

Тема 1: ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ.

Все верное было давным-давно найдено.

Иоганн Вольфганг Гете. Классик немецкий литературы, XVIII-XIX в.

Это точно. Разложением функций еще во II веке занимался Клавдий Птоломей. И наверняка вейвлетным, потому как рядов Фурье не было, Фурье не родился.

Игорь Широков. Московский геофизик Уральской школы, XX в.

Содержание: Введение. 1.1. Истоки вейвлет-преобразования. Преобразование Фурье. Принцип вейвлет-преобразования. Вейвлетный спектр. 1.2. Основы вейвлет-преобразования. Непрерывное вейвлет-преобразование. Дискретное вейвлет-преобразование. Частотно-временная локализация вейвлет-анализа. Образное представление преобразования. Достоинства и недостатки вейвлетных преобразований. Практическое использование. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

Вейвлетный анализ представляет собой особый тип линейного преобразования сигналов и отображаемых этими сигналами физических данных о процессах и физических свойствах природных сред и объектов. Базис собственных функций, по которому проводится разложение сигналов, обладает многими специальными свойствами и возможностями. Они позволяют сконцентрировать внимание на тех или иных особенностях анализируемых процессов, которые не могут быть выявлены с помощью традиционных преобразований Фурье и Лапласа. К таким процессам в геофизике относятся поля различных физических параметров природных сред. В первую очередь это касается полей температуры, давления, профилей сейсмических трасс и других физических величин.

Вейвлеты (wavelets-короткая волна, иногда переводится как всплеск) – функции определенной формы, локализованные по оси аргументов (независимых переменных), инвариантные к сдвигу и линейные к операции масштабирования (сжатия/растяжения). Они создаются с помощью специальных базисных функций, которые определяют их вид и свойства. По локализации во временном и частотном представлении вейвлеты занимают промежуточное положение между гармоническими (синусоидальными) функциями, локализованными по частоте, и функцией Дирака, локализованной во времени. Впервые этот термин использовали Гроссман и Морле (A.Grossmann, J.Morlet) при анализе свойств сейсмических и акустических сигналов.

Теория вейвлетов не является фундаментальной физической теорией, но она дает удобный инструмент для решения многих практических задач. Основная область применения вейвлетных преобразований – анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только общую частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения об определенных локальных координатах, на которых себя проявляют те или иные группы частотных составляющих, или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала. По сравнению с разложением сигналов на ряды Фурье, вейвлеты способны с гораздо более высокой точностью представлять локальные особенности сигналов, вплоть до разрывов 1-го рода (скачков). В отличие от преобразований Фурье, вейвлет-преобразование одномерных сигналов обеспечивает двумерную развертку, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные, что дает возможность анализа сигналов сразу в двух пространствах.

Одна из главных и особенно плодотворных идей вейвлетного представления сигналов на различных уровнях декомпозиции (разложения) заключается в разделении функций приближения к сигналу на две группы: аппроксимирующую - грубую, с достаточно медленной временной динамикой изменений, и детализирующую - с локальной и быстрой динамикой изменений на фоне плавной динамики, с последующим их дроблением и детализацией на других уровнях декомпозиции сигналов. Это возможно как во временной, так и в частотной областях представления сигналов вейвлетами.

1.1. ИСТОКИ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ /Л43/

На протяжении многих десятилетий и по настоящее время основным средством анализа реальных физических процессов являлся гармонический анализ. Математической основой анализа является преобразование Фурье. Преобразование Фурье разлагает произвольный процесс на элементарные гармонические колебания с различными частотами, а все необходимые свойства и формулы выражаются с помощью одной базисной функции $\exp(j\omega t)$ или двух действительных функций $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Гармонические колебания имеют широкое распространение в природе, и поэтому смысл преобразования Фурье интуитивно понятен независимо от математической аналитики.

Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств. Оператор обратного преобразования Фурье совпадает с выражением для комплексно - сопряженного оператора. Областью определения преобразования является пространство L^2 интегрируемых с квадратом функций, и многие реальные физические процессы, наблюдаемые в природе, можно считать функциями времени, принадлежащими этому пространству. Для применения преобразования разработаны эффективные вычислительные процедуры типа быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эти процедуры входят в состав всех пакетов прикладных математических программ и реализованы аппаратно в различных процессорах обработки сигналов.

Вейвлетное преобразование имеет много общего с преобразованием Фурье. В то же время имеется ряд достаточно существенных отличий. Семейства вейвлетов во временной или частотной области используются для представления сигналов и функций в виде суперпозиций вейвлетов на разных уровнях декомпозиции (разложения) сигналов. Первые теоретические работы по основам вейвлетных преобразований были выполнены в 90-х годах прошлого века Мейером (Meyer Y.), Добеши (Daubechies I.) и Маллатом (Mallat S.A.). Математический аппарат вейвлет-преобразований находится в стадии активной разработки, однако специальные пакеты расширений по вейвлетам уже присутствуют в основных системах компьютерной математики (Matlab, Mathematica, и др.).

В настоящее время вейвлет-преобразования и вейвлетный анализ используются во многих областях науки и техники для самых различных задач: для распознавания образов, для численного моделирования динамики сложных нелинейных процессов, для анализа аппаратной информации и изображений в медицине, космической технике, астрономии, геофизике, для эффективного сжатия сигналов и передачи информации по каналам с ограниченной пропускной способностью и т.п. Многие исследователи называют вейвлет-анализ "математическим микроскопом" для точного изучения внутреннего состава и структур неоднородных сигналов и функций.

Не следует рассматривать вейвлет-методы обработки и анализа сигналов в качестве новой универсальной технологии для решения любых задач. Возможности вейвлетов, несомненно, еще не раскрыты полностью. Однако это не означает, что их развитие приведет к полной замене традиционных средств обработки и анализа информации, хорошо отработанных и проверенных временем. Но оно может существенно расширить инструментальную базу информационных технологий обработки данных.

Преобразование Фурье (ПФ). В основе спектрального анализа сигналов лежит интегральное преобразование и ряды Фурье. Напомним некоторые математические определения.

В пространстве функций, заданных на конечном интервале $(0, T)$, норма определяется как корень из скалярного произведения

$$\|s(t)\|^2 = \langle s(t), s(t) \rangle = \int_0^T s(t) \cdot s^*(t) dt \quad (1.1.1)$$

Если норма функции имеет конечное значение (интеграл сходится), то говорят, что функция принадлежит пространству функций $L^2(0, T)$, интегрируемых с квадратом, и, соответственно, имеет конечную энергию. Любая функция из этого пространства может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(jn\Delta\omega t), \quad (1.1.2)$$

$$S_n = (1/T) \int_0^T s(t) \exp(-jn\Delta\omega t) dt, \quad (1.1.3)$$

где $\Delta\omega=2\pi/T$ – шаг частотного аргумента ряда. Уравнения (1.1.3) и (1.1.2) представляют собой прямое и обратное преобразование Фурье сигнала $s(t)$.

На практике ряд Фурье ограничивается определенным количеством членов N . Ограничение числа членов ряда значением N означает аппроксимацию бесконечномерного сигнала N – мерной системой базисных функций спектра сигнала с определенной погрешностью в зависимости от фактического спектра сигнала. Ряд Фурье равномерно сходится к $s(t)$ по норме (1.1.1):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| s(t) - \sum_{n=-N}^N S_n \exp(jn\Delta\omega t) \right\| = 0. \quad (1.1.4)$$

Таким образом, ряд Фурье – это разложение сигнала $s(t)$ по базису пространства $L^2(0,T)$ ортонормированных гармонических функций $\exp(jn\Delta\omega t)$ с изменением частоты, кратным частоте первой гармоники $\omega_1=\Delta\omega$. Отсюда следует, что ортонормированный базис пространства $L^2(0,T)$ построен из одной функции $v(t) = \exp(j\Delta\omega t) = \cos(\Delta\omega t) + j\sin(\Delta\omega t)$ с помощью масштабного преобразования независимой переменной так, что $v_n(t) = v(nt)$.

Для коэффициентов ряда Фурье справедливо равенство Парсеваля сохранения энергии сигнала в различных представлениях:

$$(1/T) \int_0^T |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2. \quad (1.1.5)$$

Разложение в ряд Фурье произвольной функции $y(t)$ корректно, если функция $y(t)$ принадлежит этому же пространству $L^2(0,T)$, т.е. квадратично интегрируема с конечной энергией:

$$\int_0^T |y(t)|^2 dt < \infty, \quad t \in (0,T), \quad (1.1.6)$$

при этом она может быть периодически расширена и определена на всей временной оси пространства $R(-\infty, \infty)$ так, что

$$y(t) = y(t-T), \quad t \in R,$$

при условии сохранения конечности энергии в пространстве $R(-\infty, \infty)$.

С позиций анализа сигналов в частотной области и точного восстановления после преобразований можно отметить ряд недостатков разложения сигналов в ряды Фурье:

- Особенности сигналов, связанные с разрывами (скачками) и острыми пиками, вызывают незначительные изменения их частотного образа, т.к. "размазываются" по всей частотной оси, что делает невозможным их обнаружение и анализ по спектрам.
- Гармонические базисные функции разложения, в принципе, не могут отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, т.к. это требует бесконечно больших значений числа членов ряда. При аппроксимации скачков нелокализованными во времени базисными функциями требуется, чтобы суперпозиция этих функций не только восстановила скачок, но и уничтожила друг друга за пределами скачка, что делает равнозначными все компоненты его спектра. При ограничении числа членов ряда Фурье в окрестностях скачков и разрывов восстановленного сигнала возникают осцилляции (явление Гиббса).
- Преобразованием Фурье отображаются глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала, поскольку базисные функции преобразования определены на бесконечном временном интервале. ПФ не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменениях его спектрального состава. Так, например, преобразование Фурье не различает сигнал с суммой двух синусоид, от сигнала с двумя последовательно следующими синусоидами с теми же частотами. Преобразование Фурье в принципе не имеет возможности анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

Частичным выходом из этой ситуации является так называемое оконное преобразова-

ние Фурье, при котором вместо одной базисной функции $\exp(-jn\Delta\omega t)$ берется набор функций $p(t-m\Delta T) \cdot \exp(-jn\Delta\omega t)$, где $p(t)$ – временное окно единичного преобразования Фурье, ΔT - интервал сдвига функции $p(t)$ по интервалу T задания сигнала. Размер носителя функции $p(t)$ и сдвиг ΔT обычно устанавливается соизмеримым с интервалом стационарности сигнала. Результатом оконного преобразования является семейство спектров, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам ΔT . По существу, таким преобразованием один нелокализованный базис разбивается на определенное количество базисов, локализованных в пределах функции $p(t)$, что существенно увеличивает количество элементов разложения. При этом размер стационарности сигнала необходимо знать априори и он сохраняется неизменным независимо от фактического спектра сигнала по интервалам ΔT .

Принцип вейвлет-преобразования. Гармонические базисные функции преобразования Фурье предельно локализованы в частотной области (до импульсных функций Дирака при $T \rightarrow \infty$) и не локализованы во временной (определены во всем временном интервале от $-\infty$ до ∞). Их противоположностью являются импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера, которые предельно локализованы во временной области и "размыты" по всему частотному диапазону. Вейвлеты по локализации в этих двух представлениях можно рассматривать как функции, занимающие промежуточное положение между гармоническими и импульсными функциями. Они должны быть локализованными как во временной, так и в частотной области представления. Однако при проектировании таких функций мы неминуемо столкнемся с известным принципом неопределенности, связывающим эффективные значения длительности функций и ширины их спектра. Чем точнее мы будем осуществлять локализацию временного положения функции, тем шире будет становиться ее спектр, и наоборот. Отличительной особенностью вейвлет-анализа является то, что в нем можно использовать семейства функций, реализующих различные варианты соотношения неопределенности. Соответственно, исследователь имеет возможность гибкого выбора между ними и применения тех вейвлетных функций, которые наиболее эффективно решают поставленные задачи.

Вейвлетный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$, целесообразно конструировать из финитных функций, принадлежащих этому же пространству, которые должны стремиться к нулю на бесконечности. Чем быстрее эти функции стремятся к нулю, тем удобнее использовать их в качестве базиса преобразования при анализе реальных сигналов. Допустим, что такой функцией является $\psi(t)$ - функция $\psi(t)$, равная нулю за пределами некоторого конечного интервала.

Попытаемся сконструировать базис в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ на основе локализованной во времени (по независимой переменной) функции $\psi(t)$ с помощью масштабных преобразований независимой переменной.

Функция изменения частотной независимой переменной в спектральном представлении сигналов отображается во временном представлении растяжением/сжатием сигнала. Для вейвлетного базиса это можно выполнить функцией типа $\psi(t) \Rightarrow \psi(a^m t)$, $a = \text{const}$, $m = 0, 2, \dots, M$, т.е. путем линейной операции растяжения/сжатия, обеспечивающей самоподобие функции на разных масштабах представления. Однако конечность (локальность) функции $\psi(t)$ на временной оси требует дополнительной независимой переменной последовательных переносов (сдвигов) функции $\psi(t)$ вдоль оси (параметра локализации), типа $\psi(t) \Rightarrow \psi(t+k)$, для перекрытия всей числовой оси пространства $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$. С учетом обеих условий одновременно структура базисной функции может быть принята следующей:

$$\psi(t) \Rightarrow \psi(a^m t + k). \quad (1.1.7)$$

Для упрощения дальнейших выкладок значения переменных m и k примем целочисленными. При приведении функции (1.1.7) к единичной норме по (1.1.1) получаем:

$$\psi_{mk}(t) = a^{m/2} \psi(a^m t + k). \quad (1.1.8)$$

Если для семейства функций $\psi_{mk}(t)$ выполняется условие ортогональности:

$$\langle \psi_{nk}(t), \psi_{lm}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{nk}(t) \cdot \psi_{lm}^*(t) dt = \delta_{nl} \cdot \delta_{km}, \quad (1.1.9)$$

то семейство $\psi_{mk}(t)$ может использоваться в качестве ортонормированного базиса простран-

ства $L^2(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что произвольная функция этого пространства может быть представлена в виде ряда (разложения по базису $\psi_{mk}(t)$):

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk} \psi_{mk}(t), \quad (1.1.10)$$

где коэффициенты представления сигнала – проекции сигнала на новый ортогональный базис функций, как и в преобразовании Фурье, определяются скалярным произведением

$$S_{mk} = \langle s(t), \psi_{mk}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad (1.1.11)$$

при этом ряд равномерно сходиться, то есть

$$\lim_{M,K \rightarrow \infty} \left\| s(t) - \sum_{m=-M}^M \sum_{k=-K}^K S_{mk} \psi_{mk}(t) \right\| = 0.$$

При выполнении этих условий базисная функция преобразования $\psi(t)$ называется ортогональным вейвлетом.

Простейшим примером ортогональной системы функций такого типа являются функции Хаара. Базисная функция Хаара определяется соотношением

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Легко проверить, что при $a = 2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$ две любые функции, полученные с помощью этого базисного вейвлета путем масштабных преобразований и переносов, имеют единичную норму и ортогональны. На рис. 1.1.1 приведены примеры функций для первых трех значений m и b при различных их комбинациях, где ортогональность функций видна наглядно.

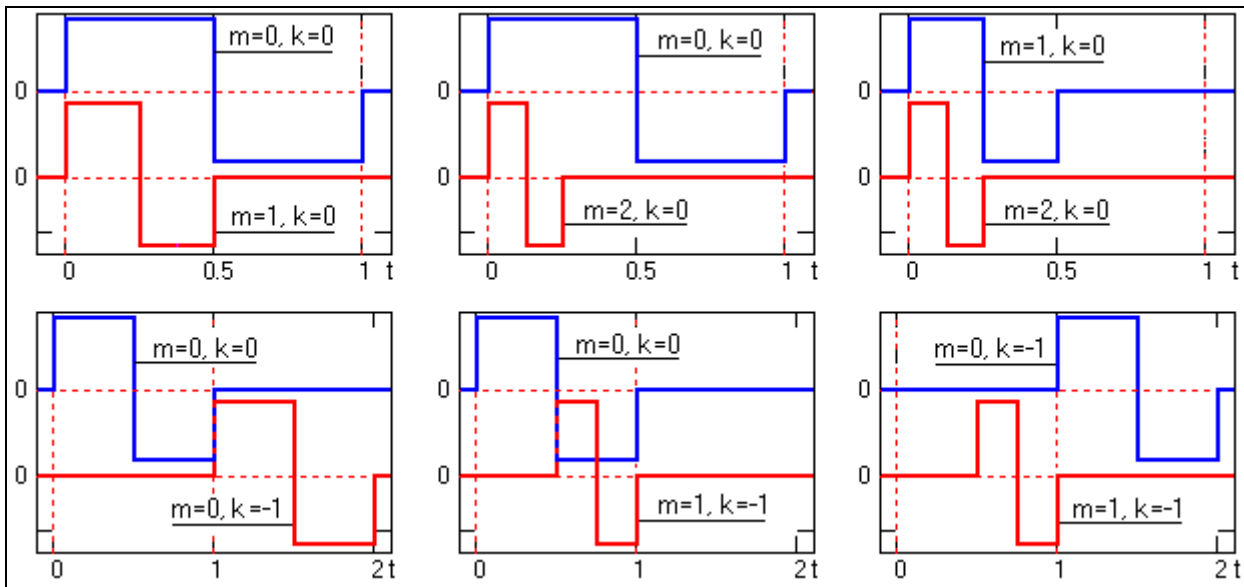


Рис. 1.1.1. Функции Хаара.

Вейвлетный спектр (1.1.11), в отличие от преобразования Фурье, является двумерным и определяет двумерную поверхность в пространстве переменных m и k . При графическом представлении параметр растяжения/сжатия спектра m откладывается по оси абсцисс, параметр локализации k по оси ординат – оси независимой переменной сигнала. Математику процесса вейвлетного разложения сигнала в упрощенной форме можно представить себе следующим образом (на примере разложения сигнала $s(t)$ вейвлетом Хаара с тремя последовательными по масштабу m вейвлетными функциями с параметром $a=2$, при этом сам сигнал $s(t)$ образован суммированием этих же вейвлетных функций с одинаковой амплитудой с разным сдвигом от нуля, как это показано на рис. 1.1.2).

Для выбранного начального значения масштабного коэффициента сжатия m опреде-

ляется функция вейвлета (функция $\psi_1(t)$ на рис. 1.1.2), и вычисляется скалярное произведение сигнала с вейвлетом $\langle \psi_1(t), s(t+k) \rangle$ с аргументом по сдвигу k . Для лучшей наглядности результаты вычисления скалярных произведений на рис. 1.1.2 построены по центрам вейвлетных функций (т.е. по аргументу k от нуля со сдвигом на половину длины вейвлетной функции). Как и следовало ожидать, максимальные значения скалярного произведения отмечаются в сигнале там, где локализована эта же вейвлетная функция.

После построения первой масштабной строки разложения, меняется масштаб вейвлетной функции (ψ_2 на рис. 1.1.2) и выполняется вычисление второй масштабной строки спектра, и т.д.

Как видно на рис. 1.1.2, чем точнее локальная особенность сигнала совпадает с соответствующей функцией вейвлета, тем эффективнее выделение этой особенности на соответствующей масштабной строке вейвлетного спектра. Нетрудно видеть также, что для сильно сжатого вейвлета Хаара характерной хорошо выделяемой локальной особенностью является скачок сигнала, причем выделяется не только скачок функции, но и направление скачка.

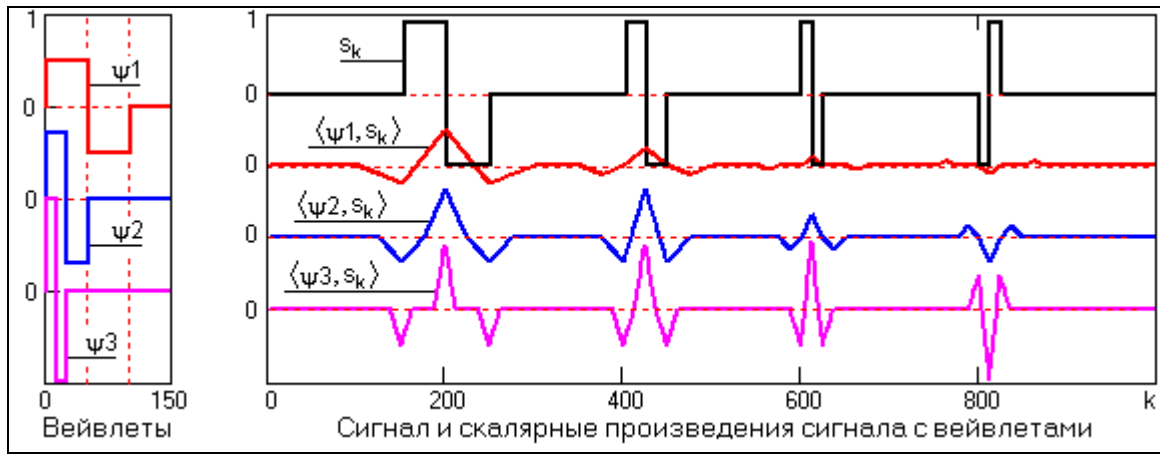


Рис. 1.1.2. Скалярные произведения сигнала с вейвлетами.

На рис. 1.1.3 приведен пример графического отображения вейвлетной поверхности реального физического процесса /л43/. Вид поверхности определяет изменения во времени спектральных компонент различного масштаба и называется частотно-временным спектром. Поверхность изображается на рисунках, как правило, в виде изолиний или условными цветами. Для расширения диапазона масштабов может применяться логарифмическая шкала.

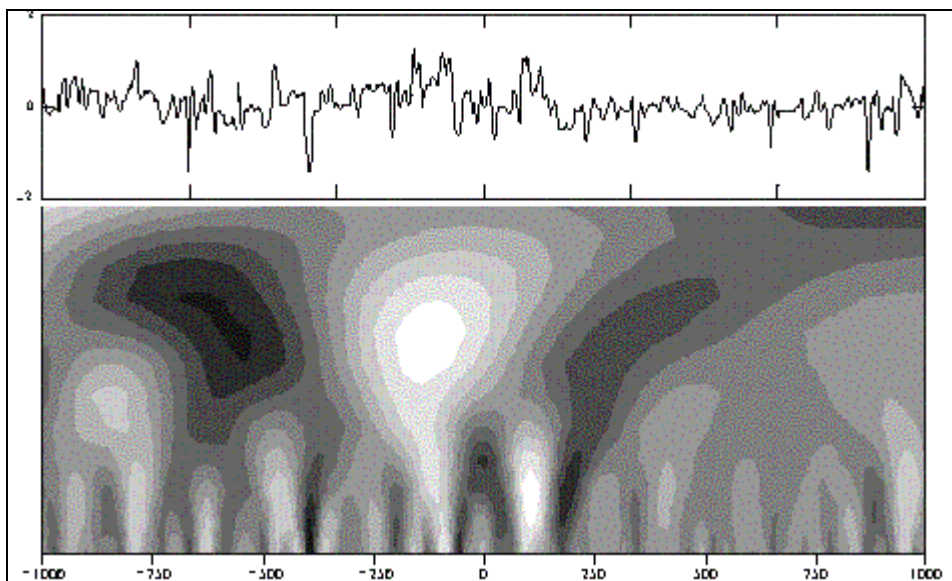


Рис. 1.1.3. Пример вейвлетного преобразования.

1.2. ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ /Л34, Л35/.

Допустим, что мы имеем функции $s(t)$ с конечной энергией (нормой) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, определенные по всей действительной оси $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$. Для финитных сигналов с конеч-

ной энергией средние значения сигналов, как и любых других функций из пространства $L^2(\mathbb{R})$, должны стремиться к нулю на $\pm\infty$.

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП, CWT- Continue Wavelet Transform).

В общей основе вейвлет-преобразований, и НВП в частности, лежит использование двух непрерывных взаимозависимых и интегрируемых по оси t функций:

- Вейвлет-функции $\psi(t)$, как psi-функции времени с нулевым значением интеграла и частотным фурье-образом $\Psi(\omega)$. Этой функцией, которую обычно и называют вейвлетом, выделяются детали сигнала и его локальные особенности. Пример временного и частотного образа функции приведен на рис. 1.2.1.
- Масштабирующей функции $\varphi(t)$, как временной скейлинг-функции phi с единичным значением интеграла, с помощью которой выполняется грубое приближение (аппроксимация) сигнала.

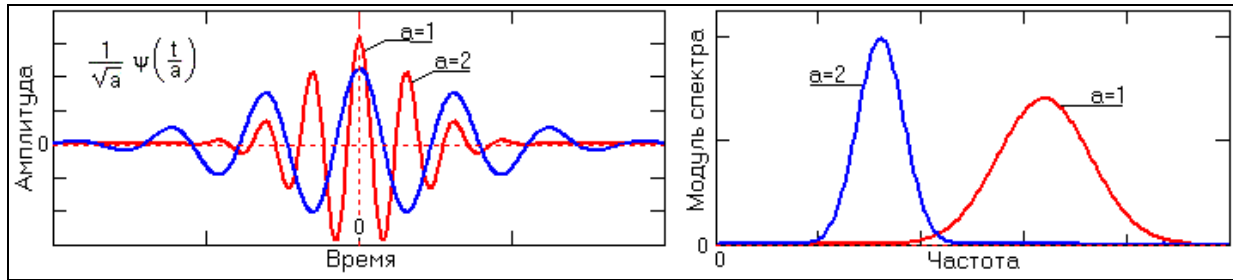


Рис. 1.2.1. Вейвлетные функции в двух масштабах.

Phi-функции присущи не всем, а, как правило, только ортогональным вейвлетам, и необходимы для преобразования нецентрированных и достаточно протяженных сигналов при раздельном анализе низкочастотных и высокочастотных составляющих. Их роль и использование мы рассмотрим несколько позже.

Базисными psi-функциями пространства $L^2(\mathbb{R})$ могут быть самые различные функции, ограниченные по времени и местоположению на временной оси, и имеющие спектральный образ, в определенной степени локализованный на частотной оси. Как и для рядов Фурье, ортонормированное базисное пространство аналоговых функций целесообразно конструировать из одной исходной базовой функции $\psi(t)$, норма которой должна быть равна 1. Для перекрытия локальной временной функцией вейвлета всей временной оси пространства $L^2(\mathbb{R})$ используется операция сдвига (смещения по временной оси): $\psi_b(t) = \psi(t-b)$, где значение b для общего случая непрерывных функций также является величиной непрерывной. Для перекрытия всего частотного диапазона аналогового пространства $L^2(\mathbb{R})$ используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной: $\psi_a(t) = |a|^{-1/2}\psi(t/a)$. На рис. 1.2.1. видно, что если временной образ вейвлета будет расширяться (изменением значения коэффициента 'a'), то его "средняя частота" будет понижаться, а частотный образ (частотная локализация) перемещаться на более низкие частоты. Таким образом, путем сдвига по независимой переменной $(t-b)$ вейвлет имеет возможность перемещаться по всей числовой оси произвольного сигнала, а путем изменения масштабного коэффициента 'a' (в фиксированной точке $(t-b)$ временной оси) "просматривать" частотный спектр сигнала по определенному интервалу окрестностей этой точки.

С использованием этих операций базис функционального пространства $L^2(\mathbb{R})$ образуется путем масштабных преобразований и сдвигов вейвлета $\psi(t)$ с непрерывными значениями базисных параметров – масштабного коэффициента a и параметра сдвига b :

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2}\psi[(t-b)/a], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.2.1)$$

Нетрудно убедиться, что нормы вейвлетов $\psi_{ab}(t)$ равны норме $\psi(t)$, что обеспечивает нормировочный множитель $|a|^{-1/2}$. При нормировке к 1 базового вейвлета $\psi(t)$ все функции вейвлетов также будут нормированными. Если при этом выполняется требование ортогональности функций (1.1.9), то функции $\psi_{ab}(t)$ будут представлять собой ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$. Прямое интегральное вейвлет-преобразование сигнала выполняется по аналогии с преобразованием Фурье, и представляет собой скалярное произведение сигнала на вейвлет-функцию заданного типа. Вейвлетный образ сигнала обычно обозначается

индексом 'с' по независимым переменным 'а' и 'b':

$$c(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{ab}(t) dt, \quad (1.2.2)$$

Интегрирование, как правило, выполняется по области задания сигнала в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Так как форма базисных функций $\psi_{ab}(t)$ зафиксирована, то вся информация о сигнале переносится на значения функции $c(a,b)$. Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета и способа построения базиса, т.е. от значений базисных параметров a, b . Строго теоретически вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(\mathbb{R})$ только в случае его ортонормированности. Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточна устойчивость и "приблизительность" ортогональности системы разложения функций. Под устойчивостью понимается достаточно точная реконструкция произвольных сигналов. Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$s(t) = (1/C_{\psi}) \int_{\mathbb{R}} (1/a^2) c(a,b) \psi_{ab}(t) da db. \quad (1.2.3)$$

где C_{ψ} - нормализующий коэффициент:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} (|\Psi(\omega)|^2 / \omega) d\omega < \infty. \quad (1.2.4)$$

Условие конечности C_{ψ} ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов. В частности, при $\omega=0$, для обеспечения сходимости интеграла (1.2.4) в нуле, значение $\Psi(\omega)$ должно быть равно нулю, а, следовательно, функция $\psi(t)$ должна иметь нулевое значение нулевого момента (интеграл функции по \mathbb{R} должен быть нулевым):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Однако это означает, что не для всех сигналов возможна их точная реконструкция вейвлетом $\psi_{ab}(t)$, т.к. при нулевом первом моменте вейвлета коэффициент передачи постоянной составляющей сигнала в преобразовании (1.2.3) равен нулю. Условия точной реконструкции сигналов будут рассмотрены в дальнейшем при описании кратномасштабного анализа.

Кроме того, даже при выполнении условия (1.2.4) далеко не все типы вейвлетов могут гарантировать реконструкцию сигналов, как таковую. Однако и такие вейвлеты могут быть полезны для анализа особенностей сигналов, как дополнительного метода к другим методам анализа и обработки данных. В общем случае, при отсутствии строгой ортогональности вейвлетной функции (1.2.1), для обратного преобразования применяется выражение:

$$s(t) = (1/C_{\psi}) \int_{\mathbb{R}} (1/a^2) c(a,b) * \psi_{ab}(t) da db, \quad (1.2.3')$$

где $*\psi_{ab}(t)$ – ортогональный "двойник" базиса $\psi_{ab}(t)$, о котором более подробно будет изложено ниже.

Дискретное вейвлет-преобразование оперирует с дискретными значениями параметров a и b , которые задаются, как правило, в виде степенных функций:

$$a = a_0^{-m}, \quad b = k \cdot a_0^{-m}, \quad m, k \in I,$$

где I – пространство целых чисел $\{-\infty, \infty\}$, m – параметр масштаба, $k = b \cdot a_0^m$ – параметр сдвига. Значение a_0 обычно принимается равным 2. Базис пространства $L^2(\mathbb{R})$ в дискретном представлении:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), \quad m, k \in I, \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.2.5)$$

Вейвлет-коэффициенты прямого преобразования:

$$c_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt. \quad (1.2.6)$$

Обратное дискретное преобразование для непрерывных сигналов при ортогональном вейвлетном базисе пространства:

$$s(t) = (1/C_{\psi}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{mk} \psi_{mk}(t). \quad (1.2.7)$$

Число практически использованных вейвлетов по масштабному коэффициенту m задает уровень *декомпозиции* сигнала, при этом за нулевой уровень ($m = 0$) обычно принимается уровень максимального временного разрешения сигнала, т.е. сам сигнал, а последующие уровни ($m < 0$) образуют ниспадающее *вейвлет-дерево*. В программном обеспечении вычислений для исключения использования отрицательной нумерации по m знак 'минус' обычно переносится непосредственно в (1.2.5), т.е. используется следующее представление базисных функций:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t-k), \quad m, k \in I, \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.2.5')$$

Устойчивость дискретного базиса определяется следующим образом.

Функция $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ называется *R-функцией*, если базис на ее основе по (1.2.5) является базисом Рисса (Riesz). Для базиса Рисса существуют значения A и B , $0 < A \leq B < \infty$, для которых выполняется соотношение

$$A \|c_{mk}\|^2 \leq \left\| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{mk} \psi_{mk}(t) \right\|^2 \leq B \|c_{mk}\|^2,$$

если энергия ряда c_{mk} конечна. При этом для любой *R-функции* существует базис $^* \psi_{mk}(t)$, который является ортогональным "двойником" базиса $\psi_{mk}(t)$, таким, что

$$\langle \psi_{mk}(t), ^* \psi_{nl}(t) \rangle = \delta_{mn} \delta_{kl}.$$

Если семейство $\{\psi_{mk}(t)\}$ является ортонормированным базисом, то $\psi_{mk}(t) \equiv ^* \psi_{mk}(t)$ и для реконструкции сигналов используется формула (1.2.7). Если $\psi(t)$ не ортогональный вейвлет, но имеет "двойника", то на базе "двойника" вычисляется семейство $^* \psi_{mk}(t)$, которое и используется при обратном преобразовании вместо $\psi_{mk}(t)$.

Частотно-временная локализация вейвлет-анализа. Реальные сигналы, как правило, конечны и принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$. Частотный спектр сигналов обратно пропорционален их длительности. Соответственно, достаточно точный низкочастотный анализ сигналов должен производиться на больших интервалах его задания, а высокочастотный – на малых. Если частотный состав сигнала претерпевает существенные изменения на интервале его задания, то преобразование Фурье дает только усредненные данные частотного состава сигнала с усредненным частотным разрешением. Определенная частотно-временная локализация анализа создается применением оконного преобразования Фурье:

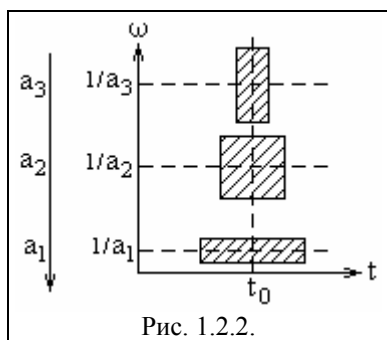
$$S(\omega, m) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) z(t-mb) \exp(j\omega t) dt,$$

при котором сигнал просматривается в пределах оконной функции $z(t)$ с последовательными сдвигами b во времени, что дает семейства частотных спектров, локализованных во времени в пределах постоянной ширины окна оконной функции, а, следовательно, с постоянным значением частотного разрешения.

В отличие от оконного преобразования Фурье, вейвлет-преобразование, при аналогичных дискретных значениях сдвигов b , дает семейства спектров масштабных коэффициентов a сжатия-растяжения

$$c(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |a|^{-1/2} \psi_0[(t-b)/a] dt.$$

Если считать, что каждый вейвлет имеет определенную "ширину" своего временного окна, которому соответствует определенная "средняя" частота Фурье-образа вейвлета, обратная его масштабному коэффициенту a , то семейства масштабных коэффициентов вейвлет-преобразования можно считать аналогичными семействам частотных спектров оконного преобразования Фурье, но с одним принципиальным отличием. Масштабные коэффициенты действуют во времени, изменяя "ширину" вейвлетов и, соответственно, "среднюю" частоту их фурье-образов, а, следовательно, каждой частоте соответствует своя длительность временного окна анализа, и наоборот. Многомерное временное окно вейвлет-преобразования позволяет одинаково хорошо выявлять и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов.

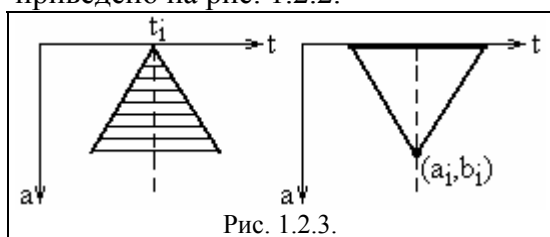


Для произвольной оконной функции $z(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ее центр и радиус определяются формулами:

$$t_0 = \frac{1}{\|z(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt,$$

$$\Delta_z = \frac{1}{\|z(t)\|} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |z(t)|^2 dt}$$

Если по этим функциям определить центры и радиусы вейвлетов (1.2.1) и их фурье-образов, то временная локализация происходит с центрами окон $b+at_0$ шириной $\text{win}_t = 4a\Delta_{\psi(t)}$, а частотная – с центрами ω_0/a и с шириной окна $\text{win}_\omega = 2\Delta_{\psi(\omega)}/a$. При этом значение отношения центральной частоты к ширине окна не зависит от местоположения центральной частоты. Частотно-временное окно $\text{win}_t \cdot \text{win}_\omega$ сужается при высокой центральной частоте, и расширяется при низкой. Схематическое изображение частотно-временных окон преобразования приведено на рис. 1.2.2.



Изменение частотно-временного окна вейвлета определяет угол влияния значений функции в произвольных точках t_j на значения коэффициентов $c(a,b)$. И наоборот, угол влияния из точки $c(a_i, b_i)$ на ось t определяет интервал значений функции, которые принимают участие в вычислении данного коэффициента $c(a_i, b_i)$ – область достоверности. Схематически это показано на рис. 1.2.3. По углу влияния наглядно видно, что высокочастотная (мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых интервалов сигналов, а низкочастотная – на основе больших. Поскольку анализируемые сигналы всегда конечны, то при вычислении коэффициентов на границах задания сигнала область достоверности выходит за пределы сигнала, и для уменьшения погрешности вычислений сигнал дополняется заданием начальных и конечных условий (средним значением, предполагаемым временным ходом и т. п.).

Образное представление преобразования. Представим себе длинный и узкий стеклянный ларь, произвольно заполненный прозрачными шарами трех разных диаметров, причем каждый диаметр имеет свой цвет. Для определенности и упрощения модели положим также, что шары имеют три размера диаметра: 5, 10 и 15 см. Взглянем на ларь сбоку, и линию высоты насыпки будем считать значением сигнала в зависимости от расстояния от одного из торцов ларя (условно – нулевого).

Наложим на стеклянную стенку ларя вертикальное графление с интервалом 5 см (сдвиг $\Delta x = 5$ см, счет интервалов по k начиная с 0, размер сдвига последовательных интервалов $k \cdot \Delta x$ см). Возьмем первый "вейвлет" – идеальное дифференциальное сито с диаметром отверстий $d = 5$ см, через которое проходят только пятисантиметровые шары (аналог значения a_0), и мысленно просеем через это сито шары в каждом интервале, т.е. подсчитаем количество центров шаров в каждом интервале графления с последовательным сдвигом по интервалам. На какой-нибудь поверхности (столе) нанесем три параллельных линии с последовательным графлением каждой по k , и выложим на первой линии (масштабной линии первого "вейвлета") на каждом значении k столбики дисков (рублевых монет, можно долларов) в соответствии с их количеством по интервалам графления в ларе.

Сменим масштаб "вейвлета" – увеличим диаметр отверстий сита до 10 см, и повторим операцию. Линию монет для десятисантиметровых шаров выложим ниже линии пятисантиметровых. Аналогичную операцию выполним и для пятнадцатисантиметрового "вейвлета". В результате на трех расположенных друг за другом линиях столбиков монет мы получим дискретный масштабно-пространственный спектр нашей насыпки: изменение состава насыпки по текущим значениям k (сечения по $k\Delta x$) и для каждого типа шаров по длине ларя (сечения по диаметру шаров).

Данная модель разложения является довольно грубой (счет по центрам шаров без учета их объема), но интуитивно понятно, что обратная сборка шаров последовательно по ин-

тервалам с определенной точностью восстановит структуру насыпки. Правда, без сохранения расположения шаров разных типов в сечениях x по толщине ларя. Но можно себе представить, что засыпка шаров в каждом интервале $k\Delta x$ - также ларь, с которым можно провести аналогичную операцию и по координате y , что будет уже трехмерным анализом.

Замените шары короткими фрагментами электронных сигналов произвольной, но одной и той формы в пределах диаметра шаров, например такими, как $\psi(t)$ на рис.1.2.1, расположите их центры по центрам шаров с параллельными осями по t , сложите все значения сигналов по текущим значениям t (обратное вейвлет-преобразование), и Вы получите сложный суммарный сигнал. Используя прямое вейвлет-преобразование с вейвлетами этих же составляющих, Вы можете снова разложить суммарный сигнал (и любой другой произвольный сигнал) на составляющие в масштабно-временной плоскости. Замените масштабную ось (ширины вейвлетов) на обратную ей частотную ось, и Вы представите результаты в частотно-временной плоскости. Заметим только, что точность, представительность и информативность результатов анализа во многом будут зависеть как от формы и особенностей анализируемого сигнала, так и от формы выбранных вами вейвлетов и параметров масштабирования и сдвига. Это определяется тем, что дифференциальное сито в примере с шарами – идеальная операция разделения, в то время как при вейвлет-преобразовании "идентификация" составляющих выполняется по скалярному произведению сигнала и функции вейвлета. Скалярное произведение в принципе не может давать однозначного ответа типа "да-нет", а только "наносит" на масштабно-временную плоскость определенные значения величины скалярного произведения, которое, к тому же, существенно зависит от формы вейвлета. С одной стороны, выбор типа вейвлета вносит определенную субъективность исследователя в методику исследования сигналов, но, с другой стороны, дает исследователю новые возможности и свободу в поиске наиболее эффективных и оптимальных методов обработки сигналов и извлечения из них целевой информации.

Достоинства и недостатки вейвлетных преобразований.

- Вейвлетные преобразования обладают практически всеми достоинствами преобразований Фурье.
- Вейвлетные базисы могут быть хорошо локализованными как по частоте, так и по времени. При выделении в сигналах хорошо локализованных разномасштабных процессов можно рассматривать только те масштабные уровни разложения, которые представляют целевой интерес.
- Вейвлетные базисы, в отличие от преобразования Фурье, имеют достаточно много разнообразных базовых функций, свойства которых ориентированы на решение различных задач. Базисные вейвлеты могут иметь и конечные, и бесконечные носители, реализуемые функциями различной гладкости.
- Недостатком вейвлетных преобразований является их относительная сложность.

Практическое использование вейвлет-преобразований связано, в основном, с дискретными вейвлетами как в силу повсеместного использования цифровых методов обработки данных, так и в силу ряда различий дискретного и непрерывного вейвлет-преобразований.

Непрерывные вейвлеты дают несколько более наглядное представление результатов анализа в виде поверхностей вейвлет-коэффициентов по непрерывным переменным. Однако базисы на их основе, как правило, не являются строго ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности. У дискретных вейвлетов эти проблемы легко снимаются, что обеспечивает более точную реконструкцию сигналов.

Выбор конкретного вида и типа вейвлетов во многом зависит от анализируемых сигналов и задач анализа, при этом немалую роль играет интуиция и опыт исследователя. Для получения оптимальных алгоритмов преобразования разработаны определенные критерии, но их еще нельзя считать окончательными, т.к. они являются внутренними по отношению к самим алгоритмам преобразования и, как правило, не учитывают внешних критериев, связанных с сигналами и целями их преобразований. Отсюда следует, что при практическом использовании вейвлетов необходимо уделять достаточное внимание проверке их работоспособности и эффективности для поставленных целей по сравнению с известными методами

обработки и анализа.

ЛИТЕРАТУРА

л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.

л35. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения. – Успехи физических наук, 1996, т.166, № 11, стр. 1145-1170.

Л43. Илюшин. Теория и применение вейвлет-анализа. – <http://atm563.phus.msu.su/Ilyushin/index.htm>.

Тема 2: СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Изложение вопроса будет неполным, пока в той или иной форме мы не оговорим всех условий.

Джон Стюарт Милль. Английский философ, XIX в.

Оговорить можно. Только если в этих условиях не потонет смысл самого вопроса.

Игорь Широков. Московский геофизик Уральской школы, XX в.

Содержание: Введение. 2.1. Базисные функции вейвлет-преобразования. Определение вейвлета. Свойства вейвлета. Отображение преобразования. Вейвлетные функции. 2.2. Свойства вейвлет-преобразования. 2.3. Вейвлет-преобразование простых сигналов. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

Аналитика вейвлетных преобразований сигналов определяются математической базой разложения сигналов, которая аналогична преобразованиям Фурье. Основной отличительной особенностью вейвлет-преобразований является новый базис разложения сигналов - вейвлеты. Свойства вейвлетов принципиально важны как для самой возможности разложения сигналов по единичным вейвлетным функциям, так и для целенаправленных действий над вейвлетными спектрами сигналов, в том числе с последующей реконструкцией сигналов по обработанным вейвлетным спектрам.

2.1. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ /Л34, Л35/.

Базисными функциями вейвлетов могут быть самые различные функции - модулированные импульсами синусоиды, функции со скачками уровня и т.п., что и обеспечивает хорошее представление сигналов с локальными особенностями, в том числе со скачками, разрывами и перепадами значений с большой крутизной, при подборе соответствующего типа вейвлетов.

Определение вейвлета. С чисто математических позиций в качестве вейвлетов могут использоваться любые локализованные R -функции $\psi(t) \in L^2(R)$, если для них существуют функции-двойники (парные функции) ${}^*\psi(t) \in L^2(R)$, такие, что семейства $\{\psi_{ab}(t)\}$ и $\{{}^*\psi_{ab}(t)\}$, построенные по (1.1.1), являются парными базисами функционального пространства $L^2(R)$. Вейвлеты, определенные таким образом, независимо от того, являются ли они ортогональными, позволяют представить любую функцию в пространстве $L^2(R)$ в виде ряда (1.1.3). Если вейвлет $\psi(t)$ обладает свойством ортогональности, то ${}^*\psi(t) \equiv \psi(t)$ и вейвлетный базис ортогонален.

Для многих практических целей достаточно, чтобы вейвлет $\psi(t)$ обладал свойством полуортогональности:

$$(\psi_{mk}(t), \psi_{zp}(t)) = 0 \quad \text{при } m \neq z, \quad m, k, z, p \in I.$$

R -вейвлет может быть неортогональным, однако если он имеет двойника, и пара $(\psi(t), {}^*\psi(t))$ дает возможность сформировать семейства $\{\psi_{mk}(t)\}$ и $\{{}^*\psi_{zp}(t)\}$, удовлетворяющие условию биортогональности:

$$(\psi_{mk}(t), {}^*\psi_{zp}(t)) = \delta_{mz} \cdot \delta_{kp}, \quad m, k, z, p \in I,$$

то возможно разложение сигналов на вейвлетные ряды с построением обратной реконструкционной формулы. С точностью обратного вейвлет-преобразования связано большинство ограничений, накладываемых на вейвлеты.

Свойства вейвлета, которые принципиально важны для реализации вейвлетных преобразований:

- **Локализация.** Вейвлет должен быть локализован и во времени (в пространстве), и по частоте. Если вейвлет в пространстве сужается, то его "средняя" (доминирующая) частота повышается, спектр вейвлета перемещается в область более высоких частот и расширяется. Этот процесс должен быть линейным – сужение вейвлета вдвое должно повышать его доминирующую частоту и ширину спектра также вдвое.
- **Нулевое среднее значение**, т.е. выполнение условия для нулевого момента:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Для игнорирования наиболее регулярных полиномиальных составляющих сигнала и анализа мелкомасштабных флуктуаций и особенностей высокого порядка, как правило, требуются и нулевые значения определенного количества последующих моментов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

- **Ограниченность.** Необходимое и достаточное условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Оценка хорошей ограниченности и локализации может выполняться с использованием выражений:

$$|\psi(t)| < 1/(1+|t|^n), \quad \text{или} \quad |\Psi(\omega)| < 1/(1+|\omega-\omega_0|^n).$$

Число n должно быть как можно больше.

- **Автомодельность базиса** или самоподобие. Форма базисной функции должна оставаться одной и той же при сдвигах и масштабировании.

Отображение преобразования. Результатом вейвлет-преобразования одномерного числового ряда (сигнала) является двумерный массив амплитуд – значений коэффициентов $C(a,b)$. Распределение этих значений в пространстве (a,b) = (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об изменении относительного вклада вейвлетных компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, масштабно-временным (частотно-временным) спектром или просто вейвлет-спектром (wavelet spectrum).

Спектр $C(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации спектра могут быть самыми различными. Наиболее распространенный способ – проекция на плоскость ab с изолиниями (изоуровнями), что позволяет проследить изменения амплитуд на разных масштабах во времени, а также выявить картину локальных экстремумов этих поверхностей ("холмов" и "впадин"), так называемый "скелет" (skeleton) структуры анализируемого процесса. При широком диапазоне масштабов применяются логарифмические координаты $(\log a, b)$.

По вертикальным сечениям (сечениям сдвига b) вейвлет-спектр отражает компонентный состав сигнала (из данного комплекта вейвлетов) в каждый текущий момент. По смыслу преобразования, как скалярного произведения сигнала с вейвлетом, ясно, что значения коэффициентов в каждой текущей временной точке по масштабным сечениям m_i тем больше, чем сильнее корреляция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестностях этой точки. Соответственно, масштабные сечения демонстрируют изменения в сигнале компонент данного масштаба со временем.

Заметим, что вейвлетные составляющие сигнала в сечениях его спектра не имеют ничего общего с синусоидами, и представлены, как правило, сигналами достаточно сложной и не всегда понятной формы, что может затруднять их наглядное представление и понимание. Примеры отображения вейвлет-преобразований приводятся ниже.

Вейвлетные функции. Выбор анализирующего вейвлета во многом определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. С учетом характерных особенностей различных вейвлетов во временном и в частотном пространстве, можно выявлять в анализируемых сигналах те или иные свойства и особенности, которые незаметны на графиках сигналов, особенно в присутствии сильных шумов. При этом задача реконструкции сигнала может и не ставится, что расширяет семейство используемых регулярных и симметричных вейвлетных функций.

Чистым гармоническим сигналам обычно соответствуют яркие горизонтальные полосы вейвлетных спектров на доминирующих частотах вейвлетов, совпадающих с частотой гармоник сигналов. Нарушения гладкости сигналов фиксируются вертикальными полосами, пики в сигналах выделяются максимумами, а впадины – минимумами вейвлетных коэффициентов. Чем резче выражены особенности сигналов, тем сильнее они выделяются на спектрограммах.

Для конструирования таких вейвлетов часто используются производные функции Гаусса. В общей форме:

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= (-1)^n d^n[\exp(-t^2/2)]/dt^n, \quad n \geq 1, \\ \Psi_n(k) &= n(jk)^n \exp(-k^2/2).\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

WAVE-вейвлет вычисляется по первой производной ($n=1$) и приведен на рис. 1.2.1 во временной и частотной области для трех значений масштабных коэффициентов 'a'. Форма вейвлета относится к нечетным функциям и, соответственно, спектр вейвлета является мнимым. Уравнение вейвлета с единичной нормой:

$$\psi(t, a, b) = \frac{-1.786}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t-b}{a} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right]. \quad (2.1.2)$$

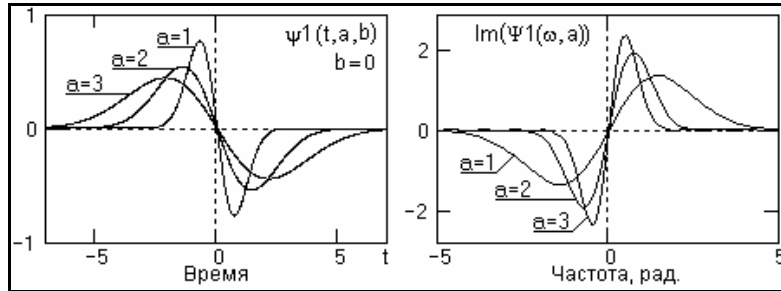


Рис. 2.1.1. Вейвлет WAVE.

На рис. 2.1.2 приведен пример применения вейвлета для анализа двух однотипных сигналов, один из которых осложнен шумами с мощностью на уровне мощности самого сигнала. Как следует из рисунка, контурная масштабно-временная картина вейвлетных коэффициентов, а равно и ее сечения на больших значениях масштабных коэффициентов 'a' (малых доминирующих частотах вейвлетов) очень точно и уверенно фиксирует положение вершины информационного сигнала сменой знака коэффициентов $c(a, b)$.

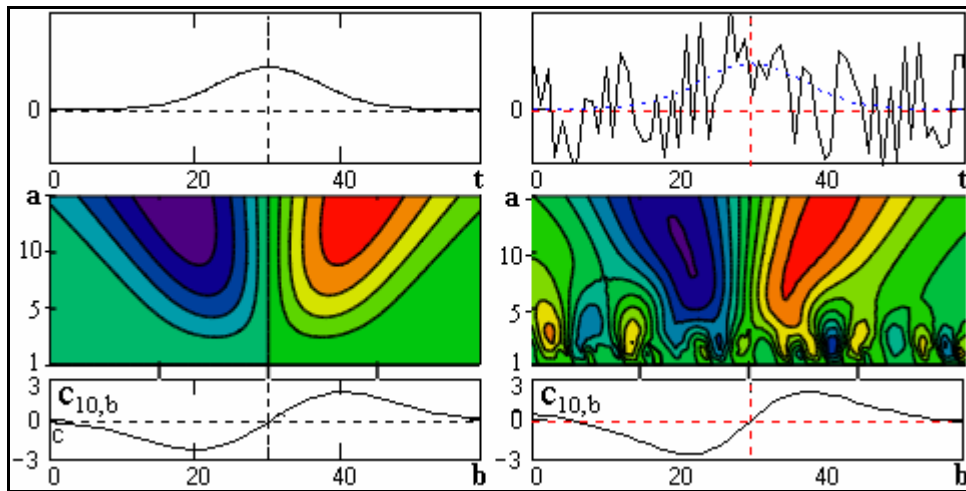


Рис. 2.1.2.

МНАТ-вейвлет (Mexican hat – мексиканская шляпа) вычисляется по второй производной ($n=2$) и приведен на рис. 2.1.3. Вейвлет симметричен, спектр вейвлета представлен только действительной частью и хорошо локализован по частоте, нулевой и первый моменты вейвлета равны нулю. Применяется для анализа сложных сигналов. Уравнение вейвлета:

$$\psi(t, a, b) = \frac{1.031}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] \right\}. \quad (2.1.3)$$

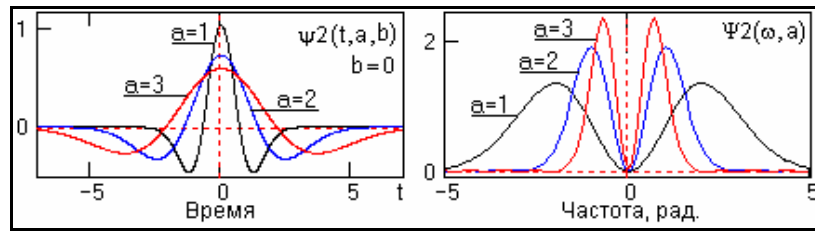


Рис. 2.1.3. Вейвлет МНАТ.

На рис. 2.1.4 приведен пример использования вейвлета для анализа сложного сигнала $y(t)$. Модель сигнала образована суммой сигналов разной структуры. Сигналы y_1 - y_2 представляют собой функции Гаусса разного масштабного уровня, сигнал y_3 - прямоугольный импульс, сигнал y_4 задан в виде тренда с постоянным значением дифференциала. На контурном графике вейвлет-коэффициентов можно видеть выделение всех трех основных структур сигнала при полном исключении тренда. Особенно четко выделяются границы скачков прямоугольной структуры. Справа на рисунке приведена полная трехмерная картина вейвлет-преобразования.

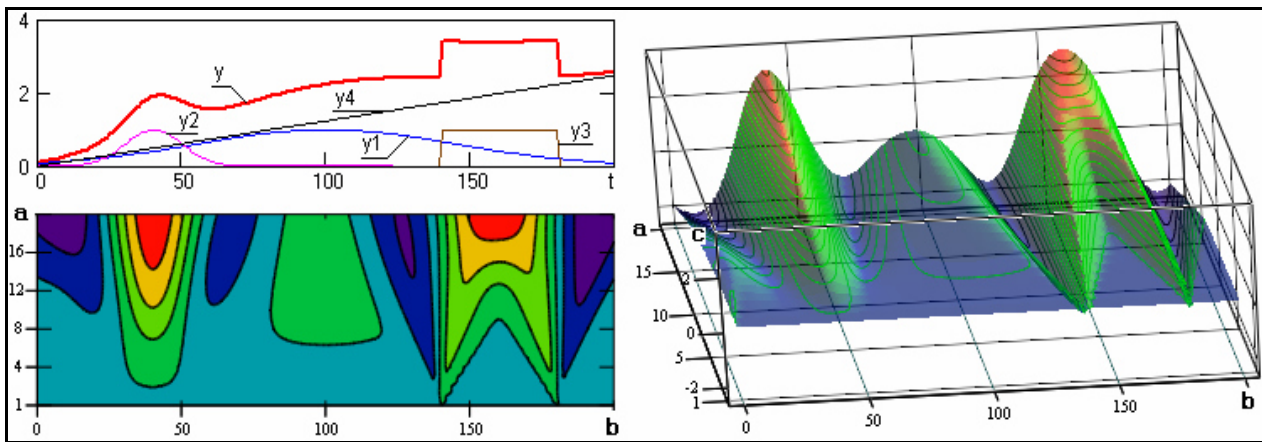


Рис. 2.1.4.

Вейвлет широко используется в двумерном варианте для анализа изотропных полей. На его основе возможно также построение двумерного неизотропного базиса с хорошей угловой избирательностью при добавлении к сдвигам и масштабированию вейвлета его вращения.

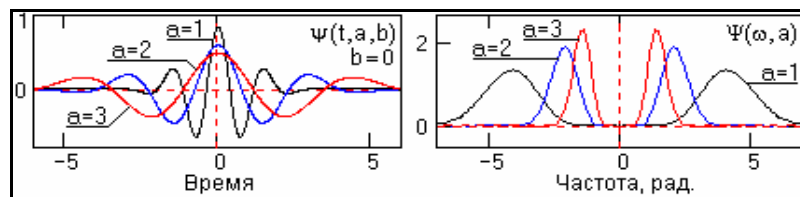


Рис. 2.1.5.

При повышении номера производной функции (2.1.1) временная область определения вейвлета несколько увеличивается при достаточно существенном повышении доминирующей частоты вейвлета и степени его локализации в частотной области. Пример вейвлета по восьмой производной приведен на рис. 2.1.6.

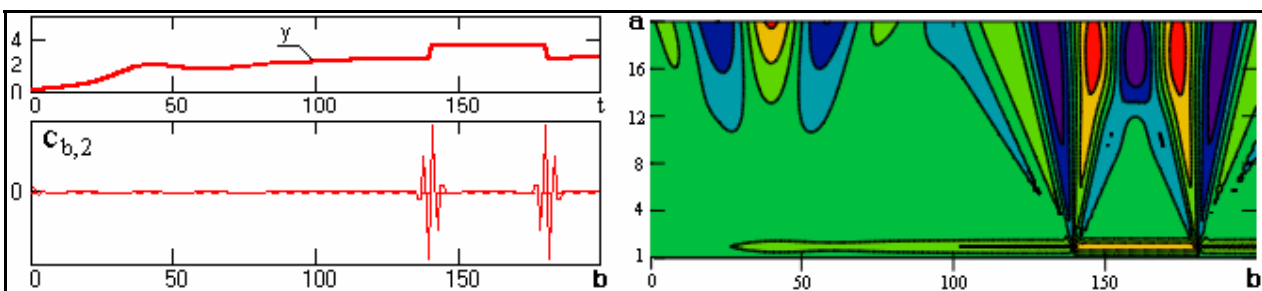


Рис. 2.1.6.

Практическое следствие повышения степени локализации вейвлетов в частотной области наглядно видно на рис. 2.1.6 на примере преобразования той же функции, что и на рис. 2.1.4. Сравнение рисунков показывает существенное повышение чувствительности вейвлета к высокочастотным составляющим сигнала на малых масштабных коэффициентах.

2.2. СВОЙСТВА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ /ЛЗ4, ЛЗ5/.

Результаты вейвлет-преобразования, как скалярного произведения вейвлета и функции, содержат комбинированную информацию об анализируемом сигнале и самом вейвлете. Получение определенной объективной информации об анализируемом сигнале базируется на свойствах вейвлет-преобразования, общих для вейвлетов всех типов. Рассмотрим основные из этих свойств. Для обозначения операции вейвлет-преобразования произвольных функций $s(t)$ будем применять индекс $TW[s(t)]$.

Линейность.

$$TW[\alpha \cdot s_1(t) + \beta \cdot s_2(t)] = \alpha \cdot TW[s_1(t)] + \beta \cdot TW[s_2(t)]. \quad (2.2.1)$$

Для векторных функций из этого следует, что TW векторной функции есть вектор с компонентами TW каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

Инвариантность относительно сдвига.

$$TW[s(t-t_0)] = C(a, b-t_0). \quad (2.2.2)$$

Инвариантность относительно масштабирования.

$$TW[s(t/a_0)] = (1/a_0) \cdot C(a/a_0, b/a_0). \quad (2.2.3)$$

Дифференцирование.

$$d\{TW[s(t)]\}/dt = TW[d(s(t))/dt]. \quad (2.2.4)$$

$$TW[d^n(s(t))/dt^n] = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} s(t) [d^n(\psi(t))/dt^n] dt. \quad (2.2.5)$$

Отсюда следует, что безразлично, дифференцировать ли функцию или анализирующий вейвлет. Если анализирующий вейвлет задан формулой, то это может быть очень полезным для анализа особенностей высокого порядка или мелкомасштабных вариаций сигналов, в том числе дискретных, с игнорированием крупномасштабных полиномиальных составляющих (тренда и регионального фона).

Аналог теоремы Парсеваля.

$$\int_{\mathbb{R}} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = C_{\psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} a^{-2} C(a, b) C^*(a, b) da db. \quad (2.2.6)$$

Отсюда следует, что энергия сигнала может вычисляться через коэффициенты вейвлет-преобразования.

Определения и свойства одномерного непрерывного вейвлет-преобразования обобщаются на многомерный и на дискретный случаи.

2.3. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ СИГНАЛОВ.

Вейвлет-преобразование, выполняемое при анализе сигналов для выявления в них каких-либо особенностей и места их локализации без обратной реконструкции, допускает применение любых типов вейвлетов, как ортогональных, так и неортогональных. Чаще всего для этих целей используются симметричные вейвлеты типа МНАТ. Ниже приводятся результаты применения вейвлета МНАТ для анализа сигналов простых форм. Вычисления выполнены с вейвлетом (2.1.3) по формуле:

$$c(a, b) = \sum_{t=b-3a}^{b+3a} s(t) \psi(t, a, b), \quad (2.3.1)$$

где суммирование выполняется в растворе угла влияния (по области достоверности) с шагом $\Delta t = \Delta b = \Delta a = 1$. Так как при непрерывном разложении скейлинг-функция не используется, отсчет значений 'a' начинается с 1, а ряд коэффициентов $c(0, b)$ оставляется нулевым и определяет нулевой фон контурных графиков спектра.

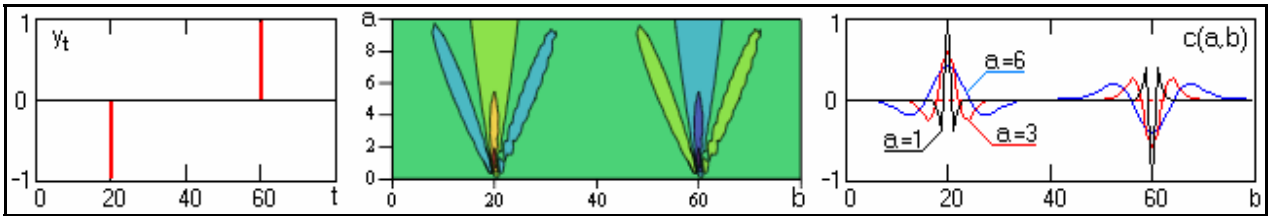


Рис. 2.3.1. Преобразование импульсов Кронекера.

Импульсы Кронекера (положительный и отрицательный), вейвлет-спектр импульсов и сечения спектра на трех значениях параметра 'a' приведены на рис. 2.3.1. Цветовая гамма спектра здесь и в дальнейшем соответствует естественному цветоряду от красного (большие значения) к фиолетовому (малые значения коэффициентов).

На сечениях спектра видно, что свертка единичных импульсов с разномасштабными вейвлетами повторяет форму вейвлетов, как это и положено при операции свертки. Соответственно, линии максимальных экстремумов на сечениях ("хребты" и "долины", в зависимости от полярности) определяют временное положение импульсов, а боковые экстремумы противоположной полярности образуют характерные лепестки в конусе угла влияния, который хорошо выражен.

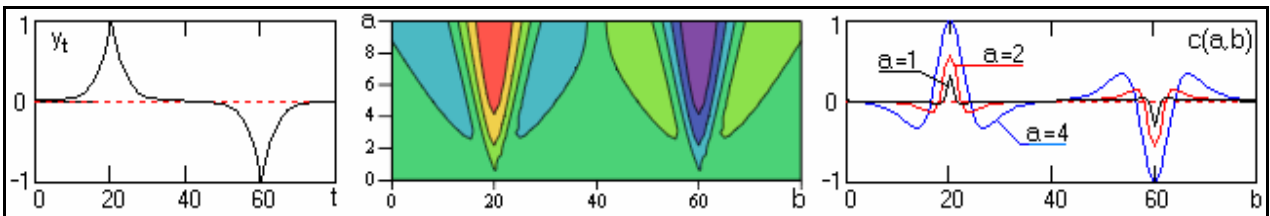


Рис. 2.3.2. Преобразование функций Лапласа.

Аналогичный характер спектра сохраняется и для любых локальных неоднородностей на сигналах в форме пиков (рис. 2.3.2) со смещением максимумов (минимумов) коэффициентов $c(a,b)$ со значений $a=1$ в область больших значений 'a' (в зависимости от эффективной ширины пиков).

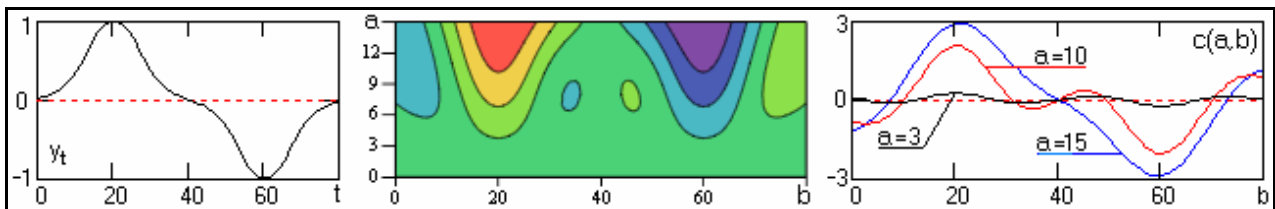


Рис. 2.3.3. Преобразование функций Гаусса.

На рис. 2.3.3 приведен спектр функций Гаусса. При сглаживании вершин пиковых неоднородностей форма цветных конусов также сглаживается, но "хребтовые" ("долинные") линии достаточно точно фиксируют на временной оси положение центров локальных неоднородностей.

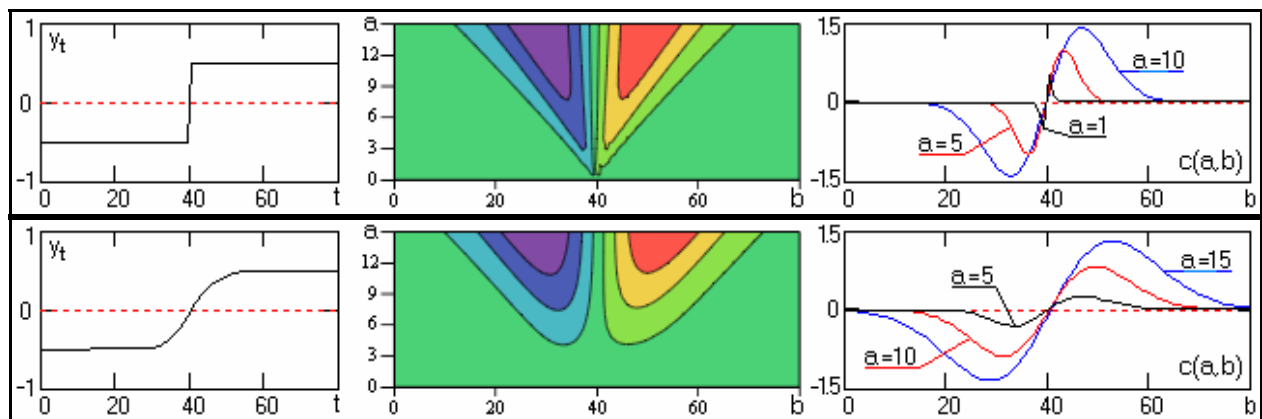


Рис. 2.3.4. Преобразование перепада постоянного значения функций.

На рис. 2.3.4 приведены спектры двух разных по крутизне перепадов постоянных значений функции. Центры перепадов фиксируются по переходу через нуль значений коэффициентов $c(a,b)$, а крутизна перепадов отражается, в основном, на значениях функции $c(a,b)$ при малых значениях параметра 'a'.

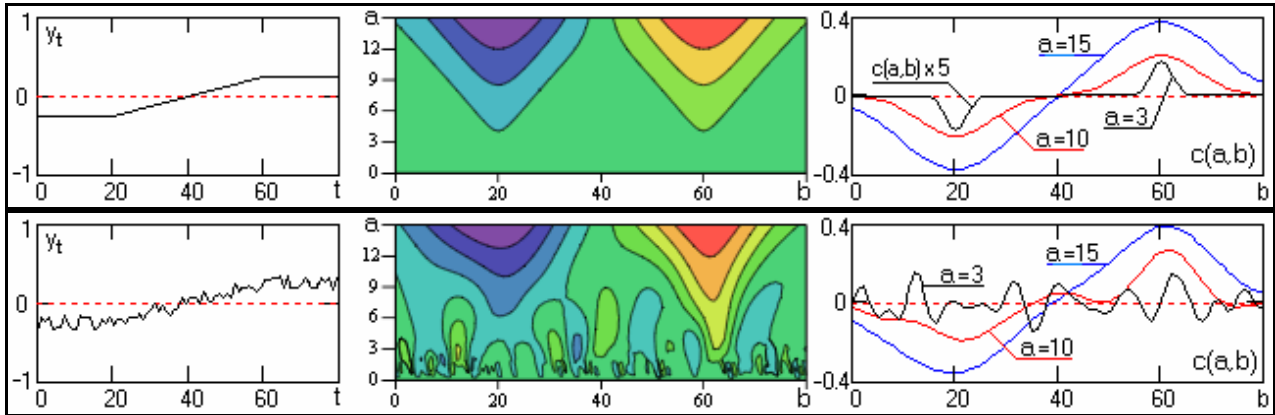


Рис. 2.3.5. Преобразование изломов функций.

При изломах функций спектрограммы уверенно фиксируют место изломов максимумами (минимумами) значений коэффициентов $c(a,b)$, как это показано на рис. 2.3.5. При наложении на такие функции шумов точное определение места изломов по масштабным сечениям на малых значениях параметра 'a' становится невозможным, однако на больших значениях параметра 'a' такая возможность сохраняется, естественно, с уменьшением точности локализации. Аналогичный характер имеет влияние шумов и на другие локальные сигналы, приведенные на рис. 2.3.1-2.3.4, и если спектральные особенности сигналов достаточно глубоки по диапазону значений параметра 'a', то остается возможность идентификации этих локальных сигналов и их места на временной оси.

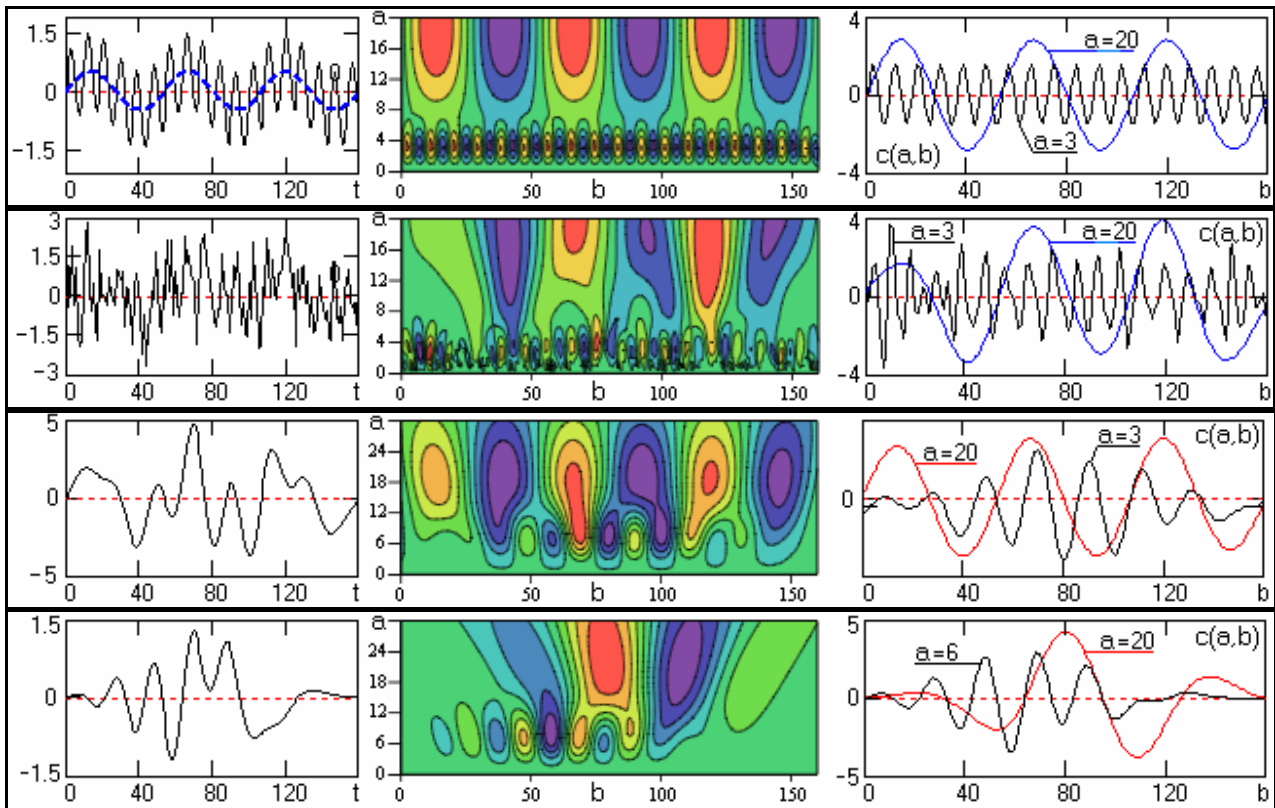


Рис. 2.3.6. Преобразование гармонических функций.

Разделение гармонических функций на масштабной оси спектров, в том числе при наложении сильных шумовых процессов, приведено в примерах на рис. 2.3.6. Приведенный пример имеет чисто иллюстративный характер, так как для выделения гармонических

процессов с постоянной частотой во времени целесообразно использовать спектральный анализ и частотные полосовые фильтры. Тем не менее, для локальных сигналов, типа модулированных гармоник, вейвлет-спектры достаточно хорошо показывают место их локализации на временной оси.

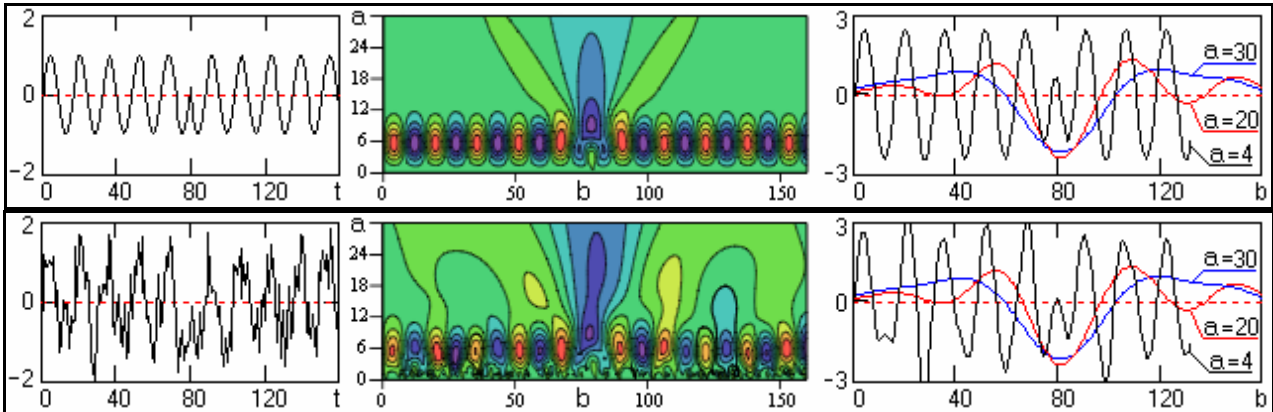


Рис. 2.3.7. Изменение фазы гармонического сигнала.

На рис. 2.3.7 приведен пример еще одной характерной особенности гармонического сигнала – изменение его фазы на 180° , которое хорошо фиксируется на всех масштабах вейвлета, а, следовательно, достаточно легко определяется даже в присутствии сильных шумовых сигналов.

При наложении синусоидальных сигналов на тренд вейвлет-преобразование на больших масштабах позволяет достаточно уверенно выделять характерные особенности тренда. Пример выделения изломов тренда приведен на рис. 2.3.8.

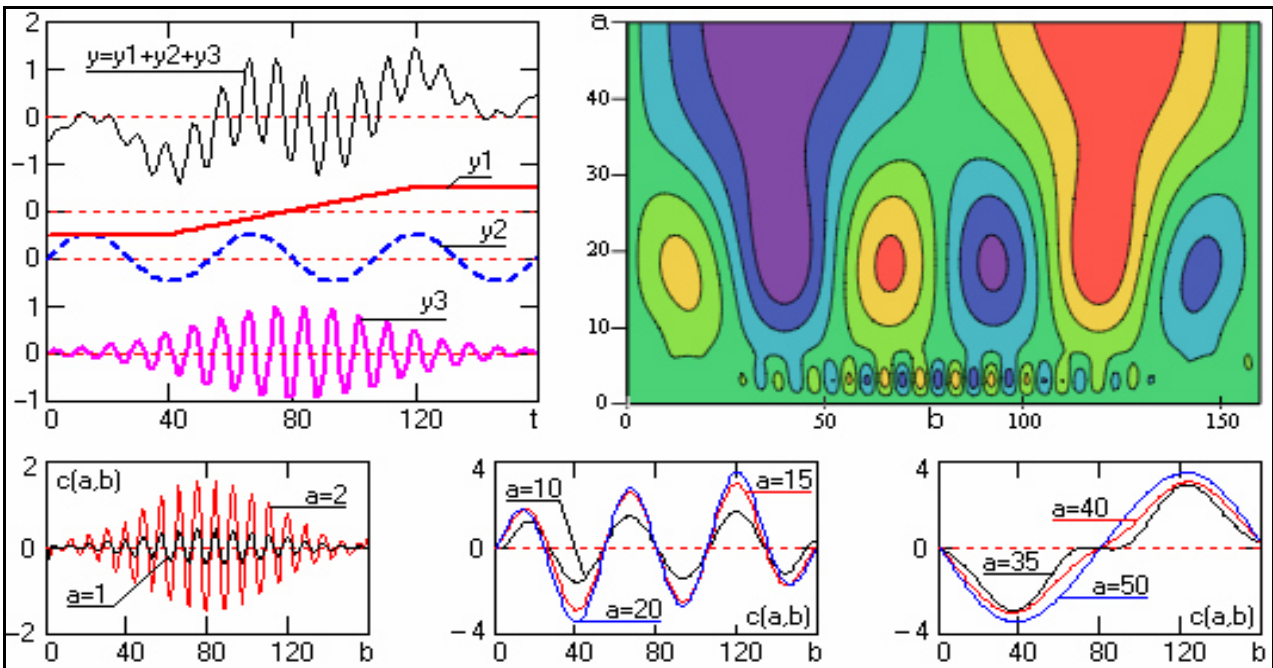


Рис. 2.3.8. Преобразование суммы трех сигналов.

Форма вейвлета (четность или нечетность), доминирующая частота и степень ее локализации существенно влияют на вейвлет-спектры анализируемых сигналов и на возможности выделения его локальных особенностей. На нижеследующих рисунках приведены сравнительные спектры простых сигналов при использовании вейвлетов Wave (нечетный, рис. 2.1.1), Mhat (четный, рис. 2.1.3) и вейвлета по 8-й производной Гаусса (рис. 2-2.5), который также является четным, и имеет в 4 раза более высокую доминирующую частоту, чем вейвлет Mhat.

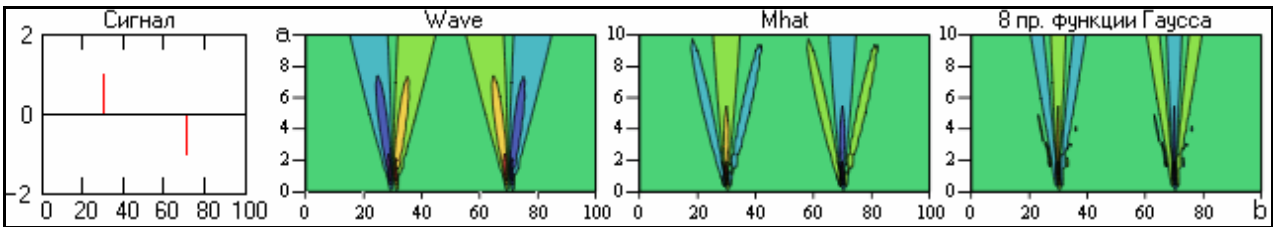


Рис. 2.3.9. Импульсы Кронекера.

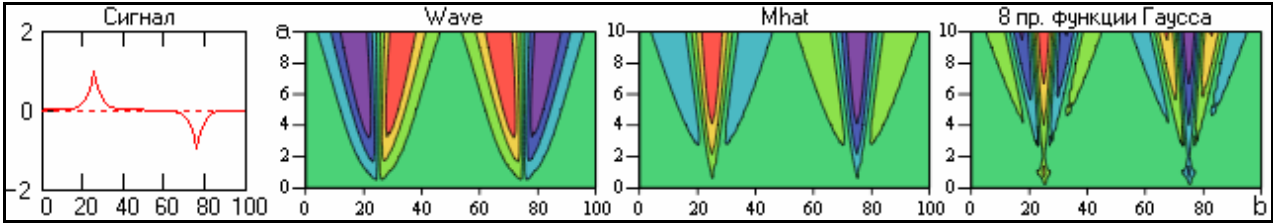


Рис. 2.3.10. Пики Лапласа.

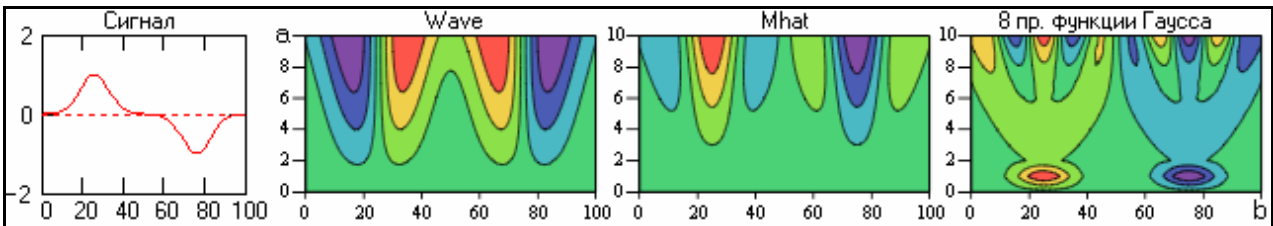


Рис. 2.3.11. Функции Гаусса.

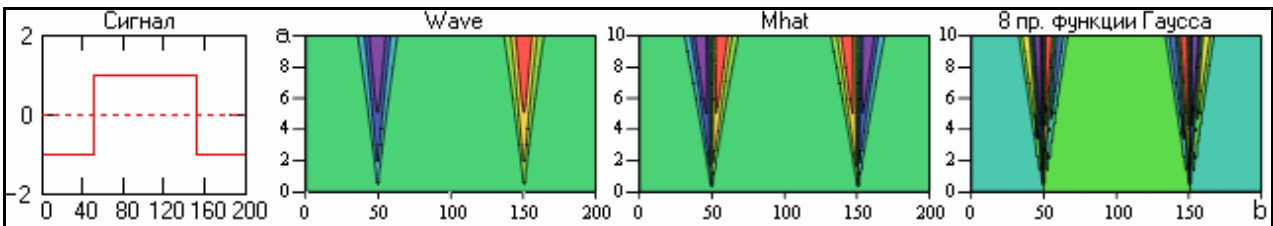


Рис. 2.3.12. Крутые скачки.

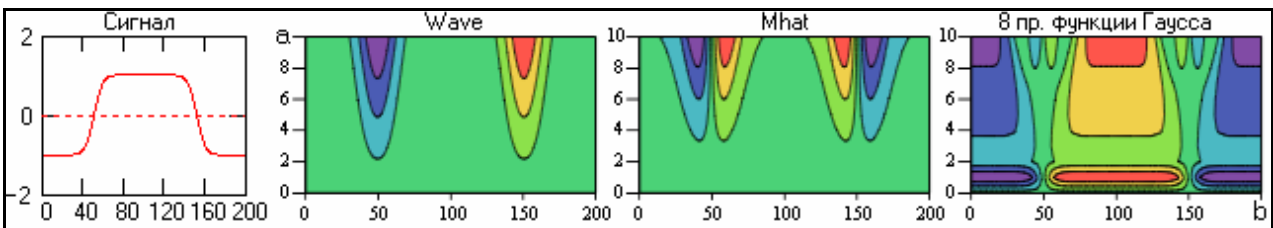


Рис. 2.3.13. Сглаженные скачки.

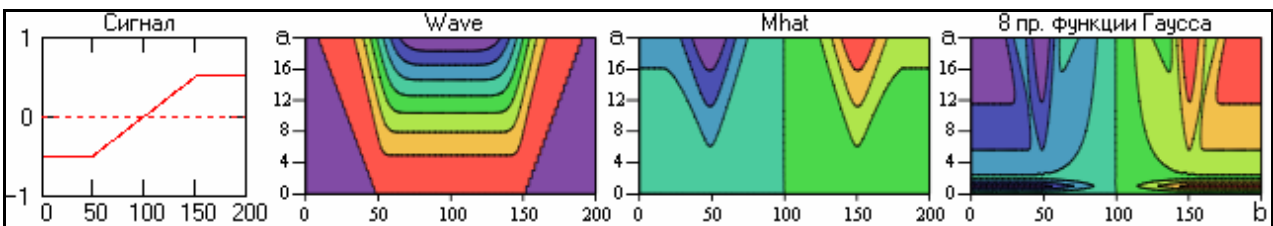


Рис. 2.3.14. Изломы функций

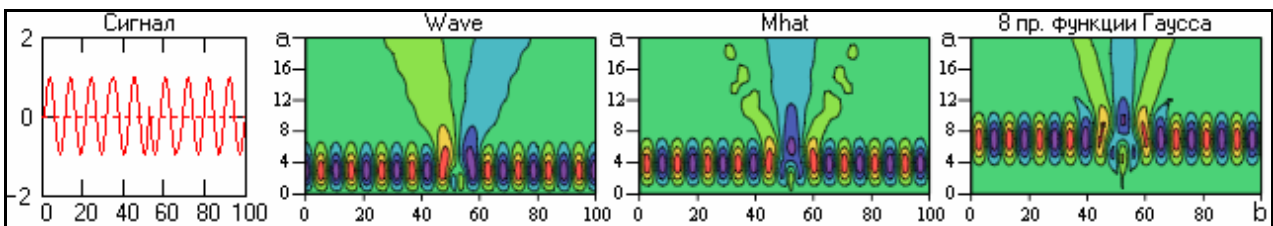


Рис. 2.3.15. Фазовые скачки гармоник.

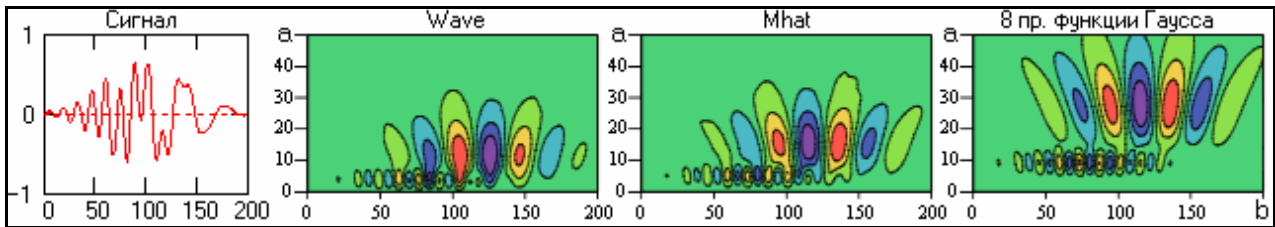


Рис. 2.3.16. Сумма двух модулированных синусоид.

Заметим, что при анализе произвольных сигналов использование разнотипных вейвлетов позволяет повысить достоверность выделения локальных особенностей сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

- л34. Дьяконов В., Абраменкова И. МАТЛАВ. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.
- л35. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения. – Успехи физических наук, 1996, т.166, № 11, стр. 1145-1170.
- л36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. – Успехи физических наук, 2001, т.171, № 5, стр. 465-501.

Тема 3: ВЕЙВЛЕТНЫЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ

Кто-то ради насмешки спросил философа: "Если я сожгу тысячу мин дерева, сколько получится мин дыма?". "Взвесь, - сказал Демонакт, - золу, все остальное - дым".

Лукиан из Самосаты.
Греческий писатель, 2 в.д.н.э.

Математики – мутация философов, утратившая способность отвечать на вопросы просто и понятно. Особый шик – ответить так, чтобы у тебя отвисла челюсть. И скрыться в теоретическом тумане от практического вопроса: почему же все-таки дыма получается больше дров?

Владимир Кузмин.
Новосибирский геофизик Уральской школы, XX в.

Содержание: Введение. 3.1. Принцип вейвлетного кратномасштабного анализа. 3.2. Основы вейвлетного кратномасштабного анализа. Исходные условия. Вейвлетная масштабирующая функция. Базисный вейвлет. 3.3. Вейвлетные ряды. Вейвлетное разложение функций. Ортонормальный вейвлетный базис. 3.4. Ортогональные вейвлеты. Коэффициенты вейвлета. Вейвлет Добеши. Биортогональные вейвлеты. 3.5. Быстрое вейвлет-преобразование. Принцип преобразования. Пакетные вейвлеты. 3.6. Двумерные вейвлеты. Литература.

ВВЕДЕНИЕ

Произвольный сигнал в теории цифровых информационных (временных) рядов обычно рассматривается в виде суммы разнотипных составляющих: региональной функции тренда - средних значений по большим интервалам усреднения, циклических компонент с определенным периодом повторения и, как правило, достаточно гладких по форме, локальных особенностей (аномалий) разного порядка, вплоть до интервенций – резких изменений в определенные редкие моменты, и флуктуаций значений более высокого порядка вокруг всех вышеперечисленных составляющих сигнала. Инструментом разделения сигналов на такие составляющие и анализа их порядка и является кратномасштабный анализ (КМА). Понятие КМА (Multiresolution analyses) является фундаментальным в теории вейвлетов. Это определяется тем, что для КМА возможен каскадный алгоритм вычислений, подобный быстрому преобразованию Фурье.

3.1. ПРИНЦИП КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА /ЛЗ6/.

По существу, простейшие методы КМА, без всякой теоретической базы, использовались при обработке числовых данных уже достаточно давно. Рассмотрим один из таких методов на практическом примере анализа гистограмм.

Допустим, что мы анализируем определенную зависимость $s(x)$ на интервале $0 \leq x \leq 1$, представленную измерениями в 16-ти точках с равномерным интервалом дискретизации данных $\Delta x = 1/16 = 1/2^m$ при $m=4$ (рис. 3.1.1, $m=4$, ось 'x' с последовательной нумерацией интервалов Δx).

Математически эту функцию можно представить в виде ряда с разложением по системе ортонормированных функций $\varphi_{m,k}(x)$, образованных прямоугольным весовым окном φ (см. рис. 3.1.1) длительностью $\Delta x=1/2^m$, ортогональность которых обеспечивается последовательным сдвигом функций друг относительно друга на величину Δx . Уравнение такой скейлинг-функции соответствует выражению:

$$\varphi_{m,k}(x) = p \cdot \varphi(2^m x - k), \quad (3.1.1)$$

где p – коэффициент ортонормирования, который определяется по условию $\int |\varphi_{m,k}(x)|^2 dx = 1$ и равен $p = 2^{m/2}$, что обеспечивает единичную норму скейлинг-функции. При сдвиговой ортогональности прямоугольных базисных функций разложения прямое преобразование (проекции сигнала на базис) выполняется по формуле:

$$c_{m,k} = (1/p) \int_{k\Delta x}^{(k+1)\Delta x} s(x) \cdot \varphi(2^m x - k) dx. \quad (3.1.2)$$

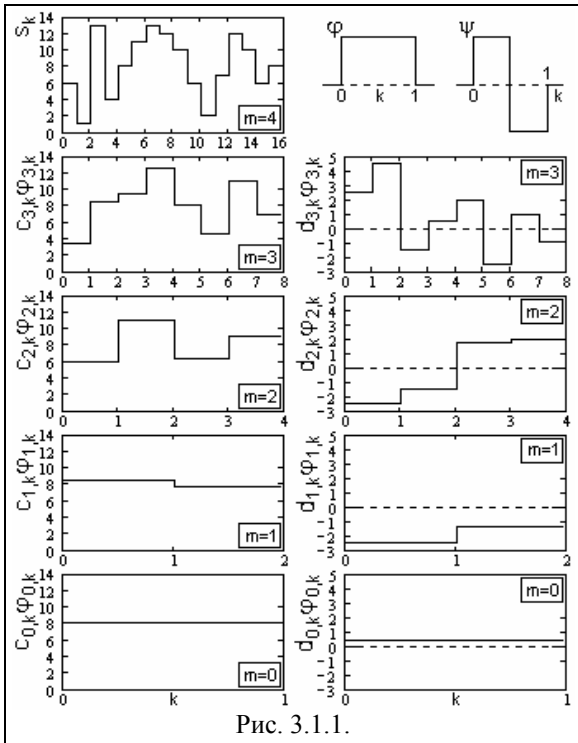


Рис. 3.1.1.

масштабу исходной гистограммы, приведен на рис. 3.1.1 ($m=3$). Он является аппроксимацией (определенного уровня) исходной гистограммы, на основании чего скейлинг-функцию (3.1.1) называют также аппроксимирующей или масштабной функцией.

Кроме аппроксимирующих коэффициентов $c_{m,k}$ из исходной гистограммы могут быть выделены также коэффициенты изменения сигнала в пределах нового интервала усреднения, т.е. коэффициенты разности значений первой и второй половины интервала:

$$d_{m-1,k} = (1/\sqrt{2}) \cdot (c_{m,2k} - c_{m,2k+1}), \quad (3.1.5)$$

которые называют детализирующими коэффициентами. Пример детализирующих коэффициентов приведен во втором столбце графиков на рис. 3.1.1. Нетрудно проверить, что пары коэффициентов $c_{m-1,k}$ и $d_{m-1,k}$ позволяют полностью восстановить значения коэффициентов более высокого уровня m :

$$c_{m,2k} = (1/\sqrt{2}) \cdot (c_{m-1,k} + d_{m-1,k}), \quad c_{m,2k+1} = (1/\sqrt{2}) \cdot (c_{m-1,k} - d_{m-1,k}), \quad (3.1.6)$$

а, соответственно, и восстановить исходный сигнал. Заметим, что для восстановления значений в исходных интервалах при $m=4$, значение аппроксимирующего коэффициента на первой половине интервала при $m=3$ складывается с детализирующим коэффициентом, а на второй – вычитается. Для математического отображения этой операции введем функцию ψ , форма которой также приведена на рис. 3.1.1, и обеспечим ее сдвиг по координате синхронно со скейлинг-функцией, с аналогичной нормировкой амплитудных значений:

$$\psi_{m,k}(x) = p \cdot \psi(2^m x - k), \quad p = 2^{m/2}. \quad (3.1.7)$$

По существу, эта функция будет являться ортонормированным базисом разложения детализирующих коэффициентов. Именно она в связи со своей формой и получила название вейвлета (вейвлетной или детализирующей функции). С ее использованием уравнение (3.1.3) с входящими в него уравнениями (3.1.6) приводятся к следующей форме:

$$s(x) = \sum_{k=0}^7 c_{3,k} \cdot \varphi_{3,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \cdot \psi_{3,k}(x). \quad (3.1.8)$$

Как и значения коэффициентов $c_{m,k}$, значения детализирующих коэффициентов могут вычисляться непосредственно по формуле (3.1.2) с заменой скейлинг-функции на вейвлет-функцию.

Тем же способом можно последовательно выполнить усреднение данных по уровням $m = 2, 1, 0$. Результаты разложения приведены на рис. 3.1.1. На последнем уровне имеется только одно среднее значение аппроксимации $c_{0,0}$ по всему интервалу $0 \leq x \leq 1$, а функция

В данном случае, для дискретного задания функции по интервалам $\Delta x = 1/16 = 1/2^4$ и значении $m = 4$, значения коэффициентов максимальной детальности равны $c_{4,k} = s(k\Delta x)/4$. Восстановление сигнала соответственно выполняется по формуле:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{15} c_{4,k} \cdot \varphi_{4,k}(x). \quad (3.1.3)$$

На следующем уровне разложения функции, при $m=3$, скейлинг-функция расширяется по x до $1/8$, т.е. производится усреднение отсчетов по двум по двум соседним интервалам исходной гистограммы. Расчет коэффициентов $c_{3,k}$ может выполняться непосредственно по (3.1.2), но при известных значениях коэффициентов $c_{4,k}$ предшествующего уровня он может выполняться последовательно с учетом изменения нормировочного множителя $(1/p)$ в формуле итерации:

$$c_{m-1,k} = (1/\sqrt{2}) \cdot (c_{m,2k} + c_{m,2k+1}). \quad (3.1.4)$$

Результат усреднения, приведенный к

"сборки" сигнала записывается в следующем виде:

$$s(x) = c_{0,0} \cdot \varphi_{0,0}(x) + d_{0,0} \cdot \psi_{0,0}(x) + \sum_{k=0}^1 d_{1,k} \cdot \psi_{1,k}(x) + \sum_{k=0}^3 d_{2,k} \cdot \psi_{2,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \cdot \psi_{3,k}(x). \quad (3.1.9)$$

Примененный для разложения вейвлет является простейшим и известен под названием вейвлета Хаара. Обратим внимание, что полное количество коэффициентов разложения на всех масштабных уровнях равно количеству исходных отсчетов дискретного сигнала. Увеличение масштабного значения m разложения соответствует возрастанию временного разрешения сигнала ($1/2^m$). Коэффициенты вейвлет-преобразования вскрывают флюктуационную структуру сигнала на разных масштабах и в разных временных точках. Приведенный простой пример нетрудно расширить на любой произвольный сигнал с произвольной длительностью и с произвольным временным разрешением, разложение которого может осуществляться до определенного уровня m аппроксимации сигнала по низкочастотным составляющим и с детализацией локальных высокочастотных особенностей сигнала на разных масштабных уровнях. Заметим также, в областях "гладких" значений сигнала коэффициенты детализации d близки к нулевым и ими можно пренебречь, что позволяет весьма эффективно осуществлять сжатие информации для хранения.

Реконструкция сигнала возможна по любому масштабному уровню разложения, причем, как это следует из (3.1.9) и может быть легко проверено, все особенности сигнала сохраняются без искажений с временным разрешением первого вейвлета. При выполнении разложения без скейлинг-функции (по 3.1.2 с вейвлет-функцией) картина детальных особенностей сигнала остается без изменений, но полная реконструкция сигнала невозможна. Без значения $c_{0,0} \cdot \varphi_{0,0}(x)$ при полном разложении сигнал центрируется, при реконструкции по другим масштабам искажается за счет отсутствия коэффициентов $c_{m,k}$.

При вейвлет-анализе произвольных сигналов выбор анализирующего вейвлета не определен заранее и во многом зависит от поставленных задач.

3.2. ОСНОВЫ КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА /Л34, Л36, Л37/.

Разложение сигнала на сумму аппроксимирующих и детализирующих составляющих производится с использованием ортогональных и биортогональных вейвлетов, которые отличаются возможностью реконструкции как локальных особенностей сигналов, так и сигналов в целом. Именно на таких вейвлетах выполняется быстрое вейвлет-преобразование. К недостаткам вейвлетов можно отнести отсутствие у них какого либо вида симметрии, и реализация итерационными формулами (за исключением вейвлета Хаара).

При выполнении КМА пространство сигналов $L^2(\mathbb{R})$ представляется в виде системы вложенных подпространств V^m , отличающихся друг от друга перемасштабированием независимой переменной.

Исходные условия кратномасштабного анализа можно сформулировать следующим образом:

1. Пространство сигналов $L^2(\mathbb{R})$ может быть представлено в виде последовательности вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\dots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^m \subset \dots,$$

"размеры" которых непрерывно расширяются по мере роста значения m и объединение которых в пределе дает пространство $L^2(\mathbb{R})$, т.е.:

- условие полноты и плотности разбиения - $\bigcup_{m \in \mathbb{I}} V^m = L^2(\mathbb{R}), \quad (3.2.1)$

- условие ортогональности подпространств - $\bigcap_{m \in \mathbb{I}} V^m = \{0\}. \quad (3.2.2)$

2. Для любой функции $s(t) \in V^m$ ее масштабное преобразование по аргументу в 2 раза перемещает функцию в соседнее подпространство:

$$s(t) \in V^m \Leftrightarrow s(2t) \in V^{m+1}, \quad s(t) \in V^m \Leftrightarrow s(t/2) \in V^{m-1} \quad (3.2.3)$$

3. Для пространства V^0 существует φ -функция $\varphi(t) \in V^0$, целочисленные сдвиги которой по аргументу образуют ортонормированный базис пространства V^0 :

$$\varphi_{0,k} = \varphi(t-k), \quad k \in \mathbb{I} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.2.4)$$

Из условий 2 и 3 непосредственно следует, что если пространство V^0 имеет ортонормированный базис $\varphi_{0,k}$, то и все остальные пространства также имеют

ортонормированные базисы, которые образуются масштабным преобразованием базиса $\varphi_{0,k}$:

$$\varphi_{m,k}(t) = 2^{m/2} \varphi(2^m t - k), \quad m, k \in I. \quad (3.2.5)$$

Условия 1 и 2 гарантируют, что если сигнал $s(t)$ принадлежит пространству V^m , то одновременно он входит и в пространство V^{m+1} , и вместе с ним в этом пространстве находится и сигнал $s(2t)$. Увеличение номера пространства позволяет изучать все более и более мелкие детали и особенности сигнала с более высокочастотными компонентами (как под микроскопом).

Все три условия в совокупности позволяют разложить произвольный сигнал $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ по подпространствам V^m , т.е. на множество разномасштабных и ортогональных друг другу функций $s_m(t) \in V^m$, весовая сумма которых дает исходный сигнал $s(t)$, или аппроксимирует сигнал с определенной точностью в зависимости от ограничения количества значений масштабирующего коэффициента m . Функции $s_m(t)$ являются ортогональными проекциями сигнала $s(t)$ на подпространства V^m .

Кратность КМА, равную 2, в принципе, можно заменить любым целым числом, большим 1, но использование двоичной кратности оптимально, как и использование двоичного представления чисел в ЭВМ. Выбор функции φ_0 также достаточно произволен, но желательно стремиться к тому, чтобы спектр функций подпространства V^0 был сконцентрирован в интервале $(-\pi, \pi)$.

Масштабирующая функция. Для того чтобы задать КМА, достаточно знать только одно из подпространств V^m , остальные определяются уравнением (3.1.5). Допустим, что это подпространство V^0 с его масштабирующей функцией $\varphi(t)$. Поскольку $V^0 \subset V^1$, то функцию $\varphi(t)$ можно представить линейной комбинацией сдвинутых и сжатых модификаций этой же функции с определенными весовыми коэффициентами h_k . Так, при числе коэффициентов $2M$ и размере вейвлета $2M-1$ (в единицах k), уравнение запишется в виде:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2t-k). \quad (3.2.6)$$

Это уравнение называется масштабирующим. Решение этого уравнения и дает скейлинг-функцию, которую иногда называют "отцовским" вейвлетом. Уравнение масштабирования может иметь и несколько иные формы записи. В частности, в пакете Wavelet Toolbox Matlab оно используется в виде:

$$0.5\varphi(t/2) = \sum_k \omega_k \varphi(t-k), \quad (3.2.6')$$

где вместо коэффициентов h_k используются коэффициенты $\omega_k = h_k / \sqrt{2}$ и более удобная для реализации на ПК нормировка вейвлетов.

Значения h_k определяются из условия для ортонормальных базисов:

$$h_k = \sqrt{2} \int_t \varphi(t)\varphi^*(2t-k) dt. \quad (3.2.7)$$

При дискретных значениях параметров сдвига масштабирующий вейвлет также дискретен и при задании функции $\varphi(t)$ на конечном интервале имеет конечное число коэффициентов h_k , отличных от нуля. Условие нормировки масштабирующих коэффициентов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1, \quad (3.2.8)$$

откуда следует:

$$\sum_k (h_k)^2 = 1. \quad (3.2.9)$$

Базисный вейвлет. Если скейлинг-функция установлена, то базисный ("материнский") вейвлет определяется по формуле:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in I} g_k \varphi(2t-k). \quad (3.2.10)$$

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}. \quad (3.2.11)$$

Простейший и самый короткий вейвлет соответствует $M=1$. Так, для рассмотренного

выше разложения гистограммы, размер вейвлета $2M-1 = 1$, число ненулевых коэффициентов $2M = 2$, значения коэффициентов $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$. Подставляя значения коэффициентов в (3.2.6), получаем:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1).$$

Решение этого функционального уравнения:

$$\varphi(t) = \theta(t) + \theta(1-t), \quad (3.2.12)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда:

$$\theta(t) = 1 \text{ при } t \geq 0, \quad \theta(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Соответственно, "материнский" вейвлет:

$$\psi(t) = \theta(t) \cdot \theta(1-2t) - \theta(2t-1) \cdot \theta(1-t), \quad (3.2.13)$$

Именно этот вейвлет и известен, как вейвлет Хаара (рис. 3.1.1). В функциональном анализе он применяется с 1910 года. Масштабированные и смещенные версии скейлинг-функции и "материнского" вейвлета:

$$\varphi_{m,k} = 2^{m/2} \varphi(2^m t - k).$$

$$\psi_{m,k} = 2^{m/2} \psi(2^m t - k).$$

Вейвлет Хаара (3.2.13) знакопеременен, при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3.2.14)$$

Условие знакопеременности является общим условием для всех "материнских" вейвлетов, которое обеспечивает безусловную устойчивость базиса при восстановлении исходного сигнала. Это условие в сочетании с локальностью задания и породило термин "короткой волны" (или "всплеска", который иногда применяется в российской терминологии).

При масштабном множителе 2 фурье-образ "материнского" вейвлета при $m=M$ сосредоточен в основном во второй высокочастотной половине частотного диапазона, "отцовского" – в первой низкочастотной его половине. Реализация более высокой частотной локализации может достигаться с использованием дробных масштабных множителей, но применяется редко, т.к. при этом возникают затруднения с использованием быстрого вейвлет-преобразования.

Выполним преобразование Фурье обеих частей равенства (3.2.6):

$$\varphi(\omega) = (1/\sqrt{2}) \sum_{k \in I} h_k \exp(-jk\omega/2) \varphi(\omega/2). \quad (3.2.15)$$

В это выражение может быть введен фурье-образ последовательности коэффициентов скейлинг-функции

$$H(\omega) = (1/\sqrt{2}) \sum_{k \in I} h_k \exp(-jk\omega), \quad (3.2.16)$$

с использованием которого получаем:

$$\varphi(\omega) = H(\omega/2) \varphi(\omega/2). \quad (3.2.17)$$

Уравнение (3.2.17) является масштабирующим уравнением в частотной области и полностью определяется 2π периодической функцией $H(\omega)$.

3.3. ВЕЙВЛЕТНЫЕ РЯДЫ /ЛЗ6/.

Разложение функций на вейвлетные ряды на заданном уровне разрешения m' выполняется по формуле:

$$s(t) = \sum_k c_{m',k} \varphi_{m',k} + \sum_{m \geq m',k} d_{m,k} \psi_{m,k}. \quad (3.3.1)$$

Значения коэффициентов (которые обычно называют суммами и разностями):

$$c_{m,k} = \int_t s(t) \varphi_{m,k}(t) dt. \quad (3.3.2)$$

$$d_{m,k} = \int_t s(t) \psi_{m,k}(t) dt. \quad (3.3.3)$$

На практике значения коэффициентов определяются с помощью быстрого вейвлет-преобразования, которое будет рассмотрено ниже.

Первая сумма в (3.3.1) содержит усредненные (с весовыми функциями $\varphi_{m,k}$) значения функции $s(t)$ по диадным интервалам $[k \cdot 2^{-m}, (k+1) \cdot 2^{-m}]$, вторая – значения флюктуаций на данных интервалах. По мере возрастания значения m длина интервалов уменьшается и уровень детализации (разрешения) функции $s(t)$ увеличивается. На самом детальном уровне $m = m_{\max} = M$ ряд представлен только скейлинг-функцией и, в пределах точности разложения, практически совпадает с исходной функцией:

$$s(t) = \sum_k c_{M,k} \varphi_{M,k}$$

На низшем уровне разрешения (на наиболее широких интервалах) первая сумма ряда (3.3.1) содержит всего одно усредненное взвешенное значение сигнала, а вторая сумма показывает флюктуации на всех без исключения уровнях. При каждом увеличении номера (значения) масштабного коэффициента m на 1 ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) число членов первой суммы ряда (3.3.1) увеличивается на 1, а второй суммы на 1 уменьшается, при сохранении общего числа членов разложения. Числовой ряд на каждом из уровней является "истинным" представлением сигнала с тем же объемом информации, но только в другом (вейвлетном) математическом представлении. Формально процедуру разложения можно продолжить и на уровне $m < m_0$, при этом для финитных сигналов L^2 -норма будет стремиться к нулевой, и, соответственно, к нулю будет стремиться среднее значение функции $s(t)$, т.е. первый член выражения (3.3.1). Именно поэтому вейвлет-преобразованием сигнала очень часто называют полную комбинацию рядов только второй суммы (3.3.1), дающей представление о локальных особенностях и флюктуациях сигнала на всех уровнях разрешения, которые обычно и являются предметом изучения.

Таким образом, выражение (3.3.1) показывает возможность аппроксимации любой произвольной функции $s(t)$ набором простых локальных функций $\varphi_{m,k}(t)$ и $\psi_{m,k}(t)$, ортогональных на разных уровнях значений m и полностью покрывающих пространство $L^2(\mathbb{R})$ за счет смещений k . Переход от m к $m+1$ эквивалентен замене t на $2t$, т.е. перемасштабированию функций $\varphi_{m,k}(t)$ и $\psi_{m,k}(t)$. Первая сумма выражения (3.1.3), сумма скейлинг-функций, дает "сглаженные средние" значения функции $s(t)$ на разных масштабных уровнях, вторая сумма вейвлетных функций добавляет к "грубой" аппроксимации сигнала все более подробные детали на все меньших масштабных интервалах.

Ортонормальный базис. Функции $\varphi_{m,k}(t)$ образуют ортонормальный базис пространства V^m . При переходе из пространства V^{m+1} в пространство V^m от пространства V^{m+1} отделяется подпространство W^m функции $\psi_{m,k}(t)$ – подпространство вейвлетов. Т.е. пространства V^{m+1} могут быть представлены в виде суммы подпространств:

$$V^{m+1} = V^m \oplus W^m, \quad m \in I. \quad (3.3.4)$$

В пределе, с учетом свойства ортогональности пространств:

$$V^{m+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^m W^k. \quad (3.3.5)$$

Пространства W^m образуют взаимно ортогональный набор, в котором вейвлеты $\psi_{m,k}(t)$ формируют ортонормальный базис при любом заданном значении m .

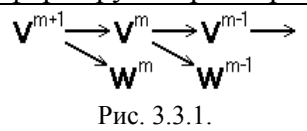


Рис. 3.3.1.

Физический смысл процесса разложения пространств, графическое представление которого приведено на рис. 3.3.1, достаточно прост. Исходное пространство (V^{m+1} на рисунке) является пространством сигналов и функций с определенным частотным диапазоном. При разложении сигнала в пространство W^m отделяются высокочастотные составляющие пространства V^{m+1} , а в пространстве V^m остаются его низкочастотные составляющие. С этих позиций функции $\psi_{m,k}(t)$ и $\varphi_{m,k}(t)$ играют роль высокочастотного и низкочастотного фильтров соответственно.

3.4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /ЛЗ6/.

Коэффициенты вейвлета. Значения коэффициентов h_k и g_k в рамках КМА определяются на основании общих свойств скейлинг-функций и вейвлетов. Уравнения

функций:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in I} h_k \varphi(2t-k), \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in I} g_k \varphi(2t-k).$$

Из свойства ортогональности масштабных функций следует первое уравнение на значения коэффициентов h_k :

$$\int_t \varphi(t) \varphi(t-x) dt = \delta_x$$

$$\sum_k h_k h_{k+2x} = \delta_x. \quad (3.4.1)$$

Из условий нормировки скейлинг-функции следует второе уравнение:

$$\int_t \varphi(t) dt = 1.$$

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \quad (3.4.2)$$

Из ортогональности вейвлетных и масштабных функций следует уравнение, решением которого являются значения коэффициентов g_k :

$$\int_t \psi(t) \varphi(t-n) dt = 0.$$

$$\sum_k h_k g_{k+2x} = 0. \quad (3.4.3)$$

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}. \quad (3.4.4)$$

Точность и масштабная разрешающая способность аппроксимации анализируемых функций вейвлетами зависит от их гладкости (регулярности), т.е. от порядка дифференцируемости. При использовании вейвлет-преобразования для сжатия информации (путем отбрасывания малозначимых коэффициентов разложения) вейвлеты с более высокой регулярностью обеспечивают более качественное восстановление сигнала. Для обеспечения знакопеременности и заданной гладкости до степени $M-1$ вейвлеты должны быть ортогональны полиномам соответствующих степеней:

$$\int_t t^m \psi(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1,$$

откуда следует:

$$\sum_k k^m g_k = 0. \quad (3.4.5)$$

$$\sum_k (-1)^k k^m h_k = 0. \quad (3.4.6)$$

Пример расчета коэффициентов выполним при $M=2$.

Запишем уравнения (3.4.1, 2 и 6) в явном виде:

$$\begin{aligned} h_0 h_2 + h_1 h_3 &= 0, & h_0 + h_1 + h_2 + h_3 &= \sqrt{2}, \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 &= 0, & -h_1 + 2h_2 - 3h_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2^{-3/2} - h_3, & h_1 &= 2^{-1/2} - h_3, \\ h_2 &= 2^{-3/2} + h_3, & h_3 &= 2^{-5/2} (1 \pm \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Примем для коэффициента h_3 знак минус в скобках, при этом:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2^{-5/2} (1 + \sqrt{3}) = 0.483, & h_1 &= 2^{-5/2} (3 + \sqrt{3}) = 0.837, \\ h_2 &= 2^{-5/2} (3 - \sqrt{3}) = 0.224, & h_3 &= 2^{-5/2} (1 - \sqrt{3}) = -0.129. \end{aligned}$$

Соответственно, значения коэффициентов g_k , вычисленные по (3.4.4):

$$g_0 = -0.129, \quad g_1 = -0.224, \quad g_2 = 0.837, \quad g_3 = -0.483.$$

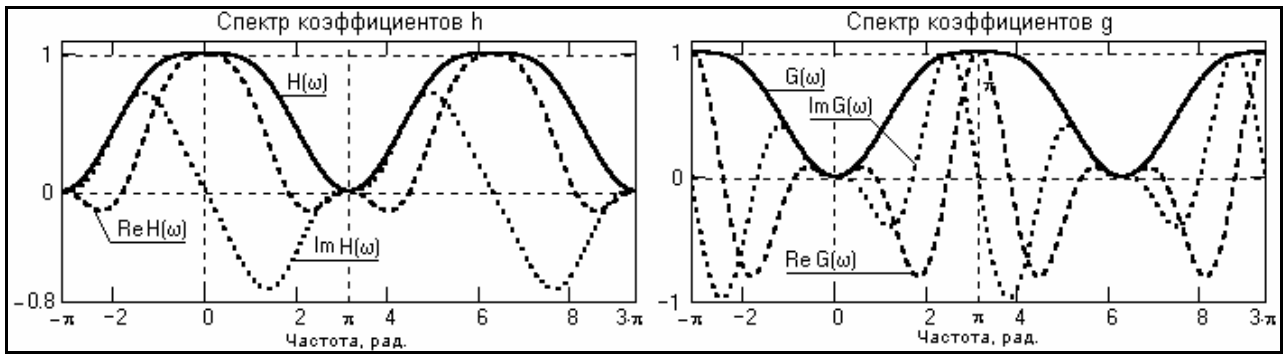


Рис. 3.4.1.

Вычислим спектры коэффициентов h_k и g_k :

Из рисунка можно видеть, что коэффициенты h_k и g_k , по существу, представляют собой коэффициенты операторов односторонних согласованных цифровых фильтров, низкочастотного и высокочастотного соответственно.

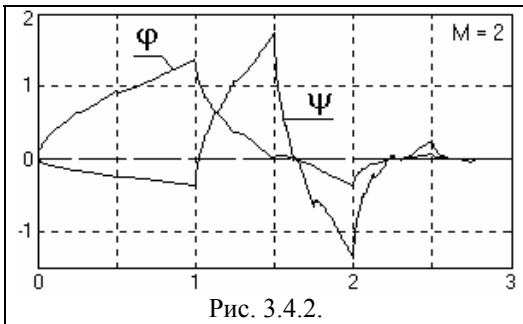


Рис. 3.4.2.

вейвлетов Добеши шире, чем вейвлетов Хаара, но при этом они обеспечивают при вейвлет-преобразовании большее количество малозначимых коэффициентов разложения и, при отбрасывании последних, более сильное сжатие данных.

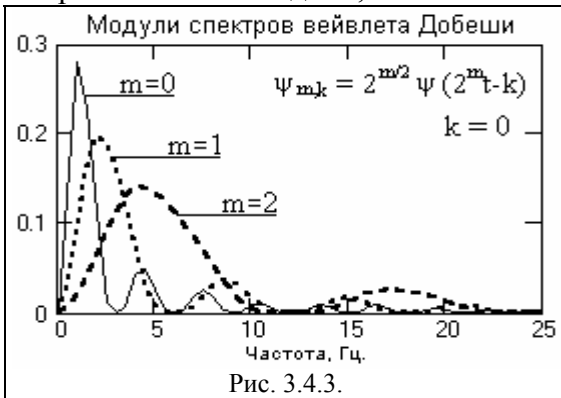


Рис. 3.4.3.

Вейвлет Добеши.

Вычисленные коэффициенты h_k и g_k определяют простейший вейвлет D^4 из известного семейства ортонормальных вейвлетов Добеши, приведенный на рис. 3.4.2. Выбор знака в (3.4.7) для h_3 несколько изменяет форму вейвлета, особенно для вейвлетов более высокого порядка. При повышении порядка гладкость вейвлета повышается и, как правило, несколько увеличивается область его определения $(2M-1)$. Область задания вейвлетов Добеши шире, чем вейвлетов Хаара, но при этом они обеспечивают при вейвлет-преобразовании большее количество малозначимых коэффициентов разложения и, при отбрасывании последних, более сильное сжатие данных.

На рис. 3.4.3 приведены спектры вейвлета Добеши D^4 при $k=0$ в трех последовательных масштабах, отображающих частотную локализацию вейвлета и сдвиг по частоте при изменении масштабирования.

В принципе, решением уравнений (3.2.6) и (3.2.10) можно определить явный вид скейлинг-функции и вейвлета. Однако обычно они вычисляются методом итераций, а в практических приложениях используются только вейвлет-коэффициенты h_k без вычисления конкретной формы вейвлетов.

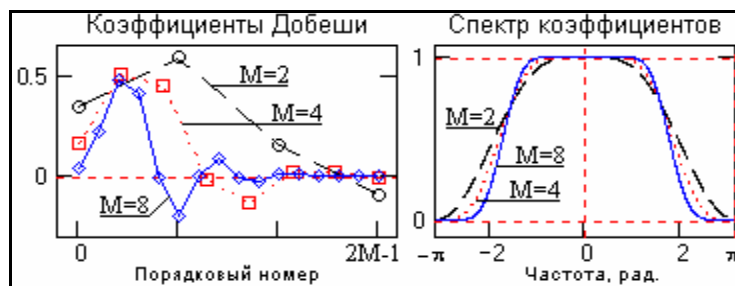


Рис. 3.4.4.

На рис. 3.4.4 приведены три вектора коэффициентов ω_k Добеши из системы Matlab (db2, db4 и db8) и спектры коэффициентов. Как видно из рисунка, по мере увеличения порядка векторов крутизна среза их частотных характеристик увеличивается, а, соответственно, качество разложения сигналов и их реконструкции также будут улучшаться.

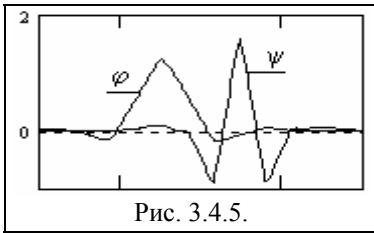


Рис. 3.4.5.

За исключением вейвлетов Хаара, все вещественные ортогональные вейвлеты асимметричны. Наиболее близкую к симметричной форму имеет вейвлет Коифлетса, форма которого приведена на рис. 3.4.5. Частотная характеристика коэффициентов h_k вейвлета по сравнению с коэффициентами Добеши такого же порядка имеет более высокую крутизну среза полосы пропускания.

Биортогональные вейвлеты применяются для обеспечения симметрии и точной реконструкции сигналов одновременно. При этом используются два дуальных вейвлет-базиса $\psi_{m,k}(t)$ и $\psi_{m,k}^\#(t)$, удовлетворяющие требованию биортогональности скалярного произведения этих вейвлетов:

$$(\psi_{m,k}(t), \psi_{m',k'}^\#(t)) = \delta_{m,k; m',k'}$$

Разложение функций при использовании биортогональных вейвлетов может производиться в двух эквивалентных формах:

$$s(t) = \sum_{m,k} (s(t), \psi_{m,k}^\#(t)) \psi_{m,k}(t) \quad (3.4.8)$$

$$s(t) = \sum_{m,k} (s(t), \psi_{m,k}(t)) \psi_{m,k}^\#(t) \quad (3.4.8')$$

Выбор формы определяется задачами разложения. Свойства регулярности биортогональных вейвлетов могут заметно отличаться. Если один из них обладает гладкостью порядка n , то дуальный ему вейвлет может иметь, по крайней мере, n нулевых моментов. Большое число нулевых моментов дает хорошие результаты при сжатии информации, а большая степень гладкости вейвлета обеспечивает более точную реконструкцию сигналов. При этом оба вейвлета можно выполнить симметричными.

3.5. БЫСТРОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ /ЛЗ6, ЛЗ7/.

Принцип преобразования. Любую функцию $s(t)$ можно рассматривать на любом m' -уровне разрешения. Для разделения функции на этом уровне между ее усредненными значениями и флюктуациями вокруг средних значений преобразуем формулу 3.3.1 к следующему виду:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{m',k} \varphi_{m',k}(t) + \sum_{m=m'}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{m,k} \psi_{m,k}(t) \quad (3.5.1)$$

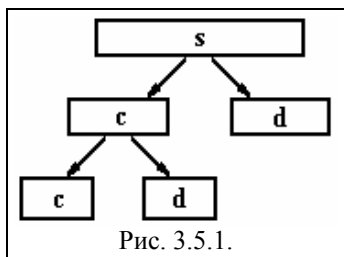
При бесконечных пределах первая сумма в этом выражении стремится к нулю и может быть опущена, давая "чистое" вейвлет-преобразование. В общем случае коэффициенты $c_{m,k}$ и $d_{m,k}$ можно вычислять непосредственно по формулам (3.3.2) и (3.3.3). На практике мы обычно имеем дело с цифровыми данными в виде конечного набора отсчетов, а, соответственно, наилучший уровень разрешения определен интервалом, содержащим один отсчет, и суммирование выполняется в конечных пределах. Значение $m=0$ обычно принимается для этого наилучшего уровня разрешения. Для принятой нами формы вейвлетов $\varphi_{m,k} = 2^{m/2} \varphi(2^m t - k)$ усреднение отсчетов (расширение размеров вейвлетов) происходит при уменьшении значений m , т.е. при $m = 0, -1, -2, \dots$. Для исключения использования отрицательных индексов масштабирования знак "минус" обычно вводится непосредственно в функции вейвлетов, т.е. $\varphi_{m,k} = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m} t - k)$, при этом вейвлет-коэффициенты вычисляются для $m > 0$.

Кратномасштабный анализ при последовательном увеличении значений m приводит к естественной форме быстрых итерационных вычислений:

$$c_{m+1,k} = \sum_n h_n c_{m,2k+n}, \quad (3.5.2)$$

$$d_{m+1,k} = \sum_n g_n c_{m,2k+n}, \quad (3.5.3)$$

$$c_{0,k} = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} s(t) \cdot \varphi(t-k) dt. \quad (3.5.4)$$



Эти уравнения обеспечивают пирамидальный алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов (алгоритм Маллата), приведенный на рис. 3.5.1. Явный вид вейвлета требуется только для расчета коэффициентов h_n и g_n , при самом преобразовании он не используется, используются значения коэффициентов h_n и g_n . Уравнение (3.5.4) применяется при известной аналитической форме функции $s(t)$. Для цифровых данных в качестве значений $c_{0,k}$

обычно принимаются исходные значения данных, т.е. $c_{0,k} = s(k)$. Обратное быстрое вейвлет-преобразование представляет собой последовательную сборку сигнала от больших m к малым:

$$c_{m-1} = \sum_{n \in 1} c_{m,n} h_{k-2n} + \sum_{n \in 1} d_{m,n} g_{k-2n}, \quad (3.5.5)$$

и обеспечивает реконструкцию функции по значениям ее вейвлет-коэффициентов с любого уровня разрешения.

Сущность операций, выполняемых формулами (3.5.2) и (3.5.3), заключается в следующем. С учетом спектров коэффициентов h_n и g_n (рис. 3.4.1), на первом этапе преобразования первый цифровой фильтр h_n из сигнала $s_k = c_{0,k}$ выделяет низкие частоты $|\omega| \leq \pi/2$, а другой (октавный) фильтр g_n выделяет верхние частоты $\pi/2 \leq |\omega| \leq \pi$. Поскольку на выходе фильтра h_n отсутствует верхняя половина частот, то частота дискретизации выходного сигнала может быть уменьшена в 2 раза, т.е. выполнена децимация выходного сигнала, что и производится в формуле (3.5.2) сдвигами $(2k+n)$ через 2 отсчета по входному сигналу. Соответственно, на выходе фильтра g_n освобождается место в области низких частот, и аналогичное прореживание выходного сигнала приводит к транспонированию верхних частот на освободившееся место. Таким образом, каждый из выходных сигналов несет информацию о своей половине частот, при этом выходная информация представлена таким же количеством отсчетов, что и входная.

Точность реконструкции сигналов зависит от потерь информации при выполнении прореживания спектров, причем эти потери наблюдаются, в основном, на срезах полос пропускания фильтров низких и высоких частот, крутизна которых зависит от порядка фильтров (см. рис. 3.4.4), их согласованности, и типа вейвлетных функций. Естественно, что по мере декомпозиции сигнала суммарные потери информации увеличиваются, и погрешность реконструкции сигналов возрастает.

Разновидностью вейвлетов являются койфлеты, обладающие набором нулевых моментов:

$$\int_t t^m \varphi(t) dt = 0, \quad 0 < m < M, \quad (3.5.6)$$

что дает возможность более эффективного сжатия информации. При расчете койфлетов к исходным функциям (3.4.1) и (3.4.2) добавляется условие:

$$\sum_k h_k k^m = 0, \quad 0 < m < M, \quad (3.5.7)$$

при этом длина области задания койфлета расширяется до $3M-1$, регулярность несколько уменьшается, но увеличивается точность восстановления исходных функций.

Пакетные вейвелеты. Основная информация обычно заключена в низкочастотной части сигнала, разложение которой может быть продолжено вплоть до нулевого уровня. Но аналогичная операция может применяться и к любой высокочастотной части разложения. Это соответствует замене вейвлета $\psi(t)$ на два новых вейвлета

$$\psi_1(t) = \sum_n h_n \psi(t-n), \quad \psi_2(t) = \sum_n g_n \psi(t-n),$$

которые тоже локализованы в пространстве, но на вдвое более широком интервале, чем исходный вейвлет. Бинарное дерево разложения (рис. 3.5.1) "расщепляется" и для коэффициентов 'd' любого уровня. Такое расщепление является адаптивным и легко приспособляется к индивидуальным особенностям сигналов. Функции адаптивного преобразования называют вейвлет-пакетом.

3.6. ДВУМЕРНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /Л36/.

Двумерные вейвлеты являются функциями двух переменных, x и y , в двумерном пространстве $V = x, y \in L^2(\mathbb{R}^2)$, при этом параметры a и b могут быть индивидуальными для каждой переменной. В общей форме для двумерного непрерывного вейвлета:

$$\Psi_{a_1, b_1; a_2, b_2}(x, y) = (a_1 \cdot a_2)^{-1/2} \psi_0[(x-b_1)/a_1, (y-b_2)/a_2]. \quad (3.6.1)$$

При двумерном КМА двумерный ортонормальный базис пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ обычно строится на основе одномерного ортонормального вейвлет-базиса $\Psi_{m,k}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - k)$ путем тензорного произведения двух одномерных базисов:

$$\Phi_{m_1, k_1; m_2, k_2}(x, y) = \Psi_{m_1, k_1}(x) \cdot \Psi_{m_2, k_2}(y). \quad (3.6.2)$$

Если масштабирование двумерного вейвлет-базиса $\Phi(x, y)$ по обеим переменным производится синхронно, то базис задается следующим выражением:

$$\Phi_{m,k,l}(x, y) = 2^m \Phi(2^m x - k, 2^m y - l), \quad m, k, l \in I, \quad (3.6.3)$$

где функция $\Phi(x, y)$ в соответствии с тензорным произведением (3.6.2) представляет собой семейство трех функций (трех вейвлетов):

$$\Psi_{1,m,k,l}(x, y) = 2^m \varphi(2^m x - k) \psi(2^m y - l). \quad (3.6.4^1)$$

$$\Psi_{2,m,k,l}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - k) \varphi(2^m y - l). \quad (3.6.4^2)$$

$$\Psi_{3,m,k,l}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - k) \psi(2^m y - l). \quad (3.6.4^3)$$

В соответствии с этими вейвлетами двумерный сигнал в плоскости x, y анализируется по горизонталям, вертикалям и диагоналям с одинаковым разрешением.

В общем случае n -мерного пространства ортонормальный базис образуют $2n-1$ функций, при помощи которых осуществляется МКА любой функции их $L^2(\mathbb{R}^n)$ пространства, при этом нормировочный множитель равен $2^{nm/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.
 л36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. / Успехи физических наук, 2001, т.171, № 5, стр. 465-501.
 л37. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 132 с.

Тема 4: ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЕЙВЛЕТНОГО АНАЛИЗА.

Мудр тот, кто знает не многое, а нужное.

Эсхил. Древнегреческий трагик, V в.д.н.э.

Не менее мудр и тот, кто среди многого умеет найти нужное.

Фарид Батрутдинов. Уральский геофизик, XX в.

Содержание: Введение. 4.1. Вейвлеты пакета Wavelet Toolbox. Типы вейвлетов. Вейвлетная функция. Средняя частота вейвлета. 4.2. Ортогональные вейвлеты. Вейвлеты с компактным носителем. Масштабирующие фильтры вейвлетов. Фильтры вейвлет-преобразования. Спектры вейвлетных фильтров. Бесконечные регулярные вейвлеты. Интерфейс GUI. 4.3. Биортогональные парные вейвлеты. 4.4. Грубые вейвлеты. 4.5. Комплексные вейвлеты. Комплексный вейвлет Гаусса. Комплексный вейвлет Морлета. Комплексный В-сплайновый вейвлет. Комплексный вейвлет Шеннона. 4.6. Основные функции вейвлет-анализа. Двукратное уменьшение матрицы. Двукратное увеличение матрицы. Интегрирование вейвлета. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

Самое мощное и совершенное программное обеспечение вейвлетного анализа данных на современном этапе – пакет расширения Wavelet Toolbox системы Matlab. Он включает в себя средства для изучения, создания и применения вейвлетов и применения вейвлет-преобразований как в командном режиме, так и с помощью специальных средств графического интерфейса пользователя GUI.

Пакет Wavelet Toolbox предоставляет в распоряжение пользователя:

- Инструментальные средства для непрерывного и дискретного вейвлет-анализа и синтеза сигналов и изображений.
- Встроенные вейвлеты различных типов, в том числе пакетные.
- Возможность задания собственных вейвлетов.
- Средства обработки сигналов и изображений.
- Средства очистки сигналов и изображений от шумов.
- Средства специальной обработки и компрессии данных.
- Средства визуализации вейвлетов и всех операций с ними.

22.1. ВЕЙВЛЕТЫ ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX /ЛЗ4/.

Типы вейвлетов. Принятая классификация вейвлетов – по виду образующей функции $\psi(t)$ и по фамилии ученого, предложившего вейвлет. Ниже приводится список семейств вейвлетов пакета и их краткие базовые имена при использовании в командах и аргументах функций.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| ● 'haar' – Хаара. | ● 'db' – Добеши. |
| ● 'sym' – Симлета. | ● 'coif' – Коифлетса. |
| ● 'bior' – биортогональный. | ● 'rbio' – обратный биортогональный. |
| ● 'meyr' – Мейера. | ● 'dmey' – дискретный Мейера. |
| ● 'gaus' – Гаусса. | ● 'mexh' – мексиканская шляпа. |
| ● 'morl' – Морлета. | ● 'cgau' – комплексный Гаусса. |
| ● 'shan' – Шеннона. | ● 'fbsp' – частотный В-сплайновый. |
| ● 'cmor' – комплексный Морлета. | |

Семейства вейвлетов, как правило, имеет несколько типов (размера/порядка), которые указываются добавлением к базовому имени определенного числа (чисел), например: 'db1', 'gaus3', 'bior2.6', 'fbsp2-1-0.5'. Команды вызова информации по вейвлетам:

- `>> wavemngr('read')` – названия и краткие базовые имена,
- `>> wavemngr('read',1)` – полный перечень всех семейств и их состава,
- `>> waveinfo('семейство')` – полная информация о вейвлетах семейства.

Пример - `waveinfo('gaus')`.

Команда (функция) `wavemngr` позволяет добавлять (с параметром 'add'), удалять, сохранять и считывать новые (собственные) вейвлеты. Форматы команды:

- `>> wavemngr(['add',]FN,FSN,WT,NUMS,FILE[,B]),`
- `>> wavemngr(['add',]FN,FSN,WT,{NUMS,TYPNUMS},FILE[,B]),`

где FN – название семейства, FSN – короткое имя семейства, WT – тип вейвлета, NUMS – список параметров вейвлета (разделяются пробелами, конечный с двумя звездочками **), TYPNUMS – формат входного значения ('integer', 'real' или 'string'), FILE – имя mat или m-файла, B – вектор нижней и верхней границы эффективной поддержки вейвлетов (квадратные скобки в перечнях параметров команд указывают на возможность отсутствия или на необязательность данных параметров). Значения параметра WT могут быть следующие: WT=1 для ортогонального вейвлета, WT=2 для биортогонального, WT=3 для вейвлета с масштабирующей функцией, WT=4 без масштабирующей функции, WT=5 для комплексного вейвлета без масштабирующей функции. После добавления семейства в пакет он включается в список информационных команд.

♣ Пример задания функции:

```
wavemngr('add','Mainwave','mnw',1,'1 2 3','mainw1')
```

Вейвлетная функция *wavefun* возвращает значения детализирующей ψ -функции $\psi(x)$ и связанной с ней масштабирующей ϕ -функции $\phi(x)$ (функции аппроксимации), если последняя существует. Полный формат (для биортогональных вейвлетов) на сетке X:

- `[Phi1,Psi1,Phi2,Psi2,X] = wavefun('wname',ITER).`

Количество точек сетки X равно 2^{ITER} . Phi1,Psi1 – векторы функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ разложения (декомпозиции) сигналов (в однострочных массивах), Phi2,Psi2 – векторы функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ восстановления (реконструкции) сигналов. Для ортогональных вейвлетов выходные массивы Phi2 и Psi2 не задаются. Для вейвлетов без масштабирующих функций не задается также массив Phi1. Если массив X значений оси 'x' не нужен, он также может не задаваться. При расчетах аналитически задаваемых вейвлетов (типа 'gaus') параметр ITER определяет размер сетки $X=2^{ITER}$ и, соответственно, интервал дискретизации вейвлета с учетом конечности его задания.

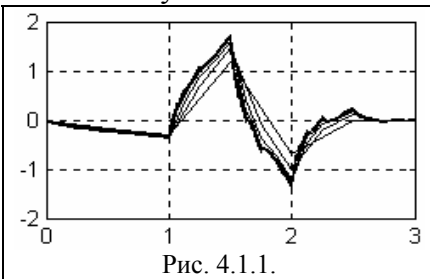


Рис. 4.1.1.

♣ Пример просмотра процесса итерации вейвлета 'sym2'

(рис. 4.1.1):

```
iter = 10; wav = 'db2';
for i = 1: iter
    [phi,psi,x] = wavefun(wav,i); plot(x,psi); hold on
end; hold off
```

♣ Примечание: Текст программы можно копировать и подставлять непосредственно в командную строку Matlab после знака ввода '>>'.
 >> wavefun('db2',10); hold on; plot(x,psi); hold off

Средняя частота вейвлета определяет положение максимума пика его Фурье-образа на оси частот (в герцах). Формат функции:

- `Q = centfrq('wname',[ITER]),`

где ITER – количество итераций, если вейвлет 'wname' не задан аналитической функцией и вычисляется методом итераций.

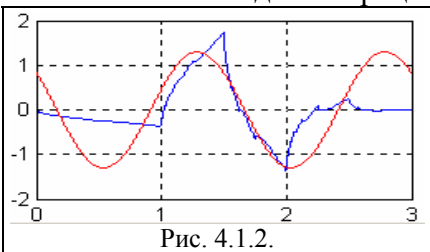


Рис. 4.1.2.

Пример определения средней частоты и построения сравнительных графиков вейвлета db2 и гармоники с частотой, равной средней частоте вейвлета, приведен на рис. 4.1.2.

```
>> f = centfrq('db2',16,'plot'); grid
```

```
f =
    0.6667
```

4.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /ЛЗ4/.

Декомпозиция (D) сигнала при вейвлет преобразовании выполняется двумя фильтрами: низкочастотным LD (фильтр аппроксимации, который называют также масштабирующим фильтром) и высокочастотным HD (фильтр детализации). Соответственно, реконструкция (R) сигнала выполняется низкочастотным фильтром LR и высокочастотным HR.

Вейвлеты с компактным носителем. К ортогональным вейвлетам с компактным

носителем относятся вейвлеты Добеши (dbN), Симлета (symN) и Коифлетса (coifN), где N – числовой индекс (1,2,...). Вейвлеты несимметричны и недостаточно периодичны. В определенной степени близки к симметричным вейвлеты Симлета. Используются для непрерывного и дискретного, как правило - быстрого, вейвлет-преобразования и реконструкции сигналов. Имеют функции phi и psi, а также функции масштабирующего фильтра, который является базовым для расчета фильтров декомпозиции и реконструкции сигналов. При координатной оси вейвлетов в секундах средняя частота вейвлетов всех порядков находится в пределах $0.7 \pm 5\%$ Гц, за исключением вейвлета coif1 со средней частотой 0.8 Гц.

♣ Пример расчета phi- psi-функций вейвлетов Добеши.

```
[ph2,ps2,x] = wavefun('db2',10); [ph4,ps4,x1] = wavefun('db4',10);
[ph6,ps6,x2] = wavefun('db6',10); [ph8,ps8,x3] = wavefun('db8',10);
subplot(141);plot(x,ph2,x,ps2);grid; subplot(142);plot(x1,ph4,x1,ps4);grid;
subplot(143);plot(x2,ph6,x2,ps6);grid; subplot(144);plot(x3,ph8,x3,ps8);grid;
```

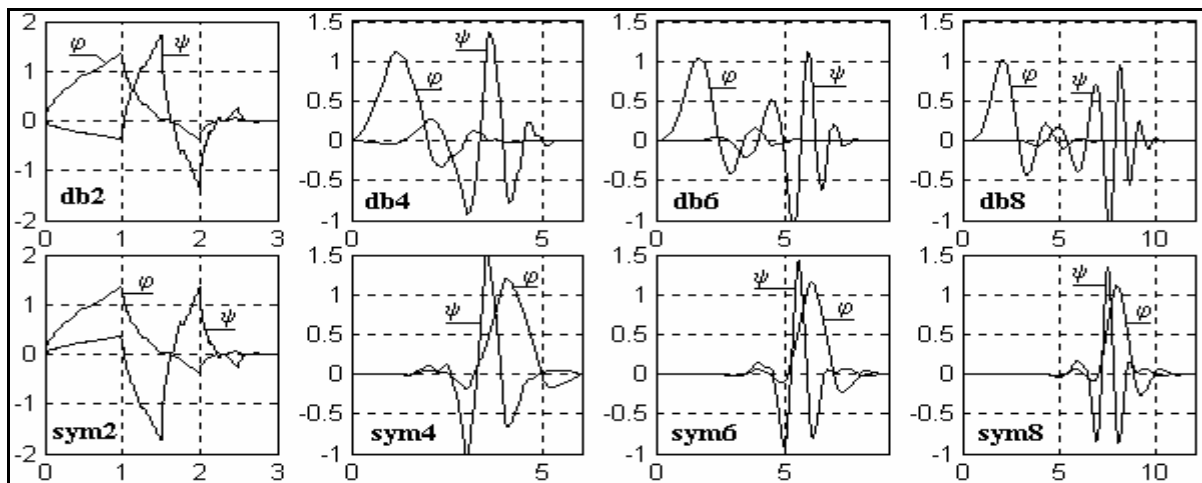


Рис. 4.2.1. Вейвлеты Добеши и Симлета.

На рис. 4.2.1 приведены вейвлеты Добеши и Симлета одного порядка. При $N=2$ они однотипны и различаются только знаком psi-функции. При повышении порядка место локализации phi- и psi-функций вейвлетов Симлета практически совпадают, а симметричность psi-функции увеличивается. Вейвлет Добеши db1 тождественен вейвлету Хаара, как своей предельной форме.

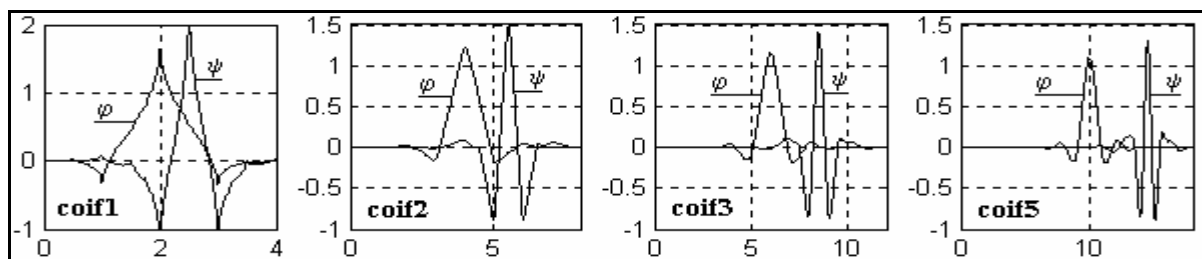


Рис. 4.2.2. Вейвлеты Коифлетса.

На рис. 4.2.2. приведены еще более симметричные по форме вейвлеты Коифлетса.

Масштабирующие фильтры ортогональных вейвлетов записаны непосредственно под их именами и могут быть считаны следующей операцией:

- **load wname**; LM = wname;

Кроме того, для их вычисления существуют отдельные функции. Для масштабирующих фильтров Добеши:

- LM = **dbaux**(N,SUMLM), N=1,2,3,...- порядок фильтра, SUMLM = sum(LM) – сумма коэффициентов фильтра.

- LM = **dbwavf**('wname').

Аналогично для масштабирующих фильтров Симлета и Коифлетса:

- LM = **symaux**(N,SUMLM).

- LM = `symwavf('wname')`.
- LM = `coifwavf('wname')`.

♣ Пример расчета масштабирующего фильтра Добеши 'db8' и его спектра.

```
LM = dbwavf('db8'); Lm=LM;
Lm(128)=0; Lmf = fft(Lm);
LMF = fftshift(Lmf); % Перекомпоновка в главный интервал
f=((0:length(LMF)-1)/length(LMF))-0.5; % Шкала частот в Гц.
subplot(211); stem(LM); grid; title('LM-массив db8');
subplot(212); plot(f,abs(LMF)); grid; title('Спектр LM-функции');
```

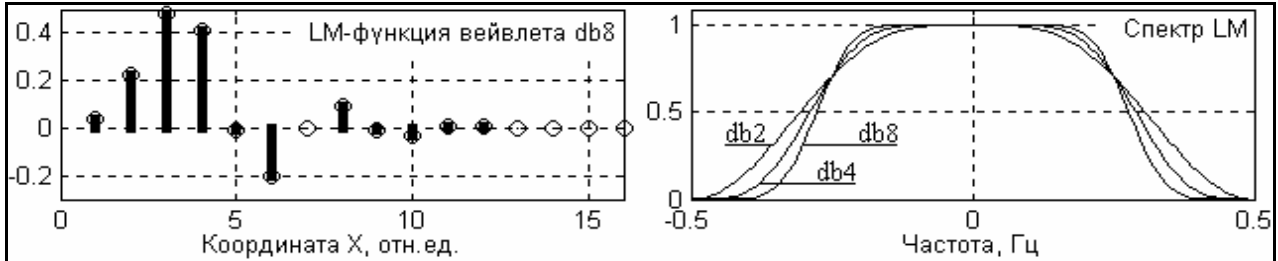


Рис. 4.2.3. Масштабирующий фильтр и модуль его спектра.

На рис. 4.2.3 приведен масштабирующий фильтр вейвлета db8 и его спектр в сопоставлении со спектрами фильтров db2 и db4. Как видно из графиков, при повышении порядка фильтра крутизна среза его частотной характеристики увеличивается. В сочетании с повышением средней частоты psi-функции вейвлета это повышает частотную разрешающую способность вейвлет-преобразований. При разной форме вейвлетов и их фильтров, модули частотных характеристик масштабирующих фильтров db, sum и coif одинакового порядка практически идентичны. Спектры различаются фазочастотными характеристиками.

Фильтры преобразования. Масштабирующая функция определяет все четыре фильтра вейвлет-преобразований, которые вычисляются следующей операцией:

- [LD,HD,LR,HR] = `orthfilt(LM)`,

где LD – низкочастотный (аппроксимирующий) фильтр декомпозиции, HD – высокочастотный фильтр декомпозиции (детализирующий), LR – низкочастотный фильтр реконструкции, HR – высокочастотный фильтр реконструкции.

♣ Пример расчета фильтров вейвлета Добеши 'db6' (рис. 4.2.4).

```
load db6; LM = db6;
[LD,HD,LR,HR] = orthfilt(LM);
subplot(221); stem(LD); grid; title('LD-фильтр db6');
subplot(222); stem(HD); grid; title('HD-фильтр db6');
subplot(223); stem(LR); grid; title('LR-фильтр db6');
subplot(224); stem(HR); grid; title('HR-фильтр db6');
```

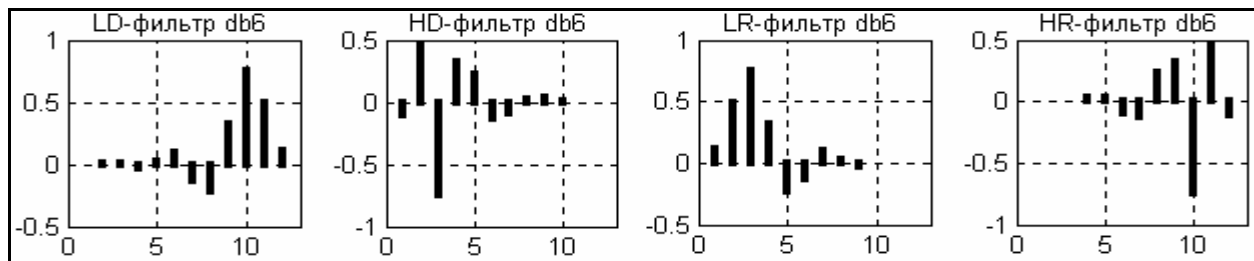


Рис. 4.2.4.

Аналогичная операция вычисления фильтров ортогональных (и биортогональных) вейвлетов непосредственно по их имени:

- [LD,HD,LR,HR] = `wfilters('wname')`.

Коэффициенты фильтров ненормированы. При нормировке (для чего в правую часть второй строки программы вместо LM достаточно поставить LM/sqrt(2)) фильтр LR повторяет массив LM. Нетрудно также заметить, что фильтры LR и HR являются

трансформированными фильтрами LD и HD. Для записи вычисленных фильтров в текстовом формате (при использовании в других математических системах) и их считывания применяются функции:

- `dlmwrite('file',A,'dlm',[,rows[,cols]])` - функция записи в файл массива (матрицы) A, можно с указанием – с какой строки, и с какого столбца (нумерация с нулей). Параметром функции 'dlm' определяется символ разделения матричных элементов в записи (символ табуляции – '\t', могут быть указаны и другие разделители).

- `A=dlmread('file','dlm',[,rows[,cols]])` - считывание файла в массив (матрицу) A. Вместо "rows,cols" можно указывать полный вектор считывания данных из файла в квадратных скобках: [Верхняя строка, Левый столбец, Нижняя строка, Правый столбец].

♣ Пример записи вектора LD вейвлета Добеши в текстовый файл.

```
dlmwrite('LDfilter.prn',LD,'\t');
```

Спектры фильтров. Если по значениям коэффициентов фильтров вычислить их спектры, то можно увидеть, что спектры низкочастотных фильтров, равно как и высокочастотных, тождественны друг другу по модулю (рис. 4.2.5) и отличаются только по фазе.

♣ Вычисление спектров фильтров вейвлета Добеши db6 (продолжение примера вычисления фильтров).

```
Ld=LD; Hd=HD; Lr=LR; Hr=HR;
Ld(128)=0; Hd(128)=0; Lr(128)=0; Hr(128)=0;
LDF = fftshift(fft(Ld/sqrt(2))); HDF = fftshift(fft(Hd/sqrt(2)));
LRF = fftshift(fft(Lr/sqrt(2))); HRF = fftshift(fft(Hr/sqrt(2)));
f=((0:length(Ld)-1)/length(Ld))-0.5;
subplot(221); plot(f,abs(LDF)); grid; title('LDF-спектр db6');
subplot(222); plot(f,abs(HDF)); grid; title('HDF-спектр db6');
subplot(223); plot(f,abs(LRF)); grid; title('LRF-спектр db6');
subplot(224); plot(f,abs(HRF)); grid; title('HRF-спектр db6');
```

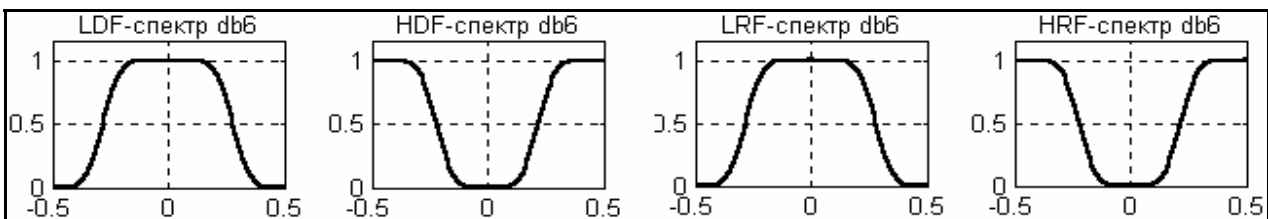


Рис. 4.2.5. Модули фильтров Добеши.

Заметим также, что модули низкочастотных спектров повторяют модуль спектра масштабирующего фильтра.

Бесконечные регулярные вейвлеты. К бесконечным регулярным вейвлетам относят вейвлеты Мейера в непрерывном (meyer) и дискретном (dmeyer) вариантах. Функции ϕ и ψ вейвлетов не определены явно (определены в частотной области) и не имеют компактного носителя. Они симметричны и регулярны в бесконечности. Эффективный интервал задания вейвлета $[-8,8]$. Применяются для непрерывного и дискретного преобразований. Вычисляются операцией:



Рис. 4.2.6.

- `[PH,PS,X] = meyer(sb,ub,N)`, где X – регулярная сетка вычислений, N – количество точек вычисления (должно быть равно степени числа 2), sb – начало интервала (рекомендуется < -6), ub – конец интервала (рекомендуется > 6). Если требуется вычислить только один вейвлет, то его имя добавляется

четвертым параметром в аргументы функции, например: `[PS,X]=meyer(-8,8,1024,'psi')`. Форма вейвлетов приведена на рис. 4.2.6.

Дискретный вейвлет Мейера представлен масштабирующим фильтром, на основе

которого обычным порядком вычисляются фильтры декомпозиции и реконструкции.

♣ Пример расчета фильтров вейвлета Мейера (рис. 4.2.7).

```
load dmey; LM = dmey;
[LD,HD,LR,HR] = orthfilt(LM);
```

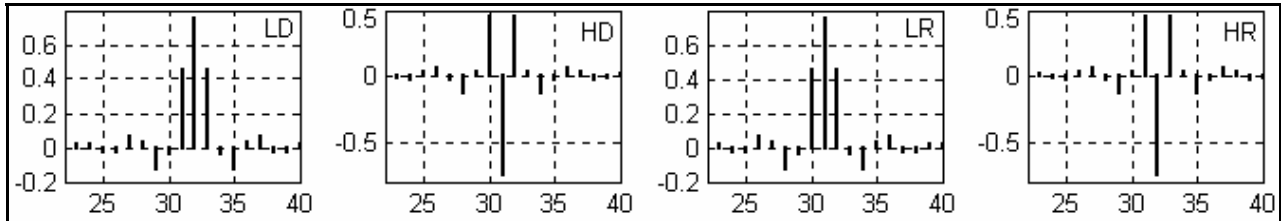


Рис. 4.2.7.

Амплитудно-частотные характеристики фильтров Мейера подобны АЧХ фильтров Добеши большого порядка (рис. 4.2.5), но имеют еще более высокую крутизну среза.

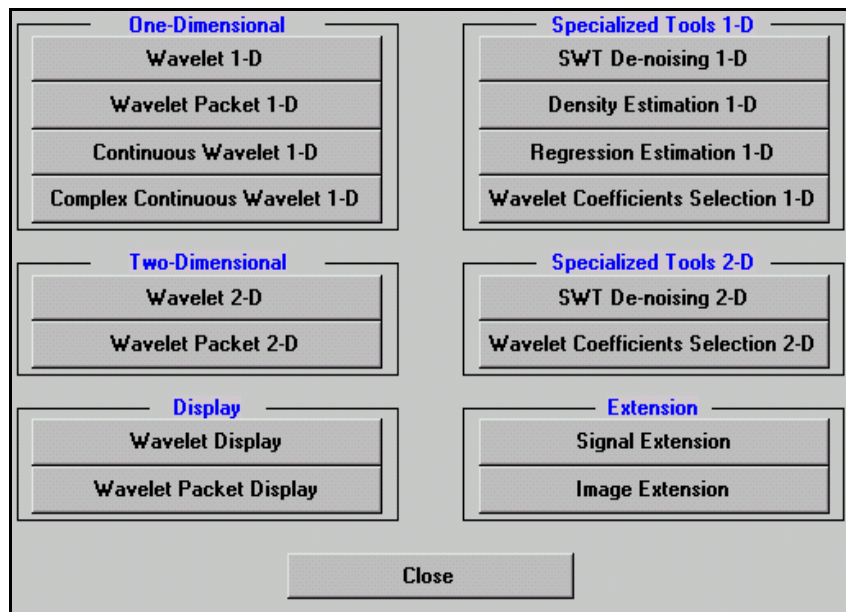


Рис. 4.2.8.

Интерфейс GUI. Для просмотра информации о вейвлетах, формы их ρ - и ψ -функций и фильтров можно использовать интерфейс GUI, который вызывается командой

- **wavemenu**,

или через дерево меню Wavelet Toolbox → Wavelet Toolbox Main Menu входного окна Matlab "Запустить редактор".

Меню интерфейса приведено на рис. 4.2.8. Оно разделено на шесть групп кнопочных включателей по назначению. Первую группу "One-Dimensional" образуют кнопки включения окон разложения сигналов одномерными вейвлетными функциями различного типа. Группа "Two-Dimensional" – разложение двумерных сигналов и изображений. Информацию по вейвлетах, вейвлетные функции и фильтры декомпозиции/реконструкции можно просмотреть в группе "Display". Специальные возможности вейвлет-преобразований (очистка сигналов от шумов, сжатие сигналов, статистический анализ и пр.) реализуются в 4-6 группах.

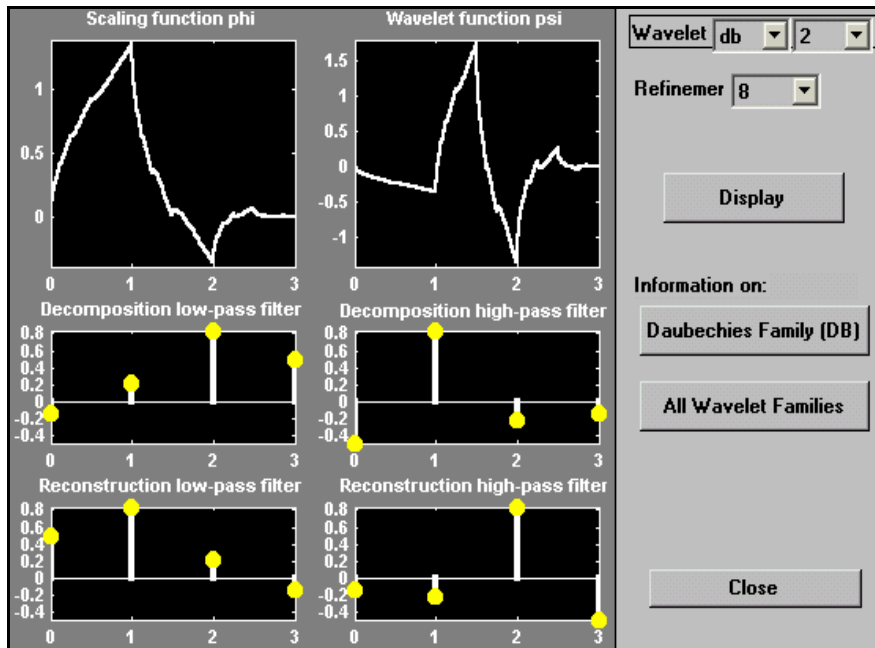


Рис. 4.2.9.

Для просмотра вейвлетов, в группе 'Display' нажмите кнопку 'Wavelet Display', и на экране появится окно, приведенное на рис. 4.2.9. Выберите необходимый тип вейвлета ("Wavelet"), установите его порядок и нажмите кнопку 'Display'. В графических окнах интерфейса выводятся ϕ и ψ функции и фильтры деконволюции и реконструкции сигналов. Ниже кнопки "Display" имеются также две информационных кнопки, нажатием которых на экран выводится информация о вейвлете и информация обо всех вейвлетах меню.

Аналогично, без дополнительных пояснений, через интерфейс GUI в группе 'Display' можно знакомиться и с любыми другими типами вейвлетов, которые будут рассматриваться ниже.

4.3. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /ЛЗ4/.

Из теории фильтрации сигналов известно, что если одни и те же фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) используются и для разложения, и для восстановления сигналов, то симметричное и точное восстановление невозможно (за исключением фильтров Хаара). Однако это возможно с биортогональными фильтрами, использующими два ортогональных друг другу вейвлета, один для разложения сигнала:

$$c_{m,k} = \int_x s(k) \cdot \psi_{m,k}(x) dx,$$

и другой вейвлет $\psi_{m,k}^\#$ для синтеза:

$$s = \sum_k c_{m,k} \cdot \psi_{m,k}^\#.$$

В операциях декомпозиции и реконструкции биортогональные вейвлеты могут меняться местами. В комплекте вейвлетов пакета Wavelet Toolbox биортогональные вейвлеты представлены В-сплайновой парой вейвлетов biorNr.Nd и обратной парой rbiorNr.Nd , где задание числовых индексов Nr и Nd возможно в следующих комбинациях:

$$\begin{array}{lll} \text{Nr} = 1, \text{Nd} = 1,3,5. & \text{Nr} = 2, \text{Nd} = 2,4,6,8. & \text{Nr} = 3, \text{Nd} = 1,3,5,7,9. \\ \text{Nr} = 4, \text{Nd} = 4. & \text{Nr} = 5, \text{Nd} = 5. & \text{Nr} = 6, \text{Nd} = 8. \end{array}$$

Пары вейвлетов имеют отдельные ϕ - и ψ -функции с компактными носителями. ϕ -функции имеют четную форму, ψ -функции в зависимости от серии вейвлета либо четные, либо нечетные. С биортогональными вейвлетами возможно как непрерывное преобразование, так и дискретное, в том числе быстрое.

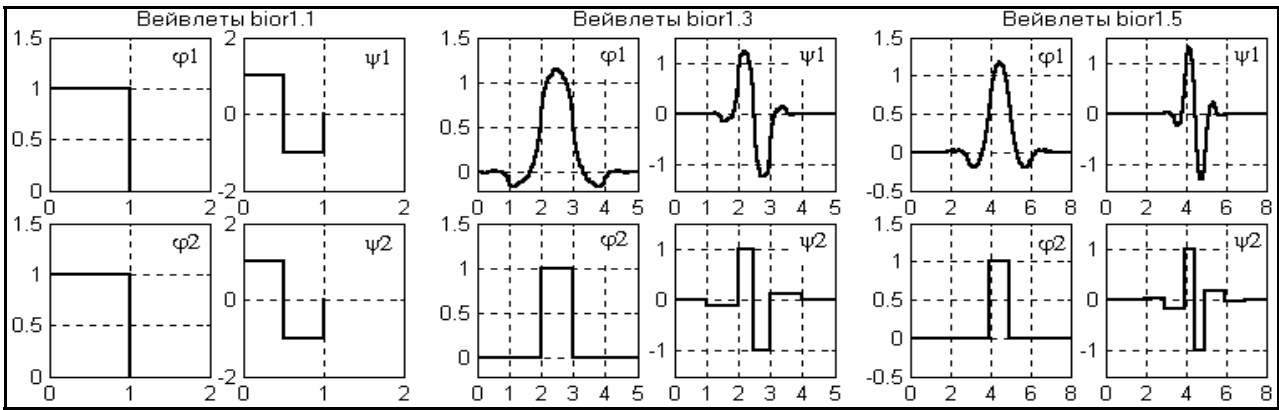


Рис. 4.3.1.

На рис. 4.3.1 приведена серия phi- и psi-функций вейвлетов bior1.Nd. Начало серии – вейвлет Хаара. Psi-функции нечетны. Вейвлеты получены вейвлетной функцией

- $[\text{Phi1}, \text{Psi1}, \text{Phi2}, \text{Psi2}, X] = \text{wavefun}(\text{'wname'}, \text{ITER})$.

Продолжением вейвлетов с нечетными psi-функциями является серия вейвлетов bior3.Nd. Конечные вейвлеты этой серии приведены на рис. 4.3.3. Вейвлеты bior3.Nd при $Nd < 7$ отличаются существенной нерегулярностью (негладкостью) функций, как и начальный вейвлет серии bior2, приведенный на рис. 4.3.2.

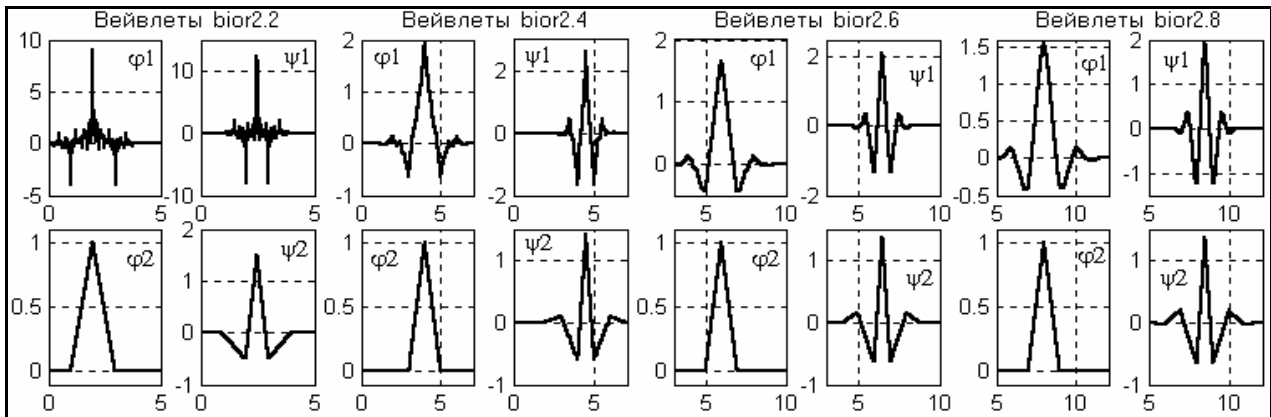


Рис. 4.3.2.

На рис. 4.3.2 показана серия phi- и psi-функций вейвлетов bior2.N. Эта серия отличается симметричностью обеих функций, но имеет недостаточно хорошую регулярность. Продолжением вейвлетов с симметричными базовыми функциями являются вейвлеты bior4.4 и bior5.5, показанные на рис. 4.3.3, а также bior6.8.

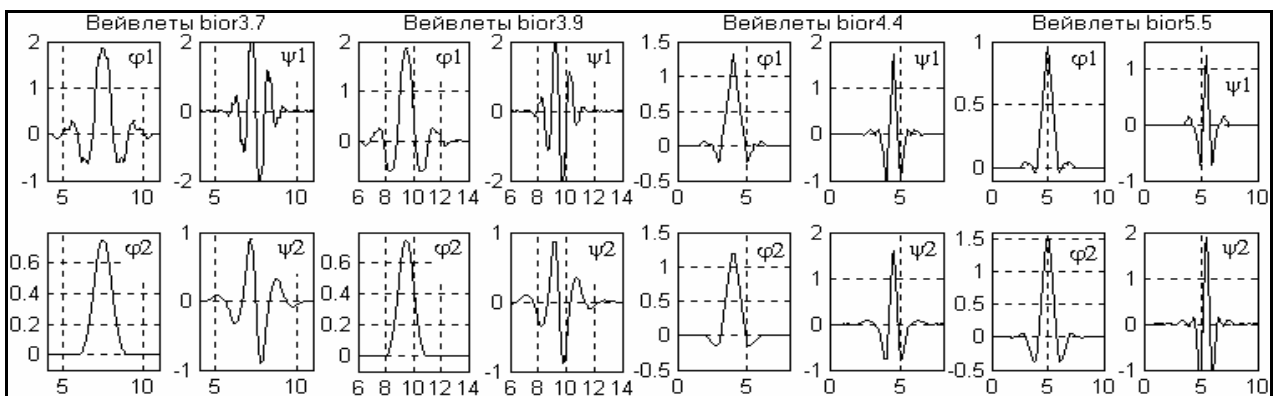


Рис. 4.3.3.

Парные вейвлеты имеют, соответственно, парные масштабирующие фильтры, которые вычисляются функциями

- $[\text{LMR}, \text{LMD}] = \text{biorwavf}(\text{'biorNr.Nd'})$,
- $[\text{LMR}, \text{LMD}] = \text{rbiowavf}(\text{'rbioNr.Nd'})$,

где LMR – фильтр реконструкции, LMD – функция декомпозиции. По этим двум масштабирующим фильтрам вычисляются фильтры разложения и восстановления сигналов

- $[LD,HD,LR,HR] = \mathbf{biorfilt}(LMD,LMR)$.

♣ Пример расчета фильтров биортогонального вейвлета (рис. 4.3.4).

```
[LMR,LMD] = biorwavf('bior3.3'); [LD,HD,LR,HR] = biorfilt(LMD,LMR);
subplot(221); stem(LD); grid; title('LD-фильтр bior3.3');
subplot(222); stem(HD); grid; title('HD-фильтр bior3.3');
subplot(223); stem(LR); grid; title('LR-фильтр bior3.3');
subplot(224); stem(HR); grid; title('HR-фильтр bior3.3');
```

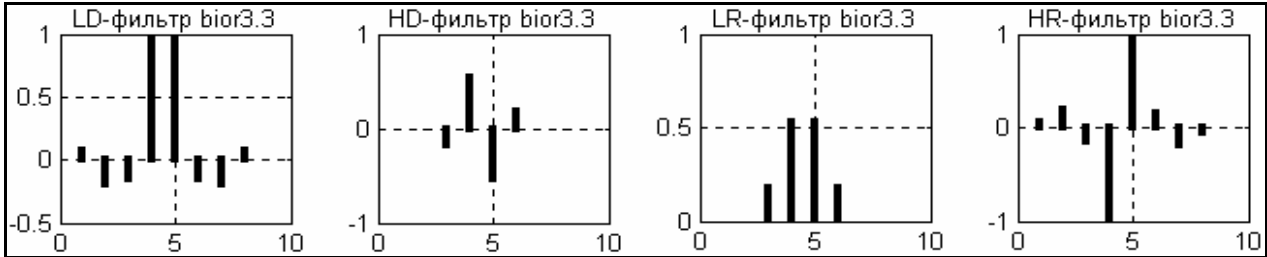


Рис. 4.2.4.

Эти же фильтры могут быть вычислены непосредственно по имени вейвлета следующей операцией:

- $[LD,HD,LR,HR] = \mathbf{wfilters}('wname')$.

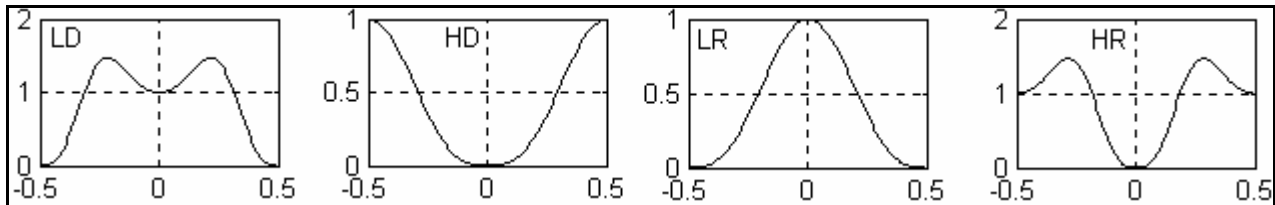


Рис. 4.3.5. Спектры фильтров биортогонального вейвлета bior3.3.

На рис. 4.3.5 приведены спектры этих фильтров в главном частотном диапазоне (от -0.5 до 0.5 Гц).

4.4. ГРУБЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /ЛЗ4/.

К так называемым грубым (crude) вейвлетам относятся симметричные вейвлеты Морлета (morl) и вейвлеты на основе производных функции Гаусса (gaus). Среди гауссовских вейвлетов распространено использование вейвлета по второй производной (mexh), получившего за свою форму образное название "mexihat" – мексиканская шляпа. У всех вейвлетов данной группы отсутствует ϕ -функция, ψ -функция не имеет компактного носителя и задается явно в аналитической форме, анализ не является ортогональным, возможность реконструкции сигналов не гарантируется. Применяются вейвлеты при выполнении непрерывной декомпозиции сигналов. Вычисляются в N точках регулярной сетки X для интервала [sb,ub] следующими функциями:

- $[\psi, X] = \mathbf{morlet}(sb,ub,N)$,
- $[\psi, X] = \mathbf{mexihat}(sb,ub,N)$,
- $[\psi, X] = \mathbf{gauswavf}(sb,ub,N,P)$,

где P – номер производной функции Гаусса.

Вейвлет Морлета вычисляется по формуле:

$$\psi(x) = \exp[-x^2/2] \cdot \cos(5x).$$

Формула вейвлета 'mexh':

$$\psi(x) = (1/\sqrt{3}) \pi^{-0.25} (1-x^2) \exp(-x^2/2).$$

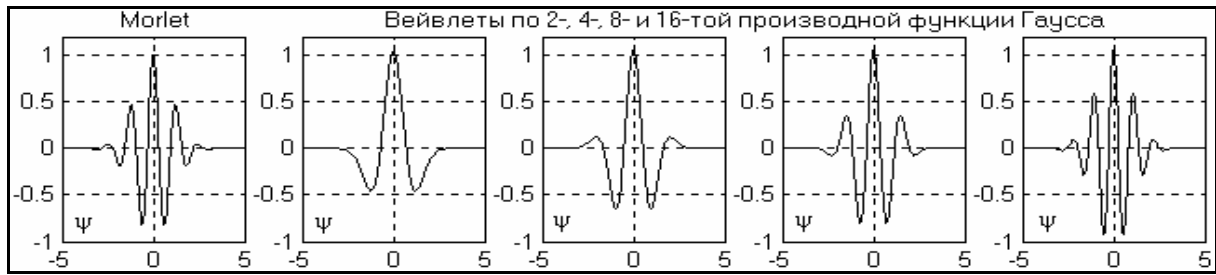


Рис. 4.4.1.

На рис. 4.4.1 приведены примеры формы вейвлетов. Средняя частота вейвлета 'mexh' – 0.25 Гц. Частота гауссовских вейвлетов повышается по мере роста номера производной, из которой он образован. Для функции 16-той производной средняя частота примерно равна частоте вейвлета 'morl', которая составляет 0.8125 Гц.

4.5. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ /ЛЗ4/.

К комплексным вейвлетам относятся семейства вейвлетов Гаусса (cgauN), Морлета (cmorFb-Fc), Шеннона (shanFb-Fc), и частотные B-сплайновые вейвлеты (fbspM-Fb-Fc). Phi-функции у них отсутствуют, psi-функции не имеют компактного носителя, анализ не ортогональный и свойства реконструкции сигналов не гарантируются. Используются для комплексной декомпозиции сигналов.

Комплексный вейвлет Гаусса соответствует P-той производной выражения

$$F(x) = C_p \exp(-jx) \exp(-x^2),$$

где значение C_p устанавливается по единичной норме вейвлета. Вейвлет вычисляется в N точках регулярной сетки на интервале [sb,ub] функцией

- [psi,X] = **cgauwavf**(sb,ub,N,P).

♣ Пример расчета комплексного вейвлета Гаусса (рис. 4.5.1)

```
[psi,x] = cgauwavf(-5,5,1000,5);
subplot(131); plot(x,abs(psi)); grid; title('Модуль cgau5');
subplot(132); plot(x,real(psi)); grid; title('Real cgau5');
subplot(133); plot(x,imag(psi));grid; title('Imag cgau5');
```

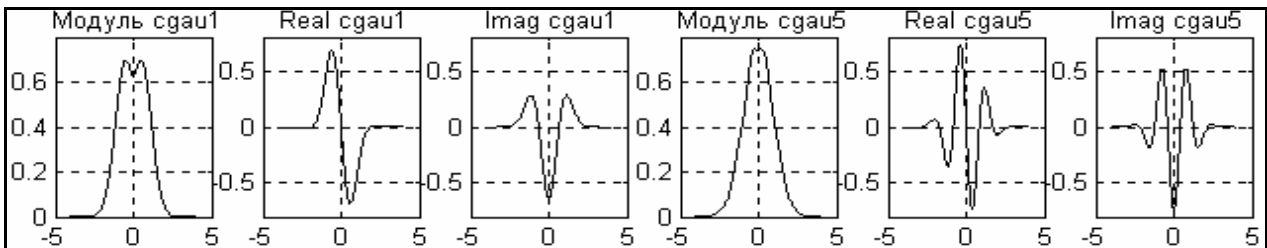


Рис. 4.5.1. Комплексные вейвлеты Гаусса.

Комплексный вейвлет Морлета определен выражением

$$\psi(x) = (1/\sqrt{\pi \cdot Fb}) \exp(2j\pi \cdot Fc \cdot x) \exp(-x^2/Fb),$$

где Fc – средняя частота вейвлета, Fb – ширина полосы частот. Вычисляется в N точках регулярной сетки на интервале [sb,ub] функцией

- [psi,X] = **cmorwavf**(sb,ub,N,Fb,Fc).

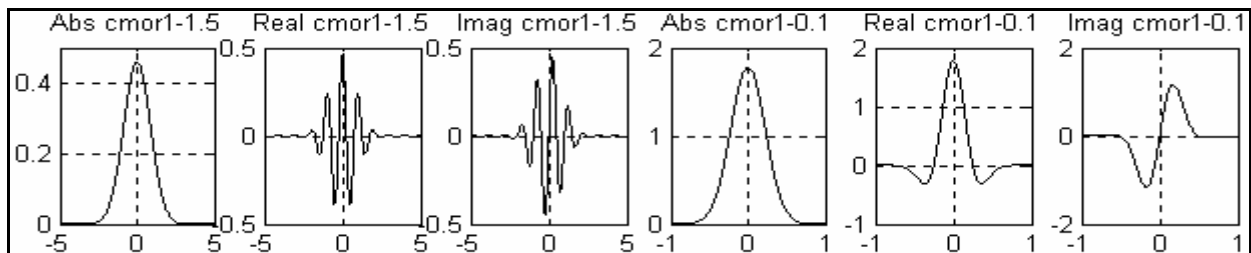


Рис. 4.5.2. Комплексные вейвлеты Морлета.

Комплексный B-сплайновый вейвлет определен выражением

$$\psi(x) = \sqrt{Fb} [\text{sinc}(Fb \cdot x/M)^M \exp(2j\pi \cdot Fc \cdot x)],$$

где F_c – средняя частота вейвлета, F_b – ширина полосы частот, $M=1,2,\dots$ – порядок вейвлета. Вычисляется в N точках регулярной сетки на интервале $[sb,ub]$ функцией

- $[psi,X] = \mathbf{fbspwvf}(sb,ub,N,M,F_b,F_c)$.

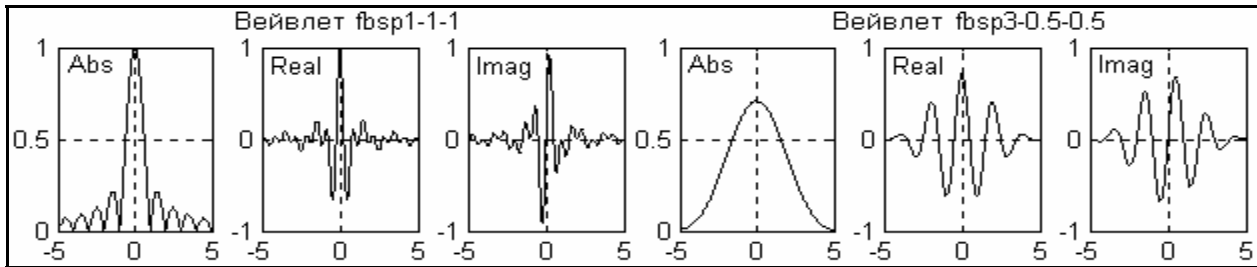


Рис. 4.5.3. В-сплайновые комплексные вейвлеты.

Примеры сплайновых вейвлетов приведены на рис. 4.5.3.

Комплексный вейвлет Шеннона определен выражением

$$\psi(x) = \sqrt{F_b} [\text{sinc}(F_b \cdot x) \exp(2j\pi \cdot F_c \cdot x)],$$

т.е. по существу повторяет В-сплайновый вейвлет при $M=1$. Вычисляется в N точках регулярной сетки на интервале $[sb,ub]$ функцией

- $[psi,X] = \mathbf{shanwvf}(sb,ub,N,F_b,F_c)$.

4.6. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА /ЛЗ4/.

При выполнении кратномасштабного анализа типовыми операциями являются двукратное уменьшение или увеличение размера вектора X значений сигнала. Вектор сигнала X рассматривается как частный случай матрицы X .

Двукратное уменьшение матрицы X (прореживание) выполняется функцией:

- $Y = \mathbf{dyaddown}(X,E)$

при этом матрица Y содержит четные элементы матрицы X при четном значении параметра E , и нечетные значения матрицы X при нечетном значении E , т.е.:

$$Y(k) = X(2k), \quad E - \text{четное},$$

$$Y(k) = X(2k+1), \quad E - \text{нечетное}.$$

Функция

- $Y = \mathbf{dyaddown}(X)$

аналогична функции $Y = \mathbf{dyaddown}(X,0)$, т.е. возвращает четные элементы X .

Функция

- $Y = \mathbf{dyaddown}(X,E,'тип')$, 'тип' = 'r', 'c' или 'm'

возвращает версию матрицы X , сжатую по строкам (rows), столбцам (cols) или по строкам и по столбцам (m) в зависимости от значения параметра 'тип'.

Двукратное увеличение матрицы X (дополнение нулями) выполняется обратной функцией:

- $Y = \mathbf{dyadup}(X,E)$

при этом вставляемые нулевые элементы в выходной матрице Y занимают либо четные номера при четном значении параметра E , либо нечетные при нечетном значении E , т.е.:

$$Y(2k) = 0, \quad Y(2k-1)=X(k), \quad E - \text{четное},$$

$$Y(2k) = X(k), \quad Y(2k-1)=0, \quad E - \text{нечетное}.$$

Функция

- $Y = \mathbf{dyadup}(X)$

аналогична функции $Y = \mathbf{dyadup}(X,1)$, т.е. вставляет нули на четные номера матрицы Y .

Функции

- $Y = \mathbf{dyadup}(X,E,'тип')$ или
- $Y = \mathbf{dyadup}(X,'тип',E)$, 'тип' = 'r', 'c' или 'm'

возвращает матрицу X , дополненную нулями по строкам (r), столбцам (c) или по строкам и по столбцам (m).

Интегрирование вейвлета в пределах $z(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy$ выполняется функцией

- $[Z,X] = \mathbf{intwave}('wname',[,P])$

для значений x в X на сетке в 2^P точек. Если не указывать параметр P , то по умолчанию он принимается равным 8. Для биортогональных вейвлетов применяется функция

• $[ZD,ZR,X] = \text{intwave}(\text{'wname'},P)$,

которая возвращает интегралы ZD и ZR для вейвлета декомпозиции и реконструкции соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

- л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.
- л36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. / Успехи физических наук, 2001, т.171, № 5, стр. 465-501.
- л37. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 132 с.

Тема 5: ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В MATLAB

При изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила.

Исаак Ньютон (1643-1727). Английский ученый, лорд, XVII-XVIII в.

В теории вейвлетов есть правило, которое поучительней самой теории - попробуй, посмотри, и делай выводы.

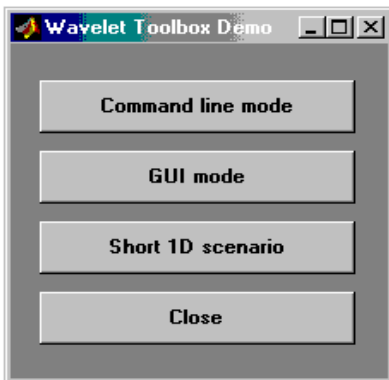
Евгений Прокопчук. Иркутский геофизик Уральской школы, казак, XX в.

Содержание: Введение. 5.1. Непрерывное одномерное вейвлет-преобразование. Основные функции. Интерфейс GUI. 5.2. Дискретное одномерное вейвлетное преобразование. Многоуровневое вейвлет-разложение. Обратное многоуровневое вейвлетное преобразование. Обратное одноуровневое восстановление сигнала. Функции коэффициентов аппроксимации. Задание граничных условий вейвлет-преобразования. Функции детализирующих коэффициентов вейвлетного преобразования. Вейвлет-преобразование одного уровня. Обратное вейвлет-преобразование одного уровня. Прямое восстановление сигнала из коэффициентов. Интерфейс GUI. 5.3. Дискретное двумерное вейвлет-преобразование. Функции вейвлет-преобразования. Интерфейс GUI. 5.4. Дискретное стационарное вейвлет-преобразование. Одномерное вейвлет-преобразование. Обратное одномерное вейвлет-преобразование. Интерфейс GUI. Двумерное стационарное вейвлет-преобразование. Обратное двумерное стационарное вейвлет-преобразование. Интерфейс GUI. Литература.

ВВЕДЕНИЕ

Пакет расширения Wavelet Toolbox системы Matlab позволяет использовать вейвлетный анализ и преобразование данных в самых различных областях науки и техники.

Программное обеспечение пакета позволяет выполнять вейвлет-преобразования как в командном режиме (и готовить специализированные программы), так и в диалоговом режиме по интерфейсу GUI (включение командой "wavemenu" или из окна редактора, Wavelet Toolbox → Main Menu).



Пакет имеет демонстрационные примеры вейвлетных преобразований, окно которых включаются командой 'wavedemo'. Первой кнопкой окна (Command line mode) включается довольно обширное меню примеров работы в командном режиме с одно- и двумерными вейвлетами всех типов в обычном и в пакетном исполнении (непрерывные и дискретные вейвлет-преобразования с декомпозицией и реконструкцией сигналов, сжатие сигналов, очистка от шумов и пр.). Слайды примеров сопровождаются соответствующими листингами программных фрагментов, которые можно переносить в буфер (при нажатии клавиш Shift + Delete) и затем использовать в командной строке Matlab.

Аналогично второй и третьей кнопками включается доступ к демонстрационным примерам в интерфейсе GUI.

При изучении настоящей темы рекомендуется самостоятельно просматривать соответствующие демонстрационные примеры по ходу изложения материала.

5.1. НЕПРЕРЫВНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ /ЛЗ4/.

Основные функции. Непрерывное одномерное вейвлет-преобразование (НВП-1D) уже само по себе, без реконструкции сигналов, используется для анализа формы сигналов и выявления их локальных особенностей. Преобразование выполняется функцией `cwt` в следующих форматах:

- $C = \text{cwt}(S, \text{SCALES}, 'wname')$ – возвращает коэффициенты 'с' прямого НВП вещественного или комплексного сигнала S вейвлетом 'wname' в шкале масштабирования SCALES . Стандартное задание $\text{SCALES} = \text{начало} : \text{шаг} : \text{конец}$ (по значениям коэффициента масштабирования "a").

- $C = \text{cwt}(S, \text{SCALES}, 'wname', 'plot')$ – то же, плюс строит график коэффициентов.

- $C = \text{cwt}(S, \text{SCALES}, 'wname', \text{plotmode})$ – то же, с заданием для построения графика коэффициентов следующих настроек цвета `plotmode`:

- 'lvl' – окраска шаг за шагом,
- 'glb' – окраска с учетом всех коэффициентов,
- 'abslvl' или 'lvlabs' – окраска шаг за шагом с использованием абсолютных значений коэффициентов,
- 'absglb' или 'glbabs' - окраска с масштабированием и с использованием абсолютных значений коэффициентов.

● $C = \text{cwt}(S, \text{SCALES}, \text{'wname'}, \text{plotmode}, \text{xlim})$ – то же, с дополнительной настройкой цвета $\text{xlim} = [\text{xmin}, \text{xmax}]$, где значениями в квадратных скобках устанавливаются номера точек векторов коэффициентов C (значения сдвига b_{\min} и b_{\max}), по интервалу которых определяются значения C_{\min} и C_{\max} интервала изменения цветовой окраски.

♣ Пример непрерывного вейвлет-преобразования синусоиды двумя типами вейвлетов и с двумя видами окраски результатов (рис. 5.1.1).

```
t=linspace(-3,3,2048); s=sin(t).^17; subplot(331); plot(t,s);
subplot(334); [psi,X] = mexihat(-4,4,100); plot(X,psi);
subplot(337); [p1,psi,p2,p3,X] = wavefun('bior1.5',8); plot(X,psi);
subplot(335); c1=cwt(s,1:32, 'mexh','lvl',[100 600]);
subplot(336); c2=cwt(s,1:32, 'bior1.5','lvl',[100 600]);
subplot(338); c1=cwt(s,1:32, 'mexh','abslvl',[100 400]);
subplot(339); c2=cwt(s,1:32, 'bior1.5','abslvl',[100 400]);
subplot(332); plot(t,c1(10,:)); subplot(333); plot(t,c2(10,:));
```

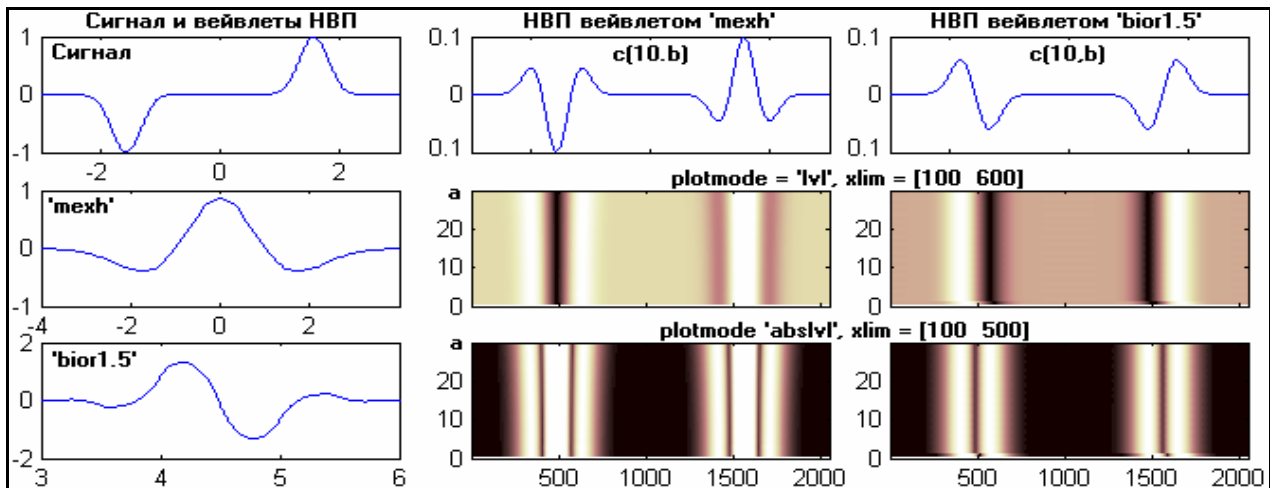


Рис.5.1.1.

Как видно на рисунке, симметричность или несимметричность (нечетность) функции вейвлета существенно влияет на форму вейвлет-спектра, равно как и тип закрашки, что позволяет целенаправленно выявлять особенности локальных сигналов, например – точки перегибов сигнальных функций, которые отмечаются вертикальными полосами с вейвлетом 'mexh' при $\text{plotmode}=\text{abslvl}$.

♣ Пример НВП гамма-каротажной кривой (рис. 5.1.2).

```
A=dlmread('c:\MATLAB6p1\work\Zag3f.prn',' ',120);
xn=1; xk=2000; xd=xk-xn; GK=A([xn:xk],5); da=1; dk=32;
subplot(311); plot(GK); grid; axis([0,xd,1,5]);
subplot(312); c1=cwt(GK,1:da:dk, 'mexh','abslvl',[100 400]);
subplot(313); c1=cwt(GK,1:da:dk, 'sym4','abslvl',[100 400]);
```

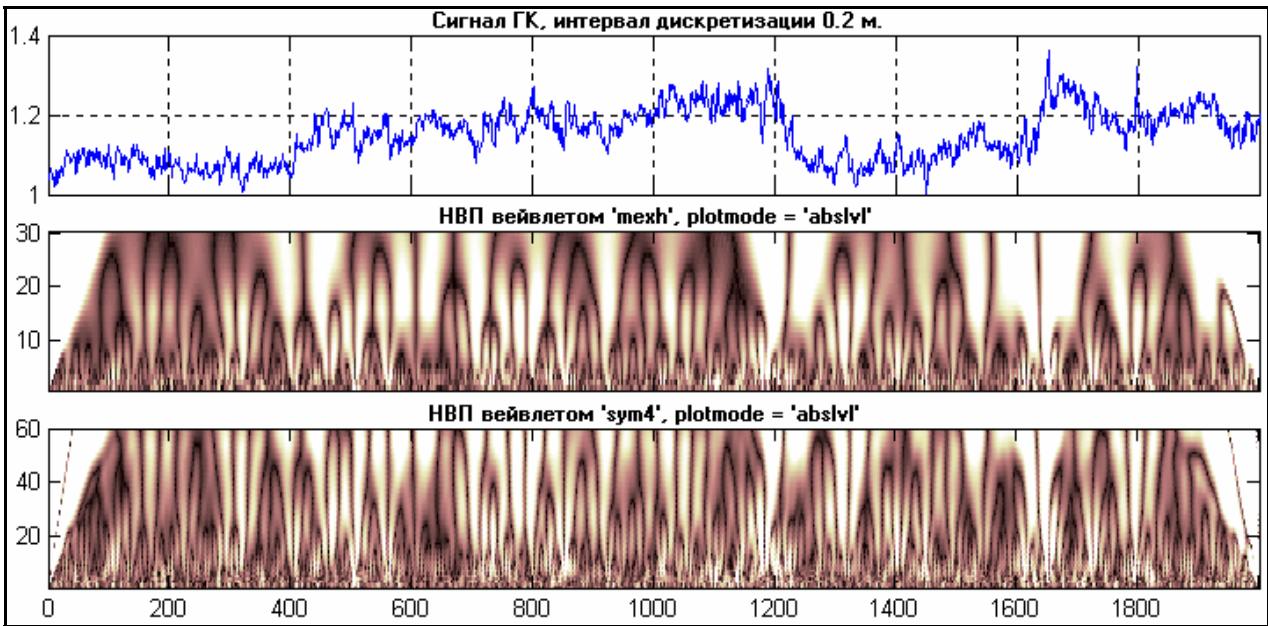


Рис.5.1.2.

На рис. 5.1.2 приведены вейвлет-спектры гамма-каротажной кривой. В силу природы ядерных излучений диаграммы ГК всегда сильно осложнены статистическими флуктуациями, на фоне которых достаточно трудно выделять границы пластов горных пород с разной гамма-активностью. На вейвлет-спектрах с `plotmode=abslvl` эти границы фиксируются по перегибам функций ГК вертикальными полосами минимумов (темные цветовые полосы), что позволяет по масштабным сечениям среднего и верхнего уровня детализировать сигнальную функцию на локальные блоки.

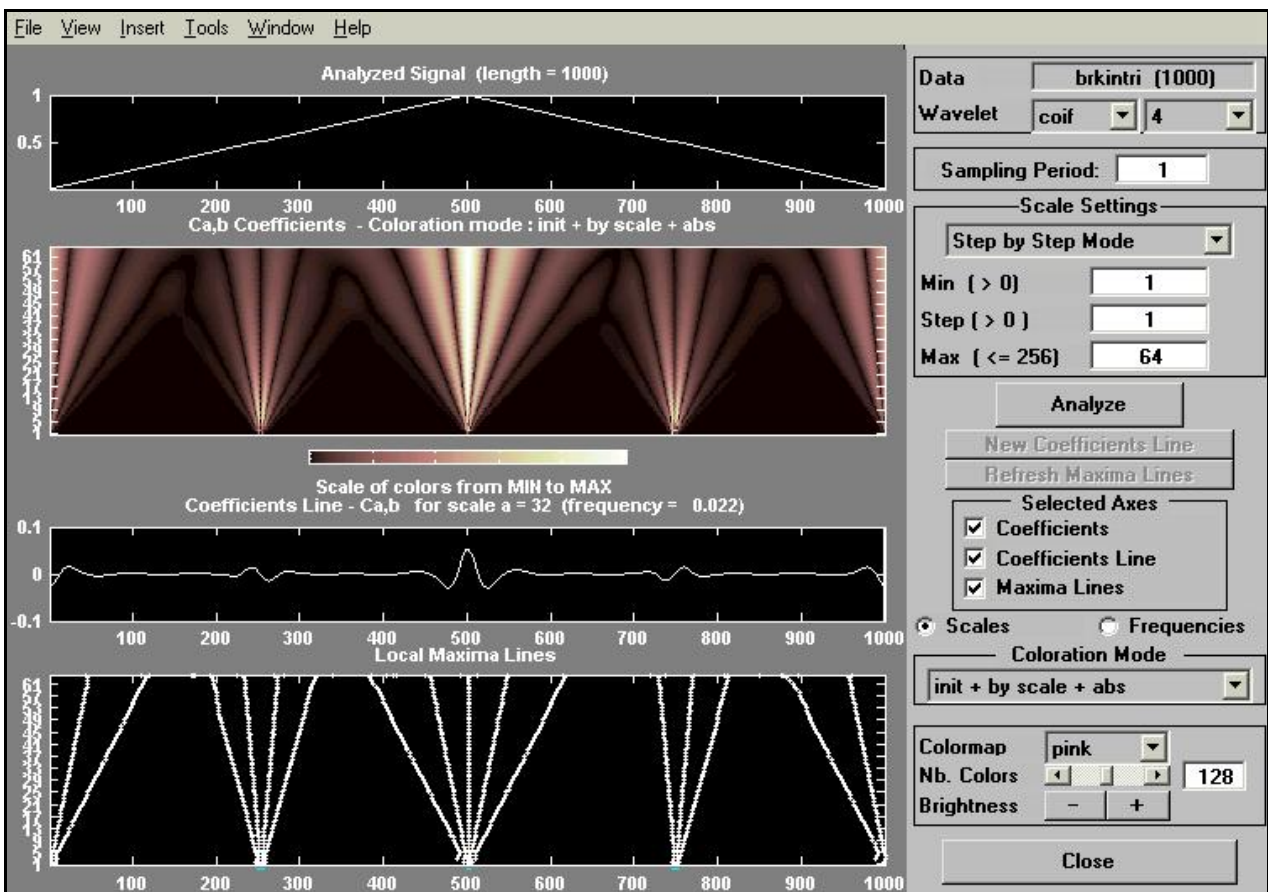


Рис. 5.1.3.

Интерфейс GUI удобен для анализа данных в диалоговом режиме. На рис. 5.1.3 приведено окно, которое включается из 'Wavelet Toolbox Main Menu' кнопкой 'Continuous

Wavelet 1-D'. Демонстрационные сигналы загружаются в окно из меню File → Example Analysis, устанавливается тип вейвлета, параметры анализа и нажимается кнопка 'Analyze', после чего в графической части окна появляется сигнал и результаты его разложения в трех представлениях (полное, сечение по среднему уровню разложения и линии локальных максимумов). Графическое представление можно изменять ниже расположенными кнопками и переключателями, а также используя типовые возможности оконного меню. Коэффициенты разложения можно записать на диск в виде mat-файла (File → Save Coefficients) и считать затем в рабочую область Matlab для детального изучения.

При выполнении непрерывного разложения комплексными вейвлетами в 'Wavelet Toolbox Main Menu' используется кнопка 'Complex Continuous Wavelet 1-D'.

При обработке данных, записанных в других (не .mat) форматах, следует сначала перевести данные в mat-формат, что можно выполнить из основного окна Matlab (Файл → Импорт данных), или из окна команд. При обработке одномерных сигналов второе предпочтительнее, так как одновременно дает возможность подготовить для GUI однострочные векторные массивы. Ниже приведен пример считывания каротажных геофизических данных из файла las-формата, предварительно переименованного в prn-формат для использования функции dlmread, и перевода столбцов 1 и 5 считанного массива (сетка глубин и диаграмма ГК) в строковые векторы с последующей записью в файлы mat-формата.

```
fprn='c:\MATLAB6p1\work\MainData\3ar3\Zag3f.prn';
fn=72; A=dlmread(fprn,' ',fn); rows=size(A,1); cols=size(A,2);
xn=1; xk=rows; Zag3f_9_2473=A(xn:xk,1:5);
DEPT=A(xn:xk,1); GK=A(xn:xk,5);
save 'c:\MATLAB6p1\work\MainData\3ar3\gk3f.mat' GK;
save 'c:\MATLAB6p1\work\MainData\3ar3\dept3f.mat' DEPT;
```

Запись файлов в mat-формате может выполняться и непосредственно из окна рабочей области (клик правой кнопкой мыши на выбранном для записи массиве → "сохранить выбранное как...").

5.2. ДИСКРЕТНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ /ЛЗ4/.

Главным достоинством дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) является возможность быстрого преобразования (БВП) с пирамидальным алгоритмом вычислений, что позволяет выполнять анализ больших выборок данных. Однако возможности БВП реализуются не для всех типов вейвлетов. Тем не менее, при обработке данных БВП используется весьма интенсивно и в пакете Wavelet Toolbox представлено большим количеством специальных функций.

Многоуровневое вейвлет-разложение сигналов (декомпозиция) выполняется функцией wavedec, которая используется в двух формах:

- $[C,L] = \text{wavedec}(S, N, \text{'wname'})$.
- $[C,L] = \text{wavedec}(S, N, LD, HD)$.

Функция возвращает векторы разложения сигнала S на уровне N с использованием вейвлета 'wname' или его низкочастотного (LD) и высокочастотного (HD) фильтров декомпозиции. N должно быть целым числом и определяет длину вектора L ($\text{length}(L)=N+2$). Значение N при K -точках сигнала должно быть не более $K/2 > 2^N \leq K$. Состав векторов C и L поясняет нижеследующий пример.

♣ Пример вычисления коэффициентов декомпозиции сигнала (рис. 5.2.1).

```
dwtmode('save','per');
load sumsin; S=sumsin(1:200); [C,L]=wavedec(S,3,'db4');
subplot(131); plot(S); grid; title('signal S');
subplot(132); plot(C); grid; title('signal C');
subplot(133); plot(L); grid; title('signal L');
```

Первой строкой в приведенном примере стоит включение метода задания граничных условий свертки. В данном случае включен метод 'per' - периодизации продолжения сигналов. Возможные методы задания граничных условий будут рассмотрены ниже.

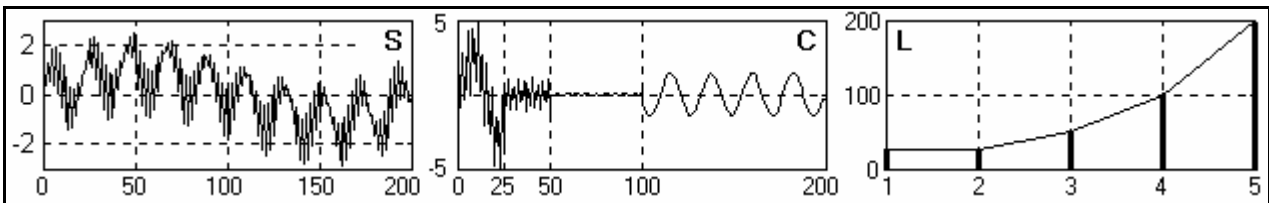


Рис.5.2.1.

Как можно видеть на рис. 5.2.1, при $N=3$ и $K=200$ точек сигнала, вектор C представляет собой массив значений аппроксимирующих коэффициентов декомпозиции уровня $N=3$ (отсчеты 1-25), и массивы детализирующих коэффициентов декомпозиции уровней $N=3$ (отсчеты 26-50), $(N-1)=2$ (отсчеты 51-100) и $(N-2)=1$ (отсчеты 101-200). Номера стыков коэффициентов фиксируются вектором L , в $L(N+2)$ – число отсчетов сигнала. По такому же принципу вычисляются коэффициенты любого уровня декомпозиции, до максимального значения N , при котором значение 2^N не превышает количества точек сигнала.

Обратное многоуровневое преобразование (реконструкция сигнала S по структуре $[C,L]$) выполняется функцией `waverec`:

- $S = \text{waverec}(C, L, \text{'wname'})$.
- $S = \text{waverec}(C, L, LD, HD)$.

♣ Пример декомпозиции и реконструкции сигнала (рис. 5.2.2).

```
load sumsin; S=sumsin(1:200); [C,L]=wavedec(S,6,'db4');
s=waverec(C,L,'db4'); err=norm(S-s)
subplot(131); plot(s); grid; title('signal s');
C(L(7)+1:L(8))=0; s1=waverec(C,L,'db4');
subplot(132); plot(s1); grid; title('signal s1');
C(L(3)+1:L(8))=0; s2=waverec(C,L,'db4');
subplot(133); plot(s2); grid; title('signal s2');
```

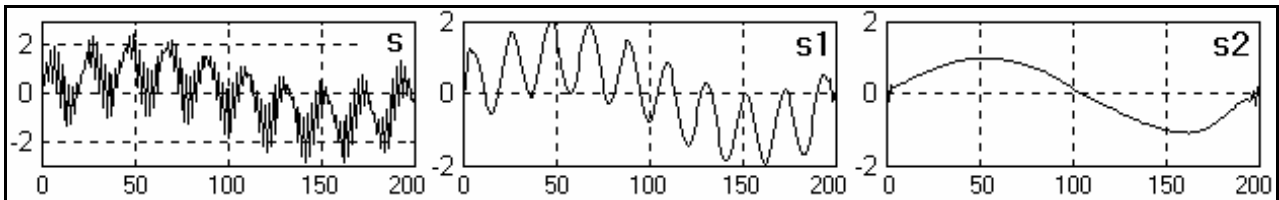


Рис.5.2.2.

На рис. 5.2.2 представлены три реконструкции сигнала: сигнал s полной реконструкции, сигнал $s1$ – реконструкции с обнулением детализирующих коэффициентов 1-го уровня, и сигнал $s2$ – с обнулением всех детализирующих коэффициентов. Вычисленная метрика полной реконструкции имеет порядок -12 степени, т.е. по существу представляет собой точность машинных вычислений.

Восстановление одиночной ветви коэффициентов из структуры $[C,L]$ может быть выполнено функцией `wrcoef`:

- $X = \text{wrcoef}(\text{'type'}, C, L, \text{'wname'}, N)$ – возвращает вектор восстановленных коэффициентов уровня N , приведенных к исходным координатам сигнала. Уровень N может быть любым, но не более уровня $N_{\max} = \text{length}(L)-2$ структуры $[C,L]$. Параметром `'type'` задается тип коэффициентов: `'a'` – аппроксимации, `'d'` – детализации.

- $X = \text{wrcoef}(\text{'type'}, C, L, LR, HR, N)$ – то же, с использованием фильтров реконструкции данного вейвлета.

Без указания параметра N восстановление производится с максимального уровня.

♣ Пример восстановления одиночной ветви коэффициентов аппроксимации с использованием двух типов вейвлетов (рис. 5.2.3).

```
load sumsin; S=sumsin; subplot(311); plot(S); grid; axis([0,1000,-3,3]);
[C1,L1]=wavedec(S,5,'haar'); [C2,L2]=wavedec(S,5,'db10');
subplot(323); plot(C1); grid; axis([0,1000,-6,6]);
```

```
subplot(324); plot(C2); grid; axis([0,1000,-6,6]);
a5h=wrcoef('a',C1,L1,'haar',5); a5d=wrcoef('a',C2,L2,'db10',5);
subplot(325); plot(a5h); grid; axis([0,1000,-1.1,1.1]);
subplot(326); plot(a5d); grid; axis([0,1000,-1.1,1.1]);
```

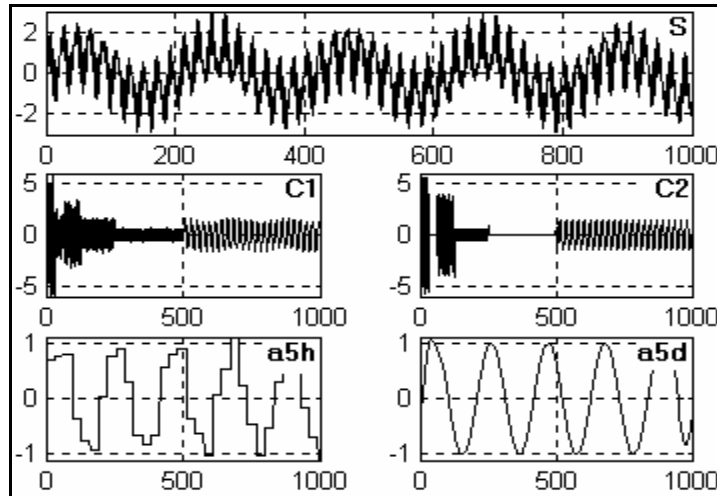


Рис. 5.2.3.

На рис. 5.2.3 достаточно ясно видно, что детализационные коэффициенты $C2$ отсутствуют на уровнях 2 и 5. Восстановление детализационных коэффициентов на уровнях 1, 3, 4 и сумма коэффициентов на уровнях 3 и 4 позволяют выделить высокочастотные составляющие сигнала, показанные на рис. 5.2.4.

♣ Пример восстановления одиночных ветвей коэффициентов детализации вейвлета 'db10' (продолжение предыдущего примера). Для наглядности результаты на рис. 5.2.4 приведены только в ограниченной части интервала восстановления.

```
d1=wrcoef('d',C2,L2,'db10',1); d3=wrcoef('d',C2,L2,'db10',3);
d4=wrcoef('d',C2,L2,'db10',4); a=d3+d4; subplot(141); plot(d1); grid;
subplot(142); plot(d3); grid; subplot(143); plot(d4); grid; subplot(144); plot(a); grid;
```

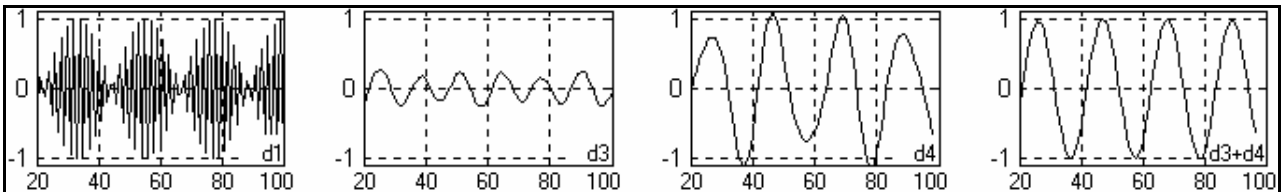


Рис. 5.2.4.

Обратное одноуровневое восстановление (уровня n с уровня $n+1$) выполняется функцией `upwlev` в форме:

- $[nC, nL, cA] = \text{upwlev}(C, L, \text{'wname'})$, где C, L – структура разложения сигнала на уровне $\text{length}(L)-2 = n+1$, cA – вектор аппроксимационных коэффициентов уровня $n+1$.
- $[nC, nL, cA] = \text{upwlev}(C, L, LR, HR)$ – то же, с использованием низкочастотного (LR) и высокочастотного (HR) фильтров реконструкции данного вейвлета.

♣ Пример декомпозиции и обратного одноуровневого восстановления (рис. 5.2.5).

```
load sumsin; S=sumsin(1:200); S=dwtmode('per','nodisp');
[C,L]=wavedec(S,4,'db4'); [nC,nL,cA] = upwlev(C, L, 'db4');
subplot(221); plot(S); grid; subplot(222); plot(C); grid;
subplot(223); plot(cA); grid; subplot(224); plot(nC); grid;
```

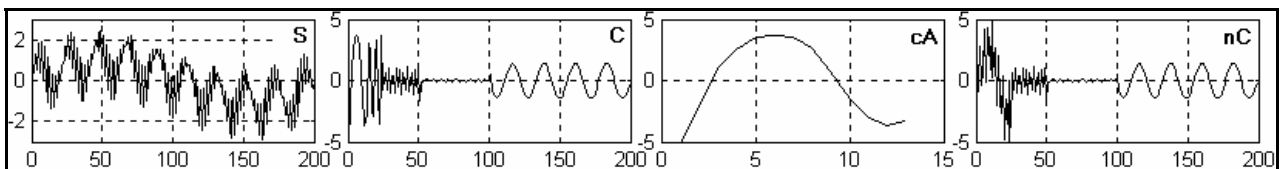


Рис.5.2.5.

Из структуры вейвлет-разложения [C,L] функциями `appcoef` и `detcoef` извлекаются соответственно коэффициенты аппроксимации и детализации.

Функции коэффициентов аппроксимации:

- $A = \text{appcoef}(C, L, 'wname', N)$ – возвращает коэффициенты аппроксимации сигнала вейвлетом 'wname' на уровне N без изменения масштаба их представления.

- $A = \text{appcoef}(C, L, 'wname')$ – возвращает коэффициенты аппроксимации сигнала на последнем уровне $N_{\max} = \text{length}(L)-2$.

Вместо имени вейвлета могут быть указаны непосредственно фильтры реконструкции, т.е.:

- $A = \text{appcoef}(C, L, LR, HR, N)$, где LR и HR – векторы низкочастотного и высокочастотного фильтров данного вейвлета.

♣ Пример выделения сигнала аппроксимации (рис. 5.2.6).

```
load sumsin; S=sumsin(1:800); [C,L]=wavedec(S,4,'sym8'); A=appcoef(C,L,'sym8',4);
subplot(131); plot(S); grid; subplot(132); plot(C); grid; subplot(133); plot(A); grid;
```

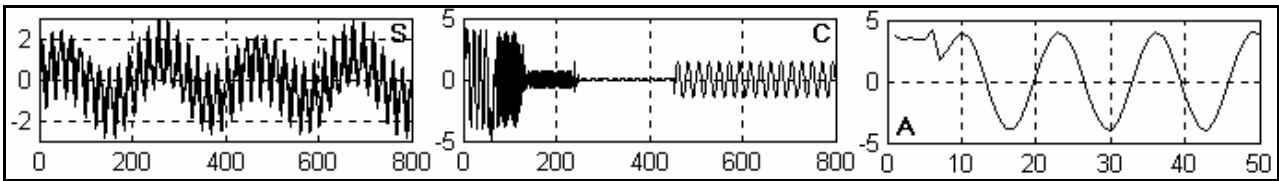


Рис.5.2.6.

На рис. 5.2.6 приведен пример применения функции `appcoef`. По существу, эта функция выполняет извлечение коэффициентов аппроксимации соответствующего уровня из комбинированного массива всех коэффициентов разложения сигнала. В данном примере на 4-ом уровне декомпозиции выделяется практически чистая низкочастотная составляющая сигнала (без учета начальной части искажения за счет граничных условий).

Задание граничных условий. Искажения в начальной части функций коэффициентов (см. рис. 5.2.6А) определяются граничными условиями, которые устанавливаются для данного входного сигнала (продление сигнала влево и вправо от границ задания для выполнения операции свертки) специальной функцией `dwtmode`:

- $S = \text{dwtmode}('mode', 'nodisp')$, где параметр моды (метода) может быть следующим:
 - 'sym' – симметричное дополнение (используется по умолчанию),
 - 'zpd' – дополнение нулями,
 - 'sp0' или 'sp1' – гладкое дополнение нулевого или первого порядка,
 - 'ppd' – периодическое дополнение,
 - 'per' – метод периодизации.

Параметр 'nodisp' не обязателен, при его отсутствии на дисплей выводится информация о смене типа моды для данного сигнала. Метод по умолчанию загружается из файла `dwtmode.def` (или, при его отсутствии, из `dwtmode.cfg`).

Изменение коэффициентов A, приведенных на рис. 5.2.6, в зависимости от начальных условий можно видеть на рис. 5.2.7.

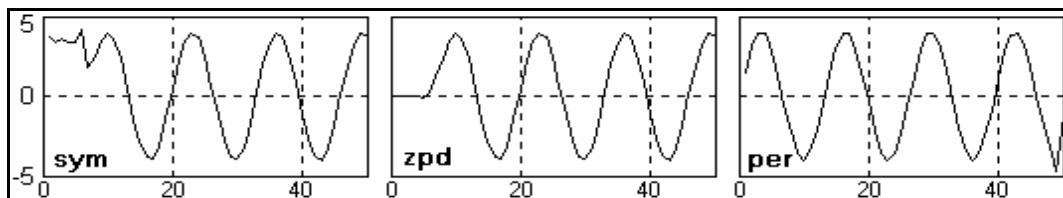


Рис.5.2.7.

Метод продления по умолчанию может изменяться командой:

- `dwtmode('save', 'mode')`.

Информация о текущем методе по умолчанию выводится на экран командой `>> dwtmode`, об установленном методе для данного сигнала S: `>> S=dwtmode`.

Функции детализирующих коэффициентов:

- $D = \text{detcoef}(C, L, N)$ – возвращает детализирующие коэффициенты на уровне N из

структуры разложения [C,L]. Значение N может быть любым в интервале $1 \leq N \leq \text{length}(L)-2$.

• $D = \text{detcoef}(C, L)$ – то же, на последнем уровне $N_{\max} = \text{length}(L)-2$.

♣ Пример выделения сигнала детализации 1-го уровня (рис. 5.2.8).

```
load sumsin; S=sumsin; [C,L]=wavedec(S,3,'db3'); D1=detcoef(C,L,1);
subplot(131); plot(S); grid; subplot(132); plot(C); grid; subplot(133); plot(D1); grid;
```

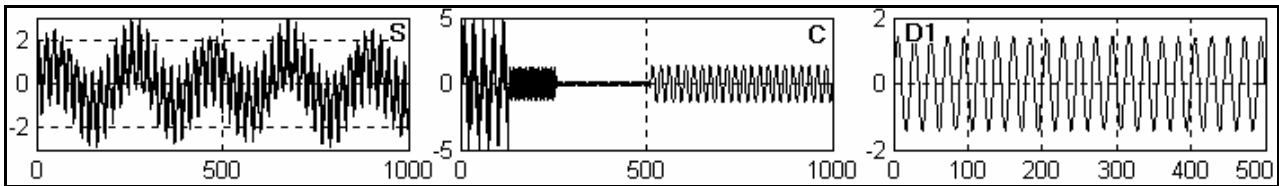


Рис.5.2.8.

Детализирующие коэффициенты могут быть записаны в массив отдельных массивов коэффициентов функциями:

• $DJ = \text{detcoef}(C, L, N, \text{'cells'})$, где N – вектор целых чисел из интервала $1 \leq N(j) \leq N_{\max}$, при этом DJ образует массив ячеек $DJ\{j\}$, каждая из которых содержит детализирующие коэффициенты соответствующего N-уровня. При $[1:N_{\max}]$ записываются коэффициенты всех уровней.

• $DJ = \text{detcoef}(C, L, [N_i, \dots, N_j])$ – то же, с непосредственным указанием вектора чисел N перечислением в $[N_i, \dots, N_j]$, или последовательным перечислением типа $[N_i:\text{шаг}:N_j]$.

• $DJ = \text{detcoef}(C, L, \text{'cells'})$ эквивалентна функции $\text{detcoef}(C, L, [1:N_{\max}])$.

• $[D1, D2, \dots] = \text{detcoef}(C, L, [N1, N2, \dots])$ – записывает детализирующие коэффициенты в отдельные массивы.

Вейвлет-преобразование одного уровня вейвлетом 'wname' вектора (сигнала) S выполняется функцией dwt:

• $[cA, cD] = \text{dwt}(S, \text{'wname'})$ – возвращает векторы коэффициентов аппроксимации cA и детализации cD.

• $[cA, cD] = \text{dwt}(S, LD, HD)$ – то же, с использованием низкочастотного LD и высокочастотного HD фильтров декомпозиции.

• $[cA, cD] = \text{dwt}(\dots, \text{'mode'}, \text{MODE})$ – то же, с заданием метода расширения.

Длина векторов cA и cD при методе расширения 'reg' равна половине входного вектора S, при других методах расширения равна половине суммы векторов входного сигнала и фильтра декомпозиции.

Обратное преобразование одного уровня вейвлетом 'wname' (или фильтрами реконструкции) выполняется функцией idwt:

• $S = \text{idwt}(cA, cD, \text{'wname'})$.

• $S = \text{idwt}(cA, cD, LR, HR)$.

• $S = \text{idwt}(\dots, L)$ – возвращает центральный блок вектора S, независимый от условий расширения.

• $S = \text{idwt}(\dots, \text{'mode'}, \text{MODE})$ – возвращает вектор S с заданием метода расширения.

• $S_a = \text{idwt}(cA, [], \dots)$ – возвращает аппроксимированный вектор S.

• $S_d = \text{idwt}([], cD, \dots)$ – возвращает функцию детализации вектора S.

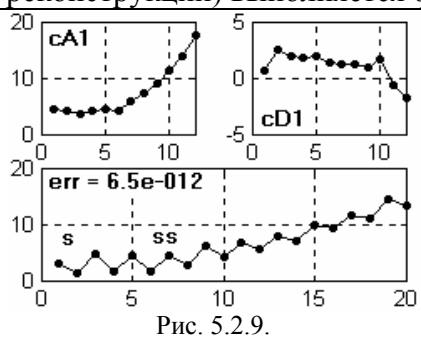


Рис. 5.2.9.

♣ Пример декомпозиции и реконструкции сигнала на 1-м уровне (рис. 5.2.9).

```
randn('seed',123456789) % Set randn
s=2+kron(ones(1,10),[1,-1])+((1:20).^2)/32+0.5*randn(1,20);
[cA1,cD1]=dwt(s,'db4');
subplot(221); plot(cA1); grid;
subplot(222); plot(cD1); grid;
ss=idwt(cA1,cD1,'db4');
err=norm(s-ss); t=kron(1:20,1);
```

```
subplot(212); plot(t,s,t,ss); grid; xlabel(['err=',num2str(err)])
```

Прямое восстановление сигнала из коэффициентов уровня N задается функцией `upcoef` в следующем формате:

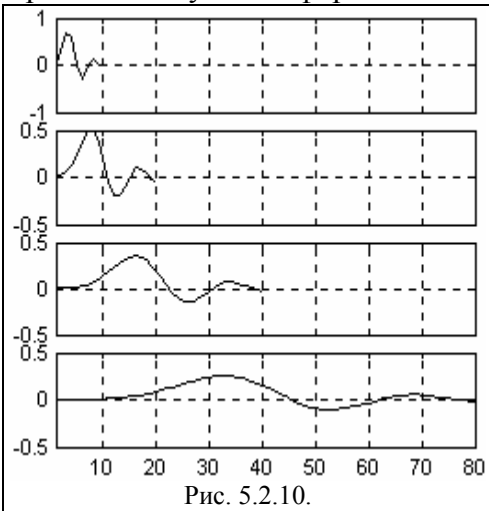


Рис. 5.2.10.

- $Y = \text{upcoef}(O, X, \text{'wname'}, N)$, где $O = \text{'a'}$ для коэффициентов аппроксимации, или 'd' для детализационных коэффициентов. Вместо имени вейвлета можно задавать фильтры реконструкции LR и HR. Если значение N не указывать, то восстанавливаются коэффициенты первого уровня.

- $Y = \text{upcoef}(O, X, \text{'wname'}, N, L)$ – то же, с выделением центрального блока результата размером L .

♣ Пример восстановления сигнала из аппроксимационных коэффициентов разложения импульса Кронекера с разных уровней в одном масштабе (рис. 5.2.10).

```
S=1; N=4; es=10;
```

```
for i=1:N
```

```
reg=upcoef('a', S, 'db8',i);
```

```
ax=subplot(N,1,i); h=plot(reg(1:es)); grid;
```

```
set(ax, 'xlim', [1 80]); es=es*2;
```

```
end
```

Интерфейс GUI при дискретном преобразовании используется аналогично непрерывному преобразованию.

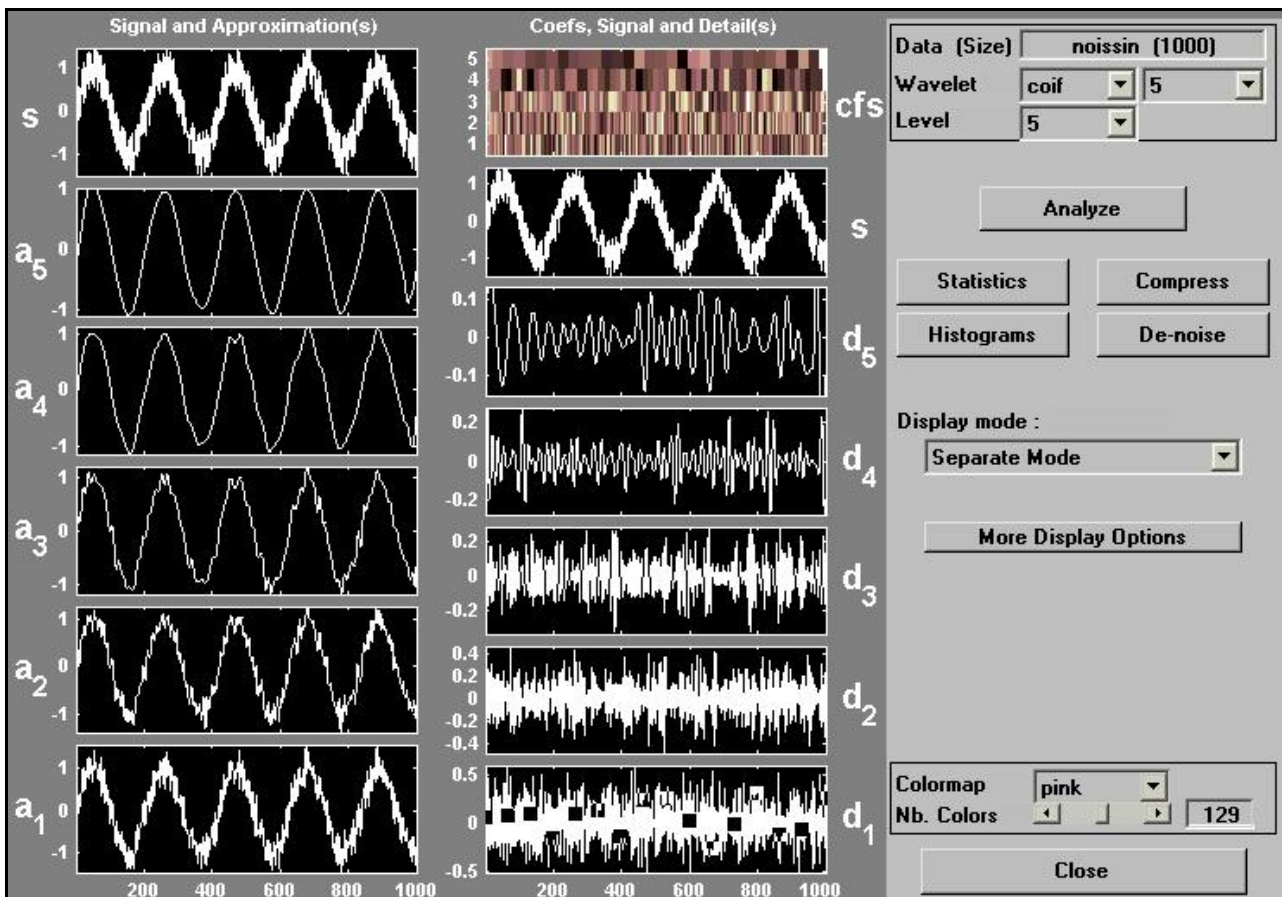


Рис. 5.2.11.

Окно преобразования включается из 'Wavelet Toolbox Main Menu' кнопкой "Wavelet 1-D" и имеет несколько большие функциональные возможности. Пример окна приведен на рис. 5.2.11 в режиме графического вывода всех коэффициентов разложения (Separate Mode). Переключателем "Display mode" режимы вывода можно изменять, детали вывода можно

устанавливать в отдельном подокне (кнопка "More Display Options").

Под кнопкой "Analyze" окно имеет 4 кнопки включения окон выполнения специальных операций над результатами разложения сигнала.

Окна "Statistics" и "Histograms" предназначены для анализа и графического вывода статистических характеристик сигнала и всех коэффициентов его разложения. В окнах "Compress" и "De-noise" устанавливаются режимы компрессии (сжатия) сигналов и очистки сигналов от шумов, и выполняются эти операции. Их применение будет рассмотрено в дальнейшем.

Коэффициенты декомпозиции в структуре разложения [C,L], а также синтезированный сигнал могут быть записаны на диск в mat-файлы через меню окна File. Точно так же в окно может загружаться как сигнал, так и коэффициенты его разложения.

5.3. ДИСКРЕТНОЕ ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

Функции двумерного вейвлет-преобразования по своему назначению аналогичны описанным выше функциям одномерного преобразования и идентифицируются цифрой 2 в конце одноименных функций одномерного преобразования, т.е.: `wavedec2`, `wavereg2`, `wrcoef2`, `upwlev2`, `appcoef2`, `detcoef2`, `upcoef2`, `dwt2`, `idwt2`.

♣ Пример декомпозиции и аппроксимационной реконструкции двумерного сигнала (рис. 5.3.1).

```

randn('seed',12345);
S(1:100,1:100)=0; S(60:70,60:70)=10;
S=S+5*randn(100,100);
[C,L]=wavedec2(S,4,'db2');
a3=wrcoef2('a',C,L,'db2',3);
a4=wrcoef2('a',C,L,'db2',4);
figure(1); subplot(132); contour(a3); subplot(131); contour(S); subplot(133); contour(a4);
figure(2); subplot(131); mesh(S); subplot(132); mesh(a3); subplot(133); mesh(a4);

```

На рис. 5.3.1 приведен пример обработки двумерного сигнала, информационная часть которого соизмерима с мощностью шумов. Результаты обработки приведены в виде контурных карт и карт поверхностей. При двумерной обработке входной сигнал S представляет собой двумерную матрицу, структура разложения [C,L] состоит из вектора коэффициентов аппроксимации и детализации C и матрицы структуры записи коэффициентов L. Вектор C состоит из последовательностей коэффициентов аппроксимации и детализации горизонтальных, вертикальных и диагональных строк разложения сигнала.

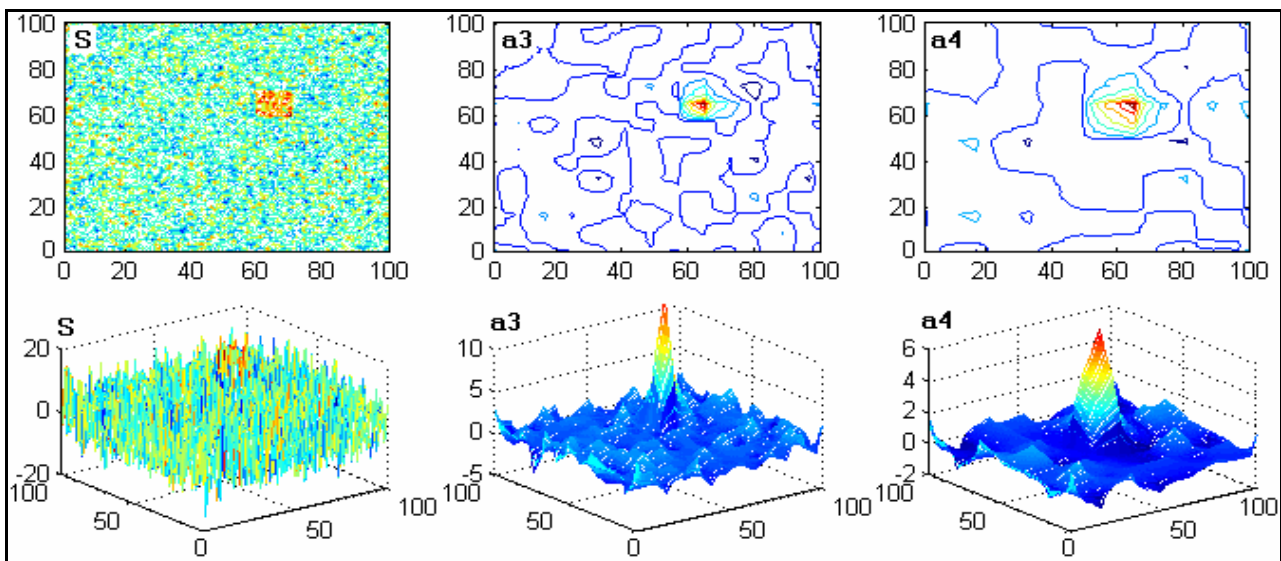


Рис. 5.3.1.

Аналогичным образом работают и другие функции двумерного преобразования.

Интерфейс GUI двумерного преобразования из "Wavelet Toolbox Main Menu" включается кнопкой "Wavelet 2-D". Окно преобразования показано на рис. 5.2.2 и по использованию во многом подобно окну одномерного преобразования.

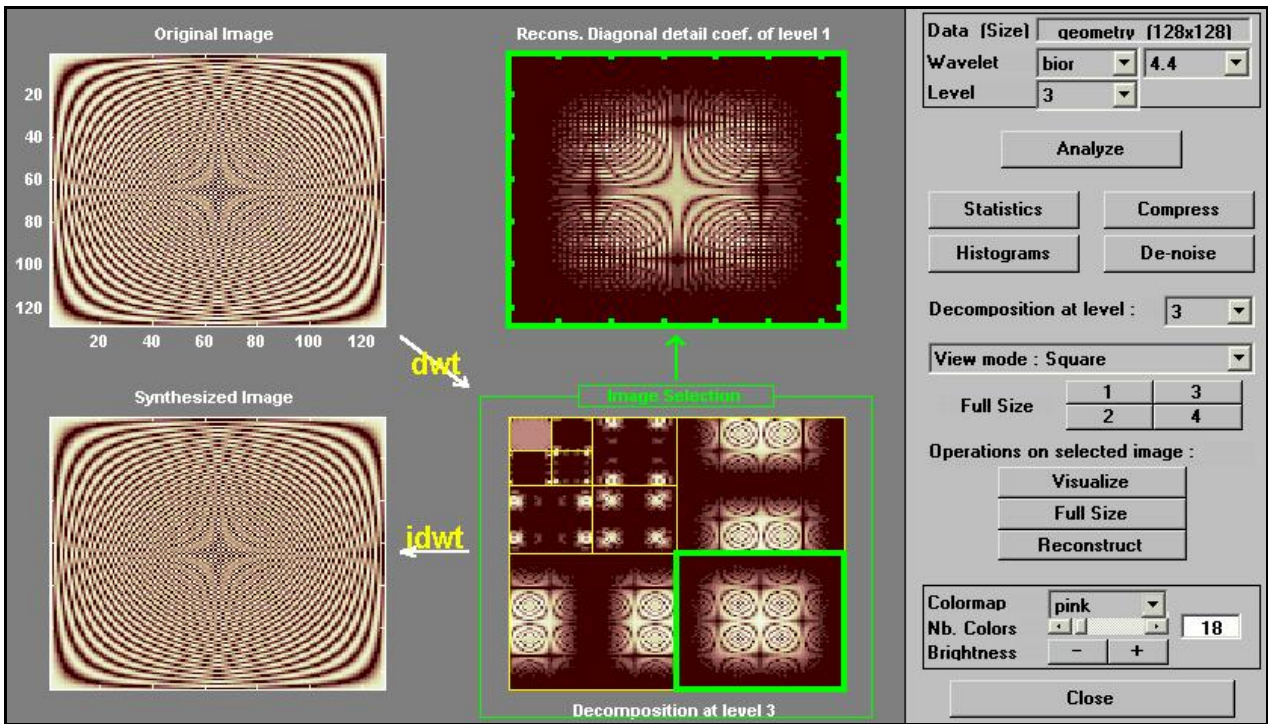


Рис. 5.3.2.

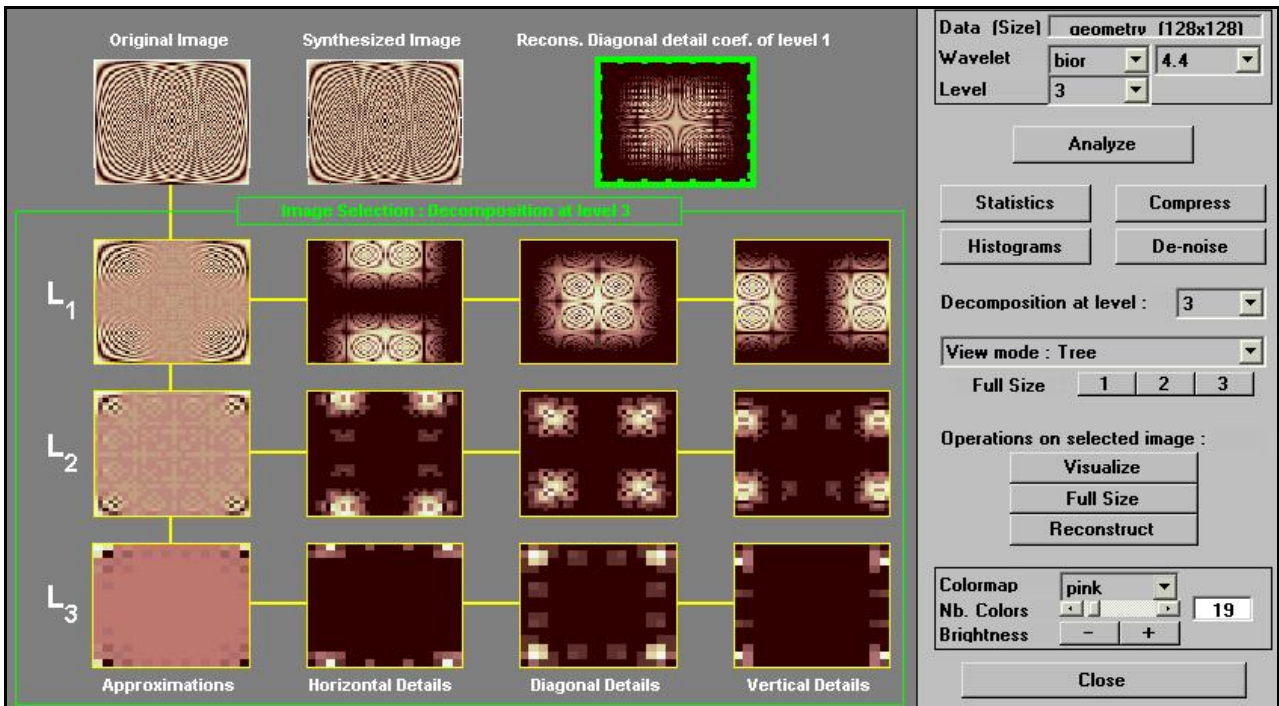


Рис. 5.3.3.

Построение картины разложения двумерного сигнала (правый нижний график) в режиме "View mode: Square" следующее. Диагональные коэффициенты детализации первого уровня разложения находятся в правом нижнем углу графика, горизонтальные коэффициенты над ним в правом верхнем углу, вертикальные – слева, в левом нижнем углу. Левая верхняя четверть графика – коэффициенты последующих уровней, в данном случае второго и третьего, которые располагаются по аналогичному принципу. Левый верхний квадрат графика - коэффициенты аппроксимации последнего уровня разложения. В правом верхнем графике окна можно наблюдать отмеченные коэффициенты разложения (включая кнопки Operations on selected image) в исходном масштабе входного сигнала (Visualize), в увеличенной форме (Full Size), и в режиме реконструкции. Кнопками 1,2,3 и 4 Full Size можно включать на просмотр в увеличенном масштабе любой из четырех графиков окна.

Вид графической части окна в режиме View mode: Tree приведен на рис. 5.3.3 и комментарии не требуют.

5.4. ДИСКРЕТНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ /34/.

Дискретное преобразование dwt исходит из предпосылки нестационарности сигнала. В дискретном стационарном вейвлет-преобразовании (SWT – Stationary Wavelet Transform) сигнал рассматривается как стационарный. Использование данного преобразования предпочтительно при сжатии сигналов и очистке от шумов.

Одномерное вейвлет-преобразование выполняют функции:

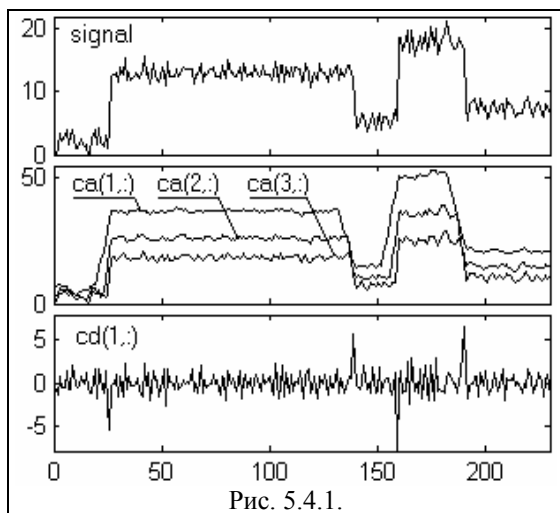


Рис. 5.4.1.

- $S = \text{swt}(X, N, \text{'wname'})$ – возвращает разложение сигнала X до уровня N вейвлетом 'wname'. N – только положительное число, размер X должен быть кратным 2^N . Выходная матрица S состоит из векторов – строк и содержит детализирующие коэффициенты $S(n,:)$ уровней n строк $1 \leq n \leq N$, и аппроксимирующие коэффициенты уровня N в строке $S(N+1,:)$. Временной (координатный) масштаб коэффициентов соответствует масштабу входного сигнала, что очень удобно для анализа.

- $S = \text{swt}(X, N, LD, HD)$ – то же, с использованием низкочастотного LD и высокочастотного HD фильтров.

- $[cA, cD] = \text{swt}(\dots)$ – возвращаются

матрицы коэффициентов аппроксимации cA и детализации cD для всех n -уровней. Коэффициенты уровней располагаются построчно с нумерацией от 1 до N .

♣ Пример декомпозиции сигнала (рис. 5.4.1).

```
load noisbloc; s=noisbloc(640:879);
subplot(311); plot(s); axis([0,230,0,22]);
sc=swt(s,3,'db1'); [ca,cd]=swt(s,3,'db1');
subplot(312); plot(ca'); axis([0,230,0,55]);
subplot(313); plot(cd(1,:)); axis([0,230,-8,8]);
```

Обратное одномерное вейвлет-преобразование матриц S и $[cA, cD]$ реализуется практически с абсолютной точностью следующими функциями:

- $X = \text{iswt}(S, \text{'wname'})$,
- $X = \text{iswt}(cA, cD, \text{'wname'})$,
- $X = \text{iswt}(cA(\text{end},:), cD, \text{'wname'})$,
- $X = \text{iswt}(S, LR, HR)$,
- $X = \text{iswt}(cA, cD, LR, HR)$,
- $X = \text{iswt}(cA(\text{end},:), cD, LR, HR)$.

♣ Пример проверки точности восстановления сигнала.

```
load noisbloc; s=noisbloc; sc=swt(s,3,'db1'); [ca,cd]=swt(s,3,'db1');
s1=iswt(sc,'db1'); s2=iswt(ca, cd, 'db1'); err1=norm(s-s1); err2=norm(s-s2);
err1m=max(max(abs(s-s1))); err2m=max(max(abs(s-s2)));
Вычисления данного примера дают:
err1 = err2 = 9.6566e-014, err1m = err2m = 1.0658e-014.
```

Двумерное стационарное вейвлет-преобразование сигнала X до уровня N выполняется функциями:

- $S = \text{swt2}(X, N, \text{'wname'})$, • $[A,H,V,D] = \text{swt2}(X, N, \text{'wname'})$.
- $S = \text{swt2}(X, N, LD, HD)$, • $[A,H,V,D] = \text{swt2}(X, N, LD, HD)$.

В этих функциях N – только положительное число, размеры X по обеим осям ($\text{size}(X,1)$ и $\text{size}(X,2)$) должны быть кратными 2^N . Выходная матрица S – массивы $[A,H,V,D]$ содержат коэффициенты аппроксимации на уровне n в матрице $A(:, :, n)$, и детализационные коэффициенты на уровне n в матрицах $H(:, :, n)$ – горизонтальные, $V(:, :, n)$ – вертикальные, и

$D(:,:,n)$ – диагональные.

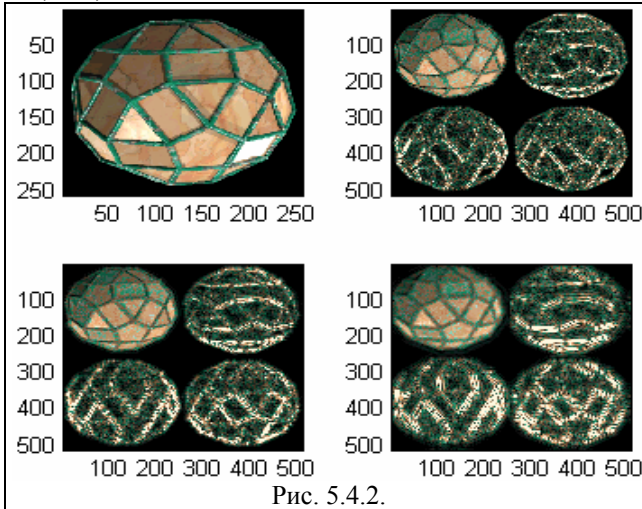


Рис. 5.4.2.

```

❖ Пример двумерного разложения сигнала.
load facets; m=256; N=3;
codX=wcodemat(X,m);
subplot(221); image(codX);
[ca,chd,cvd,cdd]=swt2(X,N,'sym4');
for k=1:N
    coda=wcodemat(ca(:,:,k),m);
    codhd=wcodemat(chd(:,:,k),4*m);
    codvd=wcodemat(cvd(:,:,k),4*m);
    coddd=wcodemat(cdd(:,:,k),4*m);
    decl=[coda,codhd;codvd,coddd];
    subplot(2,2,k+1); image(decl);
    colormap(map);
end

```

Утилита `wcodemat` в приведенном

примере возвращает закодированные версии входных матриц в градациях значений между максимальным и минимальным значением. Числом градаций может устанавливаться световая контрастность графических отображений матриц. Полный формат утилиты

• $Y = \text{wcodemat}(X, M, \text{OPT}, \text{ABS})$, где M – число первых чисел (градаций) кодирования, ABS – тип кодирования ($\text{ABS}=0$ – с учетом знаков, $\text{ABS}>0$ – по абсолютным значениям), OPT – строковый параметр = 'row' или 'r' кодирования по строкам, = 'col' или 'c' кодирования по столбцам, 'mat' или 'm' глобального кодирования.

• $Y = \text{wcodemat}(X, M, \text{OPT})$ эквивалентна $Y = \text{wcodemat}(X, M, \text{OPT}, 1)$,

• $Y = \text{wcodemat}(X, M)$ эквивалентна $Y = \text{wcodemat}(X, M, \text{'mat'}, 1)$,

• $Y = \text{wcodemat}(X)$ эквивалентна $Y = \text{wcodemat}(X, 16, \text{'mat'}, 1)$.

Обратное двумерное стационарное вейвлет-преобразование сигнала X по матрицам, вычисленным утилитой `swt2`, выполняется функциями:

• $X = \text{iswt2}(S, \text{'wname'})$, • $X = \text{iswt2}(A, H, V, D, \dots)$, • $X = \text{iswt2}(A(:,:,\text{end}), H, V, D, \dots)$.

• $X = \text{iswt2}(S, LR, HR)$, • $X = \text{iswt2}(A, H, V, D, LR, HR)$, • $X = \text{iswt2}(A(:,:,\text{end}), H, V, D, LR, HR)$.

Сигнал, как и при одномерном восстановлении, также реконструируется с очень высокой точностью, что рекомендуется проверить самостоятельно.

Интерфейс GUI не имеет специального окна `SWT`. Но с использованием `SWT` выполняется сжатие сигналов и очистка от шумов в окне "SWT De-noising 1-D" "Wavelet Toolbox Main Menu", а, соответственно, в этом окне при необходимости можно просматривать и вейвлет-разложение сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.

Тема 6: ПАКЕТНЫЕ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Река кажется огромной тому, кто не видел другой, более широкой.

Лукреций. О природе вещей.
Римский философ, материалист, I в.д.н.э.

Для "топоров" и ручеек широк. Лучше один раз научиться плавать, чем на каждой речушке искать брод.

Георгий Коргуль. О природе действий.
Уральский геофизик, бизнесмен, XX в.

Содержание: Введение. 6.1. Packetное разложение сигналов. Одномерное вейвлет-разложение. Двумерное вейвлет-разложение. График дерева пакета. Значение энтропии сигнала. Цветовая спектрограмма. Просмотр дерева разложения. Оптимизация построения дерева. Модификация энтропии дерева. Packetная вейвлет-функция. Packetные вейвлет-коэффициенты. 6.2. Преобразования пакетов и реконструкция сигналов. Отсечка packetного дерева. Отсечка узлов дерева. Выделение локальных сигналов. Полная реконструкция сигнала. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

В обычном алгоритме Маллата быстрого вейвлет – преобразования (БВП) при переходе с масштабного уровня m на уровень $m+1$ функция аппроксимирующих коэффициентов $c_{m,k}$ разделяется на низкочастотную ($c_{m+1,k}$) и высокочастотную ($d_{m+1,k}$) части спектрального диапазона, и при дальнейшем увеличении масштабных уровней аналогичному разложению последовательно подвергаются только низкочастотные функции (аппроксимирующие). В packetном алгоритме БВП операция последовательного частотного расщепления применяется как для низкочастотных, так и для высокочастотных (детализирующих) коэффициентов. В результате возникает дерево расщепления, пример которого (в предельной форме расщепления на всех уровнях) показан на рис. 6.0.1.

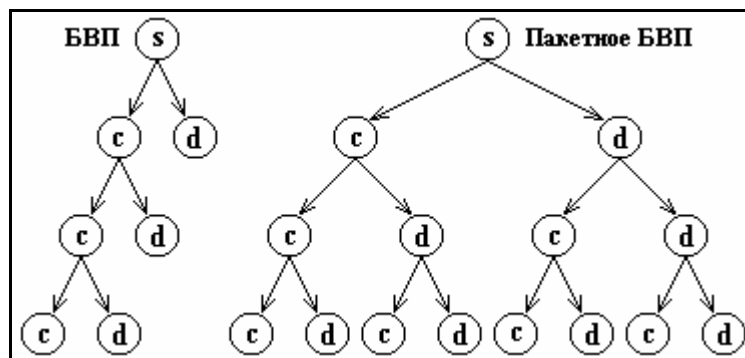


Рис. 6.0.1.

При таком расщеплении вейвлеты каждого последующего уровня образуются из вейвлета предыдущего уровня разделением на два новых вейвлета:

$$\psi_1(t) = \sum_n h_n \psi(t-n), \quad \psi_2(t) = \sum_n g_n \psi(t-n).$$

Новые вейвлеты также локализованы в пространстве, но на вдвое более широком интервале. Полный набор вейвлетных функций разложения называют вейвлет-пакетом.

Packetное вейвлет-преобразование является адаптивным, и широко используется для компрессии сигналов и их очистки от шумов. Оно позволяет более точно приспособливаться к особенностям сигналов путем выбора соответствующей оптимальной формы дерева разложения, которая обеспечивает минимальное количество вейвлет-коэффициентов при заданной точности реконструкции сигнала, и, тем самым, целенаправленно исключает из обратного БВП незначимые, информационно избыточные или ненужные детали сигналов. Мерой оптимальности обычно служит концентрация числа вейвлет-коэффициентов для реконструкции сигнала с заданной точностью (погрешностью). Оценка информативности набора коэффициентов выполняется по энтропии, под которой обычно понимается величина:

$$E = \exp(-\sum_n p_n \cdot \log(p_n)), \quad p_n = |x_n|^2 / \|x\|^2.$$

Любое усреднение коэффициентов увеличивает энтропию. При анализе дерева вычисляется энтропия узлов и его разделенных частей c и d . Если при разделении узла энтропия не уменьшается, то дальнейшее ветвление с этого узла не имеет смысла.

Нижеследующее описание вейвлет-преобразований базируется на пакете расширения Wavelet Toolbox в системе Matlab. Для просмотра формы пакетных вейвлетов и получения о них более подробной информации аналогично обычным вейвлетам можно использовать интерфейс GUI (команда 'wavemenu', кнопка 'Wavelet Packet Display' окна 'Wavelet Toolbox Main Menu'), пример окна просмотра вейвлетов приведен на рис. 6.0.2.

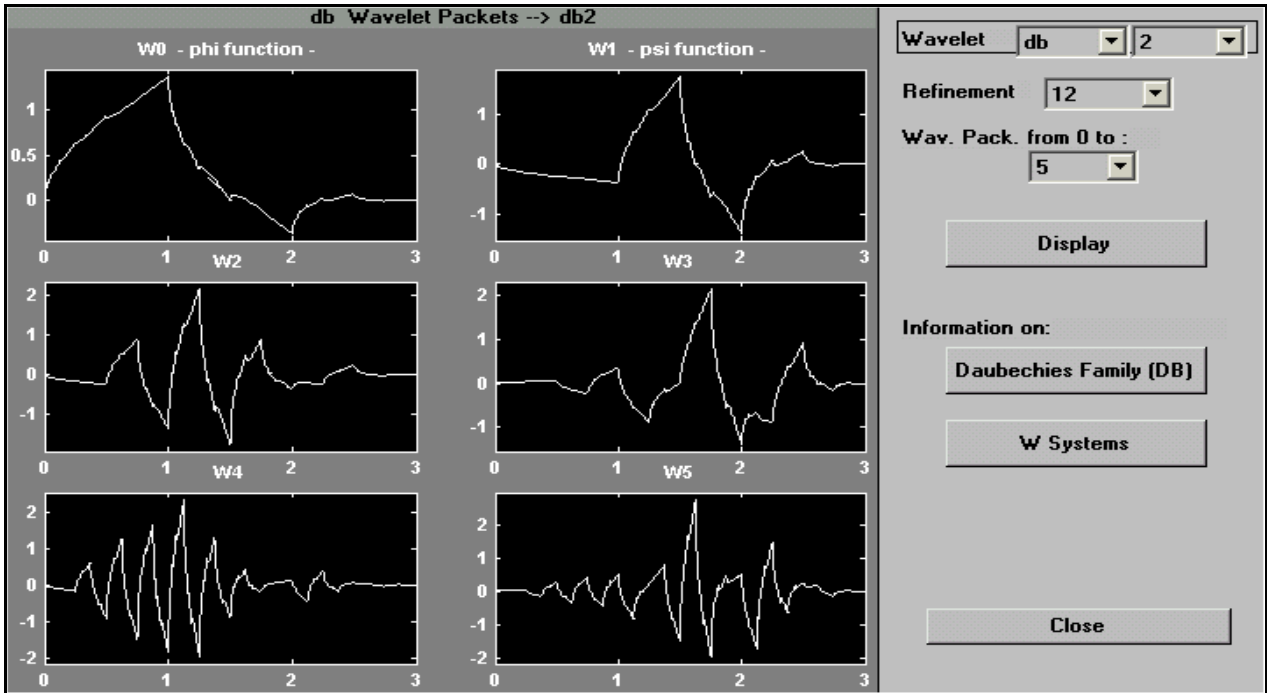


Рис. 6.0.2.

6.1. ПАКЕТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ /ЛЗ4/.

Одномерное вейвлет-разложение. Пакетное вейвлет-преобразование вектора (сигнала) S в рамках полного дерева разложения до уровня N вейвлетом 'wname' выполняется функцией `wrdec`:

- $V = \text{wrdec}(S, N, \text{'wname'}, \text{TYPE}, P)$.

Строковый параметр `TYPE` задает тип энтропии, и может принимать значения 'shannon', 'threshold', 'norm', 'log energy', 'sure' или 'user'. Параметр P зависит от энтропии:

- если 'shannon' или 'log energy', то P не используется;
- если 'threshold' или 'sure', то P – пороговое значение (положительное число);
- если 'norm', то P – мощность и должна быть равна $P \geq 1$;
- если 'user', то P – строка имени m -файла пользователя с входом сигнала S для расчета собственной функции энтропии.

Параметр E может не указываться, при этом по умолчанию он принимается равным $E = \text{'shannon'}$ и значения P также не требуется.

Двумерное вейвлет-разложение выполняется функцией `wrdec2` с теми же значениями параметров.

График дерева пакета и графики коэффициентов разложения в узлах дерева (по указанию) строятся функцией `plot(V)`. На графиках можно просматривать функции разложения во всех узлах дерева, начиная с самого входного сигнала (узел (0,0)). Нумерация узлов может быть изменена на порядковую сверху вниз слева направо (меню: Node Label → Index).

♣ Пример декомпозиции сигнала типовым и пакетным методами БВП (рис. 6.1.1).

```
load sumsin; S=sumsin(1:200); N=3; [C,L]=wavedec(S,N,'db4');
```

```
subplot(121); plot(S); grid; subplot(122); plot(C); grid;
V=wpdec(S, N, 'db4'); plot(V);
```

- ♣ Пример пакетного двумерного вейвлет-разложения.


```
load tire; N=2; v=wpdec2(X, N, 'db4'); plot(v);
```

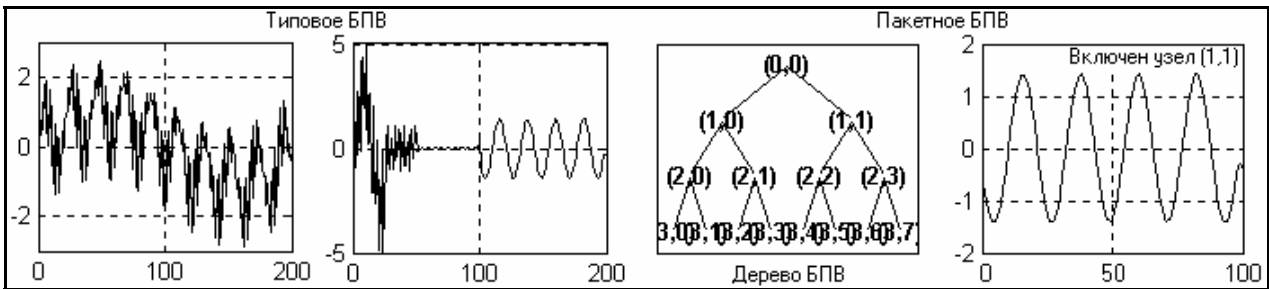


Рис.6.1.1.

Значение энтропии сигнала X (вектора или матрицы) может быть вычислено функцией

- $E = \text{wentropy}(X, \text{TYPE}, P)$.
- $E = \text{wentropy}(X, \text{TYPE})$ эквивалентна $\text{wentropy}(X, \text{TYPE}, 0)$.

- ♣ Пример вычисления энтропии различных типов для случайного сигнала.


```
x=randn(1,200); e1=wentropy(x,'shannon'); e2=wentropy(x,'log energy');
e3=wentropy(x,'threshold',0.2); e4=wentropy(x,'sure',3); e5=wentropy(x,'norm',1.1);
```

- ♣ Результаты:


```
e1=-16.7729, e2=-306.6367, e3=165, e4=-15.9133, e5=153.0497.
```

Цветовая спектрограмма коэффициентов самого верхнего уровня разложения N (конечных или терминальных узлов) может быть построена функцией $\text{wpviewcf}(V, \text{CMODE})$.

- ♣ Пример построения цветовой спектрограммы (рис. 6.1.2).


```
load sumsin; S=sumsin(1:200); V=wpdec(S, 3, 'db4'); wpviewcf(V, 1);
```

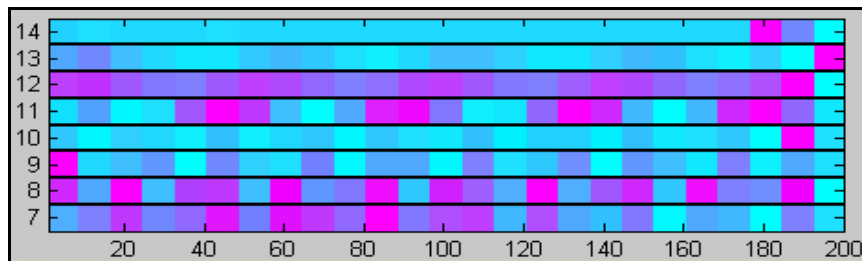


Рис. 6.1.2.

Значением $\text{CMODE} = \{0,8\}$ может быть задано 9 различных цветовых вариантов спектрограммы узловых точек. Нумерация горизонтальных секций спектрограммы снизу вверх соответствует узлам самого нижнего уровня разложения на дереве слева направо.

Для дерева V все параметры разложения и значения фильтров декомпрессии и реконструкции сигнала могут быть выведены на экран набором имени дерева в командной строке и нажатием клавиши **Enter**.

Просмотр дерева разложения и коэффициентов декомпозиции может выполняться и функцией $\text{drawtree}(V)$, при этом автоматически включается интерфейс графического окна GUI и дальнейшие операции разложения можно выполнять непосредственно в окне с соответствующими широкими возможностями изменения параметров разложения и просмотра сигналов.

- ♣ Пример декомпозиции сигнала в окне GUI (рис. 6.1.3).


```
load sumsin; S=sumsin(1:200); N=4;
V=wpdec(S, N, 'db4'); fig=drawtree(V);
```

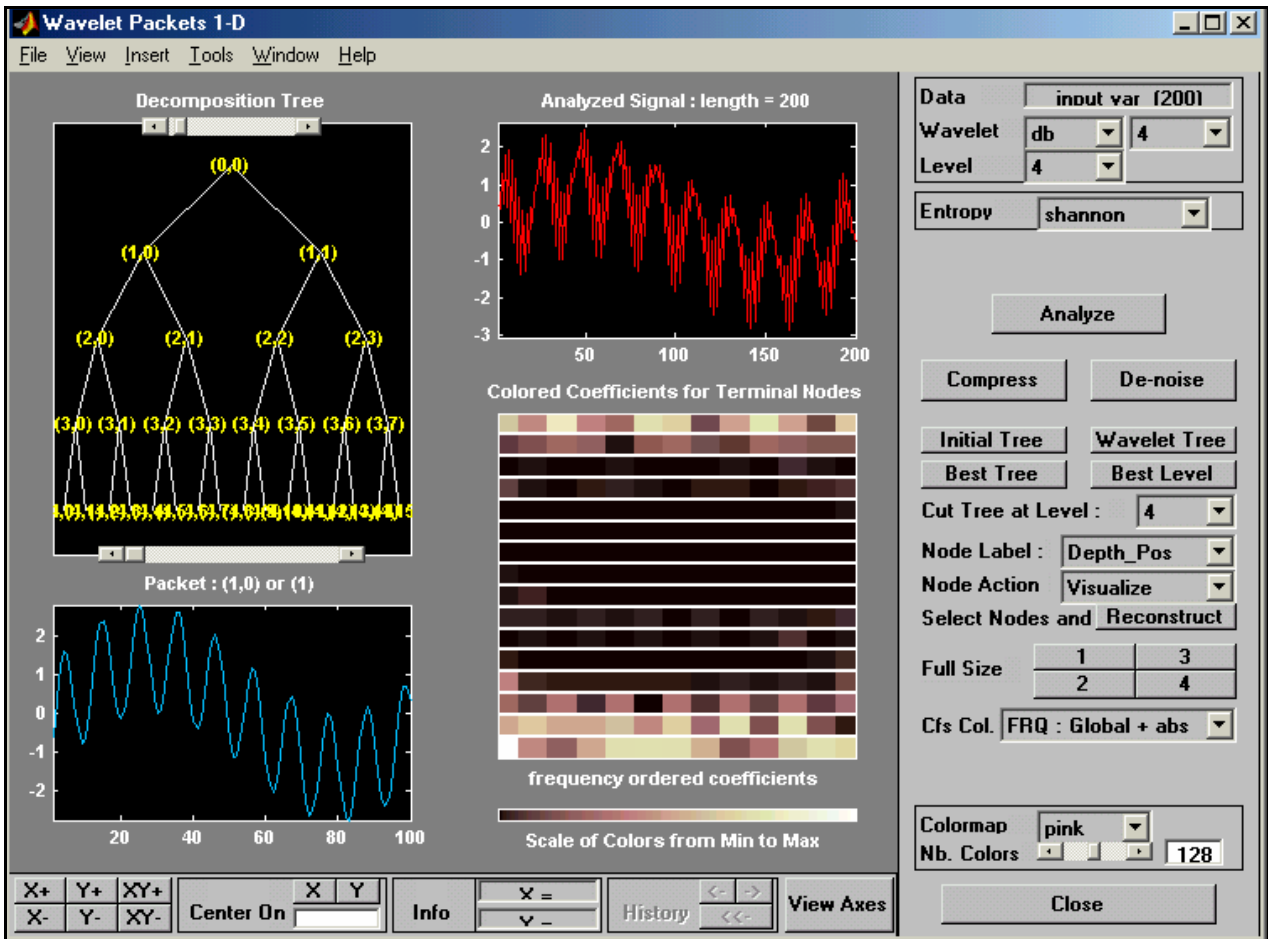


Рис.6.1.3.

Оптимизация построения дерева пакетного разложения выполняется функциями `bestlevt` и `besttree`. Они применяются после расчета полного дерева.

Функция `bestlevt` возвращает полное оптимальное дерево исходного дерева V по критерию энтропии, т.е. разложение дерева по наилучшему уровню, которое может быть и меньшей глубины, чем исходное:

- $V = \text{bestlevt}(V)$.
- $[V, E] = \text{bestlevt}(V)$, где E – массив значений энтропии в узлах дерева (порядковая нумерация).

♣ Пример оптимизации дерева вейвлет-разложения (рис. 6.1.4).
`load noisdopp; x=noisdopp; N=3; v=wpdec(x, N, 'db1');`
`v=wpsplt(v,[3 0]); v=wpsplt(v,15); plot(v);`
`blv= bestlevt(v); plot(blv);`

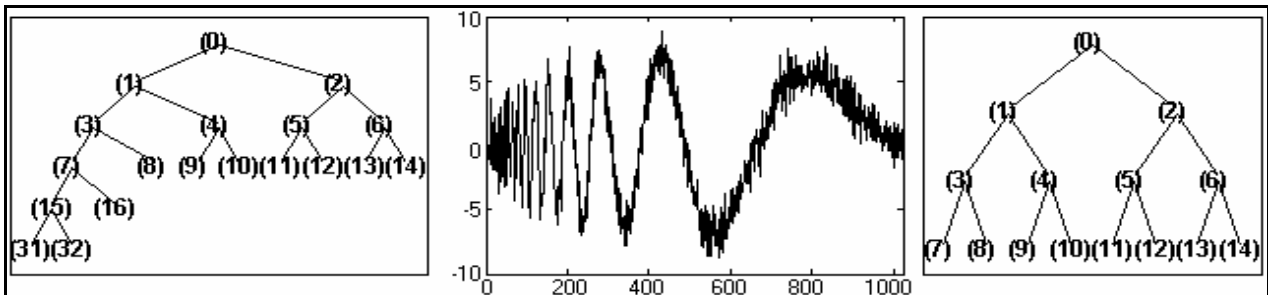


Рис.6.1.4.

На рис. 6.1.4 для модельного сигнала `noisdopp` (в центре) выполнен расчет исходного дерева (слева) до уровня $N=3$ с дополнительным применением функции разложения для отдельных узлов дерева `wpsplt(v,n)`, где n – номер узла (порядковый или позиционный). Справа на рисунке приведено оптимальное дерево по критерию энтропии. Для обоих

деревьев включена порядковая индексация. Применение функции `bestlevt` показывает, что для данного сигнала разложение 7-го и 15-го узла не понижает энтропии и не имеет особого смысла (при общем пакетном разложении до уровня $N=3$).

Функция `besttree` выполняет более глубокий анализ исходного дерева и при разложении узлов предлагает наилучшее дерево по критерию энтропии, прекращая дальнейшее разложение узла, если энтропия ветви начинает увеличиваться.

- $V = \text{besttree}(V)$.
- $[V,E] = \text{besttree}(V)$, где E – массив значений энтропии в узлах дерева (порядковая нумерация).
- $[V,E,k] = \text{besttree}(V)$, где k – вектор индексов узлов дерева, дальнейшее разложение которых до заданного уровня N прекращено в связи с возрастанием энтропии (порядковая нумерация).

♣ Пример определения наилучшего дерева вейвлет-разложения (рис. 6.1.5).

```
load sumsin; x=sumsin(1:200); N=4; v=wpdec(x, N, 'db4'); plot(v);
[btv,E,k]=besttree(v); plot(btv);
```

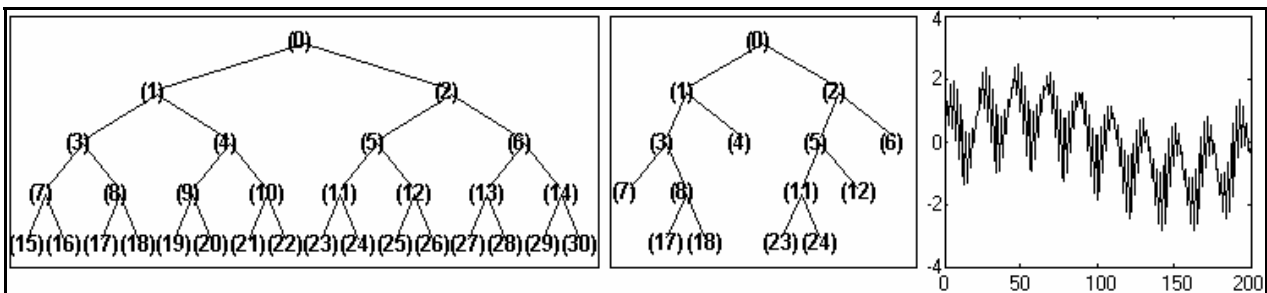


Рис.6.1.5.

На рис. 6.1.5 приведен пример оптимизации дерева, при этом вектор k фиксирует значения $k = \{12,7,6,4\}$ (снизу вверх справа налево начиная с уровня $N-1$).

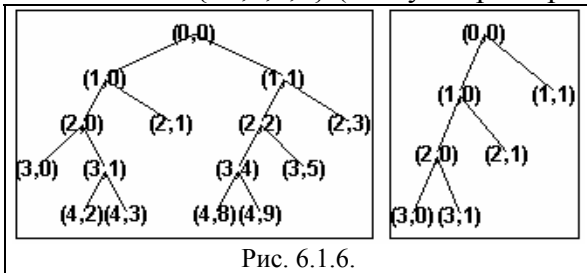


Рис. 6.1.6.

Функция

- $V = \text{wp2wtree}(V)$

извлекает из пакетного дерева V дерево только аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов нулевой и первой позиции, т.е. коэффициенты $c_{j,0}$ и $d_{j,1}$ ветвей исходного дерева на последовательных уровнях $j = 0, 1$, и т.д. Пример модификации приведен на рис. 6.1.6.

Модификация энтропии дерева может быть выполнена функцией

- $V = \text{entrupd}(V, \text{TYPE}, P)$, где P – оптимальный параметр энтропии, задавать который не обязательно.

Пакетная вейвлет-функция `wrpfun` с форматом

- $[WP, X] = \text{wrpfun}(\text{'wname'}, M, P)$,
- $[WP, X] = \text{wrpfun}(\text{'wname'}, M)$, где по умолчанию $P = 7$,

возвращает пакет вейвлетов 'wname' на двойном интервале 2^{-P} , где P – целое положительное число, на векторе сетки X . Выходная матрица WP содержит $M+1$ строку вейвлетных функций W с нумерацией от 0 до M (W_0, W_1, \dots, W_M).

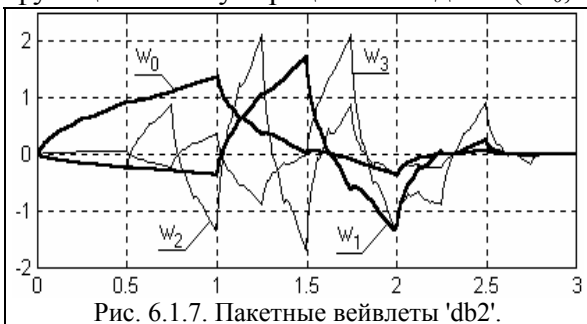


Рис. 6.1.7. Пакетные вейвлеты 'db2'.

Нулевая функция W_0 является масштабирующей (скейлинг-функция), первая W_1 – вейвлетной. Для ортогональных вейвлетов процесс вычисления начинается с задания двух фильтров $h(n)$ и $g(n)$ длины $2M$, с вычисление последующих по формуле:

$$W_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0, \dots, 2N-1} h(k) W_n(2x-k).$$

Пример вычисления вейвлетов приведен на рис. 6.1.7.

Пакетные вейвлет-коэффициенты разложения в узлах k дерева V возвращаются функцией

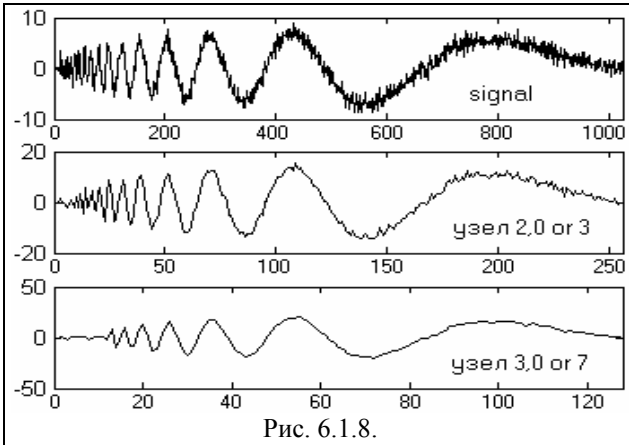


Рис. 6.1.8.

- $X = \text{wpccoef}(V, k)$,
- $X = \text{wpccoef}(V)$, эквивалент функции $X = \text{wpccoef}(V, 0)$.

♣ Пример извлечения вейвлет-коэффициентов разложения (рис. 6.1.8).

```
load noisdopp; x=noisdopp;
subplot(311); plot(x); title('signal');
N=3; wp=wpdec(x, N, 'db1');
cf1=wpccoef(wp,[2 0]); subplot(312);
plot(cf1); title('site 2,0 or 3');
cf2=wpccoef(wp,7); subplot(313);
plot(cf2); title('site 3,0 or 7');
```

Нумерация узлов может применяться как позиционная, так и порядковая. Если узел не существует, выводится пустая строка ($X = []$).

6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПАКЕТОВ И РЕКОНСТРУКЦИЯ СИГНАЛОВ /ЛЗ4/.

После пакетного разложения сигналов и изучения вейвлет-коэффициентов разложения в узлах дерева обычно производится определенная модификация дерева – ограничение дерева до определенного уровня и отсечка ветвей с малозначимыми коэффициентами или с локальными особенностями сигналов, например – с шумами.

Отсечка пакетного дерева V до определенного уровня разложения L выполняется функцией `wpcutree`:

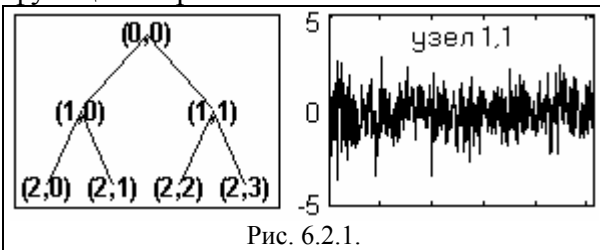


Рис. 6.2.1.

- $V = \text{wpcutree}(V, L)$,
- $[V, R] = \text{wpcutree}(V, L)$, где R – вектор индексов конечных (терминальных) узлов.

♣ Пример сечения дерева (рис. 6.2.1).

```
load noisdopp; x=noisdopp;
wp=wpdec(x, 3, 'db1');
[nwp,R]= wpcutree(wp, 2); plot(nwp);
```

Вектор R' (транспонированный) = [3 4 5 6].

Отсечка узлов дерева V с определенной позиции или порядкового номера k выполняется функцией `wpjoin`:

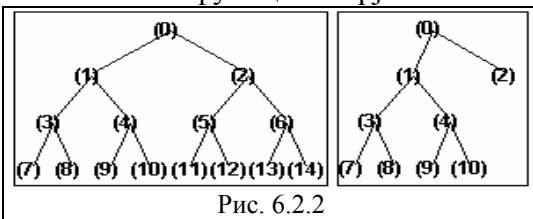


Рис. 6.2.2

- $V = \text{wpjoin}(V, k)$,
- $[V, S] = \text{wpjoin}(V)$,
где S – вейвлет-коэффициенты всех оставленных узлов дерева,
- $V = \text{wpjoin}(V)$, эквивалент функции $V = \text{wpjoin}(V, 0)$.

♣ Пример отсечки узлов дерева (рис. 6.2.2).

```
load noisdopp; x=noisdopp;
wp=wpdec(x, 3, 'db1'); plot(wp);
wpt= wpjoin(wp,2); plot(wpt);
```

Выделение локальных сигналов (особенностей сигналов) из узлов k дерева разложения V и восстановление их в исходном масштабе входного сигнала выполняется функцией:

- $X = \text{wprcoef}(V, k)$,
- $X = \text{wprcoef}(V)$, эквивалент функции $X = \text{wprcoef}(V, 0)$.

♣ Пример определения наилучшего дерева вейвлет-разложения (рис. 6.2.3).

```
load sumsine; x=sumsine(1:500); subplot(221); plot(x); axis([100,400,-3,3]);
v=wpdec(x,4,'db4'); plot(v); c1= wprcoef(v, 1);
c2= wprcoef(v, 2); c3= wprcoef(v, 15);
```



```
subplot(222); plot(c1); axis([100,400,-2.2,2.2]);
subplot(223); plot(c2); axis([100,400,-1.2,1.2]);
subplot(224); plot(c3); axis([100,400,-1.2,1.2]);
```

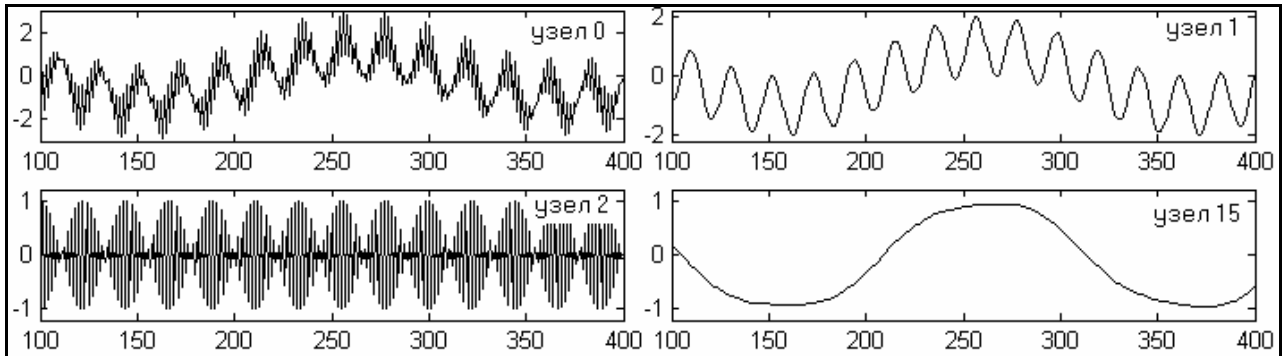


Рис.6.2.3.

Полная реконструкция сигнала по дереву разложения V (пакетное вейвлет-восстановление) выполняется функциями $wprcs(V)$ для одномерных, и $wprcs2(V)$ для двумерных разложений.

ЛИТЕРАТУРА

- л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.
- л36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. / Успехи физических наук, 2001, т.171, № 5, стр. 465-501.
- л37. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 132 с.

Тема 7: ВЕЙВЛЕТНАЯ ОЧИСТКА ОТ ШУМОВ И СЖАТИЕ СИГНАЛОВ.

Сорняки растут не везде, а только там, где они не нужны.

Михаил Генин.

Писатель, специалист по афоризмам.

Шум в сигнале, что сорняк на поле. Во время не избавишься, все затынет.

Аркадий Шампаров.

Уральский геофизик, любитель афоризмов.

Содержание: Введение. 7.1. Основные функции. Удаление шума и сжатие одномерных и двумерных сигналов. Параметры удаления шумов и сжатия сигналов. Изменение вейвлет-коэффициентов. 7.2. Пакетные функции очистки и сжатия. Удаление шумов и сжатие с использованием пакетных вейвлетов. 7.3. Очистка сигналов от шума в пакете GUI. Литература.

ВВЕДЕНИЕ.

Типовой метод подавления шумов – удаление высокочастотных составляющих из спектра сигнала. Применительно к вейвлетным разложениям это может быть реализовано непосредственно удалением детализирующих коэффициентов высокочастотных уровней. Но вейвлеты имеют в этом отношении более широкие возможности. Шумовые компоненты, и особенно большие случайные выбросы значений сигналов, можно также рассматривать в виде множеств локальных особенностей сигналов. Задавая некоторый порог для их уровня и срезая по нему детализирующие коэффициенты, можно не только уменьшать уровень шумов, но и устанавливать пороговые ограничения на нескольких уровнях разложения с учетом конкретных характеристик шумов и сигналов для различных типов вейвлетов. Это позволяет создавать адаптивные системы очистки сигналов от шумов в зависимости от их особенностей. Эти технологии и будут рассматриваться в данной теме.

Операция сжатия сигналов с удалением малозначимых значений вейвлет-коэффициентов также выполняется на основе определенных пороговых ограничений их значений, и во многом практически тождественна операциям удаления шумов.

Утилиты, которые рассматриваются в настоящей теме, используются в пакете расширения Wavelet Toolbox системы Matlab.

При очистке сигналов от шумов и сжатии используется быстрое вейвлет-преобразование (БВП). При этом всегда следует учитывать, что если полный размер сигнала составляет M -отсчетов, а максимальный уровень разложения равен N , то для обеспечения нормальной работы БВП отношение $M/2^N$ должно быть целым числом, что обеспечивает целое число коэффициентов на последнем уровне разложения. Если это условие не выполняется, рекомендуется дополнять массив отсчетов нулевыми или любыми другими значениями.

Изучение технологий и методик очистки сигналов от шумов и сжатия сигналов удобно проводить на тестовых сигналах, которые генерируются функциями:

- $X = \text{wnoise}(\text{FUN}, N)$ – вектор-сигнал функции FUN (с номерами от 1 до 6) на 2^N сетке в интервале $[0,1]$.
- $[X, XN] = \text{wnoise}(\text{FUN}, N, \text{SQRT})$ – то же, со средним квадратическим отклонением $\text{std}(X) = \text{SQRT}$. Вектор XN является суммой вектора X и белого шума Гаусса $(0,1)$.
- $[X, XN] = \text{wnoise}(\text{FUN}, N, \text{SQRT}, \text{INIT})$ – то же, с заданием начального числа INIT для генерации псевдослучайных чисел. INIT обеспечивает повторение одной и той же последовательности случайных чисел при моделировании и отладке программ.

♣ Пример моделирования тестовых сигналов (рис. 7.0.1).

```
n=10; ind=linspace(0,1,2^n);
for i=1:6
    [x, xn]=wnoise(i, n, 2);
    subplot(6,2,2*i-1); plot(ind, x);
    subplot(6,2,2*i); plot(ind, xn);
end
```

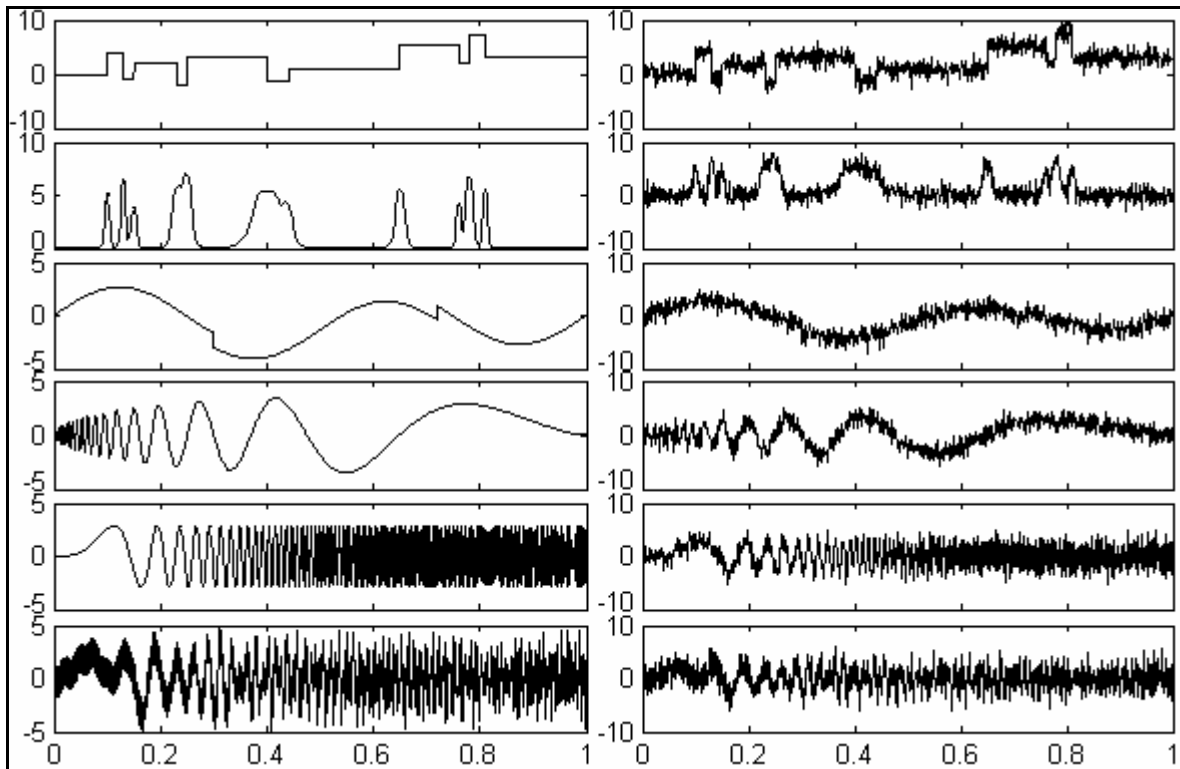


Рис. 7.0.1.

Кроме этих типовых функций можно использовать также стандартные демонстрационные сигналы с шумами из пакета `toolbox\wavelet\wavedemo\nois*.mat`, которые считываются командой `load`.

7.1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ /ЛЗ4/.

Модель зашумленного сигнала обычно принимается аддитивной: $s(n) = f(n) + k \cdot e(n)$ с равномерным шагом по аргументу n , где $f(n)$ – полезная информационная составляющая, $e(n)$ – шумовой сигнал, например, белый шум определенного уровня со средним нулевым значением. Процедура удаления шума выполняется с использованием ортогональных вейвлетов и включает в себя следующие операции:

- **Вейвлет-разложение сигнала** $s(n)$ до уровня N . Значение уровня N определяется частотным спектром информационной части $f(n)$ сигнала, которую желательно оставлять в рядах аппроксимационных коэффициентов. Тип и порядок вейвлета может существенно влиять на качество очистки сигнала от шума в зависимости как от формы сигналов $f(n)$, так и от корреляционных характеристик шумов.

- **Задание типа и пороговых уровней** очистки по известным априорным данным о характере шумов или по определенным критериям шумов во входном сигнале. Пороговые уровни очистки могут быть гибкими (в зависимости от номера уровня разложения) или жесткими (глобальными).

- **Модификация коэффициентов детализации** вейвлет-разложения в соответствии с установленными условиями очистки.

- **Восстановление сигнала** на основе коэффициентов аппроксимации и модифицированных детализационных коэффициентов.

Автоматическое удаление шумов из одномерных сигналов, записанных в массивах X или непосредственно с использованием структуры вейвлет-разложения $[C, L]$ на уровне N ортогональным вейвлетом 'wname', выполняется функциями:

- $[XD, CXD, LXD] = wden(X, TPTR, SORH, SCAL, N, 'wname')$,
- $[XD, CXD, LXD] = wden(C, L, TPTR, SORH, SCAL, N, 'wname')$.

Функции возвращают очищенный от шума сигнал XD и структуру декомпрессии вейвлет-разложения $[CXD, LXD]$, полученную ограничением вейвлет-коэффициентов преобразования сигнала X , реконструкцией из которой и является сигнал XD . Вычисляется обычно только значение XD .

Параметры функций имеют следующее назначение.

TPTR – строковый параметр установки правила вычисления порогового значения для ограничения коэффициентов разложения:

- 'rigrsure' – адаптивный порог на основе алгоритма Штейна несмещенной оценки;
- 'heursure' – эвристический вариант порога по методу Штейна;
- 'sqrtwolog' – универсальный порог $\sqrt{2 \cdot \log(\text{length}(X))}$;
- 'minimaxi' – по минимаксной оценке.

SORH – строковый параметр установки гибкого ('s' - soft) или жесткого ('h' – hard) типа порога очистки. При гибком (или мягком) пороге заданное пороговое значение вычитается из значений коэффициентов (по модулю), при жестком (или твердом) пороге значения коэффициентов, меньшие пороговых значений (по модулю), обнуляются. Жесткий порог обычно применяется при компрессии (сжатии) сигналов.

SCAL – строковый параметр порогового перемасштабирования на уровнях:

- 'one' – перемасштабирования нет, применяется для сигналов типа $s(n)=f(n)+e(n)$, где $e(n)$ – белый шум $[0,1]$;
- 'sln' – перемасштабирование выполняется с использованием оценки уровня шума по детализационным коэффициентам первого уровня разложения;
- 'mln' – перемасштабирование производится с использованием оценок шума для каждого уровня по своим детализационным коэффициентам.

♣ Пример автоматического удаления шумов (рис. 7.1.1).

```
load noisbloc; x=noisbloc; N=8; wl='sym8';
subplot(411); plot(x); ylabel('Signal'); axis([0,1000,-6,20]);
xh=wden(x, 'heursure', 's', 'one', N, wl);
subplot(412); plot(xh); ylabel('Heursure'); axis([0,1000,-6,20]);
xs=wden(x, 'sqrtwolog', 's', 'sln', N, wl);
subplot(413); plot(xs); ylabel('Sqrtwolog'); axis([0,1000,-6,20]);
xm=wden(x, 'minimaxi', 's', 'sln', N, wl);
subplot(414); plot(xm); ylabel('Minimaxi'); axis([0,1000,-6,20]);
```

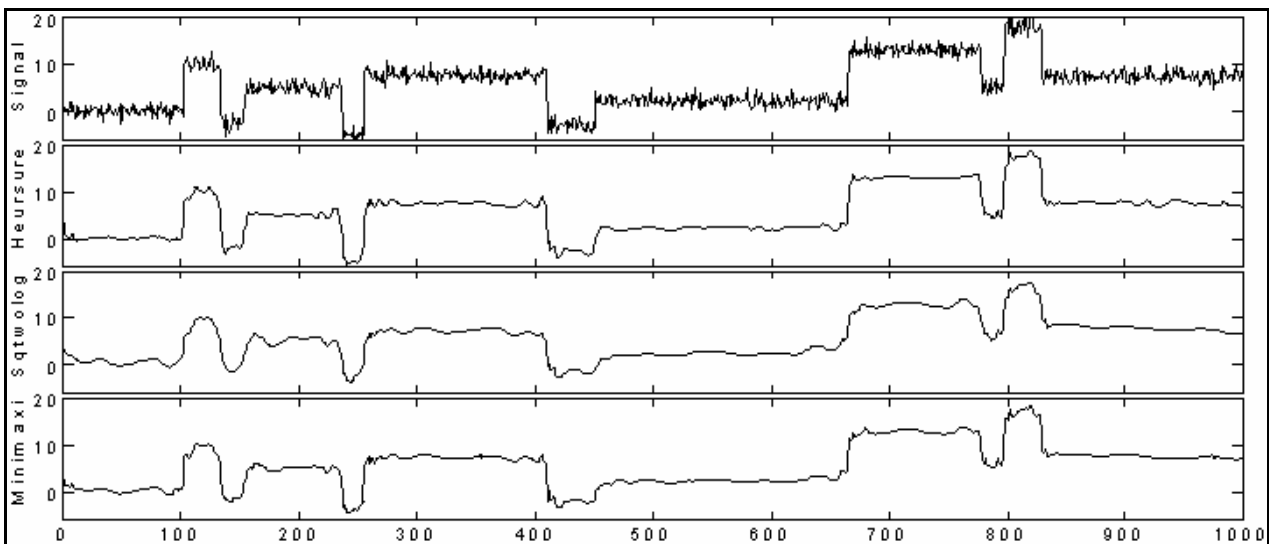


Рис. 7.1.1.

В приведенном примере массивы значений CXD и LXD не вычисляются, т.к. в них обычно нет необходимости. В примере ниже и на рис. 7.1.2 приведены графики коэффициентов C вейвлет-разложения и этих же коэффициентов после удаления из них шумов с разными типами пороговых ограничений.

♣ Примеры структур коэффициентов декомпрессии (рис. 7.1.2).

```
load noisbloc; x=noisbloc; N=8; wl='sym8';
[C,L] = wavedec(x, N, wl); subplot(411); plot(C); ylabel('Coef. C'); axis([0,1000,-6,6]);
[xh, ch]=wden(C, L, 'heursure', 's', 'one', N, wl);
```

```

subplot(412); plot(ch); ylabel('Coef. ch'); axis([0,1000,-6,6]);
[xs, cs]=wden(C, L, 'sqrtwolog', 's', 'sln', N, wl);
subplot(413); plot(cs); ylabel('Coef. cs'); axis([0,1000,-6,6]);
[xm, cm]=wden(C, L, 'minimaxi', 's', 'sln', N, wl);
subplot(414); plot(cm); ylabel('Coef. cm'); axis([0,1000,-6,6]);

```

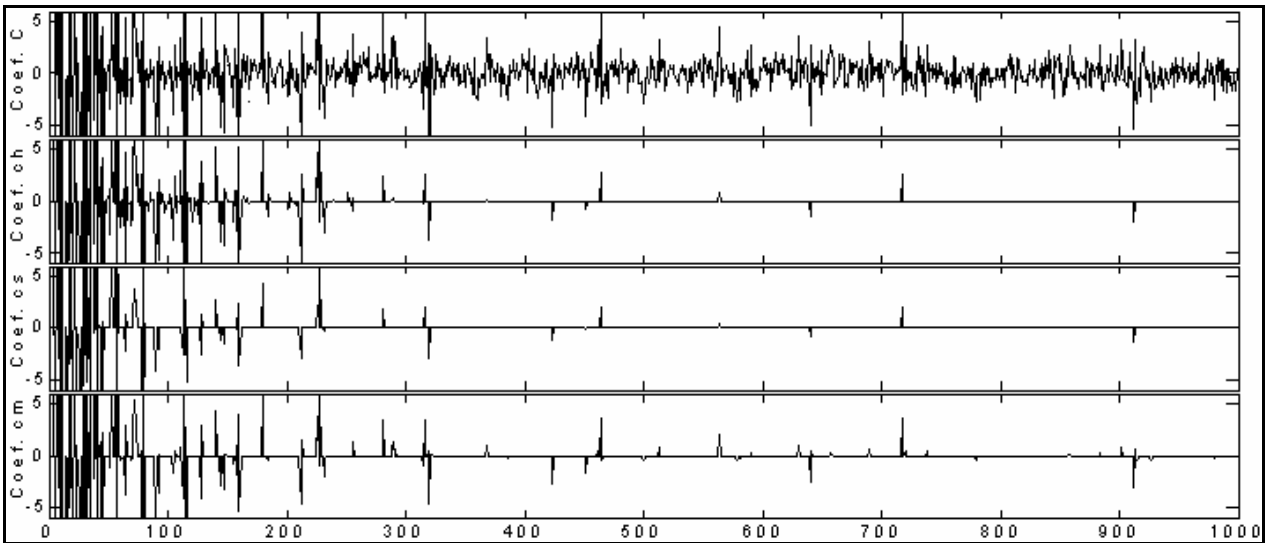


Рис. 7.1.2.

Удаление шума и сжатие одномерных и двумерных сигналов X (или сигналов, представленных структурой вейвлет-разложения C, L) на уровне разложения N вейвлетом 'wname' выполняется функциями:

- $[XC, CXC, LXC, PERF0, PERFL2] = \text{wdencmp}(\text{TYPE}, X, \text{'wname'}, N, \text{THR}, \text{SORN}, \text{KEEPAPP})$,
- $[XC, CXC, LXC, PERF0, PERFL2] = \text{wdencmp}(\text{TYPE}, C, L, \text{'wname'}, N, \text{THR}, \text{SORN}, \text{KEEPAPP})$,

где XC, CXC, CXL – обработанный выходной сигнал и структура его вейвлет-разложения. Дополнительные аргументы $PERF0$ и $PERFL2$ - нормы сжатия и восстановления CXC в процентах относительно нормы C исходного сигнала. Во входных данных параметр $KEEPAPP = 1$ включает сохранение коэффициентов аппроксимации без изменений, $SORN = 's'$ или $'h'$ – гибкий или жесткий порог, THR – задаваемое значение порога, однозначное глобальное при $\text{TYPE} = \text{'gbl'}$ или зависимое от уровня N коэффициентов при $\text{TYPE} = \text{'lvd'}$. В последнем случае THR должен быть N -вектором со значениями порогов для каждого значения N для одномерных сигналов, или матрицей $3 \times N$ значений порогов для горизонтальных, диагональных и вертикальных коэффициентов разложения двумерных сигналов. При параметре 'lvd' параметр $KEEPAPP$ не задается.

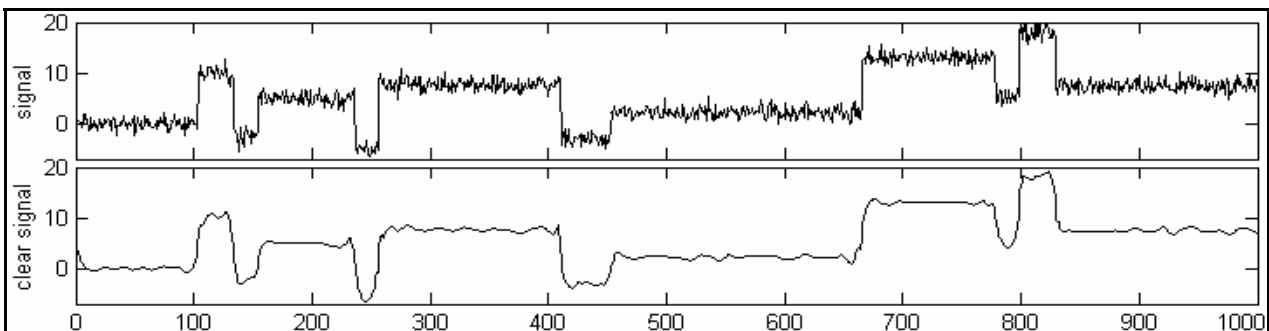


Рис. 7.1.3.

♣ Пример удаления шумов (рис. 7.1.3).

```

load noisbloc; x=noisbloc; N=3; wl='sym4';
[thr, sh, kp]=ddencmp('den', 'wv', x);
[XC, CXC, LXC, F0, FL2] = wdencmp('gbl', x, wl, N, thr, sh, kp);
subplot(211); plot(x); ylabel('signal'); axis([0,1000,-7,20]);
subplot(212); plot(XC); ylabel('clear signal'); axis([0,1000,-7,20]);

```

♣ Нормы сжатия и восстановления сигналов:

F0 = 85.2539 FL2 = 96.7110

Для произвольных зашумленных сигналов установка входных параметров может вызвать затруднения, т.к. потребует определенных априорных данных или анализа статистических характеристик высокочастотных составляющих сигналов.

Параметры удаления шумов и сжатия сигналов для матрицы данных X (одномерной или двумерной) могут определяться функциями, одна из которых и была применена в предыдущем примере:

- [THR, SORH, KEEPAPP] = ddencmp(IN, 'wv', X), для простого вейвлета,
- [THR, SORH, KEEPAPP, CRIT] = ddencmp(IN, 'wp', X), для пакетного вейвлета.

Функции возвращают рекомендуемые значения параметров. Строковый параметр IN функции может принимать два значения: 'den' – для удаления шумов, или 'cmp' – для компрессии сигнала. Выходной аргумент THR – число, вектор или матрица пороговых значений. CRIT используется только для пакетного вейвлета и включает тип энтропии.

♣ Пример установки параметров для шумового сигнала.

```
init=3333; randn('seed',init); X=randn(1,10000);
xm=mean(X); xe= max(X); xs=std(X);      % xm= -0.0221, xe= 3.0000, xs= 1.0074
[th1,sh1,kp1]=ddencmp('den','wv',X);      % th1= 4.3122, sh1= s, kp1= 1
[th2,sh2,kp2]=ddencmp('cmp','wv',X);      % th2= 0.6777, sh1= h, kp1= 1
[th3,sh3,kp3,cr]=ddencmp('den','wp',X);      % th2= 4.8574, sh1= h, kp1= 1, cr= sure
```

Пороговое значение THR для вектора X может быть вычислено с учетом правил выбора по параметру TPTR, который уже приводился выше при рассмотрении функции wden. Формат функции:

- THR= thselect(X, TPTR).

♣ Пример установки порогового значения для удаления шумов.

```
init=3333; randn('seed',init); X=randn(1,10000);
thr1=thselect(X, 'rigrsure')      % th1 = 3.7822
thr2=thselect(X, 'sqtwolog')      % th2 = 4.2919
thr3=thselect(X, 'heursure')      % th3 = 4.2919
thr4=thselect(X, 'minimaxi')      % th4 = 2.8239
```

Глобальный порог THR для удаления шумов с управляемой настройкой (с использованием априорных данных) может быть установлен функцией

- THR= wbmphen(C, L, SIGMA, ALPHA),

где [C,L] – структура разложения одно- или двумерного сигнала, SIGMA – стандартное отклонение белого шума Гаусса в данной модели, ALPHA – параметр настройки выбора вейвлет-коэффициентов с использованием "штрафного" метода Бирге-Массарта. Значение ALPHA должно быть больше 1 (типовое значение равно 2).

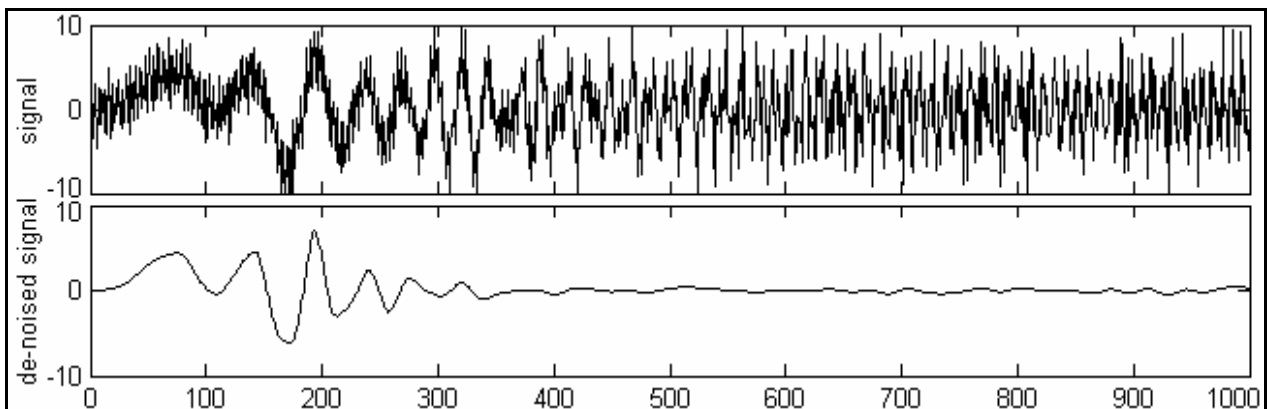


Рис. 7.1.4.

♣ Пример удаления шумов с настройкой глобального порога (рис. 7.1.4).

```
load noismima; x= noismima; wn='sym6'; N=4;
[c,l]=wavedec(x,N,wn); sigma=wnoisest(c,l,1); alpha=1;
```

```
thr= wbmopen(c,l,sigma,alpha); keepapp=1;
xd=wdencmp('gbl', c, l, wn, N, thr, 's', keepapp);
subplot(211); plot(x); ylabel('signal'); axis([0,1000,-10,10]);
subplot(212); plot(xd); ylabel('de-noised signal'); axis([0,1000,-10,10]);
```

Функции для одномерного разложения

- [THR, NKEER] = wdcbm(C, L, ALPHA, M),
- [THR, NKEER] = wdcbm(C, L, ALPHA), по умолчанию M=L(1),

возвращают порог (по методу Бирге-Массарта) и число сохраненных коэффициентов NKEER. THR – вектор длины $j = \text{length}(L)-2$ и содержит пороги для каждого уровня разложения. Параметры ALPHA и M должны быть вещественными числами больше 1. Типичное значение ALPHA для сжатия сигнала 1.5, для удаления шумов порядка 3. Рекомендуемое значение M от L(1) до удвоенного значения L(1).

♣ Пример удаления шумов с настройкой локальных порогов уровней (рис. 7.1.5).

```
load noismima; x= noismima; wn='db8'; N=6;
[c,l]=wavedec(x,N,wn); alpha=1.6; m=l(1);
[thr, nkeer]= wdcbm(c,l,alpha,m);
[xd,cxd,lxd,pf0,pf2]=wdencmp('lvd', c, l, wn, N, thr, 'h');
subplot(211); plot(x); ylabel('signal'); axis([0,1000,-10,10]);
subplot(212); plot(xd); ylabel('de-noise'); axis([0,1000,-10,10]);
```

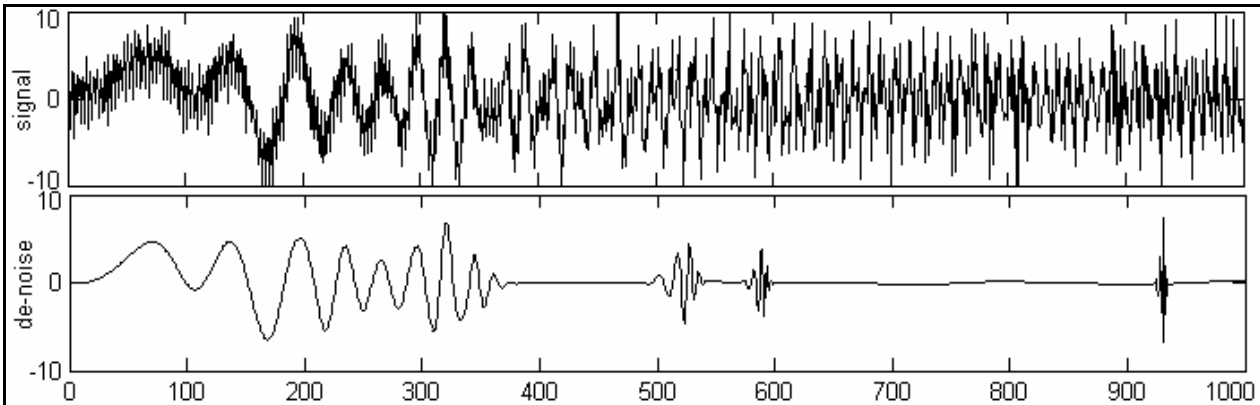


Рис. 7.1.5.

Сравнением рисунков 7.1.4 и 7.1.5 можно убедиться в существенной зависимости результатов операции от метода установки порога удаления шумов и типа вейвлета. На этих моделях можно рекомендовать опробовать и другие типы вейвлетов и параметров настройки порогов.

Для определения параметров двумерного разложения из структуры [C,S] используются аналогичные функции:

- [THR, NKEER] = wdcbm2(C, S, ALPHA, M),
- [THR, NKEER] = wdcbm2(C, S, ALPHA), по умолчанию M=prod(S(1,:)).

Параметр THR в этих функциях – матрица размером $3 \times \text{size}(S,1)-2$. Рекомендуемое значение M от prod(S(1,:)) до шести значений prod(S(1,:)).

♣ Пример сжатия сигналов с применением локальных порогов уровней разложения сигнала (рис. 7.1.6).

```
load detfingr; nbs=size(map,1); wn='sym4'; N=3;
[c,s]=wavedec2(X,N,wn); alpha=1.5; m=2.7*prod(s(1,:));
thr= wdcbm2(c,s,alpha,m);
[xd,cxd,sxd,pf0,pf2]=wdencmp('lvd', c, s, wn, N, thr, 'h');
colormap(pink(nbs)); subplot(221); image(wcodemat(X,nbs));
subplot(222); image(wcodemat(xd,nbs));
```

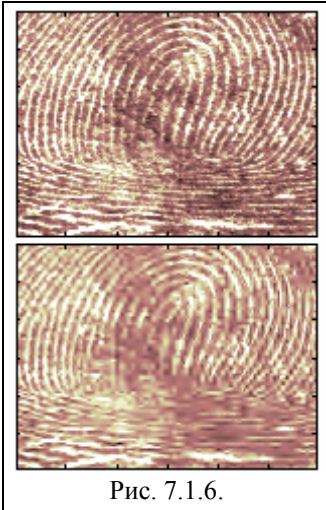


Рис. 7.1.6.

На рис. 7.1.6 отпечаток пальца внизу сжат в десятки раз, но разрешающая способность по основным линиям дактилоскопии при этом практически не изменилась. Сжатие изображений в настоящее время широко применяется при хранении огромных объемов технической информации.

При установке порогов может использоваться функция оценки стандартного отклонения детальных коэффициентов структуры вейвлет-разложения [C,L]:

- $CTDC = wnoisest(C, L, S)$,

где S – вектор значений уровней оценки, $CTDC$ – вектор оценок $CTDC(k)$ для коэффициентов $C(k)$ на k -уровнях одномерного разложения или для коэффициентов $C(k,:)$ для двумерного разложения.

♣ Пример вычисления оценок стандартного отклонения для модели шумового сигнала.

```
init=3333; randn('seed',init); X=randn(1,10000);
[C,L]=wavedec(X,4,'db3'); wnt=wnoisest(C,L,1:4)
```

♣ Результаты вычисления:

```
wnt = 1.0451  1.0153  0.9934  1.0088
```

Изменение вейвлет-коэффициентов одномерной структуры разложения [C,L] выполняется функциями

- $NC = wthcoef('d', C, L, N, P)$ – работает с детализирующими коэффициентами (параметр 'd') и возвращает коэффициенты с компрессией по уровням, определенным в одномерных векторах N и P . N – номера детализирующих уровней для компрессии, P – порог обнуления коэффициентов, указанных вектором N , в процентах от максимальных значений.

- $NC = wthcoef('d', C, L, N)$ – то же, с установкой нулевыми всех детальных коэффициентов уровней, указанных вектором N .

- $NC = wthcoef('t', C, L, N, P, SORH)$ – то же, с установкой гибкого ($SORH='s'$) или жесткого ($SORH='h'$) порогов.

- $NC = wthcoef('a', C, L)$ – возвращает структуру C с обнуленными коэффициентами аппроксимации.

Соответственно, для двумерной структуры разложения применяются функции:

- $NC = wthcoef2('type', C, S, N, P, SORN)$. Для $type = 'h', 'v'$ или $'d'$ возвращаются соответственно горизонтальные, вертикальные или диагональные коэффициенты компрессии.

- $NC = wthcoef2('t', C, S, N, P, SORN)$ – то же, для всех коэффициентов ('h', 'v', 'd').

- $NC = wthcoef2('type', C, S, N)$ – то же, с установкой нулевых коэффициентов, указанных вектором N .

- $NC = wthcoef2('a', C, S)$ – возвращает структуру C с обнуленными коэффициентами аппроксимации.

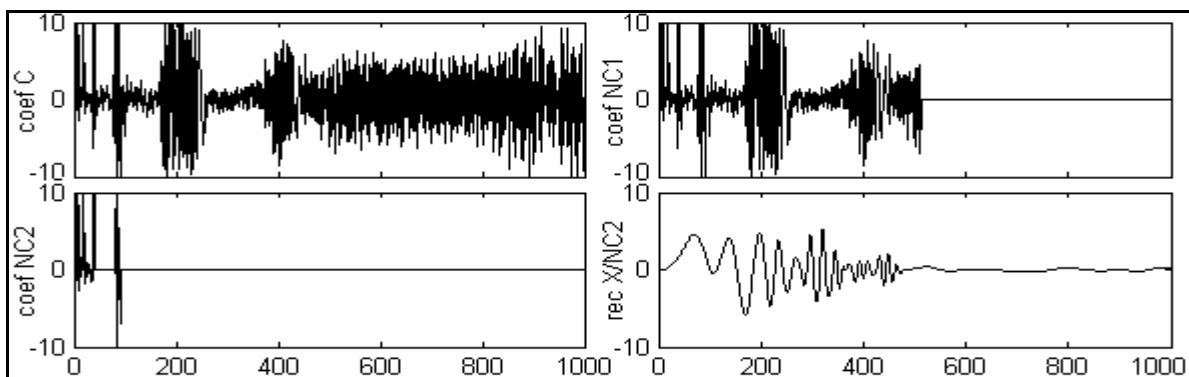


Рис. 7.1.7.

♣ Пример изменения коэффициентов структуры разложения (рис. 7.1.7).

```
load noismima; x= noismima; wn='db8'; n=6; [C,L]=wavedec(x,n,wn);
N1=1; NC1 = wthcoef('d', C, L, N1);
N2=[1:5]; P= [100 100 15 5 5]; NC2=wthcoef('t', C, L, N3, P, 's');
X=waverec(NC2, L, wn);
subplot(221); plot(C); ylabel('coef C'); axis([0,1000,-10,10]);
subplot(222); plot(NC1); ylabel('coef NC1'); axis([0,1000,-10,10]);
subplot(223); plot(NC2); ylabel('coef NC2'); axis([0,1000,-10,10]);
subplot(224); plot(X); ylabel('rec X/NC2'); axis([0,1000,-10,10]);
```

Сравнение сигнала, восстановленного в примере по измененным коэффициентам, с рисунками 7.1.4 и 7.1.5, наглядно показывает возможности направленного изменения сигнала. Если при анализе имеются достаточно надежные априорные данные о форме информационной составляющей зашумленного сигнала, то соответствующим подбором порогов изменения коэффициентов на разных уровнях разложения можно добиться очень высокого качества фильтрации сигналов.

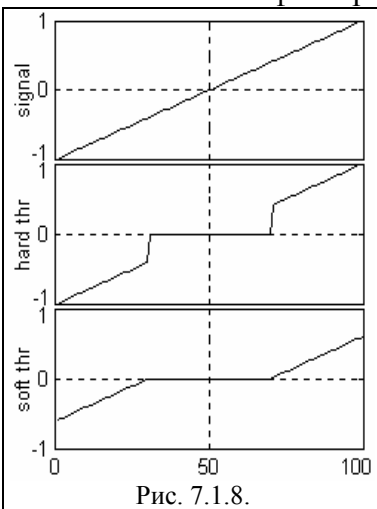


Рис. 7.1.8.

Имеется также возможность прямого порогового изменения массива коэффициентов X , гибкого или жесткого (SORH), по заданному значению порога (THR), что выполняется функцией

- $Y = \text{wthresh}(X, \text{SORH}, \text{THR})$.

♣ Пример порогового изменения числового ряда (рис. 7.1.8).

```
y=linspace(-1,1,100); thr=0.4;
yhard= wthresh(y, 'h', thr);
ysoft= wthresh(y, 's', thr);
subplot(311); plot(y); ylabel('signal');
subplot(312); plot(yhard); ylabel('hard thr');
subplot(313); plot(ysoft); ylabel('soft thr');
```

Для установки порогов THR очистки от шумов и компрессии сигналов может также использоваться пороговый менеджер параметров настройки

- $\text{THR} = \text{wthrmngr}(\text{OPTION}, \text{METHOD}, \text{VARARGIN})$.

Параметры функции довольно обширны. С ними можно познакомиться, выполнив команду `help wthrmngr`.

7.2. ПАКЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ОЧИСТКИ И СЖАТИЯ /ЛЗ4/.

Удаление шумов и сжатие с использованием пакетных вейвлетов выполняется функцией `wpdencmp`, аналогичной функциям `wden` и `wdencomp`, непосредственно по массиву входного сигнала X или по дереву его разложения TREE :

- $[\text{XD}, \text{TREED}, \text{PERF0}, \text{PERFL2}] = \text{wpdencmp}(X, \text{SORN}, N, \text{'wname'}, \text{CRIT}, \text{THR}, \text{KEEPAPP})$,
- $[\text{XD}, \text{TREED}, \text{PERF0}, \text{PERFL2}] = \text{wpdencmp}(\text{TREE}, \text{SORN}, \text{CRIT}, \text{THR}, \text{KEEPAPP})$,

Дополнительный выходной аргумент TREED – оптимальное дерево вейвлет-разложения вектора XD . CRIT – критерий энтропии.

♣ Пример удаления шумов с пакетными вейвлетами (рис. 7.2.1).

```
load noiswom; nbc=size(map,1); wl='coif4'; N=2;
tree=wpdec2(X, N, wl);
det1=[wpccoef(tree,2) wpccoef(tree,3) wpccoef(tree,4)];
sigma=median(abs(det1(:)))/0.6745;
alpha=1; keepapp=1;
thr=wpbmpen(tree,sigma,alpha);
xd=wpdencmp(tree, 's', 'nobest', thr, keepapp);
colormap(pink(nbc));
subplot(121); image(wcodemat(X,nbc)); title('original');
subplot(122); image(wcodemat(xd,nbc)); title('de-noised');
```

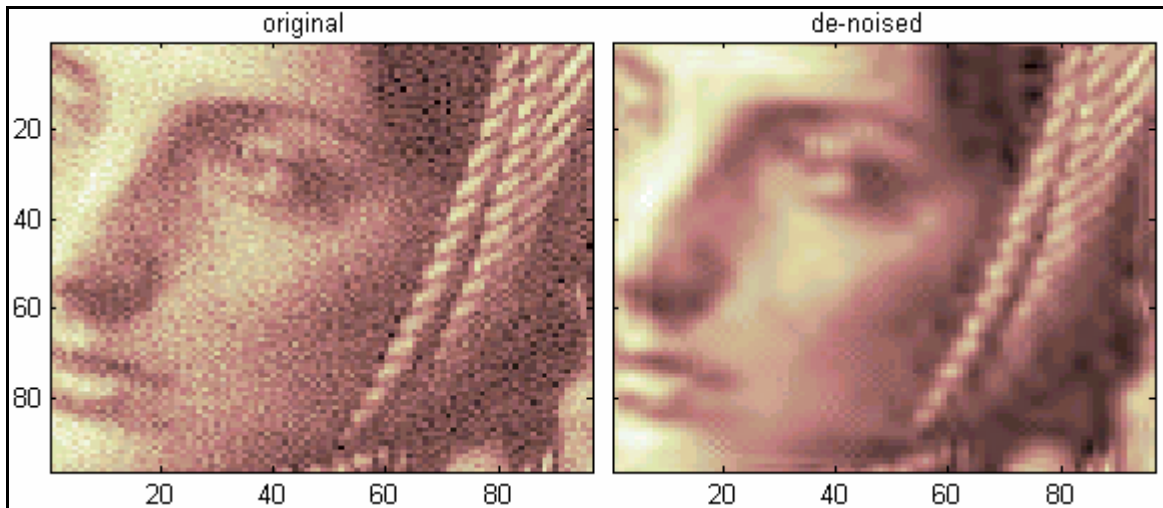


Рис. 7.2.1.

Функцией `wbmpen` в приведенном примере задается параметр глобального порога для удаления шумов. Аналогично функции `wbmpen`, он вычисляется по правилу выбора коэффициентов пакетного вейвлета с использованием метода Бирге-Массарта.

- $THR = wbmpen(T, SIGMA, ALPHA)$,

где T – дерево пакетного вейвлета вейвлет-разложения сигнала или изображения.

- ♣ Пример удаления шумов при пакетном разложении сигнала (рис. 7.2.2).

```
[x,xn]=wnoise(2,10,2); N=3; wn='sym8';
tree=wpdec(xn,N,wn); det1=wpcoef(tree,2);
sigma=median(abs(det1))/0.6745; alpha=2; keepapp=1;
thr=wbmpen(tree,sigma,alpha);
xd=wpdencmp(tree,'s','nobest',thr,keepapp);
subplot(311); plot(x); ylabel('signal'); axis([0,1000,-2,8]);
subplot(312); plot(xn); ylabel('signal+noise'); axis([0,1000,-2,8]);
subplot(313); plot(xd); ylabel('de-noised'); axis([0,1000,-2,8]);
```

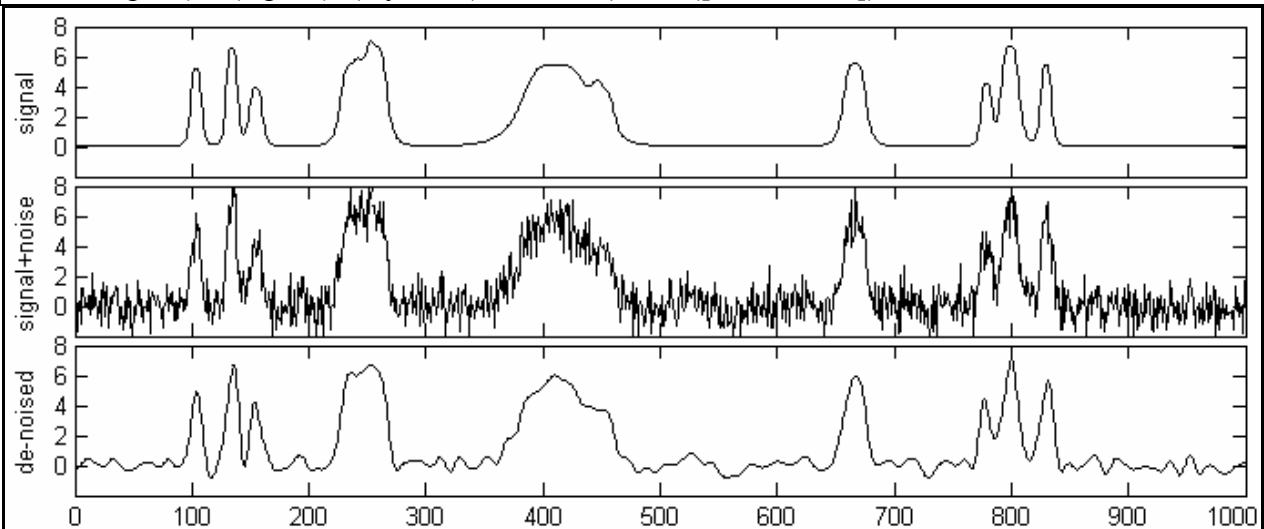


Рис. 7.2.2.

Если кроме очистки от шумов требуется получить и дерево пакетного разложения с новыми коэффициентами (для каких-либо других операций обработки этих коэффициентов), то оно возвращается функцией

- $NT = wbthcoef(T, KEEPPAPP, SORH, THR)$.

7.3. ОЧИСТКА СИГНАЛОВ ОТ ШУМА В ПАКЕТЕ GUI /ЛЗ4/.

Интерфейс GUI удобен для работы в диалоговом режиме при исследовании возможностей очистки от шумов произвольных сигналов и при определении основных параметров операций для последующего закрепления в виде программ. Интерфейс

включается командой `wavemenu` или из окна редактора, Wavelet Toolbox → Main Menu и показан на рис. 7.3.1.

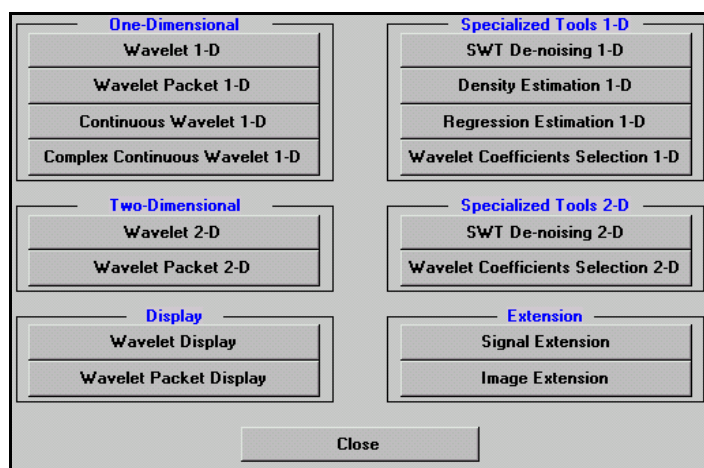


Рис. 7.3.1. Входное окно `wavemenu`.

Меню в разделах `Specialized Tools 1-D` и `2-D` имеет кнопки `SWT De-noising`, включение которых открывает специальные окна работы очистки сигналов от шумов.

На рис. 7.3.2 приведен пример включения окна одномерных сигналов. Через меню `File` → `Example Analysis` → `Noisy Signals` загружен сигнал `noischir` (график вверху слева). В правой части окна на панели управления устанавливается тип вейвлета (`Wavelet`) и количество уровней разложения (`Level`). После нажатия кнопки "`Decomposite Signal`" выполняется вейвлет-преобразование, и на графики в левой половине графической части окна выводятся функции детализирующих коэффициентов d_n всех заказанных уровней и аппроксимирующие коэффициента a_N последнего уровня.

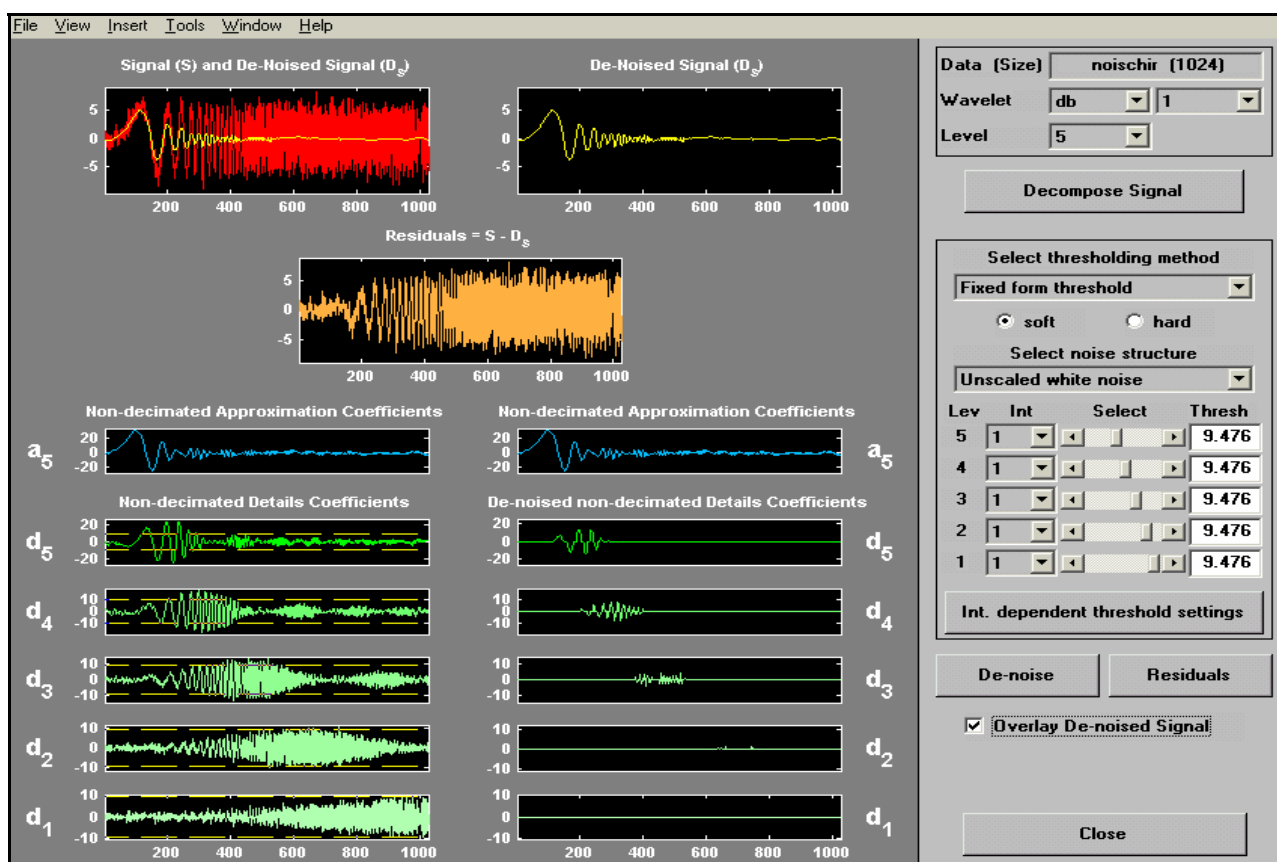


Рис. 7.3.2. Окно `SWT De-noising 1-D`.

После декомпозиции в окне управления очисткой от шумов (`Select thresholding method`) появляются предлагаемые системой параметры очистки и значения порогов,

которые можно изменять, в том числе по значениям порогов индивидуально для каждого детального уровня. Значения уровней отображаются на графиках детализирующих коэффициентов (см. рис. 7.3.2).

Графики детализирующих коэффициентов и пороги очистки можно рассматривать и уточнять в увеличенном масштабе в отдельном окне, если включить кнопку "Int. dependent threshold settings". Если средний уровень детализирующих коэффициентов резко различается по координатной оси, то в этом окне можно нажать кнопку "Generate", которая при этом заменяется панелькой "Select Number of Intervals".

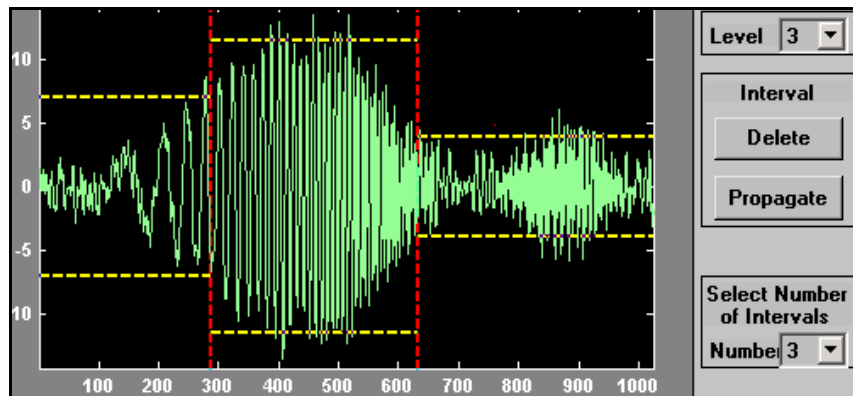


Рис. 7.3.3.

Как можно видеть на рис. 7.3.3, в этом окне для любого уровня разложения (переключатель "Level") можно разделить весь интервал коэффициентов на несколько подинтервалов (переключатель "Number") и непосредственно мышью на экране установить границы подинтервалов и пороговые уровни режекции шумов. При закрытии окна нужно ответить на вопрос "Update thresholds?" и закрепить значения порогов по установленным интервалам (Yes) или отменить (No). По умолчанию, разделение на подинтервалы появляется при этом и на всех уровнях основного окна (рис. 7.3.2), после чего изменение уровней может производиться аналогично непосредственно на графиках основного окна.

После установки порогов режекции шумов нажимается кнопка "De-noise", и на правой части графического окна появляются графики детализирующих коэффициентов после селекции, а в верхней части окна - график реконструкции сигнала по этим коэффициентам и график исключенной из входного сигнала части. Сигнал реконструкции можно записать на диск в mat-форме.

При обработке данных, записанных в других форматах (не .mat), следует сначала перевести данные в формат .mat, что можно выполнить из основного окна Matlab (Файл → Импорт данных), или из окна команд. При обработке одномерных сигналов второе предпочтительнее, так как одновременно дает возможность подготовить для GUI векторные массивы соответствующей длины, с учетом выполнения условия целого значения $M/2^N$. Ниже приведен пример считывания каротажных геофизических данных из файла формата .las, предварительно переименованного в формат .prn для использования функции dlmread, и перевода столбца 5 считанного массива (диаграмма ГК) в строковый вектор с последующей записью в файл в формате .mat.

```
fprn='c:\MATLAB6p1\work\MainData\3ar3\Zag3f.prn';
fn=72; A=dlmread(fprn,' ',fn); rows=size(A,1); cols=size(A,2);
xn=1; xk=12320; Zag3f_9_2473=A(xn:xk,1:5);
DEPT=A(xn:xk,1); GK=A(xn:xk,5);
save 'c:\MATLAB6p1\work\MainData\3ar3\gk3f.mat' GK;
```

Запись файлов в формате .mat может выполняться и непосредственно из окна рабочей области (клик правой кнопкой мыши на выбранном для записи массиве → "сохранить выбранное как...").

ЛИТЕРАТУРА

л34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, 608 с.

- л36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. / Успехи физических наук, 2001, т.171, № 5, стр. 465-501.
- л37. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 132 с.