Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»

Кафедра «Геодезия»

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Методические указания к курсовой работе

Составитель А.В. Виноградов

Омск • 2016

УДК 528
В93

Рецензент канд. техн. наук, доцент В.Л. Быков
(ООО «Лаборатория автоматизации геодезических и фотограмметрических работ», г.Омск)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве методических указаний.

Высшая геодезия [Электронный ресурс] : методические указания к курсовой работе / сост. А.В.Виноградов. – Электрон.
В93 дан. − Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа , свободный после авторизации.
ISBN 978-5-93204-965-5.

Излагается методика выполнения курсовой работы. Дается теоретический материал в объеме, необходимом для выполнения задания. Приводятся примеры с пояснениями. В приложении даются образцы выполненных работ для варианта, рассмотренного в методических указаниях.

Имеет интерактивное оглавление.

Предназначено для обучающихся направления «Геодезия и дистанционное зондирование», профиль «Геодезия».

Текстовое (символьное) издание (700 КБ)
Системные требования: Intel, 3,4 GHz; 150 МБ; Windows XP/Vista/7; DVD-ROM;
1 ГБ свободного места на жестком диске; программа для чтения pdf-файлов Adobe Acrobat Reader; Google Chrome

Издание первое. Дата подписания к использованию 28.07.2016

Издательско-полиграфический центр СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира, 5
РИО ИПЦ СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при освоении материала на аудиторных занятиях и при выполнении внеаудиторной академической самостоятельной работы (ВАРС). Они позволяют обучающимся рационально планировать время на подготовку теоретического материала, методически правильно выполнять лабораторные работы и подготовить их к сдаче преподавателю.

Дисциплина базируется на знаниях, полученных студентами при изучении высшей математики, информатики, геодезии.

Методические указания включают введение, цели и задачи, образовательно-профессиональные требования по дисциплине, программу дисциплины, трудоемкость её основных элементов, задания и краткие методические рекомендации к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы, вопросы для самопроверки и критерии оценки знаний.

В результате изучения раздела сфероидической геодезии курса высшей геодезии студенты получают знания и практические навыки, которые должны обеспечить решение следующих задач в их профессиональной деятельности:

– соотношение параметров земного эллипсоида;
– изучение систем координат, используемых в сфероидической геодезии;
– вывод радиусов кривизны эллипсоида;
– замена взаимных нормальных сечений геодезической линией при математической обработке треугольников триангуляции;
– вычисление длин дуг меридианов и параллелей;
– решение малых сфероидических треугольников способами Лежандра и аддитаментов;
– главные геодезические задачи их точность и методы решения прямой и обратной геодезических задач на поверхности эллипсоида и практическое их приложение;
– вычисление прямоугольных координат по геодезическим B и L в проекции Гаусса-Крюгера;
– вычисление геодезических координат B и L по X и Y;
– перевычисление координат из одной зоны в другую разными методами.

Для понимания изложенного материала необходимы знания по высшей математике, других разделов высшей геодезии, геодезической астрономии.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

При выполнении любых геодезических работ на земной поверхности (эллипсоиде вращения) предполагается определение координат отдельных точек в какой-либо системе координат. Каждой системе соответствуют свои методы и формулы вычислений. Таким образом, целью изучения сфероидической геодезии является:

– глубокое изучение теоретических и практических вопросов существующих систем координат их связи между собой;

– целесообразность решения прямой и обратной геодезических задач на поверхности эллипсоида;

– решение геодезических задач на плоскости проекции Гаусса-Крюгера и других проекций.

Задачи дисциплины:

– научное обоснование того или иного метода решения главных геодезических задач;

– определение приоритетности решения задач сфероидической геодезии с позиций экономической эффективности;

– обучения студентов навыкам выбора оптимальных формул для определения расстояний между точками на земной поверхности в зависимости от точности и цели решения задач.

После окончания изучения сфероидической геодезии студенты должны знать:

– требования, точность формул для решения прямой и обратной геодезических задач;

– требования и точность вычисления прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера;

– требования и точность формул при перевычислении координат из одной координатной зоны в другую различными способами;

– правила установления местных систем координат;

– порядок перевычисления координат из одной пространственной прямоугольной системы координат в другую, например из ПЗ–90.02 в ГСК–2011.

2. ЗАДАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Эллипсоид Ф. Н. Красовского: a = 6 378245, α = 1/298,3.
Геодезическая система координат ГСК–2011: a= 6 378136,5,
α = 1/298,2564151.

2.1. Упражнения по вычислению радиусов кривизны M, N и R земного эллипсоида; (B–Φ) и (B–U); вычисление длин дуг меридианов и параллелей S и s

Упражнение 1

Земным эллипсоидом называется эллипсоид вращения, формы и размеры которого соответствуют формам и размерам Земли. Пересекая поверхность эллипсоида вращения плоскостями, переходящими через ось вращения, получают плоские кривые – эллипсы (табл.1).

Таблица 1

Исходные данные к решению прямой геодезической задачи

№ задания	Широта, B_1	Долгота, L_1	Сторона, S	Прямой азимут, $A_{1\text{-}2}$
1	2	3	4	5
1	51°31′02″,4820	78°17′40″,1740	31175,634	56° 42′ 07″,9496
2	51°31′17″,4820	78°17′ 47″,6740	31175,642	56° 42′ 28″,0009
3	51°31′ 32″,4820	78°17′ 55″,1740	31175,553	56° 42′ 47″,6336
4	51°31′ 47″,4820	78°18′02″,6740	31175,562	56° 43′ 07″,6786
5	51°32′02″,4820	78°18′ 10″,1740	31175,570	56° 43′ 27″,7203
6	51°32′ 17″,4820	78°18′ 17″,6740	31175,577	56° 43′ 47″,7589
7	51°32′ 32″,4820	78°18′ 25″,1740	31175,584	56° 44′ 07″,7944
8	51°32′ 47″,4820	78°18′ 32″,6740	31175,590	56° 44′ 27″,8266
9	51°33′02″,4820	78°18′ 40″,1740	31175,596	56° 44′47″,8557
10	51°33′17″,4820	78°18′ 47″,6740	31175,601	56° 45′ 07″,8815
11	51°33′ 32″,4820	78°18′ 55″,1740	31175,606	56° 45′ 27″,9043
12	51°33′ 47″,4820	78°19′ 02″,6740	31175,610	56° 45′ 47″,9239
13	51°34′02″,4820	78°19′ 10″,1740	31175,614	56° 46′ 07″,9403
14	51°34′ 17″,4820	78°19′ 17″,6740	31175,618	56° 46′ 27″,9535
15	51°34′ 32″,4820	78°19′ 25″,1740	31175,621	56° 46′ 47″,9637
16	51°34′ 47″,4820	78°19′ 32″,6740	31175,624	56° 47′ 07″,9706
17	51°35′02″,4820	78°19′ 40″,1740	31175,626	56° 47′ 27″,9743

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5
18	51˚35′ 17″,4820	78˚19′ 47″,6740	31175,628	56˚ 47′ 47″,9750
19	51˚35′ 32″,4820	78˚19′ 55″,1740	31175,629	56˚ 48′ 07″,9724
20	51˚35′ 47″,4820	78˚20′02″,6740	31175,630	56˚ 48′ 27″,9667
21	51˚36′02″,4820	78˚20′ 10″,1740	31175,631	56˚ 48′ 47″,9579
22	51˚36′ 17″,4820	78˚20′ 17″,6740	31175,631	56˚ 49′ 07″,9458
23	51˚36′32″,4820	78˚20′25″,1740	31175,630	56˚ 49′ 27″,9306
24	51˚36′ 47″,4820	78˚20′ 32″,6740	31175,629	56˚ 49′ 47″,9122
25	51˚37′02″,4820	78˚20′40″,1740	31175,628	56˚ 50′ 07″,8908
26	51˚37′ 17″,4820	78˚20′ 47″,6740	31175,626	56˚ 50′ 27″,8661
27	51˚37′ 32″,4820	78˚20′ 55″,1740	31175,624	56˚ 50′ 47″,8383
28	51˚37′47″,4820	78˚21′02″,6740	31175,622	56˚ 51′ 07″,8072
29	51˚38′02″,4820	78˚21′ 10″,1740	31175,618	56˚ 51′ 27″,7232
30	51˚38′ 17″,4820	78˚21′ 17″,6740	31175,615	56˚ 51′ 47″,7359
31	51˚38′ 32″,4820	78˚21′ 25″,1740	31175,611	56˚ 52′ 07″,6955
32	51˚38′47″,4820	78˚21′ 32″,6740	31175,606	56˚ 52′ 27″,6519
33	51˚39′02″,4820	78˚21′40″,1740	31175,602	56˚ 52′ 47″,6052
34	51˚39′ 17″,4820	78˚21′ 47″,6740	31175,596	56˚ 53′ 07″,5553
35	51˚39′ 32″,4820	78˚21′ 55″,1740	31175,591	56˚ 53′ 27″,5024
36	51˚39′ 47″ ,4820	78˚22′ 02″,6740	31175,584	56˚ 53' 47″,4461
37	51˚40′ 02″,4820	78˚22′ 10″,1740	31175,581	56˚ 54′ 07″,4000
38	51˚40′ 17″,4820	78˚22′ 17″,6740	31175,571	56˚ 54′ 27″,3244
39	51˚40′ 32″,4820	78˚22′ 25″,1740	31175,563	56˚ 54′ 47″,2588
40	51˚40′47″,4820	78˚22′ 32″,6740	31175,555	56˚ 55′ 07″,1900
41	51˚41′ 02″,4820	78˚22′40″,1740	31175,550	56˚ 55′ 27″,1181
42	51˚41′ 17″,4820	78˚22′ 47″,6740	31175,539	56˚ 55′ 47″,0422
43	51˚41′ 32″,4820	78˚22′ 55″,1740	31175,528	56˚ 56′ 06″,9650
44	51˚41′47″,4820	78˚23 02″,6740	31175,519	56˚ 56′ 26″,8837

Половина каждого эллипса, расположенная между полюсами, называется меридианом, который является одним из главных нормальных сечений.

M – радиус кривизны меридиана вычисляется по формуле

$$M = \frac{c}{V^3} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W^3} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2 B\right)^3}}; \; W = \sqrt{\left(1-e^2\sin^2 B\right)}. \tag{1}$$

Второе главное нормальное сечение, перпендикулярное меридиану, называется первым вертикалом.

N – радиус кривизны первого вертикала вычисляется по формуле

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \qquad (2)$$

Среднее геометрическое значение из главных радиусов кривизны называется средним радиусом кривизны и вычисляется по формуле:

$$R = \sqrt{MN}. \qquad (3)$$

Упражнение 2

Рассчитать приближенную разницу между геодезической и геоцентрической широтами по формуле

$$(B - \varPhi)'' = \frac{1}{2} p'' e^2 \sin 2B \qquad (4)$$

и разницу между геодезической и приведенной широтами по формуле

$$(B - U)'' = \frac{1}{2} p'' e^2 \sin 2B. \qquad (5)$$

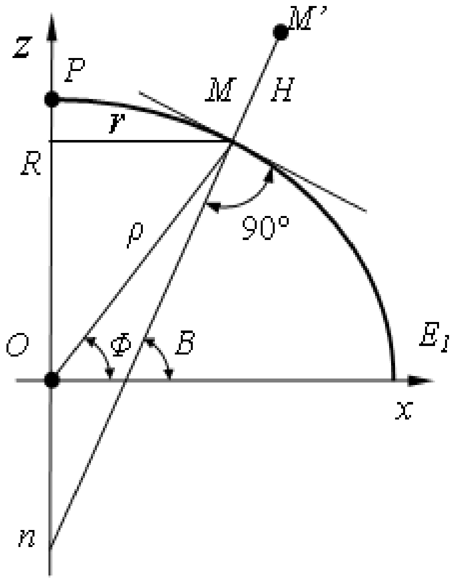

Рис. 1. Геоцентрическая широта

В формулах (4) и (5) B – геодезическая широта. Геодезической широтой B называется острый угол между нормалью к поверхности эллипсоида проходящей через данную точку и плоскостью экватора.

Геоцентрической широтой $\varPhi$ называется угол между радиусом-вектором ρ точки M и плоскостью экватора EE_1 (рис. 1).

Радиус-вектор OM меридианного эллипса (рис.1), проведён из центра эллипса к точке M. Угол MOE_1 – геоцентрическая широта точки M.

Формула связи геоцентрической широты и геодезической

$$\operatorname{tg}\Phi = \left(1 - e^2\right)\operatorname{tg}B.$$

Формула связи приведённой широты и геодезической

$$\operatorname{tg}B = \left(1 - e'^2\right)\operatorname{tg}U.$$

Точка M находится на поверхности земного эллипсоида (рис. 2). Чтобы получить приведенную широту U необходимо продолжить ординату из точки M до пересечения с окружностью в точке m. Центр окружности находится в точке O, радиус равен большой полуоси эллипсоида.

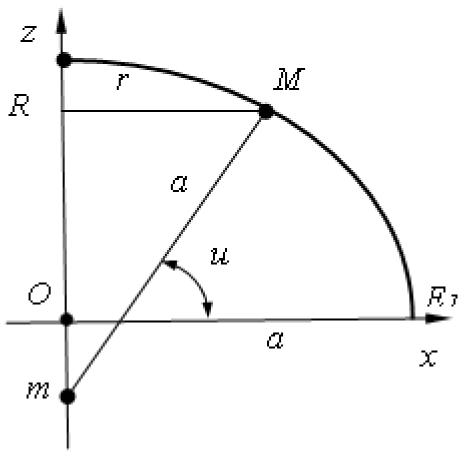

Рис. 2. Приведённая широта

Упражнение 3

Вычисление длин дуг меридианов S и параллелей s.

Длину дуги меридиана S между точками на эллипсоиде, когда расстояние не превышает 40 – 50 км вычислить по формуле

$$S = M_m \frac{\left(B_2 - B_1\right)''}{p''}, \qquad (6)$$

где B_{1_1} – широта первой точки, взятая из табл. 1 по порядковому номеру студента в журнале преподавателя;

B_2 – широта второй точки B_2= 51°59'00"+ (№)", где № – порядковый номер студента в журнале;

M_m – радиус кривизны меридиана, вычисленный по средней широте.

Найдём среднюю широту

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Пример. По списку в журнале порядковый номер студента 10. Из табл. 1 выбираем широту точки 1. B_1 = 51˚33'17",482

Широта точки 2 будет B_2 = 51˚59'00",0 + (№)" = 51˚59'10",0, где № – порядковый номер студента в журнале (в секундах).

Средняя широта B_m составит

$$B_m = \frac{51°33'17'',5 + 51°59'10'',0}{2} = 51°46'13'',75.$$

2. Вычислить длину дуги параллели s :

$$s = N \cos B_1 \frac{l''}{\rho''} ,$$

где N – радиус кривизны первого вертикала, вычислить по (2).

B_1 – широта, взятая из табл. 1 по порядковому номеру студента в списке преподавателя;

l'' – разность долгот в секундах: $l'' = L_2 - L_1$;

L_1 – долгота первой точки, взятая из таблицы 1;

L_2 – долгота второй точки: L_2 = 78˚45'00",0 + (№)", где № – число секунд, равное порядковому номеру студента в журнале.

Пример. Порядковый номер студента – 44.

Долгота L_2 = 78˚45′44″,0, долгота L_1 = 78˚23′02″,674, разность долгот l'' = 78˚45′44″,0 – 78˚23′02",674 = 1361″,326.

Исходные данные

a – большая полуось эллипсоида, a = 6378245,00 м; α = 1/298,3;

e'^2 – второй эксцентриситет меридианного эллипса;

b – полярная или малая полуось эллипсоида;

e^2 – первый эксцентриситет меридианного эллипса,

$$e'^2 = \frac{a_2 - b_2}{b^2} = \frac{\mathrm{e}^2}{1-e^2} = \frac{2 \cdot f - 1}{(f-1)^2}; \quad f = \frac{1}{\alpha}; \quad e'^2 = 0{,}006\ 73852\ 5415;$$

$$b = a(1-\alpha) = a\sqrt{1-e^2} = c(1-e^2); \quad b = 6356\ 863{,}01877 \text{ м};$$

$$e^2 = \frac{a_2 - b_2}{a^2} = \frac{e'^2}{1+e^2} = \frac{2 \cdot f - 1}{f^2}; \quad e^2 = 0{,}006\ 69342\ 1623;$$

средний радиус кривизны $\quad R = \sqrt{MN} = \dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2 \sin^2 B)}$,

2.2. Вычисление длины дуги меридиана для эллипсоидов

Даны точки с широтами B_1, B_2, B_3 и B_4 (табл.2), где № – порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица 2

Исходные данные

Длина дуги меридиана	Широта	Числовое значение
S_1	B_1	$33^\circ 00' 18'',2632 + № * 1'$
	B_2	$45^\circ 00' 34'',8726 + № * 2'$
S_2	B_3	$63^\circ 00' 26'',3846 - № * 4'$
	B_4	$80^\circ 00' 39'',6715 - № * 3'$

Эллипсоид Ф. Н. Красовского: a = 6 378245, α = 1/298,3.
Геодезическая система координат ГСК–2011: a = 6 378136,5,
α = 1/298,2564151.

Задание

Необходимо рассчитать длины дуг от экватора до каждой из четырех точек по разным формулам для системы координат СК–95 – эллипсоид *Ф. Н.* Красовского и для системы ГСК–2011.

Пример. Для студента, порядковый номер которого 1, найдём

$$B_2 = 45^\circ 02'34'', 8726; \qquad B_1 = 33^\circ 01'18'',2632.$$

По широтам B_1, B_2, B_3 и B_4 найти дуги меридиана X от экватора до точек с заданными широтами по формулам

$$X = a_0 B - \frac{a_2}{2}\sin 2B + \frac{a_4}{4}\sin B - \frac{a6}{6}\sin B + \ldots$$

$$a_0 = m_0 - \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_4 + \frac{5}{16}m_6, \quad m_0 = a\left(1 - e^2\right);$$

$$a_2 = \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6, \quad m_2 = \frac{3}{2} e^2 m_0; \tag{7}$$
$$a_4 = \frac{m_4}{2} + \frac{3}{16} m_6, \quad m_4 = \frac{5}{4} e^2 m_2;$$
$$a_6 = \frac{m_6}{32}, \quad m_2 = \frac{7}{6} e^2 m_4$$

или

$$X = \frac{a}{1+n} \cdot \left(\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right) \cdot B - \left(\frac{3}{2} \cdot n - \frac{3}{16} \cdot n^3 \right) \cdot \sin 2B + \left(\frac{15}{16} \cdot n^2 - \frac{15}{64} \cdot n^4 \right) \cdot \sin 4B - \frac{35}{48} \cdot n^3 \cdot \sin 6B \right)$$

$$n = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^4}{16} \cdots = \frac{1}{2f-1}, \tag{8}$$

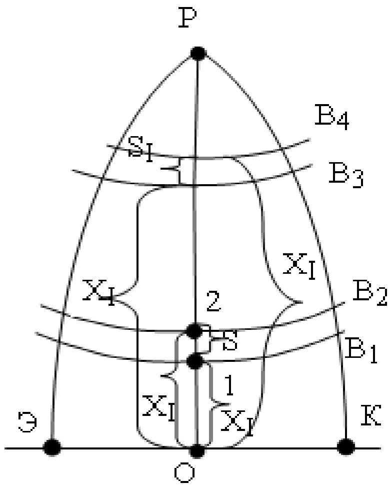

Рис. 3. Дуги меридиана

где a – большая полуось эллипсоида; α – сжатие; f – знаменатель сжатия.

На рис. 3 дуги меридианов обозначены как X_{II} и X_I. Разность X равна дуге в метрах между соответствующими точками. Эта же дуга вычислена, кроме того, как B_I'' в секундах. Таким же образом найдём дугу S_{II} в метрах и B_{II}'' в секундах.

При разности широт в пределах нескольких градусов длину дуги ΔX найти по способу Симпсона (9).

$$\Delta X = \frac{B_m - B_0}{3m} (M_0 + M_m + 4(M_1 + M_3 + ... + M_{m-1}) + \\ + 2(M_2 + M_4 + ... + M_{m-2})) \tag{9}$$

где B_0 и B_m – широты начальной и конечной точек дуги меридиана,

M_i – радиус кривизны меридиана в заданной точке, вычисляют по формуле (1);

m – число равных интервалов на которое делят дугу меридиана (m – чётное число).

При вычислениях дугу делят на 8 равных интервалов, находят широты промежуточных точек и радиусы кривизны меридиана в этих точках. Первую точку считают нулевой. Значения широт в формуле (9) выражают в радианах.

4. По формулам (7) или (8) вычислить дуги меридиана от экватора до заданных точек для эллипсоида Ф. Н. Красовского и ГСК-2011 г.

Вычислить разности дуг.

5. По формулам Симпсона (9) с учётом (1) вычислить дуги второй раз.

6. К сдаче представить:

– два варианта вычисления дуг, расхождения между вариантами для эллипсоида Ф. Н. Красовского,

– два варианта вычисления дуг, расхождения между вариантами для эллипсоида ГСК–2011.

2.3. Решение геодезических задач на поверхности земного эллипсоида

Главные геодезические задачи, решаемые методами сфероидической геодезии, позволяют определить геодезические координаты B и L некоторой точки или длину геодезической линии и ее азимут на поверхности эллипсоида (рис. 4).

Решение ГГЗ для пунктов P и Q сводится к решению сфероидического треугольника PDQ. При решении ПГЗ известными являются сторона $DR = 90^0 - B_1$, длина геодезической линии s и азимут этой линии A_1. При решении ОГЗ известными являются стороны $DR = 90^0 - B_1$, $DQ = 90^0 - B_2$ и угол $\Delta L = L_2 - L_1$. Следовательно, решение ГГЗ в свете сфероидической геодезии заключается в вычислении двух углов и стороны сфероидического треугольника, по известным двум его сторонам и углу между ними.

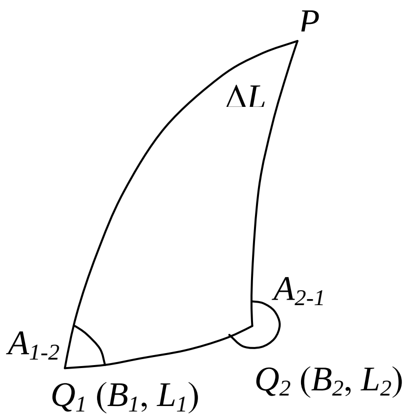

Рис. 4. Полярный сфероидический треугольник

Формулы сферической тригонометрии используются только для решения треугольника на шаре, поэтому для решения сфероидического треугольника используются специальные приемы.

Прием 1. Прямой путь решения, при котором используется какая-либо проекция поверхности эллипсоида на шар. По трем элементам сфероидического треугольника находят элементы соответствующего ему сферического треугольника, который решают по формулам сферической тригонометрии. Затем выполняется обратный переход с шара на эллипсоид. Одной из лучных реализаций этого приема считается способ Бесселя.

Прием 2. Косвенный путь решения предполагает нахождение приращений геодезических координат и азимута, от которых осуществляется переход к искомым величинам. Этот прием был распространен для решения ГГЗ для рядов триангуляции при построении АГС в XX столетии. В связи с развитием принципиально новых методов создания ГГС и вычислительной техники этот прием потерял актуальность.

Прием 3. Сводится к редуцированию исходных величин на плоскость в некоторой проекции. Например, в проекции Гаусса-Крюгера. ГГЗ решаются по формулам плоской тригонометрии, после чего выполняется обратное редуцтрование.

Прием 4. Решение ГГЗ в пространстве. Для этого от известных величин на поверхности эллипсоида переходят к их значениям в пространственной прямоугольной системе координат. Дальнейшие вычисления ведутся по формулам аналитической геометрии с обратным преобразованием найденных элементов на поверхность эллипсоида.

Решение прямой и обратной геодезических задач

Рассмотрим методы определения взаимного положения точек, расположенных непосредственно на поверхности земного эллипсоида.

Прямая геодезическая задача

Исходные данные: геодезические координаты B_1 и L_1 точки Q_1 ,а также азимут A_{1-2} с точки Q_1 на точку Q_2 и расстояние S между пунктами Q_1 и Q_2 (см рис.4).

Требуется определить широту B_2 и долготу L_2 точки Q_2 и обратный азимут A_{2-1} с точки Q_2 на точку Q_1.

Прямая геодезическая задача решается главным образом при вычислении геодезических координат пунктов триангуляции 1 класса. Зная координаты начального пункта, а так же расстояния и азимуты на соседние пункты вычисляют геодезические координаты и обратные азимуты для всех других пунктов, непосредственно связанных с начальным пунктом.

Исходные данные: по своему порядковому номеру в списке журнала преподавателя из табл. 4 взять B_1; L_1; S и $A_{1\cdot 2}$..

Задание

Вычислить геодезические координаты L_1 и L_2 и обратный азимут $A_{2\cdot 1}$ с пункта Q_2 на пункт Q_1.

Порядок выполнения задания

Порядок решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя на эллипсоиде Ф. Н. Красовского

Исходными данными являются широта B_1, долгота L_1, длина геодезической линии s и азимут A_1 этой линии в начальной точке. Необходимо найти широту B_2 и долготу L_2 конечной точки, и обратный азимут A_2 в этой точке. При вычислениях угловые величины необходимо выражать в радианах.

1. Вычисляем приведённую широту начальной точки:

$$\sin U_1 = \frac{\mathrm{tg}U_1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\mathrm{U}_1}};\ \cos U_1 = \frac{1_1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\mathrm{U}_1}};\ tgU_1 = \sqrt{1-e^2 tgB_1}\,. \qquad (10)$$

2. Для перехода от s к σ найдём вспомогательные величины A_0 и σ_1 по формулам

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\mathrm{tg}U_1}{\cos\mathrm{A}_1}, \mathrm{tg}A_0 = \frac{\sin A_1 \cos A_1}{\mathrm{t}gU_1}. \qquad (11)$$

Введём обозначение $k^2 = +e'^2 \cos A_0$ и вычислим коэффициенты α, β, γ по формулам (12) и α_1, β_1 по формулам (13)

$$A = 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - ...;$$

$$B = \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512}k^6 - \ldots;$$

$$C = \frac{k^4}{128}^{4} + 512k^6 + \ldots;$$

$$\alpha = \frac{1}{bA} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{k^2}{4} + \frac{7}{64}k^4 - \frac{15}{256}k^6 + \ldots\right);$$

$$\beta = \frac{B}{A} = \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{8}^{4} + \frac{37}{512}k^6 - \ldots\right);$$

$$\gamma = \frac{C}{A} = \left(\frac{k^4}{128}^{4} - \frac{k^6}{128}^{6} + \ldots\right); \qquad (12)$$

$$\beta_1 = \left(\left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\ldots\right)\cos^2 A_0 - \left(\frac{e^6}{32} + \ldots\right)\cos^4 A_0\right); \qquad (13)$$

$$\sigma = \alpha S + \beta \sin\sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma + \ldots)\ . \qquad (14)$$

За первое приближение примем $\sigma_0 = \alpha S$.

Примем обозначения:

$$\mathrm{I}_\sigma = \beta \sin\sigma_0 \cos(2\sigma_1 + \sigma_0);$$

$$\mathrm{II}_\sigma = \gamma \sin 2\sigma_0 \cos(4\sigma_1 + \sigma_0);$$

$$\mathrm{III}_\sigma = \mathrm{I}_\sigma \beta \cos(2\sigma_1 + \sigma_0).$$

Для вычисления σ'' с погрешностью менее 0,001" получили формулу

$$\sigma = \sigma_0 + \mathrm{I}_\sigma + \mathrm{II}_\sigma + \mathrm{III}_\sigma. \qquad (15)$$

Находим сферическое расстояние σ по формуле и затем $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$. Решаем прямую задачу на шаре по формулам

$$\mathrm{tg}\lambda_1 = \sin A_0 \mathrm{tg}\sigma_1; \qquad \mathrm{tg}\lambda_2 = \sin A_0 \mathrm{tg}\sigma_2;$$

$$\mathrm{tg}A_2 = \frac{\mathrm{tg}A_0}{\cos\sigma_2}; \qquad \mathrm{tg}U_2 = -\cos A_2 \mathrm{tg}\sigma_2;$$

$$\lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \qquad (16)$$

Далее вычислим разность долгот

$$l = \lambda - \sin A_0 \left(\alpha_1 \sigma + \beta_1 \sin \sigma \cos 2\sigma_1 + \sigma \right). \qquad (17)$$

Вычисляем геодезическую широту конечной точки

$$\mathrm{tg} B_2 = \sqrt{1 + e'^2}\, \mathrm{tg} U_2$$

и геодезическую долготу $L_2 = L_1 + l$.

Способ Бесселя по простоте и строгости решения превосходит любые другие и его можно применять при любых расстояниях между точками на эллипсоиде. Погрешности по способу Бесселя зависят от количества верных значащих цифр, удерживаемых при вычислениях, так как ряды в формулах (14) и (17) быстро сходятся и могут быть вычислены с любой необходимой точностью.

При решении прямой геодезической задачи необходимо удерживать не менее девяти верных значащих цифр.

Решив прямую геодезическую задачу, получим координаты второго пункта Q_2 геодезической линии Q_1Q_2, то есть B_2 и L_2, которые будут исходными данными для решения обратной геодезической задачи.

Обратная геодезическая задача

К решению обратной геодезической задачи прибегали в некоторых методах уравнивания полигонов триангуляции 1-го класса. В прошлом различали:

1. Малые расстояния до 30 – 45 км.
2. Средние расстояния до 600 км.
3. Большие – до 5 000 км.
4. Очень большие – до 19 000 – 20 000 км.

В настоящее время для решения прямой и обратной геодезической задачи на эллипсоиде целесообразнее применять способ Бесселя. Точность получения прямого и обратного азимута и расстояния между пунктами Q_1 и Q_2 геодезической линии будут зависеть от погрешностей применяемого математического аппарата, исходных данных и погрешностей вычислений.

Рассмотрим решение обратной геодезической задачи.

Исходные данные: $B_1; L_1$ и $B_2; L_2$; требуется получить $S_{1\cdot2}$; $A_{2\cdot1}$ и $A_{1\cdot2}$.

Порядок выполнения задания

Решение обратной геодезической задачи на эллипсоиде по способу Бесселя сложнее прямой задачи, так как по исходным данным можно вычислить на шаре только приведённые широты U_1 и U_2 по формулам $\mathrm{tg}U_1 = \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{tg}B_1$; $\mathrm{tg}U_2 = \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{tg}B_2$.

Предварительные вычисления (18 -21)

Разность долгот l выражается в радианах.

Для определения долготы λ на шаре необходимо знать A_0, σ_1 и δ, которые зависят от s и A_1. Следовательно, применим последовательные приближения.

$$W_1 = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}; \;\; W_2 = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_2};$$

$$\sin u_1 = \frac{\sin B_1\sqrt{1-e^2}}{W_1}; \quad \sin u_2 = \frac{\sin B_2\sqrt{1-e^2}}{W_2};$$

$$\cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1}; \quad \cos u_2 = \frac{\cos B_2}{W_2}; \;\; l = L_2 - L_1. \tag{18}$$

$$a_1 = \sin u_1\cdot\sin u_2; \quad a_2 = \cos u_1\cdot\cos u_2;$$

$$b_1 = \cos u_1\cdot\sin u_2; \quad b_1 = \sin u_1\cdot\cos u_2. \tag{19}$$

$$\lambda = l + \delta. \tag{20}$$

В первом приближении принимаем $\delta = 0$ радиан.

$$p = \cos u_2\cdot\sin\lambda; \;\; q = b_1 - b_2\cdot\cos\lambda; \;\; A_1' = \arccos\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}; \tag{21}$$

где $A_1 = A_1'$ если p > 0 или $A_1 = 2\cdot\pi - A_1' = 360^0 - A_1'$ если p < 0.

Вычисляем дугу на шаре

$$\arccos\sigma = \alpha_1 + \alpha_2\cdot\cos\lambda\,, \tag{22}$$

далее A_0 и коэффициенты $\alpha,\ \beta$ и поправку δ

$$\sin A_0 = \cos u_1 \cdot \sin A_1;\ \cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0;\ x = 2 \cdot \alpha_1 - \cos^2 A_0 \cdot \cos\sigma$$

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{16}\right) - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\right) \cdot \cos^2 A_0 + \frac{3}{128} e^6 \cos^4 A_0;$$

$$\beta' = \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16}\right) - \frac{e^6}{32} \cdot \cos^2 A_0;\ \ \delta = \left(\alpha \cdot \sigma - \beta' \cdot x \cdot \sin\sigma\right) \cdot \sin A_0. \quad (23)$$

Коэффициенты $\alpha,\ \beta$ и поправка δ получаем в радианах.

Вычисленное значение δ подставляем в (20) и повторяем все вычисления по формулам (21), (22) и (23) и т.д. Приближения заканчиваем, когда $\left|\delta_i - \delta_{i-1}\right| < 48 \cdot 10^{-11}$.

Значения λ, A_1, σ, x и $\sin A_0$, полученные в последнем приближении принимаем за окончательные.

Вычисляем коэффициенты A, B', C' и геодезическую линию на эллипсоиде s.

Для нахождения коэффициентов A, B', C' возьмем следующие формулы:

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0; \quad (24)$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} + \frac{5k^6}{256}; \quad (25)$$

$$B' = \frac{e'^2}{4} - \frac{e'^4}{16} \cos^2 A_0 + \frac{15}{512} e'^6 \cos^4 A_0; \quad (26)$$

$$C' = \frac{e'^4}{64} - \frac{3e'^6}{128}. \quad (27)$$

Длину геодезической линии на эллипсоиде вычисляем по формулам:

$$y = \left(\cos^4 A_0 - 2x^2\right) \cdot \cos\sigma;$$

$$s = \left(A \cdot \sigma + \left(B' \cdot x + C' \cdot y\right) \cdot \sin\sigma\right) \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right), \quad (28)$$

где a – большая полуось эллипсоида, f – знаменатель сжатия.

Обратный азимут найдем из формул:

$$p' = \cos u_1 \cdot \sin\lambda; \quad q' = b_1 \cdot \cos\lambda - b_2;$$

$$A_2' = \arccos\left(\frac{q'}{\sqrt{q'^2 + p'^2}}\right); \qquad (29)$$

где $A_2 = \pi + A_2' = 180^0 + A_2'$, если $p'>0$ или $A_2 = \pi - A_2' = 180^0 - A_2'$, если $p'<0$.

Погрешности вычислений прямой и обратной задач не превышают 2 мм в координатах и в длинах линий и 0,001” в азимутах.

2.4. Вычисление прямоугольных координат Гаусса по геодезическим координатам и обратно, с вычислением Гауссового сближения меридианов

Необходимо вычислить прямоугольные координаты x и y в проекции Гаусса-Крюгера по геодезическим координатам B и L в системе СК–95 и ГСК–2011.

Каждый студент пользуется данными своего индивидуального задания, т. е. геодезическими координатами пункта. Индивидуальные задания составлены так, что все пункты находятся в полосах перекрытия шестиградусных зон. Шестиградусная зона проекции Гаусса-Крюгера представляет собой сфероидический двуугольник, построенный от одного полюса до другого и ограниченный меридианами.

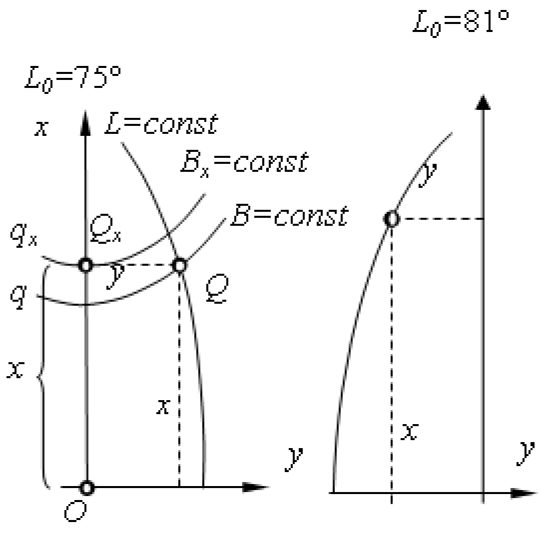

Рис. 5. Схема геометрической связи между геодезическими и плоскими координатами в двух зонах

В каждой зоне изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс, а изображение экватора за ось ординат. В проекции Гаусса-Крюгера осевой меридиан и экватор изображаются прямыми линиями. В каждой зоне имеется своё начало координат – это проекция точки пересечения осевого меридиана с экватором на плоскость в проекции Гаусса.

Точка a (рис. 5) − изображение точки A (эллипсоида) на плоскости. Положение a определяется прямоугольными координатами x и y. Каждый студент вычисляет координаты точек от осевых меридианов двух смежных зон, например от осевого меридиана 75° и 81°.

Исходные данные: Для точки с геодезическими координатами B_1 и L_1, которые выбирают из табл. 4, по номеру студента в журнале преподавателя необходимо вычислить *x* и *y* от осевого меридиана 75° и 81° с учётом номера зоны.

Порядок выполнения работы

1. По геодезическим координатам *B* и *L* каждой точки вычислить прямоугольные координаты $x^Г$ и $y^Г$ по формулам

$$x^Г = x_B + \left(0.5 + \left(a_4 + \left(a_6 + a_8 \cdot l^2\right) \cdot l^2\right) \cdot l^2\right) \cdot l^2 \cdot N \cdot \sin B \cdot \cos B;$$
$$y = \left(1 + \left(a_3 + \left(a_5 + a_7 \cdot l^2\right) \cdot l^2\right) \cdot l^2\right) \cdot l \cdot N \cdot \cos B;$$
$$y^Г = (\text{№}зоны) \cdot 10^6 + 500000 + \mathrm{y}, \qquad (30)$$

где $l = L - L_0$;

$$x_B = \frac{a}{1+n}\left(\left(1 + \frac{1}{8}n^2\right)^2 B + \sin 2 \cdot B\left(c'_0 + \cos 2 \cdot B \cdot \left(c'_2 + c'_4 \cdot \cos 2 \cdot B\right)\right)\right);$$

$$c'_0 = \frac{n}{12}\left(11 \cdot n^2 - 18\right);\; c'_2 = \frac{15 \cdot n^2}{32}(4 - n);\; c'_4 = -\frac{35}{12}n^3;$$

$$n = \frac{1}{2 \cdot f - 1};\; N = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - e^2 \cdot \sin^2 B\right)}};\; e^2 = \frac{2 \cdot f - 1}{f^2};\; e'^2 = \frac{2 \cdot f - 1}{(f-1)^2};$$

$$a_3 = \left(\left(2 + e'^2 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B - 1\right)/6;$$
$$a_4 = \left(\left(6 + \left(9 \cdot e'^2 + 4 \cdot e'^4 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B - 1\right)/24;$$
$$a_5 = \left(1 - \left(20 - \left(24 - 58 \cdot e'^2 + 72 \cdot e'^2 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right)/120;$$
$$a_6 = \left(1 - \left(60 + \left(330 \cdot e'^2 - 120 - 600 \cdot e'^2 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right)/720;$$
$$a_7 = \left(\left(182 - \left(840 - 720 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B - 1\right)/5040;$$
$$a_8 = \left(\left(546 - \left(4200 - 5040 \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B\right) \cdot \cos^2 B - 1\right)/40320.$$

В формулах (30) приняты следующие обозначения: l – разность долгот $l = L - L_0$, где L_0 – долгота осевого меридиана, L_1 – долгота точки. Величины l и B выражены в радианах.

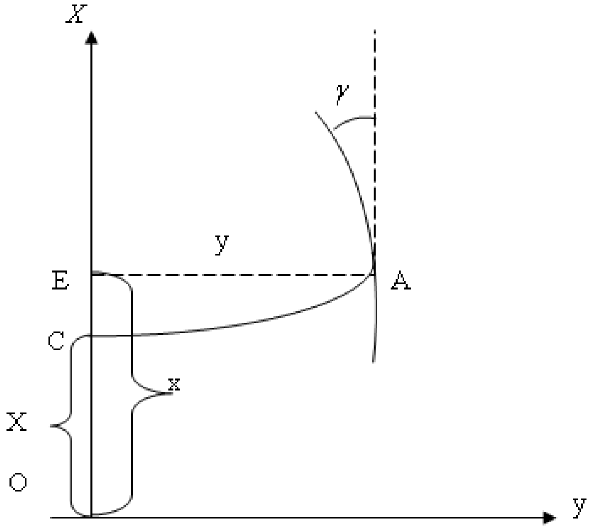

Рис. 6. Искомая абсцисса точки

В приведенных формулах:
x^{Γ} – искомая абсцисса точки (рис. 6); X_B – дуга меридиана от экватора до параллели с широтой той же точки; y – ордината.

Вычисление геодезических координат B и L по прямоугольным координатам x и y:

$$y = y^{\Gamma} - (\text{№зоны}) \cdot 10^6 - 500000;$$
$$B = B_x + (((a_8 \cdot z^2 - a_6) \cdot z^2 + a_4 - 1) \cdot z^2 \cdot a_2);$$
$$l = (((b_7 \cdot z^2 + b_5) \cdot z^2 + b_3) \cdot z^2 + 1) \cdot z;$$
$$\beta = \frac{x}{R_0};\ R_0 = \frac{a}{1+n}\left(1 + \frac{n^2}{8}\right);\ L = L_0 + l, \tag{31}$$

где

$$B_x = \beta + \sin 2 \cdot \beta (k_0 + \cos 2 \cdot \beta \cdot (k_2 + k_4 \cdot \cos 2 \cdot \beta));$$
$$k_0 = \frac{n}{12}(18 - 29 \cdot n^2);\ k_2 = \frac{n}{16}(42 - 55 \cdot n^2);\ k_4 = \frac{151}{24} n^3;$$
$$n = \frac{1}{2 \cdot f - 1};\ N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2 B_x)}};\ e^2 = \frac{2 \cdot f - 1}{f^2};\ e'^2 = \frac{2 \cdot f - 1}{(f-1)^2};$$
$$a_2 = (1 + e'^2 \cdot \cos^2 B_x) \cdot \sin B_x \cdot \cos B_x / 2;$$
$$a_4 = (3 + (2 - 9 \cdot e'^2 + (10 \cdot e'^2 - 4 \cdot e'^2 \cdot \cos^2 B_x) \cdot \cos^2 B_x) \cdot \cos^2 B_x)/12;$$

$$a_6 = \left(45 - \left(90 \cdot e'^2 - \left(16 - 72 \cdot e'^2 + 208 \cdot e'^2 \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) \cos^2 B_x\right) / 360;$$
$$a_8 = \left(1575 - \left(365 - \left(168 + 727 \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) / 20160;$$
$$b_3 = \left(\left(1 - e'^2 \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x - 2\right) / 6;$$
$$b_5 = \left(24 - \left(20 - \left(1 + 8 \cdot e'^2 - 2 \cdot e'^2 \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) / 120;$$
$$b_7 = \left(\left(840 - \left(182 - \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x\right) \cdot \cos^2 B_x - 720\right) / 5040;$$
$$z = \frac{y}{N \cdot \cos B_x}.$$

По формулам для не логарифмических вычислений задачи решаются с помощью данных приведенных табл. 3, 4.

Таблица 3

Численные значения пункта Луговая

Параметры формул	Численные значения пункта Луговая	
B	51°30′47″,4820	51°30′47″,4820
L	78°17′32″,6740	78°17′32″,6740
L_0	75°	81°
ℓ	+3°17′32″,6740	–2 °42′ 27″ ,3260
n	0,001678979	+3658,989
n=	0,001678979	
c_0=	-0,002518464	
c_2=	5,28557E-06	
c_4=	-1,38046E-08	
X_B=	5709279,975	
a_4=	0,0555378	0,0535276
a_6=	-0,0060229	-0,0063783
a_8=	-0,0031433	-0,0030538
a_3=	-0,03740	-0,04006
a_5=	-0,02647	-0,02636
a_7=	-0,00291	-0,00268
$X^Г$	5 714 422,223	5 712 757,257
y	+228 536,126	–187 949,616
$Y^Г$	13728536,126	14312050,384
γ	+2°34′41″,685	–2°07′11″,951

При вычислениях «l» выражать в радианной мере.

Таблица 4

Вычисление геодезических координат по прямоугольным

(Формулы нелогарифмического вида)

Параметры формул	Численные значения пункта Луговая	
x	5 714 422,223	5 712 757,257
y=$y^{г}$-(№зоны)10^6-500000	+228536,126	–1879 49,616
n		
R_0		
β		
k_0		
k_2		
k_4		
B_x		
N_x		
a_2		
a_4		
a_6		
a_8		
b_3		
b_5		
b_7		
z		
B	51°30′47″,4820	51°30′47″,482
l		
L_0	75°	81°
L	78°17′32″,6740	78°17′32″,674

2.5. Перевычисление координат Гаусса–Крюгера из зоны в зону

С 1928 г. и по настоящее время для производства геодезических работ применяется равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса–Крюгера. В равноугольных (конформных) проекциях не искажаются углы, измеренные на физической земной поверхности. Треугольники триангуляции, изображённые в конформной проекции, имеют вид сфероидических треугольников.

Стороны их – кривые линии, а сумма углов больше 180° на величину сферического избытка.

В проекции Гаусса–Крюгера линейные искажения непрерывно растут по мере удаления от осевого меридиана. Это обстоятельство заставляет ограничивать зону применения координат Гаусса–Крюгера в долготном соотношении.

В 1928 г. III геодезическое совещание приняло постановление «О введении в СССР единообразной системы прямоугольных координат». Была установлена шестиградусная ширина зон, но разрешено применение трёхградусных зон. Масштаб вдоль осевого меридиана зоны принят равным единице.

При производстве геодезических работ на территории России применяются шестиградусные и трёхградусные зоны равноугольной проекции Гаусса–Крюгера. При съёмке городов и территорий промышленного строительства часто применяется система координат Гаусса–Крюгера со своим целесообразно выбранным осевым меридианом.

Во многих случаях можно отказаться от таких целесообразно выбранных осевых меридианов и применять при производстве крупномасштабных съёмок полутораградусные зоны, кратные 1˚30'. Половина осевых меридианов полутораградусных зон совпадает с осевыми меридианами трёхградусных и шестиградусных зон.

Территория России размещается в 28 шестиградусных зонах, или в 56 трёхградусных.

В каждой зоне – своё начало координат, находящееся на пересечении изображений осевого меридиана и экватора. В проекции Гаусса–Крюгера осевые меридианы и экватор изображаются прямыми линиями. Все меридианы, кроме осевого, изображаются кривыми линиями, сходящимися у полюсов. Все параллели, кроме экватора, изображаются кривыми линиями, обращенными своей вогнутостью в сторону полюсов.

В сторону северного полюса обращены своей вогнутостью изображения параллелей, лежащих к северу от экватора.

Координаты проекции Гаусса–Крюгера отсчитываются в пределах каждой зоны от её начала. Абсциссы положительны к северу от экватора и отрицательны к югу от него, ординаты положительны к востоку от осевого меридиана и отрицательны к западу от него.

В каталогах пунктов государственной геодезической сети (триангуляция и полигонометрия) координаты даются от осевых меридианов шестиградусных зон. В каталоги принято записывать преобразованные ординаты, получаемые следующим образом. К ординатам проекции Гаусса–Крюгера прибавляют 500 000 м и впереди ставят номер – зоны. Получение преобразованных ординат иллюстрируется следующими примерами (табл. 5).

Таблица 5

Координаты

Вычисленные координаты	Координаты в каталоге
$x_А$=5 717 650,814	$x_А$= 5 717 650,814
$y_А$=+241 502,661	$y_А$=13 741 502,661
$x_Б$=5 714 912,165	$x_Б$=5 714 912,165
$y_Б$=–174 765,784	$y_Б$=14 325 234,216

Координаты пунктов вычисляются от ближайших к ним осевых меридианов и в тех случаях, когда смежные пункты оказываются расположенными в разных зонах, между ними теряется непосредственная связь.

Чтобы установить связь между смежными пунктами, находящимися в разных зонах, принято вычислять координаты пунктов в обеих зонах. В каталогах помещают прямоугольные координаты каждого пункта, вычисленные от осевых меридианов этих зон.

Полоса перекрытия двух смежных зон по долготе установлена в 1°, западная зона перекрывает восточную на 30', а восточная западную – тоже на 30'.

На рис. 7 схематически показаны полосы перекрытия зон.

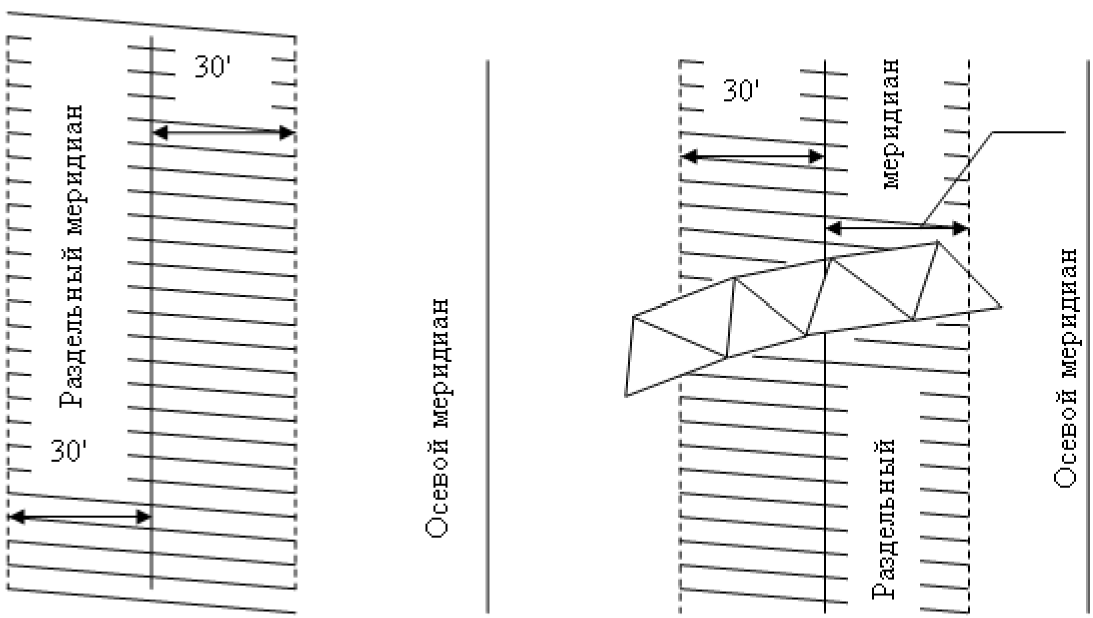

Рис. 7. Полосы перекрытия зон

Дирекционные углы и длины линий, вычисленные относительно осевых меридианов смежных зон, будут иметь различные значения. Редукции расстояний, редукции направлений, вычисленные относительно осевых меридианов смежных зон, также будут различны.

Для преобразования координат пунктов из зоны в зону существует ряд способов.

Перевычислив прямоугольные координаты в координаты геодезические, можно перейти к прямоугольным координатам смежной зоны. Здесь могут быть использованы любые формулы и таблицы, существующие для перевода прямоугольных координат в геодезические и обратно. При вычислениях с большой точностью можно рекомендовать пособия [1, 2].

При использовании таблиц из этих пособий можно перечислить прямоугольные координаты с погрешностями 0,000 – 0,002 м. Способ перевычисления прямоугольных координат из зоны в зону через геодезические координаты отличается громоздкостью и трудоёмкостью. При применении современной вычислительной техники это не является серьезным препятствием. В настоящее время его следует рекомендовать для перевычисления координат любого числа пунктов.

Преобразование прямоугольных координат с помощью таблиц А.М. Вировцева и Б.Н. Рабиновича

Исходные данные: координаты x_1, y_1 некоторой точки в данной зоне.

Требуется найти значения координат x_1, y_1 той же точки в смежной зоне.

Порядок выполнения задания

Эту задачу можно решить с помощью формул и табл. [1].
Рабочие формулы [1] имеют следующий вид:

$$x_2 = X_0 + \left(a + b\Delta y^{-10}\right)\Delta y + c;$$
$$y_2 = \Delta y + \left(a_1 + b_1\Delta y^{-10}\right)\Delta y + c_1,$$

где X_0 – длина дуги меридиана от экватора до вспомогательной точки, находящейся на осевом меридиане второй зоны и имеющей абсциссу

x_0 (в системе координат первой зоны), в точности равную x_1 , и ординату y_0.

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

Таблица 6

Перевычисление прямоугольных координат из одной 6-градусной зоны в другую

Параметры формул	От 75° к 81°		От 81° к 75°	
x_1	5 714422,22	5 709320,52	5 712757,25	5 709320,51
y_1	+228536,12	+20299,51	–187949,63	–20299,51
y_0	208207,67	208416,90	208275,97	208416,90
Δy	+20328,45	–188117,39	–20326,34	–228716,41
$(a_1 + b_1\Delta y 10^{-10})\Delta y$	–28,94	+167,72	+26,83	+180,20
c_1	0,00	+0,06	0,00	+0,09
y_2	+20299,51	–187949,61	–20299,51	+228536,12
x_0	5 710153,35	5 705050,07	5 708487,86	5 705050,07
$(a + b\Delta y 10^{-10})\Delta y$	–832,83	+7706,06	+832,65	+9370,12
c	0,00	+1,13	0,00	+2,02
x_2	5 709320,52	5 712757,26	5 709320,51	5 714422,21
a	–0,04097057	–0,04094448	–0,04096206	–0,04094448
$b\Delta y 10^{-10}$	+212	–1960	–212	–2383
$a + b\Delta y 10^{-10}$	–0,04096845	–0,04096408	–0,04096418	–0,04096831
a_1	–0,00137185	–0,00137185	–0,00137185	–0,00137185
$b_1\Delta y 10^{-10}$	–5185	+48030	+5186	+58396
$a_1 + b_1\Delta y 10^{-10}$	–0,00142370	–0,00089155	–0,00131999	–0,00078789
b	1,041	1,042	1,041	1,042
b_1	–25,509	–25,535	–25,519	–25,535

В табл. 9, заимствованной из [1], даны значения величины y_0, x_0 и коэффициентов a, a_1, b, b_1 по аргументу x_1 .

В табл. 7 и 8 даны значения величин c и c_1 как функции двух аргументов: x_1 и Δy. Величина c имеет знак, обратный знаку Δy, а c_1 практически всегда сохраняет знак, данный в таблицах.

Для контроля рекомендуется вести вычисления в две руки или решить обратную задачу, т.е. по вычисленным значениям x_2 и y_2 найти x_1 и y_2.

Таблица 7

Таблица величин *c*, (в метрах)

y, км	x, км					
	5500	5600	5700	5800	5900	6000
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
40	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
50	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
60	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
70	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
80	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
90	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13
100	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
110	0,22	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23
120	0,28	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30
130	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
140	0,45	0,46	0,46	0,47	0,47	0,48
150	0,56	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59
160	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72
170	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86
180	0,96	0,97	0,98	1,00	1,01	1,02
190	1,13	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20
200	1,32	1,33	1,35	1,37	1,38	1,40
210	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62
220	1,75	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86
230	2,00	2,03	2,05	2,08	2,10	2,12
240	2,28	2,31	2,33	2,36	-	-
250	2,58	2,61	-	-	-	-

Формулы и табл. 7 − 9 [1] позволяют перевычислять прямоугольные координаты из одной 3-градусной зоны в другую, а также из одной 6-градусной зоны в другую. Следует отметить, что при перевычислениях из одной 6-градусной зоны в другую приходится решать две задачи: сначала относительно раздельного меридиана 6-градусных зон, а затем относительно осевого меридиана второй зоны.

Значения координат x_2 и y_2, вычисленные при помощи формул и табл. 7 − 9, могут иметь расхождение, не превышающее 2 см, с результатами, получаемыми путем преобразования через геодезические координаты.

Таблица 8

Таблица величин c_1, (в метрах)

Δy , км	x_1, *км*											Δy , км
	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900	6000	
70	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	70
80	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	+0,01	80
90	0,00	–	0,00	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	90
100	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	100
110	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	110
120	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,01	–	+0,02	–	+0,02	120
130	+0,01	–	+0,01	–	+0,02	–	+0,02	–	+0,02	–	+0,02	130
140	+0,01	–	0,02	–	0,02	–	0,02	–	0,03	–	0,03	140
150	0,02	–	0,02	–	0,02	–	0,03	–	0,03	–	0,03	150
160	0,02	–	0,02	–	0,03	–	0,03	–	0,04	–	0,04	160
170	0,02	–	0,03	–	0,03	–	0,04	–	0,04	–	0,05	170
180	0,03	–	0,03	–	0,04	–	0,05	–	0,05	–	0,06	180
190	0,03	–	0,04	–	0,05	–	0,05	–	0,06	–	0,07	190
200	+0,04	0,04	+0,05	0,05	+0,05	0,06	+0,06	0,07	+0,07	0,08	+0,08	200
210	0,04	0,05	0,05	0,06	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	210
220	0,05	0,05	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,10	0,11	220
230	0,05	0,06	0,07	0,07	0,08	0,09	0,09	0,10	0,11	0,11	0,12	230
240	0,06	0,07	0,08	0,08	0,09	0,10	0,11	0,11	0,12	–	–	240
250	0,07	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	–	–	–	–	250
260	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	–	–	–	–	–	–	260
270	0,08	0,09	0,10	–	–	–	–	–	–	–	–	270

Таблица 9

Таблицы величин y_0, x_0 и коэффициентов

Табличные величины											
x_1,км	y_0,м	Δ	x_0,м	Δ	a	Δ	b	a_1	b_1	Δ	x_1,км
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5 700	208 798,83		5 695 726,71		–0,040 89676		1,042	–0,00137 185	–25,580		5 700
		40,96		1000,31		513				5	
5 701	208 757,87		5 696 727,02		–0,040 90189		1,042	–0,00137 186	–25,575		5 701
		40,96		1000,30		512				5	
5 702	208 716,91		5 697 727,32		–0,040 90701		1,042	–0,00137 186	–25,570		5 702
		40,96		1000,30		512				5	
5 703	208 675,95		5 698 727,62		–0,040 91213		1,042	–0,00137 186	–25,565		5 703
		40,97		1000,31		512				5	
5 704	208 634,98		5 699 727,93		–0,040 91725		1,042	–0,00137 186	–25,560		5 704
		40,98		1000,30		512				5	
5 705	208 594,00		5 700 728,23		–0,040 92237		1,042	–0,00137 186	–25,555		5 705
		40,98		1000,31		512				5	
5 706	208 553,02		5 701 728,54		–0,040 92749		1,042	–0,00137 185	–25,550		5 706
		40,99		1000,30		512				5	
5 707	208 512,03		5 702 728,84		–0,040 93261		1,042	–0,00137 185	–25,545		5 707
		40,99		1000,31		512				5	
5 708	208 471,04		5 703 729,15		–0,040 93773		1,042	–0,00137 185	–25,540		5 708
		41,00		1000,31		511				5	
5 709	208 430,04		5 704 729,46		–0,040 94284		1,042	–0,00137 185	–25,535		5 709
		41,00		1000,30		512				5	
5 710	208 389,04		5 705 729,76		–0,040 94796		1,042	–0,00137 185	–25,530		5 710

Продолжение табл. 9

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5 710	208 389,04		5 705 729,76		–0,040 94796		1,042	–0,00137 185	–25,530		5 710
		41,00		1000,31		511				6	
5 711	208 348,04		5 706 730,07		–0,040 95307		1,041	–0,00137 185	–25,524		5 711
		41,01		1000,31		511				5	
5 712	208 307,03		5 707 730,38		–0,040 95818		1,041	–0,00137 185	–25,519		5 712
		41,02		1000,31		512				5	
5 713	208 266,01		5 708 730,69		–0,040 96330		1,041	–0,00137 185	–25,514		5 713
		41,02		1000,31		511				5	
5 714	208 224,99		5 709 731,00		–0,040 96841		1,041	–0,00137 185	–25,509		5 714
		41,03		1000,30		511				5	
5 715	208 183,96		5 710 731,30		–0,040 97352		1,041	–0,00137 185	–25,504		5 715
		41,03		1000,31		511				5	
5 716	208 142,93		5 711 731,61		–0,040 97863		1,041	–0,00137 184	–25,499		5 716
		41,04		1000,31		510				5	
5 717	208 101,89		5 712 731,92		–0,040 98373		1,041	–0,00137 184	–25,494		5 717
		41,04		1000,31		511				5	
5 718	208 060,85		5 713 732,23		–0,040 98884		1,041	–0,00137 184	–25,489		5 718
		41,05		1000,31		511				5	
5 719	208 019,80		5 714 732,54		–0,040 99395		1,041	–0,00137 184	–25,484		5 719
		41,05		1000,32		510				5	
5 720	207 978,75		5 715 732,86		–0,040 99905		1,041	–0,00137 184	–25,479		5 720
		41,06		1000,31		511				5	
5 721	207 937,69		5 716 733,17		–0,041 00416		1,041	–0,00137 184	–25,474		5 721

Продолжение табл. 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5 721	207 937,69		5 716 733,17		–0,041 00416		1,041	–0,00137 184	–25,474		5 721
		41,06		1000,31		510				5	
5 722	207 896,63		5 717 733,48		–0,041 00926		1,041	–0,00137 184	–25,469		5 722
		41,07		1000,31		510				5	
5 723	207 855,56		5 718 733,79		–0,041 01436		1,040	–0,00137 184	–25,464		5 723
		41,07		1000,31		510				6	
5 724	207 814,49		5 719 734,10		–0,041 01946		1,040	–0,00137 184	–25,458		5 724
		41,08		1000,32		510				5	
5 725	207 773,41		5 720 734,42		–0,041 02456		1,040	–0,00137 183	–25,453		5 725
		41,08		1000,31		510				5	
5 726	207 732,33		5 721 734,73		–0,041 02966		1,040	–0,00137 183	–25,448		5 726
		41,09		1000,32		510				5	
5 727	207 691,24		5 722 735,05		–0,041 03476		1,040	–0,00137 183	–25,443		5 727
		41,10		1000,31		509				5	
5 728	207 650,14		5 723 735,36		–0,041 03985		1,040	–0,00137 183	–25,438		5 728
		41,10		1000,32		510				5	
5 729	207 609,04		5 724 735,68		–0,041 04495		1,040	–0,00137 183	–25,433		5 729
		41,10		1000,31		509				5	
5 730	207 567,94		5 725 735,99		–0,041 05004		1,040	–0,00137 183	–25,428		5 730
		41,11		1000,32		510				5	
5 731	207 526,83		5 726 736,31		–0,041 05514		1,040	–0,00137 183	–25,423		5 731
		41,11		1000,31		509				5	
5 732	207 485,72		5 727 736,62		–0,041 06023		1,040	–0,00137 183	–25,418		5 732

Продолжение табл. 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5 732	207 485,72		5 727 736,62		–0,041 06023		1,040	–0,00137 183	–25,418		5 732
		41,12		1000,32		509				5	
5 733	207 444,60		5 728 736,94		–0,041 06532		1,040	–0,00137 183	–25,413		5 733
		41,13		1000,32		509				5	
5 734	207 403,47		5 729 737,26		–0,041 07041		1,040	–0,00137 183	–25,408		5 734
		41,13		1000,31		509				5	
5 735	207 362,34		5 730 737,57		–0,041 07550		1,040	–0,00137 182	–25,403		5 735
		41,13		1000,32		509				5	
5 736	207 321,21		5 731 737,89		–0,041 08059		1,039	–0,00137 182	–25,397		5 736
		41,14		1000,32		509				5	
5 737	207 280,07		5 732 738,21		–0,041 08568		1,039	–0,00137 182	–25,392		5 737
		41,15		1000,32		508				5	
5 738	207 238,92		5 733 738,53		–0,041 09076		1,039	–0,00137 182	–25,387		5 738
		41,15		1000,32		509				5	
5 739	207 197,77		5 734 738,85		–0,041 09585		1,039	–0,00137 182	–25,382		5 739
		41,15		1000,32		509				5	
5 740	207 156,62		5 735 739,17		–0,041 10094		1,039	–0,00137 182	–25,377		5 740
		41,16		1000,32		508				5	
5 741	207 115,46		5 736 739,49		–0,041 10602		1,039	–0,00137 182	–25,372		5 741
		41,17		1000,32		508				5	
5 742	207 074,29		5 737 739,81		–0,041 11110		1,039	–0,00137 182	–25,367		5 742
		41,17		1000,32		508				5	
5 743	207 033,12		5 738 740,13		–0,041 11618		1,039	–0,00137 182	–25,362		5 743

Окончание табл. 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5 743	207 033,12		5 738 740,13		–0,041 11618		1,039	–0,00137 182	–25,362		5 743
		41,17		1000,32		508				5	
5 744	206 991,95		5 739 740,45		–0,041 12126		1,039	–0,00137 181	–25,357		5 744
		41,18		1000,32		508				5	
5 745	206 950,77		5 740 740,77		–0,041 12634		1,039	–0,00137 181	–25,352		5 745
		41,19		1000,32		508				5	
5 746	206 909,58		5 741 741,09		–0,041 13142		1,039	–0,00137 181	–25,347		5 746
		41,19		1000,33		508				6	
5 747	206 868,39		5 742 741,42		–0,041 13650		1,039	–0,00137 181	–25,341		5 747
		41,19		1000,32		507				5	
5 748	206 827,20		5 743 741,74		–0,041 14157		1,039	–0,00137 181	–25,336		5 748
		41,20		1000,32		508				5	
5 749	206 786,00		5 744 742,06		–0,041 14665		1,038	–0,00137 181	–25,331		5 749
		41,21		1000,33		507				5	
5 750	206 744,79		5 745 742,39		–0,041 15172		1,038	–0,00137 181	–25,326		5 750

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРОЕКЦИИ ГАУССА ИЗ СК–95 В СИСТЕМУ КООРДИНАТ ГСК–2011

Последовательность выполнения задания:

1. Координаты двух пунктов (СК–95) в проекции Гаусса перевычислить в пространственные геодезические координаты B и L.

2. По геодезическим координатам вычислить пространственные координаты X, Y и Z.

3. Перевычислить пространственные прямоугольные координаты из СК-95 в пространственные прямоугольные координаты ГСК–2011 по семи параметрам перехода.

4. Вычислить пространственные геодезические координаты точек по пространственным прямоугольным координатам в ГСК–2011.

5. По пространственным геодезическим координатам точек вычислить прямоугольные координаты в проекции Гаусса в системе ГСК–2011.

6. Сравнить координаты одноимённых точек в разных системах координат.

По материалам выполненных работ за весь семестр и преобразованиям координат составить общий отчёт. В отчете дать описание систем координат СК–95 и ГСК–2011. Привести сравнение результатов вычислений в разных системах (использовать выполненные вычисления по разнице широт, длин дуг меридианов и координат точек).

В заключении сделать выводы по результатам вычислений. Указать цель введения ГСК–2011.

При вычислениях использовать формулы.

Формулы для перевычисления координат проекции Гаусса x y в геодезические B L, даны в задании 4.

Формулы вычисления пространственных прямоугольных координат по геодезическим:

$$X = (N + H) \cdot \cos B \cdot \cos L;$$
$$Y = (N + H) \cdot \cos B \cdot \sin L;$$
$$Z = (N + H) \cdot \cos B - e^2 \cdot N \cdot \cos L;$$
$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2 B_x)}}; \; e^2 = \frac{2 \cdot f - 1}{f^2}. \qquad (32)$$

При преобразовании пространственных координат из СК–95 к ПЗ–90 необходимо учитывать:

$$X_{ПЗ-95} = X_{\text{СК-95}} + 25{,}9;$$
$$Y_{ПЗ-95} = Y_{\text{СК-95}} - 130{,}94;$$
$$Z_{ПЗ-95} = Z_{\text{СК-95}} - 81{,}76. \qquad (33)$$

Переход из системы *А* в систему *Б* на практике выполняется по формуле

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_Б = (1+m)\cdot\begin{bmatrix} 1 & +\omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & +\omega_X \\ +\omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

где ΔX, ΔY, ΔZ – линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, м;

ω_X, ω_Y, ω_Z – угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы А в систему Б, необходимо брать в радианах;

m – масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы *А* в систему *Б*.

При обратном преобразовании пространственных прямоугольных координат элементы трансформирования имеют те же значения, но с обратным знаком. Значения элементов трансформирования для наиболее распространенных систем координат приведены в табл. 10 и 11. Угловые элементы в табл. 10 и 11 необходимо уменьшить в 10^{-3}. При вычислениях угловые элементы переводят в радианы.

Погрешности элементов трансформирования СК–42 – ПЗ–90 относятся к глобальной модели элементов трансформирования. Элементы трансформирования для систем координат СК–95 – ПЗ–90 установлены директивно (назначены), поэтому для них значения средних квадратических погрешностей не приводятся.

Элементы трансформирования для систем координат ПЗ–90.02 – ITRF–2000 определены на эпоху 2002.0 и совпадают с элементами трансформирования ПЗ–90.02 – WGS-84 (G1150), где G1150 – номер GPS-недели.

Таблица 10

Элементы трансформирования систем координат и их средние квадратические погрешности

№ п/п	Из системы А	В систему Б	ΔX, м	ΔY, м	Δ Z м	$\omega x \cdot 10^{-3}$ угл.с	$\omega y \cdot 10^{-3}$ угл.с	$\omega z \cdot 10^{-3}$ угл.с	$m \cdot 10^{-6}$	Эпоха ЭТ
1	СК-42	ПЗ-90	+25 ± 2	-141± 2	-80 ± 3	0 ± 100	-350 ±100	-660 ±100	0 ±0,250	
2	СК-95	ПЗ-90	+25,90	-130,94	-81,76	0	0	0	0	
3	ПЗ-90	ПЗ-90.02	-1,07 ± 0,1	–0,03 ±0,1	+0,02 ±0,1	0	0	-130 ±10	-0,220 ±0,020	2002.0
4	WGS-84 (G1150)	ПЗ-90.02	+0,36 ±0,1	–0,08 ± 0,1	-0,18 ±0,1	0	0	0	0	2002.0
5	ПЗ-90.02	ПЗ-90.11	-0,373 ±0,027	+0,186 ±0,056	+0,202 ±0,033	-2,30 ±2,11	+3,54 ±0,87	-4,21 ±0,82	-0,008 ±0,004	2010.0
6	ГСК-2011	ПЗ-90.11	0,000 ±0,008	+0,014 ±0,018	-0,008 ±0,011	-0,562 ±0,698	-0,019 ±0,259	+0,053 ±0,227	-0,0006 ±0,0010	2011.0
7	ПЗ-90.11	ITRF-2008	-0,003 ±0,002	-0,001 ±0,002	0,000 ±0,002	+0,019 ±0,072	-0,042 ±0,073	+0,002 ±0,090	-0,000 ±0,0003	2010.0
8	ПЗ-90	ГСК-2011	-1,443	+0,142	+0,230	-1,738	+3,559	-134,263	-0,2274	2011

В табл. 11 приведены элементы трансформирования при переходе в систему ПЗ–90.11. При этом элементы трансформирования для ряда систем получены путем комбинирования (алгебраического сложения) данных из табл.10.

Таблица 11

Элементы трансформирования при переходе в систему координат ПЗ–90.11 (система Б)

№ п/п	Из системы А	ΔX, м	ΔY, м	Δ Z м	$\omega x \cdot 10^{-3}$ угл.с	$\omega y \cdot 10^{-3}$ угл.с	$\omega z \cdot 10^{-3}$ угл.с	$m \cdot 10^{-6}$
1	СК-42	+23,557	-140,844	-79,778	-2,30	-346,46	-794,21	-0,228
2	СК-95	+24,457	-130,784	-81,538	-2,30	+3,54	-134,21	-0,228
3	ПЗ-90	-1,443	+0,156	+0,222	-2,30	+3,54	-134,21	-0,228
4	WGS-84 (G1150)	-0,013	+0,106	+0,022	-2,30	+3,54	-4,21	-0,008
5	ПЗ-90.02	-0,373	+0,186	+0,202	-2,30	+3,54	-4,21	-0,008
6	ITRF-2008	+0,003	+0,001	0,000	-0,019	+0,042	-0,002	0,000

Угловые элементы в формуле (34) необходимо представить в радианной мере. Для этого углы поворота из табл. 10 и 11 надо разделить на 206264806,247.

Прямоугольные пространственные координаты в системе ГСК–2011 преобразуем в геодезические координаты по формулам

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \;\; L = \arccos X/R \;\;,$$

$$\mathrm{tg}B = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}} + \frac{c \cdot e^2 \cdot \mathrm{tg}B}{R \cdot \sqrt{1 + e'^2 + tg^2 B}} \;\;,$$

$$H = \frac{1}{\cos B} \cdot \left(R - \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 + \mathrm{tg}^2 B}} \right),$$

$$c = \frac{a}{\alpha}. \qquad (35)$$

В первом приближении tg B вычисляют из выражения tg$B$ = Z /R и уточняют в последующих приближениях. Вычисление tg B прекращают, когда совпадут 9 цифр.

По полученным геодезическим координатам B и L вычислить прямоугольные координаты X и Y в проекции Гаусса.

Список рекомендуемой литературы

1. *Вировец, А.М.* Таблицы для преобразования прямоугольных координат / А.М. Вировец, Б.Н.Рабинович – М. : Геодезиздат, 1952. – 128 с.
2. *Герасименко, С.П.* Таблицы для перевычисления плоских прямоугольных координат Гаусса из одной зоны в другую / С.П.Герасименко, А.В. Буткевич – М. : Недра, 1976. – 40 с.
3. *Закатов, П.С.* Курс высшей геодезии / П.С.Закатов. – М. : Недра, 1976. –511 с.
4. *Лесных, Н.Б.* Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов : учебное пособие / Н.Б. Лесных. – Новосибирск : СГГА, 2003. – 60с.
5. *Маркузе, Ю.И.* Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. Книга 2 : учеб. пособ. / Ю.И. Маркузе. – М. : МИИГАиК, 2005. – 280 с.
6. *Поклад, Г.Г.* Геодезия : учебное пособие для вузов / Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев – 2-е изд. – М. : Академический Проект, 2013. – 592с.
7. *Таблицы* для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30˚ до 80 ˚. – М. : Геодезиздат, 1958. – 120 с.
8. Морозов, В. П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов – М. : Недра, 1979. – 296 с.
9. Параметры земли 1990 года (ПЗ–90.11). Справочный документ / Военно-топографическое управление генерального штаба вооруженных сил РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ. – М. – 2014. – 52 с.