними

$$C = 108^\circ 12' 27''.$$

Решение

Схема вычислений

a	120°31'20"
b	76 43 43
C	108 12 27
$a - b$	43 47 37
$a + b$	197 15 3
$\frac{1}{2}C$	54 6 13,5
$\frac{1}{2}(a - b)$	21 53 48,5
$\frac{1}{2}(a + b)$	98 37 31,5

$\lg \cos \frac{1}{2}C$	9.76 813
$\lg \cos \frac{1}{2}(a - b)$	9.96 748
$\lg N$	9.73 561
доп. $\left\{ \begin{array}{l} \lg \sin \frac{1}{2}(A + B) \\ \lg \cos \frac{1}{2}(A + B) \end{array} \right.$	0.01 057
$\lg D$	9.08 455n
$\lg \cos \frac{1}{2}(a + b)$	9.17 602n
$\lg \sin \frac{1}{2}C$	9.90 853
$\lg \lg \frac{1}{2}(A + B)$	0.65 106n
$\lg \cos \frac{1}{2}c$	9.74 618

$\lg \cos \frac{1}{2}C$	9.76 813
$\lg \sin \frac{1}{2}(a - b)$	9.57 163
$\lg N'$	9.33 976
доп. $\left\{ \begin{array}{l} \lg \sin \frac{1}{2}(A - B) \\ \lg \cos \frac{1}{2}(A - B) \end{array} \right.$	0.01 561
$\lg D'$	9.90 359
$\lg \sin \frac{1}{2}(a + b)$	9.99 506
$\lg \sin \frac{1}{2}C$	9.90 853
$\lg \lg \frac{1}{2}(A - B)$	9.43 617
$\lg \sin \frac{1}{2}c$	9.91 920

$\frac{1}{2}(A + B)$	102°35'20"
$\frac{1}{2}(A - B)$	15 16 12
A	117°51'32"
B	87 19 8
$\frac{1}{2}c$	56° 7'22"
c	112 14 44

Здесь $\frac{1}{2}c$ мы подыскивали по $\lg \cos \frac{1}{2}c$, но и по $\lg \sin \frac{1}{2}c$ получается тот же результат. Так что можно сказать, что контроль вполне сходится. Последний путь решения самый изящный и самый удобный для вычисления по таблицам логарифмов.

III случай. Даны два угла сферического треугольника A и B и сторона между ними c .

Найти стороны a и b и угол C (черт. 46).

1) Решение по основным формулам.

По формулам котангенсов (17) (см. § 15) имеем для данных элементов A , B и c и искомой стороны a :

$$\operatorname{ctg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} c \cos B + \frac{\sin B \operatorname{ctg} A}{\sin c}. \quad (\text{I})$$

Точно таким образом для стороны b напомним:

$$\operatorname{ctg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B,$$

откуда, в свою очередь,

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c \cos A + \frac{\sin A \operatorname{ctg} B}{\sin c}. \quad (\text{II})$$

Наконец, для угла C непосредственно по формулам косинуса угла (12) (см. § 11) будем иметь:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \quad (\text{III})$$

Формулы (I), (II), (III) и решают задачу; они удобны для вычисления на арифмометре. В качестве контрольной формулы можно взять теорему синусов:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (\text{IV})$$

Пример. Решить сферический треугольник по двум углам A и B , которые равняются соответственно:

$$A = 126^\circ 18' 4'',$$

$$B = 63^\circ 42' 14''$$

и стороне c , которая равняется:

$$c = 106^\circ 43' 37''.$$

Решение

а) Вычисление стороны a

$\sin B$	$+0,89\ 652$
$\operatorname{ctg} A$	$-0,73\ 460$
$\sin c$	$+0,95\ 769$
$\frac{\sin B \operatorname{ctg} A}{\sin c}$	$-0,68\ 768$
$\operatorname{ctg} c \cos B$	$-0,13\ 314$
$\operatorname{ctg} a$	$-0,82\ 082$
a	$129^\circ 22' 48''$

б) Вспомогательная схема

$\cos A$	$-0,59\ 203$
$\operatorname{ctg} c$	$-0,30\ 053$
$\cos B$	$+0,44\ 301$

в) Вычисление стороны b

$\sin A$	$+0,80 \ 592$
$\operatorname{ctg} B$	$+0,49 \ 415$
$\sin c$	$+0,95 \ 769$
$\frac{\sin A \operatorname{ctg} B}{\sin c}$	$+0,41 \ 584$
$\operatorname{ctg} c \cos A$	$+0,17 \ 762$
$\operatorname{ctg} b$	$+0,59 \ 376$
b	$50^{\circ}18' \ 0''$

г) Вычисление угла C

$\sin A$	$+0,80 \ 592$
$\sin B$	$+0,89 \ 652$
$\cos c$	$-0,28 \ 781$
$\sin A \sin B \cos c$	$-0,20 \ 795$
$-\cos A \cos B$	$+0,26 \ 228$
$\cos C$	$+0,05 \ 433$
C	$86^{\circ}53' \ 8''$

д) Контроль

$\sin a$	$0,77 \ 296$
$\sin A$	$0,80 \ 592$
$\frac{\sin a}{\sin A}$	$0,95 \ 910_3$
$\sin b$	$0,85 \ 985$
$\sin B$	$0,89 \ 652$
$\frac{\sin b}{\sin B}$	$0,95 \ 909_7$
$\sin c$	$0,95 \ 769$
$\sin C$	$0,99 \ 852$
$\frac{\sin c}{\sin C}$	$0,95 \ 910_9$

Контроль сошелся удовлетворительно.

2) Решение с помощью разбишки на два прямоугольных сферических треугольника.

Опустим сферический перпендикуляр AR из вершины A на противоположную сторону CB (черт. 47). Получим два сферических прямоугольных треугольника ABR и CAR . Обозначим длину сферического перпендикуляра AR буквой y , длину отрезка RB стороны a от точки R до вершины B — буквой x , а угол между перпендикуляром AR и стороной c — буквой α .

Таким образом,

$$y = AR, \quad x = RB, \quad a - x = CR$$

$$\text{и } \angle BAR = \alpha.$$

Тогда из прямоугольного сферического треугольника ABR , в котором известны гипотенуза c и косвенный угол B , находим по правилу Непера-Модюи:

$$\sin y = \sin c \sin B. \quad (\text{I})$$

Далее,

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} B,$$

откуда

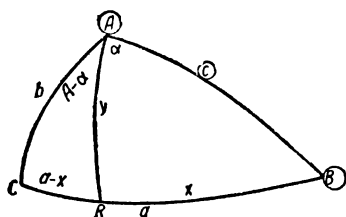
$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos c \operatorname{tg} B. \quad (\text{II})$$

Затем,

$$\cos B = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} c,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \cos B \operatorname{tg} c. \quad (\text{III})$$



Черт. 47

Теперь переходим к треугольнику CAR , в котором нам теперь известны катет AR и угол CAR , так как (см. черт. 47)

$$AR = y,$$

$$\angle CAR = A - \alpha.$$

Решая этот треугольник по правилу Непера-Модюи, получим:

$$\cos C = \cos y \sin (A - \alpha). \quad (IV)$$

Далее,

$$\cos (A - \alpha) = \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} y,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} y \cos (A - \alpha). \quad (V)$$

Затем,

$$\sin y = \operatorname{tg} (a - x) \operatorname{ctg} (A - \alpha),$$

откуда

$$\operatorname{tg} (a - x) = \sin y \operatorname{tg} (A - \alpha). \quad (VI)$$

Теперь, зная на основании формул (III) и (VI) отрезки x и $(a - x)$, на основании черт. 47 можем найти сторону a , так как

$$a = x + (a - x). \quad (VII)$$

В качестве контрольной может быть взята та же формула, что и в предыдущем способе решения, т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (VIII)$$

Пример. Решить сферический треугольник, если даны два его угла и сторона между ними, а именно:

$$A = 126^\circ 18' 4'',$$

$$B = 63^\circ 42' 14'',$$

$$c = 106^\circ 43' 37''$$

(тот же треугольник, что и в предыдущем примере).

Решение

а) Вычисление y

$\lg \sin c$	9.98 122
$\lg \sin B$	9.95 256
$\lg \sin y$	9.93 378
y	$59^\circ 9' 34''$

б) Вычисление угла α

$\lg \cos c$	9.45 911n
$\lg \operatorname{tg} B$	0.30 614
$\lg \operatorname{ctg} \alpha$	9.76 525n
α	$120^\circ 13' 6''$

в) Вычисление x

$\lg \cos B$	9.64 641
$\lg \operatorname{tg} c$	0.52 212n
$\lg \operatorname{tg} x$	0.16 853n
x	$124^\circ 9' 7''$

г) Вычисление угла C

A	$126^\circ 18' 4''$
α	$120^\circ 13' 6''$
$A - \alpha$	$6^\circ 4' 58''$
$\lg \sin (A - \alpha)$	9.02 516
$\lg \cos y$	9.70 982
$\lg \cos C$	8.73 498
C	$86^\circ 53' 10''$

д) Вычисление стороны b		е) Вычисление стороны a	
$\lg \operatorname{ctg} y$	9.77 601	$\lg \sin y$	9.93 378
$\lg \cos (A - a)$	9.99 755	$\lg \operatorname{tg} (A - a)$	9.02 762
$\lg \operatorname{ctg} b$	9.77 356	$\lg \operatorname{tg} (a - x)$	8.96 140
b	59°18'10"	$a - x$	5°13'40"
		x	124 9 7
		a	129°22'47"

ж) Контроль	
$\lg \sin a$	9.88 815
$\lg \sin A$	9.90 629
$\lg \frac{\sin a}{\sin A}$	9.98 186
$\lg \sin b$	9.93 443
$\lg \sin B$	9.95 256
$\lg \frac{\sin b}{\sin B}$	9.98 187
$\lg \sin c$	9.98 122
$\lg \sin C$	9.99 936
$\lg \frac{\sin c}{\sin C}$	9.98 186

Контроль сошелся хорошо. Катет треугольника ABR , обозначенный буквою y , находится по синусу. Так как катет и противолежащий угол должны лежать в одной и той же четверти, мы взяли $y < 90^\circ$.

3) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьего угла по теореме синусов.

По третьей и четвертой аналогиям Непера [см. (35) § 25]:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

можем найти полусумму и полуразность искомых сторон, а затем по тождествам:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \\ b &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

и самые стороны a и b .

Искомый угол C можно определить по теореме синусов из соотношений:

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a} = \frac{\sin c \sin B}{\sin b}. \quad (III)$$

Из этих соотношений угол C определяют дважды; совпадение двух полученных таким образом значений служит контролем.

Пример. Решить сферический треугольник, если даны:

$$A = 126^\circ 18' 4'',$$

$$B = 63^\circ 42' 14'',$$

$$c = 106^\circ 43' 37''$$

(тот же треугольник, что и в двух предыдущих примерах).

Решение

а) Вычисление сторон a и b

A	126° 18' 4"
B	63 42 14
$A + B$	190 0 18
$\frac{1}{2} (A + B)$	95 0 9
$\frac{1}{2} (A - B)$	31 17 55
c	106 43 37
$\frac{1}{2} c$	53 21 48
$\lg \sin \frac{1}{2} (A - B)$	9.71 558
доп. $\lg \sin \frac{1}{2} (A + B)$	0.00 166
$\lg \tg \frac{1}{2} c$	0.12 863
$\lg \cos \frac{1}{2} (A - B)$	9.93 170
доп. $\lg \cos \frac{1}{2} (A + B)$	1.05 948 п
$\lg \tg \frac{a-b}{2}$	9.84 587
$\lg \tg \frac{a+b}{2}$	1.11 981 п
$\frac{1}{2} (a - b)$	35° 2' 24"
$\frac{1}{2} (a + b)$	94 20 24
a	129 22 48
b	59 18 0

б) Вычисление угла C и контроль

C	86° 53' 0"
$\lg \sin C$	9.99 936
доп. $\lg \sin a$	0.11 185
$\lg \sin A$	9.90 629
$\lg \sin c$	9.98 122
$\lg \sin B$	9.95 256
доп. $\lg \sin b$	0.06 558
$\lg \sin C$	9.99 936
C	86° 53' 0"

Контроль сошелся полностью.

Так как $c < a$, то должно быть также

$$C < A.$$

Поэтому для C выбрано значение, меньшее 90°.

4) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьего угла по формулам Десямбра-Гаусса.

Перепишем третью и четвертую аналогии Непера [см. (35) § 25] в несколько измененном виде, а именно:

$$\tg \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (A + B)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N &= \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(A-B), \\ D &= \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(A+B), \\ N' &= \sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A-B), \\ D' &= \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A+B). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Тогда наши аналогии можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) &= \frac{N}{D}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) &= \frac{N'}{D'}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Возьмем формулы Десямбра-Гаусса [см. форм. (33) § 24] и разрешим их относительно $\sin \frac{1}{2}C$ и $\cos \frac{1}{2}C$ соответственно:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}C &= \frac{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}, \\ \sin \frac{1}{2}C &= \frac{\cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}, \\ \cos \frac{1}{2}C &= \frac{\sin \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}, \\ \cos \frac{1}{2}C &= \frac{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}. \end{aligned}$$

Внося в эти формулы обозначения (I), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2}C &= \frac{N}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}; \\ \sin \frac{1}{2}C &= \frac{D}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}; \\ \cos \frac{1}{2}C &= \frac{N'}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}; \\ \cos \frac{1}{2}C &= \frac{D'}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Присоединим сюда тождества:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b), \\ b &= \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b). \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Формулы (I), (II), (III) и (IV) и решают задачу. В самом деле, по (I), (II) и (IV) формулам находим стороны a и b , а по формулам (III) находим искомый угол C . При этом $\sin \frac{1}{2}C$ и $\cos \frac{1}{2}C$ не вычисляют по два раза, а проводят вычисления по так называемому правилу Лаланда, а именно: когда подыскивают по таблицам логарифмов по $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$ или по $\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)$ угол $\frac{1}{2}(a+b)$ или соответственно $\frac{1}{2}(a-b)$, то из столбца, подписанного сверху tg или ctg , переходят непосредственно в крайний правый столбец, подписанный сверху $\cos$, и выписывают, интерполируя в том же направлении, как и при приискании самого угла, дополнение стоящего в этом столбце логарифма, не устанавливая, будет ли это доп. $\lg \sin \frac{1}{2}(a+b)$ или доп. $\lg \cos \frac{1}{2}(a+b)$, или соответственно то же для угла $\frac{1}{2}(a-b)$. Полученное таким образом дополнение прибавляют к большему из двух логарифмов $\lg N$ и $\lg D$, или соответственно $\lg N'$ и $\lg D'$. Полученный в сумме логарифм и будет $\lg \sin \frac{1}{2}C$, или соответственно $\lg \cos \frac{1}{2}C$. Совпадение результатов, полученных по синусу и по косинусу, служит контролем. В случае большого расхождения при отсутствии погрешностей в вычислениях следует отдать предпочтение значению угла $\frac{1}{2}C$, полученному по меньшему из обоих логарифмов. Если логарифмы отличаются между собой мало, и разность полученных значений угла $\frac{1}{2}$ невелика, допустимо взять, как окончательное, среднее из обоих значений.

Пример. Решить сферический треугольник, если дано:

$$A = 126^{\circ} 18' 4'',$$

$$B = 63 42 14,$$

$$c = 106 43 37$$

(тот же треугольник, что и в трех предыдущих примерах).

Решение

A	$126^{\circ} 18' 4''$
B	$63 42 14$
$A-B$	$62 35 50$
$A+B$	$190 0 18$
c	$106 43 37$
$\frac{1}{2}(A-B)$	$31 17 55$
$\frac{1}{2}(A+B)$	$95 0 9$
$\frac{1}{2}c$	$53 21 48,5$

$\lg \sin \frac{1}{2} c$	9.90 441
$\lg \cos \frac{1}{2} (A - B)$	9.93 170
N	9.83 611
доп. $\left\{ \begin{array}{l} \lg \sin \frac{1}{2} (a + b) \\ \lg \cos \frac{1}{2} (a + b) \end{array} \right.$	0.00 124
D	8.71 630 п
$\lg \cos \frac{1}{2} (A + B)$	8.94 052 п
$\lg \cos \frac{1}{2} c$	9.77 578
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b)$	1.11 981 п
$\lg \sin \frac{1}{2} C$	9.83 735

$\lg \sin \frac{1}{2} c$	9.90 441
$\lg \sin \frac{1}{2} (A - B)$	9.71 558
N'	9.61 999
доп. $\left\{ \begin{array}{l} \lg \sin \frac{1}{2} (a - b) \\ \lg \cos \frac{1}{2} (a - b) \end{array} \right.$	0.08 685
D'	9.77 412
$\lg \sin \frac{1}{2} (A + B)$	9.99 834
$\lg \cos \frac{1}{2} c$	9.77 578
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a - b)$	9.84 587
$\lg \cos \frac{1}{2} C$	9.86 097

$\frac{1}{2} (a + b)$	94°20'23",7
$\frac{1}{2} (a - b)$	35 2 24,5
a	129 22 48
b	59 17 59
$\frac{1}{2} C$	43 26 32 } 33"
C	86 53 6

Так как искомый угол C близок к 90° , то $\frac{1}{2} C$ близко к 45° ; поэтому $\sin \frac{1}{2} C$ и $\cos \frac{1}{2} C$ мало различаются между собою и практически дают одинаковую точность. Разность в 3", полученная при приискании угла по синусу и по косинусу, носит, таким образом, случайный характер. Ввиду этого за окончательное значение угла $\frac{1}{2} C$ принято среднее арифметическое из обоих полученных значений, с некоторым предпочтением при округлении в сторону значения, полученного по синусу, как меньшему из двух.

Глава V

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 28. Решение элементарных треугольников

При рассмотрении многих вопросов сферической и практической астрономии и высшей геодезии приходится иметь дело с треугольниками, некоторые элементы которых бесконечно малы.

Такие треугольники называются элементарными (см. черт. 48).

Возможны элементарные треугольники двух типов:

Первый тип. Одна из сторон треугольника, например, a (черт. 48а) бесконечно мала по сравнению с радиусом сферы, а следовательно, бесконечно мал противолежащий ей угол A . Другие же стороны b и c и противолежащие им углы B и C суть величины конечные.

Второй тип. Все три стороны a_1 , b_1 и c_1 бесконечно малы (черт. 48 б). Если все три стороны одного и того же порядка малости по сравнению с радиусом сферы, то и все углы A , B , C будут величинами конечными. Если же одна из сторон есть величина высшего порядка малости

по сравнению с двумя другими сторонами, то противолежащий ей угол будет бесконечно мал. Такие треугольники встречаются гораздо реже, и мы их рассматривать здесь не станем.

Опустив сферический перпендикуляр CR (черт. 48 а) из вершины одного из углов, прилежающих к бесконечно малой стороне a , например, из вершины C , на противолежащую сторону, мы разобьем элементарный треугольник первого типа ABC на два элементарных треугольника — на прямоугольный элементарный треугольник ACR — первого типа и на прямоугольный элементарный треугольник CRB — второго типа. Подобным же образом и элементарный треугольник второго типа $A_1B_1C_1$ (черт. 48 б) мы можем разбить на два прямоугольных элементарных треугольника того же, т. е. второго, типа $A_1C_1R_1$ и $R_1C_1B_1$, если опустим перпендикуляр из вершины любого угла на противоположную сторону, например, перпендикуляр C_1R_1 из вершины угла C_1 на сторону A_1B_1 .

Таким образом, достаточно рассмотреть решение прямоугольного элементарного треугольника первого типа ABC (черт. 49 а), у которого катет b и противолежащий ему острый угол B бесконечно малы, а остальные элементы конечны, и решение элементарного прямоугольного треугольника второго типа $A_1B_1C_1$ (черт. 49 б), у которого все стороны бесконечно малы, а углы конечны. Это, так сказать, два основных типичных случая.

Для элементарного сферического прямоугольного треугольника первого типа решение проводится, как обычно, с помощью правила Непера-Модюи. Только функции малых элементов, катета b и угла B , по их малости, в зависимости от требуемой точности, могут заменяться теми или другими приближенными их выражениями, о чем ниже будет сказано несколько подробнее.

Например, если даны малый угол B и гипотенуза a , для малого катета b , по правилу Непера-Модюи, сперва напишем:

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

а затем, по малости b и B , можем заменить синусы этих величин первыми членами разложений в ряд и для вычисления b получим формулу:

$$b = B \sin a.$$

Элементарные сферические треугольники второго типа суть так называемые треугольники „с малым изгибом сторон“. Их, как уже сказано в § 21, можно решать как плоские. Так, например, если в треугольнике $A_1B_1C_1$ (черт. 49 б) даны гипотенуза a_1 и острый угол C_1 , то, решая его, будем иметь:

$$b_1 = a_1 \cos C_1,$$

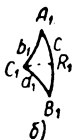
$$c_1 = a_1 \sin C_1.$$

§ 29. Вычисление малых углов по таблицам натуральных значений тригонометрических функций

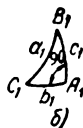
При решении элементарных треугольников, а также и в других случаях приходится находить тригонометрические функции малых углов и, наоборот, находить малые углы по их тригонометрическим функциям. В таких случаях



Черт. 48



Черт. 49



целесообразно применить некоторые приемы, облегчающие и упрощающие эту работу, без ущерба для точности вычисления.

Основным приемом здесь является разложение функций в ряды.

Как известно, в анализе даются разложения в ряды тригонометрических функций, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots, \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \dots \right), \\ \sec x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \dots, \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

В отношении обратных круговых функций для нас имеют наибольшее значение ряды для арксинуса и арктангенса:

$$\left. \begin{aligned} \arcsin y &= y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \dots, \\ \arctg y &= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

В простейших случаях можно довольствоваться первыми членами этих разложений. Тогда для малых углов можно принять:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x \\ \operatorname{tg} x &= x \\ \cos x &= 1 \\ \sec x &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

Однако в рядах (39) и (40) и в выражениях (41), как и вообще в анализе, угол x выражен в отвлеченных мерах (в радианах). На практике же углы принято выражать в градусах, минутах и секундах градусных или (в астрономии) в часах, минутах и секундах часовых. Для практического применения выражения (41), следовательно, нужно переписать таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \sin x'' &= x'' \cdot \sin 1'' \\ \operatorname{tg} x'' &= x'' \cdot \sin 1'' \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sin x^s &= x^s \sin 1^s \\ \operatorname{tg} x^s &= x^s \sin 1^s \end{aligned} \right\}. \quad (43)$$

Последние же два из равенств (41) остаются без изменения.

Пределы, в которых допустимо пользоваться этими формулами, зависят от требуемой точности вычислений.

Некоторую ориентировку в этом вопросе дают приведенные ниже таблички.

При вычислении в градусных мерах		
Предел допускаемой погрешности в угле x''	Предел угла x	
	при вычислении по синусу	при вычислении по тангенсу
0",01	0°,4	0°,3
0",1	0°,8	0°,6
1"	1°,7	1°,4
1'	6°,9	5°,5

Таблица 2

При вычислении в часовых мерах		
Предел допускаемой погрешности в угле x^s	Предел угла x	
	при вычислении по синусу	при вычислении по тангенсу
0s,001	1m,7	1m,4
0s,01	3m,7	3m,0
0s,1	8m,1	6m,4
1s	17m,4	13m,8
1m	68m,1	54m,0

В некоторых случаях при очень приближенных расчетах применяют формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin x' &= x' \sin 1' \\ \operatorname{tg} x' &= x' \sin 1' \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sin x^m &= x^m \sin 1^m \\ \operatorname{tg} x^m &= x^m \sin 1^m \end{aligned} \right\} \quad (43')$$

и даже

$$\sin x^o = x^o \sin 1^o.$$

Конечно, при вычислениях по формулам (42), (43), (42') и (43') не нужно никаких таблиц. Нужно только знать несколько натуральных значений синусов, а именно:

$$\begin{aligned} \sin 1'' &= 0,00000485, \\ \sin 1^s &= 0,00007272, \\ \sin 1' &= 0,00029089, \\ \sin 1^m &= 0,00436331, \\ \sin 1^o &= 0,01745. \end{aligned}$$

Для котангенса и косеканса предыдущий прием оказывается неприменимым. Благодаря наличию в разложении этих функций (39) множителя $\frac{1}{x}$ они очень быстро возрастают при уменьшении аргумента, так что какая-либо интерполяция и вообще расчеты, основанные на допущении пропорциональности изменения аргумента и функции, оказываются здесь совершенно неприемлемыми. Поэтому для котангенса и косеканса часто прибегают к уменьшению табличного интервала, что естественно ведет к увеличению объема таблиц.

Здесь, однако, можно применить и другой прием. Введем функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$, по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= x \operatorname{ctg} x \\ p_2(x) &= x \operatorname{cosec} x \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

и

В силу разложений $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ по соответствующим формулам (39), эти функции можно представить следующими рядами:

$$p_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \dots,$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \dots$$

При очень малом x они близки к 1 и изменяются очень медленно. Ввиду такого свойства эти функции иногда называются выравнивающими в том смысле, что они на некотором интервале имеют по сравнению с первоначальной функцией более медленное и более равномерное изменение. Поэтому они очень легко могут быть табулированы с большим табличным интервалом (см., например, Петерс, „Шестизначные таблицы тригонометрических функций“).

Ограничиваясь двумя первыми членами разложений, что для практических целей и в пределах для x от 0° до $1\frac{1^\circ}{3}$ (или от 0^m до $5\frac{1^m}{3}$) вполне достаточно, и выражая наши выравнивающие функции в градусных или часовых секундах, предыдущие формулы можем переписать так:

$$p_1(x) = 206265'' - \frac{x''^2}{3} \cdot \sin 1'',$$

$$p_2(x) = 206265'' + \frac{x''^2}{6} \cdot \sin 1'',$$

где x и $p(x)$ выражены в градусных секундах, или

$$p_1(x) = 13751^s, 0 - \frac{(x^s)^2}{3} \cdot \sin 1^s,$$

$$p_2(x) = 13751^s, 0 + \frac{(x^s)^2}{6} \cdot \sin 1^s,$$

где x и $p(x)$ выражены в часовых секундах.

Имея таблички функций $p(x)$, из которых они без всякой интерполяции могут быть выбраны по аргументам x , $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ соответственно, легко с требуемой точностью по данному x найти $\operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{cosec} x$ и, наоборот, найти по заданным $\operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{cosec} x$ соответствующие этим функциям значения x из соотношений:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{p_1(x)}{x} \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{p_2(x)}{x} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

или

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{p_1(x)}{\operatorname{ctg} x} \\ x &= \frac{p_2(x)}{\operatorname{cosec} x} \end{aligned} \right\}, \quad (46)$$

которые непосредственно вытекают из формул (44).

Если приходится вести вычисления с синусами и тангенсами малых углов, выходящих, однако, за пределы, указанные в табличках 1 и 2, то уже приходится, до известных пределов, конечно, брать два первых члена ряда разложений (39) и (40).

В этом случае интересные нас разложения переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} \end{aligned} \right\}, \quad (39')$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arc} \sin y &= y + \frac{y^3}{6} \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} y &= y - \frac{y^3}{3} \end{aligned} \right\}. \quad (40')$$

Введем обозначение:

$$w(x) = \frac{x^3}{6}. \quad (47)$$

Тогда предыдущие равенства примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - w(x) \\ \operatorname{tg} x &= x + 2w(x) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \arcsin y &= y + w(y) \\ \operatorname{arctg} y &= y - 2w(y) \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Для какого-нибудь x будем иметь:

$$y = \sin x,$$

и наоборот,

$$x = \arcsin y.$$

Отсюда, на основании (48) и (49), для взятого значения x и соответствующего ему значения y можем записать:

$$y = x - w(x)$$

и

$$x = y + w(y).$$

Складывая эти два выражения, с точностью до малых 4-го порядка включительно, получаем равенство:

$$w(x) = w(y),$$

из которого видно, что функции $w(x)$ и $w(y)$ равны между собой с точностью до малых 4-го порядка. Следовательно, в известных пределах с весьма большой точностью мы получаем один и тот же результат, независимо от того, находим ли мы функцию $w(x)$ по углу, т. е. по x , или по синусу этого угла, т. е. по y . То же самое может быть доказано аналогичным путем и для тангенса.

Таким образом, мы функцию $w(x)$ можем табулировать так, чтобы или по углу, или по его синусу или тангенсу можно было подыскивать ее значение. Тогда с помощью этих значений $w(x)$ можно будет по данному малому углу x находить по формулам (48) синус и тангенс этого угла, или, наоборот, по синусу или тангенсу малого угла по формулам (49) находить самый угол x .

При этом нужно иметь в виду, что для вычисления по формулам (48) значения x и $w(x)$ в правых частях должны быть выражены в отвлеченных мерах; при вычислении же по формулам (49), величины y и $w(y)$ должны быть выражены в секундах градусных или часовых. Условившись для последнего случая обозначать нашу функцию через $v(y'')$, формулы (47) и (49) можем переписать таким образом:

для вычисления в градусных секундах —

$$w(y'') = \frac{1}{6} \sin^2 1'' (y'')^3 \quad (47')$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= y'' + w(y''), \\ &\text{если } x = \arcsin y \\ x'' &= y'' - 2w(y''), \\ &\text{если } x = \operatorname{arctg} y; \end{aligned} \right\} \quad (49')$$

и

для вычисления в часовых секундах —

$$v(y^s) = \frac{1}{6} \sin^2 1^s (y^s)^3 \quad (47'')$$

$$\left. \begin{aligned} x^s &= y^s + v(y^s), \\ &\text{если } x = \arcsin y \\ x^s &= y^s - 2v(y^s), \\ &\text{если } x = \arctg y. \end{aligned} \right\} \quad (49'')$$

Напомним, что если x , x'' и x^s обозначают соответственно отвлеченное выражение угла x , его выражение в градусных секундах и в секундах часовых, то между этими величинами существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x &= x'' \sin 1'' = x^s \sin 1^s \\ x'' &= 15x^s = \frac{x}{\sin 1''} \\ x^s &= \frac{x}{\sin 1^s} = \frac{1}{15} x'' \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

где $\sin 1'' = \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{206265}$, а $\sin 1^s = 15 \sin 1'' = \frac{1}{13751,0}$.

Исследование величин остаточных членов разложений (40'), которые в данном случае с достаточной точностью можно принять равными соответственно первым из отброшенных членов разложений (40), показывает, что поправками $w(y)$ и $v(y)$ можно пользоваться в следующих пределах.

Если при вычислении в градусных секундах требуется обеспечить точность до $0'',01$, то формулы (47') и (49') можно применять при вычислении по синусам для углов от $0^\circ,4$ до $3^\circ,3$, а при вычислении по тангенсам — для углов от $0^\circ,3$ до $2^\circ,7$.

Если при вычислении в часовых секундах требуется обеспечить точность до $0^s,001$, то формулы (47'') и (49'') можно применять при вычислении по синусам для углов от $1^m,7$ до $14^m,4$, а при вычислении по тангенсам — для углов от $1^m,4$ до $11^m,8$. С округлением можно для обоих случаев в среднем считать допустимым применение рассмотренного приема для углов до 3° или 12^m .

В качестве образца может служить приведенная на стр. 151—152 в Приложениях таблица поправок $v(y^s)$, составленная автором для значений y от 1^m до 7^m для каждой секунды времени, причем за единицу принята $0^s,001$.

Пример 1. Дано $y = \sin x = 0,02115$; найти угол x .

По какой-либо специальной таблице или на арифмометре по формулам (50) получаем: $y^s = 290^s,834 = 4^m50^s,834$; по только что упомянутой таблице находим $v(y) = 22$.

Следовательно,

$$x^s = 4^m50^s,834 + 0^s,022 = 4^m50^s,856.$$

Пример 2. Дано $y = \tg x = 0,01868$; найти x , т. е. угол.

По формуле (50) вычисляем

$$y^s = 256^s,869 = 4^m16^s,869,$$

а по упомянутой таблице находим $v(y) = 15$.

Следовательно, $x^s = 4^m16^s,869 - 0^s,030 = 4^m16^s,839$.

Пример 3. Дан угол $4^m50^s,856$; найти его синус.

$$x = 290^s,856;$$

по таблице находим $v(x) = 22$; следовательно,

$$y^s = 290^s,856 - 0^s,022 = 290^s,834.$$

Переводим по формуле (50) и находим

$$\sin 4^m50^s,856 = 0,02115.$$

Пример 4. Дан угол $4^m 16^s, 839$; найти его тангенс.

$$x^s = 256^s, 839;$$

по таблице находим $v(x) = 15$; следовательно,

$$y^s = 256^s, 839 + 0^s, 030 = 256^s, 869;$$

переводя y^s в отвлеченные меры по формуле (50), получаем

$$\operatorname{tg} x = 0,01868.$$

Поправки $w(x)$ и $v(x)$ могут быть названы **нелогарифмическими** или **натуральными** поправками малых углов.

§ 30. Вычисление малых углов по таблицам логарифмов

При вычислении малых углов и их функций по логарифмам можно также очень часто пользоваться формулами (42) и (49), т. е. принимать приближенно

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x'' &= \lg x'' + \lg \sin 1'' \\ \lg \operatorname{tg} x'' &= \lg x'' + \lg \sin 1'' \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s \\ \lg \operatorname{tg} x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s \end{aligned} \right\},$$

а иногда еще грубее

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x' &= \lg x' + \lg \sin 1' \\ \lg \operatorname{tg} x' &= \lg x' + \lg \sin 1' \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x^m &= \lg x^m + \lg \sin 1^m \\ \lg \operatorname{tg} x^m &= \lg x^m + \lg \sin 1^m \end{aligned} \right\}$$

и даже

$$\lg \sin x^o = \lg x^o + \lg \sin 1^o.$$

При этом $\lg x$ берется от x , как от числа, выражающего данный угол в градусных единицах или в единицах часовых, а $\lg \sin 1''$, $\lg \sin 1^s$ и т. д. берутся с округлением до положенного числа знаков из каких-либо таблиц логарифмов. Приведем для справок эти последние логарифмы:

$$\lg \sin 1'' = 4.68557487 - 10,$$

$$\lg \sin 1^s = 5.86166613 - 10,$$

$$\lg \sin 1' = 6.463726 - 10,$$

$$\lg \sin 1^m = 7.639816 - 10,$$

$$\lg \sin 1^o = 8.24186 - 10.$$

Пределы, в которых можно пользоваться только что приведенными формулами при вычислениях с той или с другой точностью, примерно совпадают с указанными в табличках 1 и 2.

Так как $\lg \sin x$ и $\lg \operatorname{tg} x$ для малых углов очень быстро возрастают, так что интерполяция становится очень затруднительна или даже невозможна, то для этих функций прибегают часто к сокращению табличного интервала.

Другой прием состоит в разложении функций в ряды и вычислении с их помощью так называемых логарифмических поправок.

Возьмем из формул (39) разложения $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\cos x$. Сохраняя всюду два первых члена и вынося, где возможно, x за скобку, можно переписать

их в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) \\ \operatorname{tg} x &= x \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{I})$$

Здесь x выражено в отвлеченных мерах. Выражая x в градусных секундах и беря натуральные логарифмы от выражений (I), получим:

$$\left. \begin{aligned} \ln \sin x &= \ln x'' + \ln \sin 1'' + \ln \left(1 - \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{6} \right) \\ \ln \operatorname{tg} x &= \ln x'' + \ln \sin 1'' + \ln \left(1 + \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{3} \right) \\ \ln \cos x &= \ln \left(1 - \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{II})$$

Как известно, в анализе даются следующие разложения для натурального логарифма:

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \end{aligned} \right\}. \quad (\text{a})$$

и

Разложим последние члены выражений (II) по этим формулам, ограничиваясь только первыми членами разложений (a). Таким образом, выражения (II) можем переписать:

$$\left. \begin{aligned} \ln \sin x &= \ln x'' + \ln \sin 1'' - \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{6} \\ \ln \operatorname{tg} x &= \ln x'' + \ln \sin 1'' + \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{3} \\ \ln \cos x &= -\frac{x''^2 \cdot \sin^2 1''}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III})$$

Если M —модуль десятичных логарифмов, то, как известно из анализа,

$$\lg_{10} x = M \cdot \ln x.$$

Таким образом, умножив левые и правые части равенств (III) почленно на M , получим:

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' - \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{6}, \\ \lg \operatorname{tg} x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' + \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{3}, \\ \lg \cos x &= -\frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{2}. \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IV})$$

Обозначим

$$\sigma(x) = \frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{6}.$$

Тогда, замечая, что

$$\frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{3} = 2\sigma(x),$$

а

$$\frac{x''^2 \cdot \sin^2 1'' \cdot M}{2} = 3\sigma(x),$$

равенства (IV) окончательно перепишем:

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' - \sigma(x) \\ \lg \operatorname{tg} x &= \lg x'' + \lg \sin 1'' + 2\sigma(x) \\ \lg \cos x &= -3\sigma(x) \end{aligned} \right\}. \quad (51)$$

Формулы (51) и суть так называемые формулы логарифмических поправок. Логарифмические поправки $\sigma(x)$ обыкновенно даются в единицах последнего логарифмического знака либо по аргументу x , либо по аргументу $\lg x''$; иногда же оба аргумента даются одновременно.

В таблицах логарифмов часто вместо $\sigma(x)$ даются величины S и T . Эти величины определяются формулами:

$$\begin{aligned} S &= \lg \sin 1'' - \sigma(x), \\ T &= \lg \sin 1'' + 2\sigma(x). \end{aligned}$$

С применением этих величин формулы (51) перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x &= \lg x'' + S, \\ \lg \operatorname{tg} x &= \lg x'' + T, \\ \lg \cos x &= S - T. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

В астрономии, где часто встречаются углы, выраженные в часовых единицах, применяются формулы

$$\left. \begin{aligned} \lg \sin x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s - \sigma(x^s), \\ \lg \operatorname{tg} x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s + 2\sigma(x^s), \\ \lg \cos x^s &= -3\sigma(x^s), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где

$$\sigma(x^s) = \frac{x^{s2} \cdot \sin^2 1^s \cdot M}{6}.$$

Вывод этих формул совершенно аналогичен выводу формул (51).

По формулам (51) и (53) находятся логарифмы функций по заданному углу. Для нахождения же угла по заданным функциям эти формулы придется переписать таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \lg x'' &= \lg \sin x - \lg \sin 1'' + \sigma(x''), \\ \lg x'' &= \lg \operatorname{tg} x - \lg \sin 1'' - 2\sigma(x'') \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} \lg x^s &= \lg \sin x - \lg \sin 1^s + \sigma(x^s), \\ \lg x^s &= \lg \operatorname{tg} x - \lg \sin 1^s - 2\sigma(x^s). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Пределы пользования логарифмическими поправками легко установить, исследуя величины остаточных членов разложений (IV). Можно считать, что при вычислении с семизначными логарифмами применение этих поправок допустимо для углов до $2\frac{1}{2}^\circ$, при шестизначном вычислении — до 4° и при пятизначном — до 7° .

Глава VI

ПЛОЩАДЬ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. СФЕРИЧЕСКИЙ ИЗБЫТОК

§ 31. Площадь поверхности сферического треугольника

Лемма. Площадь поверхности сферического двугульника АМА'N (черт. 50) равняется удвоенной площади большого круга, умноженной на отношение угла этого двугульника А к двум прямым углам.

Обозначим через S_A площадь поверхности сферического двуугольника, через R — радиус данной сферы. Тогда лемму можно записать следующей формулой:

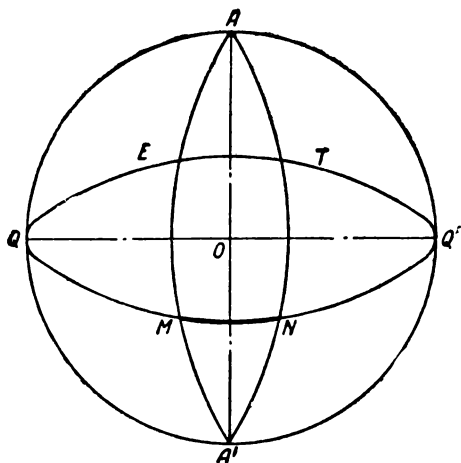
$$S_A = 2\pi R^2 \cdot \frac{A}{180^\circ}.$$

Доказательство. Очевидно, площадь поверхности сферического двуугольника $АМА'N$ так относится к площади всего шара, как дуга MN , для которой вершина A является полюсом и которая заключена между сторонами двуугольника, к длине окружности большого круга $QMNQ'TE$, т. е.

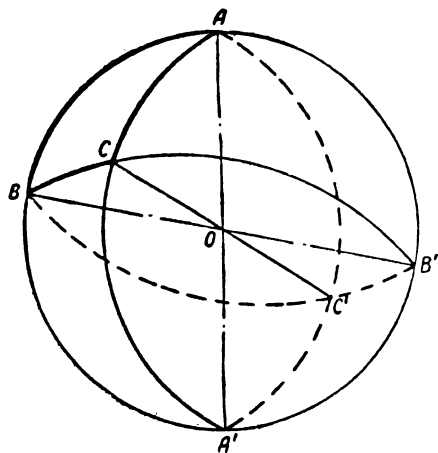
$$S_A : 4\pi R^2 = \cup MN : 2\pi R;$$

или, выражая дугу MN и окружность $QMNQ'TE$ в градусах и помня, что дуга MN является мерой угла A , т. е. что $\cup MN = A$,

$$S_A : 4\pi R^2 = A : 360^\circ.$$



Черт. 50



Черт. 51

Отсюда, решая пропорцию, находим:

$$S_A = \frac{4\pi R^2 \cdot A}{360^\circ}$$

или

$$S_A = 2\pi R^2 \cdot \frac{A}{180^\circ}. \quad (56)$$

Следует помнить, что в этой формуле угол A выражен в градусах ($^\circ$).

Теорема. Площадь поверхности сферического треугольника ABC (черт. 51) равняется площади большого круга, умноженной на отношение сферического избытка к двум прямым углам.

Обозначим $\triangle$ площадь треугольника ABC ; тогда теорема запишется в виде формулы:

$$\triangle = \pi R^2 \frac{\epsilon}{180^\circ}.$$

Доказательство. Продолжим каждую из сторон сферического треугольника ABC до полной окружности большого круга и отметим (черт. 51) точки их взаимного пересечения A' , B' и C' , соответственно диаметрально противоположные его вершинам A , B и C .

Таким образом, мы на сфере получим двуугольники

$$\begin{aligned} S_A &= ABA'C, \\ S_B &= BCB'A, \\ S_C &= CA'C'B', \end{aligned}$$

а также сферический треугольник $A'C'B'$, симметричный с данным треугольником ABC . Симметричность этих треугольников вытекает из равенства и неодинакового расположения их сторон, так как на основании чертежа легко доказать, что

$$\begin{aligned}A'B' &= AB, \\ B'C' &= BC, \\ C'A' &= CA.\end{aligned}$$

Так как симметричные треугольники равновелики, то, употребляя для обозначения равновеликости знак равенства, можем записать:

$$A'B'C' = ABC. \quad (a)$$

Представим каждый из двугульников S_A , S_B и S_C , как сумму двух треугольников:

$$\left. \begin{aligned}S_A &= ABA'C = ABC + BCA' = 2\pi R^2 \frac{A}{180^\circ} \\ S_B &= BCB'A = ABC + CAB' = 2\pi R^2 \frac{B}{180^\circ} \\ S_C &= CA'C'B' = A'B'C' + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{C}{180^\circ}.\end{aligned} \right\}, \quad (б)$$

Последнее равенство, в силу соотношения (а), можно переписать так:

$$S_C = CA'C'B' = ABC + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{C}{180^\circ}. \quad (в)$$

Складывая теперь почленно равенства (б) и (в), имеем:

$$S_A + S_B + S_C = 3ABC + BCA' + CAB' + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{A+B+C}{180^\circ}; \quad (г)$$

но

$$ABC + BCA' + CAB' + B'A'C = 2\pi R^2,$$

так как эти треугольники своей площадью заполняют половину сферы. С другой стороны, как известно,

$$A + B + C = 180^\circ + \epsilon,$$

где ϵ — сферический избыток треугольника ABC [см. § 8, форм. (10)]. Таким образом, равенство (г) можно переписать так:

$$2ABC + 2\pi R^2 = 2\pi R^2 \cdot \frac{180^\circ + \epsilon}{180^\circ},$$

или

$$2ABC + 2\pi R^2 = 2\pi R^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{180^\circ} \right),$$

откуда, обозначая площадь треугольника ABC через $\triangle$, получаем:

$$\triangle = \pi R^2 \cdot \frac{\epsilon}{180^\circ}, \quad (57)$$

что и требовалось доказать. При этом сферический избыток ϵ должен быть выражен, очевидно, в градусах.

Следствие. *Сферический избыток пропорционален площади сферического треугольника.*

Доказательство. Из формулы (57) имеем

$$\epsilon = \frac{180^\circ}{\pi R^2} \cdot \triangle. \quad (58)$$

Написанное равенство доказывает предыдущее положение, так как дробь $\frac{180^\circ}{\pi R^2}$, являющаяся в формуле (58) коэффициентом пропорциональности, есть для данной сферы величина постоянная.

У треугольника с малыми сторонами, площадь которого весьма мала по сравнению с поверхностью сферы, сферический избыток также есть величина малая. Тогда его удобнее выражать не в градусах ($^{\circ}$), а в секундах ($''$), т. е. дробь $\frac{180^{\circ}}{\pi R^2}$ следует заменить выражением $\frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi R^2}$.

Таким образом формула (58) для треугольника с малыми сторонами переписывается:

$$\epsilon'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi R^2} \cdot \Delta.$$

Однако выражение $\frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi}$ есть не что иное, как число секунд в радиане, т. е. ρ'' .

Следовательно, формулу (58) можно переписать так:

$$\epsilon'' = \frac{\rho''}{R^2} \Delta. \quad (58')$$

Обозначая $\frac{\rho''}{2R^2}$ через f , т. е. полагая

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}, \quad (59)$$

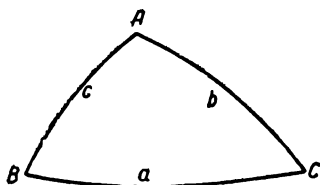
для треугольника с малыми сторонами будем окончательно иметь:

$$\epsilon'' = 2f \Delta, \quad (60)$$

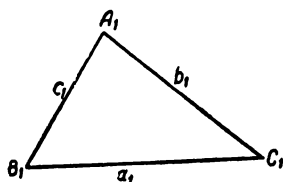
где ϵ'' и f выражены в градусных секундах ($''$).

§ 32. Теорема о сферическом треугольнике с малыми сторонами

Пусть дан сферический треугольник ABC , стороны которого весьма малы по сравнению с радиусом сферы R (черт. 52). Для такого треугольника справедлива следующая **теорема Лежандра**.



Черт. 52



Черт. 53

Если построить плоский треугольник $A_1B_1C_1$ (черт. 53), у которого все три стороны соответственно равны трем выпрямленным сторонам сферического, то углы его с весьма малой погрешностью, порядка $\left(\frac{1}{R}\right)^4$, можно принять соответственно равными углам сферического треугольника ABC , уменьшенным на одну треть сферического избытка.

Обозначим стороны треугольника $A_1B_1C_1$ буквами a_1 , b_1 и c_1 соответственно. По условию теоремы

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{a_1}{R} \\ b &= \frac{b_1}{R} \\ c &= \frac{c_1}{R} \end{aligned} \right\}, \quad (a)$$

где a , b и c — стороны сферического треугольника ABC в отвлеченной мере (в радианах).

Принимая, как обычно,

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

и

$$p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1),$$

на основании равенств (а) будем, очевидно, иметь

$$p = \frac{p_1}{R}. \quad (б)$$

Обозначая, по предыдущему, площадь треугольника ABC через $\triangle$ и аналогично площадь треугольника $A_1B_1C_1$ через $\triangle_1$, по известной формуле, можем записать:

$$\triangle_1 = \sqrt{p_1(p_1 - a_1)(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}. \quad (в)$$

Для доказательства теоремы найдем с точностью до малых третьего порядка включительно относительно $\frac{1}{R}$ разность каких-либо соответствующих углов плоского и сферического треугольников, например A_1 и A . Для этого сначала найдем с указанной выше точностью выражение для $\sin \frac{A_1 - A}{2}$.

Очевидно, имеем

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \sin \frac{A_1}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{A_1}{2} \sin \frac{A}{2}.$$

Входящие в эту формулу синусы и косинусы половинных углов треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC выразим по известным формулам полупериметра плоской и сферической тригонометрии [см. § 23, форм. (24) и (25)], а именно:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A_1}{2} &= \sqrt{\frac{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}{b_1 c_1}}, \\ \cos \frac{A_1}{2} &= \sqrt{\frac{p_1(p_1 - a_1)}{b_1 c_1}}, \\ \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1 - b_1}{R} \sin \frac{p_1 - c_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \sin \frac{c_1}{R}}}, \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1}{R} \sin \frac{p_1 - a_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \sin \frac{c_1}{R}}}. \end{aligned}$$

Таким образом получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A_1 - A}{2} &= \sqrt{\frac{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}{b_1 c_1}} \cdot \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1}{R} \sin \frac{p_1 - a_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \sin \frac{c_1}{R}}} - \\ &- \sqrt{\frac{p_1(p_1 - a_1)}{b_1 c_1}} \cdot \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1 - b_1}{R} \sin \frac{p_1 - c_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \sin \frac{c_1}{R}}}; \end{aligned}$$

или, перемножая радикалы и вынося общие множители за скобку,

$$\begin{aligned} \sin \frac{A_1 - A}{2} &= \frac{1}{\sqrt{b_1 c_1 \sin \frac{b_1}{R} \sin \frac{c_1}{R}}} \left[\sqrt{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1) \sin \frac{p_1}{R} \sin \frac{p_1 - a_1}{R}} - \right. \\ &- \left. \sqrt{p_1(p_1 - a_1) \sin \frac{p_1 - b_1}{R} \sin \frac{p_1 - c_1}{R}} \right]. \end{aligned}$$

Синусы малых дуг $\frac{c_1}{R}$, $\frac{c_1}{R}$, $\frac{p_1}{R}$, $\frac{p_1 - a_1}{R}$, $\frac{p_1 - c_1}{R}$ разложим в ряд [см. § 29, первую из формул (39)]. При этом мы, согласно условию, будем сохранять только члены третьего порядка относительно $\frac{1}{R}$.

Таким образом, мы будем иметь:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \frac{1}{\sqrt{b_1 c_1 \left(\frac{b_1}{R} - \frac{b_1^3}{6R^3} \right) \left(\frac{c_1}{R} - \frac{c_1^3}{6R^3} \right)}} \times \\ \times \left\{ \sqrt{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1) \left(\frac{p_1}{R} - \frac{p_1^3}{6R^3} \right) \left[\frac{p_1 - a_1}{R} - \frac{(p_1 - a_1)^3}{6R^3} \right]} - \right. \\ \left. - \sqrt{p_1(p_1 - a_1) \left[\frac{p_1 - b_1}{R} - \frac{(p_1 - b_1)^3}{6R^3} \right] \left[\frac{p_1 - c_1}{R} - \frac{(p_1 - c_1)^3}{6R^3} \right]} \right\}.$$

Вынесем общих множителей за скобки и из-под знака радикала, а также сократим числителя и знаменателя дроби перед фигурной скобкой на $\frac{1}{R}$:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \\ = \frac{\sqrt{p_1(p_1 - a_1)(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}}{b_1 c_1 \sqrt{\left(1 - \frac{b_1^2}{6R^2} \right) \left(1 - \frac{c_1^2}{6R^2} \right)}} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{p_1^2}{6R^2} \right) \left[1 - \frac{(p_1 - a_1)^2}{6R^2} \right]} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left[1 - \frac{(p_1 - b_1)^2}{6R^2} \right] \left[1 - \frac{(p_1 - c_1)^2}{6R^2} \right]} \right\}.$$

Заменим радикал в числителе дроби перед фигурной скобкой на основании формулы (в) и перемножим двучлены в скобках, стоящие под остальными радикалами. При умножении в произведении будем сохранять только члены до 3-го порядка малости включительно.

После этих преобразований у нас получится:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \frac{\Delta_1}{b_1 c_1 \sqrt{1 - \frac{b_1^2 + c_1^2}{6R^2}}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{p_1^2 + (p_1 - a_1)^2}{6R^2}} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 - \frac{(p_1 - b_1)^2 + (p_1 - c_1)^2}{6R^2}} \right\}.$$

Представляя корни как степени $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} \right)$ и разлагая их по биному Ньютона в ряд, сохраняя при этом, как и раньше, только члены до 3-го порядка включительно, после небольших упрощений найдём:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \frac{\Delta_1}{b_1 c_1} \left(1 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{12R^2} \right) \frac{(p_1 - b_1)^2 + (p_1 - c_1)^2 - p_1^2 - (p_1 - a_1)^2}{12R^2}.$$

Числитель последней дроби преобразуем отдельно:

$$(p_1 - b_1)^2 + (p_1 - c_1)^2 - p_1^2 - (p_1 - a_1)^2 = \\ = -(2p_1 - b_1)b_1 + (2p_1 - a_1 - c_1)(a_1 - c_1) = -(a_1 + c_1)b_1 + b_1(a_1 - c_1) = \\ = -a_1 b_1 - b_1 c_1 + a_1 b_1 - b_1 c_1 = -2b_1 c_1.$$

Следовательно, можем переписать:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = \frac{\Delta_1}{b_1 c_1} \left(1 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{12R^2} \right) \cdot \frac{-2b_1 c_1}{12R^2},$$

или после сокращения:

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = -\Delta_1 \left(1 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{12R^2} \right) \cdot \frac{1}{6R^2},$$

или, с положенной точностью,

$$\sin \frac{A_1 - A}{2} = -\frac{\Delta_1}{6R^2}.$$

Так как угол $\frac{A_1 - A}{2}$ есть величина малая, то, разлагая $\sin \frac{A_1 - A}{2}$ в ряд с прежней точностью, будем иметь

$$\frac{A_1 - A}{2} = -\frac{\Delta_1}{6R^2}$$

или

$$A_1 - A = -\frac{\Delta_1}{3R^2},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\Delta_1}{3R^2} \\ B_1 &= B - \frac{\Delta_1}{3R^2} \\ C_1 &= C - \frac{\Delta_1}{3R^2} \end{aligned} \right\} \text{ и аналогично} \quad (г)$$

Складывая почленно эти три равенства, получаем:

$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C - \frac{\Delta_1}{R^2}. \quad (д)$$

Но $A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ$, как сумма углов плоского треугольника, а $A + B + C = 180^\circ + \epsilon$, как сумма углов сферического треугольника. Следовательно, равенство (д) переписется:

$$180^\circ = 180^\circ + \epsilon - \frac{\Delta_1}{R^2},$$

т. е.

$$\frac{\Delta_1}{R^2} = \epsilon. \quad (е)$$

Внося выражение (е) в формулы (г), можем последние переписать окончательно так:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{1}{3} \epsilon \\ B_1 &= B - \frac{1}{3} \epsilon \\ C_1 &= C - \frac{1}{3} \epsilon \end{aligned} \right\}, \quad (61)$$

чем и доказывается теорема.

Следствие 1. *Сферический треугольник с малыми сторонами можно с весьма большой точностью при решении заменить, не изменяя длины его сторон, плоским с углами, уменьшенными на одну треть сферического избытка.*

Следствие 2. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с той же самой степенью точности можно рассматривать как равновеликие, т. е. полагать*

$$\Delta = \Delta_1.$$

Доказательство. На основании формулы (е) имеем

$$\epsilon = \frac{\Delta_1}{R^2}. \quad (е')$$

В этой формуле сферический избыток выражен в отвлеченной мере. Чтобы выразить его в градусных секундах, достаточно правую и левую части равенства (е') умножить на число секунд в радиане, т. е. на $\rho'' = 206265''$.

Тогда формула (ϵ') примет вид:

$$\epsilon'' = \frac{\Delta_1 \rho''}{R^2}.$$

Но по формуле (58') предыдущего параграфа мы имели

$$\epsilon'' = \frac{\rho''}{R^2} \cdot \Delta.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_1 \rho''}{R^2} = \frac{\rho''}{R^2} \cdot \Delta,$$

т. е.

$$\Delta_1 = \Delta. \quad (\text{ж})$$

§ 33. Вычисление сферического избытка треугольника с малыми сторонами

В высшей геодезии при вычислении сетей триангуляции I класса для решения треугольников на земной поверхности прибегают к следующему приему.

Малую часть поверхности земного сфероида, занимаемую данным треугольником ABC , принимают за часть сферы с радиусом R , где $R = \frac{1}{3}(R_a + R_b + R_c)$, а R_a , R_b и R_c — средние значения радиуса кривизны поверхности земного сфероида в каждой из вершин треугольника ABC . Эти величины, в свою очередь, как это излагается в курсе высшей геодезии, вычисляются по формуле

$$R = \sqrt{MN},$$

где M и N — главные радиусы кривизны сфероида в данной точке.

При решении треугольников в сетях низших классов часто R принимают постоянным для целой зоны.

Таким образом, треугольник на земной поверхности рассматривается как сферический. Так как стороны его весьма малы по сравнению с радиусом Земли, то к нему может быть применена теорема Лежандра, т. е. этот треугольник после уменьшения каждого из его углов на $\frac{1}{3}\epsilon$ можно решать как плоский *).

Хотя все углы треугольника ABC известны из геодезических измерений, однако, вычислять сферический избыток по формуле $\epsilon = (A + B + C) - 180^\circ$ не представляется возможным, так как сумма непосредственно измеренных углов отличается от $(180^\circ + \epsilon)$ вследствие неизбежных погрешностей измерения этих углов.

Поэтому для вычисления пользуются формулой (60), которую на основании следствия 2 теоремы Лежандра (см. § 32) можно переписать в виде:

$$\epsilon'' = 2f\Delta_1, \quad (60')$$

т. е. заменив по равенству (ж) предыдущего параграфа Δ на Δ_1 .

Так как ϵ'' есть величина малая, то при вычислении площади треугольника ABC , принимаемого за плоский, стороны и углы этого треугольника нужно знать лишь приближенно. Для этого могут быть взяты значения их, получаемые из предварительной обработки триангуляции, т. е. до введения поправок за редукции, за приведения и пр., так как это вычисление достаточно вести с 4 десятичными знаками.

Здесь могут быть два случая:

I. В треугольнике ABC известны две стороны a_1 и b_1 и угол между ними C_1 или C (что в пределах точности вычисления безразлично). Тогда имеем для площади треугольника

$$\Delta_1 = \frac{a_1 b_1 \sin C}{2},$$

*) Треугольники с малыми сторонами можно решать также по способу аддитантов, Об этом см. § 41.

и следовательно, формула (60') перепишется:

$$\epsilon'' = f \cdot a_1 b_1 \sin C. \quad (62)$$

Тот же самый результат может быть получен непосредственно с помощью первой формулы Каньоли [см. § 26 форм. (36)], т. е. формулы

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C.$$

Так как ϵ , a , b и c суть величины малые, то с достаточной точностью мы можем синусы и косинусы этих малых дуг заменить первыми членами разложений в ряды; положив также

$$a = \frac{a_1}{R} \quad \text{и} \quad b = \frac{b_1}{R},$$

представим нашу формулу в виде:

$$\frac{\epsilon}{2} = \frac{a_1}{2R} \cdot \frac{b_1}{2R} \cdot \sin C$$

или, после сокращения,

$$\epsilon = \frac{a_1 b_1 \sin C}{2R^2}.$$

Здесь ϵ получилось в радианах; чтобы получить его в секундах, умножим правую и левую часть равенства на ρ'' . Тогда, пользуясь обозначением формулы (59), опять придем к формуле (62), т. е. снова получим:

$$\epsilon'' = f \cdot a_1 b_1 \sin C.$$

II. В треугольнике ABC известна сторона a_1 и прилежащие к ней углы B и C . Тогда

$$\triangle_1 = \frac{a_1^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}$$

и

$$\epsilon'' = f \frac{a_1^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin (B + C)}. \quad (63)$$

Во всех случаях f выражается здесь формулой (59), т. е.

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}.$$

В зависимости от географического положения треугольника на земной поверхности величина R , а следовательно, и f меняются. Для облегчения вычисления f имеются специально составленные таблицы, из которых эта величина выбирается по аргументу средней широты треугольника ABC .

Глава VII

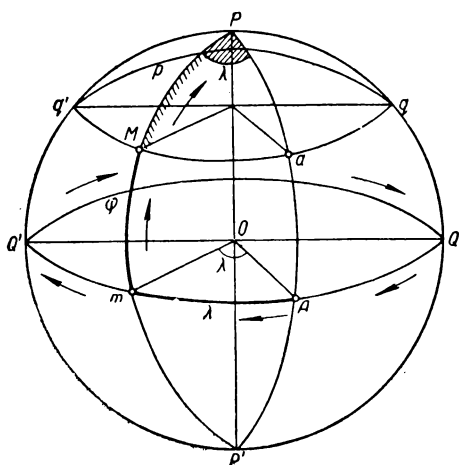
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ

§ 34. Первая система сферических координат (полярная)

Пусть нам необходимо определить положение точки M на поверхности сферы (черт. 54).

Решая такую же задачу на плоскости, мы проводим две взаимно перпендикулярные прямые, называемые осями координат, и относительно этих осей определяем положение точки. На сфере мы можем взять для этой цели две окружности больших кругов, взаимно перпендикулярные друг другу. Проведем на нашей сфере (черт. 54) прежде всего большой круг $Q A Q'$, который будет

играть на сфере роль, аналогичную роли оси X на плоскости, и условимся называть его основным кругом системы. Отметим геометрический полюс круга QAQ' , т. е. точку P , и будем называть его полюсом системы. Чтобы определить положение точки M относительно основного круга системы QAQ' , опустим сферический перпендикуляр из точки M на этот большой



Черт. 54

дугу $PM = p$, которую называют полярным расстоянием точки M . Широта и полярное расстояние связаны между собой простым соотношением;

$$\varphi + p = 90^\circ.$$

Полярные расстояния отсчитываются от полюса системы P по направлению к точке P' от 0° до 180° .

Так же, как и на плоскости, для определения положения точки на сфере одной координаты недостаточно. На плоскости одна координата определяет геометрическое место точек, а именно, прямую, параллельную одной из осей координат. Посмотрим, что мы имеем в случае сферы. Проведем через точку M плоскость, параллельную плоскости большого круга QAQ' ; в сечении со сферой эта плоскость даст малый круг qMq' , параллельный большому кругу QAQ' . Таким образом, по самому построению все точки малого круга qMq' будут лежать на одном и том же сферическом расстоянии от большого круга QAQ' , т. е. мы будем иметь:

$$Mm = \cup Aa = \cup Qq = \cup Q'q' = \text{и т. д.} = \varphi,$$

и, следовательно, все точки малого круга qMq' имеют одну и ту же широту φ . Иначе говоря, одна координата на сфере, так же как и на плоскости, определяет не одну точку, а геометрическое место точек, а именно, в случае широты, малый круг на сфере, параллельный основному кругу QAQ' .

Чтобы получить вторую координату, поступаем следующим образом. Проведем прежде всего половину окружности большого круга $PaAP'$, которая будет сферическим перпендикуляром к большому кругу QAQ' , так как проходит через полюс этого круга, точку P (см. § 5, следствие 2). Эта полуокружность играет в нашей системе координат роль, аналогичную роли оси Y в декартовой системе координат на плоскости. Мы будем условно называть ее главным кругом системы. Точка пересечения обоих кругов, основного и главного, точка A , соответствует началу координат, точке O на плоскости; мы назовем ее главной или начальной точкой системы.

Вторую координату можно геометрически выразить несколькими различными способами. Дадим ей такое определение, из которого вытекают бы все остальные. Вторая координата называется долготой и обозначается буквою λ .

Долгота есть двугранный угол между плоскостью главного круга системы и плоскостью круга широты определяемой точки M , т. е. двугранный угол $APP'M$. Так как двугранный угол измеряется своим линейным углом, то также

$$\angle AOm = \lambda.$$

Той же величине равняется и дуга Am , на которую этот центральный угол опирается, т. е.

$$\cup Am = \lambda.$$

Исходя из этого геометрического образа, можно определить долготу как сферическое расстояние от главной точки A до круга широты PM' , измеренное по основному кругу. Далее той же величине λ равняется еще сферический угол между главным кругом и кругом широты с вершиной в полюсе системы, т. е.

$$\text{сф. } \angle APM = \lambda.$$

С точки зрения аналитической геометрии на сфере подходящими будут два последние способа выражения долготы, т. е. с помощью дуги основного круга QAQ' и с помощью сферического угла при полюсе системы. Имея в виду первый из них, скажем, что долготы отсчитываются от главной точки системы A в одних случаях по ходу часовой стрелки, как на черт. 54, в других случаях — наоборот, против хода часовой стрелки, по усмотрению исследователя, в обоих случаях от 0° до 360° . Иногда также счет ведется в обе стороны от точки A , от 0° до 180° , причем в одну какую-либо сторону они считаются положительными, а в противоположную — отрицательными. Системы, в которых долготы возрастают, глядя из полюса системы, по ходу часовой стрелки, называются правыми, в обратном случае — левыми.

Итак, если взять, в качестве сферических координат, дуги mM и Am , т. е. φ и λ , выражая обе величины дугами, то выявляется некоторое внешнее сходство между рассматриваемой сферической системой координат и прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. Однако если вместо широты φ взять полярное расстояние p , т. е. дугу PM , а долготу λ выразить сферическим углом APM , то обнаруживается большое внутреннее сродство этой сферической системы координат с полярною системою координат на плоскости. При этом полюс сферической системы P соответствует полюсу полярной системы координат, главный круг сферической системы PAP' играет роль, аналогичную полярной оси, дуга круга широты $PM = p$ может быть названа сферическим радиусом-вектором точки M , долгота λ соответствует полярному углу или амплитуде.

Отметим также, что описанная нами система сферических координат может быть получена из системы полярных координат (в пространстве *), если положить $p = \text{const}$ или, в частном случае, $p = 1$.

Очевидно, ее можно с полным правом назвать полярной системой сферических координат.

Кроме этой системы координат, на сфере, так же, как и на плоскости, может быть построено множество других систем, одну из которых мы рассмотрим ниже в § 37.

§ 35. Преобразование полярных сферических координат

Система полярных сферических координат будет геометрически вполне определена, если даны полюс системы и главный круг и указано направление возрастания долгот. Полюс системы P определяет основной круг. Чтобы определить главный круг системы, необходимо и достаточно указать какие-либо две точки, не лежащие на одном и том же диаметре, через которые он про-

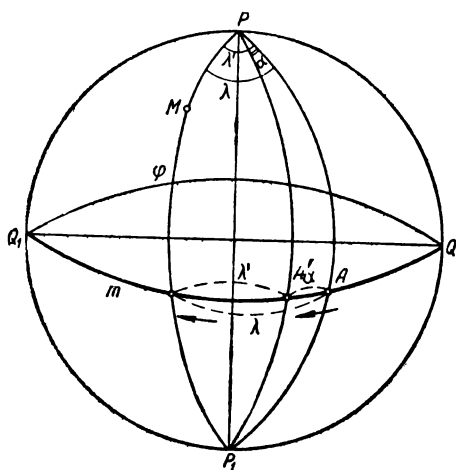
*) О полярных координатах в пространстве см., например, Б. К. Млодзеевский, Основы аналитической геометрии в пространстве, изд. 2-е, Москва, 1911 г., стр. 12 и след.

ходит. Одной из этих точек, естественно, является полюс системы P . Другую точку можно выбрать произвольно, однако выгоднее всего для этой цели брать главную точку системы A . Ввиду этих соображений мы будем в дальнейшем определять такую систему координат точками P и A и будем это обозначать сокращенно символом $[PA]$.

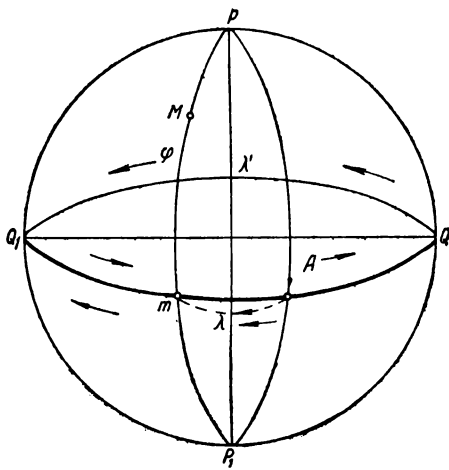
Мы рассмотрим сперва по отдельности преобразование главного круга, преобразование направления счета долгот и преобразование полюса, а затем общие преобразования в разных комбинациях.

1. Преобразование главного круга

Пусть полюс системы P и направление возрастания долгот остаются без изменения, а главная точка A (черт. 55) перемещается, передвигаясь на дугу $AA' = \alpha$ в точку A' . Вместе с этим главный круг переходит в положение $PA'P_1$, поворачиваясь в направлении возрастания долгот на угол $APA' = \alpha$. Будем здесь и в дальнейшем обозначать координаты в системе, полученной после преобразования, буквами φ' и λ' .



Черт. 55



Черт. 56

Тогда для всякой точки M , как это непосредственно ясно из чертежа 55, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \lambda' &= \lambda - \alpha. \end{aligned} \right\}$$

И наоборот, старые координаты через новые выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi', \\ \lambda &= \lambda' + \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом в данном случае широта φ любой точки M остается без изменения, а долгота уменьшается на дугу (или угол) α .

2. Преобразование направления счета долгот

Пусть полюс системы P и главная точка A остаются без изменения, а направление возрастания долгот меняется на обратное (черт. 56).

Тогда будем иметь:

$$\lambda = \cup Am, \text{ а } \lambda' = \cup AQQ_1m,$$

широта же φ остается без изменения. Формулами это можно записать:

$$\varphi' = \varphi, \text{ а } \lambda' = 360^\circ - \lambda,$$

или, иначе, применяя отрицательные долготы,

$$\lambda' = -\lambda.$$

и наоборот

$$\varphi = \varphi' \text{ и } \lambda = -\lambda'.$$

Итак, при преобразовании направления счета долгот долгота меняет свой знак на обратный.

3. Преобразование главного круга и направления счета долгот

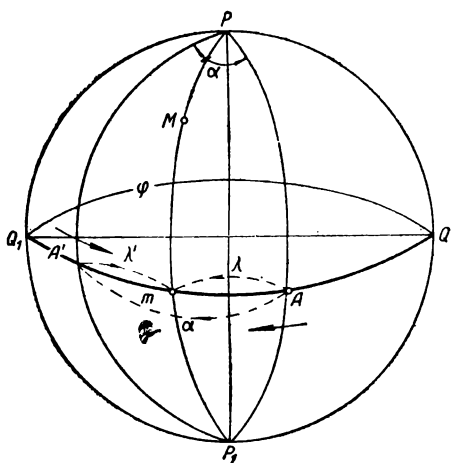
Пусть теперь точка A переходит в точку A' , и направление возрастания долгот в новой системе координат $[PA']$ противоположно направлению возрастания долгот в старой системе $[PA]$, а полюс системы остается неподвижным в точке P . Взяв какую-нибудь точку M и построив ее координаты в старой и в новой системах координат (черт. 57), находим

$$\varphi = \cup m M = \varphi',$$

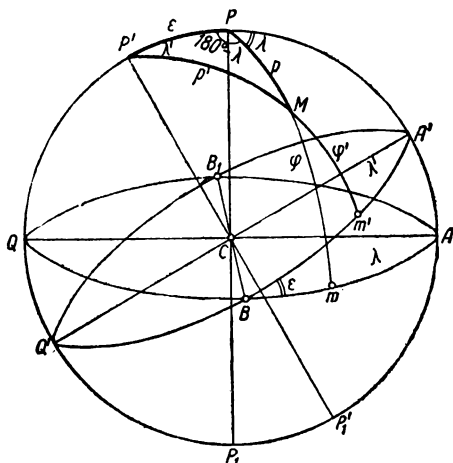
$$\lambda = \cup A m,$$

$$\lambda' = \cup A' m = \cup A A' - \cup A m = \alpha - \lambda,$$

причем буквою α обозначена дуга AA' , измеряющая перемещение главной точки системы из точки A в новое положение, т. е. в точку A' . Можно ска-



Черт. 57



Черт. 58

зать также, что на угол $\alpha = APA'$ мы поворачиваем систему $[PA]$ вокруг оси PP_1 . Вообще, преобразование главного круга есть, собственно говоря, не что иное, как поворот системы около прямой PP_1 , которую можно назвать поэтому геометрической (пространственной) осью системы (сравни § 4).

Итак, в этом случае

$$\varphi' = \varphi,$$

$$\lambda' = \alpha - \lambda,$$

и наоборот,

$$\varphi = \varphi',$$

$$\lambda = \alpha - \lambda'.$$

4. Преобразование полюса

Дана система координат $[PA]$ (черт. 58). Не поворачивая систему около ее геометрической оси, т. е. прямой PP_1 , и не изменяя направления возрастания долгот, т. е. положительного направления на основном круге AQ , перенесем полюс из точки P в точку P' , переместив его по большому кругу $APQP_1$ на дугу $PP' = \varepsilon$. Тогда ось системы займет положение $P'P'_1$, а основной круг системы AQ займет положение $A'Q'$, и мы будем иметь новую систему $[P'A']$. Построив для какой-нибудь точки M ее координаты

в старой и в новой системах, найдем:

$$\varphi = \sphericalangle mM, \quad p = \sphericalangle PM, \quad \lambda = \sphericalangle AM = \text{сф. } \angle APM;$$

$$\varphi' = \sphericalangle m'M, \quad p' = \sphericalangle P'M, \quad \lambda' = \sphericalangle A'M' = \text{сф. } \angle A'P'M.$$

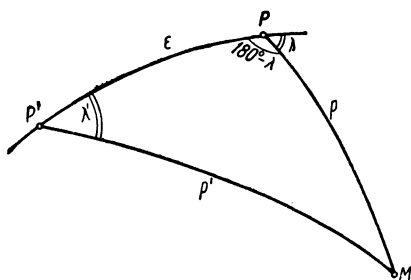
При этом мы получили сферический треугольник MPP' , вершинами которого служат данная точка M и полюсы P и P' старой и новой систем координат. Этот треугольник, который называется полярным треугольником точки M , изображен отдельно в более крупном масштабе на черт. 59. Из чертежей 58 и 59 мы видим, что стороны этого треугольника соответственно равны:

$$PM = p, \quad P'M = p' \quad \text{и} \quad PP' = \epsilon,$$

а два его угла

$$\angle PP'M = \lambda' \quad \text{и} \quad \angle P'PM = 180^\circ - \lambda.$$

Если нам даны p , λ и ϵ , то в полярном треугольнике нам известны две стороны и угол между ними (2-й случай решения косоугольных сферических треугольников, см. § 27). Решая его одним из указанных в § 27 способов, мы можем найти искомые координаты точки M в новой системе координат, т. е. p' и λ' . Так как здесь требуется определить только сторону и один из углов, то решение удобнее всего вести по основным формулам [§ 27, 2-й случай, решение 1)]. При вычислении на арифмометре рабочими будут формулы (см. там же, 2-й случай, решение 1а):



Черт. 59

$$\left. \begin{aligned} \cos p' &= \cos p \cos \epsilon - \sin p \sin \epsilon \cos \lambda \\ \operatorname{ctg} \lambda' &= \frac{\operatorname{ctg} p \sin \epsilon}{\sin \lambda} + \cos \epsilon \operatorname{ctg} \lambda \end{aligned} \right\}.$$

При вычислении по таблицам логарифмов удобнее всего воспользоваться так называемой астрономической системой формул (там же, 2-й случай, решение 1б), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \cos p' &= \cos p \cos \epsilon - \sin p \sin \epsilon \cos \lambda \\ \sin p' \sin \lambda' &= \sin p \sin \lambda \\ \sin p' \cos \lambda' &= \cos p \sin \epsilon + \sin p \cos \epsilon \cos \lambda \end{aligned} \right\}.$$

Продельвая с этими формулами все те преобразования, которые были указаны выше, т. е. деля вторую формулу на третью, а третью на первую, и вводя вспомогательный угол по формуле

$$\operatorname{ctg} M = \frac{\operatorname{ctg} p}{\cos \lambda}, \quad (\text{I})$$

после аналогичных упрощений получим рабочие формулы в таком виде:

$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{\operatorname{tg} \lambda \sin M}{\sin (\epsilon + M)}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{tg} p' = \frac{\operatorname{tg} (\epsilon + M)}{\cos \lambda'}. \quad (\text{III})$$

По формулам (I), (II) и (III) и можно вычислить новые координаты точки M по данным координатам ее в старой системе.

Для обратного перехода из того же треугольника для вычисления на арифмометре напишем формулы:

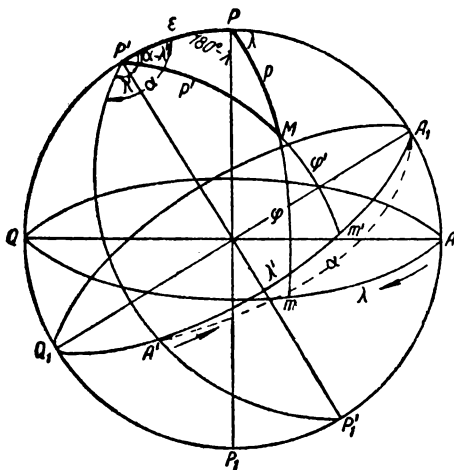
$$\left. \begin{aligned} \cos p &= \cos p' \cos \epsilon + \sin p' \sin \epsilon \cos \lambda', \\ \operatorname{ctg} \lambda &= \operatorname{ctg} \lambda' \cos \epsilon - \frac{\operatorname{ctg} p' \sin \epsilon}{\sin \lambda'}. \end{aligned} \right\}$$

у которого стороны и углы будут иметь прежние значения, кроме угла при точке P' , который будет равен разности углов α и λ' . Итак, запишем:
 для сторон: $PM = p$, $P'M = p'$, $PP' = \varepsilon$,
 а для углов: $\angle P'PM = 180^\circ - \lambda$ и $\angle PP'M = \alpha - \lambda'$.

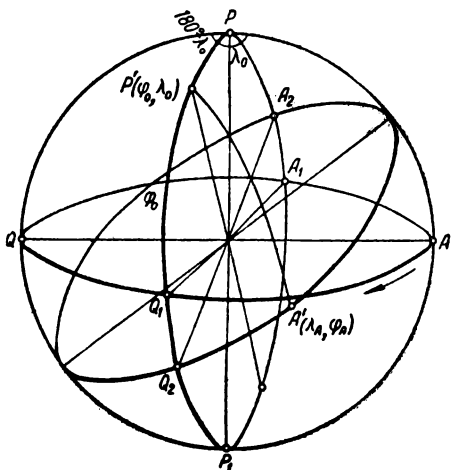
Ясно, что и в данном случае можно треугольник $PP'M$ решать по формулам, указанным для двух предыдущих случаев, только заменяя везде угол λ' разностью $(\alpha - \lambda')$.

7. Общий случай преобразования сферических координат

В общем случае положение новой системы сферических координат $[P'A']$ может быть определено координатами нового полюса P' и новой главной точки A' по отношению к старой системе координат $[PA]$. Обозначим координаты нового полюса P' в системе $[PA]$ φ_0 и λ_0 , а координаты новой главной точки A' в той же системе — φ_A и λ_A . Координаты нового полюса могут иметь какие угодно значения; координаты точки A' связаны только



Черт. 61



Черт. 62

условием, что расстояние ее от точки P' равно 90° . Это условие, как будет показано в следующем параграфе, аналитически выражается уравнением:

$$\cos(\lambda_0 - \lambda_A) = -\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_A,$$

где φ_0 , λ_0 , φ_A и λ_A имеют указанные значения.

Геометрически переход от системы $[PA]$ к системе $[P'A']$ может быть осуществлен следующим образом (черт. 62).

1. Повернем систему $[PA]$ около геометрической оси этой системы PP_1 в направлении, обратном направлению возрастания долгот в системе $[PA]$, т. е. для случая, изображенного на черт. 62, против хода часовой стрелки, до совпадения круга PAP_1 с продолжением дуги большого круга PP' , т. е. на угол $180^\circ - \lambda_0$. Тогда точка A переместится в точку A_1 , и большой круг PAP_1 займет положение PA_1P_1 , а полюс P останется на прежнем месте.

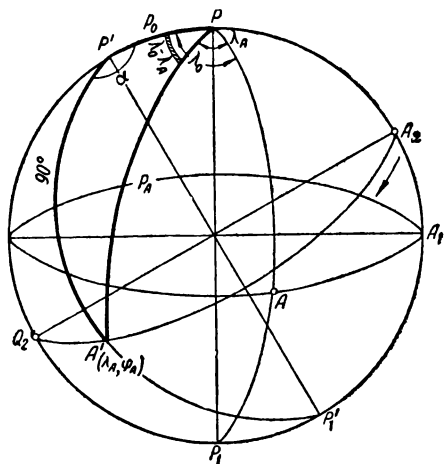
2. Перенесем теперь полюс P в точку P' . Тогда точка A_1 перейдет в точку A_2 , а основной круг AA_1QQ_1 займет положение A_2Q_2 . Перемещение полюса, т. е. дуга PP' , равняется, очевидно, полярному расстоянию полюса P' , иначе $\widehat{PP'} = p_0$, где $p_0 = 90^\circ - \varphi_0$.

3. Повернем, наконец, получившуюся после описанных преобразований переходную систему $[P'A_2]$ (см. также черт. 63) вокруг оси $P'P_1$ на некоторый угол α , по часовой стрелке, до совпадения точки A_2 с точкой A' и большого круга $P'A_2$ с большим кругом $P'A'$. Тогда полученная система и

будет новой системой $[P'A']$. Она будет вполне определена, если будет найден угол последнего поворота α и если будет дано направление возрастания долгот в этой системе. Для определения угла α соединим дугами больших кругов точку A' с полюсами P и P' и рассмотрим получившийся таким образом треугольник $PP'A'$ (см. черт. 63). В этом треугольнике сторона $PP' = p_0$, как это было уже указано выше, сторона $P'A' = 90^\circ$, так как A' лежит на большом круге A_2Q_2 , для которого точка P' является полюсом, а сторона $PA' = p_A = 90^\circ - \varphi_{A'}$, т. е. полярному расстоянию точки A' в системе $[PA]$; так как $\angle APA' = \lambda_A$ и $\angle APP' = \lambda_0$, то угол $A'PP' = \angle APP' - \angle APA' = \lambda_0 - \lambda_A$. Тогда из треугольника $PP'A'$ по теореме синусов найдем:

$$\sin \alpha = \sin p_A \sin (\lambda_0 - \lambda_A),$$

и, следовательно, угол α выражается очень просто через данные координаты точек P' и A' в старой системе. Таким образом, задача приводится к одному из двух предыдущих случаев, а именно, к 5-му, если направление возрастания долгот в системе $[P'A']$ совпадает с таким же направлением в системе $[PA]$, и к 6-му, если оно ему противоположно. В самом деле, построив полярный треугольник какой-нибудь точки M , подобно изображенному на черт. 59, в первом случае найдем, что угол при точке P' будет равен $\alpha - \lambda'$, а во втором $\alpha + \lambda'$, где λ' — долгота точки M в системе $[P'A']$. Остальные элементы полученного полярного треугольника будут иметь те же значения, что и на черт. 59.



Черт. 63

§ 36. Некоторые задачи аналитической геометрии на сфере

Задача 1. Дана точка $M(\varphi, \lambda)$; найти координаты φ', λ' точки M' , диаметрально противоположной точке M .

Построив точки M и M' , лежащие на концах одного и того же диаметра MM' , и проведя большой круг $MPm'M'P_1m$, из черт. 64 усматриваем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frown mM, \quad \lambda = \frown Am; \\ \varphi' &= \frown m'M', \quad \lambda' = \frown AmQm' = \frown Am + \frown Qm' = 180^\circ + \lambda. \end{aligned}$$

Так как дуги mM и $m'M'$ равны по величине, но противоположны по направлению, то

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= -\varphi, \\ \lambda' &= \lambda \pm 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Задача 2. Даны точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$; найти кратчайшее сферическое расстояние*) между ними s .

Построив координаты точек M_1 и M_2 (черт. 65) и проведя дугу большого круга M_1M_2 , замечаем, что задача сводится к вычислению стороны $M_1M_2 = s$ треугольника M_1M_2P , у которого:

$$\text{сторона } PM_1 = p_1 = 90^\circ - \varphi_1,$$

$$\text{сторона } PM_2 = p_2 = 90^\circ - \varphi_2,$$

*) Напомним, что сферическим расстоянием между двумя точками называется расстояние между ними, измеренное по поверхности сферы, по дуге большого круга (см. также § 1).

а противолежащий искомой стороне угол:

$$\angle M_1 P M_2 = \angle A P M_2 - \angle A P M_1 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

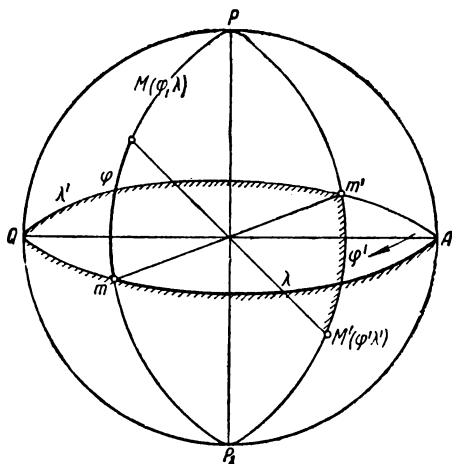
По формуле косинуса стороны [§ 10, форм. (11)] получаем:

$$\cos s = \cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (\text{II}')$$

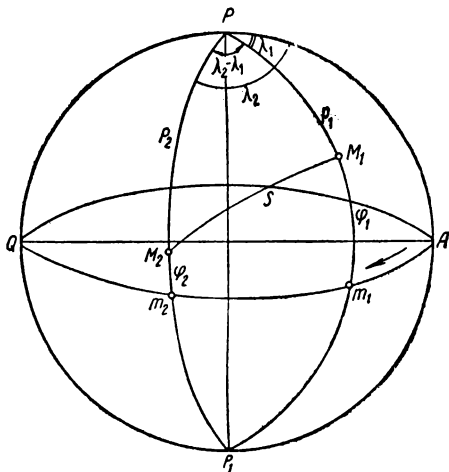
или

$$\cos s = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (\text{II})$$

Если, кроме расстояния s , необходимо найти еще и углы, которые дуга $M_1 M_2$ образует с меридианами $P M_1 P_1$ и $P M_2 P_1$, т. е. внутренние углы сферического треугольника $M_1 M_2 P$, так называемые прямой и обратный азимуты, то такая задача называется в геодезии обратной геодезической задачей на сфере. В этом случае приходится проводить полное решение сферического треугольника $M_1 M_2 P$ по двум его сторонам и углу между



Черт. 64



Черт. 65

ними. В геодезии обычно при этом пользуются аналогиями Непера. Таким образом решение выполняется так, как это указано в § 27, II случай, пункты 3 и 4.

Задача 3. Найти условие того, что две точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ лежат на сферическом расстоянии 90° . Если $s = 90^\circ$, то $\cos s = 0$; значит [см. (II')]

$$\cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

или

$$\cos (\lambda_2 - \lambda_1) = -\operatorname{ctg} p_1 \operatorname{ctg} p_2, \quad (\text{III}')$$

или иначе

$$\cos (\lambda_2 - \lambda_1) = -\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (\text{III})$$

Это и будет искомое условие.

Задача 4. Написать уравнение окружности малого круга, если его сферический радиус ρ и сферический центр лежат в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Обозначая буквами φ и λ текущие координаты точек окружности данного малого круга, запишем, что любая из этих точек лежит, согласно свойству окружности, на сферическом расстоянии ρ от сферического центра $C(\varphi_0, \lambda_0)$ этого круга, воспользовавшись для этой цели формулой (II) данного параграфа:

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0) = \cos \rho. \quad (\text{IV})$$

Формула (IV) и будет искомым уравнением окружности малого круга. Здесь уместно отметить, что применение метода координат на сфере позво-

ляет рассматривать не только большие круги и составленные из них фигуры, но и малые круги, а также, как увидим дальше, сферические эллипсы и гиперболы.

Задача 5. Найти уравнение окружности большого круга, полюс которого лежит в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Любая точка окружности большого круга от полюса этой окружности, согласно определению (см. § 4, теорема I), находится на сферическом расстоянии, равном 90° . Следовательно, на основании формулы (II) этого параграфа, будем иметь:

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0) = \cos 90^\circ,$$

где буквами φ и λ обозначены текущие координаты точек окружности данного большого круга. Так как $\cos 90^\circ = 0$, то после небольших преобразований получим:

$$\cos (\lambda - \lambda_0) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (V)$$

Это и будет уравнение окружности большого круга с полюсом в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Задача 6. Вывести уравнение окружности большого круга, проходящего через две данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$.

Обозначим буквами φ и λ текущие координаты точек окружности данного большого круга, а буквами φ_0 и λ_0 — координаты его полюса. Тогда уравнение этого круга можно, согласно формуле (V), написать в виде:

$$\cos (\lambda - \lambda_0) = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (a)$$

Так как точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$, по данному, лежат на этой окружности, то их координаты должны удовлетворять написанному уравнению, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \cos (\lambda_1 - \lambda_0) &= -\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_0 \\ \cos (\lambda_2 - \lambda_0) &= -\operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_0 \end{aligned} \right\}. \quad (б)$$

Исключив из соотношений (a) и (б) координаты полюса φ_0 и λ_0 , получим искомое уравнение окружности большого круга. Исключим сначала $\operatorname{tg} \varphi_0$; для этого разделим почленно уравнение (a) на каждое из соотношений (б); соответственно получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos (\lambda - \lambda_0)}{\cos (\lambda_1 - \lambda_0)} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1} \\ \frac{\cos (\lambda - \lambda_0)}{\cos (\lambda_2 - \lambda_0)} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_2} \end{aligned} \right\}. \quad (в)$$

Теперь раскроем косинусы разностей, стоящих в числителях и знаменателях дробей в левых частях равенств (в), и разделим числителя и знаменателя каждой из этих дробей на $\cos \lambda_0$; в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \lambda + \sin \lambda \operatorname{tg} \lambda_0}{\cos \lambda_1 + \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_0} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1}, \\ \frac{\cos \lambda + \sin \lambda \operatorname{tg} \lambda_0}{\cos \lambda_2 + \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \lambda_0} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_2}. \end{aligned}$$

Отсюда дважды определим $\operatorname{tg} \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_0 &= -\frac{\cos \lambda \operatorname{tg} \varphi_1 - \cos \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi}{\sin \lambda \operatorname{tg} \varphi_1 - \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi}, \\ \operatorname{tg} \lambda_0 &= -\frac{\cos \lambda \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi}{\sin \lambda \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi}. \end{aligned}$$

Иначе, с помощью детерминантов, это можно переписать так:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin \lambda & \sin \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{vmatrix}},$$

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = - \frac{\left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sin \lambda & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}.$$

Приравнивая друг к другу оба найденных выражения для $\operatorname{tg} \lambda_0$, получим уравнение большого круга, проходящего через две данные точки, в виде:

$$\frac{\left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sin \lambda & \sin \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{array} \right|} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sin \lambda & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}, \quad (\text{VI})$$

или иначе:

$$\left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \cos \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda & \sin \lambda_1 \\ \operatorname{tg} \varphi & \operatorname{tg} \varphi_1 \end{array} \right| = 0. \quad (\text{VI}')$$

Наконец, раскрывая детерминанты, выполняя умножение и делая различные несложные упрощения и преобразования, можем получить то же уравнение в следующей симметричной форме:

$$\operatorname{tg} \varphi \sin (\lambda_2 - \lambda_1) + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_2) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda_1 - \lambda) = 0. \quad (\text{VII})$$

Разрешив относительно $\operatorname{tg} \varphi$, можно также представить его в виде:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_2) - \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda - \lambda_1)}{\sin (\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (\text{VIII})$$

Задача 7. Дан большой круг, проходящий через две данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$; найти координаты его полюса.

Обозначим текущие координаты точек окружности данного большого круга буквами φ и λ , а координаты его полюса φ_0 и λ_0 .

Тогда, по предыдущему, уравнение этого круга можно написать в виде:

$$\cos (\lambda - \lambda_0) = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (\text{a})$$

Подставляя в него координаты данных точек M_1 и M_2 , получим:

$$\left. \begin{array}{l} \cos (\lambda_1 - \lambda_0) = - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_0 \\ \cos (\lambda_2 - \lambda_0) = - \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_0 \end{array} \right\}. \quad (\text{б})$$

Равенства (б) можно, очевидно, рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными φ_0 и λ_0 . Чтобы решить эту систему, разделим прежде всего первое из уравнений (б) на второе:

$$\frac{\cos (\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos (\lambda_2 - \lambda_0)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Далее, раскроем косинусы разностей в левой части и разделим числитель и знаменатель полученной таким образом дроби на $\cos \lambda_0$:

$$\frac{\cos \lambda_1 + \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_0}{\cos \lambda_2 + \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \lambda_0} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Из этого уравнения найдем $\operatorname{tg} \lambda_0$:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = - \frac{\cos \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1}, \quad (\text{IX})$$

что с помощью детерминантов можно переписать еще так:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = - \frac{\left| \begin{array}{cc} \cos \lambda_1 & \cos \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sin \lambda_1 & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right|}. \quad (\text{IX}')$$

Уравнения (IX) и (IX') выражают $\operatorname{tg} \lambda_0$ через тригонометрические функции координат данных точек. После того как λ_0 определено, можно по уравнениям (б) вычислить $\operatorname{tg} \varphi_0$ и притом дважды. Совпадение полученных для φ_0

значений послужит контролем вычислений. Уравнения (б) для этой цели перепишем так:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = - \frac{\cos (\lambda_1 - \lambda_0)}{\operatorname{tg} \varphi_1} = - \frac{\cos (\lambda_2 - \lambda_0)}{\operatorname{tg} \varphi_2}. \quad (\text{X})$$

Задача 8. Найти условие, при котором три данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$, $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ и $M_3(\varphi_3, \lambda_3)$ лежат на окружности одного и того же большого круга.

На основании формулы (VII) уравнение окружности большого круга, определяемого точками $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$, напишется:

$$\operatorname{tg} \varphi \sin (\lambda_2 - \lambda_1) + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_2) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda_1 - \lambda) = 0.$$

Если точка $M_3(\varphi_3, \lambda_3)$ лежит на той же окружности, то, подставив в это уравнение вместо текущих координат координаты точки M_3 , мы получим тождество, а именно:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda_1 - \lambda_3) + \operatorname{tg} \varphi_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) = 0. \quad (\text{XI})$$

Выражение (XI) и есть искомое условие того, что все три данные точки лежат на окружности одного и того же большого круга.

Задача 9. Найти координаты точек пересечения двух больших кругов, заданных своими уравнениями.

Если уравнения больших кругов заданы в виде, определяемом формулой (V), то тем самым даны координаты полюсов этих кругов. Если же эти уравнения представлены в виде, определяемом формулами (VII) или (VIII), то мы можем по задаче 7-й, по формулам (IX) и (X), найти координаты полюсов этих кругов. Таким образом, координаты полюсов наших окружностей можно считать известными.

Пусть полюсами этих больших кругов являются соответственно для одного из них точка $C_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и для другого — точка $C_2(\varphi_2, \lambda_2)$, а одной из точек пересечения этих кругов — точка $B(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$. Так как точка $B(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$, как точка пересечения, одновременно лежит на окружности и того и другого больших кругов, то она от каждой из точек C_1 и C_2 (§ 4, теорема I) отстоит на сферическом расстоянии, равном 90° . Это на основании формулы (III) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \cos (\bar{\lambda} - \lambda_1) &= - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \bar{\varphi}, \\ \cos (\bar{\lambda} - \lambda_2) &= - \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \bar{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Равенства (a) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}$, вполне аналогичную системе уравнений (б) в задаче 7. Решая ее по тому же плану, найдем для $\bar{\lambda}$:

$$\operatorname{tg} \bar{\lambda} = - \frac{\cos \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1}, \quad (\text{XII})$$

или

$$\operatorname{tg} \bar{\lambda} = - \frac{\begin{vmatrix} \cos \lambda_1 & \cos \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin \lambda_1 & \sin \lambda_2 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 & \operatorname{tg} \varphi_2 \end{vmatrix}}. \quad (\text{XIII})$$

После того как $\bar{\lambda}$ по формуле (XII) или (XIII) найдено, можно по каждому из уравнений (a) найти $\bar{\varphi}$. С этой целью уравнения (a) лучше переписать так:

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = - \frac{\cos (\bar{\lambda} - \lambda_1)}{\operatorname{tg} \varphi_1} = - \frac{\cos (\bar{\lambda} - \lambda_2)}{\operatorname{tg} \varphi_2}. \quad (\text{XIV})$$

Таким образом φ может быть вычислено дважды; схождение результатов служит контролем вычислений.

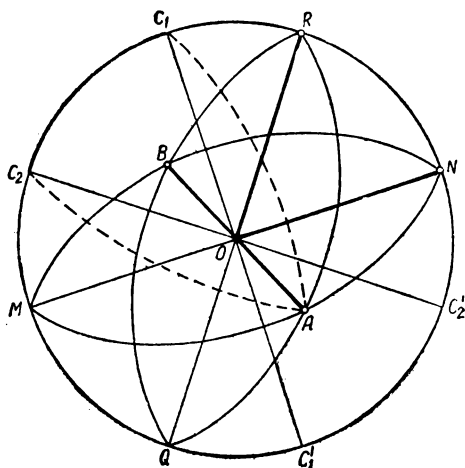
Так как долготы λ могут принимать всевозможные значения от 0° до 360° , то по тангенсу мы получим два значения для $\bar{\lambda}$, отличающиеся на 180° . Это находится в полном соответствии с тем, что два больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках [см. форм. (I)]. С каждым из этих значений по форм. (XIV) вычислим свое значение для φ . Так как широта может принимать значения от -90° до $+90^\circ$ и так как в форм. (XIV) $\bar{\lambda}$ входит под знаком косинуса, то оба найденные значения будут отличаться только знаками, что также находится в полном согласии с формулами (I) настоящего параграфа.

Только что изложенные рассуждения целиком и полностью относятся также к формулам (IX) и (X) задачи 7 этого же параграфа. Там также координаты полюса большого круга λ_0 и φ_0 отыскиваются по тангенсам по формулам, совершенно сходным с формулами (XIII) и (XIV). Следовательно, и там найдутся две точки, а не одна, что согласуется с тем, что у каждого большого круга есть два диаметрально противоположных полюса.

Сходство же формул объясняется тем, что задачу 9-ю можно свести к задаче 7-й, если принять во внимание, что точка пересечения двух больших кругов является полюсом большого круга, проходящего через оба полюса этих двух кругов. Последнее утверждение будет доказано ниже, при решении задачи 10-й.

Задача 10. Найти угол, образуемый двумя пересекающимися кругами, заданными своими уравнениями.

На основании рассуждений, изложенных выше (см. задачу 9), будем считать известными координаты полюсов этих больших



Черт. 66

кругов, т. е. точек $C_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $C_2(\varphi_2, \lambda_2)$.

Прежде чем решать настоящую задачу, докажем следующую лемму.

Лемма. Сферическое расстояние между полюсами двух пересекающихся больших кругов есть мера сферического угла между ними, т. е. сф. $\angle NAR = \cup C_1C_2$ (черт. 66).

Доказательство. Соединим точку A пересечения двух больших кругов $ANBM$ и $ARBQ$ (см. черт. 66) с полюсами этих кругов, т. е. с точками C_1 и C_2 , дугами больших кругов AC_1 и AC_2 . Так как точка C_1 есть полюс дуги $ANBM$, то $\cup AC_1 = 90^\circ$, а так как точка C_2 есть полюс дуги $ARBQ$, то и $\cup AC_2 = 90^\circ$. Следовательно, точка A, отстоящая от двух точек большого круга $C_1NRC_2'QMC_2$, проходящего через полюсы больших кругов $ARBQ$ и $ANBM$, т. е. через точки C_2 и C_1 , есть полюс этого большого круга. В силу этого,

$$\cup AN = \cup AR = 90^\circ,$$

а потому

$$OR \perp AB \text{ и } ON \perp AB.$$

Значит, угол NOR есть линейный угол двугранного угла $NABR$, и (см. § 5)

$$\text{сф. } \angle NAR = \angle NOR. \quad (a)$$

С другой стороны, так как C_1 есть полюс дуги MAN , а C_2 — полюс дуги QAR , то

$$C_1N = C_2R = 90^\circ,$$

и следовательно,

$$C_1O \perp ON \text{ и } C_2O \perp OR,$$

а потому

$$\angle NOR = \angle C_1OC_2, \quad (б)$$

как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Угол же C_1OC_2 измеряется дугой C_1C_2 , как центральный, т. е.

$$\angle C_1OC_2 = \cup C_1C_2. \quad (в)$$

Сопоставляя равенства (а), (б) и (в), заключаем, что

$$\text{сф. } \angle NAR = \cup C_1C_2,$$

что и требовалось доказать.

Возвращаясь к решению предложенной задачи, на основании леммы заключаем [по формуле (II)], что

$$\cos NAR = \cos C_1C_2 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (XV)$$

где φ_1 , λ_1 и φ_2 , λ_2 — известные координаты точек C_1 и C_2 полюсов пересекающихся двух больших кругов.

§ 37. Вторая система сферических координат (тангенциальная)

До сих пор для изучения геометрических свойств фигур, расположенных на сфере, мы пользовались построениями, выполняемыми на самой этой изучаемой нами поверхности. Однако часто при изучении геометрии на какой-либо поверхности прибегают к такому приему. Выбирают какую-нибудь вспомогательную поверхность, более простую, чем изучаемая, и проектируют на нее тем или иным способом рассматриваемые геометрические фигуры. Для сферы в таких случаях берется плоскость и применяется стереографическая, гномоническая и некоторые другие проекции.

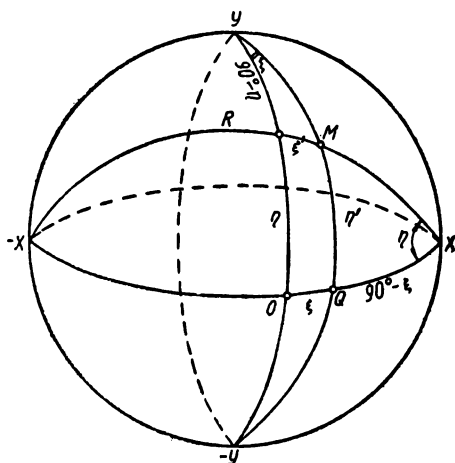
Как читатель убедится из дальнейшего изложения, тангенциальная система координат, речь о которой идет в настоящем параграфе, и основывается на таком приеме.

Будем, как это иногда принимается в высшей математике, считать радиус сферы равным единице. Так как окружность большого круга является на сфере аналогом прямой

на плоскости, будем называть ее в дальнейшем „сферической прямой“. В качестве „осей координат“ возьмем две взаимно перпендикулярные сферические прямые, одну из точек пересечения которых — точку O (черт. 67) будем называть „начальной точкой“ системы; она будет аналогична началу координат в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости. Определим на чертеже положительные и отрицательные направления на осях OX и OY и отметим точки X , Y , $-X$ и $-Y$, из которых каждая отстоит от точки O (черт. 67) на сферическом расстоянии 90° .

Пусть M есть произвольная точка на поверхности шара, сферические координаты которой в рассматриваемой системе мы должны построить. С этой целью опустим сферические перпендикуляры MQ и MR из точки M на „оси координат“. Обозначим:

$$MQ = \eta' \text{ и } MR = \xi',$$



Черт. 67

а отрезки на осях —

$$OQ = \xi \text{ и } OR = \eta.$$

Из чертежа 67 видно, что так же

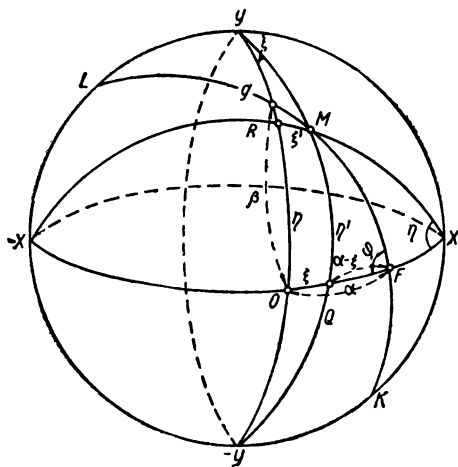
$$\xi = \text{сф. } \angle OYQ \text{ и } \eta = \text{сф. } \angle OXR.$$

„Сферическими координатами“ x и y в нашей системе будем считать тангенсы дуг ξ и η , т. е. положим:

$$x = \text{tg } \xi \text{ и } y = \text{tg } \eta.$$

Принимая за сферические координаты точки M тангенсы дуг $OQ = \xi$ и $OR = \eta$, мы, очевидно, проектируем эту точку на плоскость, касающуюся сферы в точке O , с помощью луча, проведенного из центра сферы. Для достижения однозначного соответствия между точками и координатами ограничимся рассмотрением одного только полушария нашей сферы (именно переднего), т. е. положим:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \xi, \quad \eta \leq +\frac{\pi}{2}.$$



Черт. 68

Тогда каждой паре значений x и y будет соответствовать одна и только одна точка полушария, и наоборот.

Можно сказать также, что окружность большого круга XY ($-X$) ($-Y$) является границей рассматриваемой области. Установим очень важную для дальнейшего связь между величинами ξ' , η' , ξ , η . Из сферического треугольника MRY , прямоугольного по построению при

точке R , у которого катет $RY = 90^\circ - \eta$ (черт. 67), имеем:

$$\cos \eta = \text{ctg } \xi \text{ tg } \xi',$$

а из сферического треугольника MQX аналогично:

$$\cos \xi = \text{ctg } \eta \text{ tg } \eta',$$

откуда легко находим:

$$\text{tg } \xi' = \cos \eta \text{ tg } \xi \text{ и } \text{tg } \eta' = \cos \xi \text{ tg } \eta. \quad (I)$$

С помощью установленной системы координат решим еще несколько задач аналитической геометрии на сфере.

Задача 1. Вывести уравнение сферической прямой, отсекающей на „осях координат“ отрезки α и β (черт. 68).

Пусть сферическая прямая KL образует с осью X угол φ , а точка $M(x, y)$ есть одна из точек этой „прямой“. Тогда из сферического треугольника FGO имеем:

$$\sin \alpha = \text{tg } \beta \text{ ctg } \varphi,$$

а из сферического треугольника FMQ :

$$\sin (\alpha - \xi) = \text{tg } \eta' \text{ ctg } \varphi.$$

Определяя из этих выражений $\text{tg } \varphi$, найдем:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \beta}{\sin \alpha} = \frac{\text{tg } \eta'}{\sin (\alpha - \xi)}.$$

Отсюда, раскрывая синус разности двух углов, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \eta'}{\sin \alpha \cos \xi - \cos \alpha \sin \xi}.$$

Заменим $\operatorname{tg} \eta'$ на основании (I) и поменяем места числителей и знаменателей соответственно в написанных дробных выражениях:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \xi - \cos \alpha \sin \xi}{\cos \xi \operatorname{tg} \eta},$$

или, разделив числителя дроби в правой части почленно на знаменателя,

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \eta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \eta},$$

или, наконец, разделив обе части на $\sin \alpha$ и умножив на $\operatorname{tg} \eta$, после перестановки членов,

$$\frac{\operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{tg} \beta} = 1.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ буквами a и b соответственно, т. е. положим

$$\operatorname{tg} \alpha = a \text{ и } \operatorname{tg} \beta = b,$$

и заменим $\operatorname{tg} \xi$ и $\operatorname{tg} \eta$ согласно условию соответственно через x и y ; тогда получим окончательно уравнение сферической прямой в виде, сходном с уравнением прямой „в отрезках“ на плоскости, а именно:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (\text{II})$$

Задача 2. Вывести уравнение сферической прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$.

Если точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на данной сферической прямой, то координаты ее x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению (II), т. е.

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1.$$

Вычитая это равенство почленно из уравнения (II), получим:

$$\frac{x - x_1}{a} + \frac{y - y_1}{b} = 0. \quad (\text{III})$$

Это и будет искомое уравнение сферической прямой, проходящей через точку с координатами x_1 и y_1 .

Задача 3. Вывести уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Уравнение сферической прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, согласно (III) можно написать так:

$$\frac{y - y_1}{b} = - \frac{x - x_1}{a}.$$

Координаты точки $M_2(x_2, y_2)$, лежащей на этой сферической прямой, должны удовлетворять написанному уравнению, т. е.

$$\frac{y_2 - y_1}{b} = - \frac{x_2 - x_1}{a}.$$

Разделив одно выражение на другое, получим уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки, в виде:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (\text{IV})$$

Задача 4. Показать, что уравнение $Ax + By + C = 0$, линейное относительно x и y , есть общее уравнение сферической прямой.

Перенеся C в правую часть и разделив все уравнение почленно на $-C$, можно переписать его в виде:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$$

Положив теперь

$$-\frac{C}{A} = a \text{ и } -\frac{C}{B} = b,$$

получим окончательно:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это и доказывает, что уравнение вида $Ax + By + C = 0$, линейное относительно x и y , где x и y суть текущие тангенциальные сферические координаты, есть общее уравнение сферической прямой.

Задача 5. Вывести уравнение окружности малого круга со сферическим центром в точке O и с сферическим радиусом ρ .

Так как все точки окружности малого круга лежат от сферического центра этой окружности O на одном и том же сферическом расстоянии ρ , то для какой-нибудь точки этой окружности $M(x, y)$ (черт. 69) из сферического треугольника OMQ непосредственно имеем:

$$\cos \rho = \cos \eta' \cos \xi$$

или, возводя в квадрат,

$$\cos^2 \rho = \cos^2 \eta' \cos^2 \xi,$$

Черт. 69

или

$$\cos^2 \rho = \frac{\cos^2 \xi}{1 + \operatorname{tg}^2 \eta'}.$$

Заменяя $\operatorname{tg} \eta'$ по формуле (I), получим:

$$\cos^2 \rho = \frac{\cos^2 \xi}{1 + \cos^2 \xi \operatorname{tg}^2 \eta}$$

или

$$\frac{1}{\cos^2 \rho} = \frac{1 + \cos^2 \xi \operatorname{tg}^2 \eta}{\cos^2 \xi}.$$

Разделив числитель дроби в правой части на знаменатель и воспользовавшись известной формулой гониометрии, найдем:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \rho = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta = \operatorname{tg}^2 \rho.$$

Положим $\operatorname{tg} \rho = r$, тогда, по условию, окончательно будем иметь уравнение окружности малого круга в виде:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (V)$$

Задача 6. Вывести уравнение сферического эллипса.

Сферическим коническим сечением*) называется кривая пересечения эллиптического конуса со сферой, описанной вокруг вершины конуса как

*) О сферическом коническом сечении и его геометрических свойствах см., например, О. Дзюбек. Курс аналитической геометрии. Часть II. Аналитическая геометрия в пространстве. Одесса. 1912, стр. 276—279.

центра. Так как конус имеет две полости, то кривая имеет две ветви. Если мы примем за центр кривой точку пересечения оси конуса со сферой и ограничимся, как было выше условлено, рассмотрением только одной половины сферы, то получится фигура $STS'T'$, изображенная на черт. 70, которая называется сферическим эллипсом. Внутри сферического эллипса на поверхности сферы есть две точки F и F' , которые называются его фокусами и обладают свойствами, аналогичными свойствам фокусов плоского эллипса.

Отрезок сферической прямой TT' , проходящей через точки F и F' , называется большой осью сферического эллипса, а отрезок сферической прямой SS' — его малой осью. Обе оси взаимно перпендикулярны, пересекаются в центре кривой, точке O , и делят друг друга пополам. Точки T , T' и S , S' называются вершинами эллипса.

Если мы начало координат, т. е. точку O , переместим по одной из осей на 90° в ту или другую сторону, то на рассматриваемой половине сферы будут лежать две ветви кривой, симметричные относительно нового начала и новых осей координат. В таком случае сферическое коническое сечение называется сферической гиперболой, и мы видим, что в сущности на сфере нет различия между сферическим эллипсом и сферической гиперболой.

Сферический эллипс может быть определен, как геометрическое место точек, сумма сферических расстояний которых ρ и ρ' от двух данных точек F и F' , фокусов эллипса, есть величина постоянная, равная большой оси эллипса.

Обозначим $OF = OF' = \epsilon$, $TT' = 2\alpha$ и $SS' = 2\beta$. Пусть S — одна из вершин эллипса, лежащая на оси Y , а M — одна из точек эллипса (см. черт. 70). Тогда из сферического треугольника OSF' имеем:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \epsilon,$$

откуда

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \epsilon}, \quad (a)$$

или

$$\cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \epsilon}.$$

Выразив косинусы через тангенсы по известной формуле гониометрии, найдем:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon}},$$

или

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

или

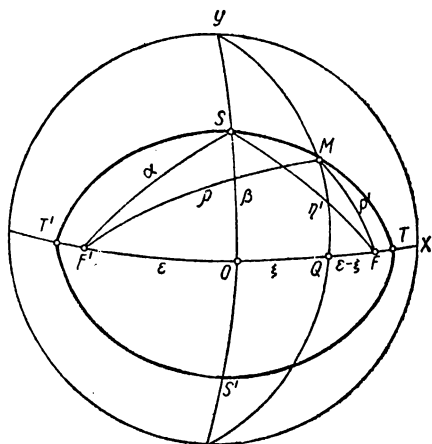
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta),$$

или, наконец,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \epsilon (1 + \operatorname{tg}^2 \beta),$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \epsilon = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}. \quad (б)$$



Черт. 70

Из сферических треугольников MQF и MQF' соответственно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \rho' &= \cos \eta' \cos (\varepsilon - \xi) \\ \cos \rho &= \cos \eta' \cos (\varepsilon + \xi) \end{aligned} \right\} . \quad (B)$$

Помня, что $\rho + \rho' = 2\alpha$ и обозначив $\rho - \rho' = 2\delta$, можем полусумму косинусов представить в виде:

$$\frac{1}{2} (\cos \rho + \cos \rho') = \cos \alpha \cos \delta.$$

С другой стороны, на основании (B) имеем:

$$\frac{1}{2} (\cos \rho + \cos \rho') = \cos \eta' \cos \varepsilon \cos \xi = \frac{\cos \varepsilon \cos \xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta'}},$$

откуда следует:

$$\cos \alpha \cos \delta = \frac{\cos \varepsilon \cos \xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta'}}.$$

Возьмем выражение $\cos \beta \cos \delta$ и, выражая β через α на основании равенства (a), можем записать:

$$\cos \beta \cos \delta = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \varepsilon}.$$

Подставляя сюда только что найденное выражение для произведения $\cos \alpha \cos \delta$, перепишем последнее равенство так:

$$\cos \beta \cos \delta = \frac{\cos \varepsilon \cos \xi}{\cos \varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta'}},$$

или, сокращая и заменяя $\operatorname{tg} \eta'$ по формуле (I),

$$\cos \beta \cos \delta = \frac{\cos \xi}{\sqrt{1 + \cos^2 \xi \operatorname{tg}^2 \eta}}.$$

Беря обратные величины и возводя в квадрат, получим:

$$\frac{1}{\cos^2 \beta \cos^2 \delta} = \frac{1 + \cos^2 \xi \operatorname{tg}^2 \eta}{\cos^2 \xi},$$

или

$$\frac{1}{\cos^2 \beta \cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \xi} + \operatorname{tg}^2 \eta,$$

или, наконец,

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(1 + \operatorname{tg}^2 \delta) = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta. \quad (r)$$

На основании равенств (B) и принятых обозначений можем сумму и разность косинусов ρ и ρ' преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \rho - \cos \rho' &= -2 \sin \alpha \sin \delta = -2 \cos \eta' \sin \varepsilon \sin \xi, \\ \cos \rho + \cos \rho' &= 2 \cos \alpha \cos \delta = 2 \cos \eta' \cos \varepsilon \cos \xi. \end{aligned}$$

Деля первое из этих выражений на второе, найдем:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \xi,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \xi}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (д)$$

Возводя равенство (д) в квадрат и подставляя вместо $\operatorname{tg}^2 \varepsilon$ правую часть равенства (б), получим:

$$\operatorname{tg}^2 \delta = \frac{\operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Теперь преобразуем левую часть равенства (г), используя только что найденное выражение для $\operatorname{tg}^2 \delta$:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(1 + \operatorname{tg}^2 \delta) = (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right) = \\ = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{\operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta) = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \xi - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

После этих преобразований равенство (г) примет вид:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \xi - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg}^2 \eta,$$

или, по приведении подобных членов,

$$\operatorname{tg}^2 \eta = \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

или, наконец, по разделении на $\operatorname{tg}^2 \beta$,

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \xi}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2 \eta}{\operatorname{tg}^2 \beta} = 1.$$

Обозначая $\operatorname{tg} \alpha = a$ и $\operatorname{tg} \beta = b$ и заменяя $\operatorname{tg} \xi$ и $\operatorname{tg} \eta$ согласно условию, получим окончательно уравнение сферического эллипса в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{VI})$$

где x и y — текущие тангенциальные сферические координаты точек этой кривой.

Если мы определим сферическую гиперболу, как геометрическое место точек, разность сферических расстояний которых от двух данных точек F и F' , фокусов гиперболы, есть величина постоянная, равная $2a$, то, проделав аналогичные выкладки, получим уравнение сферической гиперболы в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{VII})$$

Здесь также x и y — текущие тангенциальные сферические координаты точек кривой; точно так же

$$a = \operatorname{tg} \alpha \text{ и } b = \operatorname{tg} \beta,$$

где $2a$ — действительная, а $2b$ — мнимая ось гиперболы.

Задача 7. Вывести уравнение касательной к сферическому эллипсу и сферической гиперболы.

Касательной к сферической кривой называется сферическая прямая, имеющая с кривой две совпадающие общие точки.

Выведем сначала уравнение секущей, имеющей с кривой две отдельные общие точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки, можно, на основании формулы (IV), написать так:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1). \quad (\text{a})$$

Пусть рассматриваемая кривая есть сферический эллипс, определяемый уравнением (VI). Так как точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на этом эллипсе, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению, т. е.

$$y_1^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2,$$

$$y_2^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_2^2.$$

Вычитая почленно, получим:

$$y_1^2 - y_2^2 = -\frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - x_2^2),$$

или

$$(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = -\frac{b^2}{a^2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

или, наконец,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Внося полученное значение отношения $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ в выражение (а), будем иметь уравнение секущей или хорды эллипса в виде:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

Чтобы получить уравнение сферической касательной к эллипсу, достаточно положить $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т. е.

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1),$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Правая часть этого выражения на основании уравнения сферического эллипса (VI) равна единице, так что уравнение касательной к эллипсу окончательно напишется в виде:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \quad (\text{VIII})$$

Аналогично уравнение касательной к сферической гиперболе будет иметь вид:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1. \quad (\text{IX})$$

Мы видим, что во всех рассмотренных в этом параграфе случаях получается совпадение формул аналитической геометрии на сфере с соответствующими формулами аналитической геометрии на плоскости. Геометрически это объясняется тем, что сферические координаты x , y точек сферы можно, очевидно, рассматривать так же, как прямолинейные декартовы координаты проекций этих точек на плоскость, касающуюся сферы в начальной точке системы O . Так как центр проекции совпадает при этом с центром сферы, то мы на касательной плоскости получаем гномоническую проекцию фигур, расположенных на сфере. Формулы настоящего параграфа подтверждают известное свойство гномонической проекции, что все большие круги на сфере изображаются в этой проекции прямыми линиями. Они обнаруживают также и другое свойство этой проекции, а именно: все окружности малого круга, сферические эллипсы и сферические гиперболы, центры которых совпадают на сфере с начальной точкой системы, изображаются на касательной плоскости окружностями, эллипсами и гиперболами соответственно с центрами в той же точке, т. е. в точке касания O .

Мы ограничиваемся здесь этими краткими указаниями, так как более подробное рассмотрение вопроса выходит за рамки настоящего учебника.

Глава VIII

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 38. Об измерении углов

Измерить какую-либо величину — это значит сравнить ее с однородной ей величиной, принятой за единицу, иначе сказать, найти отношение измеряемой величины к величине того же рода, принятой за единицу измерения. Непосредственное сравнение, однако, большею частью на практике бывает за-

труднительно. Поэтому прибегают к косвенному или посредственному измерению. Все сказанное относится полностью и к измерению углов.

Косвенное измерение углов в первую очередь основывается на известных теоремах планиметрии о взаимной пропорциональности дуг окружности и опирающихся на них центральных углов. Такая пропорциональность приводит прежде всего к тому, что соответствующие единицы для углов и для дуг, за малыми исключениями, имеют одинаковые наименования. Далее, определение основных единиц углов почти всегда опирается на определение соответствующих единиц для дуг.

Пожалуй, единственной основной единицей для измерения углов, определяемой независимо от стягивающей дуги, является прямой угол d , т. е. один из двух равных смежных углов. В „Началах“ Евклида — это единственная единица для измерения углов. Угол, равный двум прямым углам ($2d$), называется „развернутым“ или „выпрямленным“; угол, равный четырем прямым ($4d$), который получается, как сумма всех углов, расположенных вокруг одной точки, не имеет особого названия. Впрочем, иногда такой угол называют „полным“ углом. Дуга, стягивающая прямой угол, называется квадрантом; развернутому углу соответствует полуокружность, а полному углу — полная окружность. Прямой угол неудобен для измерения всяких углов, в особенности углов, меньших прямого.

В анализе принято пользоваться радианной мерой. За единицу измерения угла принимается радиан, т. е. центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равняется радиусу. Если известна длина дуги l , соответствующей данному углу α , то в радианной мере будем иметь

$$\alpha = \frac{l}{R},$$

где R — радиус окружности. Часто такой способ выражения углов называют отвлеченным, что, однако, не совсем правильно, так как при этом углы получаются выраженными в радианах. Развернутый угол равняется π радианам, а прямой — $\frac{\pi}{2}$ и т. д. Этот способ, имеющий весьма важное теоретическое значение, неудобен, однако, на практике, т. к. большую часть приходится иметь дело с бесконечными дробями.

Близкую связь с радианным методом имеет способ измерения углов, который применяется в артиллерийских дальномерах. Способ этот, наоборот, имеет чисто практическое значение. Окружность делится на 6000 частей. Таким образом за единицу измерения, называемую артиллерийским делением, принимается угол, соответствующий дуге в $\frac{1}{6000}$ долю окружности. Прямой угол равняется 1500 артиллерийских делений. Так как при дальномерных измерениях приходится иметь дело с малыми углами, то можно приближенно принять радиан равным не $\frac{6000}{2\pi} = 955$ артиллерийским делениям, а, приняв π грубо приближенно равным 3, считать радиан за 1000 артиллерийских делений. Поэтому артиллерийское деление угломера обычно называют „тысячной“ или „тысячной радиуса“. Такое деление шкалы прибора очень удобно для быстрых приближенных определений линейной величины предмета h или расстояния до него d , если угловая величина предмета α измерена угломером в артиллерийских делениях. Очевидно эти три величины связаны приближенной формулой:

$$h = \frac{\alpha \cdot d}{1000},$$

где h и d выражены в одинаковых линейных единицах.

Градусное деление применялось уже в глубокой древности. Изобретение его приписывают халдеям. Деление окружности на 360 частей стоит в несомненной связи с видимым годичным движением солнца по эклиптике и с продолжительностью тропического года. Трудно, однако, сказать, имело ли

здесь место сознательное округление (360 вместо $365\frac{1}{4}$) или деление окружности на 360 частей укоренилось еще тогда, когда продолжительность года была установлена очень приближенно и округленно. Последнее предположение подтверждается самым названием „градус“ (gradus — ступень, шаг), которое как бы выражает, что за одни сутки солнце в своем видимом годичном движении продвигается каждый раз на один „шаг“, а всего за год делает 360 „шагов“. Итак, дуговым градусом называется $\frac{1}{360}$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуге в 1 дуговой градус. Градусное деление самое распространенное и общеупотребительное. Некоторое затруднение представляет унаследованное также от халдеев сексагезимальное подразделение градуса ($1^\circ = 60'$, $1' = 60''$), осложняющее в известной степени действия превращения и раздробления.

Поэтому при введении десятичной системы мер и весов возникла мысль установить десятичную систему и для измерения углов. В этой системе прямой угол подразделяется на 100 частей, называемых градами (обозначение g). Каждый град делится на 100 десятичных или градовых минут (обозначение m), и каждая градовая минута в свою очередь делится на 100 градовых или десятичных секунд (обозначение s). Впрочем, в последних подразделениях особой надобности не представляется, так как их легко заменить соответствующими десятичными долями града. Несмотря на эти преимущества, градовое деление окружности прививается на практике очень медленно. Одна из причин та, что такие углы, как 30° и 60° , имеющие особое значение,

выражаются в градах не целыми числами ($60^\circ = 66\frac{2^g}{3}$). Другая причина: все точные инструменты имеют круги, разделенные на градусы, в таблицах для вычисления, логарифмических и других, аргумент обычно выражается также в градусах и т. д. В последнее время, впрочем, стали появляться и инструменты и таблицы, приспособленные для градового деления, так что в геодезии оно начинает находить себе некоторое применение.

В астрономии применяется часто часовое деление окружности. Это стоит в связи с тем обстоятельством, что Солнце и другие светила завершают полный видимый суточный оборот на 360° в 24 часа. Таким образом, окружность делится на 24 части, и дуга, равная $\frac{1}{24}$ части окружности, называется дуговым часом, а центральный угол, ей соответствующий, называется угловым часом или просто часом (обозначение h). Один час делится на 60 частей, называемых минутами (обозначение m), и минута делится на 60 секунд (обозначение s). Минуты и секунды, как доли часа, называются часовыми в отличие от градусных минут и секунд ($'$ и $''$). Очевидно $1^h = 15^\circ$, $1^m = 15'$ и $1^s = 15''$.

Для наглядности сопоставим в табл. 3 выражения некоторых основных углов в различных, только что рассмотренных угловых мерах.

Иногда приходится угол, данный в каких-либо из этих мер, выражать в других угловых мерах. Для этой цели в сборниках таблиц и других справочных изданиях помещаются специальные вспомогательные таблицы различного устройства, облегчающие такой переход от одних угловых мер к другим. В простейших случаях можно пользоваться табл. 4, дающей сравнение между собою различных угловых мер.

До сих пор мы говорили об измерении угла между двумя прямыми. То же самое относится и к измерению угла между двумя плоскостями, так как двугранные углы, как известно из геометрии, относятся между собой, как их линейные углы. Другими словами, если мы за единицу измерения примем двугранный угол, линейный угол которого равен единице, взятой для измерения линейных углов, то оба угла, и двугранный и линейный, будут измеряться одинаковым числом соответствующих единиц. Поэтому единицы измерения двугранных углов получают те же самые наименования, как и для углов линейных.

Таблица 3

Углы Меры	Полный угол (ок- ружность)	Разверну- тый угол (полуок- ружность)	Прямой угол (квад- рант)	Трет-ь раз- вернутого угла	Половина прямого угла	Трет-ь пря- мого угла
В прямых углах	4d	2d	d	$\frac{2}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{3}d$
В радианах	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
В артиллерийских делениях	6000	3000	1500	1000	750	500
В градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
В градах	400 ^g	200 ^g	100 ^g	$66\frac{2}{3}^g$	50 ^g	$33\frac{1}{3}^g$
В часах	24 ^h	12 ^h	6 ^h	4 ^h	3 ^h	2 ^h

Таблица 4

	В ради- анах	В арт. делениях	В градусах	В градах	В часах
Радян	1	$955 \approx 1000$	57°,3	63 ^g ,9	3 ^h ,82
Артиллерийское деление	$\frac{\pi}{3000}$	1	0°,06 = 3',6	$\frac{1^g}{15}$	0 ^h ,004 = 14 ^s ,4
Градус	$\frac{\pi}{180}$	16 ² /3	1°	$1\frac{1}{9}^g$	$\frac{1^h}{15} = 4^m$
Град	$\frac{\pi}{200}$	15	0°,9	1 ^g	0 ^h ,06 = 3 ^m ,6
Час	$\frac{\pi}{12}$	250	15°	$16\frac{2}{3}^g$	1 ^h

Так как угол между двумя кривыми измеряется углом между касательными, то и здесь могут быть применены те же приемы косвенного измерения.

Сферический угол, как мы знаем (см. § 5), может быть связан либо с линейным, либо с двугранным углом, либо непосредственно с дугой окружности, т. к. он измеряется заключенной между его сторонами дугой большого круга, для которой вершина угла служит полюсом. Если мы примем за единицу измерения сферический угол, для которого соответствующая дуга равняется какой-либо единице измерения дуг, то и сферический угол и соответствующая ему дуга будут измеряться одинаковым числом тех и других единиц соответственно. Таким образом, единицы измерения сферических углов имеют те же наименования, как и в остальных случаях.

§ 39. Практическое замечание о решении треугольников

В § 27 мы упоминали о так называемом правиле Лаланда. Это правило непосредственно относится к решению плоских прямоугольных треугольников, а именно к случаю, когда треугольник нужно решить по двум данным катетам.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (черт. 71) даны катеты b и c . Требуется вычислить его острые углы B и C и гипотенузу a .

Из чертежа 71 будем иметь следующие очевидные формулы:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

$$C = 90^\circ - B,$$

$$a = \frac{b}{\sin B} \text{ или } a = \frac{c}{\cos B}.$$

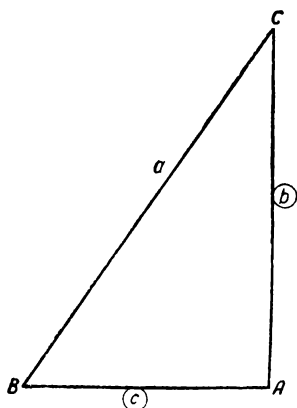
Можно предложить удобный способ для вычислений по этим формулам, который и формулируется следующим правилом.

Правило. Чтобы решить прямоугольный треугольник по двум катетам, нужно вычесть из логарифма одного катета, безразлично какого, логарифм другого; разность эта есть $\lg \operatorname{tg}$ одного из углов; какого именно, для дальнейшего применения не имеет никакого значения. Далее нужно выбрать из **крайнего правого столбца** таблицы, имеющего **сверху** надпись **cos**, **дополнение логарифма**, который соответствует только что найденному тангенсу, и **прибавить это дополнение к логарифму большего катета**; тогда полученная сумма будет логарифмом гипотенузы.

Доказательство.

Имеем

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}.$$



Черт. 71

Пусть

$$b > c.$$

Тогда будет и $B > C$. Но так как $B + C = 90^\circ$, то будем иметь $B > 45^\circ$. В таком случае логарифм в последнем правом столбце таблицы будет $\lg \sin B$, и так как $a = \frac{b}{\sin B}$, то, прибавляя дополнение этого логарифма к $\lg b$, т. е. к большему логарифму, действительно получим логарифм гипотенузы.

Пусть, наоборот, $b < c$, тогда и $B < C$; и, следовательно, $B < 45^\circ$, т. е. логарифм в последнем правом столбце таблиц будет $\lg \cos B$. Так как $a = \frac{c}{\cos B}$, то опять, прибавляя дополнение нашего логарифма к большему логарифму, т. е. в этом случае к $\lg c$, мы получим логарифм гипотенузы.

Таким образом, применимость так называемого правила Лаланда во всех могущих встретиться случаях доказана.

Вычисления рекомендуется вести в таком порядке. Выписывают $\lg b$ и $\lg c$, с помощью которых вычисляется $\lg \operatorname{tg} B$, по формуле

$$\lg \operatorname{tg} B = \lg b - \lg c$$

и вписывают их в схему на таком расстоянии один от другого, чтобы между ними можно было вписать доп. $\begin{cases} \lg \sin \\ \lg \cos \end{cases} B$, что читается дополнение $\lg \sin B$ или $\lg \cos B$. При этом нет никакой необходимости задумываться над вопросом, представляет ли взятый из последнего правого столбца логарифм дополнение логарифма синуса или логарифма косинуса угла B . Нужно только помнить, что это дополнение всегда нужно прибавлять к большему из логарифмов, между которыми оно стоит, т. е. к логарифму большего катета.

Пример. Решить прямоугольный треугольник, если даны его катеты:

$$b = 32,17,$$

$$c = 19,35.$$

Решение			
доп. {	$\lg b$	1.50 745	} К большему!
	$\lg \sin B$	0.06 706	
	$\lg \cos$		
	$\lg c$	1.28 668	
	$\lg \operatorname{tg} B$	0.22 077	
	$\lg a$	1.57 451	

$$\begin{array}{l|l} B & 58^{\circ}58'25'' \\ C & 31 \quad 1 \quad 35 \\ a & 37,542 \end{array}$$

Когда требуется вычислить только гипотенузу, то следует вычислять по той же схеме, с тем только различием, что угла B находить не надо, а от $\lg \operatorname{tg} B$ прямо перейти к доп. { $\lg \sin$ $\lg \cos$ B , интерполируя с помощью специальных табличек, помещаемых во многих таблицах логарифмов на каждой странице ниже так называемых *Partes proportionales*.

Пример. Катеты прямоугольного треугольника суть 324,37 и 742,73; вычислить гипотенузу.

Решение			
Катеты {	324,37	2.51 104	доп. { $\lg \sin$ $\lg \cos$ } К большему!
		0.03 791	
	742,73	2.87 083	
		9.64 021	tg
Гипотенуза = 810,48		2.90 874	

Переходя от $\lg \operatorname{tg} \dots 9.64\ 021$ к доп. { $\lg \sin$ $\lg \cos \dots 0.03\ 791$, приходится или непосредственно решать пропорцию $x:5 = 18:34$, откуда $x = \frac{5}{34} \times 18 = 3$, или воспользоваться вспомогательной табличкой, помещенной на той же странице справа внизу и надписанной сверху $\frac{5}{34}$, где 5 и 34 — табличные разности $\lg \cos$ и $\lg \operatorname{tg}$ соответственно.

Изложенное правило может найти применение и при решении других тригонометрических задач. Если тангенс какого-нибудь искомого угла x можно представить как отношение двух данных величин N и D , т. е. если дано

$$\operatorname{tg} x = \frac{N}{D},$$

то можно считать N и D катетами некоторого прямоугольного (плоского) треугольника, один из острых углов которого есть x . Если при этом другая искомая величина y связана с x соотношением $y = \frac{N}{\sin x}$ или $y = \frac{D}{\cos x}$, то y можно рассматривать как гипотенузу этого треугольника и вычислять по этому же правилу. Заметим, между прочим, что оба эти соотношения вытекают одно из другого. В самом деле, пусть дано $\operatorname{tg} x = \frac{N}{D}$ (а) и $y = \frac{N}{\sin x}$ (б). Тогда из (а) имеем $N = D \cdot \operatorname{tg} x$; подставляя вместо N это соотношение в выражение (б), получим:

$$y = \frac{D \cdot \operatorname{tg} x}{\sin x},$$

или

$$y = \frac{D \cdot \sin x}{\sin x \cos x},$$

или, по сокращении,

$$y = \frac{D}{\cos x}.$$

Точно так же можно, и наоборот, показать, что если дано $\operatorname{tg} x = \frac{N}{D}$ и $y = \frac{D}{\cos x}$, то отсюда следует, что $y = \frac{N}{\sin x}$.

В сферической тригонометрии мы встретились с применением этого правила при решении косоугольных треугольников, а именно во II и III случаях решения косоугольных треугольников по аналогиям Непера и формулам Де-Ламбра-Гаусса.

Во II случае у нас оказалось (см. § 27, II случай, решение 4):

$$x = \frac{A+B}{2} \text{ и } x' = \frac{A-B}{2},$$

$$N = \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a-b), \quad N' = \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a-b),$$

$$D = \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a+b), \quad D' = \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (a+b),$$

и, наконец, $y = \cos \frac{1}{2} c$ и $y' = \sin \frac{1}{2} c$.

В III же случае наши фиктивные треугольники характеризовались следующими значениями сторон и углов (см. § 27, III случай, решение 4):

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad x' = \frac{a-b}{2},$$

$$N = \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (A-B), \quad N' = \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (A-B),$$

$$D = \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (A+B), \quad D' = \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (A+B),$$

и, наконец, $y = \sin \frac{1}{2} C$ и $y' = \cos \frac{1}{2} C$.

Эти соображения поясняют ход решения и построение схем в приведенных в § 27 численных примерах на указанные выше случаи.

§ 40. Дифференциальные соотношения сферического треугольника

Если в данном сферическом треугольнике изменятся три каких-либо его элемента, то изменятся и три его остальных элемента и мы получим новый сферический треугольник. Если изменения данных трех элементов бесконечно малы, то изменения других трех элементов также будут бесконечно малы. В этом случае, вместо того, чтобы решать новый, измененный треугольник непосредственно, вычисление проводят по так называемым дифференциальным формулам.

Пусть три стороны треугольника a , b и c получили бесконечно малые приращения da , db и dc соответственно. По формулам (11) (см. § 10) имеем:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Дифференцируя по всем переменным, получим:

$$\begin{aligned} + \sin a da = & + (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) db + \\ & + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) dc + \\ & + \sin b \sin c \sin A dA. \end{aligned}$$

Заменяя выражения в скобках по формулам (15), а произведение $\sin c \sin A$ по теореме синусов и сокращая на $\sin a$, найдем:

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin b \sin C dA,$$

причем, используя еще раз теорему синусов, последний член можно написать также в виде

$$+ \sin B \sin c dA.$$

Это соотношение словами можно формулировать так:

Дифференциал стороны сферического треугольника равняется сумме дифференциалов двух других сторон, умноженных соответственно на косинусы углов, заключенных между каждой из этих сторон и первой стороной, плюс дифференциал угла, противолежащего первой стороне, умноженный на синусы угла и стороны, лежащих между первой стороной и противолежащим ей углом.

Применяя эту словесную формулировку для всех возможных случаев или делая круговую перестановку сторон и углов соответственно, можем получить:

$$\left. \begin{aligned} da &= \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin C dA \\ &\quad (\text{или } + \sin b \sin C dA) \\ db &= \cos A dc + \cos C da + \sin C \sin A dB \\ &\quad (\text{или } + \sin c \sin A dB) \\ dc &= \cos B da + \cos A db + \sin A \sin B dC \\ &\quad (\text{или } + \sin a \sin B dC) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Пусть далее три угла сферического треугольника A , B и C получили бесконечно малые приращения dA , dB и dC соответственно. Тогда, дифференцируя выражение для косинуса стороны [см. § 11, форм. (12)]

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} -\sin A dA &= (\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a) dB + \\ &+ (\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a) dC - \sin B \sin C \sin a da. \end{aligned}$$

Заменяя выражения в скобках по формулам (16) (см. § 14), а произведение $\sin C \sin a$ — по теореме синусов (см. § 12) и сокращая на $-\sin A$, получим:

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin B \sin C da,$$

причем, используя еще раз теорему синусов, последний член можно представить также в виде

$$+ \sin b \sin C da.$$

Словесная формулировка для этого соотношения будет:

Дифференциал угла сферического треугольника равняется сумме дифференциалов двух других углов со знаками минус, умноженных соответственно на косинусы сторон, заключенных между каждым из этих углов и первым углом, плюс дифференциал противолежащей первому углу стороны, умноженный на синусы стороны и угла, лежащих между первым углом и противолежащей ему стороной.

По этой формулировке или путем круговой перестановки букв так же, как и в первом случае, получаем:

$$\left. \begin{aligned} dA &= -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da \\ &\quad (\text{или } + \sin B \sin C da) \\ dB &= -\cos a dC - \cos c dA + \sin c \sin A db \\ &\quad (\text{или } + \sin C \sin A db) \\ dC &= -\cos b dA - \cos a dB + \sin a \sin B dc \\ &\quad (\text{или } + \sin A \sin B dc) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Запишем теперь на основании теоремы синусов [см. § 12, форм. (14)]:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

Взяв от обоих частей этого равенства логарифмические дифференциалы, сразу же найдем

$$\left. \begin{aligned} \text{а по аналогии:} \quad & \text{ctg } a \, da + \text{ctg } B \, dB = \text{ctg } A \, dA + \text{ctg } b \, db, \\ & \text{ctg } a \, da + \text{ctg } C \, dC = \text{ctg } A \, dA + \text{ctg } c \, dc \\ \text{и} \quad & \text{ctg } b \, db + \text{ctg } C \, dC = \text{ctg } B \, dB + \text{ctg } c \, dc \end{aligned} \right\}. \quad (\text{в})$$

Словами это можно выразить так:

Сумма дифференциалов стороны сферического треугольника и прилежащего к ней угла, умноженных на котангенсы тех же элементов соответственно, равняется такой же сумме, составленной для дифференциалов соответственно противолежащих им элементов.

Если же мы возьмем выражение теоремы синусов в виде равенства трех отношений [см. § 12, форм. (13)], т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

и выполним логарифмическое дифференцирование каждого отношения, то непосредственно получим:

$$\text{ctg } a \, da - \text{ctg } A \, dA = \text{ctg } b \, db - \text{ctg } B \, dB = \text{ctg } c \, dc - \text{ctg } C \, dC. \quad (\text{г})$$

Следовательно, разность дифференциала стороны сферического треугольника и дифференциала противолежащего ей угла, умноженных соответственно на котангенсы этих же элементов, сохраняют для данного сферического треугольника свою величину для любой пары противолежащих элементов.

Наконец, воспользуемся формулой котангенсов или, иначе говоря, формулой четырех элементов (17) (см. § 15):

$$\text{ctg } a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \text{ctg } A.$$

Дифференцируя и меняя знаки на обратные, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin b}{\sin^2 a} \, da &= (\text{ctg } a \cos b + \sin b \cos C) \, db + \\ &+ (\cos b \sin C - \cos C \text{ctg } A) \, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \, dA. \end{aligned}$$

Это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{\sin b}{\sin^2 a} \, da &= \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}{\sin a} \, db + \\ &+ \frac{-\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b}{\sin A} \, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \, dA. \end{aligned}$$

Заменяя числители дробей в правой части по формулам (11) и (12) [см. §§ 10 и 11], будем иметь:

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a} \, da = \frac{\cos c}{\sin a} \, db + \frac{\cos B}{\sin A} \, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \, dA.$$

Так как по теореме синусов

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \text{а} \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin A},$$

то, делая соответствующие замены в левой части формулы и в последнем члене правой части, напомним:

$$\frac{\sin B}{\sin a \sin A} \, da = \frac{\cos c}{\sin a} \, db + \frac{\cos B}{\sin A} \, dC + \frac{\sin c}{\sin a \sin A} \, dA.$$

Наконец, умножая левую и правую часть равенства на $\sin a \sin A$, найдем окончательно:

$$\sin B \, da = \sin A \cos c \, db + \sin a \cos B \, dC + \sin c \, dA.$$

Применяя термины „крайний“ и „внутренний“ в том же самом смысле, как и в § 15, условимся называть угол и сторону, не входящие в соответствующую формулу четырех элементов, „третьими“. Тогда полученная нами формула будет читаться так:

Произведение синуса третьего угла на дифференциал крайней стороны равняется произведению синуса крайнего угла на косинус третьей стороны и на дифференциал внутренней стороны плюс произведение синуса крайней стороны на косинус третьего угла и на дифференциал внутреннего угла и плюс произведение синуса третьей стороны на дифференциал крайнего угла.

Применяя эту формулировку ко всем возможным в треугольнике случаям, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sin B da &= \sin A \cos c db + \sin a \cos B dC + \sin c dA \\ \sin C da &= \sin A \cos b dc + \sin a \cos C dB + \sin b dA \\ \sin C db &= \sin B \cos a dc + \sin b \cos C dA + \sin a dB \\ \sin A db &= \sin B \cos c da + \sin b \cos A dC + \sin c dB \\ \sin A dc &= \sin C \cos b da + \sin c \cos A dB + \sin b dC \\ \sin B dc &= \sin C \cos a db + \sin c \cos B dA + \sin a dC \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Заметим, что 1-я, 3-я и 5-я из формул (д) могут быть получены одна из другой путем круговой перестановки букв; то же относится и к 2-й, 4-й и 6-й формулам. Для того же, чтобы перейти от 1-й формулы к 2-й, от 3-й к 4-й или от 5-й к 6-й, нужно, вместо внутренней стороны и внутреннего угла, поставить третью сторону и третий угол и, соответственно, — наоборот.

Формулы (а), (б), (в) или (г) и (д) исчерпывают все возможные комбинации из 6 дифференциалов элементов сферического треугольника по 4. Поэтому они достаточны для решения всех случаев, могущих когда-либо представиться. Так же, как и при решении косоугольных сферических треугольников, здесь может быть 6 случаев, в зависимости от того, дифференциалы каких элементов треугольника будут даны, а именно: 1-й случай: даны da , db , dc ; 2-й случай: даны da , db и dC ; 3-й случай: даны dA , dB и dc ; 4-й случай: даны da , db и dA ; 5-й случай: даны dA , dB и da ; 6-й случай: даны dA , dB и dC .

Если мы имеем 1-й случай, т. е. нам даны дифференциалы сторон da , db и dc , то мы можем, используя все три из формул (а), рассматривать их как систему трех уравнений с тремя неизвестными dA , dB и dC , решая которую, найдем искомые дифференциалы углов. Аналогично в 6-м случае, при данных dA , dB и dC , по формулам (б) могут быть найдены дифференциалы сторон da , db и dc .

Во втором случае данными будут дифференциалы da , db и dC , а искомыми dA , dB и dc . Следовательно, нужно взять одну из формул (а) и две из формул (д), а именно:

$$\left. \begin{aligned} dc &= \cos B da + \cos A db + \sin A \sin b dC, \\ \sin B da &= \sin A \cos c db + \sin a \cos B dC + \sin c dA, \\ \sin A db &= \sin B \cos c da + \sin b \cos A dC + \sin c dB. \end{aligned} \right\}$$

Во всех этих случаях каждая из дифференциальных формул позволяет вычислить один из искомых дифференциалов непосредственно. Подобным же образом можно поступать и в остальных трех случаях. Следует иметь в виду, что в частности некоторые из данных дифференциалов могут оказаться равными нулю. Это будет означать, что соответствующие элементы треугольника остаются без изменения. В таком случае, очевидно, формулы для вычислений несколько упростятся.

Дифференциальные формулы для прямоугольного сферического треугольника можно получить, либо подставляя в формулы (а), (б), (в), (г) и (д) значения $A = 90^\circ$, либо логарифмируя и затем дифференцируя формулы (18)

и (19) параграфа 18-го. В обоих случаях получатся одинаковые результаты, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a da &= \operatorname{tg} b db + \operatorname{tg} c dc, \\ \operatorname{tg} B dB &= \operatorname{tg} b db - \operatorname{ctg} C dC, \\ \operatorname{tg} C dC &= \operatorname{tg} c dc - \operatorname{ctg} B dB, \\ \operatorname{ctg} b db &= \operatorname{ctg} a da + \operatorname{ctg} B dB, \\ \operatorname{ctg} c dc &= \operatorname{ctg} a da + \operatorname{ctg} C dC; \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a da &= \frac{2dB}{\sin 2B} + \frac{2dC}{\sin 2C}, \\ \operatorname{tg} B dB &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2dc}{\sin 2c}, \\ \operatorname{tg} C dC &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2db}{\sin 2b}, \\ \operatorname{ctg} b db &= \frac{2dc}{\sin 2c} - \frac{2dC}{\sin 2C}, \\ \operatorname{ctg} c dc &= \frac{2db}{\sin 2b} - \frac{2dB}{\sin 2B}. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Подставляя всюду вместо катетов b и c их дополнения $(90^\circ - b)$ и $(90^\circ - c)$, предыдущие равенства можем переписать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a da &= -[\operatorname{ctg} (90^\circ - b) d(90^\circ - b) + \operatorname{ctg} (90^\circ - c) d(90^\circ - c)], \\ \operatorname{tg} B dB &= -[\operatorname{ctg} (90^\circ - b) d(90^\circ - b) + \operatorname{ctg} C dC], \\ \operatorname{tg} C dC &= -[\operatorname{ctg} (90^\circ - c) d(90^\circ - c) + \operatorname{ctg} B dB], \\ \operatorname{tg} (90^\circ - b) d(90^\circ - b) &= -[\operatorname{ctg} a da + \operatorname{ctg} B dB], \\ \operatorname{tg} (90^\circ - c) d(90^\circ - c) &= -[\operatorname{ctg} a da + \operatorname{ctg} C dC]; \end{aligned} \right\} \quad (з)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a da &= 2 \left[\frac{dB}{\sin 2B} + \frac{dC}{\sin 2C} \right], \\ \operatorname{tg} B dB &= 2 \left[\frac{da}{\sin 2a} + \frac{d(90^\circ - c)}{\sin 2(90^\circ - c)} \right], \\ \operatorname{tg} C dC &= 2 \left[\frac{da}{\sin 2a} + \frac{d(90^\circ - b)}{\sin 2(90^\circ - b)} \right], \\ \operatorname{tg} (90^\circ - b) d(90^\circ - b) &= 2 \left[\frac{d(90^\circ - c)}{\sin 2(90^\circ - c)} + \frac{dC}{\sin 2C} \right], \\ \operatorname{tg} (90^\circ - c) d(90^\circ - c) &= 2 \left[\frac{d(90^\circ - b)}{\sin 2(90^\circ - b)} + \frac{dB}{\sin 2B} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (и)$$

Отсюда вытекает правило, аналогичное правилу Непера-Модюи:

Дифференциал элемента прямоугольного сферического треугольника, умноженный на тангенс этого элемента, равняется:

*либо отрицательной сумме дифференциалов **несмежных** с ним элементов, умноженных каждый на котангенс этого же элемента соответственно,*

*либо удвоенной сумме дифференциалов **прилежащих** элементов, деленных каждый на синус соответствующего удвоенного элемента.*

При этом под знаками дифференциала, тангенса, котангенса и синуса нужно, вместо катетов, брать их дополнения до 90° .

Если даны дифференциалы каких-либо двух элементов прямоугольного сферического треугольника, то, пользуясь вышеприведенным правилом, можно написать формулу для определения любого из дифференциалов трех остальных элементов треугольника, подобному тому, как мы это делаем по правилу Непера-Модюи для искоемых элементов треугольника при его решении. При нахождении дифференциалов можно различать 6 случаев, вполне аналогичных случаям решения прямоугольных сферических треугольников, указанным в § 22, а именно: 1-й случай: даны da и db ; 2-й случай: даны db и dc ; 3-й случай: даны da и dB ; 4-й случай: даны db и dC ; 5-й случай: даны db и dB ; 6-й случай: даны dB и dC . Если нам даны, например (1-й слу-

чай), дифференциалы гипотенузы и одного из катетов da и db , то по формулам (е) и (ж) или по нашему правилу для вычисления искомых дифференциалов dC , dB и dc будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} C \, dC &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2db}{\sin 2b}, \\ \operatorname{ctg} b \, db &= \operatorname{ctg} a \, da + \operatorname{ctg} B \, dB, \\ \operatorname{tg} a \, da &= \operatorname{tg} b \, db + \operatorname{tg} c \, dc. \end{aligned} \right\}$$

Таким же образом могут быть получены рабочие формулы и в остальных случаях.

На практике дифференциальными формулами пользуются для вычисления малых конечных изменений элементов сферического треугольника, если даны малые конечные изменения нескольких (от 1 до 3) его элементов. Однако не следует упускать из виду, что, заменяя в выведенных нами формулах дифференциалы (d) конечными изменениями (Δ), мы будем получать только приближенные формулы, точные только до малых первого порядка включительно.

§ 41. Решение сферических треугольников с малыми сторонами по способу аддитаментов

Как известно, в анализе для $\sin x$ дается нижеследующее разложение в ряд [см. § 29, форм. (39)]:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{180} - \dots$$

Если x мало, то, ограничиваясь двумя первыми членами этого ряда и вынося x за скобку, будем иметь с точностью до малых четвертого порядка относительно x :

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{6} \right).$$

Возьмем натуральные логарифмы правой и левой части этого выражения:

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} \right).$$

Из анализа известно, что

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Следовательно, ограничиваясь первым членом разложения, можем написать:

$$\ln \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) = -\frac{x^2}{6}.$$

Тогда, очевидно, будем иметь:

$$\ln \sin x = \ln x - \frac{x^2}{6}.$$

Перейдем теперь к десятичным логарифмам, пользуясь соотношением

$$\lg_{10} x = M \ln x,$$

где M — модуль десятичных логарифмов:

$$\lg \sin x = \lg x - \frac{Mx^2}{6}.$$

Величина $\frac{Mx^2}{6}$ называется аддитаментом x и обозначается A_x . Следовательно, пользуясь этим обозначением, можем записать:

$$\lg \sin x = \lg x - A_x, \quad (a)$$

где

$$A_x = \frac{Mx^2}{6}. \quad (б)$$

Сравнивая предыдущий вывод с изложенным в § 30, легко убеждаемся, что аддитамент A_x — это то же самое, что логарифмическая поправка $\sigma(x)$; только в формуле (б) для A_x аргумент x выражен в радианной мере (в так называемой отвлеченной), а в формулах для $\sigma(x)$ в § 30 аргумент x выражен в градусных секундах (") или в секундах часовых (').

Пусть нам дан сферический треугольник ABC , стороны которого a, b, c , выраженные в радианной мере, малы по сравнению с радианом (см. черт. 52) (не более, скажем, 0,03 — 0,04 радиана). Обозначим, как и ранее, линейную длину сторон треугольника ABC буквами a_1, b_1, c_1 . Тогда будем иметь:

$$a = \frac{a_1}{R}, \quad b = \frac{b_1}{R} \quad \text{и} \quad c = \frac{c_1}{R}, \quad (в)$$

где R — радиус сферы. Согласно предположению, a_1, b_1 и c_1 малы по сравнению с радиусом сферы R . С такими треугольниками, как это изложено в § 33, мы обычно встречаемся в высшей геодезии. Как правило, при этом бывает известна линейная длина одной из его сторон, скажем, a_1 и два или все три его сферических угла A, B и C , а требуется найти длины двух других его сторон b_1 и c_1 . Вместо того, чтобы решать его по теореме Лежандра (см. § 32, следствие 1), можно это решение провести с помощью аддитаментов. Для этой цели на основании теоремы синусов напомним:

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A},$$

откуда

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Логарифмируя это равенство, воспользуемся формулой (а):

$$\lg b - A_b = \lg a - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A}.$$

По формулам (в) имеем:

$$\lg b = \lg b_1 - \lg R \quad \text{и} \quad \lg a = \lg a_1 - \lg R.$$

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, найдем:

$$\lg b_1 - \lg R - A_b = \lg a_1 - \lg R - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A},$$

или

$$\lg b_1 - A_b = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Введем обозначение

$$\lg b' = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A},$$

где b' часто называют *нередуцированным* значением длины стороны b_1 . Тогда получим:

$$\lg b_1 - A_b = \lg b',$$

или окончательно

$$\lg b_1 = \lg b' + A_b. \quad (г)$$

Подобным же образом найдем:

$$\lg c_1 = \lg c' + A_c, \quad (д)$$

где

$$\lg c' = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Из формул (г) и (д) вытекает следующее правило: чтобы получить логарифм линейной длины стороны малого сферического треугольника ABC , нужно прибавить к логарифму нередуцированного значения длины этой стороны ее аддитамент. Отсюда и происходит самое название „аддитамент“, т. к. по-английски слово *additament* значит прибавка.

§ 42. Сферические треугольники с верхтупыми углами

Верхтупыми углами называются углы, большие 180° , но меньшие 360° . С такими углами мы встречаемся в главе VII, в §§ 34—36: а именно, одна из сферических координат, долгота λ , как там указано, может принимать всевозможные значения от 0° до 360° . Таким образом, при решении различных задач аналитической геометрии на сфере чисто геометрического характера или с содержанием, взятым из астрономии или геодезии, приходится иногда иметь дело с треугольниками, стороны которых меньше 180° , а углы — больше 180° , но меньше 360° . Это будут уже треугольники Мёбиуса второго типа (всех типов 16) или, по обозначению Мёбиуса, треугольники типа $T_{01}^{(0)}$. То обстоятельство, что треугольники такого типа могут иногда встретиться на практике, заставляет нас несколько более подробно остановиться на этом вопросе.

Если рассматриваются треугольники, у которых стороны и углы могут иметь значения, большие 180° , то для того, чтобы однозначно определять дуги и углы, необходимо установить следующие добавочные соглашения:

1. На каждой дуге большого круга должно быть установлено определенное направление, которое считается положительным. Противоположное направление будет считаться отрицательным.

2. Стороны a , b и c сферического треугольника ABC определены тем, что, переходя непременно от A к B , от B к C и от C к A , мы должны всегда двигаться по данной окружности большого круга в положительном направлении.

3. Если требуется определить угол (ab) между двумя дугами больших кругов a и b , то прежде всего надо установить, какая из двух точек их пересечения принимается за вершину угла. Вторая точка пересечения иногда называется „противоположной вершиной“.

4. На сфере должно быть установлено направление вращения, которое считается положительным: по часовой стрелке или против часовой стрелки, т. е. правостороннее или левостороннее. Противоположное вращение будет считаться тогда отрицательным.

5. Под углом (ab) разумеется тот угол, на который нужно, стоя на сфере в вершине угла, повернуть вокруг нее положительное направление окружности a в сторону положительного вращения до совмещения с положительным направлением окружности b .

Если мы изменим положительное направление на одной из сторон угла на противоположное, то угол (ab) переходит в $180^\circ + (ab)$. Одновременное изменение положительного направления на обеих сторонах угла оставляет угол без изменения.

Если же мы меняем направление положительного вращения на сфере или заменяем вершину угла противоположной, то угол (ab) переходит в $360^\circ - (ab)$.

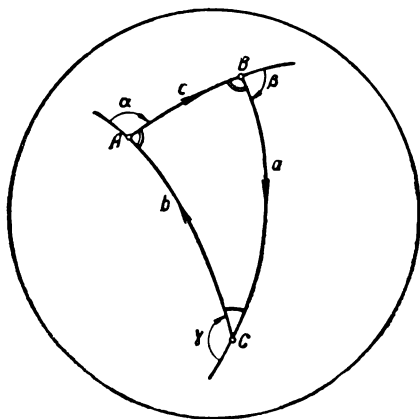
Если на сфере даны три точки A , B и C , то, обозначая по Мёбиусу углы сферического треугольника ABC соответственно буквами α , β и γ , можно сказать, что углы треугольника определяются вершинами A , B и C и равны:

$$\alpha = (bc),$$

$$\beta = (ca),$$

$$\gamma = (ab).$$

В § 3 было сказано, что три точки на сфере определяют 16 треугольников Мёбиуса. Это объясняется тем, что на каждой из трех дуг, образующих его стороны, может быть выбрано двумя способами положительное направление, и, кроме того, положительное направление вращения на сфере также может быть выбрано двумя способами, так что получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ комбинаций.



Черт. 72

Заметим, что если мы возьмем эйлеров треугольник, то в обозначениях Мёбиуса углы его будут отличаться от углов, принимаемых обычно (их мы попрежнему будем обозначать буквами A , B и C). Эйлеров треугольник в эйлеровых обозначениях называется обыкновенным треугольником. В обозначениях Мёбиуса это будет мёбиусов треугольник первого типа или типа $T_{00}^{(0)}$. Из черт. 72 видно, что между мёбиусовыми и обыкновенными углами существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - A \\ \beta &= 180^\circ - B \\ \gamma &= 180^\circ - C \end{aligned} \right\}. \quad (I)$$

Вследствие этого формулы, выведенные нами в предыдущем изложении для обыкновенных треугольников, для треугольников Мёбиуса будут иметь следующий вид:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha; \quad (11')$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a; \quad (12')$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}; \quad (13')$$

$$\sin a \cos \beta + \cos b \sin c + \sin b \cos c \cos \alpha = 0; \quad (15')$$

$$\sin \alpha \cos b + \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a = 0; \quad (16')$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b + \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 0; \quad (17')$$

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}; \quad (24')$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}}; \quad (25')$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin (p-b) \sin (p-c)}}; \quad (26')$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) &= - \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= - \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b)} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\}; \quad (34')$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+b) &= - \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b) &= - \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \end{aligned} \right\}; \quad (35')$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (\alpha+\beta) &= \pm \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{1}{2} (\alpha-\beta) &= \mp \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{1}{2} (\alpha+\beta) &= \mp \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{1}{2} (\alpha-\beta) &= \pm \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (33')$$

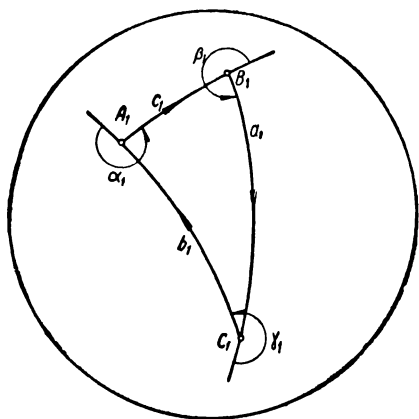
Формулы, для удобства сравнения, отмечены теми же номерами, как и соответствующие им формулы для обыкновенного треугольника в предыдущем изложении, только со значками ' сверху. В формулах (24'), (25'), (26') и (33') выбор верхнего или нижнего знака зависит от типа треугольника. Так, например, для первого типа нужно взять верхний знак, а для второго типа — нижний.

Возможны два, и только два, типа треугольников, у которых все стороны меньше 180° . Это, во-первых, треугольники, подобные изображенному на черт. 72, т. е. треугольники первого типа, у которых все углы также меньше 180° . Если, не изменяя длины сторон такого треугольника, мы изменим направление положительного вращения на сфере, то получим треугольник второго типа (черт. 73), у которого все стороны меньше 180° , а все углы больше 180° . У остальных типов треугольников по крайней мере одна сторона и один угол должны быть больше 180° .

Из сравнения чертежей 72 и 73 видно, что углы этих треугольников взаимно дополняют друг друга до 360° , т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 360^\circ - \alpha, \\ \beta_1 &= 360^\circ - \beta, \\ \gamma_1 &= 360^\circ - \gamma. \end{aligned}$$

Треугольник второго типа может быть также получен, если мы, не изменяя направления положительного вращения на сфере и длины сторон треугольника первого типа, расположим буквы при его вершинах в обратном

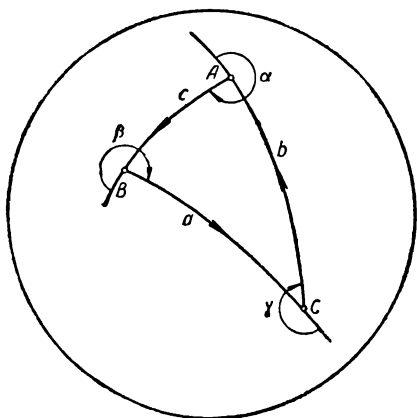


Черт. 73

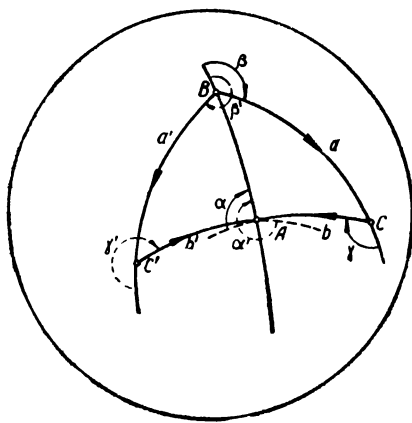
порядке и одновременно изменим положительное направление на каждой из сторон на обратное, как это изображено на черт. 74.

Принимая во внимание условие 2 (см. выше стр. 123), можно сказать, что мы меняем при этом направление обхода треугольника. Таким образом, если направление обхода треугольника и направление положительного вращения на сфере совпадают, то получается треугольник первого типа, если же эти направления противоположны, то — второго типа, при условии, конечно, что все три стороны меньше 180° .

Особый интерес в практическом отношении представляет случай, когда оба рассматриваемые треугольника симметричны и имеют одну общую сторону, каковы, например, сферические треугольники ABC и ABC' на черт. 75. Так как в треугольнике ABC направление обхода совпадает с направлением вращения на сфере, то это будет треугольник первого типа, и наоборот, треугольник ABC' , симметричный с ним, будет треугольником второго типа, так как для него обход и вращение на сфере имеют противоположные направления. Так как в симметричных треугольниках эйлеровы углы попарно соответ-



Черт. 74



Черт. 75

ственно равны („против равных сторон лежат и равные углы“), то равны между собою попарно и смежные с ними углы (обыкновенные, не мёбиусовы), а следовательно, как это легко усмотреть из чертежа, мёбиусовы углы одного треугольника дополняют до 360° мёбиусовы углы другого. Обозначая для отличия мёбиусовы углы треугольника ABC' буквами α' , β' и γ' и помня, что по данному

$$\begin{aligned} a' &= a, \\ b' &= b \end{aligned}$$

и c — общая сторона, можем предыдущее заключение записать так:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 360^\circ - \alpha, \\ \beta' &= 360^\circ - \beta, \\ \gamma' &= 360^\circ - \gamma. \end{aligned}$$

На практике такой случай может представиться, например, при решении следующей задачи.

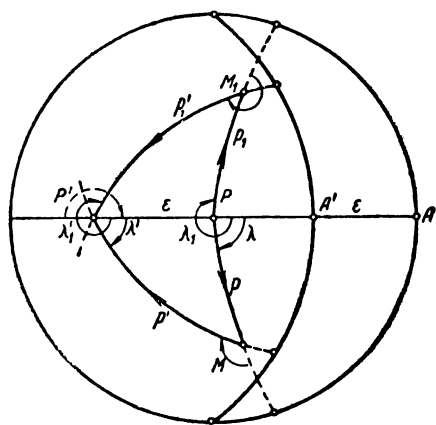
Задача. Даны две системы сферических координат $[PA]$ и $[P'A']$, из которых вторая получена из первой перемещением полюса P в точку P' по окружности большого круга $AA'PP'$ на дугу $PP' = \epsilon$ („преобразование полюса“, см. § 35). Даны, кроме того, точка $M(\varphi, \lambda)$ и точка M_1 , симметричная с точкой M относительно большого круга $AA'PP'$. Требуется найти координаты φ_1, λ_1 точки M_1 в системе $[PA]$ и координаты той и другой точки в системе $[P'A']$ (см. черт. 76).

Так как точки M_1 и M симметричны относительно большого круга $AA'PP'$, т. е. они лежат на одном большом круге (этот круг не показан на черт. 76), перпендикулярном к кругу $AA'PP'$ и на равных сферических расстояниях от него, то треугольники $P'PM$ и $P'PM_1$ будут симметричны. Отсюда непосредственно заключаем с помощью чертежа 76, что

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p, \\ \varphi_1 &= \varphi, \\ \lambda_1 &= 360^\circ - \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Точно так же

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= p', \\ \varphi'_1 &= \varphi', \\ \lambda'_1 &= 360^\circ - \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$



Черт. 76

Чтобы выразить искомые величины через данные, надо прибегнуть к решению сферических треугольников $P'PM$ и $P'PM_1$, в каждом из которых нам известны по две стороны и углу между ними: в треугольнике $P'PM$ — ϵ , p и угол (ϵp) , а в треугольнике $P'PM_1$ — ϵ и p_1 и угол (ϵp_1) . Для треугольника $P'PM$ можно либо воспользоваться обычной астрономической системой формул, либо решать его по совокупности формул (11'), (13') и (15') настоящего параграфа. В обоих случаях в согласии с результатами пункта 4 параграфа 35 получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos p' &= \cos \epsilon \cos p - \sin \epsilon \sin p \cos \lambda, \\ \sin p' \sin \lambda' &= \sin \lambda \sin p, \\ \sin p' \cos \lambda' &= \cos p \sin \epsilon + \sin p \cos \epsilon \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Для треугольника $P'PM_1$ при решении его по формулам (11'), (13') и (15') ввиду того, что

$$\begin{aligned} \text{угол } (\epsilon p_1) &= \lambda_1, \\ \text{а угол } (p'_1 \epsilon) &= 180^\circ + (360^\circ - \lambda'_1) = 540^\circ - \lambda'_1, \end{aligned}$$

аналогично найдем:

$$\left. \begin{aligned} \cos p'_1 &= \cos p_1 \cos \epsilon - \sin p_1 \sin \epsilon \cos \lambda_1, \\ \sin \lambda'_1 \sin p'_1 &= \sin \lambda_1 \sin p_1, \\ \sin p'_1 \cos \lambda'_1 &= \cos p_1 \sin \epsilon + \sin p_1 \cos \epsilon \cos \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Но ввиду равенств (а) и (б) формулы (г) тождественны с формулами (в) и задача может быть решена либо по совокупности формул (в), либо по совокупности формул (г). Обычно она и решается по формулам (в), а когда λ' найдено, λ'_1 вычисляют по последней из формул (б). Обращаем внимание на то, что и третий угол треугольника $P'PM_1$, т. е. угол $(p_1 p'_1)$, больше 180° .

Можно привести и другие практические задачи, в которых приходится иметь дело с мёбиусовыми треугольниками второго типа.

Приложение 1

ЗАДАЧИ ПО СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

Настоящее собрание задач, примеров и вопросов по сферической геометрии и, главным образом, тригонометрии составлено в помощь изучающим и преподающим этот предмет и дает достаточный материал для текущих упражнений и для самостоятельных занятий учащихся. Часть задач составлена автором, а часть заимствована из различных учебников и руководств. Большинство задач снабжено ответами, а многие — также указаниями или примечаниями. Это, главным образом, имеет место для более трудных задач. Такие задачи отмечены знаком * после номера.

Задачи распределены на восемь отделов, которые в общем соответствуют главам настоящего курса. Исключение представляет отдел II — Задачи на построение и отдел VIII — Общий отдел. В этом последнем отделе помещены задачи, либо относящиеся к нескольким главам курса, либо выходящие за его рамки, либо представляющие какой-либо специальный интерес или трудность. В отделах III — Прямоугольные сферические треугольники и IV — Косоугольные сферические треугольники приведены задачи и на случаи решения треугольников, не рассмотренные в соответствующих главах курса. Имеются и некоторые другие более мелкие отступления в распределении задач по отделам по сравнению с расположением материала курса.

В каждом отделе задачи разделены на группы и расположены в логической и методической последовательности. В ряде случаев даются ссылки на соответствующие параграфы курса. Вычисления для получения числовых ответов выполнялись с 4-, 5-, 6- или 7-значными таблицами; об этом имеются указания в ответах. Указания и примечания помещены все вместе после текста задач под номерами тех задач, к которым они относятся. Вслед за этим таким же порядком помещены ответы.

Отдел I

Геометрия на сфере

а) Теоремы (гл. I, §§ 5, 8, 9).

Доказать следующие теоремы:

- 1*. Из данной точки на поверхности шара можно опустить только один сферический перпендикуляр на данный большой круг.
2. Если a, b, c — стороны сферического треугольника, а a', b', c' — сходственные стороны полярного треугольника и если $a > b > c$, то $a' < b' < c'$.
3. Если из точки внутри сферического треугольника проведены две дуги больших кругов к концам одной из сторон, то сумма этих дуг меньше суммы двух других сторон треугольника.
4. В сферическом равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
5. Если в сферическом треугольнике два угла равны, то и противолежащие им стороны также равны.
6. В сферическом равнобедренном треугольнике медиана основания является одновременно и высотой и биссектрисой угла, противолежащего основанию.
- 7*. Если сумма двух сторон сферического треугольника равна 180° , то и сумма противолежащих им углов также равна 180° .
- 8*. Если сумма двух углов сферического треугольника равна 180° , то и сумма противолежащих им сторон равна 180° .
- 9*. В сферическом треугольнике против большего угла лежит и большая сторона.
- 10*. В сферическом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.
11. Каждая точка биссектрисы сферического угла равноудалена от сторон угла.
12. Биссектрисы углов сферического треугольника пересекаются в одной точке, которая равноудалена от сторон треугольника.
13. Три высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке.
14. Три медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.
15. Сферические перпендикуляры, восстановленные в серединах сторон сферического треугольника, пересекаются в одной точке, которая равноудалена от вершин треугольника.

б) Геометрические места (гл. I, §§ 5, 9)

16. Найти геометрическое место точек на поверхности сферы, имеющих одинаковое сферическое расстояние от одной из ее точек.
17. Найти геометрическое место точек на поверхности шара, находящихся на одинаковом сферическом расстоянии от двух данных точек на его поверхности.
18. Найти геометрическое место точек, отстоящих от данного большого круга на сферическом расстоянии a .

Отдел II

Задачи на построение (гл. I)

- 1*. Построить малый круг (или дугу малого круга) со сферическим центром в любой точке сферы и с произвольным сферическим радиусом.
2. Провести на сфере окружность малого круга данного сферического радиуса и с центром в данной точке сферы.
- 3*. Найти линейный радиус данного малого круга.
- 4*. Построением на сфере и на вспомогательной плоскости найти радиус данной сферы.
- 5*. Построить на сфере дугу большого круга, равную 90° .
- 6*. Через две данные точки на сфере провести дугу большого круга.
7. Построить на сфере дугу большого круга, равную данной дуге.
8. Построить дугу большого круга, дополняющую данную до 180° .

9. К дуге большого круга, полюс которой неизвестен, восстановить сферический перпендикуляр в данной ее точке.
10. На данную дугу большого круга, полюс которой неизвестен, опустить из данной вне ее точки сферический перпендикуляр.
11. Разделить пополам данную дугу большого круга.
12. Построить сферический угол, равный данному сферическому углу.
13. Построить сферический угол, дополняющий данный до 180° .
14. Разделить данный сферический угол пополам.
15. Построить на сфере угол, численно равный данной дуге большого круга.
- 16*. Построить на сфере дугу большого круга, численно равную данному плоскому углу.
- 17*. Восставить сферический перпендикуляр в середине данной дуги малого круга.
- 18*. Найти сферический центр и сферический радиус данного малого круга.
- 19*. Через три данные точки провести малый круг; найти его сферический и линейный радиусы.
20. Дана дуга большого круга a ; построить сферический угол A , удовлетворяющий условию:

$$A + a = 180^\circ.$$

21. Дан сферический угол A ; построить дугу большого круга a , удовлетворяющую условию:

$$a + A = 180^\circ.$$

22. Построить сферический треугольник по трем данным его сторонам. Исследовать решение.
23. Построить сферический треугольник по данным двум его сторонам и углу между ними. Исследовать решение.
24. Построить сферический треугольник по двум данным его углам и стороне, заключенной между ними. Исследовать решение.
25. Построить сферический треугольник по двум данным его сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон. Исследовать решение.
- 26*. Построить сферический треугольник по двум данным его углам и стороне, противолежащей одному из них. Исследовать решение.
- 27*. Построить сферический треугольник по трем данным его углам. Исследовать решение.
28. Построить прямоугольный сферический треугольник по двум данным его катетам. Исследовать решение.
29. Построить прямоугольный сферический треугольник по катету и гипотенузе. Исследовать решение.
30. Построить прямоугольный сферический треугольник по гипотенузе и косвенному углу. Исследовать решение.
31. Построить сферический прямоугольный треугольник по катету и прилежащему косвенному углу. Исследовать решение.
- 32*. Построить прямоугольный сферический треугольник по катету и противолежащему косвенному углу. Исследовать решение.
- 33*. Построить прямоугольный сферический треугольник по двум его косвенным углам. Исследовать решение.
34. Найти на поверхности шара точку, находящуюся на равном расстоянии от трех данных точек на его поверхности.
- 35*. Через данную точку сферы провести большой круг, касательный к данному малому кругу.

Отдел III

Прямоугольные сферические треугольники (гл. III, § 22)

- а)
 1. В прямоугольном сферическом треугольнике даны: гипотенуза $a = 61^\circ 7' 8''$ и катет $b = 33^\circ 18' 17''$; решить треугольник.
 2. Даны: гипотенуза $a = 32^\circ 8' 0''$ и катет $b = 23^\circ 50' 48''$; решить треугольник.
 3. Даны: гипотенуза $a = 64^\circ 3' 10''$ и катет $b = 40^\circ 4' 16''$; решить треугольник.
 4. Даны: гипотенуза $a = 107^\circ 17' 0''$ и катет $b = 143^\circ 12' 3''$; решить треугольник.
 5. Даны: гипотенуза $a = 80^\circ 52' 27''$ и катет $c = 72^\circ 13' 48''$; решить треугольник.
 6. Даны: гипотенуза $a = 78^\circ 21' 49''$ и катет $c = 78^\circ 3' 4''$; решить треугольник.
 7. Даны: гипотенуза $a = 83^\circ 1' 4''$ и катет $c = 65^\circ 22' 56''$; решить треугольник.
 8. Даны: гипотенуза $a = 115^\circ 56' 50''$ и катет $c = 124^\circ 52' 25''$; решить треугольник.
- б)
 9. В прямоугольном сферическом треугольнике даны оба катета: $b = 47^\circ 15'$ и $c = 56^\circ 25'$; решить треугольник.
 10. Даны: катеты $b = 63^\circ 31' 26''$ и $c = 58^\circ 40' 30''$; решить треугольник.
 11. Даны: катеты $b = 2^\circ 44' 0''$ и $c = 11^\circ 38' 11''$; решить треугольник.
 12. Даны: катеты $b = 50^\circ 0' 0''$ и $c = 52^\circ 55' 26''$; решить треугольник.
 13. Даны: катеты $b = 57^\circ 13' 0''$ и $c = 98^\circ 47' 0''$; решить треугольник.
 14. Даны: катеты $b = 108^\circ 7' 0''$ и $c = 39^\circ 3' 5''$; решить треугольник.

15. Даны: катеты $b = 43^\circ 18' 2''$ и $c = 118^\circ 53' 58''$; решить треугольник.
16. Даны: катеты $b = 75^\circ 18' 12''$ и $c = 118^\circ 9' 21''$; решить треугольник.
в)
17. В прямоугольном сферическом треугольнике даны: гипотенуза $a = 40^\circ 33' 50''$ и острый угол $B = 65^\circ 58' 47''$; решить треугольник.
18. Даны: гипотенуза $a = 127^\circ 32' 26''$ и угол $B = 21^\circ 8' 18''$; решить треугольник.
19. Даны: гипотенуза $a = 120^\circ 38' 43''$ и угол $B = 44^\circ 54' 44''$; решить треугольник.
20. Даны: гипотенуза $a = 115^\circ 17' 20''$ и угол $B = 98^\circ 28' 30''$; решить треугольник.
21. Даны: гипотенуза $a = 60^\circ 21' 19''$ и угол $C = 32^\circ 39' 23''$; решить треугольник.
22. Даны: гипотенуза $a = 87^\circ 16' 0''$ и угол $C = 76^\circ 57' 43''$; решить треугольник.
23. Даны: гипотенуза $a = 120^\circ 38' 43''$ и угол $C = 135^\circ 5' 16''$; решить треугольник.
24. Даны: гипотенуза $a = 161^\circ 13' 5'',3$ и угол $C = 36^\circ 12' 10'',0$; решить треугольник.
г)
25. В прямоугольном сферическом треугольнике даны: катет $b = 54^\circ 8' 20''$ и прилежащий угол $C = 73^\circ 11' 6''$; решить треугольник.
26. Даны: катет $c = 37^\circ 52' 18''$ и прилежащий угол $B = 49^\circ 21' 45''$; решить треугольник.
27. Даны: катет $b = 60^\circ 38' 7''$ и прилежащий угол $C = 40^\circ 56' 23''$; решить треугольник.
28. Даны: катет $c = 38^\circ 25' 51''$ и прилежащий угол $B = 47^\circ 30' 18''$; решить треугольник.
29. Даны: катет $b = 50^\circ 0' 0''$ и прилежащий угол $C = 59^\circ 56' 10''$; решить треугольник.
30. Даны: катет $c = 2^\circ 44' 0''$ и прилежащий угол $B = 78^\circ 21' 49''$; решить треугольник.
31. Даны: катет $b = 28^\circ 7' 10''$ и прилежащий угол $C = 8^\circ 19' 25''$; решить треугольник.
32. Даны: катет $b = 64^\circ 30' 9''$ и прилежащий угол $C = 132^\circ 44' 57''$; решить треугольник.
д)
33. Решить прямоугольный сферический треугольник по катету b и противолежащему ему углу B .
34. В прямоугольном сферическом треугольнике даны: катет $b = 38^\circ 29'$ и противолежащий угол $B = 55^\circ 34'$; решить треугольник.
35. Даны: катет $b = 29^\circ 31' 40''$ и противолежащий угол $B = 60^\circ 28' 5''$; решить треугольник.
36. Даны: катет $b = 35^\circ 3' 0''$ и противолежащий угол $B = 49^\circ 7' 0''$; решить треугольник.
37. Даны: катет $b = 108^\circ 41' 36''$ и противолежащий угол $B = 102^\circ 35' 40''$; решить треугольник.
38. Даны: катет $c = 54^\circ 28' 11''$ и противолежащий угол $C = 62^\circ 47' 49''$; решить треугольник.
39. Даны: катет $c = 56^\circ 37' 40''$ и противолежащий угол $C = 84^\circ 29' 50''$; решить треугольник.
40. Даны: катет $c = 57^\circ 54' 0''$ и противолежащий угол $C = 77^\circ 48' 0''$; решить треугольник.
41. Даны: катет $c = 142^\circ 35' 49''$ и противолежащий угол $C = 135^\circ 5' 16''$; решить треугольник.
е)
42. Решить прямоугольный сферический треугольник по двум его косвенным углам B и C .
43. В прямоугольном сферическом треугольнике даны два его косвенных угла: $B = 58^\circ 27' 40''$ и $C = 53^\circ 43' 14''$; решить треугольник.
44. Даны: углы $B = 32^\circ 14' 3''$ и $C = 64^\circ 59' 40''$; решить треугольник.
45. Даны: углы $B = 42^\circ 38' 51''$ и $C = 63^\circ 13' 22''$; решить треугольник.
46. Даны: углы $B = 11^\circ 56' 56''$ и $C = 87^\circ 16' 0''$; решить треугольник.
47. Даны: углы $B = 74^\circ 30' 0''$ и $C = 66^\circ 20' 0''$; решить треугольник.
48. Даны: углы $B = 48^\circ 12' 17''$ и $C = 52^\circ 30' 0''$; решить треугольник.
49. Даны: углы $B = 70^\circ 5' 2''$ и $C = 140^\circ 10' 4''$; решить треугольник.
50. Даны: углы $B = 13^\circ 19' 0''$ и $C = 87^\circ 16' 0''$; решить треугольник.

Отдел IV

Косоугольные треугольники (гл. IV, § 27)

а) Теоремы (гл. IV, §§ 25 и 27)

Доказать теоремы:

- 1*. Если сумма двух сторон сферического треугольника менее 180° , то и сумма противолежащих им углов также менее 180° .
- 2*. Если сумма двух сторон сферического треугольника более 180° , то и сумма противолежащих им углов также больше 180° .
б)
3. В сферическом треугольнике известны три стороны: $a = 84^\circ 49' 0''$; $b = 79^\circ 26' 0''$; $c = 87^\circ 48' 0''$; найти угол A .

4. Даны три стороны: $a = 136^{\circ}20'$; $b = 76^{\circ}35'$; $c = 86^{\circ}37'$; найти угол A .
5. Даны три стороны: $a = 47^{\circ}45'39''$; $b = 69^{\circ}49'19''$; $c = 80^{\circ}17'36''$; найти угол A .
6. В сферическом треугольнике даны три его стороны: $a = 20^{\circ}14'40''$; $b = 39^{\circ}27'12''$; $c = 50^{\circ}54'42''$; решить треугольник.
7. Даны три стороны: $a = 79^{\circ}33'20''$; $b = 65^{\circ}28'20''$; $c = 37^{\circ}52'40''$; решить треугольник.
8. Даны три стороны: $a = 100^{\circ}0'0''$; $b = 80^{\circ}0'0''$; $c = 60^{\circ}0'0''$; решить треугольник.
9. Даны три стороны: $a = 72^{\circ}14'26''$; $b = 110^{\circ}18'20''$; $c = 48^{\circ}50'42''$; решить треугольник.
10. Даны три стороны: $a = 171^{\circ}18'12''$; $b = 54^{\circ}7'16''$; $c = 133^{\circ}9'24''$; решить треугольник.
11. Даны три стороны: $a = 76^{\circ}35'36''$; $b = 50^{\circ}10'30''$; $c = 40^{\circ}0'10''$; решить треугольник.
12. Даны три стороны: $a = 65^{\circ}24'32'',6$; $b = 75^{\circ}23'8'',4$; $c = 56^{\circ}15'24'',8$; решить треугольник.
13. Даны три стороны: $a = 113^{\circ}2'56'',64$; $b = 82^{\circ}39'28'',40$; $c = 74^{\circ}54'31'',06$; решить треугольник.
14. В сферическом треугольнике даны две стороны и угол, заключенный между ними: $a = 38^{\circ}27'$; $b = 50^{\circ}17'$; $C = 47^{\circ}20'$; найти сторону c .
15. Даны: $a = 34^{\circ}14'15''$; $b = 30^{\circ}3'29''$; $C = 7^{\circ}13'15''$; найти сторону c .
16. Даны: $b = 33^{\circ}15'40''$; $c = 79^{\circ}36'42''$; $A = 83^{\circ}34'49''$; найти сторону a .
17. В сферическом треугольнике даны две стороны и угол, заключенный между ними: $a = 38^{\circ}15'6''$; $b = 75^{\circ}10'8''$; $C = 52^{\circ}14'16''$; решить треугольник.
18. Даны: $a = 96^{\circ}0'0''$; $b = 80^{\circ}0'0''$; $C = 100^{\circ}0'0''$; решить треугольник.
19. Даны: $b = 112^{\circ}57'10''$; $c = 86^{\circ}3'13''$; $A = 56^{\circ}43'0''$; решить треугольник.
20. Даны: $a = 113^{\circ}2'56'',64$; $b = 82^{\circ}39'28'',40$; $C = 138^{\circ}50'13'',69$; решить треугольник.
21. Даны: $a = 50^{\circ}10'30'',00$; $c = 40^{\circ}0'10'',00$; $A = 121^{\circ}36'19'',82$; решить треугольник.
22. В сферическом треугольнике даны два угла и сторона, заключенная между ними: $A = 59^{\circ}32'16''$; $B = 77^{\circ}18'20''$; $c = 34^{\circ}29'34''$; решить треугольник.
23. Даны: $A = 90^{\circ}26',8$; $B = 72^{\circ}54',3$; $c = 17^{\circ}58',9$; решить треугольник.
24. Даны: $B = 111^{\circ}32',0$; $C = 75^{\circ}50',7$; $a = 66^{\circ}31',8$; решить треугольник.
25. Даны: $a = 64^{\circ}2'41''$; $B = 22^{\circ}48'9''$; $C = 106^{\circ}43'40''$; решить треугольник.
26. Даны: $b = 22^{\circ}4'47''$; $A = 74^{\circ}32'10''$; $C = 61^{\circ}9'50''$; решить треугольник.
27. Даны: $b = 118^{\circ}50'0''$; $C = 49^{\circ}18'0''$; $A = 61^{\circ}40'0''$; решить треугольник.
28. Даны: $A = 66^{\circ}35'40''$; $B = 20^{\circ}42'20''$; $c = 77^{\circ}11'20''$; решить треугольник.
29. Даны: $a = 100^{\circ}0'0''$; $B = 39^{\circ}4'28''$; $C = 57^{\circ}46'10''$; решить треугольник.
30. Решить сферический треугольник по двум его сторонам и углу, противолежащему одной из них.
31. В сферическом треугольнике даны две стороны и угол, противолежащий одной из них: $a = 63^{\circ}22'30''$; $b = 81^{\circ}14'20''$; $A = 54^{\circ}39'10''$; решить треугольник.
32. Даны: $a = 80^{\circ}0'0''$; $b = 60^{\circ}0'0''$; $A = 40^{\circ}0'0''$; решить треугольник.
33. Даны: $a = 20^{\circ}16'38''$; $b = 56^{\circ}19'40''$; $A = 20^{\circ}9'55''$; решить треугольник.
34. Даны: $a = 31^{\circ}2'0''$; $b = 40^{\circ}7'0''$; $A = 21^{\circ}10'0''$; решить треугольник.
35. Даны: $a = 63^{\circ}50'0''$; $b = 80^{\circ}19'0''$; $A = 51^{\circ}30'0''$; решить треугольник.
36. Даны: $a = 113^{\circ}3'$; $b = 82^{\circ}39'$; $A = 116^{\circ}20'$; решить треугольник.
37. Даны: $b = 50^{\circ}10'30'',0$; $c = 40^{\circ}0'10'',0$; $C = 34^{\circ}15'2'',8$; решить треугольник.
38. Даны: $a = 113^{\circ}2'56'',64$; $b = 82^{\circ}39'28'',40$; $A = 116^{\circ}20'2'',20$; решить треугольник.
39. Решить сферический треугольник по двум его углам и по стороне, противолежащей одному из них.
40. В сферическом треугольнике даны два угла и сторона, противолежащая одному из них: $A = 67^{\circ}42',7$; $B = 83^{\circ}41',6$; $a = 37^{\circ}6',6$; решить треугольник.
41. Даны: $A = 73^{\circ}56'15''$; $B = 52^{\circ}13'29''$; $a = 48^{\circ}35'17''$; решить треугольник.
42. Даны: $A = 46^{\circ}37'36''$; $B = 109^{\circ}29'18''$; $a = 40^{\circ}53'24''$; решить треугольник.
43. Даны: $A = 59^{\circ}30'40''$; $B = 73^{\circ}13'22''$; $a = 61^{\circ}5'12''$; решить треугольник.
44. Даны: $b = 54^{\circ}54'32''$; $A = 33^{\circ}22'45''$; $B = 44^{\circ}10'41''$; решить треугольник.
45. Даны: $B = 130^{\circ}5'22''$; $A = 32^{\circ}26'7''$; $b = 84^{\circ}14'29''$; найти сторону a .
46. Даны: $b = 44^{\circ}55'5''$; $A = 152^{\circ}3'10''$; $B = 100^{\circ}2'4''$; решить треугольник.
47. Даны: $A = 71^{\circ}26'19''$; $B = 52^{\circ}33'46''$; $b = 56^{\circ}23'42''$; решить треугольник.
48. Решить сферический треугольник по трем данным его углам A , B и C .
49. В сферическом треугольнике даны три его угла: $A = 67^{\circ}42',7$; $B = 83^{\circ}41',6$; $C = 36^{\circ}10',7$; найти сторону a .
50. Даны три угла: $A = 90^{\circ}40'16''$; $B = 71^{\circ}0'13''$; $C = 43^{\circ}4'39''$; найти сторону a .
51. В сферическом треугольнике даны три его угла: $A = 62^{\circ}5'40''$; $B = 54^{\circ}36'10''$; $C = 70^{\circ}14'30''$; решить треугольник.
52. Даны три угла: $A = 82^{\circ}45'40''$; $B = 65^{\circ}11'20''$; $C = 44^{\circ}37'20''$; решить треугольник.
53. Даны три угла: $A = 40^{\circ}0'48''$; $B = 95^{\circ}2'16''$; $C = 73^{\circ}4'34''$; решить треугольник.

54. Даны три угла: $A = 49^\circ 54' 13''$; $B = 108^\circ 30' 47''$; $C = 44^\circ 50' 42''$; решить треугольник.
 55. Даны три угла: $A = 107^\circ 45' 34''$; $B = 69^\circ 41' 40''$; $C = 131^\circ 9' 18''$; решить треугольник.
 56. Даны три угла: $A = 114^\circ 19' 40''$; $B = 130^\circ 42' 45''$; $C = 131^\circ 54' 37''$; решить треугольник.

Отдел V

Элементарные сферические треугольники. Дифференциальные соотношения

- а) Элементарные сферические треугольники (гл. V, § 28)
 1. В сферическом треугольнике даны: $b = 30^\circ 0' 0''$; $c = 1^\circ 0' 0''$; $A = 45^\circ 0' 0''$; найти сторону a и угол C .
 2*. Решить элементарный сферический треугольник, у которого $A = 50^\circ 0' 0''$; $b = 40^\circ 0' 0''$; $c = 0^\circ 48' 6''$.
 3*. В элементарном прямоугольном сферическом треугольнике даны: гипотенуза $a = 1^\circ 0' 0''$ и острый угол $C = 45^\circ 0' 0''$; решить треугольник.
 б) Треугольники, у которых две стороны близки к 90°
 4*. Доказать теорему: если в сферическом треугольнике ABC стороны b и c отличаются от 90° на малые величины x и y соответственно, то угол $A = a + \delta$, где δ'' , с точностью до малых третьего порядка относительно x и y , выражается формулой:
- $$\delta'' = \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \sin 1'' \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \sin 1'' \operatorname{ctg} \frac{a}{2}.$$
- 5*. В сферическом треугольнике даны: $a = 36^\circ 14' 0''$; $b = 87^\circ 56' 50''$; $c = 88^\circ 53' 40''$; найти угол A .
 в) Дифференциальные соотношения (гл. VIII, § 40)
 6. В сферическом треугольнике даны: $a = 123^\circ 51' 41''$, $b = 30^\circ 3' 30''$; $c = 134^\circ 5' 28''$ и $A = 82^\circ 48' 32''$, $B = 36^\circ 45' 31''$; $C = 120^\circ 53' 28''$, а также $da = +4''$, $db = +7''$, $dc = -10''$; найти dA , dB и dC .
 7. В сферическом треугольнике даны: $a = 40^\circ 42' 23''$; $A = 52^\circ 17' 54''$; $dA = 0^\circ 20' 13''$; найти da .
 г) Натуральные поправки малых углов, выраженных в часовых мерах (гл. V, § 29)
 8*. Найти синус угла $3m47^s,376$.
 9. Найти синус угла $5m33^s,837$.
 10. Найти тангенс угла $4m39^s,826$.
 11. Найти тангенс угла $6m21^s,591$.
 12. Найти в часовых единицах угол, тангенс которого равен 0,01654.
 13. Найти угол (в часовых мерах), синус которого равен 0,02034₈.
 14. Найти угол (в часовых единицах), синус которого равен 0,02774₇.
 15. Найти в часовых минутах и секундах угол, тангенс которого равен 0,02428₂.
 16*. Вычислить непосредственно натуральные поправки для углов $11m8^s$ и $11m9^s$.
 17. Дано: $\operatorname{tg} m = m_0$; $m_0^s = 352^s,88$; найти m в часовых минутах и секундах.
 18*. Дано: $\sin n = n_0$; $n_0^s = 668^s,13$; найти n в часовых минутах и секундах.
 д) Логарифмические поправки малых углов
 19*. Найти логарифмы синуса, тангенса и косинуса угла $1^\circ 35' 16''$, 5.
 20. Дано: $\lg \sin x = 8.78562 - 10$; найти угол x .
 21. Дано: $\lg \operatorname{tg} x = 8.68353 - 10$; найти угол x .
 22*. Найти $\lg \sin$ и $\lg \operatorname{tg}$ угла $1^\circ 22' 11''$.
 23. По $\lg \sin x = 8.41573$ найти угол x .

Отдел VI

Сферический избыток и площадь поверхности сферических фигур

- а) Вычисление сферического избытка треугольника по трем его углам (гл. I, § 8)
 1. Углы сферического треугольника равны 45° , 60° и 135° ; найти его сферический избыток ϵ .
 2. Углы сферического треугольника равны: $A = 67^\circ 42' 7''$; $B = 83^\circ 41' 6''$; $C = 36^\circ 10' 7''$; найти его сферический избыток ϵ .
 3. Углы сферического треугольника равны: $A = 153^\circ 16' 53''$; $B = 142^\circ 34' 4''$; $C = 140^\circ 1' 53''$; найти его сферический избыток ϵ .
 б) Вычисление сферического избытка треугольника по трем сторонам и одному из углов (гл. IV, § 26)
 4. В сферическом треугольнике даны: $a = 116^\circ 18' 3''$; $b = 89^\circ 27' 6''$; $c = 140^\circ 53' 5''$; $C = 149^\circ 25' 6''$; найти его сферический избыток ϵ .
 5. В сферическом треугольнике даны: $a = 35^\circ 41' 28''$; $b = 56^\circ 16' 40''$; $c = 29^\circ 18' 10''$; $C = 29^\circ 47' 1''$; найти его сферический избыток ϵ .
 6. В сферическом треугольнике даны: $a = 36^\circ 14' 28''$; $b = 128^\circ 17' 22''$; $c = 107^\circ 15' 55''$; $B = 132^\circ 20' 34''$; найти его сферический избыток ϵ .

7. В сферическом треугольнике даны: $a = 48^{\circ}36'2''$; $b = 45^{\circ}48'6''$; $c = 17^{\circ}58'9''$; $A = 90^{\circ}26'8''$; найти его сферический избыток ϵ .
в) Вычисление сферического избытка треугольника по трем сторонам (гл. IV, § 26)
8. В сферическом треугольнике даны три его стороны: $a = 92^{\circ}28'4''$; $b = 67^{\circ}36'6''$; $c = 40^{\circ}37'9''$; найти его сферический избыток ϵ .
- 9*. Даны три стороны: $a = 60^{\circ}31'42''$; $b = 117^{\circ}28'19''$; $c = 78^{\circ}42'23''$; найти сферический избыток треугольника ϵ .
10. Даны три стороны: $a = 136^{\circ}48'4''$; $b = 112^{\circ}16'9''$; $c = 102^{\circ}3'7''$; найти сферический избыток треугольника ϵ .
11. Даны три стороны: $a = 65^{\circ}24'32''6$; $b = 75^{\circ}23'8''4$; $c = 56^{\circ}15'24''8$; найти сферический избыток треугольника ϵ .
- г) Площади сферических фигур (гл. VI, § 31)
12. Угол двуугольника на сфере, радиус которой $R = 7,5$ см, равен $A = 28^{\circ}37'$; найти площадь поверхности этого двуугольника.
13. Угол при вершине двуугольника равен 15° , а радиус шара равен 52 мм; чему равна поверхность двуугольника в отношении ее к поверхности шара и в квадратных миллиметрах?
14. Найти площадь двуугольника с углом в 36° , расположенного на шаре, площадь которого равна 46 кв. м.
15. Вычислить площадь сферического треугольника, углы которого: $A = 87^{\circ}45'4''$; $B = 120^{\circ}23'5''$; $C = 98^{\circ}53'7''$, а радиус сферы $R = 7,5$ см.
16. В сферическом треугольнике даны три его угла: $A = 51^{\circ}31'24''$; $B = 79^{\circ}34'15''$; $C = 55^{\circ}17'17''$, а радиус шара $R = 15$ м; найти площадь треугольника.
17. Даны три угла: $A = 52^{\circ}9'47''$; $B = 74^{\circ}27'19''$; $C = 84^{\circ}52'56''$ и радиус сферы $R = 1170,9$; найти поверхность треугольника.
18. Даны три угла: $A = 43^{\circ}20'0''$; $B = 79^{\circ}9'39''$; $C = 82^{\circ}34'26''$; какую часть поверхности шара составляет поверхность этого сферического треугольника?
19. Найти поверхность сферического треугольника, углы которого $A = 65^{\circ}$; $B = 125^{\circ}$; $C = 140^{\circ}$, принимая за единицу: 1) поверхность шара, 2) поверхность октанта, т. е. такого сферического треугольника, у которого все три угла по 90° .
- 20*. Доказать теорему: сферический избыток сферического многоугольника пропорционален его площади.
- 21*. Найти отношение поверхности сферического квадратного градуса к поверхности шара.
- 22* Сколько квадратных градусов заключается в поверхности двуугольника, угол которого равен $43^{\circ}51'32''$?
23. Найти длину сторон равностороннего сферического треугольника, поверхность которого равна одному квадратному градусу.
24. В сферическом треугольнике углы $A = 51^{\circ}31'24''$, $B = 79^{\circ}34'15''$, $C = 55^{\circ}17'17''$, а радиус шара $R = 57^{\circ}296$; найти площадь треугольника в квадратных градусах.
25. Углы сферического пятиугольника 68° , 97° , 156° , 80° и 142° , а площадь 8 кв. м; найти площадь шара.
26. Определить площадь октанта (сферического треугольника с тремя прямыми углами), если площадь треугольника, расположенного на том же шаре, углы которого 110° , 46° и 150° , равна 84,662 кв. м.
27. Если площадь всей поверхности сферы равна 100 кв. см, то какова площадь сферического треугольника, углы которого равны 30° , 120° , 150° ?
28. Доказать теорему: сферические треугольники на равных шарах или на одном и том же шаре имеют равные площади, если их полярные треугольники имеют равные периметры.
- д) Приложение к геодезии (гл. VI, § 33)
29. Вычислить сферический избыток ϵ треугольника на поверхности Земли, стороны которого равны 32 км, 43 км и 53 км, считая радиус Земли 6 400 км.
30. Принимая радиус Земли 6370 км, найти длину сторон равностороннего сферического треугольника на земном шаре, сферический избыток которого равен 1° .
31. То же для треугольника, сферический избыток которого равен $1'$.
32. То же для треугольника, сферический избыток которого равен $1''$.
33. Стороны равностороннего сферического треугольника равны по 1 200 верст, а радиус сферы 5 970 верст; найти его сферический избыток ϵ .
34. Найти сферический избыток сферического треугольника, если его стороны имеют длину по 155 верст, а радиус земной сферы $R = 5 970$ верст.
35. Найти сферический избыток треугольника, длины сторон которого равны по 20 верст, а радиус земной сферы $R = 5 970$ верст.
- е) Формулы
- 36*. Вывести формулы $\sin$, $\cos$ и tg половины стороны сферического треугольника в функции его углов.
- 37*. Вывести формулы для $\sin$, $\cos$ и tg половины стороны сферического треугольника в функции его углов и сферического избытка.

38* Вывести формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sin C}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cos C}.$$

39*. Вывести формулу:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C}.$$

40*. Вывести формулу:

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C}{\cos \frac{c}{2}}.$$

41*. Вывести формулу:

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{c}{2} - 1}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}.$$

42*. Вывести формулу:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2 \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}.$$

43*. Вывести формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \frac{1 - \cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \frac{b}{2} - \cos^2 \frac{c}{2} + 2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}.$$

44*. Вывести для прямоугольного сферического треугольника формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}.$$

45*. Доказать теорему: если обозначить α, β, γ дуги, соединяющие попарно середины сторон сферического треугольника, то будет иметь место соотношение:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos \beta}{\cos \frac{b}{2}} = \frac{\cos \gamma}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} = \cos \frac{\varepsilon}{2}.$$

46*. Вывести формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}.$$

47*. В сферическом треугольнике даны три его стороны: $a = 30^\circ$, $b = 40^\circ$, $c = 50^\circ$; вычислить его сферический избыток ε .

Отдел VII

Аналитическая геометрия на сфере (гл. VII)

- 1*. Найти расстояние от Москвы до Ленинграда, если широта Москвы $= 55^\circ 45' 45''$, широта Ленинграда $= 59^\circ 56' 31''$, а разность долгот $= 7^\circ 13' 15''$ (на шаре).
- 2*. Определить расстояние между Таллином и Кронштадтом, если для Кронштадта: $\varphi = +59^\circ 59' 23''$, $\lambda = -29^\circ 45' 53''$, а для Таллина: $\varphi = +59^\circ 26' 35''$, $\lambda = -24^\circ 45' 13''$.
3. Широта Ленинграда $\varphi = 59^\circ 56' 31''$, широта Гданьска $\varphi = 54^\circ 21' 4''$, а разность долгот равна $10^\circ 30' 27''$; найти кратчайшее расстояние между ними.
4. Вычислить расстояние от Москвы до Парижа, если широта Москвы $55^\circ 45' 13''$, широта Парижа $48^\circ 50' 2''$, а разность долгот $35^\circ 17' 30''$.
5. Даны географические координаты Марселя: $\varphi = +43^\circ 17' 49''$; $\lambda = -3^\circ 2' 0''$; для Ленинграда: $\varphi = +59^\circ 56' 23''$; $\lambda = -27^\circ 58' 30''$; обе долготы от Парижского меридиана. Найти кратчайшее расстояние между этими городами.
6. Найти расстояние s от Ленинграда ($\varphi = 59^\circ 56' 32''$) до точки N , лежащей на широте $56^\circ 51' 40''$, если разность долгот между этими точками $5^\circ 36' 14''$ и радиус Земли $6367,4$ км.

- 7*. Расстояние от Ленинграда ($\varphi = 59^\circ 56' 32''$) до точки N ($\varphi = 56^\circ 51' 40''$), разность долгот между которыми $5^\circ 36' 14''$, оказалось $472,7$ км ($4^\circ 15' 11''$) (радиус Земли $6367,4$ км); вычислить, с какой точностью определено это расстояние, если географическая широта Ленинграда известна с точностью $\pm 1''$, а широта точки N — с точностью $\pm 3''$, разность же долгот — с точностью $\pm 0,6$.
- 8*. Найти расстояние между Ленинградом и Вальпарайзо, если дано: для Ленинграда: $\varphi = +59^\circ 56' 30''$, $\lambda = -27^\circ 58' 13''$; для Вальпарайзо: $\varphi = -33^\circ 1' 55''$, $\lambda = +73^\circ 57' 22''$ (обе долготы от Парижа).
9. Координаты точки A : $\varphi_A = +59^\circ 56' 8''$, $\lambda_A = +30^\circ 16' 51''$, широта точки B : $\varphi_B = +59^\circ 59' 23''$; найти долготу λ_B точки B , если известен угол между меридианом точки A и направлением AB , равный $77^\circ 54' 32''$, а также известно, что расстояние AB — порядка $\frac{1}{4}$ и точка B лежит к востоку от точки A .
10. Даны координаты: для Ленинграда $\varphi = +59^\circ 56' 30''$, $\lambda = -30^\circ 18' 22''$; для Сиднея $\varphi = -33^\circ 51' 41''$, $\lambda = -151^\circ 11' 50''$; найти кратчайшее расстояние s между ними, а также прямой и обратный азимуты.
11. Найти полюс большого круга, проходящего через Ленинград и Сидней, если даны координаты этих точек: для Ленинграда $\varphi = +59^\circ 56' 30''$, $\lambda = -30^\circ 18' 22''$, для Сиднея $\varphi = -33^\circ 51' 41''$, $\lambda = -151^\circ 11' 50''$.
- 12*. Даны координаты: для Ленинграда $\varphi = +59^\circ 56' 30''$, $\lambda = -30^\circ 18' 22''$, для Сиднея $\varphi = -33^\circ 51' 41''$, $\lambda = -151^\circ 11' 50''$; найти, в какой точке и под каким углом дуга, их соединяющая, пересекает земной экватор.
- 13*. Найти, в какой точке дуга, соединяющая Ленинград и Сидней, пересекает тропик Рака ($\varphi = +23^\circ 27' 30''$).
14. На поверхности земли, от точки, находящейся на экваторе, определить расстояние s и направление α до другой точки, находящейся на широте $+8^\circ 2'$ и отстоящей от первой точки по долготе на $5^\circ 48'$.
15. На географической широте $\varphi = 50^\circ 27' 12''$ в западной стороне неба наблюдалась звезда (α Bootis); ее зенитное расстояние было $z = 51^\circ 25' 32''$, а склонение $\delta = +19^\circ 38' 0''$; найти часовой угол звезды t и ее азимут A .
16. На широте $\varphi = 50^\circ 0' 10''$ наблюдали звезду в часовом угле $t = 50^\circ 27' 32''$ и в азимуте $A = 89^\circ 7' 16''$; вычислить ее зенитное расстояние z и ее склонение δ .
17. На Новой Земле наблюдалось светило, склонение которого равно $\delta = +21^\circ 20' 49''$, в часовом угле $t = 39^\circ 24' 15''$ и на зенитном расстоянии $z = 56^\circ 14' 37''$; найти географическую широту места φ и азимут светила A .
- 18*. Даны сферические координаты полюсов трех больших кругов; решить сферический треугольник, образуемый пересечениями этих кругов, и определить положение его вершин.

Отдел VIII

Общий отдел

а) Десятичное деление окружности (гл. VIII, § 38)

1. Найти поверхность сферического двугольника с углом 70° , если радиус сферы $R = 5$ м.
2. Поверхность сферического двугольника на сфере радиуса 6 м равняется 148 кв. м; найти угол при вершине (в градусах).
3. В сферическом треугольнике даны стороны: $a = 75^\circ 97'$; $b = 59^\circ 13'$; $c = 65^\circ 42'$; найти угол A .
- 4*. Угол MSN измерен в наклонной плоскости; найти горизонтальный угол, ему соответствующий, если его стороны SM и SN образуют с вертикалью SS' соответственно углы $MSS' = 65^\circ 42'$ и $NSS' = 59^\circ 13'$, а угол $MSN = 75^\circ 97'$.
- б) Равносторонние и равнобедренные сферические треугольники
5. Решить равносторонний сферический треугольник, у которого $A = B = C = 115^\circ 0' 0''$.
6. Решить равносторонний сферический треугольник, у которого $a = b = c = 60^\circ 0' 0''$.
- 7*. В равнобедренном сферическом треугольнике даны: $a = 124^\circ 58' 58''$, $b = c = 78^\circ 14' 10''$; решить треугольник.
8. В равнобедренном сферическом треугольнике даны: $b = c = 46^\circ 30' 0''$, $B = 74^\circ 30' 0''$; решить треугольник.
- 9*. В равнобедренном сферическом треугольнике даны: $A = 80^\circ 37' 48''$; $B = C = 70^\circ 5' 20''$; решить треугольник.
10. В равнобедренном сферическом треугольнике даны: $A = 138^\circ 11' 23''$, $B = C = 37^\circ 22' 38''$; решить треугольник.
11. В равнобедренном сферическом треугольнике $b = 28^\circ 22' 21''$, $B = C = 8^\circ 19' 25''$; решить треугольник.
- в) Особые случаи решения сферических треугольников
- 12*. В сферическом треугольнике даны: $a = 51^\circ 11' 36''$, $B = 130^\circ 7' 10''$, $C = 49^\circ 52' 50''$; решить треугольник.
- 13*. В сферическом треугольнике даны: $a = 149^\circ 18' 34''$, 6 ; $B = 36^\circ 12' 10''$, 0 ; $C = 143^\circ 47' 50''$, 0 ; решить треугольник.

- 14*. В сферическом треугольнике даны: $b = 108^{\circ}36'31''$, $c = 71^{\circ}23'29''$, $B = 140^{\circ}3'10''$; решить треугольник.
- 15*. Даны: $B = 36^{\circ}12'10''$; $b = 18^{\circ}46'55''$; $c = 161^{\circ}13'5''$; решить треугольник.
- 16*. Решить сферический треугольник, у которого даны: стороны $a = 51^{\circ}34'27''$, $b = 69^{\circ}38'40''$ и радиус вписанного круга $r = 43^{\circ}15'38''$.
- 17*. Решить сферический треугольник, у которого даны: два угла $A = 91^{\circ}35'48''$; $B = 63^{\circ}32'19''$ и радиус вписанного круга $r = 17^{\circ}49'50''$.
- 18*. Решить сферический треугольник, у которого даны: две стороны $a = 32^{\circ}15'45''$; $c = 40^{\circ}7'31''$ и радиус описанного круга $R = 35^{\circ}19'46''$.
- 19*. Решить сферический треугольник, у которого даны: два угла $B = 91^{\circ}47'26''$, $C = 76^{\circ}31'18''$ и радиус описанного круга $R = 45^{\circ}0'0''$.
20. Решить прямоугольный сферический треугольник по гипотенузе и радиусу вписанного круга.
21. Доказать теорему: если в сферическом треугольнике

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1,$$

то две стороны равны соответственно противолежащим углам, а третья сторона служит дополнением противолежащего угла до 180° .

22. Доказать теорему: если в сферическом треугольнике

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}a\right) &= \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}b\right) \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}c\right), \\ \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}b\right) &= \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}c\right) \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}a\right), \\ \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}c\right) &= \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}a\right) \operatorname{tg}\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}b\right). \end{aligned}$$

23. Дано:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1;$$

решить такой треугольник по двум данным сторонам.

24. Дано:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1;$$

решить такой треугольник по одной данной стороне и сумме двух других.

25. Дано:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = 1;$$

решить такой треугольник по данной стороне и разности двух других сторон.

26. Решить сферический треугольник, если даны суммы каждого из углов с противолежащей ему стороной.
27. Решить сферический треугольник, если даны один угол, прилежащая к нему сторона и сумма или разность двух других сторон.
28. Решить сферический треугольник, зная один угол, противолежащую ему сторону и сумму или разность двух других сторон.
29. Решить сферический треугольник, если даны периметр и два угла.
30. Решить сферический треугольник по основанию, высоте и углу при вершине.
31. Решить сферический треугольник по основанию, высоте и сумме или разности двух других сторон.
- 32*. Решить треугольник по данным двум сторонам и сферическому избытку.
33. На поверхности шара радиуса R построен малый круг радиуса r , окружность которого разделена пропорционально числам 1, 2, 3, и точки деления A, B, C соединены дугами больших кругов. Вычислить стороны сферического треугольника ABC в метрах, поверхность в квадратных метрах, а углы в градусах, минутах и секундах, если $R = 6366198$ м, $r = R \cos 48^{\circ}50'13''$.
- г) Квадрантный треугольник
34. Вывести формулы для квадрантного треугольника, т. е. для сферического треугольника, у которого одна из сторон равняется 90° .
- 35*. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^{\circ}0'0''$; $A = 125^{\circ}0'0''$; $C = 48^{\circ}0'0''$.
36. Решить сферический треугольник, у которого: $a = 90^{\circ}0'0''$; $A = 101^{\circ}38'11''$; $B = 78^{\circ}3'4''$.
37. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^{\circ}0'0''$; $B = 2^{\circ}44'0''$; $C = 11^{\circ}38'11''$.

38. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^\circ 0' 0''$; $b = 76^\circ 57' 43''$, $A = 92^\circ 44' 0''$.
39. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^\circ 0' 0''$; $A = 103^\circ 2' 17''$, $c = 87^\circ 16' 0''$.
40. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^\circ 0' 0''$; $c = 11^\circ 56' 56''$; $B = 13^\circ 2' 17''$.
41. Решить сферический треугольник, у которого $a = 90^\circ 0' 0''$; $b = 49^\circ 52' 50''$, $c = 109^\circ 17' 30''$.
- д) Теоремы
- 42*. Доказать, что если a , c и B суть элементы прямоугольного сферического треугольника ABC , то треугольник $A'B'C'$, у которого $a' = 90^\circ - c$, $c' = 90^\circ - a$ и $B' = B$, также прямоуголен. Доказать следующие теоремы:
43. Если оба катета прямоугольного сферического треугольника больше или оба меньше 90° , то гипотенуза его меньше 90° , а если один катет больше 90° , а другой — меньше, то гипотенуза больше 90° .
44. В прямоугольном сферическом треугольнике, если гипотенуза и катет оба меньше 90° , то катет меньше гипотенузы; если же гипотенуза и катет оба больше 90° то катет больше гипотенузы.
45. В прямоугольном сферическом треугольнике, если катет и противолежащий ему угол меньше 90° , то катет меньше угла, а если катет и противолежащий угол больше 90° , то катет больше угла.
- 46*. Если гипотенуза и катет прямоугольного сферического треугольника оба больше или оба меньше 90° , то угол между ними острый, если же одна из этих сторон больше, а другая меньше 90° , то — тупой.
47. В прямоугольном сферическом треугольнике

$$90^\circ < B + C < 270^\circ.$$

48. В прямоугольном сферическом треугольнике:

- а) если $B < 90^\circ$ и $C < 90^\circ$, то $B + C > 90^\circ$;
- б) если $B > 90^\circ$ и $C > 90^\circ$, то $B + C < 270^\circ$;
- в) если $B > 90^\circ$ и $C < 90^\circ$, то $B - C < 90^\circ$;
- г) если $B < 90^\circ$ и $C > 90^\circ$, то $C - B < 90^\circ$.

- 49*. Если в прямоугольном сферическом треугольнике

$$b < 90^\circ, \text{ но } a > 90^\circ, \text{ то } a + b < 180^\circ,$$

а если

$$b > 90^\circ, \text{ но } a < 90^\circ, \text{ то } a + b > 180^\circ.$$

50. Если в сферическом треугольнике ABC проведена медиана AM и отмечена на ней точка O , точка пересечения всех трех его медиан, то

$$\frac{\sin AO}{\sin OM} = 2 \cos \frac{1}{2} a.$$

51. Если световой луч проходит через призму, косвенно к ее главному сечению, то луч падающий и луч преломленный образуют один и тот же угол с этим главным сечением.
52. Если три больших круга, проходящих через три вершины сферического треугольника соответственно, пересекаются в одной точке, то произведение синусов трех отрезков сторон треугольника, не имеющих общих конечных точек, равно произведению синусов трех других отрезков этих больших кругов, равно произведению синусов трех других отрезков его сторон, то эти три больших круга пересекаются в одной точке.
- 53*. Если три больших круга, проходящих через три вершины сферического треугольника соответственно, пересекают стороны треугольника так, что произведение синусов трех отрезков, не имеющих общих конечных точек, равно произведению синусов трех других отрезков его сторон, то эти три больших круга пересекаются в одной точке.
54. Если три стороны сферического треугольника пересечены каким-либо большим кругом, то произведение синусов трех несмежных отрезков равно и противоположно по знаку произведению синусов трех других отрезков.
55. Дуги больших кругов, проведенные через вершины так, что они делят поверхность сферического треугольника на две равные части, пересекаются в одной общей точке.
56. Если в сферическом треугольнике ABC через середины сторон AB и AC провести дугу большого круга, пересекающую продолжение стороны BC в точке D , то $DB + DC = 180^\circ$.
57. Если около сферического треугольника ABC описать круг (малый) и в точке A провести к этому малому кругу касательную дугу большого круга AF , то угол BAF будет равен углу C минус половина сферического избытка треугольника.

58. продолжить дугу. Если a , соединяющую середины двух сторон сферического треугольника ABC , до пересечения в точке D со стороной a , и если отложить по дуге a отрезок DE , равный a , а на стороне a — длину DF , равную $\frac{a}{2}$, то треугольник DEF будет прямоугольным в точке F , а дуга EF будет равна половине сферического избытка треугольника ABC .
59. На шаре даны малый круг и точка M ; через точку M проведен какой-нибудь большой круг, пересекающий малый в точках A и B ; доказать, что произведение

$$\operatorname{tg} \frac{MA}{2} \operatorname{tg} \frac{MB}{2}$$

постоянно.

60. На шаре даны малый круг с центром в точке C и точка M ; через точку M проведен произвольно большой круг, пересекающий малый круг в точках A и B ; доказать, что произведение

$$\operatorname{tg} \frac{ACM}{2} \operatorname{tg} \frac{BCM}{2}$$

постоянно.

е) Исследование треугольников

- 61*. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 22^\circ 37' 35''$, $C = 137^\circ 28' 19''$?
62. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 172^\circ 54' 20''$, $C = 35^\circ 45' 30''$?
63. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 147^\circ 38' 29''$, $C = 126^\circ 19' 37''$?
- 64*. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 18^\circ 37' 29''$, $b = 78^\circ 35' 43''$?
65. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 173^\circ 59' 25''$, $b = 165^\circ 40' 10''$?
66. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 47^\circ 38' 29''$, $C = 26^\circ 19' 37''$?
67. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $b = 58^\circ 39' 17''$, $a = 49^\circ 27' 56''$?
68. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $b = 158^\circ 39' 17''$, $a = 149^\circ 27' 56''$?
69. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, у которого $B = 118^\circ 37' 29''$, $b = 78^\circ 35' 43''$?
70. Возможен ли сферический треугольник, у которого $a = 30^\circ 5'$; $b = 70^\circ 9'$; $A = 40^\circ 7'$?
- ж) Ф о р м у л ы
- 71*. Вывести формулы для косинусов медиан сферического треугольника в функции его сторон.
- 72*. Для биссектрис углов сферического треугольника d_a , d_b , d_c вывести следующие формулы:

$$\operatorname{tg} d_a = \frac{2 \sin b \sin c}{\sin (b+c)} \cos \frac{A}{2},$$

$$\operatorname{tg} d_b = \frac{2 \sin c \sin a}{\sin (c+a)} \cos \frac{B}{2},$$

$$\operatorname{tg} d_c = \frac{2 \sin a \sin b}{\sin (a+b)} \cos \frac{C}{2}.$$

73. Какой геометрический смысл имеют равенства:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b,$$

$$\sin b \sin C = \sin B \sin c,$$

$$\sin c \sin A = \sin C \sin a.$$

74. Из формулы прямоугольного сферического треугольника $\cos a = \cos b \cos c$ вывести теорему Пифагора для плоского прямоугольного треугольника.
75. Из формул прямоугольного сферического треугольника

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B,$$

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C$$

вывести соответствующие им формулы плоской тригонометрии.

76. Из формул сферической тригонометрии

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

вывести соответствующие им формулы плоской тригонометрии.

77. Вывести формулы для вычисления высот сферического треугольника.
 78. Вывести формулы для вычисления расстояний вершин сферического треугольника от общей точки пересечения его высот.
 з) Многогранники (кристаллография)
 79*. Вычислить объем наклонного параллелепипеда, длины ребер которого l, m, n , а углы между ними a, b и c .
 80*. Доказать теорему: если A, B, C и A', B', C' — вершины двух взаимно полярных сферических треугольников, построенных на шаре с центром в точке O и с радиусом, равным единице, λ, μ, ν — углы AOA', BOB', COC' и, наконец, v и V — объемы параллелепипедов, которые имеют своими смежными ребрами, первый — OA, OB, OC , а второй — OA', OB', OC' , то:

$$v = \sin a \cos \lambda = \sin b \cos \mu = \sin c \cos \nu;$$

$$V = \sin A \cos \lambda = \sin B \cos \mu = \sin C \cos \nu;$$

$$\frac{v}{V} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

$$\cos \lambda \cos \mu \cos \nu = \sin a \sin b \sin c \sin A \sin B \sin C;$$

$$vV = \cos \lambda \cos \mu \cos \nu;$$

$$\frac{v^2}{V} = \sin a \sin b \sin c;$$

$$\frac{V^2}{v} = \sin A \sin B \sin C.$$

- 81*. Вычислить объем правильного тетраэдра.
 82*. Найти двугранные углы правильного тетраэдра, гексаэдра и додекаэдра.
 83*. Найти двугранные углы правильных октаэдра и икосаэдра.
 84. По величине плоского угла правильного трехгранного угла вычислить его двугранный угол, угол конуса вписанного и конуса описанного.
 85. По числу граней и величине плоского угла правильного многогранного угла вычислить угол двугранный, угол конуса вписанного и конуса описанного.
 и) Приведение к горизонту
 86*. Привести к горизонту угол $37^\circ 19' 40''$, если его стороны наклонены к вертикали на $67^\circ 24' 25''$ и $53^\circ 42' 35''$ соответственно.
 87. Возвышения предметов B и C над горизонтом равняются $10^\circ 34' 0''$ и $2^\circ 12' 0''$ соответственно, а угол BAC (измеренный секстантом) равняется $84^\circ 49' 0''$; найти горизонтальный угол между B и C .
 88. Привести к горизонту угол $47^\circ 45' 39''$, если его стороны наклонены к вертикали соответственно на $69^\circ 49' 19''$ и $80^\circ 17' 36''$.
 89*. Привести к горизонту угол $36^\circ 14' 0''$, если его стороны наклонены к вертикали соответственно на $87^\circ 56' 50''$ и $88^\circ 53' 40''$.
 90. Привести к горизонту угол $58^\circ 35' 40''$, если его стороны наклонены к горизонту на $0^\circ 45' 50''$ и $1^\circ 23' 50''$ соответственно.
 к) Описанные и вписанные круги
 91. Описать около сферического треугольника круг и найти его радиус R .
 92. Вписать в сферический треугольник круг и найти его радиус r .
 93. Доказать теорему: круги, вписанные или описанные около двух симметричных треугольников, равны.
 94. Вычислить радиус описанного около сферического треугольника круга, углы которого суть $A = 120^\circ 32' 15''$, $B = 63^\circ 32' 47''$, $C = 81^\circ 13' 54''$.
 95. Вычислить радиус круга, описанного около сферического треугольника, стороны которого суть $a = 32^\circ 15' 41''$, $b = 25^\circ 41' 18''$, $c = 34^\circ 57' 11''$.
 96. Вычислить радиус круга, вписанного в сферический треугольник, стороны которого суть $a = 57^\circ 34' 58''$, $b = 101^\circ 47' 12''$, $c = 72^\circ 17' 50''$.
 97. Вычислить радиус круга, вписанного в сферический треугольник, углы которого суть $A = 80^\circ 34' 15''$, $B = 62^\circ 47' 18''$, $C = 89^\circ 43' 25''$.
 98*. Вывести формулы для радиусов кругов, вписанных в треугольники, получаемые из данного продолжением двух его сторон до вторичного пересечения.
 99. Вычислить радиус круга, вписанного в треугольник, сопряженный с сферическим треугольником, у которого стороны суть $a = 91^\circ 3' 47''$; $b = 57^\circ 4' 48''$; $c = 64^\circ 29' 30''$.
 100. Вычислить радиус круга, вписанного в треугольник, сопряженный с сферическим треугольником, углы которого суть $A = 120^\circ 34' 17''$, $B = 80^\circ 13' 37''$, $C = 61^\circ 30' 44''$.

101. Вычислить расстояния от центра круга, описанного около сферического треугольника, до трех его сторон.
102. Вычислить расстояния от центра круга, вписанного в сферический треугольник, до трех его вершин.

УКАЗАНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ

Отдел I

1. Необходимо сделать два ограничения (какие?).
7. Продолжить стороны одного из углов, например, меньшего, до их вторичного пересечения и рассмотреть треугольник, смежный с данным.
8. Теорема, обратная предыдущей; то же построение.
9. Внутри большего угла построить меньший и рассмотреть получающиеся при этом треугольники, из которых один будет равнобедренный.
10. Теорема, обратная предыдущей; применить доказательство от противного.

Отдел II

1. Задачи на построение на сфере решаются с помощью сферического циркуля.
3. Линейный радиус малого круга есть его радиус в обычном смысле слова, как оно употребляется в планиметрии.
4. Использовать построения предыдущих задач.
5. Построением на сфере и на вспомогательной плоскости найти сперва радиус сферы.
6. Найти сперва полюс дуги большого круга, проходящего через две данные точки.
16. Построением на вспомогательной плоскости найти хорду, стягивающую эту дугу.
17. Это будет сферический перпендикуляр в середине дуги большого круга, соединяющей концы данной дуги малого круга.
18. Дважды применить построение предыдущей задачи.
19. Линейный радиус найдется, как радиус круга, описанного около треугольника (плоского), построенного на хордах шара, проходящих через каждую пару данных точек; хорды можно получить непосредственным измерением циркулем на сфере.
26. Воспользоваться свойствами взаимнополярных сферических треугольников.
27. См. указание к предыдущей задаче.
32. Перейти к квадрантному треугольнику, взаимнополярному с данным.
Примечание. Квадрантным называется сферический треугольник, у которого одна сторона равна 90° .
33. См. указание к предыдущей задаче.
35. Найти сначала построением длину касательной.

Отдел IV

1. Воспользоваться теоремой тангенсов.
 2. См. указание к предыдущей задаче.
- Примечание. Покажите, что обратные теоремы также справедливы.

Отдел V

2. Решение выгоднее всего провести по формулам, выведенным специально для данного случая.
3. Лучше всего вычислить сферический избыток и найти угол B по формуле $B = 90^\circ + \epsilon - C$.
4. Воспользоваться формулой (11) § 10; применить разложение в ряды (§ 29).
5. Учтя, что b и c близки к 90° и полагая $A = a + \delta$, воспользоваться формулой предыдущей задачи.
8. При решении задач № 8—17 этого отдела воспользоваться „Таблицей натуральных поправок“ (Приложение 3).
16. Воспользоваться формулой (47'') § 29.
18. Воспользоваться результатами задачи № 16 этого отдела.
19. При решении задач № 19—21 этого отдела воспользоваться „Таблицей логарифмических поправок“ (Приложение 2).
22. В этой и следующей задачах воспользоваться величинами S и T , даваемыми в таблицах логарифмов (чисел).

Отдел VI

9. Вычислить ϵ дважды: 1) по формуле (38) § 26 и 2) по формуле задачи № 46 этого отдела.
20. Сумма углов сферического многоугольника всегда больше чем $180^\circ (n - 2)$, где n — число сторон многоугольника, на величину ϵ , которая и называется его сферическим избытком.

21. Квадратным сферическим градусом называется правильный сферический четырехугольник, у которого каждая из сторон равняется 1° . Сначала нужно найти сферический избыток этого правильного сферического четырехугольника. Сравни указание к задаче № 83 VIII отдела.
22. При решении задач № 22—24 этого отдела использовать ответ задачи № 21 этого же отдела.
36. Применить формулы полупериметра (24), (25) и (26) к треугольнику, взаимнополярному с данным; обозначить $2P = A + B + C$.
37. Воспользоваться формулами (10) и (11), выполнив преобразования, аналогичные указанным в § 23, или формулами (24), (25) и (26), применив их к треугольнику, полярному с данным, и затем формулой (10). Можно воспользоваться также результатами предыдущей задачи.
38. Воспользоваться формулами для $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$ из задачи № 37 этого отдела; составить произведение $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}$.
39. Воспользоваться формулой задачи № 38 этого отдела.
40. Разделить формулу (36) § 26 на формулу задачи № 38 этого отдела.
41. В формулу задачи № 40 этого отдела подставить вместо $\cos C$ его выражение по формуле (11).
42. Разделить формулу задачи № 41 этого отдела на формулу (38) § 26.
43. Воспользоваться известной формулой гониометрии $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$, формулой задачи № 41 этого отдела и формулой (38) § 26.
44. Применить формулу задачи № 38 этого отдела.
45. Выразить, например, $\cos a$ и $\cos A$ из соответствующих треугольников по формулам (11) и исключить $\cos A$ из первого выражения с помощью второго; использовать формулу задачи № 41 этого отдела.
46. Воспользоваться формулами (29) и (31) § 24, заменить $\frac{A+B}{2}$ через $90^\circ - \left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$; написать полученные формулы в виде пропорций, составить производные пропорции вида $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$; после преобразования перемножить одно соотношение на другое. (Это — так называемая формула Люилье).
47. Воспользоваться формулой задачи № 46 этого отдела (формулой Люилье).

Отдел VII

1. $90^\circ \approx 10\,000$ км, следовательно $1^\circ \approx 111, 11$ км.
2. **Примечание.** Здесь и в следующих задачах этого отдела долготы считаются от меридиана Гринвича, положительные — к западу и отрицательные — к востоку (если не сделано соответствующих оговорок). Морская миля равняется дуге меридиана или экватора в $1'$.
7. Применить дифференциальные формулы; взять некоторые данные из решения задачи № 6 этого отдела.
8. См. указание к задаче № 1 этого отдела.
12. Воспользоваться частично данными, полученными при решении задачи № 11 этого отдела.
13. Воспользоваться данными и частично ответом задачи № 12 этого отдела.
18. Этот треугольник будет взаимнополярным по отношению к треугольнику, вершинами которого являются данные полюсы трех больших кругов.

Отдел VIII

4. Построить чертеж, из точки S , как из центра, описать сферу радиусом $= 1$ и рассмотреть полученный сферический треугольник.
7. Соединить точку A с серединой стороны BC .
9. См. указание к задаче № 7 этого отдела.
12. $B + C = 180^\circ$; продолжить стороны a и c до взаимного пересечения в точке D ; полученный треугольник ACD будет равнобедренный, его можно решить по разности задачи № 7 этого отдела; тогда найдутся и элементы треугольника ABC .
13. $B + C = 180^\circ$.
14. $b + c = 180^\circ$; тот же прием решения.
15. $b + c = 180^\circ$.
16. Формулы для r см. ответ задачи № 92 этого отдела.
17. Привести к решению прямоугольных сферических треугольников.
18. Привести к решению равнобедренных сферических треугольников.

19. Сравнивая формулу ответа задачи № 91 этого отдела с формулой (38) § 26, имеем:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{ctg} R.$$

32. Воспользоваться, например, формулой задачи № 41 отдела VI.
35. Это так называемый квадрантный треугольник; эту и следующие задачи можно решать двумя способами: 1) применяя формулы задачи № 34 этого отдела или 2) пользуясь полярным треугольником. Какой способ удобнее?
42. Показать, что $\operatorname{ctg} A' = 0$.
46. **Примечание.** Докажите также обратную теорему, которая будет начинаться словами: „Если угол острый..., то...“ и т. д.
49. Построить соответствующие прямоугольные треугольники, отложить на сторонах b и a соответственно дуги $CD = CG = 90^\circ$, соединить точки D и G дугой большого круга и рассмотреть получившиеся сферические треугольники ADF и FGB , где точка F есть точка пересечения стороны c и дуги DG .
53. Теорема, обратная предыдущей.
61. При решении этой и следующих задач используйте теоремы задачи № 48 этого отдела. Для проверки попробуйте вычислить.
64. При решении этой и следующей задач примените теорему задачи № 45 этого отдела. Для проверки попробуйте вычислить.
71. Рассмотреть треугольники, на которые медиана делит данный треугольник; воспользоваться формулой (11) § 10.
72. Рассмотреть треугольники, на которые биссектриса делит данный сферический треугольник; воспользоваться формулой (17) § 15.
79. Из одной из вершин параллелепипеда описать сферу и рассмотреть сферический треугольник, полученный в сечении с гранями параллелепипеда.
80. Учесть свойства взаимнополярных треугольников, взять формулу для объема параллелепипеда в функции его ребер, двух плоских углов и двугранного угла между ними (см. задачу № 79 этого отдела).
81. Учесть, что тетраэдр составляет $\frac{1}{6}$ часть соответствующего параллелепипеда (доказать это!).
82. Описать сферу с центром в одной из вершин. Плоский угол для тетраэдра $= 60^\circ$, для гексаэдра $= 90^\circ$, для додекаэдра $= 108^\circ$.
83. Вычисление правильных сферических многоугольников привести к вычислению равнобедренных сферических треугольников. Плоские углы октаэдра и икосаэдра $= 60^\circ$.
86. Из вершины угла описать сферу радиусом, равным 1, и рассмотреть полученный сферический треугольник.
89. Учесть, что стороны угла мало наклонены к горизонту (см. также задачи № 4 и 5, отдел V).
98. **Примечание.** Такой треугольник называется дополнительным или сопряженным с данным.

ОТВЕТЫ

Отдел I

16. Малый круг с центром в данной точке.
17. Дуга большого круга, перпендикулярная к дуге большого круга, соединяющей две данные точки, и проходящая через ее середину.
18. Малый круг с центром в одном из полюсов данного большого круга и с сферическим радиусом, равным $90^\circ - a$.

Отдел II

1. С помощью сферического циркуля задача решается так: дают циркулю произвольное растворение, заметно меньшее диаметра сферы, ставят одну ножку в произвольную точку сферы и движением по поверхности сферы другой ножки описывают окружность.
2. Построение отличается от построения предыдущей задачи только тем, что растворение циркуля определяют, совмещая концы ножек циркуля с концами дуги, представляющей на сфере данный сферический радиус, и затем ставят одну из ножек циркуля не в произвольную, а в данную точку сферы.
3. Взять три точки A, B, C , произвольно расположенные на окружности данного малого круга, измерить циркулем линейные расстояния между ними и на вспомогательной плоскости построить треугольник, равный плоскому треугольнику ABC ; радиус круга, описанного около этого треугольника, и будет линейным радиусом данного малого круга.
4. Провести на сфере произвольный малый круг с центром в любой точке данной сферы, найти его линейный радиус; затем построить на вспомогательной пло-

- скости прямоугольный треугольник, катет которого равен хорде, соответствующей сферическому радиусу, а высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, линейному радиусу проведенного малого круга; хорду можно найти непосредственным измерением на сфере. Гипотенуза этого плоского прямоугольного треугольника будет равна диаметру сферы.
5. Построить на вспомогательной плоскости равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна диаметру сферы; катет этого треугольника будет равен хорде, стягивающей дугу большого круга на данной сфере, равную 90° .
 6. Радиусом, равным 90° , провести на сфере две дуги с центрами в данных точках; из точки их пересечения тем же сферическим радиусом провести дугу большого круга.
 7. Провести произвольную дугу большого круга и с помощью циркуля отложить на ней дугу, равную данной.
 8. а) Продолжить данную дугу до полуокружности или б) провести любую дугу большого круга через один из ее концов до вторичного пересечения с продолжением данной дуги.
 9. Отложить на данной дуге большого круга по обе стороны от данной точки две произвольные равные дуги; из концов этих дуг провести произвольным радиусом две произвольные дуги; точку их пересечения соединить с данной точкой.
 10. Построение аналогично применяемому на плоскости.
 11. Построение аналогично тому, которое приводит к решению соответствующей задачи на плоскости.
 12. Построение в известной степени аналогично соответствующему построению на плоскости.
 13. Это будет угол, смежный с данным.
 14. Построение аналогично соответствующему построению на плоскости.
 15. Найти полюс данной дуги большого круга и соединить его дугами больших кругов с концами данной дуги.
 16. Построить на вспомогательной плоскости данный линейный угол, из его вершины описать окружность радиусом, равным радиусу сферы; дуга этой окружности, заключенная между сторонами данного угла, и будет искомая; остается с помощью циркуля перенести ее на сферу.
 17. Построение аналогично построению на плоскости для дуги окружности.
 18. Центр лежит на пересечении двух сферических перпендикуляров, восстановленных в серединах двух произвольных дуг этого малого круга.
 19. Описать круг около сферического треугольника, вершинами которого служат данные точки (сравни задачу № 15, отдел I).
 20. Найти полюс данной дуги большого круга, соединить его с концами данной дуги; угол между одной из этих дуг большого круга и продолжением другой и будет искомым.
 21. Из вершины угла описать дугу сферическим радиусом, равным 90° . Дуга большого круга, дополняющая заключенную между сторонами данного угла дугу полученной таким образом окружности до 180° , и будет искомая.
 22. Построение аналогично соответствующему построению на плоскости.
 23. То же.
 24. То же.
 25. То же.
 26. Построением найти две стороны и угол, противлежащий одной из них, сферического треугольника, взаимнополярного с данным; по этим данным построить этот треугольник, а потом и искомый треугольник, как взаимнополярный с ним.
 27. Построением найти стороны треугольника, взаимнополярного с данным; построить этот треугольник, а затем искомый, как взаимнополярный с ним.
 28. Всегда возможно; одно решение.
 29. Может быть одно или ни одного решения; укажите, при каких условиях.
 30. Всегда возможно; одно решение.
 31. Всегда возможно; одно решение.
 32. Два, одно или ни одного решения; укажите, при каких условиях.
 33. Возможно, если сумма двух данных углов не больше 270° (почему?).
 34. Центр малого круга, проходящего через три данные точки.
 35. Приняв сферическое расстояние данной точки от центра данного малого круга за гипотенузу, а сферический радиус этого малого круга — за катет, построить по этим данным прямоугольный сферический треугольник; сферическим радиусом, равным другому (большему) катету, описать окружность малого круга с центром в данной точке; точки пересечения этой окружности с данной и будут точками прикосновения.

Отдел III

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| 1. $C = 68^\circ 45' 9''$, | $B = 38^\circ 50' 4''$, | $c = 54^\circ 41' 47''$ (5 зн.). |
| 2. $c = 22^\circ 12' 0''$, | $B = 49^\circ 28' 22''$, | $C = 45^\circ 16' 20''$ (5 зн.). |
| 3. $B = 45^\circ 43' 2''$, | $C = 65^\circ 50' 14''$, | $c = 55^\circ 7' 35''$ (6 зн.). |

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| 4. $c = 68^\circ 13' 15''$, | $B = 141^\circ 8' 45''$, | $C = 76^\circ 32' 25''$ (5 зн.). |
| 5. $b = 58^\circ 41' 20''$, | $B = 59^\circ 55' 5''$, | $C = 74^\circ 41' 15''$ (5 зн.). |
| 6. $b = 13^\circ 2' 17''$, | $B = 13^\circ 19' 0''$, | $C = 87^\circ 16' 0''$. |
| 7. $B = 74^\circ 30' 0''$, | $C = 66^\circ 20' 0''$, | $b = 73^\circ 2' 12''$. |
| 8. $B = 45^\circ 43' 2''$, | $C = 114^\circ 9' 46''$, | $b = 40^\circ 4' 16''$. |
| 9. $a = 67^\circ 56' 8''$, | $B = 52^\circ 24' 1''$, | $C = 64^\circ 0' 5$ (5 зн.). |
| 10. $a = 76^\circ 35' 53''$, | $B = 66^\circ 57' 8''$, | $C = 61^\circ 25' 10''$ (5 зн.). |
| 11. $a = 11^\circ 56' 56''$, | $B = 13^\circ 19' 0''$, | $C = 76^\circ 57' 43''$ (6 зн.). |
| 12. $a = 67^\circ 12' 0''$, | $B = 56^\circ 11' 56''$, | $C = 59^\circ 56' 10''$ (6 зн.). |
| 13. $a = 94^\circ 44' 34''$, | $B = 57^\circ 31' 24''$, | $C = 97^\circ 24' 5''$ (6 зн.). |
| 14. $a = 103^\circ 58' 26''$, | $B = 101^\circ 38' 49''$, | $C = 40^\circ 29' 1''$. |
| 15. $a = 110^\circ 35' 31''$, | $B = 47^\circ 6' 28''$, | $C = 110^\circ 44' 10''$ (6 зн.). |
| 16. $a = 96^\circ 52' 32''$, | $B = 76^\circ 58' 46''$, | $C = 117^\circ 22' 14''$ (5 зн.). |
| 17. $b = 36^\circ 26' 28''$, | $c = 19^\circ 12' 39''$, | $C = 30^\circ 23' 50''$ (5 зн.). |
| 18. $b = 16^\circ 36' 55''$, | $c = 129^\circ 29' 5''$, | $C = 103^\circ 15' 23''$. |
| 19. $b = 37^\circ 24' 11''$, | $c = 129^\circ 54' 56''$, | $C = 116^\circ 56' 17''$. |
| 20. $b = 116^\circ 34' 57''$, | $c = 17^\circ 19' 29''$, | $C = 19^\circ 13' 50''$. |
| 21. $b = 55^\circ 56' 32''$, | $c = 27^\circ 58' 2''$, | $B = 72^\circ 24' 40''$ (5 зн.). |
| 22. $b = 78^\circ 3' 4''$, | $c = 76^\circ 41' 0''$, | $B = 78^\circ 21' 49''$ (6 зн.). |
| 23. $c = 142^\circ 35' 49''$, | $b = 50^\circ 5' 4''$, | $B = 63^\circ 3' 43''$. |
| 24. $c = 10^\circ 57' 45''$, 2, | $b = 164^\circ 39' 53''$, 7, | $B = 124^\circ 43' 17''$, 4 (6 зн.). |
| 25. $a = 78^\circ 11' 22''$, | $c = 69^\circ 33' 0''$, | $B = 55^\circ 53' 30''$ (5 зн.). |
| 26. $a = 50^\circ 3' 22''$, | $b = 35^\circ 34' 35''$, | $C = 53^\circ 12' 0''$ (5 зн.). |
| 27. $a = 66^\circ 58' 25''$, | $c = 37^\circ 5' 27''$, | $B = 71^\circ 15' 26''$ (5 зн.). |
| 28. $a = 49^\circ 35' 25''$, | $b = 34^\circ 9' 18''$, | $C = 54^\circ 43' 0''$ (5 зн.). |
| 29. $a = 67^\circ 12' 0''$, | $c = 52^\circ 55' 26''$, | $B = 56^\circ 11' 56''$ (6 зн.). |
| 30. $a = 13^\circ 19' 0''$, | $b = 13^\circ 2' 17''$, | $C = 11^\circ 56' 56''$ (6 зн.). |
| 31. $a = 28^\circ 22' 20''$, | $c = 3^\circ 56' 41''$, | $B = 82^\circ 39' 53''$ (6 зн.). |
| 32. $a = 107^\circ 56' 18''$, | $c = 135^\circ 40' 57''$, | $B = 71^\circ 34' 20''$ (6 зн.). |

33. $\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b$; $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$; $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$.

Контрольная формула: $\sin c = \sin C \sin a$. Этот случай допускает два решения.

34. $a = 48^\circ 58', 8$ $c = 33^\circ 1', 4$ $C = 46^\circ 14', 8$ (5 зн.);
исследуйте, единственное ли это решение.

35. $a = 34^\circ 30' 7''$ и $145^\circ 29' 53''$,
 $c = 18 42 58$, $161 17 2$,
 $C = 34 30 20$ $145 29 40$ (5 зн.).

36. $a = 49^\circ 25' 44'', 0$ и $130^\circ 34' 16'', 0$,
 $c = 37 23 43, 0$, $142 36 17, 0$,
 $C = 53 5 0, 4$ $126 54 59, 6$ (6 зн.).

37. $c = 41^\circ 19' 28''$ и $138^\circ 40' 32''$,
 $a = 103 55 40$, $76 42 0$,
 $C = 42 52 9$ $137 7 51$ (5 зн.).

38. $a = 66^\circ 12' 29''$ и $133^\circ 47' 31''$,
 $b = 46 2 15$, $133 57 45$,
 $B = 51 52 23$, $128 7 37$.

39. $a = 57^\circ 1' 58''$ и $122^\circ 58' 2''$,
 $b = 8 24 36$, $171 35 24$,
 $B = 10 2 22$, $169 57 38$.

40. $a = 60^\circ 4' 36''$ и $119^\circ 55' 24''$,
 $b = 20 9 41$, $159 50 19$,
 $B = 23 25 58$, $156 34 2$.

41. $a = 59^\circ 21' 17''$ и $120^\circ 38' 43''$,
 $a = 129 54 56$, $50 5 4$,
 $B = 116 56 17$, $63 3 43$.

42. $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$; $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$; $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$;

контрольная формула: $\cos a = \cos b \cos c$. Одно решение.

43. $a = 63^\circ 13' 29''$, $b = 49^\circ 32' 52''$, $c = 46^\circ 1' 46''$ (5 зн.).

44. $a = 42^\circ 17' 45''$, $b = 21^\circ 2' 0''$, $c = 37^\circ 34' 48''$ (5 зн.).

45. $a = 56^\circ 46' 49''$, $b = 34^\circ 31' 27''$, $c = 48^\circ 19' 4''$ (5 зн.).

46. $a = 76^\circ 57' 43''$, $b = 11^\circ 38' 11''$, $c = 76^\circ 41' 0''$ (6 зн.).

47. $a = 83^\circ 1' 4''$, $b = 73^\circ 2' 12''$, $c = 65^\circ 22' 56''$ (6 зн.).

48. $a = 46^\circ 41' 21''$, $b = 32^\circ 51' 10''$, $c = 35^\circ 15' 33''$ (6 зн.).

49. $a = 115^\circ 44' 41'', 6$, $b = 57^\circ 52' 20'', 7$, $c = 144^\circ 45' 46'', 9$ (6 зн.).

50. $a = 78^\circ 21' 49''$, $b = 13^\circ 2' 17''$, $c = 78^\circ 3' 4''$ (6 зн.).

Отдел IV

3. $85^\circ 8' 6''$ (6 зн.).

4. $139^\circ 23'$ (5 зн.).

5. $48^\circ 24' 56''$ (7 зн.).

6. $A = 23^\circ 46' 17''$, $B = 47^\circ 45' 7''$, $C = 115^\circ 17' 15''$ (6 зн.).
 7. $A = 105^\circ 11' 38''$, $B = 63^\circ 13' 16''$, $C = 37^\circ 2' 58''$ (6 зн.).
 8. $A = 107^\circ 46' 58''$, $B = 72^\circ 13' 2''$, $C = 56^\circ 51' 48''$ (6 зн.).
 9. $A = 40^\circ 56' 32''$, $B = 139^\circ 48' 36''$, $C = 31^\circ 12' 13''$ (6 зн.).
 10. $A = 173^\circ 48' 52''$, $B = 144^\circ 44' 0''$, $C = 148^\circ 40' 48''$ (5 зн.).
 11. $A = 121^\circ 36' 19''$, $B = 42^\circ 15' 13''$, $C = 34^\circ 15' 2''$, 77 (7 зн.).
 12. $A = 69^\circ 56' 25''$, $B = 88^\circ 23' 47''$, $C = 59^\circ 12' 17''$, 30 (7 зн.).
 13. $A = 116^\circ 20' 2''$, $B = 75^\circ 0' 51''$, $C = 70^\circ 6' 59''$, 16 (7 зн.).
 14. $34^\circ 27' 0$ (5 зн.).
 15. $5^\circ 40' 17''$.
 16. $77^\circ 48' 48''$.
 17. $A = 36^\circ 28' 26''$, $B = 111^\circ 50' 54''$, $c = 55^\circ 25' 20''$ (5 зн.).
 18. $A = 94^\circ 15' 35''$, $B = 80^\circ 55' 48''$, $c = 100^\circ 50' 57''$ (6 зн.).
 19. $B = 119^\circ 3' 34''$, $C = 71^\circ 16' 0''$, $a = 60^\circ 54' 34''$ (6 зн.).
 20. $A = 116^\circ 20' 2''$, $B = 104^\circ 59' 8''$, $C = 137^\circ 29' 4''$, 60 (7 зн.).
 21. $a = 76^\circ 35' 36''$, $B = 42^\circ 15' 13''$, $C = 34^\circ 15' 2''$, 80 (7 зн.).
 22. $a = 36^\circ 52' 33''$, $b = 42^\circ 46' 41''$, $C = 54^\circ 26' 0''$ (5 зн.).
 23. $a = 48^\circ 36' 2''$, $b = 45^\circ 48' 6''$, $C = 24^\circ 18' 1''$ (4 зн.).
 24. $b = 107^\circ 16' 4''$, $c = 84^\circ 29' 7''$, $A = 63^\circ 19' 2''$ (4 зн.).
 25. $b = 22^\circ 40' 34''$, $c = 72^\circ 17' 58''$, $A = 64^\circ 40' 30''$ (5 зн.).
 26. $a = 28^\circ 36' 22''$, $c = 25^\circ 47' 46''$, $B = 49^\circ 10' 18''$ (5 зн.).
 27. $c = 58^\circ 54' 43''$, $A = 83^\circ 51' 23''$, $B = 129^\circ 8' 49''$ (5 зн.).
 28. $a = 69^\circ 42' 45''$, $b = 21^\circ 11' 3''$, $C = 107^\circ 26' 8''$ (6 зн.).
 29. $b = 46^\circ 3' 13''$, $c = 75^\circ 4' 7''$, $A = 120^\circ 26' 21''$ (5 зн.).

30. $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A$,

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}.$$

- Может быть два, одно или ни одного решения; исследуйте, при каких условиях
31. $B = 64^\circ 23' 30''$, и $115^\circ 36' 30''$,
 $C = 124^\circ 48' 14''$, $30^\circ 57' 24''$,
 $c = 115^\circ 51' 2''$, $34^\circ 19' 0''$ (5 зн.).

32. $B = 34^\circ 25' 13''$,
 $C = 150^\circ 27' 14''$,
 $c = 130^\circ 55' 48''$ (6 зн.).

Исследуйте, единственное ли это решение.

33. $B = 55^\circ 52' 30''$, и $124^\circ 7' 30''$,
 $C = 114^\circ 20' 16''$, $42^\circ 38' 40''$,
 $c = 66^\circ 20' 44''$, $42^\circ 55' 36''$ (6 зн.).
 34. $B = 26^\circ 49' 38''$, и $153^\circ 10' 22''$,
 $C = 140^\circ 4' 35''$, $6^\circ 56' 5''$,
 $c = 66^\circ 23' 21''$, $9^\circ 55' 36''$ (6 зн.).
 35. $B = 59^\circ 15' 57''$, и $120^\circ 44' 3''$,
 $C = 131^\circ 29' 44''$, $48^\circ 30' 16''$,
 $c = 120^\circ 47' 54''$, $59^\circ 12' 6''$ (6 зн.).
 36. $B = 75^\circ 1'$, и $104^\circ 59'$,
 $C = 70^\circ 7'$, $138^\circ 49'$,
 $c = 74^\circ 54'$, $137^\circ 28'$ (4 зн.).
 37. $B = 42^\circ 15' 13''$, 4, и $137^\circ 44' 46''$, 6,
 $A = 121^\circ 36' 19''$, 8, $11^\circ 16' 21''$, 9,
 $a = 76^\circ 35' 36''$, 0, $12^\circ 54' 4''$, 0 (7 зн.).
 38. $B = 75^\circ 0' 51''$, 60, и $104^\circ 59' 8''$, 40,
 $C = 70^\circ 6' 59''$, 19, $138^\circ 50' 13''$, 69,
 $c = 74^\circ 54' 31''$, 06, $137^\circ 29' 4''$, 64 (7 зн.).

39. $\sin b = \frac{\sin a}{\sin A} \sin B$,

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Случай допускает два, одно или ни одного решения; исследуйте, при каких условиях.

$$40. \begin{array}{ll} b = 40^{\circ}23',9, & \text{и} \quad 139^{\circ}36',1, \\ c = 22 \ 38,2, & 166 \ 51,7, \\ C = 36 \ 10,7 & 159 \ 36,0 \quad (4 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$41. \begin{array}{l} b = 38^{\circ}5'15'', \\ c = 47 \ 0 \ 44, \\ C = 69 \ 36 \ 18 \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

Второе решение невозможно (почему?).

$$42. \begin{array}{ll} b = 58^{\circ}6'0'', & \text{и} \quad 121^{\circ}54'0'', \\ c = 31 \ 41 \ 50, & 116 \ 4 \ 22, \\ C = 35 \ 41 \ 42 & 94 \ 8 \ 2 \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$43. \begin{array}{ll} b = 76^{\circ}33'0'', & \text{и} \quad 103^{\circ}27'0'', \\ c = 100 \ 23 \ 23, & 143 \ 30 \ 11, \\ c = 92 \ 55 \ 30 & 142 \ 49 \ 48 \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$44. a = 40^{\circ}14'21'', 2, c = 81^{\circ}10'40'', 0, C = 122^{\circ}41'18'', 8 \quad (6 \text{ зн.}). \text{ Одно решение (почему?).}$$

$$45. 44^{\circ}13'45''. \text{ Одно решение (почему?).}$$

$$46. a = 160^{\circ}21'47'', c = 142^{\circ}10'56'', C = 169^{\circ}21'35'' \quad (6 \text{ зн.}). \text{ Одно решение (почему?).}$$

$$47. \begin{array}{ll} a = 83^{\circ}55'0'', & \text{и} \quad 96^{\circ}5'0'', \\ C = 113 \ 21 \ 49, & 129 \ 7 \ 32, \\ c = 105 \ 39 \ 3 & 125 \ 32 \ 20 \quad (6 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$48. \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

$$\text{где } \varepsilon = A + B + C - 180^{\circ} \quad \text{и} \quad N = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right)}}.$$

Контрольная формула:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если требуется вычислить только одну сторону, например, сторону a , то более удобны формулы:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos (P-A)}{\sin B \sin C}}$$

или

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (P-B) \cos (P-C)}{\sin B \sin C}},$$

где $2P = A + B + C$.

Сравни также задачи № 36 и 37, отдел VI.

$$49. 37^{\circ}6',6 \quad (4 \text{ зн.}).$$

$$50. 69^{\circ}30'36'' \quad (5 \text{ зн.}).$$

$$51. \begin{array}{lll} a = 30^{\circ}4'56'', & b = 27^{\circ}32'22'', & c = 32^{\circ}15'48'' \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$52. \begin{array}{lll} a = 48^{\circ}14'9'', & b = 43^{\circ}2'17'', & c = 31^{\circ}52'49'' \quad (6 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$53. \begin{array}{lll} a = 39^{\circ}1'40'', & b = 77^{\circ}18'34'', & c = 69^{\circ}32'35'' \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$54. \begin{array}{lll} a = 51^{\circ}12'26'', & b = 75^{\circ}3'10'', & c = 45^{\circ}55'52'' \quad (5 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$55. \begin{array}{lll} a = 139^{\circ}3'28'', & b = 40^{\circ}11'24'', & c = 148^{\circ}47'47'' \quad (6 \text{ зн.}). \end{array}$$

$$56. \begin{array}{lll} a = 87^{\circ}35'20'', & b = 123^{\circ}47'10'', & c = 125^{\circ}18'52'' \quad (6 \text{ зн.}). \end{array}$$

Отдел V

$$1. a = 29^{\circ}18'2'',28, \quad C = 1^{\circ}26'41'',81 \quad (7 \text{ зн.}).$$

$$2. B = 129^{\circ}15'22'',6, \quad a = 40^{\circ}0'14'',4, \quad C = 0^{\circ}57'56'',7.$$

Ответ получен вычислением по специально выведенным формулам.

$$3. \begin{array}{lll} b = 0^{\circ}42'25'',71, & c = 0^{\circ}42'25'',52, & B = 45^{\circ}0'15'',71. \end{array}$$

$$5. A = 36^{\circ}14'8'',187, \quad (\delta = 8'',187) \quad (7 \text{ зн.}).$$

$$6. da = + 36'',31; \quad dB = + 14'',46; \quad dC = - 28'',33 \quad (4 \text{ зн.}).$$

$$7. da = 13'26'',6 \quad (4 \text{ зн.}).$$

8. 0,01 653.
9. 0,02 427.
10. 0,02 035₂.
11. 0,02 776.
12. 3^m47^s,421.
13. 4^m39^s,824.
14. 6^m21^s,598.
15. 5^m33^s,837.
16. 262,7 и 263,9 в 0^s,001.
17. 5^m52^s,80.
18. 11^m8^s,39.
19. $\lg \sin x = 8.44\ 264 - 10$,
 $\lg \operatorname{tg} x = 8.44\ 281 - 10$,
 $\lg \cos x = 9.99\ 983 - 10$.
20. $x = 3^{\circ}29'58''$,5.
21. $x = 2^{\circ}45'45''$,4.
22. $\lg \sin x = 8.37\ 847 - 10$, $\lg \operatorname{tg} x = 8.37\ 860 - 10$.
23. $x'' = 5372'',7 = 1^{\circ}29'32'',7$.

О т д е л VI

1. $\epsilon = \frac{2}{3} d = 60^{\circ}$.
2. $7^{\circ}35',0$.
3. $255^{\circ}52'50''$.
4. $229^{\circ}23',7$ (4 зн.).
5. $8^{\circ}30'40''$ (5 зн.).
6. $50^{\circ}14'3''$ (5 зн.).
7. $7^{\circ}39',2$ (4 зн.).
8. $26^{\circ}56',3$ (4 зн.).
9. $56^{\circ}35'$.
10. $255^{\circ}53'$ (4 зн.).
11. $37^{\circ}32'30'',16$ (7 зн.).
12. 56,188 кв. см (5 зн.).
15. 124,72 кв. см (5 зн.).
16. 25,06 кв. см (5 зн.).
17. 753766 (5 зн.).
18. 0,034 817 поверхности шара (6 зн.).
19. $\frac{5}{24}$ поверхности шара или $\frac{5}{3}$ площади октанта.
21. $\frac{1}{40\ 500}$.
24. 365,7 кв. градуса.
29. $\epsilon = 3'',46$.
33. $\epsilon \approx 1^{\circ}$.
34. $\epsilon \approx 1'$.
35. $\epsilon = 1'',002$.

$$36. \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos (P-A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (P-B) \cos (P-C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cos (P-A)}{\cos (P-B) \cos (P-C)}}.$$

$$37. \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(B - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right)}},$$

а также

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right) N,$$

где

$$N = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right)}}.$$

47. $\varepsilon = 11^\circ 11' 13'' 67$ (7 зн.).

Отдел VII

1. $5^\circ 40' 17'' \approx 630$ км.
2. $2^\circ 35' 15'' = 155 \frac{1}{4}$ морских миль ≈ 288 км (6 зн.).
3. 423,1 морских миль ($= 7^\circ 3' 7''$).
4. $22^\circ 23' 4'', 37 = 1343,07$ морских миль $= 2487,13$ км.
5. 1347,9 морских миль.
6. $4^\circ 15' 11'' = 472,7$ км (5 зн.).
7. $\pm 6'', 18 = \pm 0,19$ км (5 зн.).
8. $123^\circ 57' 27'' = 13\,773$ км (7 зн.).
9. $\lambda_B = +29^\circ 45' 53''$.
10. $s = 134^\circ 5' 27'', 65 = 8\,045,46$ морских миль; углы: $82^\circ 48' 31'', 84$ и $36^\circ 45' 31'', 02$ (7 зн.).
11. $\varphi = +29^\circ 47' 52'', 32$, $\lambda = +141^\circ 23' 59'', 63$ (7 зн.).
12. $\lambda = -128^\circ 36' 0'', 37$, угол $= 60^\circ 12' 7'', 68$ (7 зн.).
13. $\lambda = -114^\circ 12' 38'', 80$ (7 зн.).
14. $s = 9^\circ 53' 50'' = 593 \frac{5}{6}$ морских миль;
угол $= 54^\circ 20' 1''$, считая от экватора.
15. $t = 52^\circ 34' 34''$, $A = 73^\circ 5' 14''$ (5 зн.).
16. $z = 38^\circ 18' 22''$, $\delta = +36^\circ 30' 54''$ (5 зн.).
17. $\varphi = 73^\circ 17' 4''$, $A = 45^\circ 19' 32''$ (5 зн.);
другое решение не годится, так как $\varphi < 0$.

Отдел VIII

1. 54,97 кв. м.
2. $130^\circ 86'$.
3. $94^\circ 51'$ (7 зн.).
4. $94^\circ 51'$.
5. $a = b = c = 107^\circ 16' 54''$ (6 зн.).
6. $A = B = C = 70^\circ 31' 43'', 5$ (6 зн.).
7. $A = 129^\circ 54' 32''$, $B = C = 66^\circ 25' 40''$.
8. $a = 31^\circ 27' 20''$, $A = 43^\circ 53' 14''$.
9. $a = 71^\circ 37' 0''$. $b = c = 64^\circ 43' 49''$.
10. $a = 108^\circ 0' 0''$, $b = c = 60^\circ 0' 0''$ (5 зн.).
11. $A = 165^\circ 19' 46''$, $a = 56^\circ 14' 20''$.
12. $A = 38^\circ 35' 0''$, $b = 107^\circ 9' 18''$, $c = 72^\circ 50' 42''$.
13. $A = 69^\circ 26' 34'', 8$, $b = 18^\circ 46' 54'', 7$, $c = 161^\circ 13' 5'', 3$ (6 зн.).
14. $a = 47^\circ 25' 20''$, $A = 29^\circ 55' 35''$, $C = 39^\circ 56' 50''$.
15. $A = 69^\circ 26' 35''$, $C = 143^\circ 47' 50''$, $a = 149^\circ 18' 35''$ (5 зн.).

$$91. \quad \operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

или

$$R = \operatorname{tg} \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}.$$

$$92. \quad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p}},$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} r &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin (p-a) = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin (p-b) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin (p-c). \end{aligned}$$

$$98. \quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin p,$$

$$\operatorname{tg} r_b = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin p,$$

$$\operatorname{tg} r_c = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin p.$$

Приложение 2

Таблица логарифмических поправок для малых углов, выраженных в градусных мерах, в единицах пятого десятичного знака

x	$\lg x''$	$\sigma(x)$	x	$\lg x''$	$\sigma(x)$	x	$\lg x''$	$\sigma(x)$
0° 12',8	2.885	0.1	1° 43',1	3.791	6.5	3° 9',5	4.0558	22
18 ,1	3.035	0.2	46 ,9	3.807	7.0	13 ,8	4.0655	23
22 ,1	3.123	0.3	50 ,7	3.822	7.5	18 ,0	4.0747	24
25 ,6	3.186	0.4	54 ,3	3.8362	8.0	22 ,0	4.0836	25
28 ,6	3.234	0.5	57 ,8	3.8493	8.5	26 ,0	4.0921	26
31 ,3	3.274	0.6	2 1 ,2	3.8617	9.0	30 ,0	4.1003	27
33 ,8	3.307	0.7	4 ,5	3.8735	9.5	33 ,8	4.1082	28
36 ,1	3.336	0.8	7 ,8	3.8846	10	37 ,6	4.1158	29
38 ,3	3.362	0.9	14 ,0	3.9053	11	41 ,3	4.1232	30
40 ,4	3.385	1.0	19 ,9	3.9242	12	45 ,0	4.1303	31
49 ,5	3.473	1.5	25 ,7	3.9416	13	48 ,6	4.1372	32
57 ,2	3.535	2.0	31 ,2	3.9577	14	52 ,1	4.1439	33
13 ,9	3.584	2.5	36 ,5	3.9727	15	55 ,6	4.1504	34
10 ,0	3.623	3.0	41 ,6	3.9867	16	59 ,0	4.1567	35
15 ,6	3.657	3.5	46 ,6	3.9998	17	4 2 ,4	4.1628	36
20 ,8	3.686	4.0	51 ,4	4.0123	18	5 ,8	4.1687	37
25 ,8	3.711	4.5	56 ,1	4.0240	19	9 ,1	4.1745	38
30 ,5	3.734	5.0	3 0 ,7	4.0351	20	12 ,3	4.1801	39
34 ,8	3.755	5.5	5 ,2	4.0457	21	4° 15',5	4.1856	40
1° 39',0	3.774	6.0	3° 9',5	4.0558	22			

Таблица натуральных поправок малых углов, выраженных в часовых единицах (0^с,001)

	1 ^м		2 ^м		3 ^м		4 ^м		5 ^м		6 ^м		
0°	0,2	0	1,5	1	5,1	1	12,2	1	23,8	2	41,1	4	0°
1	0,2	0	1,6	0	5,2	1	12,3	2	24,0	3	41,5	3	1
2	0,2	0	1,6	0	5,3	1	12,5	1	24,3	2	41,8	4	2
3	0,2	0	1,6	1	5,4	1	12,6	2	24,5	3	42,2	3	3
4	0,2	0	1,7	0	5,5	1	12,8	2	24,8	2	42,5	4	4
5	0,2	1	1,7	1	5,6	1	13,0	1	25,0	3	42,9	3	5
6	0,3	0	1,8	0	5,7	1	13,1	2	25,3	2	43,2	4	6
7	0,3	0	1,8	0	5,8	1	13,3	1	25,5	3	43,6	3	7
8	0,3	0	1,8	1	5,9	1	13,4	2	25,8	2	43,9	4	8
9	0,3	0	1,9	0	6,0	0	13,6	2	26,0	3	44,3	3	9
10	0,3	0	1,9	1	6,0	1	13,8	1	26,3	2	44,6	4	10
11	0,3	0	2,0	0	6,1	1	13,9	2	26,5	3	45,0	4	11
12	0,3	0	2,0	1	6,2	1	14,1	2	26,8	2	45,4	3	12
13	0,3	1	2,1	0	6,3	1	14,3	1	27,0	3	45,7	4	13
14	0,4	0	2,1	1	6,4	1	14,4	2	27,3	2	46,1	4	14
15	0,4	0	2,2	0	6,5	1	14,6	2	27,5	3	46,5	4	15
16	0,4	0	2,2	1	6,6	1	14,8	2	27,8	3	46,9	3	16
17	0,4	0	2,3	0	6,7	1	15,0	1	28,1	2	47,2	4	17
18	0,4	0	2,3	1	6,8	1	15,1	2	28,3	3	47,6	4	18
19	0,4	1	2,4	0	6,9	2	15,3	2	28,6	3	48,0	4	19
20	0,5	0	2,4	1	7,1	1	15,5	2	28,9	3	48,4	3	20
21	0,5	0	2,5	0	7,2	1	15,7	2	29,2	2	48,7	4	21
22	0,5	0	2,5	1	7,3	1	15,9	1	29,4	3	49,1	4	22
23	0,5	0	2,6	0	7,4	1	16,0	2	29,7	3	49,5	4	23
24	0,5	0	2,6	1	7,5	1	16,2	2	30,0	3	49,9	4	24
25	0,5	1	2,7	0	7,6	1	16,4	2	30,3	2	50,3	4	25
26	0,6	0	2,7	1	7,7	1	16,6	2	30,5	3	50,7	4	26
27	0,6	0	2,8	1	7,8	1	16,8	2	30,8	3	51,1	4	27
28	0,6	0	2,9	0	7,9	1	17,0	2	31,1	3	51,5	4	28
29	0,6	0	2,9	1	8,0	2	17,2	1	31,4	3	51,9	4	29
30	0,6		3,0		8,2		17,3		31,7		52,3		30

30	0,6	1	3,0	0	8,2	1	17,3	2	31,7	3	52,3	4	30
31	0,7	0	3,0	1	8,3	1	17,5	2	32,0	3	52,7	4	31
32	0,7	0	3,1	1	8,4	1	17,7	2	32,3	2	53,1	4	32
33	0,7	0	3,2	0	8,5	1	17,9	2	32,5	3	53,5	4	33
34	0,7	1	3,2	1	8,6	2	18,1	2	32,8	3	53,9	4	34
35	0,8	0	3,3	0	8,8	1	18,3	2	33,1	3	54,3	4	35
36	0,8	0	3,3	1	8,9	1	18,5	2	33,4	3	54,7	5	36
37	0,8	0	3,4	1	9,0	1	18,7	2	33,7	3	55,2	4	37
38	0,8	1	3,5	0	9,1	2	18,9	2	34,0	3	55,6	4	38
39	0,9	0	3,5	1	9,3	1	19,1	2	34,3	3	56,0	4	39
40	0,9	0	3,6	1	9,4	1	19,3	3	34,6	3	56,4	4	40
41	0,9	0	3,7	0	9,5	1	19,6	2	34,9	4	56,8	5	41
42	0,9	1	3,7	1	9,6	2	19,8	2	35,3	3	57,3	4	42
43	1,0	0	3,8	1	9,8	1	20,0	2	35,6	3	57,7	4	43
44	1,0	0	3,9	1	9,9	1	20,2	2	35,9	3	58,1	5	44
45	1,0	0	4,0	0	10,0	2	20,4	2	36,2	3	58,6	4	45
46	1,0	1	4,0	1	10,2	1	20,6	2	36,5	3	59,0	4	46
47	1,1	0	4,1	1	10,3	1	20,8	3	36,8	3	59,4	5	47
48	1,1	0	4,2	1	10,4	2	21,1	2	37,1	4	59,9	4	48
49	1,1	1	4,3	0	10,6	1	21,3	2	37,5	3	60,3	4	49
50	1,2	0	4,3	1	10,7	2	21,5	2	37,8	3	60,7	5	50
51	1,2	0	4,4	1	10,9	1	21,7	2	38,1	3	61,2	4	51
52	1,2	1	4,5	1	11,0	1	21,9	3	38,4	4	61,6	5	52
53	1,3	0	4,6	0	11,1	2	22,2	2	38,8	3	62,1	4	53
54	1,3	0	4,6	1	11,3	1	22,4	2	39,1	3	62,5	5	54
55	1,3	1	4,7	1	11,4	2	22,6	3	39,4	4	63,0	5	55
56	1,4	0	4,8	1	11,6	1	22,9	2	39,8	3	63,5	4	56
57	1,4	0	4,9	1	11,7	2	23,1	2	40,1	3	63,9	5	57
58	1,4	1	5,0	1	11,9	1	23,3	3	40,4	4	64,4	4	58
59	1,5	0	5,1	0	12,0	2	23,6	2	40,8	3	64,8	5	59
60*	1,5		5,1		12,2		23,8		41,1		65,3		60*
	1 ^м		2 ^м		3 ^м		4 ^м		5 ^м		6 ^м		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Глава I

Геометрия на сфере

Стр.

§ 1. Элементы фигур на сфере. Аналогия между сферой и плоскостью	5
§ 2. Простейшие сферические фигуры	7
§ 3. Обобщенные треугольники	8
§ 4. О полюсах	9
§ 5. Сферические углы и их измерение	11
§ 6. Полярные треугольники	14
§ 7. Сферический треугольник и соответствующий ему трехгранный угол	17
§ 8. Свойства сторон и углов сферического треугольника	18
§ 9. Равные и симметричные сферические треугольники	20

Глава II

Основные формулы сферической тригонометрии

§ 10. Формула косинуса стороны сферического треугольника	21
§ 11. Формула косинуса угла сферического треугольника	23
§ 12. Теорема синусов для сферического треугольника	24
§ 13. Формула произведения синуса стороны на косинус прилежащего угла . . .	26
§ 14. Формула произведения синуса угла на косинус прилежащей стороны . . .	27
§ 15. Формула котангенсов	28

Глава III

Прямоугольные сферические треугольники

§ 16. Сферический двуугольник	29
§ 17. Классификация сферических треугольников	—
§ 18. Формулы для прямоугольных сферических треугольников	31
§ 19. Мнемоническое правило Непера	32
§ 20. Два инварианта прямоугольного сферического треугольника	34
§ 21. Соотношение между катетом и противолежащим ему углом	35
§ 22. Решение прямоугольных сферических треугольников	36

Глава IV

Косоугольные сферические треугольники

§ 23. Формулы полупериметра	40
§ 24. Формулы синуса и косинуса полусуммы и полуразности углов сферического треугольника	43
§ 25. Аналогии Непера, Теорема тангенсов	46
§ 26. Формулы синуса половины сферического избытка	48
§ 27. Решение косоугольных треугольников	50

Глава V

Элементарные сферические треугольники

§ 28. Решение элементарных треугольников	72
§ 29. Вычисление малых углов по таблицам натуральных значений тригонометрических функций	73
§ 30. Вычисление малых углов по таблицам логарифмов	79

Глава VI

Площадь сферического треугольника. Сферический избыток

§ 31. Площадь поверхности сферического треугольника	81
§ 32. Теорема о сферическом треугольнике с малыми сторонами	84
§ 33. Вычисление сферического избытка треугольника с малыми сторонами	88

Глава VII

Аналитическая геометрия на сфере

§ 34. Первая система сферических координат (полярная)	89
§ 35. Преобразование полярных сферических координат	91
§ 36. Некоторые задачи аналитической геометрии на сфере	97
§ 37. Вторая система сферических координат (тангенциальная)	103

Глава VIII

Дополнения

§ 38. Об измерении углов	110
§ 39. Практическое замечание о решении треугольников	113
§ 40. Дифференциальные соотношения сферического треугольника	116
§ 41. Решение сферических треугольников с малыми сторонами по способу аддитаментов	121
§ 42. Сферические треугольники с сверхтупыми углами	123

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Задачи по сферической геометрии и тригонометрии	127
Указания и примечания	140
Ответы	142
2. Таблица логарифмических поправок	150
3. Таблица натуральных поправок малых углов, выраженных в часовых единицах	151

Редактор А. И. Витман

Техн. редактор И. А. Шленский

А09819. Сдано в набор 23/VII 1948 г. Подписано к печати 16/X 1948 г. Объем 9,75 п. л. Количество знаков в печ. л. 70 000. Уч.-изд. листов 17. Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Тираж 5 000 экз. Цена 9 руб.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР. Москва, Валуевская, 28.

Отпечатано с матриц в тип. Упр. Дел. Сов. Министров СССР Зак. № 2744.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
20	2 снизу	AB и $A'B'$	AB и $A'B'$ в их середине
52	1—3 снизу	$\frac{A}{2}$ $\frac{C}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$
60	24 снизу	$\lg \frac{\sin}{\sin C}$	$\lg \frac{\sin c}{\sin C}$
79	11 сверху	49	43
86	1 сверху		$\frac{b_1}{R}, \frac{c_1}{R}, \frac{p_1}{R}, \frac{p_1 - a_1}{R}, \frac{p_1 - b_1}{R}, \frac{p_1 - c_1}{R}$
97	28 сверху	$\alpha - \lambda'$, а во втором $\alpha + \lambda'$	$\alpha + \lambda'$, а во втором $\alpha - \lambda'$
117	18 сверху	стороны	угла
131	24 снизу	$b = 82^\circ 39'$	$b = 82^\circ 40'$
138	1 сверху	58 продолжить дугу. Если	58. Если продолжить дугу
150	8 снизу	13',9	1°3',9

Сферическая тригонометрия.

ЦЕНА 9 РУБ.