

М.С. ЖДАНОВ

АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛА
ТИПА
КОШИ
В ТЕОРИИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ



Издательство «Наука»

Жданов М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984.

В книге с единых позиций рассматриваются вопросы аналитической теории гравитационных, постоянных магнитных и переменных электромагнитных полей Земли. Основу единого подхода составляют аппарат интеграла типа Коши и его трехмерных аналогов, а также аппарат интеграла типа Стрэттона — Чу. В книге приводятся необходимые сведения по классической теории интеграла типа Коши и подробно излагаются основные положения теории трехмерных аналогов интеграла типа Коши и интегралов типа Стрэттона — Чу, получившей развитие в последнее десятилетие. На базе этой теории даются новые интегральные представления для аномальных геофизических полей, развиваются методы разделения геофизических аномалий, исследуются различные типы интегральных преобразований поля, а также связанные с ними вопросы решения обратных задач гравиметрии, геомагнетизма и геоэлектрики.

Книга предназначена для научных работников — геофизиков и специалистов, занимающихся вопросами математической теории интерпретации геофизических полей. Отдельные разделы книги представляют интерес для специалистов, работающих в области теории потенциала и электродинамики. Книга будет полезна также студентам старших курсов университетов и вузов, специализирующимся в области геофизики.

Ил. 70. Библиогр. 82 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большинство достижений теории интерпретации двумерных потенциальных полей, полученных за последнее двадцатилетие, связаны с применением аппарата теории функций комплексного переменного. Наиболее глубокое развитие этот подход получил в трудах В. Н. Страхова, а также в работах Г. М. Воскобойникова, Г. Я. Голиздры, А. В. Цирульского и ряда других исследователей.

Исключительно важную роль в теории логарифмического потенциала (как, впрочем, и вообще в теории функций комплексного переменного) играют интегралы типа Коши. С помощью этих интегралов строятся методы аналитического продолжения полей, определяется местоположение их особых точек, исследуются вопросы неоднозначности решения обратных задач.

Важность и необходимость обобщения результатов двумерной теории на трехмерный случай представляется очевидной. Впервые эта проблема была выдвинута В. Н. Страховым еще в 1970, 1974 гг. [Страхов, 1970б, 1974].

В работах автора, опубликованных в 1973—1976 гг., было показано, что целый ряд результатов теории логарифмического потенциала может быть обобщен на трехмерный случай путем конструирования некоторых аналогов интеграла типа Коши для трехмерных полей, являющихся модификацией интегралов, введенных Моисилом, Теодореско и А. В. Бицадзе [Бицадзе, 1953, 1972]. Близкий подход к решению названной проблемы содержится также в работах Г. Колбенгайера [1976, 1978], Варговой [Vargova, 1977] и А. Ситаровой [1977], в которых трехмерные задачи теории потенциала исследуются с помощью четырехкомпонентных векторов, аналитических, согласно Моисилу и Теодореско.

В настоящей работе, представляющей собой дальнейшее развитие и обобщение предыдущих исследований автора, предлагается некоторый новый и, на наш взгляд, более простой, чем в рамках теории Моисила — Теодореско — Бицадзе, подход к конструированию трехмерных аналогов интеграла типа Коши. С помощью этого аппарата исследуются трехмерные задачи гравиметрии и магнитометрии как для случая однородных возмущающихся тел, так и для произвольного распределения плотности и намагниченности. При этом замечательное свойство получаемых соотношений заключается в том, что для двумерных полей они автоматически сводятся к соответствующим формулам теории комплексного потенциала. Эта особенность развиваемого подхода к решению трехмерных задач теории потенциала представляется чрезвычайно

важной и полезной с точки зрения возможностей дальнейших обобщений приемов и методов теории функций комплексного переменного на трехмерный случай.

Вместе с тем оказывается, что аппарат аналогов интеграла типа Коши может быть применен не только в теории потенциала, но и для решения задач электромагнетизма. Естественным обобщением интеграла типа Коши на электромагнитные поля являются интегралы типа Стрэттона — Чу, основы теории которых были развиты в работах М. Н. Бердичевского и автора [Жданов, 1975б, 1976а, б; Бердичевский, Жданов, 1981]. В данной книге дается достаточно полное изложение теории интегралов типа Стрэттона — Чу для различных моделей поля (нестационарной, квазистационарной, волновой и др.) и среды (однородной и неоднородной, например для горизонтально-слоистой модели, чрезвычайно важной в задачах геоэлектрики). С помощью этого аппарата разрабатываются методы преобразования (разделения, аналитического продолжения) и интерпретации электромагнитных полей, изучаемых в геомагнетизме и геоэлектрике.

Таким образом, основная цель предлагаемой книги — ознакомление читателя с новыми идеями и методами, связанными с применением интегралов типа Коши и их трехмерных и электромагнитных аналогов в теории геофизических полей.

Здесь необходимо отметить, что наиболее важные результаты по применению классических интегралов типа Коши для решения задач математической физики были получены советскими математиками Н. И. Мухелишвили [1954, 1962], Ф. Д. Гаховым [1963] и И. Н. Векуа [1959]. Блестящий пример применения интегралов типа Коши в теории двумерного геопотенциального поля мы находим в работах В. Н. Страхова [1970в, г и др.]. В этих работах подкупает простота и элегантность применяемых методов и вместе с тем глубина и богатство получаемых теоретических результатов. Автор настоящей книги хотел показать, что для изучения трехмерных полей (потенциальных и вихревых — электромагнитных) может быть развит адекватный математический аппарат, позволяющий с не меньшей полнотой и легкостью, чем в двумерном случае, решать сложные задачи анализа трехмерных геофизических полей.

Теперь несколько слов о плане книги.

Книга состоит из трех разделов. В первом разделе приведены необходимые сведения по классической теории интеграла типа Коши и рассмотрены приложения этой теории к изучению плоского геопотенциального поля. При написании данного раздела автор следовал в основном работам В. Н. Страхова и А. В. Цирульско-го, которым он, пользуясь случаем, выражает признательность за плодотворные дискуссии. При этом автор не стремился дать исчерпывающее изложение современных результатов теории плоского поля, а ограничился анализом лишь тех вопросов, которые важны при переходе к трехмерным полям.

Во втором разделе подробно изложена теория трехмерных

аналогов интеграла типа Коши и дано ее применение к решению прямых и обратных задач трехмерной теории потенциала.

Наконец, третий раздел книги посвящен теории интегралов типа Стрэттона—Чу. На базе этой теории рассмотрены различные типы интегральных преобразований поля, а также связанные с ними вопросы решения обратных задач геомагнетизма и геоэлектрики, основанные на аналитическом продолжении и миграции электромагнитных полей.

Все изложение материала в книге, включая обозначения, построено таким образом, чтобы подчеркнуть тесную связь между теорией плоского поля и трехмерной теорией потенциала и электромагнетизма. Автору представлялось особенно важным сделать это для того, чтобы наиболее отчетливо показать, что выявленная взаимосвязь между аналогами интеграла типа Коши и классической теорией функций комплексного переменного позволяет перенести на трехмерный случай большинство результатов двумерной теории. Тем самым стирается долго существовавшая качественная грань между подходами к проблеме изучения плоского поля и трехмерных геопотенциальных и электромагнитных полей.

В заключение хотелось бы отметить, что при работе над книгой большая помощь была оказана автору научным редактором профессором М. Н. Бердичевским. Он же является соавтором параграфа 33 и главы 9. Много ценных советов, способствовавших улучшению книги, было дано профессором В. И. Дмитриевым, взявшим на себя труд ознакомиться с рукописью монографии. Участниками работы над книгой были и аспиранты автора. В частности, теория интегралов Стрэттона—Чу для неоднородных сред (параграф 34) разработана совместно с В. В. Спичаком, а теория миграции электромагнитного поля (глава 10) — совместно с М. А. Френкелем.

Всем им автор выражает свою глубокую благодарность.

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ В ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Глава первая

ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

1.1. Интегральная формула Коши

Для функций комплексного переменного известна *интегральная теорема Коши*, формулируемая следующим образом. Пусть L — некоторая гладкая замкнутая кривая (контур). Под гладкой кривой (контуром) мы здесь и в дальнейшем понимаем простую (т. е. без точек самопересечения) замкнутую или незамкнутую линию с непрерывно меняющейся касательной и не имеющую точек возврата (заострения). Если $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в области D , ограниченной контуром L , и непрерывная на самом контуре (т. е. непрерывная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup L$), то имеет место следующая формула Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} f(\zeta'), & \zeta' \in D, \\ 0, & \zeta' \in \bar{C}D, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\bar{C}D$ — дополнение замкнутой области \bar{D} до всей комплексной плоскости (здесь и всюду ниже предполагается, что контур обходится в положительном направлении, при котором область остается слева).

Таким образом, формула Коши позволяет по значениям функции $f(\zeta)$ на границе L области D восстановить ее значения всюду внутри области. Коротко это обстоятельство выражают словами: *формула Коши решает краевую задачу для аналитических функций*. Интеграл, стоящий в левой части формулы Коши, называется *интегралом Коши*. Для точек ζ' , лежащих во внешней области ($\bar{C}D$), интеграл Коши обращается в нуль.

Если функция $f(\zeta)$ — аналитическая в бесконечной области $\bar{C}D$, включая бесконечно удаленную точку, и непрерывная на кон-

туре L , то справедлива следующая формула Коши для бесконечной области:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} -f(\zeta') + f(\infty), & \zeta' \in \overline{CD}, \\ f(\infty), & \zeta' \in D, \end{cases} \quad (1.2)$$

где направление обхода контура L то же, что и в формуле (1.1).

Отметим, что равенство (1.1) остается в силе, если L — кусочно-гладкая замкнутая кривая, т. е. если она состоит из конечной последовательности гладких разомкнутых кривых $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, ..., $a_{n-1} a_n$, расположенных так, что конечная точка каждой предыдущей дуги совпадает с начальной точкой последующей. В принципе допускается, что упомянутые дуги могут иметь, кроме начальных и конечных, и конечное число других общих точек (точек пересечения).

1.2. Понятие интеграла типа Коши

Важно подчеркнуть, что интеграл Коши имеет смысл и тогда, когда на комплексной плоскости задана произвольная замкнутая или разомкнутая гладкая кривая L , целиком расположенная в конечной части комплексной плоскости, а на ней — произвольная непрерывная функция $\varphi(\zeta)$ (ζ — комплексная координата точек кривой L):

$$C(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (1.3)$$

Интеграл (1.3) называется *интегралом типа Коши*. Функция $\varphi(\zeta)$ называется его *плотностью*, а $1/(\zeta - \zeta')$ — *ядром*. Интеграл типа Коши (1.3), как нетрудно убедиться, описывает функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек самой кривой L . Мы приведем два доказательства этого положения.

Первое из них, обычно приводимое в курсах теории функций комплексного переменного, заключается в установлении возможности дифференцирования по переменной ζ' (параметру) под знаком интеграла.

Для доказательства обозначим через $\Phi(\zeta')$ следующий интеграл:

$$\Phi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - \zeta')^2} d\zeta,$$

получаемый путем формального дифференцирования по ζ' ядра интеграла типа Коши, и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \frac{C(\zeta' + \Delta\zeta') - C(\zeta')}{\Delta\zeta'} - \Phi(\zeta') = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta' - \Delta\zeta')(\zeta - \zeta')} - \frac{1}{(\zeta - \zeta')^2} \right] d\zeta. \end{aligned}$$

В силу аналитичности ядра по ζ' (при $\zeta \neq \zeta'$) величина в квадратных скобках может быть сделана при достаточно малом $|\Delta\zeta'|$ сколь угодно малой. Так как контур L , по предположению, имеет конечную длину, то, переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned} C^{(1)}(\zeta') &= \lim_{\Delta\zeta' \rightarrow 0} \frac{C(\zeta' + \Delta\zeta') - C(\zeta')}{\Delta\zeta'} = \\ &= \Phi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - \zeta')^2} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Аналогично доказывается, что $C(\zeta')$ имеет производные всех порядков и

$$C^{(n)}(\zeta') = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta')^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

где $\zeta' \notin L$.

Второе доказательство сводится к непосредственной проверке выполнения условий Коши — Римана для функций $\operatorname{Re} C(\zeta')$ и $\operatorname{Im} C(\zeta')$:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} C(\zeta')}{\partial x'} = \frac{\partial \operatorname{Im} C(\zeta')}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} C(\zeta')}{\partial y'} = -\frac{\partial \operatorname{Im} C(\zeta')}{\partial x'}, \quad (1.6)$$

где $\zeta' = x' + iz'$.

В самом деле, соотношения (1.6) автоматически вытекают из того факта, что ядро $1/(\zeta - \zeta')$ — функция, аналитическая по ζ' (при $\zeta \notin L$), следовательно, его вещественные и мнимые части удовлетворяют условиям Коши — Римана. Мы обращаем внимание читателя на это доказательство потому, что в последующих разделах книги при изучении различных аналогов интеграла типа Коши мы будем, как правило, убеждаться в том, что эти аналоги удовлетворяют соответствующей системе уравнений в частных производных путем непосредственного дифференцирования.

Легко видеть, далее, что при ζ' , уходящем в бесконечность, $C(\zeta')$ стремится к нулю, так что $C(\infty) = 0$; точнее, при больших $|\zeta'|$ имеем

$$C(\zeta') = O(1/\zeta'), \quad (1.7)$$

поскольку L имеет конечную длину.

Таким образом, интеграл типа Коши с непрерывной плотностью $\varphi(\zeta)$ есть функция, аналитическая всюду, за исключением линии интегрирования L , и обращающаяся в нуль на бесконечности. Линия интегрирования L является особой линией функции $C(\zeta')$. Особенности поведения интеграла типа Коши на линии L и вблизи нее будут детально изучены в следующем параграфе.

Если L — замкнутая кривая, делящая комплексную плоскость на внутреннюю область D и внешнюю область $C\bar{D}$ (как обычно, направление обхода линии L считается положительным, если внутренняя область D остается слева), то $C(\zeta')$ распадается на

две аналитические функции: $C^+(\zeta')$, определенную в D , и $C^-(\zeta')$, определенную в $C\bar{D}$. Подчеркнем, что в общем случае эти функции не являются аналитическим продолжением друг друга¹. В качестве примера приведем интеграл типа Коши, взятый по окружности $|\zeta|=2$ (рис. 1) с плотностью $\Phi(\zeta) = 2i/(\zeta-i)(\zeta-3i)$. Очевидно, что

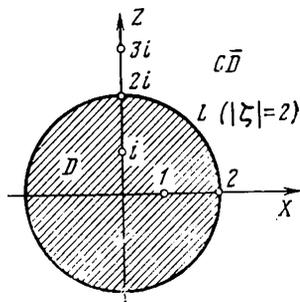


Рис. 1

$$C(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{1}{(\zeta-i)(\zeta-3i)} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta')} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\zeta-3i)(\zeta-\zeta')} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta')} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{(\zeta-i)(\zeta-\zeta')} \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta')} \quad (1.8)$$

Функция $1/(\zeta-3i)$ аналитична в D , а функция $1/(\zeta-i)$ — в $C\bar{D}$ (см. рис. 1) и обращается на бесконечности в нуль. Следовательно, по интегральной формуле Коши (1.1) первый интеграл для $\zeta' \in D$ равен $1/(\zeta'-3i)$, а для $\zeta' \in C\bar{D}$ равен нулю. Второй интеграл, наоборот, по формуле (1.2) равен нулю при $\zeta' \in D$ и равен $-1/(\zeta'-i)$ при $\zeta' \in C\bar{D}$. Отсюда

$$C^+(\zeta') = \frac{1}{\zeta' - 3i}, \quad C^-(\zeta') = \frac{-1}{\zeta' - i} \quad (1.9)$$

Как видим, интеграл (1.8) действительно описывает в областях D и $C\bar{D}$ две совершенно различные аналитические функции.

В заключение этого пункта отметим, что понятие интеграла типа Коши легко распространяется на случай, когда линия интегрирования L простирается в бесконечность. Единственное, что при этом дополнительно требуется, это рассмотрение поведения функций (задаваемых или искомых) в окрестности бесконечно удаленной точки [Мухелишвили, 1962; Гахов, 1963] (более подробно об этом см. п. 2.5).

1.3. Кусочно-аналитические функции

Пусть D_1, D_2, \dots, D_N — несколько односвязных областей, не имеющих общих внутренних точек, но примыкающих друг к другу вдоль некоторых гладких кривых L_1, L_2, \dots, L_M , являющихся общей частью их границ. Пусть далее $\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta), \dots, \Phi_N(\zeta)$ — функции, аналитические соответственно в D_1, D_2, \dots, D_N и непрерывно продолжимые на соответствующие граничные кривые $L_1, L_2, L_3, \dots, L_M$.

¹ Основные принципы аналитического продолжения изложены в параграфе 12.

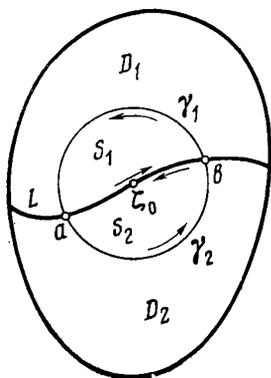


Рис. 2

Рассмотрим кусочно-аналитическую функцию $\Psi(\zeta)$, определенную в двух областях D_1 и D_2 , примыкающих друг к другу вдоль гладкой кривой L (рис. 2) (концы L мы не причисляем к L), т. е.

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} \Psi_1(\zeta), & \zeta \in D_1, \\ \Psi_2(\zeta), & \zeta \in D_2, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\Psi_1(\zeta)$ и $\Psi_2(\zeta)$ — функции, непрерывно продолжимые на L , причем их граничные значения вдоль L равны друг другу:

$$\Psi_1(\zeta) = \Psi_2(\zeta), \quad \zeta \in L. \quad (1.11)$$

Тогда функция $\Psi(\zeta)$, доопределяемая на L следующим образом: $\Psi(\zeta) = \Psi_1(\zeta) = \Psi_2(\zeta)$, $\zeta \in L$, является аналитической в области $D_1 \cup D_2 \cup L$. Для доказательства достаточно, очевидно, установить аналитичность функции $\Psi(\zeta)$ в окрестности любой точки ζ_0 линии L , не совпадающей с ее концами. Проведем из точки ζ_0 окружность γ столь малого радиуса, чтобы она пересекала кривую L только в двух точках a и b (это возможно, поскольку L — гладкая кривая). Обозначим через S_1 и S_2 части круга, ограниченною γ , лежащие в областях D_1 и D_2 , и через γ_1 и γ_2 — соответствующие части окружности γ . Пусть ds_1 и ds_2 — границы областей S_1 и S_2 , описываемых в положительном направлении. Очевидно, они имеют общую часть ab , пробегаемую в противоположных направлениях: $ds_1 = \gamma_1 \cup ab$, $ds_2 = \gamma_2 \cup ba$ (см. рис. 2). На основании интегральной формулы Коши (1.1) для всех точек ζ' , расположенных внутри S_1 или S_2 , имеем

$$\Psi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{ds_1} \frac{\Psi_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta'} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ds_2} \frac{\Psi_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta'}. \quad (1.12)$$

В самом деле, первый интеграл равен $\Psi_1(\zeta')$ при $\zeta' \in S_1$ и нулю при $\zeta' \in S_2$, а второй интеграл, наоборот, равен нулю при $\zeta' \in S_1$ и $\Psi_2(\zeta')$ при $\zeta' \in S_2$. В то же время выражение (1.12) сводится к одному интегралу, взятому по γ , так как благодаря совпадению гра-

ничных значений функций $\Psi_1(\xi)$ и $\Psi_2(\xi)$ на L интегралы, взятые по дуге ab (в разных направлениях), сокращаются:

$$\Psi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13), в свою очередь, по свойству интеграла типа Коши есть функция, аналитическая всюду внутри γ , что и требовалось доказать.

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Систематическое изложение свойств интегралов типа Коши можно найти во многих руководствах по теории функций комплексного переменного, например в прекрасных книгах Н. И. Мусхелишвили [1962], Ф. Д. Гахова [1963] и А. В. Бицадзе [1972]. Однако для удобства читателя, желающего ограничиться лишь теми сведениями, которые действительно необходимы для понимания дальнейшего, мы даем их кратко в нашей книге. При этом основным вопросом является изучение поведения интеграла типа Коши на самой линии интегрирования и вблизи нее. Прежде чем переходить к этой проблеме, рассмотрим вспомогательный вопрос о классах функций, описывающих плотности интеграла типа Коши.

2.1. Условие Гельдера

В предыдущем параграфе, введя понятие интеграла типа Коши, мы прежде всего потребовали, чтобы его плотность $\varphi(\xi)$ была непрерывной функцией $\xi \in L$. Непрерывность функции, как известно, заключается в том, что модуль $|\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)|$ может быть сделан сколь угодно малым, когда модуль $|\xi_2 - \xi_1|$ достаточно мал, т. е. что приращения аргумента и функции одновременно стремятся к нулю. Вопрос о порядке малости приращения функции по отношению к приращению аргумента при этом не рассматривается, этот порядок может быть каким угодно. Однако при изучении свойств интеграла типа Коши оказывается целесообразным разбить множество непрерывных функций на классы в зависимости от указанного выше порядка малости. Наиболее важным является класс функций, непрерывных по Гельдеру.

Определение 2.1. Говорим, что функция $\varphi(\xi)$ переменной (вообще комплексной) ξ , заданная на некотором связном множестве E значений этой переменной, удовлетворяет условию Гельдера, если существуют положительные постоянные A и λ , такие, что

$$|\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)| \leq A |\xi_2 - \xi_1|^\lambda \quad (2.1)$$

для любой пары точек ξ_1 и ξ_2 из E . A называется постоянной Гельдера, а λ — показателем Гельдера.

Функции, удовлетворяющие условию Гельдера, называются также *непрерывными по Гельдеру*. Отметим еще раз, что требование непрерывности по Гельдеру сильнее требования обычной непрерывности. Об этом говорит хотя бы следующий пример.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/\ln x, & 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1/2]$. Предположим, что $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1/2]$ также условию Гельдера с некоторыми постоянными A и λ , и запишем (2.1) для двух точек 0 и $x \in (0, 1/2]$:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{\ln x} \right| \leq A |x|^\lambda.$$

Отсюда имеем $|x|^\lambda |\ln x| \geq 1/A$, где $x \in (0, 1/2]$.

С другой стороны, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x = 0$ при любом $\lambda > 0$.

Следовательно, для любого A найдется такой $x_0 \in (0, 1/2]$, что $|x_0|^\lambda |\ln x_0| < 1/A$. Полученное противоречие и показывает, что $\varphi(x)$ на рассматриваемом отрезке, хотя и является непрерывной функцией, но условию Гельдера не удовлетворяет.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на пределы изменения показателя Гельдера λ . Однако нетрудно убедиться, что если бы λ было больше единицы, то из условия (2.1) вытекало бы, что производная $\varphi'(\xi)$ всюду равна нулю, а функция $\varphi(\xi)$ была бы тождественно равна постоянной. Поэтому обычно полагают, что $0 < \lambda \leq 1$. Если $\lambda = 1$, то условие Гельдера переходит в известное условие Липшица.

Если ξ_1 и ξ_2 таковы, что $|\xi_1 - \xi_2| < 1$ и условие Гельдера выполняется для некоторого показателя λ_1 , то оно будет, очевидно, выполняться и для всякого показателя $\lambda < \lambda_1$. Таким образом, большому λ отвечает более узкий класс функций, непрерывных по Гельдеру. Наиболее узким будет класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

На основании последнего свойства легко установить, что если функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ удовлетворяют условию Гельдера соответственно с показателями λ_1 и λ_2 , то $\varphi_1 \pm \varphi_2$, $\varphi_1 \varphi_2$, а также φ_1/φ_2 (при условии, что знаменатель не обращается в нуль) удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Простым достаточным признаком того, что функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица, является дифференцируемость $\varphi(\xi)$ на E и ограниченность ее производной. В самом деле, сделанные предположения с учетом теоремы о конечном приращении обеспечивают выполнение условия (2.1) при $\lambda = 1$. Однако указанный признак не является необходимым, что видно хотя бы из следующего примера.

Пусть $\varphi(x)$ — функция, заданная на интервале $(-1, 1)$, $\varphi(x) = |x|$. Очевидно, что она удовлетворяет условию Липшица всюду

на этом интервале, хотя не является дифференцируемой при $x=0$.

Понятие условия Гельдера может быть распространено на функцию любого числа переменных.

Определение 2.2. *Говорим, что функция $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, заданных на некотором связном множестве E , удовлетворяет условию Гельдера на этом множестве, если существуют положительные постоянные $A_1, A_2, \dots, A_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($0 < \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 1$), такие, что*

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_n'') - \varphi(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n')| &\leq \\ &\leq A_1 |\xi_1'' - \xi_1'|^{\lambda_1} + A_2 |\xi_2'' - \xi_2'|^{\lambda_2} + \dots + A_n |\xi_n'' - \xi_n'|^{\lambda_n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

для любых двух совокупностей $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n'$ и $\xi_1'', \xi_2'', \dots, \xi_n''$ значений переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ из множества E .

Очевидно, что если функция $\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то она непрерывна по Гельдеру по каждой из этих переменных в отдельности, притом равномерно относительно остальных переменных (т. е. соответствующие постоянная и показатель Гельдера не зависят от значений этих переменных).

В дальнейшем особый интерес для нас будет представлять случай, когда условию Гельдера удовлетворяют функции, заданные на некоторых гладких или кусочно-гладких линиях. Именно для этого класса функций удается получить наиболее важные свойства интеграла типа Коши.

2.2. Вычисление сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши

Вернемся к непосредственному изучению интеграла типа Коши (1.3). Всюду на комплексной плоскости вне кривой L , как было показано выше, интеграл $C(\xi')$ является аналитической функцией. Когда точка ξ' лежит на L , $\xi' = \xi_0 \in L$, интеграл в правой части формулы (1.3) в обычном понимании не существует. Однако для обширного и важного класса функций $\varphi(\xi)$, удовлетворяющих условию Гельдера, этому интегралу можно придать вполне определенный смысл, если ввести понятие *главного значения интеграла по Коши*. Оно заключается в следующем.

Будем предполагать для простоты, что L — замкнутая гладкая кривая, а точка $\xi' = \xi_0$ лежит на L . Проведем из точки ξ_0 , как из центра, окружность γ радиуса ρ , столь малого, что она пересекает L ровно в двух точках ξ_0' и ξ_0'' (рис. 3). Часть кривой L , лежащую вне круга $|\xi - \xi_0| < \rho$, ограниченного γ , обозначим L_ρ .

Интеграл

$$I_\rho(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi, \quad (2.3)$$

очевидно, имеет смысл в обычном понимании.

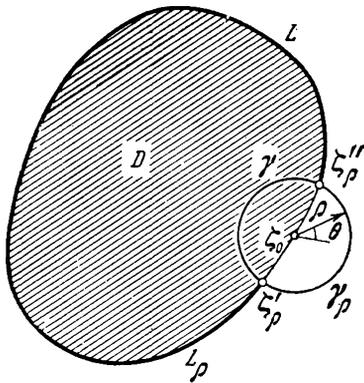
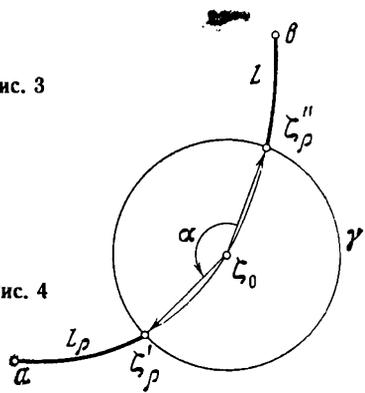


Рис. 3

Рис. 4



Определение 2.3. Если существует

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_\rho(z_0) = C(z_0), \quad (2.4)$$

то этот предел называется *интегралом в смысле главного значения по Коши* или *сингулярным интегралом Коши*.

Отметим, что существенным в определении главного значения является то, что концы z_ρ' и z_ρ'' дуги, исключаемой при вычислении интеграла (2.3) из L , находятся на равных расстояниях от z_0 .

Главное значение интеграла обозначают тем же символом, что и обычный интеграл², подразумевая, что если интеграл не имеет обычного смысла, то рассматривается его главное значение:

$$C(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (2.5)$$

Покажем, что для существования интеграла (2.5) в смысле главного значения по Коши при любой $z_0 \in L$ достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(\zeta)$ была непрерывной по Гельдеру всюду на L . Найдем также и выражение для сингулярного интеграла через интеграл в обычном смысле.

Действительно, пользуясь интегральной формулой Коши (1.1), представим выражение (2.3) в следующем виде:

$$I_\rho(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \varphi(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\rho \cup \gamma_\rho} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad (2.6)$$

где γ_ρ — часть окружности γ , лежащая вне конечной области D , ограниченной кривой L (рис. 3). Последнюю формулу можно переписать так:

$$I_\rho(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \varphi(z_0) - \frac{\varphi(z_0)}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (2.7)$$

² Иногда в математической литературе символ интеграла в смысле главного значения снабжается либо двумя латинскими буквами VP («Valeur Principale» — главное значение), либо звездочкой или штрихом.

Условие Гельдера обеспечивает существование обычного равномерно сходящегося несобственного интеграла

$$\int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (2.8)$$

Интеграл по части окружности γ_ρ в формуле (2.7) может быть легко вычислен, если воспользоваться полярными координатами (рис. 3) $\zeta - \zeta_0 = \rho e^{i\theta}$. Тогда

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = i \int_{\gamma_\rho} d\theta = i [\theta(\zeta''_\rho) - \theta(\zeta'_\rho)].$$

Отсюда видно, что в силу гладкости кривой L

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = i\pi. \quad (2.9)$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (2.7) и учитывая (2.8) и (2.9), получаем

$$C(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0). \quad (2.10)$$

Анализ более общего случая, когда L — гладкая разомкнутая линия, соединяющая точки a и b комплексной плоскости, также не вызывает принципиальных затруднений (рис. 4) (в предположении, что точка $\zeta_0 \in L$ не является концевой). В этом случае можно представить выражение (2.3) в виде

$$I_\rho(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (2.11)$$

Вычисления показывают, что

$$\int_{L_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_a^{\zeta'_\rho} + \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_{\zeta''_\rho}^b = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} - \ln \frac{\zeta''_\rho - \zeta_0}{\zeta'_\rho - \zeta_0},$$

где принято, что $\ln(\zeta - \zeta_0)$ есть контурное значение аналитической функции $\ln(\zeta - \zeta')$, однозначной в плоскости, разрезанной вдоль кривой, соединяющей точки разветвления ζ_0 и ∞ , причем для определенности полагаем, что разрез проходит справа от кривой L (при движении по L от a до b).

Однако

$$\ln \frac{\zeta''_\rho - \zeta_0}{\zeta'_\rho - \zeta_0} = \ln \left| \frac{\zeta''_\rho - \zeta_0}{\zeta'_\rho - \zeta_0} \right| + i [\arg(\zeta''_\rho - \zeta_0) - \arg(\zeta'_\rho - \zeta_0)].$$

По построению $|\zeta''_\rho - \zeta_0| = |\zeta'_\rho - \zeta_0|$, следовательно, первое слагаемое обращается в нуль. Выражение в квадратных скобках будет

равно углу α между векторами $\zeta_0 \zeta'_\rho$ и $\zeta_0 \zeta''_\rho$, причем в силу выбора разреза этот угол должен отсчитываться слева от кривой L . От-

сюда $\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \frac{\zeta''_\rho - \zeta_0}{\zeta'_\rho - \zeta_0} = -i\pi$. Следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + i\pi. \quad (2.12)$$

В частности, для замкнутой кривой L при $a = b$ имеем

$$\int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = i\pi. \quad (2.13)$$

Таким образом, если функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера, существует предел выражения (2.11) и он в соответствии с (2.8) и (2.12) равен

$$C(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0). \quad (2.14)$$

В частности, видим, что для замкнутого контура, т. е. при $a = b$, формула (2.14) переходит в (2.10).

Всюду в дальнейшем, говоря о сингулярном интеграле типа Коши, мы будем понимать под этим его главное значение.

2.3. Формулы Сохоцкого — Племеля

Ранее мы уже отмечали, что для аналитической функции, определяемой интегралом типа Коши, сама кривая интегрирования L является особой линией. Чрезвычайно интересным и важным при этом является вопрос о поведении интеграла типа Коши при приближении к линии L . Основной результат, который мы здесь получим и который играет фундаментальную роль в теории интеграла типа Коши, заключается в следующем. *Интеграл типа Коши с плотностью, удовлетворяющей условию Гельдера, имеет непрерывные предельные значения при приближении к линии L с каждой ее стороны, однако эти предельные значения различны, так что при переходе через L происходит скачок.*

Итак, пусть имеем интеграл типа Коши (1.3), где $\zeta' \notin L$ и $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера. Будем считать контур L замкнутым. В случае, если контур окажется незамкнутым, мы дополним его какой-нибудь гладкой кривой до замкнутого, положив на этой дополнительной кривой $\varphi(\zeta) = 0$. Обозначим через ζ_0 произвольную фиксированную точку на L и представим выражение (1.3) следующим образом:

$$C(\zeta') = \Psi(\zeta') + \frac{1}{2\pi i} \varphi(\zeta_0) \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta'}, \quad (2.15)$$

где $\Psi(\zeta')$ — некоторая вспомогательная аналитическая функция, равная

$$\Psi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (2.16)$$

Условимся обозначать предельные значения аналитических функций $C(\zeta')$ и $\Psi(\zeta')$ при стремлении точки ζ' изнутри конечной области D , ограниченной L , к точке $\zeta_0 \in L$ через $C^+(\zeta_0)$, $\Psi^+(\zeta_0)$, а извне — через $C^-(\zeta_0)$, $\Psi^-(\zeta_0)$ (для незамкнутой кривой это соответствует предельным значениям слева и справа по отношению к положительному направлению движения вдоль L). Чтобы подчеркнуть направление перехода к пределу, будем писать соответственно $\zeta' \rightarrow \zeta_0^+$, $\zeta' \rightarrow \zeta_0^-$.

На основе интегральной формулы Коши (1.1) и соотношения (2.13) можем записать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta'} = \begin{cases} 1, & \zeta' \in D, \\ 0, & \zeta' \in \overline{CD}, \\ 1/2, & \zeta' \in L. \end{cases} \quad (2.17)$$

Отсюда непосредственно следует, что интеграл, стоящий в левой части (2.17), имеет (различные) предельные значения при $\zeta' \rightarrow \zeta_0$ извне и изнутри области D :

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta'} = 1, \quad (2.18)$$

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^-} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta'} = 0. \quad (2.19)$$

Если плотность $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера, то нетрудно показать, что функция $\Psi(\zeta')$, определяемая формулой (2.16), ведет себя при переходе через точку $\zeta' = \zeta_0$ кривой L как непрерывная функция, т. е. она имеет одно определенное предельное значение при приближении ζ' к ζ_0 с любой стороны контура по любому пути, и это предельное значение равно (с учетом (2.10))

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^\pm} \Psi(\zeta') &= \Psi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - \\ &- \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = C(\zeta_0) - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $C(\zeta_0)$ есть сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Детальное доказательство этого положения можно найти в соответствующих руководствах по теории функций комплексного переменного, например в книгах Ф. Д. Гахова [1963] или А. В. Бицадзе [1972]. Следовательно, существуют предельные значения и интеграла типа Коши и они согласно фор-

мулам (2.15), (2.18) — (2.20) равны

$$C^+(\zeta_0) = C(\zeta_0) + \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0), \quad (2.21a)$$

$$C^-(\zeta_0) = C(\zeta_0) - \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \quad (2.21б)$$

Последние формулы получили название *формул Сохоцкого — Племеля*.

Вычитая и складывая формулы (2.21a), (2.21б), получаем пару равносильных им формул

$$C^+(\zeta_0) - C^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0), \quad (2.22a)$$

$$C^+(\zeta_0) + C^-(\zeta_0) = 2C(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (2.22б)$$

В книге Н. И. Мусхелишвили [1962] доказывается, что формула (2.22a) имеет место не только для функций $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющих условию Гельдера, но и для просто непрерывных функций. При этом, однако, под разностью $C^+(\zeta_0) - C^-(\zeta_0)$ понимается предел $\lim\{C(\zeta) - C(\zeta')\}$ при $\zeta \rightarrow \zeta_0^+$ и $\zeta' \rightarrow \zeta_0^-$ так, что $|\zeta - \zeta_0| = |\zeta' - \zeta_0|$, т. е. точки ζ и ζ' при стремлении к ζ_0 находятся на равных расстояниях от последней. Отсюда, в частности, вытекает следующее важное следствие.

Пусть функция $\varphi(\zeta)$ непрерывна на некоторой гладкой части \bar{L} линии L (\bar{L} может совпадать с L) и пусть $C(\zeta')$ непрерывно продолжима на \bar{L} слева (справа), тогда функция $C(\zeta')$ непрерывно продолжима на \bar{L} также и справа (слева), за возможным исключением концов \bar{L} .

Формулы Сохоцкого — Племеля (2.21a), (2.21б) или (2.22a), (2.22б) приводят к чрезвычайно богатым и важным следствиям как в области самой теории функций комплексного переменного, так и в многочисленных приложениях.

2.4. Обобщение формул Сохоцкого — Племеля для кусочно-гладких кривых

Отметим, что всюду выше мы рассматривали вопрос существования сингулярных интегралов и предельных значений интеграла типа Коши для гладких кривых L . Однако нетрудно показать, что эти результаты легко могут быть распространены и на случай кусочно-гладких кривых.

В самом деле, по существу мы использовали свойство гладкости контура только дважды: при вычислении пределов

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\text{формула (2.9)}) \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\text{формула (2.12)}).$$

Однако если внимательно проанализировать все рассуждения, приводящие к формулам (2.9) и (2.12), то нетрудно убедиться в следующем. Пусть ζ_0 — угловая точка кусочно-гладкой кривой L ,

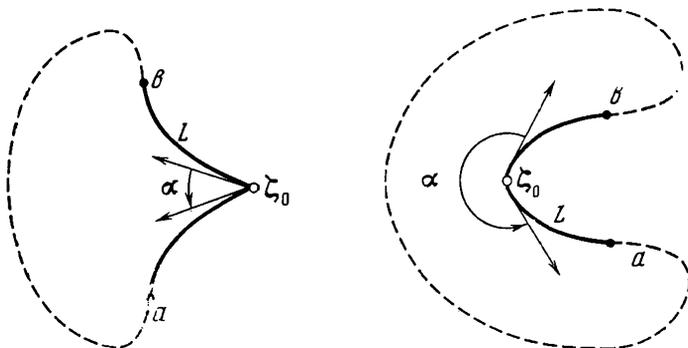


Рис. 5

α — угол между двумя касательными к L в точке ζ_0 , отсчитываемый слева от кривой L (внутри области D , если L — замкнутый контур) (рис. 5). Тогда, очевидно, справедливы следующие формулы:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = i(2\pi - \alpha) \quad (2.23)$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + i\alpha. \quad (2.24)$$

Следовательно, выражение (2.14) для сингулярного интеграла типа Коши в случае разомкнутой кривой L записывается в виде

$$C(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} + \frac{\alpha}{2\pi} \varphi(\zeta_0). \quad (2.25)$$

Аналогично, переход к пределу в формуле (2.7) с учетом (2.23) дает для замкнутой кривой L

$$C(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{\alpha}{2\pi} \varphi(\zeta_0), \quad (2.26)$$

что совпадает с результатом, получаемым непосредственно из (2.25) при $a = b$. Соответственно изменяются и формулы Сохоцкого — Племеля для угловых точек кривой L . В самом деле, формула (2.20) в случае угловой точки ζ_0 с учетом (2.24) запишется так:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^\pm} \Psi(\zeta') &= \Psi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - \\ &- \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \int_L \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = C(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi} \varphi(\zeta_0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отсюда, переходя в формуле (2.15) к пределу и учитывая, так же как и выше, формулу (2.17), получаем

$$C^+(\zeta_0) = C(\zeta_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(\zeta_0), \quad C^-(\zeta_0) = C(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0). \quad (2.28)$$

Заметим, что формулы (2.28) остаются справедливыми и для точек возврата, если положить $\alpha=0$ или $\alpha=2\pi$, смотря по тому, направлено острие вправо или влево (вовне или внутрь) от кривой L . Доказательство этого можно найти в книге Н. И. Мусхелишвили [1962].

Обратим внимание читателя в заключение настоящего раздела на следующее обстоятельство. В силу формул Сохоцкого — Племеля предельные значения интеграла типа Коши (функции $C^+(\zeta_0)$ и $C^-(\zeta_0)$) есть непрерывные функции ζ_0 всюду на кусочно-гладкой контуре L . Более того, можно показать, что если L — гладкая кривая и $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет на L условию Гельдера с показателем λ , то предельные значения интеграла типа Коши $C^+(\zeta_0)$ и $C^-(\zeta_0)$ также удовлетворяют этому условию, причем с тем же показателем, если $\lambda < 1$, и с показателем, который меньше λ на сколь угодно малое число, если $\lambda = 1$.

Аналогичным свойством обладает сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши $C(\zeta_0)$. Указанные свойства позволяют использовать величины $C^+(\zeta_0)$, $C^-(\zeta_0)$, $C(\zeta_0)$ как плотности некоторых других интегралов типа Коши, т. е. выполнять повторное интегрирование с ядром Коши.

2.5. Интегралы типа Коши по действительной оси

В дальнейшем в приложениях мы часто будем рассматривать интегралы типа Коши по действительной оси. Пусть $\varphi(x)$ — комплексная функция действительного переменного x , удовлетворяющая условию Гельдера при всех конечных x и стремящаяся к определенному пределу $\varphi(\infty)$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Потребуем также, чтобы для больших x было справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(\infty)| < \frac{A}{|x|^\mu}, \quad \mu > 0, \quad A > 0. \quad (2.29)$$

В этих предположениях рассмотрим интеграл типа Коши

$$C(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx, \quad (2.30)$$

где ζ не лежит на действительной оси.

Если $\varphi(\infty) \neq 0$, то несобственный интеграл (2.30) будет расходящимся, т. е. выражение $\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx$ не будет иметь предела, когда $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$ независимо друг от друга.

Однако если $|a| = |b| = M$, то существует предел

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-M}^M \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx,$$

и этот предел называется главным значением интеграла (2.30), взятого по бесконечной оси. Для доказательства запишем

$$\int_{-M}^M \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx = \int_{-M}^M \frac{\varphi(x) - \varphi(\infty)}{x - \zeta} dx + \varphi(\infty) \int_{-M}^M \frac{dx}{x - \zeta} \quad (2.31)$$

В первом интеграле правой части подынтегральная функция в силу (2.29) при больших $|x|$ имеет порядок $|x|^{-1-\mu}$, следовательно, соответствующий несобственный интеграл является сходящимся. Второй интеграл легко вычисляется:

$$\int_{-M}^M \frac{dx}{x - \zeta} = \ln |M - \zeta| - \ln |-M - \zeta| \pm i\alpha. \quad (2.32)$$

Здесь α — угол между прямыми, соединяющими точку ζ с точками M и $(-M)$, причем перед α берется знак плюс, если точка ζ лежит в верхней полуплоскости, и знак минус — если в нижней.

Очевидно, что при $M \rightarrow \infty$ угол $\alpha \rightarrow \pi$, а $\ln \left| \frac{M - \zeta}{-M - \zeta} \right| \rightarrow \ln 1 = 0$. Таким образом, получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-M}^M \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(\infty)}{x - \zeta} dx \pm \frac{1}{2} \varphi(\infty). \quad (2.33)$$

В частности, если плотность $\varphi(x)$ исчезает на бесконечности, $\varphi(\infty) = 0$, то

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-M}^M \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx. \quad (2.34)$$

Выражения (2.33), (2.34) определяют главное значение интеграла (2.30), взятого по бесконечным пределам.

В дальнейшем под интегралами с бесконечными пределами мы всегда будем понимать их главные значения.

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным, нетрудно показать, что все свойства интеграла типа Коши, описанные выше, справедливы и для интегралов, взятых по действительной оси. Эти результаты остаются в силе и для интеграла типа Коши, взятого по произвольной гладкой кривой L , уходящей в бесконечность.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОШИ И ГИЛЬБЕРТА

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые важные результаты, непосредственно вытекающие из теории интеграла типа Коши и касающиеся свойств краевых значений функций. Эти результаты позволят нам построить пары взаимно обращаемых интегральных преобразований Коши и Гильберта, которыми мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

3.1. Интегральные краевые условия для аналитической функции

Рассмотрим некоторую область D на плоскости, ограниченную гладким контуром L . Пусть на L задана некоторая непрерывная комплексная функция $\varphi(\zeta)$. Возникает вопрос, существует ли такая аналитическая в области D ($C\bar{D}$) функция, для которой заданная $\varphi(\zeta)$ является ее предельным значением на контуре L . В общем случае на этот вопрос следует ответить отрицательно. В самом деле, по значениям действительной части $\operatorname{Re} \varphi(\zeta)$ можно построить гармоническую в области D (или $C\bar{D}$) функцию $U(x, z)$, предельные значения которой на контуре L совпадают с $\operatorname{Re} \varphi(\zeta)$ (известная задача Дирихле). Аналогично, по мнимой части $\operatorname{Im} \varphi(\zeta)$ можно построить другую гармоническую в D (или $C\bar{D}$) функцию $V(x, z)$. Для того чтобы образованная с их помощью комплекснозначная функция $f(\zeta) = U(x, z) + iV(x, z)$ была бы аналитической в D (или $C\bar{D}$), необходимо и достаточно, чтобы U и V были связаны между собой соотношениями Коши — Римана. Однако при произвольном задании функций $\operatorname{Re} \varphi(\zeta)$ и $\operatorname{Im} \varphi(\zeta)$ эти условия могут не выполняться. Иными словами, если $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение на контуре L некоторой аналитической в области D (или $C\bar{D}$) функции $f(\zeta) = U(x, z) + iV(x, z)$, то функция $\varphi(\zeta)$ должна удовлетворять определенным условиям, обеспечивающим выполнение условий Коши — Римана для функций $U(x, z)$ и $V(x, z)$. Эти условия будем называть *краевыми условиями для аналитической функции*. Найдем краевые условия.

Запишем интеграл типа Коши с непрерывной плотностью $\varphi(\zeta)$:

$$C(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (3.1)$$

Если $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение аналитической в D функции $f(\zeta)$, то согласно формуле Коши (1.1)

$$C(\zeta') \equiv 0 \text{ для всех } \zeta' \in C\bar{D}. \quad (3.2)$$

Обратно, легко убедиться, что если (3.2) имеет место, то $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение функции $f(\zeta')$, определяемой выражением

$$f(\zeta') = C(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in D, \quad (3.3)$$

аналитическим в D и непрерывно продолжимым из D на L .

В самом деле, в силу (3.2) функция $C(\zeta')$ непрерывно продолжима на L снаружи контура и

$$C^-(\zeta_0) = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^-} C(\zeta') = 0. \quad (3.4)$$

Следовательно, с учетом формулы Сохоцкого — Племяля (2.22а) и согласно сказанному в п. 2.3 функция $C(\zeta')$ непрерывно продолжима на L также изнутри контура L , причем

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^+} f(\zeta') = C^+(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0). \quad (3.5)$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Для того чтобы непрерывная комплексная функция $\varphi(\zeta)$, заданная на гладком замкнутом контуре L , была краевым значением функции, аналитической во внутренней области D , необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = 0 \quad \text{для всех } \zeta' \in C\bar{D}. \quad (3.6)$$

С помощью аналогичных рассуждений, основанных на формуле Коши для бесконечной области (1.2), можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Необходимым и достаточным условием того, что функция $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение функции $f(\zeta)$, аналитической во внешней области $C\bar{D}$, является следующее соотношение:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = f(\infty) \quad \text{для всех } \zeta \in D. \quad (3.7)$$

Условиям (3.6) и (3.7) можно придать несколько более компактный вид, если потребовать, чтобы функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяла на L условию Гельдера.

Теорема 3.3. *Для того чтобы непрерывная по Гельдеру функция $\varphi(\zeta)$, заданная на гладком замкнутом контуре L , была краевым значением функции, аналитической всюду в D , необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad \text{для всех } \zeta_0 \in L. \quad (3.8)$$

Доказательство. Необходимость условия (3.8) доказывается путем перехода в (3.6) к пределу при $\zeta' \rightarrow \zeta_0^-$ и применения формулы Сохоцкого — Племяля (2.21б)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - 1/2 \varphi(\zeta_0) = 0.$$

Обратно, если имеет место условие (3.8), то для интеграла типа Коши (3.1), согласно формуле Сохоцкого — Племеля (2.21б), получаем $C^-(\zeta_0) = 0$. Следовательно, по формуле (2.22а) $\varphi(\zeta_0) = C^+(\zeta_0)$, что и требовалось доказать.

Данная теорема, аналогично тому, как это было сделано для теоремы 3.1, обобщается на случай бесконечной области $C\bar{D}$.

Теорема 3.4. *Необходимым и достаточным условием того, что непрерывная по Гельдеру функция $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение функции $f(\zeta)$, аналитической во внешней области $C\bar{D}$, является следующее соотношение:*

$$\varphi(\zeta_0) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + 2f(\infty) \text{ для всех } \zeta_0 \in L. \quad (3.9)$$

Заметим, наконец, что с помощью формул (3.8) и (3.9) можно непосредственно вычислять сингулярные интегралы в случае, когда плотность интеграла есть краевое значение аналитической функции.

3.2. Определение кусочно-аналитической функции по заданному скачку

Решим теперь следующую весьма важную для дальнейшего задачу. Пусть на гладкой замкнутой кривой (контуре) L задана функция $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющая условию Гельдера. Требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(\zeta')$, исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через контур L скачок, равный $\varphi(\zeta)$, т. е.

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L.$$

Решением этой задачи на основании формулы Сохоцкого — Племеля (2.22а), очевидно, является следующий интеграл типа Коши:

$$\Phi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (3.10)$$

Покажем, что это решение единственное. В самом деле, предполагая, что существуют два решения $\Phi(\zeta')$ и $\tilde{\Phi}(\zeta')$, и рассматривая их разность $\Psi(\zeta') = \Phi(\zeta') - \tilde{\Phi}(\zeta')$, получаем, что для этой разности скачок на линии L равен нулю. Следовательно, $\Psi(\zeta')$ — функция, аналитическая на всей плоскости (если доопределить ее надлежащим образом на L) и обращающаяся в нуль на бесконечности. Отсюда по теореме Лиувилля следует, что она тождественно равна нулю, поэтому наши два решения совпадают.

Отметим, что полученный выше результат легко обобщается на случай, когда L — произвольная кусочно-гладкая кривая (замкнутая или разомкнутая). Это следует из того факта, что формулы Сохоцкого — Племеля (2.22а), (2.22б) справедливы и для кусоч-

но-гладких линий. Наконец, приведенное решение имеет место и для линии скачков L , простирающейся в бесконечность [Мусхелишвили, 1962].

3.3. Формулы обращения интеграла типа Коши (интегральные преобразования Коши)

Пусть L есть замкнутый гладкий контур и $\varphi(\zeta)$ произвольная непрерывная по Гельдеру функция, заданная на L . Обозначим через $\psi(\zeta_0)$ сингулярный интеграл:

$$\psi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in L. \quad (3.11)$$

Согласно замечанию, сделанному в конце п. 2.4, функция $\psi(\zeta)$ также непрерывна по Гельдеру на L . В частном случае, когда $\varphi(\zeta)$ есть краевое значение аналитической в области D функции, согласно (3.8)

$$\psi(\zeta_0) \equiv \varphi(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L. \quad (3.12)$$

В общем же случае $\psi(\zeta_0)$ не равно $\varphi(\zeta_0)$.

Во многих приложениях возникает следующая задача: *найти $\varphi(\zeta)$ по заданной $\psi(\zeta)$, т. е. решить интегральное уравнение (3.11)*.

Уравнение (3.11) представляет собой одно из простейших сингулярных интегральных уравнений, теория которых подробно изложена в цитированных уже выше книгах Н. И. Мусхелишвили [1962] и Ф. Д. Гахова [1963]. Однако это уравнение представляет значительный интерес для предмета исследований, излагаемого в нашей книге, поэтому мы приведем здесь один способ его решения, описанный в [Мусхелишвили, 1962]. Вместе с тем, решив уравнение (3.11), мы получим так называемые *формулы обращения интеграла типа Коши*, чрезвычайно полезные при многих трансформациях геофизических полей.

Введем в рассмотрение кусочно-аналитическую функцию (3.1), исчезающую на бесконечности. Тогда на основании формулы Сохоцкого — Племеля (2.226) уравнение (3.11) переписывается в виде

$$C^+(\zeta_0) + C^-(\zeta_0) = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L. \quad (3.13)$$

Определим вторую кусочно-аналитическую функцию $\Phi(\zeta')$ следующим образом:

$$\Phi(\zeta') = \begin{cases} C(\zeta') & \text{при } \zeta' \in D, \\ -C(\zeta') & \text{при } \zeta' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Тогда условие (3.13) записывается так:

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L. \quad (3.15)$$

Следовательно, $\Phi(\zeta')$ — кусочно-аналитическая функция с заданным скачком $\psi(\zeta_0)$, откуда на основании результата предыдущего

пункта (формула 3.10) получаем

$$\Phi(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (3.16)$$

Применяя к интегралу типа Коши (3.16) формулу Сохоцкого — Племеля (2.22б), находим

$$\Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (3.17)$$

С другой стороны, в силу (3.14) и формулы Сохоцкого — Племеля (2.22а) для интеграла типа Коши $C(\zeta')$

$$\Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) = C^+(\zeta_0) - C^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0). \quad (3.18)$$

Сравнивая (3.17) и (3.18), окончательно записываем

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) и есть решение (единственное) уравнения (3.11).

Точно таким же путем из (3.19) можно получить (3.11). Таким образом, мы имеем пару взаимно обращаемых интегральных преобразований

$$\Psi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (3.20)$$

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (3.21)$$

Формулы (3.21) мы будем называть также *интегральными преобразованиями Коши*.

3.4. Преобразования Гильберта

Важное значение для приложений имеют интегральные преобразования Коши, записанные для случая, когда L есть действительная ось.

Пусть $\varphi(x)$ — комплексная функция действительного переменного x , удовлетворяющая условию Гельдера при всех конечных x и исчезающая на бесконечности. В этих предположениях, как было отмечено в п. 2.5, существуют главные значения интеграла типа Коши в бесконечных пределах, и соотношения (3.20), (3.21) принимают вид

$$\Psi(x_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx, \quad \varphi(x_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi(x)}{x - x_0} dx. \quad (3.22)$$

Разделяя теперь в формулах (3.22) действительные и мнимые части функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, получаем две пары следующих формул:

$$\operatorname{Re} \psi(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(x)}{x - x_0} dx, \quad \operatorname{Im} \varphi(x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \psi(x)}{x - x_0} dx; \quad (3.23)$$

$$\operatorname{Re} \varphi(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \psi(x)}{x - x_0} dx,$$

$$\operatorname{Im} \psi(x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varphi(x)}{x - x_0} dx.$$

Соотношения (3.23) носят название *интегральных преобразований Гильберта*. Если обозначим символом \hat{G} следующий интегральный оператор (оператор Гильберта):

$$\hat{G}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad (3.24)$$

то последние соотношения можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \psi(x_0) = \hat{G} \operatorname{Im} \varphi(x), \quad \operatorname{Im} \varphi(x_0) = -\hat{G} \operatorname{Re} \psi(x); \quad (3.25)$$

$$\operatorname{Re} \varphi(x_0) = \hat{G} \operatorname{Im} \psi(x), \quad \operatorname{Im} \psi(x_0) = -\hat{G} \operatorname{Re} \varphi(x).$$

Заметим, что в качестве функции $\varphi(x)$ мы взяли произвольную непрерывную по Гельдеру функцию, исчезающую на бесконечности. Следовательно, мы можем выбирать также произвольные действительные и мнимые части этой функции, лишь бы они удовлетворяли перечисленным выше требованиям. Таким образом, соотношение (3.25) позволяет сформулировать следующий важный результат.

Пусть $U(x)$ — есть произвольная действительная функция действительного переменного x , удовлетворяющая условию Гельдера при всех конечных x и исчезающая на бесконечности. Обозначим через $V(x_0)$ результат применения к $U(x)$ преобразования Гильберта:

$$V(x_0) = \hat{G}U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x)}{x - x_0} dx. \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) можно рассматривать при заданной функции $V(x)$ как интегральное уравнение относительно $U(x)$ (положив при этом, что $V(x)$ удовлетворяет на действительной оси тем же условиям, что и $U(x)$). Тогда в соответствии с (3.25) мы можем

решить это интегральное уравнение, применив к $V(x)$ оператор Гильберта:

$$U(x_0) = -\hat{G}V(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x)}{x-x_0} dx. \quad (3.27)$$

Аналогично можно получить (3.26), обратив (3.27).

Таким образом, соотношения (3.26), (3.27) образуют пару взаимно обращаемых интегральных преобразований действительных функций, заданных на действительной оси.

Рассмотрим в заключение важный частный случай, когда $\varphi(x)$ есть краевое значение на действительной оси функции $\varphi(\zeta)$, аналитической всюду в верхней полуплоскости и исчезающей на бесконечности. Тогда в соответствии с (3.12) $\psi(x) \equiv \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} \psi(x) \equiv \operatorname{Re} \varphi(x), \quad \operatorname{Im} \psi(x) \equiv \operatorname{Im} \varphi(x). \quad (3.28)$$

Поэтому формулы (3.25) принимают вид

$$\operatorname{Re} \varphi(x_0) = \hat{G} \operatorname{Im} \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(x)}{x-x_0} dx, \quad (3.29)$$

$$\operatorname{Im} \varphi(x_0) = -\hat{G} \operatorname{Re} \varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varphi(x)}{x-x_0} dx.$$

Иными словами, *краевые значения на действительной оси действительной и мнимой частей функции, аналитической всюду в верхней полуплоскости, связаны между собой преобразованиями Гильберта* (3.29).

Аналогичные формулы для краевых значений функции, аналитической всюду в нижней полуплоскости и исчезающей на бесконечности, получаются из (3.29) заменой знака у оператора Гильберта (поскольку при движении по оси X от $-\infty$ к $+\infty$ мы оставляем область аналитичности справа от линии интегрирования):

$$\operatorname{Re} \varphi(x_0) = -\hat{G} \operatorname{Im} \varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(x)}{x-x_0} dx, \quad (3.30)$$

$$\operatorname{Im} \varphi(x_0) = \hat{G} \operatorname{Re} \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varphi(x)}{x-x_0} dx.$$

Оператор Гильберта широко используется в методах разделения геофизических полей (см. гл. 3).

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЛОСКИХ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

4. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Эту главу мы посвятим изучению двумерных (плоских) потенциальных полей. Основными геопотенциальными полями, рассматриваемыми в геофизике, являются гравитационное и постоянное магнитное поля. Физическая природа этих полей подробно описана во многих учебниках по общей и прикладной геофизике, поэтому в рамках данной книги мы рассмотрим лишь проблемы математической теории анализа и интерпретации геопотенциальных полей. При этом мы ограничимся изложением только тех вопросов, которые наиболее эффективно решаются с помощью аппарата интеграла типа Коши. Насколько широк круг этих вопросов, читатель может убедиться ниже.

4.1. Уравнения векторного поля

Начнем наш анализ с изложения основных уравнений векторного поля. Пусть в некоторой области P трехмерного пространства задано векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, т. е. любой точке из этой области с радиус-вектором \mathbf{r} (проведенным из начала некоторой заданной декартовой системы координат XYZ) поставлен в соответствие один вполне определенный вектор \mathbf{F} . Предположим также, что векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируема в P , т. е. она имеет там все непрерывные частные производные. Тогда всюду в P векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Скалярная функция $q(\mathbf{r})$ носит название *объемной плотности источников поля \mathbf{F}* , а векторная функция $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ называется *объемной плотностью вихрей поля \mathbf{F}* .

При изучении геофизических полей в качестве области существования векторного поля \mathbf{F} обычно рассматривается все безграничное пространство, а источники и вихри поля полагают локализованными в некоторой конечной области V . В этих предположениях задача нахождения поля из уравнений (4.1) (т. е. по заданным объемным плотностям источников $q(\mathbf{r})$ и вихрей $\mathbf{j}(\mathbf{r})$) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iiint_V \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv, \quad (4.2)$$

где интегрирование ведется по переменной \mathbf{r} , а штрих у символов grad и rot означает, что дифференцирование осуществляется по переменной \mathbf{r}' . Выражения

$$U(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v} \quad (4.3)$$

и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v} \quad (4.4)$$

носят название *скалярного и векторного потенциалов* поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. С их помощью формула (4.2) переписывается:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \text{grad}' U(\mathbf{r}') + \text{rot}' \mathbf{A}(\mathbf{r}'). \quad (4.5)$$

Определение 4.1. Поле \mathbf{F}_q , удовлетворяющее уравнениям $\text{div } \mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r})$, $\text{rot } \mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = 0$,

называется *безвихревым или потенциальным* во всем безграничном пространстве. Оно однозначно определяется заданием одного скалярного потенциала $U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{r}') = \text{grad}' U(\mathbf{r}'). \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.6), получаем следующее уравнение Пуассона для скалярного потенциала:

$$\Delta U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}). \quad (4.8)$$

В области, где нет источников поля, скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.8a)$$

Определение 4.2. Векторное поле \mathbf{F}_j , удовлетворяющее уравнениям

$$\text{div } \mathbf{F}_j(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{rot } \mathbf{F}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

называется *вихревым или соленоидальным* во всем безграничном пространстве. Оно однозначно определяется заданием векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}') = \text{rot}' \mathbf{A}(\mathbf{r}'). \quad (4.10)$$

Приведем еще несколько важных определений, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 4.3. Если в некоторой области V пространства для данного векторного поля \mathbf{F}_q справедливо представление (4.7), то поле \mathbf{F}_q называется *потенциальным* в области V .

Определение 4.4. Если в некоторой области V пространства векторное поле \mathbf{F}_j представимо в виде (4.10), то оно называется *соленоидальным* в области V .

Определение 4.5. Векторное поле \mathbf{F} , являющееся одновременно потенциальным и соленоидальным в области V пространства, называется лапласовым векторным полем в V .

Нетрудно сообразить, что лапласово поле всюду в V удовлетворяет векторному уравнению Лапласа $\Delta \mathbf{F} = 0$. Подставляя (4.10) в (4.9), находим векторное уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (\text{при } \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0), \quad (4.11)$$

которое вне вихрей также переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.11a)$$

В связи с рассмотрением лапласова векторного поля удобно напомнить определение гармонической функции.

Определение 4.6. Функция $U(\mathbf{r})$, заданная в некоторой области V пространства, называется гармонической в этой области, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет там уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

Таким образом, декартовы компоненты лапласова векторного поля суть гармонические функции.

Отметим, наконец, что в силу формул (4.7) и (4.8a) потенциальное поле всюду вне источников является лапласовым, а его скалярный потенциал есть гармоническая функция.

4.2. Понятие плоского поля

В данном разделе мы будем рассматривать только безвихревые поля, т. е. потенциальные во всем пространстве. Кроме того, мы будем предполагать, что объемная плотность источников этих полей не зависит от одной из пространственных координат, например координаты y (рис. 6). Иными словами, мы будем предполагать, что источники поля сосредоточены в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси y , и их плотность постоянна вдоль этой оси. Проанализируем, как изменятся приведенные выше общие формулы применительно к этому случаю.

Прежде всего отметим, что в этом случае само поле \mathbf{F} и его скалярный потенциал U , очевидно, также не зависят от переменной y . Следовательно, все производные поля и потенциала по y равны нулю, поэтому в уравнениях (4.6) и (4.8) пропадают слагаемые, содержащие дифференцирование по y , а y -компонента векторного поля \mathbf{F} в соответствии с (4.7) также обращается в нуль. Таким образом, векторное поле \mathbf{F} становится плоскостным, так как все векторы поля всегда параллельны координатной плоскости XOZ , причем во всех точках, расположенных на любой прямой, параллельной оси Y , векторы поля одинаковы по величине и направлению. Такое поле, как видим, полностью определяется плоским полем векторов в любой вертикальной плоскости, например в плоскости XOZ , поэтому мы и будем называть его в дальнейшем плоским полем.

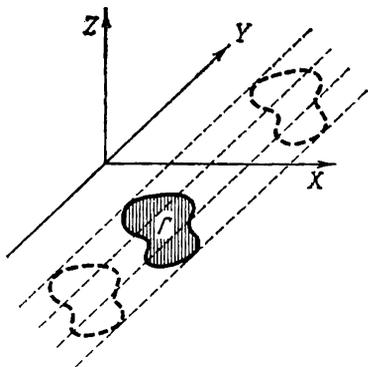


Рис. 6

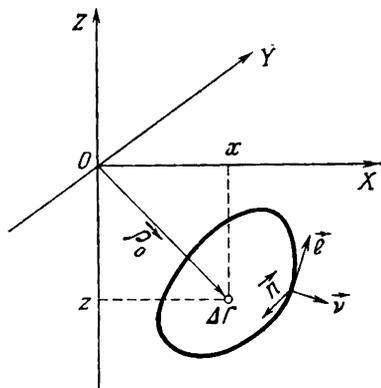


Рис. 7

4.3. Уравнения плоского поля

Запишем теперь уравнения плоского поля, получающиеся соответствующим редуцированием уравнений (4.6), (4.7) и (4.8);

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{F}(\rho) = q(\rho), \quad \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{F}(\rho) = 0; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}(\rho') = \operatorname{grad}_{\Gamma}' U(\rho'); \quad (4.13)$$

$$\Delta_{\Gamma} U(\rho) = q(\rho). \quad (4.14)$$

В последних формулах использованы обозначения: ρ — радиус-вектор текущей точки интегрирования (x, z) плоскости XOZ ; ρ' — радиус-вектор фиксированной точки (x', z') наблюдения поля; $\operatorname{div}_{\Gamma}$, $\operatorname{rot}_{\Gamma}$, $\operatorname{grad}_{\Gamma}$ — операторы двумерного дифференцирования. Эти операторы определяются следующим образом. Рассмотрим на плоскости XOZ (рис. 7) некоторый гладкий замкнутый контур L , охватывающий точку наблюдения (x, z) с радиус-вектором ρ_0 . Обозначим через $\Delta\Gamma$ — область, ограниченную контуром L . Пусть далее \mathbf{l} — единичный вектор касательной к L (в положительном направлении обхода контура), \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к L , лежащий в плоскости XOZ , и \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости XOZ , направленный по оси Y (рис. 7). Устремим теперь $\Delta\Gamma \rightarrow 0$ так, чтобы контур L непрерывным образом стягивался в точку (x, z) . Тогда *двумерные операторы дифференцирования* $\operatorname{grad}_{\Gamma}$, $\operatorname{div}_{\Gamma}$ и $\operatorname{rot}_{\Gamma}$ определяются следующими эквивалентными формулами:

$$\operatorname{grad}_{\Gamma} U(\rho) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{d}_x + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{d}_z = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_{\Gamma} U \mathbf{v} dl, \quad (4.15)$$

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{F}(\rho) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dl, \quad (4.16)$$

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{F}(\rho) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{d}_y = \mathbf{n} \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} dl, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z$ — орты декартовых координат; F_x, F_z — скалярные компоненты плоского векторного поля \mathbf{F} .

Равенства (4.15)—(4.17) непосредственно следуют из двумерных формул Остроградского—Гаусса

$$\iint_{\Delta\Gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{d}_x + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{d}_z \right) ds = \int_L U \mathbf{v} dl, \quad (4.18)$$

$$\iint_{\Delta\Gamma} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) ds = \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dl \quad (4.19)$$

и двумерной формулы Стокса

$$\iint_{\Delta\Gamma} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) ds = \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} dl \quad (4.20)$$

(где $ds = dx dz$), справедливых для функций, имеющих непрерывные частные производные в $\Delta\Gamma$ и непрерывных в замкнутой области $\overline{\Delta\Gamma}$. Последними формулами мы также будем часто пользоваться в дальнейшем.

4.4 Функция потока плоского поля

Обозначим через Γ проекцию цилиндрической области V , заполненной источниками поля, на плоскость XOZ (см. рис. 6). Рассмотрим область пространства $C\overline{\Gamma}$, свободную от источников поля. В этой области уравнения (4.12) с учетом (4.16), (4.17) записываются в виде

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0. \quad (4.21)$$

Первое из этих равенств показывает, что выражение $-F_z dx + F_x dz$ в области $C\overline{\Gamma}$ является полным дифференциалом некоторой функции V :

$$dV = -F_z dx + F_x dz, \quad (4.22)$$

так что

$$\partial V / \partial x = -F_z, \quad \partial V / \partial z = F_x. \quad (4.23)$$

Функция $V(x, z)$ восстанавливается в области $C\overline{\Gamma}$ по своему полному дифференциалу (4.22) с помощью формулы

$$V(x, z) = \int_{(x_0, z_0)}^{(x, z)} -F_z dx + F_x dz + a, \quad (4.24)$$

где интеграл берется по любому пути L , соединяющему в $C\overline{\Gamma}$ фиксированную точку (x_0, z_0) с переменной точкой (x, z) , а a — произвольная постоянная.

Рассмотрим линию M равных значений функции $V(x, z)$: $V(x, z) = C = \text{const}$. Вектор касательной \mathbf{T} в каждой точке этой линии имеет следующий вид: $\mathbf{T} = (\partial V / \partial z, -\partial V / \partial x)$, т. е. в силу (4.23) совпадает с вектором \mathbf{F} : $\mathbf{T} = (F_x, F_z) = \mathbf{F}$. Иными словами, линия M является *векторной линией* поля \mathbf{F} , или *токовой линией*. Поэтому функция $V(x, z)$ носит название *функции потока плоского векторного поля* \mathbf{F} . Знание функции потока позволяет согласно (4.23) определить само плоское векторное поле \mathbf{F} .

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

Плоские потенциальные поля, введенные в предыдущем параграфе, выражаются с помощью так называемых логарифмических потенциалов. Рассмотрим основные свойства логарифмических потенциалов, а также выясним связь между последними и интегралом типа Коши.

5.1. Логарифмические потенциалы

Выражение для безвихревого (потенциального во всем пространстве) векторного поля \mathbf{F} согласно (4.3), (4.7) имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V q(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv. \quad (5.1)$$

При переходе к плотностям источников $q(\mathbf{r})$, не зависящим от координаты y и сосредоточенным в области V , ограниченной цилиндрической поверхностью (см. рис. 6), выражение (5.1) преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} q(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dy ds, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $\mathbf{r}' = (x', y', z')$; $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$; Γ — поперечное сечение цилиндрического объема V плоскостью XOZ (см. рис. 6); $ds = dx dz$ — дифференциальный элемент площади.

Перепишем (5.2) покомпонентно:

$$F_x(x', z') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} q(\mathbf{r}) (x - x') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds,$$

$$F_y(x', z') = 0, \quad (5.3)$$

$$F_z(x', z') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} q(\mathbf{r}) (z - z') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds.$$

Непосредственное интегрирование показывает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|r-r'|^3} = \frac{2}{|e-e'|^2}, \quad (5.4)$$

где $\rho = (x, z)$; $\rho' = (x', z')$; $|\rho - \rho'| = [(x-x')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$.

Подставляя (5.4) в (5.3) и учитывая, что

$$F(r) = F(\rho), \quad q(r) = q(\rho),$$

$$\frac{x-x'}{|e-e'|^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \ln \frac{1}{|e-e'|}, \quad \frac{z-z'}{|e-e'|^2} = \frac{\partial}{\partial z'} \ln \frac{1}{|e-e'|},$$

записываем

$$F(\rho') = \text{grad}'_{\Gamma} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} q(\rho) \ln \frac{1}{|e-e'|} ds \right\}. \quad (5.5)$$

Функция

$$U(\rho') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} q(\rho) \ln \frac{1}{|e-e'|} ds \quad (5.6)$$

носит название *логарифмического потенциала простого двумерного источника*, распределенного в области Γ .

Нетрудно убедиться, что логарифмический потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\Gamma} U(\rho) = q(\rho). \quad (5.7)$$

В случае двумерного точечного источника (точечной массы или заряда) интенсивности Q , расположенного в точке $\rho_0(x_0, z_0)$ плоскости XOZ , его плотность, как известно, может быть записана в виде $q(\rho) = Q\delta(\rho - \rho_0)$, где $\delta(\rho - \rho_0)$ — двумерная сингулярная функция Дирака, определяемая соотношением

$$\iint_{\Gamma} \delta(\rho - \rho_0) f(\rho) ds = \begin{cases} f(\rho_0), & \rho_0 \in \Gamma, \\ 0, & \rho_0 \in C\bar{\Gamma}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Здесь $f(\rho)$ — произвольная непрерывная в Γ функция.

Подставляя плотность точечного источника в (5.6) и учитывая (5.8), получаем *логарифмический потенциал точечного источника*

$$U_P(\rho') = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1}{|e_0 - e'|} \quad (5.9)$$

Двумерный дипольный источник образуется путем сближения двух точечных источников интенсивности $(+Q)$ и $(-Q)$ соответственно, расположенных на малом расстоянии Δl друг от друга. Если устремить $\Delta l \rightarrow 0$ и $Q \rightarrow \infty$, но так, чтобы $\lim Q\Delta l = M = \text{const}$, мы получим *двумерный дипольный источник*, плотность которого

определяется функцией

$$q(\rho) = M \frac{\partial \delta(\rho - \rho_0)}{\partial v} = M \operatorname{grad}_{\Gamma}^{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0). \quad (5.10)$$

Здесь ρ_0 — точка расположения диполя; \mathbf{v} — единичный вектор, направленный от точечного источника ($-Q$) к точечному источнику ($+Q$); $\mathbf{M} = M\mathbf{v}$ — момент диполя (дифференцирование в формуле (5.10) ведется по переменной ρ_0 , что отмечено соответствующим индексом).

Подставляя (5.10) в (5.6) и учитывая (5.8), получаем *логарифмический потенциал дипольного источника*

$$U_D(\rho') = -\frac{1}{2\pi} M \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{1}{|\rho_0 - \rho'|} = -\frac{1}{2\pi} M \operatorname{grad}_{\Gamma}^{\rho_0} \ln \frac{1}{|\rho_0 - \rho'|}. \quad (5.11)$$

Важную роль в теории логарифмического потенциала играют *линейные распределения точечных источников и диполей*. Обозначим через L произвольную гладкую кривую, лежащую в плоскости XOZ , вдоль которой непрерывным образом распределены точечные источники с линейной плотностью $q_L(\rho)$, являющейся непрерывной функцией точек $\rho \in L$. Такой источник носит название *простого линейного источника (двумерного простого слоя)*. Его потенциал задается формулой

$$U_P^L(\rho') = -\frac{1}{2\pi} \int_L q_L(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} dl, \quad (5.12)$$

получающейся путем интегрирования (5.9) вдоль линии L (при подстановке $Q = Q(\rho) = q_L(\rho) dl$).

Пусть теперь вдоль кривой L непрерывно распределены диполи с линейной плотностью моментов $\mathbf{m}_L(\rho) = m_L(\rho) \mathbf{v}(\rho)$, где $\mathbf{v}(\rho)$ — единичные векторы нормали к L в точках $\rho \in L$. Совокупность таких диполей образует *линейный дипольный источник (двумерный двойной слой)*, потенциал которого вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} U_D^L(\rho') &= -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\rho) \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} dl = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\rho) \operatorname{grad}_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} dl, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где дифференцирование под знаком интеграла ведется по переменной интегрирования ρ . Эта формула находится путем интегрирования (5.11) (при подстановке $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho) = m_L(\rho) dl$).

Если точечные источники с плотностью $q(\rho)$ непрерывным образом заполняют некоторую область Γ плоскости XOZ , то мы говорим, что имеем дело с *простым двумерным источником плоского поля*. Его потенциал дается формулой, получающейся путем интегрирования (5.9) (при подстановке $Q = Q(\rho) = q(\rho) ds$) и

совпадающей с (5.6):

$$U_P^F(\rho') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} q(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds. \quad (5.14)$$

Наконец, если область Γ непрерывным образом заполняют диполи с двумерной плотностью моментов $\mathbf{m}(\rho)$, то такой источник мы будем называть *двумерным поляризованным источником плоского поля*. Его потенциал находится путем интегрирования формулы (5.11) по области Γ (причем $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho) = \mathbf{m}(\rho) ds$):

$$\begin{aligned} U_D^F(\rho') &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \mathbf{m}(\rho) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \mathbf{m}(\rho) \operatorname{grad}_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) можно преобразовать следующим образом, воспользовавшись двумерной формулой Остроградского — Гаусса (4.19):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \mathbf{m}(\rho) \operatorname{grad}_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_L \mathbf{m}(\rho) \mathbf{v}(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} dl + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{m}(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{m}(\rho) \cdot \mathbf{v}(\rho) = q_L(\rho), \quad -\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{m}(\rho) = q(\rho), \quad (5.17)$$

окончательно записываем

$$\begin{aligned} U_D^F(\rho') &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q_L(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} dl - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} q(\rho) \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} ds = U_P^L(\rho') + U_P^{\Gamma}(\rho'). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Следовательно, *двумерный поляризованный источник эквивалентен сумме простого двумерного источника и простого слоя*.

5.2. Запись логарифмических потенциалов в комплексных координатах

Введем на плоскости XOZ комплексную переменную $\xi = x + iz$. Тогда точкам этой плоскости с радиус-векторами ρ и ρ' отвечают комплексные числа ξ и ξ' соответственно. В этих обозначениях

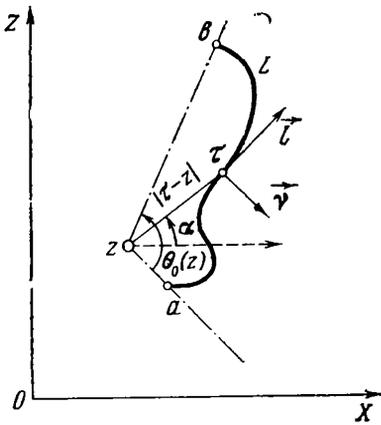


Рис. 8

выражения (5.12)—(5.15) переписываются так:

$$\begin{aligned}
 U_P^L(\zeta') &= \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_L q_L(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} dl,
 \end{aligned}
 \tag{5.19a}$$

$$\begin{aligned}
 U_D^L(\zeta') &= \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} dl =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\zeta) \operatorname{grad} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} dl,
 \tag{5.19б}$$

$$U_P^{\Gamma}(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} q(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} ds,
 \tag{5.19в}$$

$$\begin{aligned}
 U_D^{\Gamma}(\zeta') &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} ds = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} m(\zeta) \times \\
 &\times \operatorname{grad} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} ds.
 \end{aligned}
 \tag{5.19г}$$

Полученные соотношения будут полезны при изучении комплексных напряженностей плоского поля. В данном пункте мы ограничимся лишь анализом формулы (5.19б) для потенциала двойного слоя. Этому выражению можно придать несколько иной вид, воспользовавшись соотношениями Коши—Римана для вещественной и мнимой частей аналитической функции

$$\ln(\zeta - \zeta') = \ln|\zeta - \zeta'| + i\theta,
 \tag{5.20}$$

где $\theta = \arg(\zeta - \zeta')$.

Введем на комплексной плоскости вспомогательную систему осей, состоящую из положительной касательной l и нормали ν к линии L . Эта система ориентирована так же, как система OZ, OX , т. е. ось ν направлена вправо от оси l (рис. 8). В этой системе координат соотношения Коши—Римана для функций $\ln|\zeta - \zeta'|$ и θ (относительно переменной ζ) принимают вид

$$\frac{\partial \ln|\zeta - \zeta'|}{dl} = -\frac{\partial \theta}{\partial \nu},
 \tag{5.21a}$$

$$\frac{\partial \ln |\zeta - \zeta'|}{\partial v} = \frac{\alpha^i}{\partial l}, \quad (5.216)$$

где дифференцирование ведется по переменной ζ .

Преобразуя с помощью (5.21a), (5.216) подынтегральное выражение в формуле (5.196), получаем следующее простое выражение для потенциала двойного слоя:

$$U_D^L(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\zeta) \frac{\partial \theta}{\partial l} dl = -\frac{1}{2\pi} \int_L m_L(\zeta) d\theta. \quad (5.22)$$

В частном случае, если $m_L(\zeta) = m_0 = \text{const}$, находим

$$U_D^L(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} m_0 \int_L d\theta = -\frac{1}{2\pi} m_0 \theta_0(\zeta'), \quad (5.23)$$

где $\theta_0(\zeta')$ — угол видимости кривой L из точки ζ'

5.3. Интеграл типа Коши как сумма логарифмических потенциалов простого и двойного слоев

Будем считать для простоты, что L — замкнутая гладкая кривая, а $\varphi(\zeta)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая действительная функция, заданная на L . Покажем в этих предположениях, что интеграл типа Коши по кривой L с плотностью $\varphi(\zeta)$ выражается через введенные выше логарифмические потенциалы. Действительно,

$$C(\zeta') = \text{Re } C(\zeta') + i \text{Im } C(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (5.24)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, воспользовавшись (5.20):

$$\frac{d\zeta}{\zeta - \zeta'} = d \ln(\zeta - \zeta') = d \ln |\zeta - \zeta'| + i d\theta. \quad (5.25)$$

Отсюда

$$\text{Re } C(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi(\zeta) d\theta, \quad (5.26)$$

$$\text{Im } C(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \int_L \varphi(\zeta) d \ln |\zeta - \zeta'|. \quad (5.27)$$

Сравнивая (5.26) с (5.22), видим, что действительная часть интеграла типа Коши есть логарифмический потенциал двойного слоя с линейной плотностью дипольных моментов, равной (со знаком минус) плотности интеграла типа Коши: $m_L(\zeta) = -\varphi(\zeta)$. Формулу (5.27), применяя дифференцирование по частям и замечая, что проинтегрированная часть в силу замкнутости контура L равна

нулю, можно переписать так:

$$\operatorname{Im} C(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_L \ln |\zeta - \zeta'| d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta'|} dt. \quad (5.28)$$

Сопоставляя (5.28) и (5.19а), видим, что мнимая часть интеграла типа Коши есть логарифмический потенциал простого слоя с линейной плотностью

$$q_L(\zeta) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\zeta). \quad (5.29)$$

Полная интенсивность (масса или заряд) такого линейного (замкнутого) источника равна нулю: $Q = \int_L q_L(\zeta) dt = \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$, поскольку L — замкнутый контур.

Таким образом, можно представить интеграл типа Коши как алгебраическую сумму логарифмических потенциалов двойного U_D^L (со знаком минус) и простого U_P^L (с множителем i) слоев:

$$C(\zeta') = -U_D^L(\zeta') + iU_P^L(\zeta'). \quad (5.30)$$

Представление (5.30) позволяет в принципе свести изучение интеграла типа Коши к рассмотрению свойств логарифмических потенциалов двойного и простого слоев. Например, с его помощью можно было бы получить формулы Сохоцкого — Племеля, так как U_D^L — функция, разрывная при переходе через L (причем величина скачка как раз равна плотности $\varphi(\zeta)$), а U_P^L при переходе через линию интегрирования ведет себя как функция непрерывная. Мы должны подчеркнуть, однако, что указанный путь не является наилучшим, так как сопряжен с весьма громоздкими вычислениями и приводит к трудно обозримым результатам. Гораздо более эффективным и плодотворным (особенно с точки зрения приложений) оказывается подход, основанный на непосредственном изучении интеграла типа Коши. В этом подходе, наиболее глубоко развитом в работах советских математиков Н. И. Мусхелишвили [1954, 1962], Ф. Д. Гахова [1963] и И. Н. Векуа [1959], подкупает простота и элегантность применяемых методов и вместе с тем глубина и богатство получаемых теоретических результатов. Именно эти соображения стимулировали наши исследования по развитию аппарата трехмерных аналогов интеграла типа Коши и интегралов типа Стрэттона — Чу, изложению которого в основном и посвящены последующие разделы книги.

6. КОМПЛЕКСНЫЕ НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ПЛОСКОГО ПОЛЯ

Для описания плоских полей наряду с использованием векторных функций векторного аргумента возможно применение комплекснозначных функций комплексного аргумента. Такие комплексные

функции носят название *комплексных напряженностей плоского поля*. Они позволяют наиболее эффективно использовать для изучения плоских полей аппарат теории функций комплексного переменного.

6.1. Понятие комплексной напряженности плоского поля

Рассмотрим плоское векторное поле $\mathbf{F}(\rho) = (F_x(x, z), F_z(x, z))$, удовлетворяющее согласно (4.12), (4.16) и (4.17) уравнениям

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = q(x, z), \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0. \quad (6.1)$$

Введем, как это было сделано в параграфе 5, на плоскости XOZ комплексную переменную $\zeta = x + iz$ и обозначим через $F(\zeta)$ следующую комплексную функцию комплексного аргумента:

$$F(\zeta) = -F_x(x, z) + iF_z(x, z). \quad (6.2)$$

Функцию $F(\zeta)$ будем называть *комплексной напряженностью плоского поля* \mathbf{F} .

Отметим прежде всего, что *вне источников комплексная напряженность плоского поля есть аналитическая функция, исчезающая на бесконечности*. В самом деле, вне источников уравнения (6.1) принимают вид

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0. \quad (6.3)$$

Поскольку

$$\operatorname{Re} F(\zeta) = -F_x, \quad \operatorname{Im} F(\zeta) = F_z, \quad (6.4)$$

подставляя (6.4) в (6.3), видим, что вещественные и мнимые части функции $F(\zeta)$ удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial z}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial z} = -\frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x} \quad (6.5)$$

В п. 4.1 мы договорились, что рассматриваем источники, сосредоточенные только в конечных областях пространства, следовательно, $F_x, F_z \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $F(\zeta) \rightarrow 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$.

6.2. Уравнения комплексной напряженности

Запишем теперь уравнения, которым удовлетворяет комплексная напряженность поля. Кратчайшим путем для вывода этих уравнений является переход от действительных переменных x, z к комплексным

$$\zeta = x + iz, \quad \bar{\zeta} = x - iz \quad (6.6)$$

и использование операторов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (6.8)$$

В самом деле, умножая первое равенство (6.1) на -1 , а второе — на $-i$ и складывая между собой, получаем

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - i \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) (-F_x + iF_z) = -q(x, z). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Вводя теперь комплексные координаты и используя оператор (6.8), записываем

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{1}{2} q(\zeta). \quad (6.10)$$

Мы получили комплексное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет комплексная напряженность плоского поля.

Заметим, что если $\psi(\zeta)$ — произвольная аналитическая в области D функция, то из соотношений Коши — Римана вытекает, что

$$\partial\psi(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = 0. \quad (6.11)$$

Формулу (6.11) часто называют комплексной записью системы Коши — Римана. В то же время применение оператора $\partial/\partial\bar{\zeta}$ дает производную от комплексной функции по комплексному аргументу

$$\partial\psi(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = \psi'(\zeta). \quad (6.12)$$

В частности, в силу аналитичности комплексной напряженности вне области Γ , занятой источниками, имеем

$$\partial F(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = 0, \quad \zeta \in \bar{C}\Gamma. \quad (6.13)$$

6.3. Выражение комплексной напряженности через плотность источников поля

Найдем выражение для комплексной напряженности плоского поля через плотность его источников $q(\zeta)$. Для этого воспользуемся формулами (5.5) и (5.6), связывающими поле \mathbf{F} с логарифмическим потенциалом $U(\rho)$:

$$F_x = \partial U / \partial x, \quad F_z = \partial U / \partial z, \quad (6.14)$$

и подставим в правую часть (6.14) соответствующие формулы (5.19а) — (5.19г). Например, в случае потенциала простого слоя имеем

$$F_x(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \int_L q_L(\zeta) \frac{x-x'}{|\zeta-\zeta'|^2} dl, \quad (6.15)$$

$$F_z(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \int_L q_L(\zeta) \frac{z-z'}{|\zeta-\zeta'|^2} dl. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.15) и (6.16) в (6.2), записываем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_L q_L(\zeta) \frac{(x-x')-i(z-z')}{|\zeta-\zeta'|^2} dl. \quad (6.17)$$

Учитывая, что

$$(x-x')-i(z-z') = \overline{(\zeta-\zeta')}, \quad |\zeta-\zeta'|^2 = (\zeta-\zeta')\overline{(\zeta-\zeta')} \quad (6.18)$$

(черта означает взятие комплексно-сопряженной величины), окончательно находим

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{q_L(\zeta)}{\zeta-\zeta'} dl. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) дает наиболее удобное представление для комплексной напряженности простого слоя. Повторяя аналогичные рассуждения для потенциала двумерного простого источника, определяемого одной из формул (5.19а)—(5.19г), находим его комплексную напряженность

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta-\zeta'} ds. \quad (6.20)$$

Из формулы (6.20) непосредственно видно, что $F(\zeta')$ представляет собой функцию, аналитическую вне Γ и обращающуюся в нуль на бесконечности (так как $1/(\zeta-\zeta')$ — функция, аналитическая всюду, где $\zeta-\zeta'$ не равно нулю).

Получим теперь аналогичные представления для комплексной напряженности поля двойного слоя и двумерного поляризованного источника. На основании формулы (5.19б) для поля двойного слоя после несложных, но громоздких вычислений находим

$$\begin{aligned} F(\zeta') &= -F_x(\zeta') + iF_z(\zeta') = -\frac{\partial U_D^L(\zeta')}{\partial x'} + i\frac{\partial U_D^L(\zeta')}{\partial z'} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{[m_{Lx}(\zeta) + im_{Lz}(\zeta)] \overline{(\zeta-\zeta')}}{|\zeta-\zeta'|^2 (\zeta-\zeta')} \right\} dl = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\mu_L(\zeta)}{(\zeta-\zeta')^2} dl, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где $\mu_L(\zeta) = m_{Lx}(\zeta) + im_{Lz}(\zeta)$ — линейная комплексная плотность дипольных моментов двойного слоя.

Аналогичным образом находим комплексную напряженность двумерного поляризованного источника

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - \zeta')^2} ds, \quad (6.22)$$

где $\mu(\zeta) = m_x(\zeta) + im_z(\zeta)$ — комплексная плотность дипольных моментов поляризованного источника или его комплексная поляризация.

Заметим, что в геофизических приложениях с помощью простых двумерных источников описывается распределение гравитационных масс, а с помощью поляризованных двумерных источников — распределение намагнитченных масс.

6.4. Комплексный потенциал

Покажем, что комплексная напряженность поля может быть записана как производная некоторой другой комплексной функции, называемой *комплексным потенциалом*.

В самом деле, введем в рассмотрение следующую комплексную функцию:

$$P(\zeta) = U(x, z) + iV(x, z), \quad (6.23)$$

где $U(x, z)$ — скалярный потенциал векторного поля F , а $V(x, z)$ — его функция потока.

Прежде всего нетрудно убедиться, что в силу (4.13) и (4.23) функции U и V удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\partial U/\partial x = \partial V/\partial z = F_x, \quad \partial U/\partial z = -\partial V/\partial x = F_z. \quad (6.24)$$

Следовательно, $P(\zeta)$ — есть аналитическая функция всюду в $\overline{C\Gamma}$. Вычислим производную функции $P(\zeta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} P(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) (U + iV) = \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) = F_x - iF_z = -F(\zeta).$$

Отсюда окончательно записываем

$$F(\zeta) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} P(\zeta), \quad \zeta \in \overline{C\Gamma}. \quad (6.26)$$

Функция $P(\zeta)$ носит название *комплексного потенциала* поля F . Как видим, действительная часть комплексного потенциала есть обычный логарифмический потенциал, а мнимая — функция потока.

7. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

В данном параграфе мы рассмотрим способ непосредственного решения уравнения (6.10) для комплексной напряженности плоского поля, позволяющий определить эту величину по заданному распределению плотности источников $q(\zeta)$ на комплексной плоскости. Выше мы уже привели один из способов решения этой задачи, основанный на применении известных аналитических выражений для логарифмических потенциалов. Однако ниже мы убедимся, что именно комплексная форма получения этих соотношений наиболее полезна для дальнейших применений. Для решения этой задачи в двумерном случае, так же как и в трехмерном, используется формула Остроградского — Гаусса, записанная в комплексной форме. С вывода этой формулы мы и начнем наше изложение.

7.1. Комплексная запись двумерной формулы Остроградского — Гаусса

Вернемся вновь к двумерной формуле Остроградского — Гаусса (4.19), справедливой для плоского векторного поля $\mathbf{F}(F_x, F_z)$, имеющего непрерывные частные производные в области D , ограниченной кусочно-гладкой кривой L , и непрерывного в замкнутой области \bar{D} :

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) ds = \int_L (F_x v_x + F_z v_z) dl, \quad (7.1)$$

где v_x, v_z — декартовы компоненты единичного вектора \mathbf{v} внешней нормали к L , связанные с дифференциалами dx и dz простыми соотношениями:

$$v_x dl = dz, \quad v_z dl = -dx. \quad (7.2)$$

Подставляя (7.2) в (7.1), записываем

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) ds = \int_L (F_x dz - F_z dx). \quad (7.3)$$

Если теперь определить новое векторное поле $\tilde{\mathbf{F}} = (-F_z, F_x)$, то для него соотношение (7.3) переписывается так:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) ds = - \int_L (F_x dx + F_z dz). \quad (7.4)$$

Умножая равенство (7.3) на $-i$ и складывая с (7.4), получаем

$$i \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) (-F_x + iF_z) ds = \int_L (-F_x + iF_z)(dx + idz). \quad (7.5)$$

Переходя к комплексным координатам ζ и комплексной напряженности поля $F(\zeta)$, определяемой формулой (6.2), а также ис-

пользуя оператор (6.8), получаем комплексную форму записи теоремы Остроградского — Гаусса

$$\iint_D \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} ds = \frac{1}{2i} \int_L F(\zeta) d\zeta. \quad (7.6)$$

Из формулы (7.6), в частности, немедленно следует интегральная теорема Коши, согласно которой интеграл от аналитической функции $F(\zeta)$ вдоль любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L (лежащей в односвязной области аналитичности $F(\zeta)$) равен нулю.

В самом деле, подставляя равенство (6.13), справедливое для аналитических функций, в (7.6), находим

$$\int_L F(\zeta) d\zeta = 0. \quad (7.7)$$

С помощью аналогичных рассуждений несложно получить эквивалентную комплексную форму записи теоремы Остроградского — Гаусса

$$\iint_D \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta} ds = -\frac{1}{2i} \int_L F(\zeta) d\bar{\zeta}. \quad (7.8)$$

Последняя формула показывает, что в двумерном случае теорема Остроградского — Гаусса дает способ вычисления интеграла от производной комплексной функции.

7.2. Формулы Помпей

Важное значение в теории плоских полей имеет одно соотношение, вытекающее из комплексной формулы Остроградского — Гаусса, которое мы, следуя И. Н. Векуа [1959], будем называть *формулой Помпей*.

Пусть внутри области D задана комплексная функция $w(\zeta)$, удовлетворяющая условиям применимости теоремы Остроградского — Гаусса, т. е. имеющая непрерывные частные производные по x и по z в D , и непрерывная в \bar{D} . Если $\psi(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция в D , то, очевидно, в силу (6.11) и (6.12) имеют место следующие дифференциальные тождества:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (\psi(\zeta) w(\zeta)) = \psi(\zeta) \frac{\partial w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\bar{\psi}(\zeta) w(\zeta)) = \bar{\psi}(\zeta) \frac{\partial w(\zeta)}{\partial \zeta}. \quad (7.10)$$

Задавая в качестве $F(\zeta)$ в формуле Остроградского — Гаусса (7.6) функцию $F(\zeta) = \psi(\zeta) w(\zeta)$, получаем

$$\iint_D \psi(\zeta) \frac{\partial w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} ds = \frac{1}{2i} \int_L \psi(\zeta) w(\zeta) d\zeta. \quad (7.11)$$

Выбирая теперь в качестве $F(\zeta)$ в формуле Остроградско-

го — Гаусса (7.8) функцию $F(\zeta) = \bar{\psi}(\zeta) \omega(\zeta)$, находим

$$\iint_D \bar{\psi}(\zeta) \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} ds = -\frac{1}{2i} \int_L \bar{\psi}(\zeta) \omega(\zeta) d\bar{\zeta}. \quad (7.12)$$

В частности, в качестве $\psi(\zeta)$ в формуле (7.11) можно взять ядро Коши $\psi(\zeta) = 1/(\zeta - \zeta')$ (ζ' — некоторая фиксированная точка области D), а в качестве области интегрирования — область D_ϵ , получающуюся путем выбрасывания из области D маленького кружка $|\zeta - \zeta'| \leq \epsilon$ с центром в точке ζ' и радиусом ϵ (рис. 9). Очевидно, что внутри D_ϵ функция $1/(\zeta - \zeta')$ аналитична, следовательно, применима формула (7.11):

$$\iint_{D_\epsilon} \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds}{\zeta - \zeta'} = \frac{1}{2i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2i} \int_{|\zeta - \zeta'| = \epsilon} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (7.13)$$

Нетрудно показать, что предел второго интеграла в правой части (7.13) равен $\pi \omega(\zeta')$. В самом деле, поскольку всюду на окружности $|\zeta - \zeta'| = \epsilon$ (см. рис. 9) имеет место равенство $\zeta - \zeta' = \epsilon e^{i\theta}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \int_{|\zeta - \zeta'| = \epsilon} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{|\zeta - \zeta'| = \epsilon} \omega(\epsilon e^{i\theta} + \zeta') d\theta = \pi \omega(\zeta'). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Переходя в (7.13) к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ и учитывая (7.14), окончательно получаем

$$\omega(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds}{\zeta - \zeta'} \quad (7.15)$$

Аналогично с помощью формулы (7.8) и тождества (7.10) выводится формула

$$\omega(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'} d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'}. \quad (7.16)$$

Формулы (7.15), (7.16) носят название *формул Помпей*.

Если известно, что внутри области D функция $\omega(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial \omega(\zeta) / \partial \bar{\zeta} = q(\zeta), \quad (7.17)$$

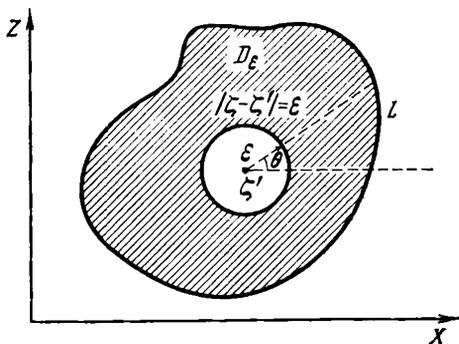


Рис. 9

то формула (7.15) позволяет записать решение этого уравнения.

$$\omega(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{q(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (7.18)$$

Если функция $\omega(\zeta)$ аналитична в D , т. е. $\partial\omega(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = 0$, $\zeta \in D$, то из (7.18) немедленно следует интегральная формула Коши

$$\omega(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (7.19)$$

7.3. Решение уравнения комплексной напряженности

Применим формулы Помпей к анализу комплексной напряженности плоского поля $F(\zeta)$. Согласно определению (п. 6.1, 6.2) комплексная напряженность всюду на комплексной плоскости удовлетворяет уравнению (6.10)

$$\partial F(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = -1/2 q(\zeta) \quad (7.20)$$

и исчезает на бесконечности:

$$F(\zeta) \rightarrow 0 \text{ при } |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (7.21)$$

Зафиксируем некоторую произвольную точку ζ' комплексной плоскости и проведем из нее окружность L_R ($|\zeta - \zeta'| = R$) радиуса R , столь большого, чтобы область Γ , занятая источниками поля $q(\zeta)$, оказалась целиком внутри L_R . Область, ограниченную L_R , обозначим D_R (рис. 10).

Применяя формулу Помпей (7.15) к функции $F(\zeta)$ и области D_R , с учетом (7.20) записываем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (7.22)$$

Вычислим первый интеграл в правой части (7.22), воспользовавшись представлением $\zeta - \zeta' = Re^{i\theta}$, тогда

$$\int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \int_0^{2\pi} F(\zeta' + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (7.23)$$

Функция $F(\zeta)$ в силу аналитичности на бесконечности стремится к нулю равномерно по θ , поэтому, устремляя в (7.23) $R \rightarrow \infty$, находим

$$\int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (7.24)$$

Поскольку равенство (7.22) справедливо при любом R , то переходя в (7.22) к пределу при $R \rightarrow \infty$, окончательно записываем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (7.25)$$

Таким образом, мы независимым путем нашли решение уравнения (7.20), эквивалентное решению (6.20), полученному ранее с помощью теории логарифмических потенциалов. В этой связи формулы Помпей можно рассматривать как комплексную запись некоторых хорошо известных интегральных равенств, используемых в теории логарифмического потенциала.

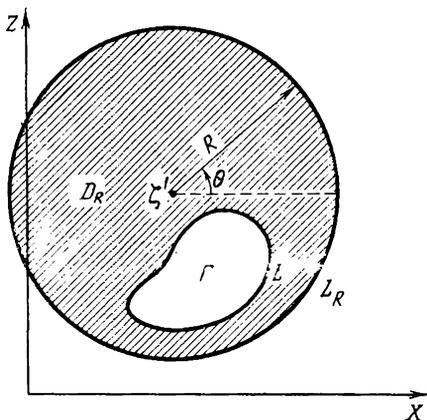


Рис. 10

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Применим изложенные выше общие положения комплексной теории плоских полей для описания гравитационного поля.

8.1. Комплексная напряженность гравитационного поля

Гравитационное поле g двумерного распределения масс, сосредоточенных с плотностью $\rho(x, z)$ в области Γ плоскости XOZ , как известно, удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div}_{\Gamma} g = -4\pi\gamma\rho, \quad \operatorname{rot}_{\Gamma} g = 0, \quad (8.1)$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная.

Определим комплексную напряженность гравитационного поля $g(\zeta)$ следующей формулой:

$$g(\zeta) = -g_x(x, z) + ig_z(x, z), \quad (8.2)$$

где g_x, g_z — скалярные компоненты гравитационного поля g .

Согласно (6.10) функция $g(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial g(\zeta) / \partial \bar{\zeta} = 2\pi\gamma\rho(\zeta), \quad (8.3)$$

где $\rho(\zeta) = \rho(x + iz) \equiv \rho(x, z)$, решение которого дается формулой, вытекающей из (7.25):

$$\dot{g}(\zeta') = -2\gamma \iint_{\Gamma} \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (8.4)$$

Таким образом, формула (8.4) дает представление комплексной напряженности гравитационного поля в виде интеграла с ядром Коши по области, занятой массами. Вместе с тем во многих практически важных задачах (таких, как аналитическое продолжение гравитационного поля внутрь области, занятой массами, изучение свойств аналитически продолженных полей и др.) оказываются чрезвычайно полезными представления комплексных напряженностей гравитационных полей в виде интеграла типа Коши. Эта задача впервые была решена в работах советских исследователей А. В. Цирульского [1963, 1964], Г. Я. Голидры [1966] и В. Н. Страхова [1970г]. Мы изложим здесь методику упрощения аналитических представлений гравитационного поля, следуя в основном работам В. Н. Страхова.

8.2. Представление гравитационного поля однородной области интегралом типа Коши

Начнем наш анализ с простейшего случая, когда внутри области сосредоточены массы с постоянной плотностью $\rho(\zeta) = \rho_0 = \text{const}$. Комплексная напряженность гравитационного поля такой однородной области записывается как

$$g(\zeta') = -2\gamma\rho_0 \iint_{\Gamma} \frac{ds}{\zeta - \zeta'} \quad (8.5)$$

Сведем двойной интеграл в правой части к интегралу типа Коши. Первоначально рассмотрим проблему вычисления поля, когда точка наблюдения лежит вне Γ ($\zeta' \in C\bar{\Gamma}$). В этом случае можно непосредственно воспользоваться следствием теоремы Остроградского — Гаусса — формулой (7.11), положив в последней $\psi(\zeta) = 1/(\zeta - \zeta')$ и $\omega(\zeta) = \bar{\zeta}$, поскольку при $\zeta' \in C\bar{\Gamma}$ ядро Коши — заведомо аналитическая функция от $\zeta \in \Gamma$:

$$\iint_{\Gamma} \frac{ds}{\zeta - \zeta'} = \frac{1}{2i} \int_L \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.6)$$

Подставляя (8.6) в (8.5), записываем

$$g(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \quad (8.7)$$

Это и есть *представление гравитационного поля вне масс интегралом типа Коши*, впервые полученное А. В. Цирульским [1963].

Для того чтобы вычислить гравитационное поле внутри масс (при $\zeta' \in \Gamma$), воспользуемся одной из формул Помпей (7.15), положив в ней $\omega(\zeta) = \bar{\zeta}$:

$$\iint_{\Gamma} \frac{ds}{\zeta - \zeta'} = -\pi\bar{\zeta}' + \frac{1}{2i} \int_L \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in \Gamma. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.8) в (8.5), получаем

$$g(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}' - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in \Gamma. \quad (8.9)$$

Формула (8.9) есть представление гравитационного поля внутри масс интегралом Коши. С помощью формул Сохоцкого — Племеля для интеграла типа Коши нетрудно убедиться, что правые части равенств (8.7) и (8.9) равны между собой на границе L , так что $g(\zeta')$ — непрерывная функция во всем пространстве.

Слагаемые, стоящие в правой части (8.9), имеют простой физический смысл. Обозначим

$$\begin{aligned} 2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}' &= g_0(\zeta'), \quad \zeta' \in \Gamma, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta &= g_{CG}(\zeta'), \quad \zeta' \in \Gamma. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Очевидно, что функция $g_0(\zeta)$ на всей комплексной плоскости удовлетворяет уравнению $\partial g_0(\zeta)/\partial \bar{\zeta} = 2\pi\gamma\rho_0$. Сравнивая последнюю формулу с (8.3), видим, что функция $g_0(\zeta)$ есть комплексная напряженность гравитационного поля, создаваемого массами, распределенными с однородной плотностью ρ_0 на всей комплексной плоскости. Поскольку согласно (8.9)

$$g_{CG}(\zeta') = g_0(\zeta') - g(\zeta'), \quad (8.11)$$

где $\zeta' \in \Gamma$, и $g(\zeta')$ — поле внутри масс, сосредоточенных в области Γ , то в силу принципа суперпозиции полей $g_{CG}(\zeta')$ есть гравитационное поле масс, заполняющих с однородной плотностью ρ_0 бесконечную область CG , дополняющую область Γ до всей комплексной плоскости.

Дадим теперь единое аналитическое выражение для комплексных напряженностей гравитационных полей внутри и вне масс. Для этого заметим прежде всего, что функция $2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}$ — постоянная по ζ , т. е. аналитическая по ζ . Следовательно, по интегральной формуле Коши получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}'}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} 2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}', & \zeta' \in \Gamma, \\ 0, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.12)$$

С учетом (8.12) формулы (8.7) и (8.9) можно объединить в единую формулу, справедливую при всех ζ' :

$$\tilde{g}(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}')}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad (8.13)$$

где ζ' — любая точка комплексной плоскости (в том числе $\zeta' \in L$, в силу непрерывности $g(\zeta')$). Последней формуле можно придать следующий вид:

$$\tilde{g}(\zeta') = i\gamma\rho_0 \int_L \exp(-2i \arg(\zeta - \zeta')) d\zeta. \quad (8.14)$$

Выражение (8.14) было впервые получено В. Н. Страховым. Оно оказывается чрезвычайно полезным при решении прямых задач гравиметрии.

8.3. Представление интегралом типа Коши гравитационного поля области с аналитическим распределением масс

Рассмотрим теперь более общий случай, когда плотность масс, распределенных внутри области Γ , $\rho(x, z)$ есть аналитическая функция переменных x и z в области Γ и непрерывная в замкнутой области $\bar{\Gamma}$. Введем новые независимые переменные $\zeta = x + iz$, $\bar{\zeta} = x - iz$. Очевидно, что функция $\tilde{\rho}(\zeta, \bar{\zeta}) = \rho((\zeta + \bar{\zeta})/2, (\zeta - \bar{\zeta})/2i)$ является также аналитической функцией комплексных переменных ζ и $\bar{\zeta}$ в Γ и непрерывной в $\bar{\Gamma}$.

Обозначим через $\Phi(\zeta, \bar{\zeta})$ неопределенный интеграл

$$\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = \int \tilde{\rho}(\zeta, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta}. \quad (8.15)$$

Тогда

$$\partial\Phi(\zeta, \bar{\zeta})/\partial\bar{\zeta} = \tilde{\rho}(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (8.16)$$

С учетом формулы (8.16) выражение (8.4) для комплексной напряженности гравитационного поля записывается в виде

$$g(\zeta') = -2\gamma \iint_{\Gamma} \frac{\partial\Phi/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (8.17)$$

Вычислим интеграл в правой части (8.17), воспользовавшись вновь формулой Помпей (7.15) для $\zeta' \in \Gamma$:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial\Phi/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} ds = -\pi\Phi(\zeta', \bar{\zeta}') + \frac{1}{2i} \int_L \frac{\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in \Gamma. \quad (8.18)$$

В случае, если $\zeta' \in C\bar{\Gamma}$, ядро Коши $1/(\zeta - \zeta')$ — заведомо аналитическая функция и для вычисления двойного интеграла можно, так же как и выше в случае постоянной плотности ρ , непосредственно использовать формулу (7.11):

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial\Phi/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} ds = \frac{1}{2i} \int_L \frac{\Phi(\zeta, \bar{\zeta}')}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \quad (8.19)$$

Подставляя (8.18) и (8.19) в (8.17), получаем следующую формулу:

$$g(\zeta') = \begin{cases} 2\pi\gamma\Phi(\zeta', \bar{\zeta}') - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in \Gamma, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.20)$$

С помощью формул Сохоцкого — Племеля для интеграла типа Коши нетрудно убедиться, что правые части равенств (8.20) равны между собой на границе L , так что $g(\zeta')$, как и в случае однородной плотности, — непрерывная функция во всем пространстве.

Формулы (8.20) были впервые даны Г. Я. Голиздой [1966] (правда, первая из формул (8.20) — без должного обоснования). Подробный вывод этих формул был приведен В. Н. Страховым [1970г]. В нашем изложении мы опирались на эту работу В. Н. Страхова, а также использовали метод, описанный в книге И. Н. Векуа [1959, с. 43].

Запишем теперь правую часть формулы (8.20) в виде единого аналитического выражения. Для этого воспользуемся вновь интегральной формулой Коши (1.1), применив ее к постоянной по переменной ζ функции $2\pi\gamma\Phi(\zeta', \bar{\zeta}')$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta', \bar{\zeta}')}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} 2\pi\gamma\Phi(\zeta', \bar{\zeta}'), & \zeta' \in \Gamma, \\ 0, & \zeta' \in \overline{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.21)$$

С учетом (8.21) мы получаем следующее *единое представление интегралом типа Коши для комплексной напряженности гравитационного поля материальной области с аналитическим распределением масс*:

$$g(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma [\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) - \Phi(\zeta', \bar{\zeta}')] d\zeta}{\zeta - \zeta'}. \quad (8.22)$$

8.4. Случай вертикальных или горизонтальных изменений плотности

Рассмотрим теперь ряд важных частных случаев распределения $\rho(x, z)$ в области Γ . Простой, но весьма интересной является ситуация, когда плотность меняется только по горизонтали или только по вертикали. Пусть для начала $\rho = \rho(x)$. Тогда согласно (8.15)

$$\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = \int \rho \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right) d\bar{\zeta} = 2 \int \rho \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right) d \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right) = 2R \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} \right), \quad (8.23)$$

где

$$R(x) = \int \rho(x) dx. \quad (8.24)$$

Подставляя (8.23) в (8.22), записываем

$$g(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{4\pi\gamma [R((\zeta' + \bar{\zeta}')/2) - R((\zeta + \bar{\zeta})/2)] d\zeta}{\zeta - \zeta'}. \quad (8.25)$$

Например, если $\rho(x)$ есть квадратичная функция x , $\rho(x) = \rho_0 + ax^2$, то согласно (8.24)

$$R(x) = \rho_0 x + \frac{1}{3} ax^3 + c_0. \quad (8.26)$$

Подставляя (8.26) в (8.25), имеем

$$g(\zeta' = x' + iz') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{4\pi\gamma [\rho_0(x' - x) + 1/3 a(x'^3 - x^3)]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.27)$$

Положим теперь, что плотность ρ меняется только по вертикали, $\rho = \rho(z)$. Тогда согласно (8.15)

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta, \bar{\zeta}) &= \int \rho \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i} \right) d\bar{\zeta} = -2i \int \rho \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i} \right) d \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i} \right) = \\ &= -2i \int \rho(z) dz = -2iQ(z), \end{aligned} \quad (8.28)$$

где

$$Q(z) = \int \rho(z) dz. \quad (8.29)$$

Подставляя (8.28) в (8.22), записываем

$$g(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{4\pi i [Q((\zeta' - \bar{\zeta}')/2) - Q((\zeta - \bar{\zeta})/2)]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.30)$$

Например, если $\rho(z)$ есть квадратичная функция z : $\rho(z) = \rho_0 + az^2$, то

$$Q(z) = \rho_0 z + 1/3 az^3 + c_0. \quad (8.31)$$

Следовательно, гравитационное поле масс, плотность которых меняется с глубиной по квадратичному закону, находится по формуле

$$g(\zeta' = x' + iz') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{4\pi i [\rho_0(z' - z) + 1/3 a(z'^3 - z^3)]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.32)$$

8.5. Случай, когда плотность есть линейная функция координат

Особенно важным для приложений является случай, когда плотность масс ρ есть линейная функция координат:

$$\rho = \rho(x, z) = \rho_0 + ax + bz. \quad (8.33)$$

Положим в (8.33) $x = (\zeta + \bar{\zeta})/2$, $z = (\zeta - \bar{\zeta})/2i$, тогда

$$\rho(x, z) = \rho_0 + \alpha\zeta + \bar{\alpha}\bar{\zeta}, \quad (8.34)$$

где $\alpha = (a - ib)/2$. Функция $\Phi(\zeta, \bar{\zeta})$ соответственно вычисляется так:

$$\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = \rho_0\bar{\zeta} + \alpha\bar{\zeta}\zeta + 1/2 \bar{\alpha}\bar{\zeta}^2. \quad (8.35)$$

Подставляя (8.35) в (8.22), после несложных преобразований получаем

$$= i\gamma \int_{\Gamma} [\rho_0 + \alpha\zeta + 1/2 \bar{\alpha}(\bar{\zeta}' + \bar{\zeta})] \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'}{\zeta - \zeta'} d\zeta + i\alpha\gamma\bar{\zeta}' \int_L d\zeta.$$

Второй интеграл в правой части (8.36) по теореме Коши обращается в нуль, а первому может быть придан вид, аналогичный интегралу в формуле (8.14):

$$g(\zeta') = i\gamma \int_L [\rho_0 + \alpha\zeta + 1/2 \bar{\alpha}(\bar{\zeta}' + \bar{\zeta})] \exp(-2i \arg(\zeta - \zeta')) d\zeta. \quad (8.37)$$

8.6. Общий случай непрерывного распределения плотности

Покажем, как приведенные выше результаты могут быть обобщены на случай произвольной непрерывной в $\bar{\Gamma}$ и непрерывно-дифференцируемой в Γ плотности $\rho(x, z)$. Доопределим функцию $\rho(x, z)$ в некоторой области Γ^* , целиком содержащей внутри себя область Γ с ее границей $\Gamma^* \supset \bar{\Gamma}$, причем так, чтобы $\rho(x, z)$ была бы непрерывной в Γ^* . Зададим некоторую вспомогательную функцию $\sigma(\zeta)$ следующим уравнением в Γ^* :

$$\partial\sigma(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = \rho(\zeta = x + iz) = \rho(x, z). \quad (8.38)$$

Отметим, что Γ^* может совпадать со всей комплексной плоскостью. Уравнение (8.38) согласно результатам параграфа 7 имеет внутри Γ общее решение, выражаемое формулой

$$\sigma(\zeta) = \varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} \rho(\eta) \frac{ds}{\eta - \zeta}, \quad (8.39)$$

где $\varphi(\zeta)$ — произвольная аналитическая в Γ функция. Эта формула вытекает из формулы Помпей (7.15), если положить в ней

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta = \varphi(\zeta).$$

Частное решение (8.38) находим, принимая $\varphi(\zeta) = 0$:

$$\sigma(\zeta) = - \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} \rho(\eta) \frac{ds}{\eta - \zeta}. \quad (8.40)$$

Подставляя теперь (8.38) в (8.4), получаем следующее выражение для комплексной напряженности гравитационного поля:

$$\bar{g}(\zeta') = - 2\gamma \iint_{\Gamma} \frac{\partial\sigma(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}} \frac{ds}{\zeta - \zeta'}. \quad (8.41)$$

На основе формулы (8.41) путем рассуждений, аналогичных приведенным в п. 8.3, может быть записано представление функции $g(\zeta')$ в виде интеграла типа Коши по границе области Γ :

$$g(\zeta') = \begin{cases} 2\pi\gamma\sigma(\zeta') - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\sigma(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in \Gamma, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\sigma(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.42)$$

Последнее представление может быть приведено также к единой формуле, аналогичной (8.22):

$$g(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma[\sigma(\zeta') - \sigma(\zeta)]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.43)$$

В случае, когда $\rho = \rho_0 = \text{const}$, частное решение (8.38) есть

$$\sigma(\zeta) = \rho_0 \bar{\zeta}. \quad (8.44)$$

Подставляя (8.44) в (8.43), получаем (8.13).

8.7. Вычисление гравитационного поля бесконечно протяженной области

Чрезвычайно важным для приложений является решение задачи о гравитационном поле материальной области, простирающейся в бесконечность.

Рассмотрим область Γ , ограниченную горизонтальной прямой M

$$z = -h \quad (8.45)$$

и некоторой гладкой или кусочно-гладкой линией L (рис. 11) с уравнением

$$z = \Delta z(x) - h, \quad (8.46)$$

причем

$$\Delta z(x) \geq 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Delta z(x) = 0. \quad (8.47)$$

Будем предполагать, что область Γ заполнена массами однородной плотности $\rho_0 = \text{const}$. Вычислим комплексную напряженность гравитационного поля этой области. Для того чтобы воспользоваться формулами предыдущих пунктов, справедливыми только для конечных областей, вырежем из области Γ подобласть Γ_R , ограниченную окружностью O_R радиуса R с центром в начале координат (см. рис. 11). Части кривой L и прямой M , попавшие внутрь O_R , обозначим L_R и M_R , а отрезки окружности O_R , заключенные между L и M , — через O_R^+ и O_R^- . Таким образом, граница области Γ_R состоит из четырех отрезков кривых: $L_R \cup O_R^- \cup M_R \cup O_R^+$. Следо-

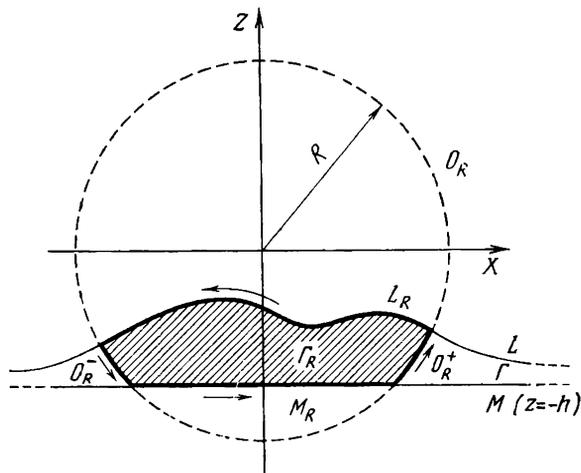


Рис. 11

вательно, согласно формуле (8.7) комплексная напряженность гравитационного поля области Γ_R вне последней вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 g(\zeta') = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta-\zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R^-} \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta-\zeta'} d\zeta - \\
 & -\frac{1}{2\pi i} \int_{M_R} \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta-\zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R^+} \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta-\zeta'} d\zeta.
 \end{aligned} \quad (8.48)$$

Преобразуем интеграл по отрезку прямой M_R . Для этого, полагая в (8.45) $z = (\zeta - \bar{\zeta})/2i$, запишем уравнение горизонтальной прямой в следующей форме (более подробно об этой форме записи уравнения кривой см. п. 13.2):

$$\bar{\zeta} = \zeta + 2ih. \quad (8.49)$$

Функция, стоящая в правой части равенства (8.49), является аналитической во всей конечной части комплексной плоскости. Следовательно, по интегральной теореме Коши можно преобразовать интеграл по отрезку M_R в интеграл по кривой $O_R^- \cup L_R \cup O_R^+$.

Производя указанные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \int_{M_R} \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta-\zeta'} d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{M_R} \frac{2\pi\gamma\rho_0(\zeta+2ih)}{\zeta-\zeta'} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R^- \cup L_R \cup O_R^+} \frac{2\pi\gamma\rho_0(\zeta+2ih)}{\zeta-\zeta'} d\zeta,
 \end{aligned} \quad (8.50)$$

где сохранено направление интегрирования вдоль кривых, показанное на рис. 11.

Подставляя (8.50) в (8.48), записываем

$$g(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_K} \frac{2\pi\gamma\rho_0(\bar{\zeta} - \zeta - 2ih)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R^-} \frac{2\pi\gamma\rho_0(\bar{\zeta} - \zeta - 2ih)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R^+} \frac{2\pi\gamma\rho_0(\bar{\zeta} - \zeta - 2ih)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.51)$$

В силу условия (8.47) последние два интеграла в (8.51) при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, поэтому, осуществляя предельный переход в (8.51), находим

$$g(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0(\bar{\zeta} - \zeta - 2ih)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad (8.52)$$

где линия L приходится справа налево. Замечая, что $\bar{\zeta} - \zeta - 2ih = -2i\Delta z(x) = -2i\Delta z[(\zeta + \bar{\zeta})/2]$, окончательно получаем

$$g(\zeta') = 2\gamma\rho_0 \int_L \frac{\Delta z[(\zeta + \bar{\zeta})/2]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (8.53)$$

Формула (8.53) дает решение поставленной задачи расчета гравитационного поля бесконечно протяженной области вне масс. Возвращаясь к декартовым координатам x , z и раскрывая действительные и мнимые части в формуле (8.53), с учетом (8.46) записываем

$$-\bar{g}_x(x', z') + i\bar{g}_z(x', z') = -2\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta z(x)(1 + id\Delta z(x)/dx)}{(x - x') + i(\Delta z - h - z')} dx.$$

Умножая числитель и знаменатель подынтегрального выражения на величину, комплексно-сопряженную знаменателю, окончательно находим

$$\bar{g}_x(x', z') = 2\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z(x)[(x - x') + (\Delta z - h - z')d\Delta z(x)/dx]}{(x - x')^2 + (\Delta z - h - z')^2} dx, \quad (8.54)$$

$$g_z(x', z') = 2\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z(x)[(\Delta z - h - z') - (x - x')d\Delta z(x)/dx]}{(x - x')^2 + (\Delta z - h - z')^2} dx.$$

Предполагая в (8.46), что $\max_{-\infty < x < +\infty} \frac{\Delta z(x)}{h} \ll 1$ и $\max_{-\infty < x < +\infty} \left| \frac{d\Delta z(x)}{dx} \right| \ll 1$, и полагая $z' = 0$, получаем так называемые *линеаризованные представления гравитационного поля*:

$$\bar{g}_x(x', 0) = 2\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z(x)(x-x')}{(x-x')^2 + h^2} dx, \quad (8.55)$$

$$g_z(x', 0) = -2\gamma\rho_0 h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z(x)}{(x-x')^2 + h^2} dx.$$

Приведенный здесь весьма простой вывод формул (8.54) и (8.55) принадлежит В. Н. Страхову [1970г].

9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Изучим теперь с помощью комплексной теории плоских полей постоянное магнитное поле. Математической моделью возбудителей этого поля является двумерный поляризованный источник, поэтому начнем наше исследование с описания интегралом типа Коши комплексной напряженности поляризованного источника.

9.1. Комплексный потенциал поляризованного источника

Рассмотрим двумерный поляризованный источник, заполняющий область Γ с комплексной поляризацией $\mu(\zeta)$. Согласно формуле (6.22) комплексная напряженность этого источника может быть записана так:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - \zeta')^2} ds. \quad (9.1)$$

Представим ядро интеграла (9.1) в виде производной ядра Коши

$$\frac{1}{(\zeta - \zeta')^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta'} \frac{1}{(\zeta - \zeta')} \quad (9.2)$$

Подставляя (9.2) в (9.1) и вынося производную по параметру из-под знака интегрирования, получаем

$$F(\zeta') = \frac{\partial}{\partial \zeta'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds \right\}. \quad (9.3)$$

Обозначим комплексный потенциал поляризованного источника через $P_D(\zeta')$. Тогда из (9.3) находим

$$F(\zeta') = -\partial P_D(\zeta') / \partial \zeta', \quad (9.4)$$

где

$$P_D(\zeta') = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (9.5)$$

Представление (9.5) для комплексного потенциала поляризованного источника, как видим, по своей структуре аналогично представлению (7.25) для комплексной напряженности поля. Однако в формуле (9.5) в отличие от формулы (7.25) $\mu(\zeta)$ — есть комплекснозначная функция, что существенно упрощает анализ этой формулы.

9.2. Комплексные напряженности и потенциал магнитного поля

Пусть теперь область Γ заполнена намагниченными массами с интенсивностью намагничивания $\mathbf{I}(x, z) = (I_x(x, z), I_z(x, z))$. Плотность дипольных моментов соответствующего двумерного поляризованного источника при этом, как известно, равна

$$\mathbf{m}(x, z) = 4\pi \mathbf{I}(x, z).$$

Соответственно комплексная поляризация источника записывается в виде

$$\mu(\zeta) = 4\pi I_x(x, z) + i4\pi I_z(x, z) = 4\pi I(\zeta), \quad (9.6)$$

где $I(\zeta)$ — комплексная интенсивность намагничивания магнитных масс, заполняющих область Γ .

Подставляя (9.6) в (9.1), находим комплексную напряженность $H(\zeta)$ плоского магнитного поля $\mathbf{H}(x, z) = (H_x(x, z), H_z(x, z))$:

$$H(\zeta) = -H_x(x, z) + iH_z(x, z) = 2 \iint_{\Gamma} \frac{I(\zeta)}{(\zeta - \zeta')^2} ds. \quad (9.7)$$

Комплексный магнитный потенциал $W(\zeta')$ соответственно записывается следующим образом:

$$W(\zeta') = -2 \iint_{\Gamma} \frac{I(\zeta)}{\zeta - \zeta'} ds. \quad (9.8)$$

Формула (9.8) эквивалентна формуле (8.4) для комплексной напряженности гравитационного поля, если заменить в последней $\rho(\zeta)$ на $I(\zeta)$. Основное различие заключается, как уже отмечалось выше, в том, что $I(\zeta)$ есть комплексная функция комплексной переменной ζ , в то время как $\rho(\zeta)$ — действительная функция. В дальнейшем мы сосредоточим наше внимание в основном на изучении свойств комплексного магнитного потенциала.

?

9.3. Представление магнитного потенциала однородной области в виде интеграла типа Коши

Перепишем формулу (9.8) для случая однородной намагниченности тела:

$$W(\zeta') = -2I_0 \iint_{\Gamma} \frac{ds}{\zeta - \zeta'}, \quad \text{где } I_0 = \text{const.} \quad (9.9)$$

Выражение (9.9) с помощью формул Помпей может быть преобразовано точно так же, как выражение (8.5) для напряженности гравитационного поля однородной области.

В результате по аналогии с (8.7) и (8.9) получаем

$$W(\zeta') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I_0 \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}, \\ 2\pi I_0 \bar{\zeta}' - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I_0 \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in \Gamma. \end{cases} \quad (9.10)$$

Формулы (9.10), так же как и в случае гравитационного поля, могут быть объединены в единое выражение:

$$W(\zeta') = iI_0 \int_L \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}'}{\zeta - \zeta'} d\zeta = iI_0 \int_L \exp(-2i \arg(\zeta - \zeta')) d\zeta. \quad (9.11)$$

9.4. Общий случай распределения намагниченности

Рассмотрим теперь общий случай, когда намагниченность $I(\zeta)$ есть произвольная непрерывная функция в $\bar{\Gamma}$, имеющая в Γ непрерывные частные производные. Доопределим, следуя п. 8.6, функцию $I(\zeta)$ в некоторой области $\Gamma^* \supset \bar{\Gamma}$, причем так, чтобы $I(\zeta)$ была непрерывной в Γ^* , и запишем следующее уравнение относительно функции $h(\zeta)$ в Γ^* :

$$\partial h(\zeta) / \partial \bar{\zeta} = I(\zeta). \quad (9.12)$$

Уравнение (9.12) согласно результатам параграфа 7 имеет в Γ общее решение, выражаемое формулой

$$h(\zeta) = \Phi(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} I(\eta) \frac{ds}{\eta - \zeta}, \quad (9.13)$$

где $\Phi(\zeta)$ — произвольная аналитическая в Γ функция. В частности, можно принять $\Phi(\zeta) \equiv 0$, тогда частное решение (9.12) записывается как

$$h(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} I(\eta) \frac{ds}{\eta - \zeta} \quad (9.14)$$

Подставляя теперь (9.12) в (9.8), получаем следующее представление магнитного потенциала:

$$W(\zeta') = -2 \iint_{\Gamma} \frac{\partial h(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds}{\zeta - \zeta'}, \quad (9.15)$$

которое с помощью преобразований, аналогичных описанным в п. 8.6, приводится к виду

$$W(\zeta') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi h(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in \Gamma, \\ 2\pi h(\zeta') - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi h(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \end{cases} \quad (9.16)$$

Наконец, точно так, как мы делали это для гравитационного поля, объединяем правые части (9.16) в единую формулу:

$$W(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi [h(\zeta') - h(\zeta)]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (9.17)$$

Таким образом, магнитный потенциал вне и внутри намагниченного тела представляется единой формулой (9.17) в виде интеграла типа Коши по контуру тела. Важно подчеркнуть, что *представление (9.17) справедливо для любого распределения намагниченности $I(\zeta)$, которое имеет непрерывные частные производные внутри Γ и непрерывно в замкнутой области $\bar{\Gamma}$.*

В частном случае, когда $I(\zeta) = I_0 = \text{const}$, функция $h(\zeta)$, очевидно, равна $h(\zeta) = I_0 \bar{\zeta}$ и формула (9.17) переходит в формулу (9.11).

9.5. Аналитическое распределение намагниченности

Рассмотрим наиболее важный случай, когда намагниченность $I(\zeta)$ внутри Γ есть аналитическая функция и непрерывная в $\bar{\Gamma}$. Тогда нетрудно сообразить, что частным решением (9.12) будет функция

$$h(\zeta) = I(\zeta) \bar{\zeta}. \quad (9.18)$$

Подставляя (9.18) в (9.16), получаем

$$W(\zeta') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in C\bar{\Gamma}, \\ 2\pi I(\zeta') \bar{\zeta}' - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, & \zeta' \in \Gamma, \end{cases} \quad (9.19)$$

или в форме единого аналитического выражения:

$$W(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi [I(\zeta') \bar{\zeta}' - I(\zeta) \bar{\zeta}]}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (9.20)$$

Соотношения (9.19) были впервые получены В. Н. Страховым [1970г]. Они играют фундаментальную роль в теории комплексного магнитного потенциала.

Глава третья

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОЛЕЙ

10. РАЗДЕЛЕНИЕ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ НА ВНЕШНЮЮ И ВНУТРЕННЮЮ ЧАСТИ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В этой главе мы рассмотрим приложение аппарата интеграла типа Коши к решению одной из наиболее старых задач теории геопотенциальных полей — задачи разделения поля на внешнюю и внутреннюю части. Впервые эта задача была рассмотрена еще в прошлом веке в классических работах Гаусса по земному магнетизму. Гаусса волновала проблема, где находятся источники магнитного поля Земли — внутри Земли или вне Земли. Применяя развитый им аппарат сферического гармонического анализа, великий немецкий математик показал, что внешняя часть магнитного потенциала пренебрежимо мала по сравнению с внутренней частью. Повторный анализ вклада внешних и внутренних источников в магнитное поле был сделан в конце прошлого века немецким физиком и математиком Шмидтом [Chapman, Bartels, 1940]. Усовершенствовав метод сферического гармонического анализа и используя более точные данные натуральных наблюдений магнитного поля, Шмидт сумел оценить вклад внешних источников в постоянное магнитное поле Земли, который также оказался весьма малым.

В середине текущего столетия немецкие геофизики Керц [Kertz, 1954], Зиберт [Siebert, Kertz, 1957; Siebert, 1958, 1962, 1964] и Хартман [Hartman, 1963] развили метод Гаусса — Шмидта применительно к анализу вариаций магнитного поля Земли. Это оказалось возможным, поскольку переменное магнитное поле в воздухе (в изоляторе), так же как и постоянное поле, может быть представлено скалярным потенциалом¹. В работах Зиберта [Siebert, 1964] и Хартмана [Hartman, 1963] при этом уже широко ис-

¹ Подробный анализ уравнений переменного магнитного поля будет дан ниже в разд. III.

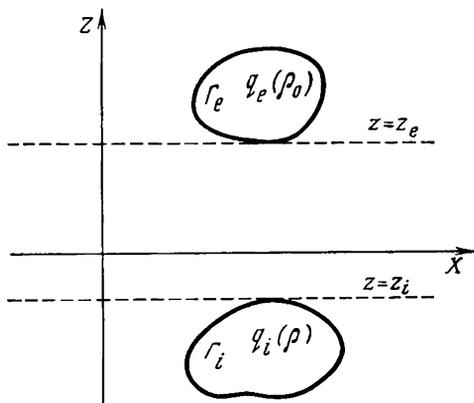


Рис. 12

пользовался аппарат теории функций комплексного переменного и интеграла типа Коши. В настоящей главе мы в целях полноты изложения рассмотрим как спектральный метод разделения поля, восходящий к идеям Гаусса — Шмидта, так и более современный подход, иллюстрирующий эффективность применения аппарата интеграла типа Коши.

Дальнейшее развитие этих исследований, касающееся обобщения методов разделения полей на трех-

мерные ситуации и непотенциальные поля, связано с работами Вивера [Weaver, 1964], И. П. Недялкова [1965] и автора монографии [Жданов, 1973в]. Эти методы будут рассмотрены в последующих главах книги.

10.1. Постановка задачи разделения плоского поля

Рассмотрим некоторое плоское потенциальное поле $F(x, z) = (F_x(x, z), F_z(x, z))$. Пусть это поле создается двумя источниками: внешним $q_e(x, z)$, сосредоточенным в области Γ_e , и внутренним $q_i(x, z)$, сосредоточенным в области Γ_i , причем области Γ_e и Γ_i находятся по разные стороны от оси X (рис. 12). Обозначим через $F^e(x, z)$ и $F^i(x, z)$ поля, создаваемые каждым из источников q_e и q_i порознь. Эти поля мы будем называть *внешним* и *внутренним* полями соответственно. Тогда согласно принципу суперпозиции полей

$$F(x, z) = F^e(x, z) + F^i(x, z). \quad (10.1)$$

Задача разделения полей формулируется следующим образом: по суммарному векторному полю $F(x, z)$, известному на оси X , найти внешнее и внутреннее поля $F^e(x, z)$ и $F^i(x, z)$ также на оси X .

Эта же задача может быть записана на языке скалярного потенциала. В самом деле, обозначим через $U(x, z)$, $U^e(x, z)$, $U^i(x, z)$ потенциалы полей $F(x, z)$, $F^e(x, z)$ и $F^i(x, z)$ соответственно. Тогда

$$F = \text{grad } U, \quad F^e = \text{grad } U^e, \quad F^i = \text{grad } U^i. \quad (10.2)$$

Задача разделения потенциалов заключается в нахождении внешнего U^e и внутреннего U^i потенциалов на оси X по суммарному потенциалу U , заданному на той же оси.

Для решения этой задачи обратимся к спектральным представлениям поля.

10.2. Спектральные представления плоских полей

Очевидно, что плоское потенциальное поле, возбуждаемое источниками, локализованными в конечных областях плоскости, абсолютно интегрируемо вдоль любой горизонтальной прямой. Следовательно, для него существует прямое преобразование Фурье

$$\mathbf{f}(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(x, z) \exp(ik_x x) dx. \quad (10.3)$$

Функцию $\mathbf{f}(k_x, z)$ будем называть *пространственным спектром* поля $\mathbf{F}(x, z)$, а параметр k_x — *пространственной частотой*. Согласно обратному преобразованию Фурье имеем

$$\mathbf{F}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(k_x, z) \exp(-ik_x x) dk_x. \quad (10.4)$$

Аналогично вводится пространственный спектр $u(k_x, z)$ скалярного потенциала:

$$u(k_x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, z) \exp(ik_x x) dx, \quad (10.5)$$

связанный с $U(x, z)$ соотношением

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(k_x, z) \exp(-ik_x x) dx. \quad (10.6)$$

Очевидно, что согласно (10.2) спектры горизонтальной и вертикальной компонент поля \mathbf{F} выражаются через спектр потенциала:

$$f_x = -ik_x u, \quad f_z = \partial u / \partial z. \quad (10.7)$$

Обозначим через $z = z_e$ и $z = z_i$ уравнения горизонтальных прямых, проходящих через ближайшие к оси X точки областей Γ_e и Γ_i (рис. 12). Тогда, поскольку всюду вне Γ_e и Γ_i скалярный потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0, \quad (10.8)$$

в горизонтальной полосе $z_i < z < z_e$ спектр потенциала удовлетворяет одномерному уравнению Гельмгольца

$$\partial^2 u / \partial z^2 - k_x^2 u = 0. \quad (10.9)$$

Общее решение уравнения (10.9) имеет вид

$$u = u^+ \exp(|k_x|z) + u^- \exp(-|k_x|z), \quad (10.10)$$

где u^+ и u^- — константы.

Как видим, спектр u состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое возрастает при росте z и, следовательно, относится к внешнему полю, а второе слагаемое, наоборот, уменьшается с ростом z

и, следовательно, описывает внутреннее поле. Поэтому мы можем записать

$$u^e = u^+ \exp(|k_x|z), \quad u^i = u^- \exp(-|k_x|z), \quad (10.11)$$

где u^e и u^i пространственные спектры внешней и внутренней частей потенциала соответственно. Таким образом, задача разделения полей свелась к нахождению неизвестных постоянных u^+ и u^- . Решим эту задачу.

10.3. Определение внешних и внутренних частей скалярного потенциала и поля (формулы Гаусса — Шмидта)

Для нахождения u^+ и u^- подставим (10.10) в (10.7):

$$\begin{aligned} f_x &= -ik_x [u^+ \exp(|k_x|z) + u^- \exp(-|k_x|z)], \\ f_z &= |k_x| [u^+ \exp(|k_x|z) - u^- \exp(-|k_x|z)]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

В частности, на оси X

$$f_x|_{z=0} = -ik_x(u^+ + u^-), \quad f_z|_{z=0} = |k_x|(u^+ - u^-). \quad (10.13)$$

Отсюда легко находим

$$\begin{aligned} u^+ &= u^e|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_x}{-ik_x} + \frac{f_z}{|k_x|} \right)_{z=0} \\ u^- &= u^i|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_x}{-ik_x} - \frac{f_z}{|k_x|} \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (10.14)$$

Подставляя (10.14) в (10.11), а затем в (10.7), определяем внешнюю и внутреннюю части плоского поля на оси X :

$$\begin{aligned} f_x^e|_{z=0} &= \frac{1}{2} \left(f_x - i \frac{k_x}{|k_x|} f_z \right)_{z=0}, \\ f_x^i|_{z=0} &= \frac{1}{2} \left(f_x + i \frac{k_x}{|k_x|} f_z \right)_{z=0}, \\ f_z^e|_{z=0} &= \frac{1}{2} \left(f_z + i \frac{|k_x|}{k_x} f_x \right)_{z=0}, \\ f_z^i|_{z=0} &= \frac{1}{2} \left(f_z - i \frac{|k_x|}{k_x} f_x \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Учитывая, что

$$\frac{k_x}{|k_x|} = \frac{|k_x|}{k_x} = \text{sign } k_x = \begin{cases} 1, & k_x > 0 \\ 0, & k_x = 0, \\ -1, & k_x < 0, \end{cases} \quad (10.16)$$

записываем

$$f_x^{e,i} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} (f_x \mp i \operatorname{sign} k_x \cdot f_z)_{z=0},$$

$$f_z^{e,i} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} (f_z \pm i \operatorname{sign} k_x \cdot f_x)_{z=0}.$$
(10.17)

Синтезируя (10.17), окончательно получаем

$$F^{e,i}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{e,i} \Big|_{z=0} \exp(-ik_x x) dk_x,$$
(10.18)

или подробно:

$$F_x^i(x, 0) = \frac{1}{2} F_x(x, 0) + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} k_x \cdot f_z \Big|_{z=0} \exp(-ik_x x) dk_x,$$
(10.19)

$$F_z^i(x, 0) = \frac{1}{2} F_z(x, 0) - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} k_x \cdot f_x \Big|_{z=0} \exp(-ik_x x) dk_x;$$

$$F_x^e(x, 0) = \frac{1}{2} F_x(x, 0) - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} k_x \cdot f_z \Big|_{z=0} \exp(-ik_x x) dk_x,$$
(10.20)

$$F_z^e(x, 0) = \frac{1}{2} F_z(x, 0) + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} k_x \cdot f_x \Big|_{z=0} \exp(-ik_x x) dk_x.$$

Формулы (10.19), (10.20) мы будем называть, следуя работе [Бердичевский, Жданов, 1981], *формулами Гаусса — Шмидта разделения плоских полей*.

11. МЕТОД КЕРТЦА — ЗИБЕРТА

Дадим теперь решение задачи, сформулированной в предыдущем параграфе, с помощью аппарата интеграла типа Коши.

11.1. Задача разделения комплексной напряженности поля

Вернемся вновь к комплексным координатам $\zeta = x + iz$ и обозначим через $F(\zeta)$, $F^e(\zeta)$ и $F^i(\zeta)$ комплексные напряженности суммарного поля $F(x, z)$, его внешней $F^e(x, z)$ и внутренней $F^i(x, z)$ частей. Очевидно, что $F^e(\zeta)$ есть комплексно-аналитическая функция всюду вне Γ_e , а $F^i(\zeta)$ — комплексно-аналитическая функция всюду вне Γ_i .

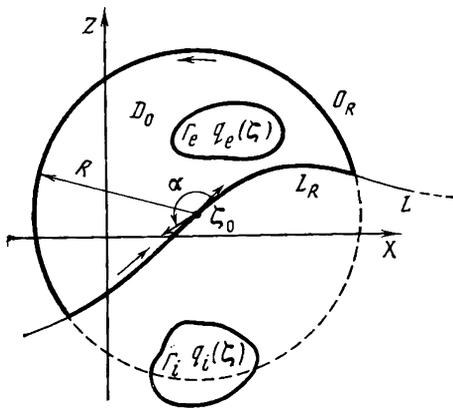


Рис. 13

Несколько усложним ситуацию, рассмотренную в предыдущем пункте, а именно будем предполагать, что суммарное поле $F(\zeta)$ задано не на действительной оси X , а на некоторой произвольной кусочно-гладкой линии L , проходящей через бесконечно-удаленную точку и разделяющей комплексную плоскость на две односвязные части — верхнюю и нижнюю полуплоскости (рис. 13). Область G_e лежит в верхней полуплоскости, а область G_i — в нижней полуплоскости. Задача заключается в том, чтобы по известной на линии L

комплексно-аналитической функции $F(\zeta)$, имеющей особенности как в верхней (в области G_e), так и в нижней полуплоскости (в области G_i), определить на кривой L комплексно-аналитические функции $F^e(\zeta)$ и $F^i(\zeta)$, имеющие особенности только в верхней или только в нижней полуплоскости соответственно.

Для решения этой задачи проведем из произвольной точки ζ_0 , лежащей на линии L , окружность столь большого радиуса R , чтобы область G_e оказалась целиком внутри этой окружности (рис. 13). Замкнем часть окружности O_R , лежащую в верхней полуплоскости, линией L_R , отсекаемой окружностью на L , и рассмотрим интеграл типа Коши по замкнутому контуру $A_R = O_R \cup L_R$:

$$C_R(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta \quad (11.1)$$

(обход контура против часовой стрелки). Поскольку

$$F(\zeta) = F^e(\zeta) + F^i(\zeta), \quad (11.2)$$

интеграл (11.1) можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$C_R(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_R} \frac{F^e(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{A_R} \frac{F^i(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (11.3)$$

Обозначим через D_R область, ограниченную A_R . Функция $F^e(\zeta)$, очевидно, аналитична и непрерывна в области CD_R , внешней к D_R , и исчезает на бесконечности. Следовательно, по интегральной формуле Коши для бесконечной области (1.2)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{A_R} \frac{F^e(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} -F^e(\zeta'), & \zeta' \in CD_R, \\ 0, & \zeta' \in D_R. \end{cases} \quad (11.4)$$

Аналогично функция $F^i(\zeta)$ аналитична и непрерывна в \bar{D}_R , следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{A_R} \frac{F^i(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} 0, & \zeta' \in C\bar{D}_R, \\ F^i(\zeta'), & \zeta' \in D_R. \end{cases} \quad (11.5)$$

Подставляя (11.4) и (11.5) в (11.3), находим

$$C_R(\zeta') = \begin{cases} -F^e(\zeta'), & \zeta' \in C\bar{D}_R, \\ F^i(\zeta'), & \zeta' \in D_R. \end{cases} \quad (11.6)$$

Формула (11.6), по существу, уже дает основу для определения внешних и внутренних полей. Однако для нас интересна ситуация, когда F^e и F^i необходимо найти на линии L .

11.2. Разделение полей в обыкновенных точках линии L

Предположим первоначально, что точка ζ_0 — обыкновенная (не угловая) точка линии L , т. е. что существует окрестность этой точки, в которой кривая L есть гладкая линия. Определим предельные значения функции $C_R(\zeta')$ на L_R .

Согласно формулам Сохоцкого — Племеля (2.21а), (2.21б)

$$C_R^+(\zeta_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0^+} C_R(\zeta) = C_R(\zeta_0) + 1/2 F(\zeta_0), \quad (11.7)$$

$$C_R^-(\zeta_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0^-} C_R(\zeta) = C_R(\zeta_0) - 1/2 F(\zeta_0).$$

С другой стороны, поскольку функции $F^e(\zeta)$ и $F^i(\zeta)$, описывающие внешние и внутренние поля, в окрестности точки ζ_0 непрерывны, в соответствии с (11.6) получаем

$$C_R^+(\zeta_0) = F^i(\zeta_0), \quad C_R^-(\zeta_0) = -F^e(\zeta_0). \quad (11.8)$$

Подставляя (11.8) в (11.7), получаем

$$F^i(\zeta_0) = C_R(\zeta_0) + 1/2 F(\zeta_0), \quad F^e(\zeta_0) = -C_R(\zeta_0) + 1/2 F(\zeta_0), \quad (11.9)$$

где

$$C_R(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in L_R.$$

Теперь перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Интеграл по части окружности O_R после замены переменной $\zeta = \zeta_0 + Re^{i\theta}$ записывается в виде

$$\int_{O_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = i \int_0^{2\pi} F(\zeta_0 + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (11.10)$$

Функция $F(\zeta)$ в силу аналитичности равномерно по θ стремится к нулю на бесконечности, следовательно, предел интеграла (11.10) равен нулю. Поэтому, переходя в (11.9) к пределу при $R \rightarrow \infty$, окончательно записываем

$$F^i(\zeta_0) = \frac{1}{2} F(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (11.11)$$

$$F^e(\zeta_0) = \frac{1}{2} F(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

где интегрирование по L ведется в направлении, при котором верхняя полуплоскость остается слева (рис. 13), а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

11.3. Разделение полей в угловых точках линии L

Рассмотрим теперь случай, когда ζ_0 — угловая точка кусочно-гладкой кривой L , а α — угол между двумя касательными к L в точке ζ_0 , отсчитываемый слева от кривой L (т. е. в верхней полуплоскости (см. рис. 13)). Тогда следует воспользоваться формулами Сохоцкого — Племелья для угловых точек (2.28)

$$\begin{aligned} C^+(\zeta_0) &= C(\zeta_0) + (1 - \alpha/2\pi) F(\zeta_0), \\ C^-(\zeta_0) &= C(\zeta_0) - (\alpha/2\pi) F(\zeta_0). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Подставляя (11.8) в (11.12) и повторяя все рассуждения, приведенные выше, записываем

$$F^i(\zeta_0) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) F(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (11.13a)$$

$$F^e(\zeta_0) = \frac{\alpha}{2\pi} F(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (11.13б)$$

Очевидно, что в случае гладкой кривой $\alpha = \pi$ и формулы (11.13a), (11.13б) переходят в (11.11), так что выражения (11.13) позволяют решать задачу разделения полей для любой точки ζ_0 кусочно-гладкой кривой L .

Полагая в формуле (11.13a) $F(\zeta) = F^i(\zeta)$, получаем

$$F^i(\zeta_0) = \frac{1}{i\alpha} \int_L \frac{F^i(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (11.14)$$

Аналогично, полагая в (11.13б) $F(\zeta) = F^e(\zeta)$, находим

$$F^e(\zeta_0) = \frac{-1}{i(2\pi - \alpha)} \int_L \frac{F^e(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta. \quad (11.15)$$

Формулы (11.14) и (11.15) задают *интегральные краевые условия для комплексных напряженностей внутренних и внешних полей на линии L*. Если ζ_0 — обыкновенная (не угловая) точка кривой L , то $\alpha = \pi$ и формулы (11.14), (11.15) эквивалентны условиям (3.8) и (3.9) для краевых значений аналитических функций.

11.4. Формулы Кертца — Зиберта

Предположим теперь, что линия L совпадает с осью X . Тогда $\zeta_0 = x_0$ и формулы (11.11) упрощаются так:

$$F^i(x_0) = \frac{1}{2} F(x_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - x_0} dx, \quad (11.16)$$

$$F^e(x_0) = \frac{1}{2} F(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - x_0} dx.$$

Учитывая, что $F = -F_x + iF_z$, и разделяя действительные и мнимые части в формулах (11.16), получаем

$$F_x^i(x_0) = \frac{1}{2} F_x(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_z(x)}{x - x_0} dx, \quad (11.17)$$

$$F_z^i(x_0) = \frac{1}{2} F_z(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_x(x)}{x - x_0} dx;$$

$$F_x^e(x_0) = \frac{1}{2} F_x(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_z(x)}{x - x_0} dx, \quad (11.18)$$

$$F_z^e(x_0) = \frac{1}{2} F_z(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_x(x)}{x - x_0} dx.$$

Формулы (11.17) и (11.18) носят название *формул Кертца — Зиберта*. Если воспользоваться оператором Гильберта (3.24), то формулы (11.17), (11.18) принимают следующий вид:

$$F_x^i(x_0) = 1/2 [F_x(x_0) - \hat{G}F_z(x)], \quad F_z^i(x_0) = 1/2 [F_z(x_0) + \hat{G}F_x(x)]; \quad (11.19)$$

$$F_x^e(x_0) = 1/2 [F_x(x_0) + \hat{G}F_z(x)], \quad F_z^e(x_0) = 1/2 [F_z(x_0) - \hat{G}F_x(x)]. \quad (11.20)$$

Из формул (11.19), (11.20) так же, как и в описанном выше общем случае, вытекают *интегральные соотношения между компонентами внешнего и внутреннего полей*.

В самом деле, если положить в (11.19), что внешнее поле равно нулю, т. е. $F_x = F_x^i$ и $F_z = F_z^i$, то

$$F_x^i(x_0) = -\hat{G}F_z^i(x_0), \quad F_z^i(x_0) = \hat{G}F_x^i(x_0). \quad (11.21)$$

Аналогично, полагая в (11.20) внутреннее поле равным нулю, находим

$$F_x^e(x_0) = \hat{G}F_z^e(x_0), \quad F_z^e(x_0) = -\hat{G}F_x^e(x_0). \quad (11.22)$$

Таким образом, вертикальные и горизонтальные компоненты внешнего и внутреннего полей связаны между собой парами преобразований Гильберта (взятыми, однако, с разными знаками).

11.5. Эквивалентность формул Кертца — Зиберта формулам Гаусса — Шмидта

Покажем в заключение этого параграфа, что формулы Кертца — Зиберта (11.17)—(11.18) эквивалентны двумерным формулам Гаусса — Шмидта (10.17)—(10.18). Для этого, очевидно, достаточно показать, что оператор Гильберта может быть представлен в виде

$$\hat{G}F(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign } k_x \cdot f(k_x) \exp(-ik_x x_0) dk_x, \quad (11.23)$$

где $f(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(ik_x x) dx$.

В самом деле, интеграл в правой части (11.23) содержит произведение спектров функций $F(x)$ и $1/\pi x$, так как

$$i \text{sign } k_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \exp(ik_x x) dx.$$

Следовательно, по теореме о спектре свертки имеем

$$-\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign } k_x \cdot f(k_x) \exp(-ik_x x_0) dk_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - x_0} = \hat{G}F(x),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы получили набор формул, позволяющих разделять плоские потенциальные поля на внешние и внутренние части. В последующих главах книги мы рассмотрим обобщение этих формул на трехмерные ситуации и электромагнитные поля.

Глава четвертая

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ПОЛЯ

12. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Перейдем теперь к описанию одного из наиболее важных понятий теории плоского потенциального поля — понятия аналитического продолжения. Поскольку мы показали, что в двумерном случае плоское поле может быть однозначно описано комплексной напряженностью, ясно, что задача аналитического продолжения плоского поля сводится к хорошо изученной задаче аналитического продолжения комплексных функций. Эта задача детально описана во многих учебниках и монографиях по теории функций комплексного переменного, к которым мы в основном и отсылаем читателя. В нашей книге мы ограничимся лишь изложением основных теорем и принципов теории аналитического продолжения, причем главным образом тех, которые будут необходимы нам в геофизических приложениях.

12.1. Теорема Тейлора

Вначале докажем одну важную теорему комплексного анализа, известную под названием *теорема Тейлора*.

Теорема 12.1. *Аналитическая в области D функция $f(\zeta)$ в окрестности каждой точки $\zeta_0 \in D$ представляется в виде степенного ряда*

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - \zeta_0)^n, \quad (12.1)$$

радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние d от ζ_0 до границы L области D .

В самом деле, проведем окружность γ_a радиуса a с центром в точке ζ_0 и с помощью интегральной формулы Коши выразим функцию $f(\zeta')$ в какой-либо точке ζ' внутри γ_a через ее значение на γ_a (рис. 14):

$$f(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (12.2)$$

Преобразуем подынтегральное выражение так:

$$\frac{1}{\zeta - \zeta'} = \frac{1}{(\zeta - \zeta_0) [1 - (\zeta' - \zeta_0)/(\zeta - \zeta_0)]}, \quad \text{где } \zeta \in \gamma_a. \quad (12.3)$$

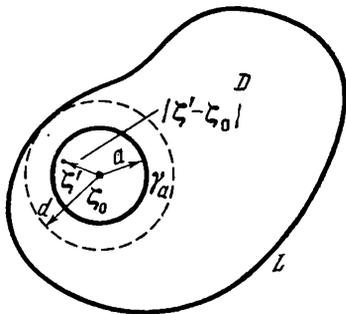


Рис. 14

Очевидно, что для любой фиксированной точки ζ' круга $|\zeta' - \zeta_0| < a$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\zeta' - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right| = |q| < 1, \quad \zeta \in \gamma_a. \quad (12.4)$$

Следовательно, функция $1/(1-q)$ разлагается в абсолютно и равномерно (относительно ζ) сходящийся ряд:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta' - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^n \quad (12.5)$$

Подставляя степенной ряд (12.5) в (12.3), а затем в (12.2), получаем

$$f(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta' - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta' - \zeta_0)^n, \quad (12.6)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.7)$$

Итак, мы нашли разложение аналитической в D функции в степенной ряд. Причем, принимая во внимание формулы (1.5), мы можем записать

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta_0). \quad (12.8)$$

Отметим, наконец, что поскольку проведенные выше рассуждения справедливы для всех a из промежутка $0 < a < d$, а коэффициенты a_n , определяемые формулами (12.7), в силу теоремы Коши одни и те же для всех a , то радиус сходимости степенного ряда (12.6) не меньше, чем d .

Ряд (12.6), коэффициенты которого выражаются через аналитическую функцию $f(\zeta)$ по формулам (12.7) и (12.8), называется *рядом Тейлора функции $f(\zeta)$* . Из (12.8), в частности, следует, что разложение аналитической функции $f(\zeta)$ в ряд Тейлора возможно единственным образом.

Отметим, что нередко при построении теории аналитических функций комплексного переменного за определение аналитической функции f в некоторой окрестности D точки ζ_0 берут условие, что функция f разлагается в степенной ряд, сходящийся в окрестности D точки ζ_0 . Такой подход к построению теории аналитических функций носит название *концепции Вейерштрасса*. Следует отметить, что при изучении аналитических функций действительного

переменного (одного или нескольких) определение аналитичности в смысле Вейерштрасса является основным. Именно этим определением мы будем пользоваться, в частности, в теории гармонических функций трех переменных и в теории электромагнитных полей. Здесь же в качестве примера приведем определение понятия действительной аналитической функции действительного переменного.

Заданная на отрезке $a \leq x \leq b$ действительная однозначная функция $f(x)$ называется аналитической, если в некоторой окрестности¹ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ каждой точки $x_0 \in [a, b]$ она представляется в виде суммы степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (12.9)$$

с действительными коэффициентами.

12.2. Единственность аналитической функции

Из теоремы Тейлора как следствие вытекает следующее утверждение.

Теорема 12.2. Пусть в области D даны две аналитические функции $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$. Если функции $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ равны между собой в некоторой подобласти V области D , то $f(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)$ всюду в области D .

Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение функцию $\psi(\zeta) = f(\zeta) - \varphi(\zeta)$. Очевидно, что $\psi(\zeta)$ — аналитическая в D функция и $\psi(\zeta) = 0$ в области V . Рассмотрим теперь произвольную точку $\eta \in D$ ($\eta \notin V$) и соединим ее кривой L , целиком лежащей в D , с некоторой фиксированной точкой $\zeta_0 \in V$ (рис. 15, а). Выберем произвольную точку $\zeta \in L$ и обозначим через $O_d(\zeta)$ круг с центром в точке ζ и радиусом $d(\zeta)$, равным расстоянию от точки ζ до границы области D .

Докажем прежде всего, что если $O_{d_0}(\zeta_0)$ — круг с центром в точке ζ_0 , то всюду в круге

$$\psi(\zeta) = 0, \quad \zeta \in O_{d_0}(\zeta_0). \quad (12.10)$$

В самом деле, разложим функцию $\psi(\zeta)$ в ряд Тейлора в этом круге:

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta_0) (\zeta - \zeta_0)^n. \quad (12.11)$$

Однако в силу (12.8)

$$a_n = \frac{1}{n!} \psi^{(n)}(\zeta_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.12)$$

откуда и вытекает условие (12.10).

¹ В конечных точках отрезка берутся, естественно, односторонние окрестности: $a \leq x < a + \delta$; $b - \delta < x \leq b$.

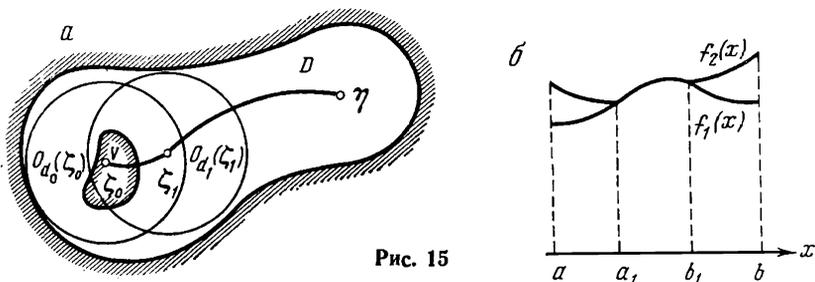


Рис. 15

Рассмотрим теперь точку $\zeta_1 \in L$, лежащую внутри $O_{a_0}(\zeta_0)$, но такую, что круг $O_{a_1}(\zeta_1)$ выходит за пределы $O_{a_0}(\zeta_0)$. Разлагая функцию $\psi(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности ζ_1 , устанавливаем, так же как и выше, что $\psi(\zeta) \equiv 0$ всюду в $O_{a_1}(\zeta_1)$. Передвигая центр круга ζ из точки ζ_1 в следующую точку ζ_2 и т. д. (пока мы не достигнем η) и повторяя приведенное выше рассуждение, приходим к заключению, что $\psi(\eta) = 0$.

Так как η — произвольная точка из D , то тем самым мы доказали, что $\psi(\zeta) \equiv 0$ в D . Отсюда вытекает равенство исходных функций $f(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)$ в D . Тем самым сформулированное утверждение доказано².

Заметим, что условие теоремы можно существенно ослабить. На самом деле для единственности достаточно, чтобы две аналитические в D функции совпадали на некоторой последовательности точек η_n , сходящейся к внутренней точке η области D .

Таким образом, мы видим, что имеются существенные отличия понятия аналитической функции от понятия дифференцируемости в смысле действительного анализа. В самом деле, две даже бесконечно дифференцируемые функции действительного переменного могут совпадать на части области определения, не совпадая тождественно (рис. 15, б). В то же время по доказанной теореме две аналитические функции, совпадающие на любой части области, где они аналитичны (например, на маленьком кружке, или на дуге, принадлежащей области), совпадают тождественно во всей области.

Применим эту теорему к плоским геопотенциальным полям — гравитационным или магнитным. Как показано в предыдущей главе, всюду вне гравитирующих или намагниченных масс комплексные напряженности этих полей описываются аналитическими функциями. Следовательно, измерив гравитационные или магнитные поля в какой-то сколь угодно малой области пространства вне масс, мы в принципе можем однозначно определить эти поля во всем пространстве вне источников.

² Мы опускаем доказательство того, что точка η действительно может быть достигнута за конечное число шагов. Это доказательство основано на лемме Бореля о выделении из всякого покрытия отрезка открытыми множествами (в данном случае — кругами) конечного покрытия.

12.3. Понятие аналитического продолжения

Мы начнем изучение понятия аналитического продолжения, оставаясь в рамках теории однозначных (аналитических) функций. С этой точки зрения *аналитическим продолжением функции* $\varphi_0(\zeta)$, заданной в некоторой области V комплексной плоскости, называется ее доопределение до функции $\varphi(\zeta)$, определенной в некоторой более широкой области $D \supset V$, такое, что $\varphi(\zeta)$ аналитична в D , а ее сужение на области V совпадает с $\varphi_0(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) \big|_V \equiv \varphi_0(\zeta).$$

В силу теоремы единственности (12.2) очевидно, что если существует аналитическое продолжение, то оно единственно.

Задача аналитического продолжения может решаться различными способами. Ниже мы приведем два основных принципа продолжения — продолжение по Вейерштрассу и продолжение по Пенлеве. Сейчас же рассмотрим более общий подход к проблеме аналитического продолжения, приводящий к понятию полной аналитической функции.

Аналитическая функция $\varphi(\zeta)$ вместе с областью D ее задания называется *элементом*, и для него принято обозначение (φ, D) . Из двух элементов (φ_1, D_1) и (φ_2, D_2) один называется *непосредственным аналитическим продолжением другого*, если пересечение $D_1 \cap D_2 = \Delta$ является областью и $\varphi_1(\zeta) = \varphi_2(\zeta)$ в Δ .

Очевидно, что функция

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \varphi_1(\zeta), & \zeta \in D_1, \\ \varphi_2(\zeta), & \zeta \in D_2. \end{cases}$$

аналитична в области $D = D_1 \cup D_2$.

Конечное множество элементов $(\varphi_0, D_0), (\varphi_1, D_1), \dots, (\varphi_m, D_m)$ называется *цепью*, если каждый элемент (φ_j, D_j) является непосредственным аналитическим продолжением элемента (φ_{j-1}, D_{j-1}) . Совокупность \mathcal{H} элементов (φ, D) , обладающая тем свойством, что для любых двух элементов из \mathcal{H} один получается из другого при помощи цепи, все элементы которой принадлежат \mathcal{H} , называется *общей аналитической функцией*. Аналитические функции φ_j , принадлежащие различным элементам, будем называть *ветвями* общей аналитической функции. Общая аналитическая функция, содержащая все аналитические продолжения каждого ее элемента, называется *полной аналитической функцией*.

Иными словами, полная аналитическая функция образуется в результате *всех возможных аналитических продолжений* исходной функции φ_0 по всем возможным цепочкам областей, лежащих в комплексной плоскости.

Может случиться, что при аналитическом продолжении мы возвращаемся в область задания исходного элемента (φ_0, D_0) (рис. 16), при этом значения продолженной функции φ_m и исходной функции φ_0 не равны между собой в общей части Δ_m областей D_0 и D_m .

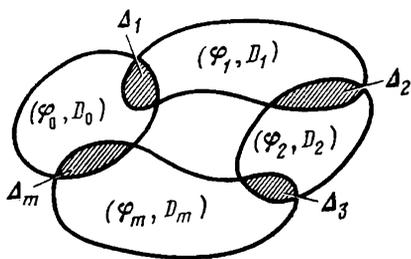


Рис. 16

Таким образом, мы видим, что *общие аналитические функции и соответственно полные аналитические функции могут быть многозначными.*

12.4. Понятие римановой поверхности

Очевидно, что работать с многозначными функциями весьма трудно и неудобно. Самые простые действия алгебры и анализа с такими функциями становятся весьма затруднительными. Например, если речь идет о сложении двух многозначных функций $\Phi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, то неясно, какой результат следует приписать их сумме. В связи с этим в теории функций комплексного переменного вместо плоских областей рассматриваются многолистные поверхности, которые можно представить себе расположенными над этими областями и которые имеют над точкой ζ столько листов, сколько значений приписывает аналитическая функция этой точке. Поэтому на таких поверхностях аналитические функции можно рассматривать как функции в обычном смысле слова, т. е. как *однозначные функции.*

Введенная указанным образом многолистная поверхность называется *римановой поверхностью* данной аналитической функции. Смысл этого понятия состоит в том, что каждую аналитическую функцию можно, как уже отмечалось выше, рассматривать на ее римановой поверхности как функцию в обычном смысле слова. Таким образом, *полная аналитическая функция есть функция точки на ее римановой поверхности* (а не функция точки комплексной плоскости).

Теория римановых поверхностей детально изложена в курсах теории функций комплексного переменного, поэтому здесь мы не будем более глубоко разбирать эту проблему. Мы напомнили читателю определение понятия римановой поверхности лишь для того, чтобы облегчить чтение последующих разделов книги, где рассматриваются римановы пространства аналитических функций нескольких действительных переменных.

12.5. Продолжение аналитической функции по Вейерштрассу

Вейерштрассу принадлежит весьма простой способ построения аналитического продолжения, который заключается в следующем. Пусть функция $\varphi_0(\zeta)$ аналитична в некоторой области D_0 . Зафиксируем некоторую произвольную точку $\zeta_0 \in D_0$ и разложим функцию $\varphi_0(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_0^{(n)}(\zeta_0)}{n!} (\zeta - \zeta_0)^n. \quad (12.13)$$

Ряд (12.13) заведомо сходится в круге $O_1(\zeta_0)$ с центром в точке ζ_0 и радиусом $d(\zeta_0)$, равным расстоянию от ζ_0 до границы области D_0 , но, быть может, он сходится и в большем круге $\tilde{O}_1(\zeta_0)$ (рис. 17). В последнем случае он будет давать аналитическое продолжение $\varphi(\zeta)$ за пределы круга $|\zeta - \zeta_0| < d(\zeta_0)$ (в область V , заштрихованную на рис. 17), поскольку в общей части кругов сходимости $O_1(\zeta_0)$ и $\tilde{O}_1(\zeta_0)$ $\varphi(\zeta) \equiv \varphi_0(\zeta)$.

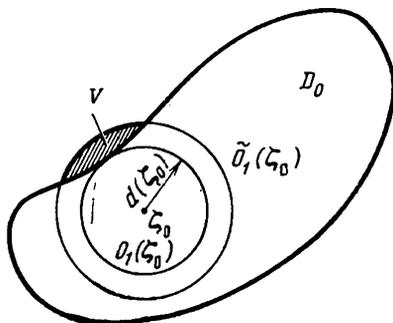


Рис. 17

Описанную операцию аналитического продолжения можно производить неограниченно, выбирая за центры тейлоровских разложений все новые и новые точки исходной области D_0 и новые точки аналитичности получаемых аналитическим продолжением функций (элементов). В результате всех возможных продолжений по всем кругам сходимости мы получим полную аналитическую функцию, для которой суммы степенных рядов (элементы), по которым она строилась, будут являться ее ветвями.

12.6. Особые точки аналитической функции

Степенные ряды, которыми определяются элементы полной аналитической функции, сходятся вплоть до тех пор, пока на окружности их кругов сходимости не попадает *особая точка функции*, т. е. такая точка, в окрестности которой функция не может быть представлена сходящимся степенным рядом. Таким образом, граница области, в которую можно продолжить данную аналитическую функцию («область существования» полной аналитической функции) сплошь состоит из ее особых точек. Эта граница может быть образована как замкнутыми линиями, так и отрезками линий, а также может содержать отдельные («изолированные») точки. Последние делятся на особые точки *однозначного и многозначного характера* в зависимости от того, однозначна или многозначна функция в их достаточно малой окрестности. Простейшим примером особой точки однозначного характера служит точка $\zeta = 0$ для функции $1/\zeta$.

Различают три типа изолированных особых точек однозначного характера. *Изолированная особая точка ζ_0 функции $\varphi(\zeta)$ называется:*

а) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varphi(\zeta) \neq \infty$;

б) *полюсом*, если $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varphi(\zeta) = \infty$;

в) существенно особой точкой, если предел $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varphi(\zeta)$ не существует.

Особые точки многозначного характера называют также *точками ветвления функции*. Примером такой точки служит точка $\zeta=0$ для функции $\sqrt[n]{\zeta}$.

12.7. Продолжение аналитической функции по Пенлеве (принцип непрерывности)

Предположим, что две области D_1 и D_2 , пересечение которых есть пустое множество, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, имеют общий участок границ, состоящий из гладкой кривой L , и рассмотрим область $D = D_1 \cup D_2 \cup L$.

Принцип непрерывности. Если функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ аналитичны в областях D_1 и D_2 соответственно, непрерывны вплоть до L и, кроме того,

$$\psi_1(\zeta) = \psi_2(\zeta), \quad \zeta \in L,$$

то функция $\psi_2(\zeta)$ является аналитическим продолжением функции $\psi_1(\zeta)$ из области D_1 в область D_2 через кривую L .

Доказательство принципа непрерывности непосредственно следует из результатов п. 1.3. В самом деле, в п. 1.3 мы показали, что функция

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \psi_1(\zeta), & \zeta \in D_1, \\ \psi_2(\zeta), & \zeta \in D_2, \\ \psi_1(\zeta) = \psi_2(\zeta), & \zeta \in L, \end{cases}$$

аналитична в области D , а это и значит, что $\psi(\zeta)$ есть аналитическое продолжение функции $\psi_1(\zeta)$ из D_1 в более широкую область D . Поскольку в D_2 $\psi(\zeta) = \psi_2(\zeta)$, то мы и говорим, что $\psi_2(\zeta)$ есть аналитическое продолжение $\psi_1(\zeta)$ из области D в область D_2 через L .

Способ аналитического продолжения функции, основанный на принципе непрерывности, называется *продолжением по Пенлеве*. Таким подходом к аналитическому продолжению мы будем широко пользоваться в геофизических приложениях.

Из принципа непрерывности вытекает одно важное следствие. Пусть L — граница области Γ — содержит гладкую кривую L_0 , а функция $\varphi(\zeta)$ — аналитическая в Γ и непрерывная вплоть до L_0 . Предположим также, что $\varphi(\zeta) = 0$, $\zeta \in L_0$, тогда $\varphi(\zeta) \equiv 0$ всюду в Γ .

В самом деле, пристроим к области Γ вдоль участка L_0 ее границы L область Γ_1 , $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$, и рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \zeta \in \Gamma, \\ 0, & \zeta \in L_0, \\ 0, & \zeta \in \Gamma_1. \end{cases}$$

В силу принципа непрерывности заключаем, что $\Phi(\zeta)$ аналитична в области $D = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup L_0$. С другой стороны, так как $\Phi(\zeta) = 0$

в области Γ_1 , лежащей внутри D , то по свойству единственности аналитических функций $\Phi(\xi) \equiv 0$ всюду в D , а стало быть, и в Γ , следовательно, $\varphi(\xi) \equiv 0$ в Γ .

12.8. Конформное отображение

Рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$w = f(\xi) = u(x, z) + iv(x, z), \quad (12.14)$$

удовлетворяющую в точке $\xi_0 \in D$ условию

$$f'(\xi_0) \neq 0. \quad (12.15)$$

Неравенство (12.15) (с учетом условий Коши — Римана) равносильно тому, что в точке ξ_0 якобиан

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(\xi)|^2$$

отличен от нуля. Известно, что это условие, в свою очередь, равносильно существованию окрестности точки ξ_0 , в которой отображение $w = f(\xi)$ взаимно однозначно. Причем обратная функция $\xi = f^{-1}(w)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки $w_0 = f(\xi_0)$.

В комплексном анализе показывается, что отображение, задаваемое аналитической функцией $w = f(\xi)$, удовлетворяющей условию (12.15) в точке ξ_0 , обладает следующими свойствами.

1. Угол между двумя любыми гладкими кривыми L_1 и L_2 , пересекающимися в точке ξ_0 , равен по величине и направлению отсчета углу между кривыми γ_1 и γ_2 , в которые переходят при отображении $w = f(\xi)$ кривые L_1 и L_2 (консерватизм углов);

2. Коэффициент линейного растяжения A в точке ξ_0 при отображении $w = f(\xi)$ любой кривой L , проходящей через эту точку, не зависит от вида и направления линии L , причем $A = |f'(\xi_0)|$.

Определение 12.1. Отображение $w = f(\xi)$, обладающее в некоторой точке ξ_0 первым и вторым свойствами, называется конформным.

Таким образом, мы заключаем, что отображение, осуществляемое аналитической функцией $w = f(\xi)$, является конформным в достаточно малой окрестности каждой точки ξ , в которой $f'(\xi) \neq 0$.

Определение 12.2. Отображение $w = f(\xi)$ называется конформным в области D , если оно конформно в каждой точке этой области.

Из предыдущих результатов следует, что для конформности отображения $w = f(\xi)$ в области D достаточно, чтобы функция $f(\xi)$ была аналитической в D и чтобы ее производная не обращалась там в нуль.

Теория конформных отображений составляет важный раздел теории функций комплексного переменного, в курсах которой можно найти подробное изложение свойств конформных отображений.

13. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ЧЕРЕЗ ЛИНИЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим вновь интеграл типа Коши (1.3), взятый вдоль некоторой кусочно-гладкой линии L (замкнутой или разомкнутой). Линия L , как было показано в гл. 1, является особой линией для кусочно-аналитической функции, описываемой интегралом типа Коши.

В то же время в ряде случаев оказывается возможным аналитически продолжить интеграл типа Коши через линию интегрирования. Эта задача имеет важное значение при изучении возможности аналитического продолжения геопотенциальных полей внутрь областей, занятых источниками поля (гравитирующими или намагниченными массами). Для решения поставленной задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения по теории продолжения аналитических функций с аналитических кривых в области комплексной плоскости. Простейший результат в этой области связан с проблемой аналитического продолжения действительной аналитической функции действительного переменного, с изложения которого мы и начнем.

13.1. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного

Пусть на отрезке I действительной оси $a \leq x \leq b$ задана действительная аналитическая функция $f(x)$ действительного переменного. Тогда согласно (12.9) в окрестности $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ каждой точки $x_0 \in I$ она представима сходящимся степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (13.1)$$

Пусть $F(\zeta)$ — комплексно-аналитическая функция в области D , целиком содержащей внутри себя отрезок I . Говорим, что функция $F(\zeta)$ является аналитическим продолжением $f(x)$ из отрезка I в область D , если

$$F(x) = f(x) \text{ при } x \in I. \quad (13.2)$$

Можно предложить простой способ построения такого аналитического продолжения. В самом деле, обозначим через $F(\zeta)$ ряд, получающийся из (13.1) заменой x на комплексную переменную $\zeta = x + iz$:

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - x_0)^n. \quad (13.3)$$

Очевидно, что этот ряд заведомо сходится в круге $O_\delta(x_0)$ с центром в точке x_0 и радиусом δ , $|\zeta - x_0| < \delta$, и для него имеет место условие

(13.2). Тем самым сумма $F(\zeta)$ является аналитическим продолжением функции $f(x)$ в комплексную область.

Таким образом, мы установили следующий важный факт. Действительная аналитическая функция действительного переменного аналитически продолжается из отрезка I действительной оси в некоторую область D комплексной плоскости, целиком содержащую внутри себя I .

13.2. Понятие аналитической дуги; уравнение дуги в форме Цирульского

Рассмотрим некоторую гладкую дугу L , уравнение которой параметрически представляется следующим образом:

$$x=x(s), \quad z=z(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (13.4)$$

где s_a, s_b — некоторые константы.

Определение 13.1. Дуга L называется аналитической, если $x(s)$ и $z(s)$ — аналитические функции действительного переменного s на отрезке $I, s_a \leq s \leq s_b$ (в смысле определения, данного в п. 12.1).

Аналитическая дуга L_0 называется регулярной или правильной, если

$$(dx/ds)^2 + (dz/ds)^2 \neq 0 \quad (13.5)$$

всюду на отрезке $I, s_a \leq s \leq s_b$.

Зафиксируем некоторое значение параметра s_0 . В предыдущем пункте было показано, что функции $x(s)$ и $z(s)$ аналитически продолжаются из некоторого интервала — $\delta_1 + s_0 < s < s_0 + \delta_1$ ($\delta_1 > 0$) в круг $O_\delta(s_0)$ ($|\sigma - s_0| < \delta_1$) плоскости комплексного переменного $\sigma = s + it$ (рис. 18). Следовательно, функция $\zeta = \varphi(\sigma) = x(\sigma) + iz(\sigma)$ аналитична в круге $O_\delta(s_0)$, а в силу (13.5) в некоторой окрестности $O_\delta(s_0)$ точки s_0

$$\varphi'(\sigma) \neq 0. \quad (13.6)$$

Отсюда видно, что функция $\zeta = \varphi(\sigma)$ осуществляет конформное отображение окрестности $O_\delta(s_0)$ на некоторую область плоскости ζ , содержащую внутри себя точку $\zeta_0 = \varphi(s_0) \in L_0$.

Ввиду того что функции $x(s)$ и $z(s)$ аналитически продолжаются вдоль всего отрезка I и всюду на нем выполняется условие (13.5), заключаем, что существует некоторая область Γ комплексной плоскости σ , целиком содержащая внутри себя отрезок $[s_a, s_b]$, такая, что функция $\zeta = \varphi(\sigma)$ аналитически продолжается из отрезка I в область Γ , осуществляя конформное отображение последней на некоторую область D , содержащую дугу L_0 . В силу взаимной однозначности конформных отображений существует обратное отображение

$$\sigma = \varphi^{-1}(\zeta), \quad (13.7)$$

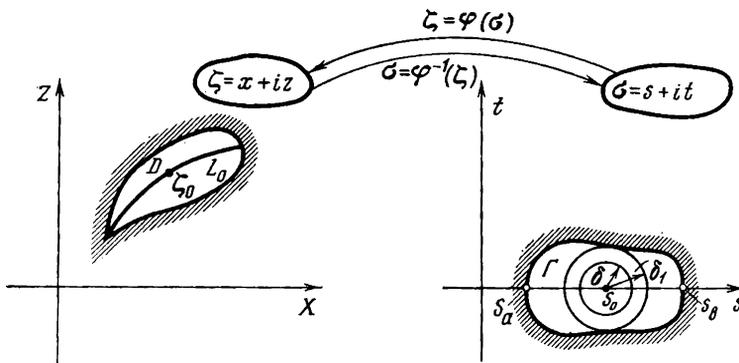


Рис. 18

переводящее область D в область Γ (см. рис. 18). При этом отображении дуга L_0 переходит в отрезок I действительной оси s :

$$\varphi^{-1}(\zeta) = s, \quad \zeta \in L_0. \quad (13.8)$$

Отметим, что без ограничения общности можно в качестве параметра s взять действительную переменную x . Тогда (13.8) записывается в виде

$$\varphi^{-1}(\zeta) = x. \quad (13.9)$$

Полагая в (13.9) $x = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$, получаем $\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$, откуда

$$\bar{\zeta} = 2\varphi^{-1}(\zeta) - \zeta = \psi(\zeta). \quad (13.10)$$

Очевидно, что $\psi(\zeta)$ как сумма двух аналитических функций аналитична в D .

Таким образом, мы получаем следующую форму задания уравнения аналитической дуги:

$$\bar{\zeta} = \psi(\zeta), \quad (13.11)$$

где $\psi(\zeta)$ — аналитическая функция в некоторой области D , целиком содержащей внутри себя дугу L_0 .

Идея задания уравнения дуги в форме (13.11) была впервые высказана А. В. Цирульским [1963, 1964]. Это представление является чрезвычайно удобным для задач теории плоского потенциального поля. Мы будем называть его *уравнением плоской кривой в форме Цирульского*.

Заметим, что уравнение (13.11) можно было бы получить непосредственно из уравнения кривой в неявной форме

$$F(x, z) = 0. \quad (13.12)$$

В самом деле, пользуясь тем, что $x = (\zeta + \bar{\zeta})/2$, $z = (\zeta - \bar{\zeta})/2i$, записываем

$$F(x, z) = \tilde{F}(\zeta, \bar{\zeta}) = 0. \quad (13.13)$$

Разрешая последнее равенство относительно $\bar{\zeta}$, получаем (13.11).

На основании всего изложенного выше дадим следующее эквивалентное определение аналитической дуги.

Определение 13.2. Гладкая дуга L называется аналитической, если существует область D , целиком содержащая внутри се-

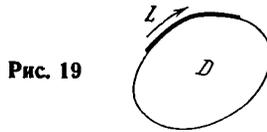


Рис. 19

бя дугу L , такая, что внутри D функция $\psi(\xi)$, описывающая уравнение кривой в форме Циркульского, является аналитической.

Можно несколько ослабить требования, накладываемые на функцию $\psi(\xi)$, если ввести следующее

Определение 13.3. Гладкая дуга L называется предельно-аналитической, если существует некоторая область D , часть границы которой совпадает с L (рис. 19), такая, что $\psi(\xi)$ — аналитическая в D и непрерывная в $D \cup L$. Уравнение дуги L , предельно-аналитической слева, будем обозначать $\xi = \psi^+(\zeta)$, а предельно-аналитической справа — $\xi = \psi^-(\zeta)$.

13.3. Аналитическое продолжение функции, заданной на аналитической кривой

Пусть L_0 — некоторая аналитическая дуга на комплексной плоскости с параметрическим уравнением (13.4) и на ней задана комплексная функция $f(\tau)$, $\tau = x + iz \in L_0$. Будем предполагать также, что действительная и мнимая части функции $f(\tau)$ являются аналитическими функциями координат $x(s)$ и $z(s)$ дуги L_0 в смысле определения п. 12.1.

Пусть теперь $F(\zeta)$ — аналитическая функция в области D , целиком содержащей внутри себя дугу L_0 . Говорим, что функция $F(\zeta)$ является аналитическим продолжением $f(\tau)$ с кривой L_0 в область D , если $F(\tau) = f(\tau)$ при $\tau \in L_0$.

Покажем, что в сделанных выше предположениях всегда существует аналитическое продолжение функции $f(\tau)$ с аналитической дуги L_0 .

В самом деле, зафиксируем некоторую точку $\tau_0 \in L_0$ и рассмотрим действительную и мнимую части функции $f(\tau)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\tau) &= u(x, z) = u(x(s), z(s)) = \tilde{u}(s), \\ \operatorname{Im} f(\tau) &= v(x, z) = v(x(s), z(s)) = \tilde{v}(s). \end{aligned} \tag{13.14}$$

Очевидно, что функции $\tilde{u}(s)$ и $\tilde{v}(s)$ — действительные аналитические функции действительной переменной s . Поэтому аналогично тому, как это было показано в предыдущем пункте, заключаем, что эти функции аналитически продолжаются с отрезка I ($s_a \leq s \leq s_b$) в

некоторую область Γ комплексной плоскости σ , целиком содержащую внутри себя отрезок I . Следовательно, функция $f(\tau(s)) = \bar{u}(s) + i\bar{v}(s)$ также аналитически продолжается в область Γ , т. е. в Γ существует аналитическая функция $\Phi(\sigma)$, такая, что

$$\Phi(s) = f(\tau(s)). \quad (13.15)$$

Воспользуемся теперь конформным отображением (13.7) $\sigma = \varphi^{-1}(\xi)$, осуществляющим обратное отображение области D плоскости ξ в область Γ плоскости σ , и рассмотрим функцию

$$F(\xi) = \Phi(\varphi^{-1}(\xi)). \quad (13.16)$$

Очевидно, что функция $F(\xi)$ — аналитическая в области D , содержащей L_0 , причем согласно (13.15) и (13.16)

$$F(\tau) = \Phi(\varphi^{-1}(\tau)) = \Phi(s) = f(\tau). \quad (13.17)$$

Таким образом, функция $F(\xi)$ и есть аналитическое продолжение функции $f(\tau)$ с дуги L_0 .

13.4. Продолжение интеграла типа Коши через линию интегрирования; особые точки продолженного поля

Итак, мы теперь выполнили всю необходимую подготовительную работу для решения задачи аналитического продолжения интеграла типа Коши (1.3) через контур интегрирования.

Предположим, что L — аналитическая дуга, а действительные и мнимые части плотности интеграла типа Коши $\varphi(\xi)$ есть аналитические функции координат x и z точек дуги L . Заметим, что при этом функция $\varphi(\xi)$ заведомо имеет ограниченную производную на L , следовательно, удовлетворяет условию Липшица. Отсюда следует, что мы имеем право воспользоваться формулами Сохоцкого — Племеля (2.22а), (2.22б) и записать

$$C^-(\tau_0) = C^+(\tau_0) - \varphi(\tau_0). \quad (13.18)$$

Функция $\varphi(\tau_0)$ согласно результатам предыдущего пункта есть крайнее значение на L некоторой функции $\varphi(\xi)$, аналитической всюду в области D , содержащей L , в частности в ее подобласти D^+ , примыкающей к L слева (по отношению к заданному направлению обхода L (рис. 20)). Функция $C^+(\tau_0)$, по определению, есть крайнее значение при приближении к L слева (из области D^+) аналитической вне L функции $C(\xi')$ — интеграла типа Коши. Таким образом, правая часть равенства (13.18) есть крайнее значение на L некоторой аналитической в D^+ функции.

С другой стороны, левая часть — $C^-(\tau_0)$ — есть крайнее значение функции $C(\xi')$ при приближении к L справа. Следовательно, правая часть равенства (13.18) согласно *принципу непрерывности* (п. 12.7) определяет аналитическое продолжение левой части через

контур L справа налево. Если обозначить результат такого продолжения $C_L^-(\zeta')$, то мы получаем

$$C_L^-(\zeta') = C(\zeta') - \varphi(\zeta'), \quad \zeta' \in D^+. \quad (13.19)$$

Совершенно аналогично доказывается возможность аналитического продолжения интеграла типа Коши слева направо в некоторую область D^- , примыкающую к L справа (см. рис. 20), причем

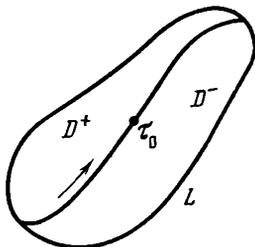


Рис. 20

результат аналитического продолжения равен

$$C_L^+(\zeta') = C(\zeta') + \varphi(\zeta'), \quad \zeta' \in D^- \quad (13.20)$$

Таким образом, мы доказали следующее важное утверждение.

Теорема 13.1. Если плотность $\varphi(\zeta)$ интеграла типа Коши $C(\zeta')$ есть аналитическая функция координат точек линии интегрирования L и L — аналитическая кривая, то интеграл $C(\zeta')$ может быть аналитически продолжен через любую точку линии интегрирования с обеих ее сторон (за исключением, быть может, ее концов), причем результат аналитического продолжения отличается от самого интеграла типа Коши на функцию $\varphi(\zeta')$, определяемую аналитическим продолжением плотности $\varphi(\zeta)$ с кривой L в комплексную плоскость и взятую со знаком «плюс» при продолжении справа налево и со знаком «минус» при продолжении слева направо:

$$C_L^\pm(\zeta') = C(\zeta') \pm \varphi(\zeta'). \quad (13.21)$$

Из теоремы 13.1 вытекают следующие два полезных следствия.

Следствие 13.1. Если L — аналитическая дуга, то особые точки функций $C_L^\pm(\zeta')$ совпадают с особыми точками функции $\varphi(\zeta')$, получающейся в результате аналитического продолжения плотности интеграла типа Коши с линии L в комплексную плоскость.

Следствие 13.2. Если контур L представляет собой кусочно-аналитическую кривую, то угловые точки этой кривой есть точки ветвления для полной аналитической функции, образованной продолжением интеграла типа Коши.

Доказательство этих следствий немедленно следует из формулы (13.22), и мы предоставляем его читателю.

Теорема 13.1 и ее следствия дают основу для решения задачи о продолжении потенциальных полей внутрь областей, занятых источниками, к исследованию которой мы теперь и переходим.

14. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЛОСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ, ЗАНЯТОЙ НАМАГНИЧЕННЫМИ МАССАМИ

В этом и последующих параграфах мы рассмотрим один из наиболее интересных вопросов теории плоского потенциального поля — вопрос о возможности аналитического продолжения этого поля внутрь области, занятой источниками. Наиболее глубоко эта проблема была исследована в фундаментальных работах А. В. Цирульского [1963, 1964] и В. Н. Страхова [1970а, в, г], результаты которых мы в основном и излагаем в этих параграфах. Наш анализ мы начнем с относительно простой задачи — продолжения магнитного потенциала.

14.1. Аналитическое продолжение магнитного потенциала внутри области с аналитическим распределением намагниченности

Рассмотрим ситуацию, детально изученную в п. 9.5, при которой намагниченность $I(\zeta)$ масс, распределенных в области Γ комплексной плоскости, есть аналитическая функция внутри Γ и непрерывная в замкнутой области $\bar{\Gamma}$. Комплексный магнитный потенциал этих масс вне области Γ согласно (9.19) описывается формулой

$$W(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}, \quad (14.1)$$

где L — кусочно-гладкая граница области Γ .

Исследуем вопрос о возможности аналитического продолжения потенциала $W(\zeta')$ через границу L внутрь области Γ . Обозначим через L_0 некоторую аналитическую дугу кривой L , уравнение которой в форме Цирульского имеет вид

$$\bar{\zeta} = \varphi_0(\zeta), \quad (14.2)$$

где $\varphi_0(\zeta)$ — функция, аналитическая в некоторой области D , целиком содержащей внутри себя L_0 (рис. 21); D^+ — часть области D , общая с Γ . Предположим также, что на дуге L_0 функция $I(\zeta)$ (следовательно, и $I(\zeta)\bar{\zeta}$) удовлетворяет условию Гельдера (2.1). Тогда, выполняя для интеграла типа Коши (14.1) рассуждения, аналогичные проведенным в п. 13.4, находим, что магнитный потенциал $W(\zeta')$ может быть продолжен внутрь Γ через любую точку L_0 (за исключением, быть может, концов), а результат продолжения $W_{L_0}^-(\zeta')$ дается формулой, вытекающей из (13.20):

$$W_{L_0}^-(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta + 2\pi I(\zeta') \varphi_0(\zeta'). \quad (14.3)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение. *Магнитный потенциал, порождаемый аналитическим распределением намагниченности внутри области Γ , ограниченный кусочно-гладкой кривой L , допускает аналитическое продолжение из внешней области $\bar{C}\Gamma$ внутрь Γ через любую аналитическую дугу L_0 , вплоть до которой намагниченность $I(\zeta)$ непрерывна и удовлетворяет на L_0 условию Гельдера.*

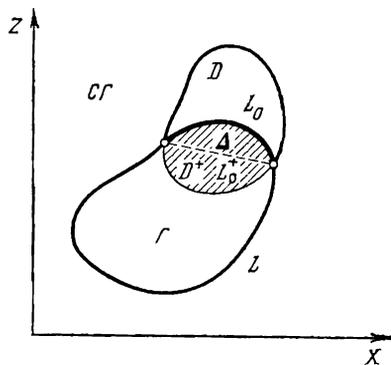


Рис. 21

Интересно сравнить функцию $W_{L_0}^-$, получающуюся продолжением магнитного потенциала внутрь Γ , с самим магнитным потенциалом внутри Γ , определяемым формулой (9.19):

$$W_{L_0}^-(\zeta') - W(\zeta') = 2\pi I(\zeta') [\varphi_0(\zeta') - \bar{\zeta}']. \quad (14.4)$$

Например, если дуга L_0 представляет собой отрезок прямой линии с уравнением

$$\bar{\xi} = \alpha_0 + \alpha \xi, \quad (14.5)$$

то формула (14.4) дает следующее выражение:

$$W_{L_0}^-(\zeta') - W(\zeta') = 2\pi I(\zeta') [\alpha_0 + \alpha \zeta' - \bar{\zeta}']. \quad (14.6)$$

Таким образом, мы видим, что *продолженное поле внутри масс всегда отличается от истинного поля.*

14.2. Продолжение через предельно-аналитическую дугу

Заметим теперь, что требования, накладываемые в п. 14.1 на распределение намагниченности $I(\zeta)$ и дугу L_0 , можно несколько ослабить, а именно утверждение п. 14.2 остается в силе, если L_0 — предельно-аналитическая дуга, а $I(\zeta)$ — функция, аналитическая в Γ и непрерывная в $\Gamma \cup L_0$ (т. е. требование непрерывности $I(\zeta)$ по Гельдеру на L_0 не обязательно!).

В самом деле, представим правую часть выражения (14.1) в виде суммы двух интегралов — по дуге L_0 и оставшейся части $L - L_0$ кривой L :

$$W(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\xi}}{\xi - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_0} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\xi}}{\xi - \zeta'} d\zeta. \quad (14.7)$$

Поскольку L_0 — предельно-аналитическая дуга, то согласно определению (13.3) существует область D^+ , примыкающая к L_0 изнутри области Γ , такая, что функция $\varphi_0(\xi)$, определяющая уравнение L_0 в форме Цирульского, — аналитическая в D^+ (и непрерыв-

ная в $D^+ \cup L_0$). Проведем произвольную гладкую дугу L_0^+ , соединяющую концы дуги L_0 и целиком лежащую внутри D^+ (см. рис. 21). В силу аналитичности $I(\zeta)$ и $\varphi_0(\zeta)$ в области Δ , заключенной между L_0 и L_0^+ , имеем на основании теоремы Коши

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^+} \frac{2\pi I(\zeta) \varphi_0(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \quad (14.8)$$

Подставляя (14.8) в (14.7), записываем

$$W(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0^+} \frac{2\pi I(\zeta) \varphi_0(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_0} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \quad (14.9)$$

Интегралы, стоящие в правой части (14.9), представляют собой интегралы типа Коши и определяют функцию, заведомо аналитическую в области $C\bar{\Gamma} \cup \Delta \cup L_0$, причем в $C\bar{\Gamma}$ эта функция совпадает с магнитным потенциалом $W(\zeta')$. Следовательно, для всех $\zeta' \in \Delta \cup L_0$ (исключая, разумеется, концы дуги L_0) интегралы в правой части (14.9) описывают аналитическое продолжение $W(\zeta')$ внутрь Γ , что и требовалось доказать.

Отметим далее, что при таких «ослабленных» условиях на $I(\zeta)$ и L_0 формула (14.3) также сохраняется, поскольку согласно замечанию, сделанному в п. 2.3, формулы (2.22а), (2.22б) имеют место не только для плотностей интеграла типа Коши, удовлетворяющих условию Гельдера, но и для просто непрерывных плотностей.

14.3. Условие аналитичности границы области, занятой намагниченными массами

Справедливо и обратное утверждение, позволяющее установить аналитические свойства границы области на основе аналитического продолжения магнитного потенциала.

Пусть аналитическая в Γ функция $I(\zeta)$, описывающая распределение намагниченности внутри Γ , непрерывна в $\Gamma \cup L_0$. Тогда если магнитный потенциал $W(\zeta')$ допускает аналитическое продолжение внутрь Γ через L_0 , то последняя является предельно-аналитической.

Для доказательства запишем для интеграла типа Коши

$$C(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta \quad (14.10)$$

формулу Сохоцкого — Племеля (2.22а) в виде

$$C^-(\zeta_0) = C^+(\zeta_0) - 2\pi I(\zeta_0) \bar{\zeta}_0, \quad \zeta_0 \in L_0. \quad (14.11)$$

Учитывая, что согласно (14.1) $C^-(\zeta_0) = -W^-(\zeta_0)$, получаем

$$W^-(\zeta_0) = -C^+(\zeta_0) + 2\pi I(\zeta_0) \bar{\zeta}_0, \quad \zeta_0 \in L_0. \quad (14.12)$$

Если функция $W(\zeta')$ допускает аналитическое продолжение внутрь Γ через дугу L_0 , то в этом случае

$$W^-(\zeta_0) = W_{L_0}^-(\zeta_0). \quad (14.13)$$

С учетом (14.13) формула (14.12) переписывается в виде

$$\frac{W_{L_0}^-(\zeta_0) + C^+(\zeta_0)}{2\pi I(\zeta_0)} = \bar{\zeta}_0. \quad (14.14)$$

Левая часть по условию теоремы допускает аналитическое продолжение в некоторую часть D^+ области Γ через все точки дуги L_0 (см. рис. 21). Обозначим это продолжение через $\varphi(\zeta)$. Тогда имеем

$$\varphi(\zeta_0) = \bar{\zeta}_0, \quad \zeta_0 \in L_0, \quad (14.15)$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция, аналитическая в D^+ . Отсюда следует, что L_0 — предельно-аналитическая дуга. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 14.1. Пусть задана некоторая область Γ , ограниченная кусочно-гладкой кривой L , внутри которой распределены намагниченные массы с намагниченностью $I(\zeta)$, аналитической в Γ и непрерывной в $\Gamma \cup L$. Для того чтобы магнитный потенциал $W(\zeta)$ области Γ мог быть продолжен внутрь Γ через любую точку некоторой дуги L_0 границы L (за исключением, быть может, ее концов), необходимо и достаточно, чтобы дуга L_0 была предельно-аналитической (изнутри области Γ).

Отметим в заключение, что утверждение теоремы остается в силе, если продолжается не магнитный потенциал, а комплексная напряженность магнитного поля или любая ее производная.

14.4. Особые точки аналитического продолжения магнитного потенциала

Вопрос о расположении особых точек магнитного потенциала, аналитически продолженного внутрь области Γ , занятой намагниченными массами, легко решается на основе формулы (14.3).

В самом деле, интеграл типа Коши, стоящий справа в формуле (14.3), есть аналитическая функция всюду внутри Γ . Следовательно, особые точки продолженного через аналитическую дугу L_0 потенциала $W_{L_0}^-(\zeta')$ совпадают внутри Γ с особыми точками функции $\varphi_0(\zeta')$, описывающей уравнение дуги L_0 в форме Цирульского.

Разберем важный частный случай, когда вся линия L , ограничивающая Γ , есть предельно-аналитическая кривая с уравнением

$$\bar{\zeta} = \varphi(\zeta). \quad (14.16)$$

В этом случае $\varphi(\zeta)$ обязательно имеет особые точки внутри Γ , причем множество ее особенностей совпадает со множеством особенностей функции $W(\zeta)$, аналитически продолженной внутрь Γ .

В самом деле, если бы $\varphi(\zeta)$ не имела особых точек внутри Γ , то согласно (14.3) в результате аналитического продолжения магнит-

ного потенциала внутрь Γ мы получали бы функцию, аналитическую во всем пространстве (вне Γ потенциал $W(\zeta')$ — заведомо аналитическая функция, причем исчезающая на бесконечности). Следовательно, по теореме Лиувилля $W(\zeta') \equiv 0$, что неверно.

Выясним теперь, какие точки на контуре L , ограничивающем намагниченную область Γ , являются особыми для аналитически продолженного магнитного потенциала. Пусть линия L состоит из конечного числа различных предельно-аналитических (изнутри области Γ) дуг L_1, L_2, \dots, L_N , описываемых уравнениями в форме Цирульского

$$\bar{\zeta} = \varphi_n(\zeta), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (14.17)$$

причем

$$\varphi_k(\zeta) \not\equiv \varphi_l(\zeta) \text{ при любых } k \neq l. \quad (14.18)$$

Условие (14.18) и есть определение понятия «различных» предельно-аналитических дуг.

Обозначим точки, соответствующие концам дуг L_1, L_2, \dots, L_N , через $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$. Нетрудно показать, что при любом аналитическом распределении намагниченности $I(\zeta)$ внутри Γ , удовлетворяющем условию Гельдера на L , угловые точки контура L являются особыми точками — точками ветвления — функции $W(\zeta')$, аналитически продолженной внутрь Γ .

Действительно, аналитически продолжая $W(\zeta')$ через дугу L_k , находим согласно (14.3)

$$W_{L_k}^-(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta + 2\pi I(\zeta') \varphi_k(\zeta'), \quad (14.19)$$

а продолжая $W(\zeta')$ через дугу L_{k+1} , определяем

$$W_{L_{k+1}}^-(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k+1}} \frac{2\pi I(\zeta) \bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta + 2\pi I(\zeta') \varphi_{k+1}(\zeta'). \quad (14.20)$$

В силу условия (14.18)

$$W_{L_k}^-(\zeta') \not\equiv W_{L_{k+1}}^-(\zeta'). \quad (14.21)$$

Следовательно, точка ζ_k (точка соединения дуг L_k и L_{k+1}) есть точка ветвления продолженного потенциала.

Заметим в заключение, что все результаты, полученные для магнитного потенциала, очевидно, легко распространяются и на комплексную напряженность магнитного поля, и на любые ее производные.

14.5. Определение комплексной намагниченности тела по магнитному потенциалу

Рассмотрим следующую обратную задачу. Предположим, что нам известен магнитный потенциал $W(\xi')$ вне области Γ , занятой намагниченными массами, и известна гладкая граница области Γ . Необходимо найти намагниченность $I(\xi)$, являющуюся аналитической функцией внутри Γ и непрерывной в $\Gamma \cup L$. Для решения задачи аналитически продолжим магнитный потенциал $W(\xi')$ из области его определения всюду в $\overline{C\Gamma}$, в частности вплоть до границы L . Результат такого продолжения, так же как и выше, обозначим $W^-(\xi_0)$. Тогда согласно (14.1)

$$W^-(\xi_0) = -C^-(\xi_0), \quad \xi_0 \in L, \quad (14.22)$$

где $C(\xi_0)$ определяется формулой (14.10). Подставляя в (14.22) формулу Сохоцкого — Племеля (2.216) и учитывая (14.10), записываем

$$W^-(\xi_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi I(\xi) \bar{\xi}}{\xi - \xi_0} d\xi + \pi I(\xi_0) \bar{\xi}_0, \quad \xi_0 \in L. \quad (14.23)$$

Полученное выражение (14.23) представляет собой *сингулярное интегральное уравнение относительно граничных значений на линии L комплексной намагниченности $I(\xi)$* .

Теория решения такого типа уравнений подробно разобрана в цитированной выше монографии Н. И. Мухелишвили [1962] и в других специальных работах, к которым мы и отсылаем читателя. Здесь же мы рассмотрим лишь чрезвычайно важный для геофизики вопрос о единственности решения уравнения (14.23).

Очевидно, что решение будет единственным в том и только том случае, если для области Γ не существует аналитических распределений намагниченности, порождающих тождественно равный нулю внешний магнитный потенциал.

В. Н. Страховым [1970, а, в] было показано, что если уравнение контура L , являющегося границей Γ , не представимо в виде

$$\bar{\xi} = f(\xi) / \prod_{i=0}^K (\xi - \xi_i)^{n_i}, \quad n_i \geq 0; \quad \sum_i n_i > 1, \quad \xi_i \in \Gamma, \quad (14.24)$$

где $f(\xi)$ — произвольная аналитическая в Γ и непрерывная в $\Gamma \cup L$ функция, то для таких областей не существует аналитических распределений намагниченности, порождающих нулевой внешний потенциал.

Таким образом, для таких областей Γ решение уравнения (14.23) существует и единственно.

Например, если $I(\xi) = I_0 = \text{const}$, то это решение дается формулой, впервые полученной В. Н. Страховым [1970в]:

$$I_0 = \frac{W^-(\xi_0)}{\pi \bar{\xi}_0 + i \int_L \bar{\xi} d\xi / (\xi - \xi_0)}. \quad (14.25)$$

Если $I(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция внутри Γ , то, решив уравнение (14.23) и определив $I(\zeta_0)$ при $\zeta_0 \in L$, мы можем воспользоваться интегральной формулой Коши (1.1) и восстановить $I(\zeta)$ всюду внутри Γ :

$$I(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{I(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in \Gamma. \quad (14.26)$$

15. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ, ЗАНЯТОЙ ГРАВИТИРУЮЩИМИ МАССАМИ

Применим аппарат интеграла типа Коши к решению задачи продолжения гравитационного поля внутрь возмущающих масс.

15.1. Свойства гравитационного поля однородной области, ограниченной аналитической кривой

Начнем наше исследование с простейшего случая, когда область Γ заполнена массами постоянной плотности ρ_0 и ограничена аналитической кривой L , уравнение которой имеет вид

$$\bar{\zeta} = \varphi_L(\zeta), \quad (15.1)$$

где $\varphi_L(\zeta)$ — функция, аналитическая в некоторой, в общем случае неодносвязной области D , целиком содержащей внутри себя Γ (рис. 22).

Комплексную напряженность гравитационного поля области Γ обозначим $g_\Gamma(\zeta')$. Определим также комплексную напряженность $g_{C\bar{\Gamma}}(\zeta')$ области $C\bar{\Gamma}$, заполненной гравитирующими массами той же плотности ρ_0 . Тогда согласно формулам (8.7) и (8.10)

$$g_\Gamma(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}, \quad (15.2)$$

$$g_{C\bar{\Gamma}}(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in \Gamma. \quad (15.3)$$

Применяя к интегралу типа Коши, стоящему в правой части (15.2) и (15.3), формулы Сохоцкого — Племеля (2.22а), (2.22б), получаем

$$g_{C\bar{\Gamma}}(\zeta_0) + g_\Gamma(\zeta_0) = 2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}_0 = 2\pi\gamma\rho_0\varphi_L(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L. \quad (15.4)$$

Соотношение (15.4) позволяет сформулировать следующую теорему, впервые доказанную А. В. Цирульским [1963].

Теорема 15.1. *Для того чтобы замкнутая гладкая кривая L была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$g_{\Gamma}(\zeta')$ могла быть аналитически продолжена внутрь, а функция $g_{\text{сг}}(\zeta')$ во внешность области Γ , ограниченной L , через любую точку L .

Докажем достаточность условия теоремы. Пусть функция $g_{\Gamma}(\zeta')$ может быть аналитически продолжена внутрь Γ в некоторую область D^+ , примыкающую изнутри к L , а функция $g_{\text{сг}}(\zeta')$ может быть аналитически продолжена во внешность области Γ в некоторую область D^- , примыкающую к L снаружи. Таким образом, L — есть общая граница областей D^+ и D^- (см. рис. 22). Обозначим через D область, получающуюся объединением областей D^+ , D^- и кривой L : $D = D^+ \cup D^- \cup L$. Образует функцию $\varphi_L(\zeta)$ так:

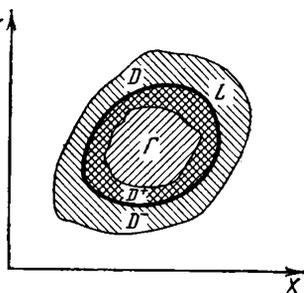


Рис. 22

$$\varphi_L(\zeta) = \frac{1}{2\pi\gamma\rho_0} [\bar{g}_{\text{сг}}(\zeta) + g_{\Gamma}(\zeta)]. \quad (15.5)$$

Очевидно, что $\varphi_L(\zeta)$ — функция, аналитическая в D , причем согласно (15.4)

$$\varphi_L(\zeta_0) = \bar{\xi}_0, \quad \zeta_0 \in L. \quad (15.6)$$

Уравнение (15.6) есть уравнение контура L в форме Цирульского, причем в силу аналитичности $\varphi_L(\zeta)$ в D , контур L — аналитический, что и требовалось доказать.

Необходимость выполнения условия теоремы немедленно следует из теоремы 13.1 о возможности продолжения интеграла типа Коши с аналитической плотностью через аналитический контур интегрирования (поскольку $\bar{\xi} = \varphi_L(\zeta)$ — аналитическая функция). Причем согласно теореме 13.1 продолженные поля определяются следующими формулами:

$$g_{\bar{L}}(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\varphi_L(\zeta') - \bar{g}_{\text{сг}}(\zeta'), \quad \zeta' \in \Gamma, \quad (15.7)$$

$$g_{\text{сг}L}^+(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\varphi_L(\zeta') - g_{\Gamma}(\zeta'), \quad \zeta' \in \bar{\Gamma}, \quad (15.8)$$

откуда видно, что множество особых точек, аналитически продолженных через кривую L полей $g_{\Gamma}(\zeta')$ и $g_{\text{сг}}(\zeta')$, совпадает со множеством особенностей функции $\varphi_L(\zeta')$ внутри и вне области Γ соответственно.

В частности, определенный интерес представляет случай, когда функция $\varphi_L(\zeta)$ не имеет особенностей вне Γ . Тогда по доказанной теореме комплексная напряженность $g_{\text{сг}L}^+(\zeta')$, продолженная на всю комплексную плоскость, нигде не имеет особенностей и по теореме Лиувилля есть постоянная:

$$g_{\text{сг}L}^+(\zeta') \equiv a = \text{const}. \quad (15.9)$$

Подставляя (15.9) в (15.8), находим

$$g_{\Gamma}(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\varphi_L(\zeta') - a, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma} \quad (15.10)$$

Устремляя в (15.10) ζ' к бесконечности, определяем неизвестную константу a :

$$a = 2\pi\gamma\rho_0 \lim_{\zeta' \rightarrow \infty} \varphi_L(\zeta'), \quad (15.11)$$

откуда окончательно записываем

$$g_{\Gamma}(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0 [\varphi_L(\zeta') - \lim_{\zeta' \rightarrow \infty} \varphi_L(\zeta')]. \quad (15.12)$$

Формула (15.12) дает аналитическое решение задачи об определении комплексной напряженности однородной области Γ , ограниченной аналитической кривой L (определяемой функцией $\varphi_L(\zeta)$, не имеющей особенностей вне Γ).

Например, если L — окружность радиуса R с центром в начале координат, то ее уравнение в форме Цирульского имеет вид

$$\bar{\zeta} = \varphi_L(\zeta) = R^2/\zeta. \quad (15.13)$$

Функция $\varphi_L(\zeta) = R^2/\zeta$ имеет только одну особенность — полюс в начале координат. Подставляя (15.13) в (15.12), находим поле круга $|\zeta| \leq R$, заполненного гравитирующими массами с постоянной плотностью ρ_0 :

$$g_{\Gamma}(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0 R^2/\zeta' = 2\gamma M/\zeta', \quad (15.14)$$

где $M = \pi R^2 \rho_0$ — масса круга.

15.2. Продолжение гравитационного поля внутри области с аналитическим распределением плотности

Комплексная напряженность гравитационного поля области Γ , ограниченной кусочно-гладкой кривой L , с аналитическим распределением плотности масс $\rho(x, z)$ внутри Γ , описывается согласно (8.20) следующим интегралом типа Коши:

$$g_{\Gamma}(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in C\bar{\Gamma}. \quad (15.15)$$

Здесь $\Phi(\zeta, \bar{\zeta})$ — неопределенный интеграл от плотности масс, который определяется формулой (8.15) и представляет собой аналитическую функцию своих аргументов в Γ , непрерывную по Липшицу на L . Для комплексной напряженности $g_{\Gamma}(\zeta')$ справедлива следующая теорема.

Теорема 15.2. *Комплексная напряженность гравитационного поля, порождаемого распределением плотности $\rho(x, z)$ внутри Γ , являющимся аналитической функцией координат x и z , допускает аналитическое продолжение внутрь Γ через любую предельно-аналитическую дугу L_0 кривой L (кроме, быть может, ее концов). Осо-*

бые точки продолженного поля совпадают с особыми точками функции $\Psi(\zeta) = \Phi(\zeta, \varphi_{L_0}^+(\zeta))$, где $\varphi_{L_0}^+(\zeta)$ задает уравнение дуги L_0 в форме Цирульского.

Доказательство теоремы 15.2 основано на рассуждениях, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теорем 13.1 и 14.1, и мы предоставляем его читателю.

В частности, формула (14.19) при этом принимает следующий вид:

$$g_{\bar{L}_0}(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta + 2\pi\gamma\Phi(\zeta', \varphi_{L_0}^+(\zeta')), \quad \zeta' \in D^+, \quad (15.16)$$

где $\bar{g}_{\bar{L}_0}(\zeta')$ — результат аналитического продолжения $g_{\Gamma}(\zeta')$ внутрь Γ через дугу L_0 .

Отметим, что формула (15.16) показывает справедливость и обратного утверждения о том, что *если функция $g_{\Gamma}(\zeta')$ допускает аналитическое продолжение внутрь Γ через некоторую аналитическую дугу L_0 (за исключением, возможно, концов) ее границы, то дуга L_0 — предельно-аналитическая.*

В самом деле, если существует аналитическое продолжение $\bar{g}_{\bar{L}_0}(\zeta')$ поля $g_{\Gamma}(\zeta')$ внутрь Γ через дугу L_0 , то при $\zeta' = \zeta_0 \in L_0$ имеем

$$\bar{g}_{\bar{L}_0}(\zeta_0) + \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_0^+} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\Phi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta \right\} = 2\pi\gamma\Phi(\zeta_0, \varphi_{L_0}^+(\zeta_0)). \quad (15.17)$$

Левая часть (15.17) допускает аналитическое продолжение внутрь Γ , следовательно, допускает аналитическое продолжение и правая часть. Поэтому функция $\varphi_{L_0}^+(\zeta)$ должна быть аналитической в некоторой области D^+ , примыкающей к L изнутри области Γ , т. е. L_0 — предельно-аналитическая дуга.

15.3. Случай однородной области, ограниченной кусочно-аналитической кривой

Рассмотрим вновь частный случай, когда плотность ρ_0 внутри Γ есть постоянная величина, однако теперь в отличие от п. 15.1 будем полагать, что L — кусочно-гладкая. Тогда функция $\Phi(\zeta, \bar{\zeta})$ согласно (8.15) приобретает вид

$$\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = \rho_0 \bar{\zeta}. \quad (15.18)$$

Теорема 15.2 при этом, разумеется, сохраняет свою силу, но формула (15.16) для продолженного поля несколько упрощается:

$$g_{\bar{L}_0}(\zeta') = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta'} d\zeta + 2\pi\gamma\rho_0\varphi_{L_0}^+(\zeta'), \quad \zeta' \in D^+. \quad (15.19)$$

Интеграл, стоящий в правой части (15.19), согласно формуле (15.3) имеет смысл комплексной напряженности области $\overline{C\Gamma}$, заполненной массами постоянной плотности ρ_0 , поэтому (15.19) можно переписать так:

$$g_{\overline{L}_0}(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\overline{\varphi}_{L_0}^+(\zeta') - g_{C\Gamma}(\zeta'), \quad \zeta' \in D^+, \quad (15.20)$$

что согласуется с (15.7).

Очевидно, что, применяя теорему 13.1 к интегралу типа Коши, описывающему поле $g_{C\Gamma}$ (формула (15.3)), можно показать, так же как и в п. 15.1, что поле $g_{C\Gamma}(\zeta')$ может быть аналитически продолжено вовне области Γ через любую точку дуги L_0 , принадлежащей ее границе (за исключением, быть может, концов), в том и только том случае, если дуга L_0 — предельно-аналитическая (с внешней стороны).

Результат такого аналитического продолжения описывается формулой

$$g_{\overline{L}_0}^*(\zeta') = 2\pi\gamma\rho_0\overline{\varphi}_{L_0}^-(\zeta') - g_{\Gamma}(\zeta'), \quad \zeta' \in D^-, \quad (15.21)$$

где $\overline{\varphi}_{L_0}^-(\zeta')$ — задает уравнение предельно-аналитической дуги с внешней стороны (сравните с формулой (15.8)).

Таким образом, мы видим, что необходимым и достаточным условием того, что комплексная напряженность $g_{\Gamma}(\zeta')$ может быть продолжена внутрь Γ , а $g_{C\Gamma}(\zeta')$ — во внешность Γ через некоторую дугу L_0 границы области Γ (исключая ее концы), является свойство предельной аналитичности дуги L_0 слева (изнутри) или справа (снаружи) области Γ соответственно.

15.4. Особые точки продолженного поля, лежащие на границе материальной области

Вопрос об особых точках продолженного гравитационного поля, принадлежащих границе области, занятой гравитирующими массами, решается так же, как и для магнитного потенциала, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 15.3. Пусть граница L области Γ , заполненной массами с аналитическим распределением плотности, состоит из конечного числа различных предельно-аналитических (изнутри области Γ) дуг. Тогда точки соединения этих дуг есть точки ветвления функции $g_{\overline{L}}^-(\zeta')$, аналитически продолженной внутрь Γ .

Доказательство теоремы 15.3 вытекает из следствия 13.2 и аналогично приведенному в п. 14.4.

Более тонким является вопрос о поведении продолженного поля вблизи точек возврата кривой L , ограничивающей Γ . Дело в том, что в окрестности точки возврата ζ_0 дуга L_0 может быть предельно-аналитической, хотя сама точка возврата («острие») является особой точкой дуги в дифференциально-геометрическом смысле [Рашевский, 1956]. Поэтому если L_0 — предельно-аналитическая дуга

изнутри области Γ , то поле $g_{\Gamma}(\zeta')$ может быть аналитически продолжено внутрь Γ через ζ_0 . Более детальное исследование, которое мы здесь не приводим [Жданов, 1970], показывает, что это возможно тогда, когда «острие» смотрит внутрь области Γ . Однако *в окрестности точки возврата дуга L_0 никогда не может быть просто аналитической*. В самом деле, предположим противное. Пусть $\zeta_0 \in L_0$ — особая в дифференциально-геометрическом смысле точка аналитической дуги L_0 . Запишем уравнение дуги в форме Цирульского:

$$\bar{\zeta} = \varphi(\zeta), \quad (15.22)$$

где $\varphi(\zeta)$ — аналитическая функция в некоторой области D , целиком содержащей внутри себя L_0 . Обозначим через u и v действительные и мнимые части $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = u(x, z) + iv(x, z), \quad (15.23)$$

которые всюду в D , в том числе и в точке $\zeta_0 = (x_0, z_0)$, связаны между собой условиями Коши — Римана

$$du/dx = dv/dz, \quad du/dz = -dv/dx. \quad (15.24)$$

Уравнение (15.22) эквивалентно двум действительным уравнениям

$$x - u(x, z) = P(x, z) = 0, \quad z + v(x, z) = Q(x, z) = 0, \quad (15.25)$$

где $P(x, z)$ и $Q(x, z)$ — функции, задающие в неявном виде уравнение дуги L_0 .

Поскольку $\zeta_0 = (x_0, z_0)$ — геометрически особая точка кривой L_0 , то в этой точке [Рашевский, 1956]

$$\partial P/\partial x = 0, \quad \partial P/\partial z = 0; \quad \partial Q/\partial x = 0, \quad \partial Q/\partial z = 0. \quad (15.26)$$

Следовательно, с учетом (15.25) записываем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)} = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)} = -1. \quad (15.27)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, z_0)} = - \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{(x_0, z_0)}, \quad (15.28)$$

что противоречит условиям Коши — Римана (15.24). Полученный результат позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 15.4. *Всякая точка кривой L , ограничивающей область Γ , заполненную гравитирующими массами постоянной плотности ρ_0 , особая в дифференциально-геометрическом смысле, является особой либо для поля $g_{\Gamma}(\zeta')$, либо для поля $g_{c\Gamma}(\zeta')$, либо для обоих полей $g_{\Gamma}(\zeta')$ и $g_{c\Gamma}(\zeta')$.*

Действительно, пусть ζ_0 — особая в геометрическом смысле точка кривой L , а в то же время функции $g_{\Gamma}(\zeta')$ и $g_{c\Gamma}(\zeta')$ допускают аналитическое продолжение через любую точку дуги L_0 , лежащую в некоторой окрестности ζ_0 , в том числе через саму ζ_0 . Тогда по ре-

зультату п. 15.3 дуга L_0 является предельно-аналитической с обеих сторон, т. е. просто аналитической, что невозможно.

Таким образом, теоремы 15.3 и 15.4 полностью определяют особые точки продолженного поля, лежащие на границе материальной области.

16. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОЛЕЙ

В данном параграфе мы переходим к описанию конструктивных методов аналитического продолжения плоских геопотенциальных полей. Эта проблема интенсивно разрабатывается в геофизике, начиная с конца 30-х годов. В настоящее время благодаря усилиям прежде всего советских исследователей мы обладаем фундаментальной теорией аналитического продолжения, эффективными численными методами решения задачи, многообразием алгоритмов и программ пересчета гравитационных и магнитных полей. В данной работе мы не ставим перед собой цели полного описания состояния проблемы, поскольку для подробного изложения всех аспектов задачи потребовалось бы создание отдельной книги. Мы изложим лишь один подход к конструированию методов аналитического продолжения, основанный на использовании интегральной формулы Коши. Особенностью этого подхода является то, что, с одной стороны, он позволяет достаточно глубоко раскрыть наиболее существенные особенности проблемы пересчета поля, а с другой — может быть единообразно применен как в случае плоских, так и объемных (трехмерных) геопотенциальных полей.

16.1. Формы аналитического продолжения плоского поля в задачах геофизики

Задача продолжения плоского потенциального поля в геофизике обычно формулируется следующим образом. Пусть $F(\xi)$ — комплексная напряженность плоского поля, источники которого находятся внутри некоторой области Γ . В целях простоты изложения мы ограничимся случаем, когда Γ — конечная область, хотя почти все результаты, излагаемые ниже, справедливы и для бесконечно протяженных областей. Иными словами, мы предполагаем, что функция $F(\xi)$ есть аналитическая функция всюду вне конечной области Γ и стремится к нулю на бесконечности. Положим далее, что L — произвольная кусочно-гладкая линия, проходящая через бесконечно удаленную точку (рис. 23). Ее уравнения

$$x=x(s), z=z(s), s_a \leq s \leq s_b,$$

причем

$$z_1 \leq z(s) \leq 0. \tag{16.1}$$

Обозначим через P_L^+ верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ , ограниченную кривой L , а через P_L^- — нижнюю полуплоскость. Поле $F(\zeta)$ известно на кривой L , причем $\Gamma \subset P_L^-$, т. е. источники поля $F(\zeta)$ сосредоточены в нижней полуплоскости. В такой постановке можно сформулировать два класса задач аналитического продолжения: 1) *аналитическое продолжение поля вверх* — в верхнюю полуплоскость P_L^+ ; 2) *аналитическое продолжение поля вниз* — в нижнюю полуплоскость P_L^- .

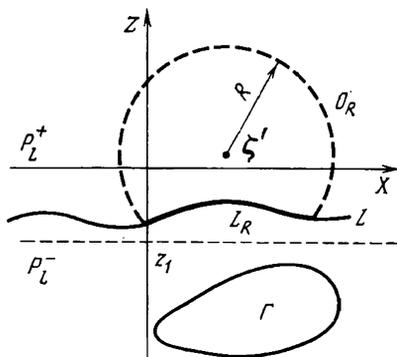


Рис. 23

В геофизических приложениях кривую L отождествляют с линией наблюдения — поверхностью Земли. Продолжая поле вверх, мы удаляемся от источников поля и тем самым освобождаемся от мелких деталей, связанных с особенностями структуры источников. Продолжая поле вниз, мы, напротив, приближаемся к источникам поля, что позволяет обнаружить эффекты, неразличимые с земной поверхности. Более того, как было показано в предыдущих параграфах, мы можем проникнуть даже внутрь области, занятой источниками поля, и по особенностям продолженного поля восстановить положение источников, а в отдельных случаях — их плотность.

Таким образом, аналитическое продолжение позволяет решать как качественные, так и количественные задачи интерпретации геопотенциальных полей.

Задачи первого класса — продолжение вверх — являются простейшей формой аналитического продолжения. Особенностью этих задач является то, что функция $F(\zeta)$ продолжается в область ее аналитичности. Поэтому для решения этой задачи может быть непосредственно использована интегральная формула Коши (1.1).

В самом деле, рассмотрим произвольную точку $\zeta' \in P_L^+$ и проведем из этой точки как из центра окружность радиуса R . Часть кривой L , попавшую внутрь окружности, обозначим L_R , а часть этой окружности, оказавшуюся внутри P_L^+ , обозначим O_R (см. рис. 23). Очевидно, что в силу интегральной формулы Коши (1.1) значения функции $F(\zeta)$ в точке ζ' вычисляются по ее значениям на L_R и O_R :

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \quad (16.2)$$

Теперь перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Интеграл по части окружности O_R после замены переменной $\zeta = \zeta' + Re^{i\theta}$ записывается в

виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{O_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(\zeta' + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (16.3)$$

Функция $F(\zeta)$ в силу аналитичности равномерно по θ стремится к нулю на бесконечности, следовательно, предел интеграла (16.3) равен нулю. Интеграл по части кривой L_R при $R \rightarrow \infty$ стремится к интегралу по всей линии L . Таким образом, в пределе формула (16.2) принимает следующий вид:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad \zeta' \in P_L^+, \quad (16.4)$$

причем линия L проходится в выражении (16.4) слева направо. Формула (16.4) и дает решение задачи об аналитическом продолжении комплексной напряженности поля в верхнюю полуплоскость.

16.2. Восстановление функции, аналитической в верхней полуплоскости, по ее действительной или мнимой части

Чрезвычайно важное значение в геофизических приложениях имеет задача восстановления функции $F(\zeta)$ по ее действительной или мнимой части. В самом деле, в гравиметрии комплексная напряженность гравитационного поля $g(\zeta) = -g_x + ig_z$, где g_x , g_z — горизонтальная и вертикальная составляющие гравитационного поля. Как правило, на практике измеряется величина g_z , поэтому возникает проблема восстановления $g(\zeta)$ по g_z , т. е. по ее мнимой части. Аналогичная проблема имеет место и в магнитометрии.

Эта задача может быть легко решена в простейшем случае, когда линия L совпадает с вещественной осью X . Формула (16.4) при этом записывается так:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x - \zeta'} dx. \quad (16.5)$$

Выделим вещественную и мнимую части функции $F(\zeta)$:

$$F(\zeta) = \operatorname{Re} F(\zeta) + i \operatorname{Im} F(\zeta) = U(x, z) + iV(x, z),$$

подставим последнее выражение в (16.5):

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x, 0)}{x - \zeta'} dx. \quad (16.6)$$

В основе решения сформулированной выше задачи лежат интегральные соотношения между функциями $U(x, 0)$ и $V(x, 0)$, вы-

веденные в п. 3.4 (формулы (3.29)):

$$U(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - x} d\tilde{x}, \quad (16.7)$$

$$V(x, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - x} d\tilde{x}. \quad (16.8)$$

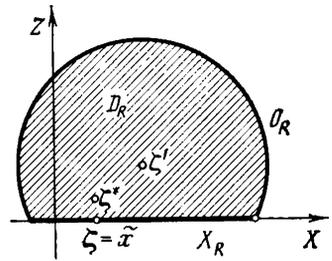


Рис. 24

Подставляя формулу (16.7) или (16.8) в выражение (16.6), можно определить функцию $F(\zeta')$ по ее действительной или мнимой части, заданной на вещественной оси.

В самом деле, выразим, например, мнимую часть функции $F(\zeta)$ через ее действительную часть посредством (16.8). Тогда (16.6) можно переписать так:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \zeta'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - x} d\tilde{x} dx. \quad (16.9)$$

Поскольку источники поля $F(\zeta)$ сосредоточены в конечной области Γ плоскости, то в силу (6.20) как сама функция $F(\zeta)$, так и ее вещественные и мнимые части убывают на бесконечности как $1/|\zeta|$. Следовательно, все интегралы, входящие в выражения (16.6)–(16.8), сходятся абсолютно и равномерно, поэтому в формуле (16.9) можно поменять местами порядок интегрирования во втором слагаемом:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \zeta'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - x} d\tilde{x} dx = \\ & = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tilde{x}, 0) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1/(x - \zeta')}{\tilde{x} - x} dx \right\} d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Вычислим внутренний интеграл в правой части (16.10). Для этого зафиксируем точку ζ' и проведем из нее как из центра окружность радиуса R (рис. 24). Часть этой окружности, лежащую в верхней полуплоскости ($\text{Im } \zeta \geq 0$), обозначим, как обычно, O_R , а часть вещественной оси, попавшую внутрь окружности, обозначим X_R . Введем в рассмотрение интеграл типа Коши

$$C(\zeta^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R \cup X_R} \frac{1/(\zeta - \zeta')}{\zeta - \zeta^*} d\zeta.$$

Очевидно, что плотность этого интеграла $1/(\zeta - \zeta')$ есть аналитическая функция вне области D_R , ограниченной контуром $O_R \cup X_R$ (см. рис. 24), и стремится к нулю на бесконечности. Следовательно,

по интегральной формуле Коши для бесконечной области $C\bar{D}_R$ получаем

$$C(\zeta^*) = \begin{cases} 0, & \zeta^* \in D_R, \\ -1/(\zeta^* - \zeta'), & \zeta^* \in C\bar{D}_R. \end{cases} \quad (16.11)$$

Воспользуемся теперь формулой Сохоцкого — Племяля (2.226):

$$C^+(\zeta_0) + C^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{O_R \cup X_R} \frac{1/(\zeta - \zeta')}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in O_R \cup X_R. \quad (16.12)$$

Но согласно (16.11)

$$C^+(\zeta_0) = \lim_{\zeta^* \rightarrow \zeta_0^+} C(\zeta^*) = 0, \quad C^-(\zeta_0) = \lim_{\zeta^* \rightarrow \zeta_0^-} C(\zeta^*) = -1/(\zeta_0 - \zeta'). \quad (16.13)$$

Подставляя (16.13) в (16.12), записываем

$$\frac{1}{\zeta_0 - \zeta'} = -\frac{1}{\pi i} \int_{O_R \cup X_R} \frac{1/(\zeta - \zeta')}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in O_R \cup X_R.$$

В частности, при $\zeta_0 = \tilde{x} \in X_R$ получаем

$$\frac{1}{\tilde{x} - \zeta'} = \frac{1}{\pi i} \int_{O_R} \frac{1/(\zeta - \zeta')}{\tilde{x} - \zeta} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{X_R} \frac{1/(x - \zeta')}{\tilde{x} - x} dx. \quad (16.14)$$

С помощью замены переменных $\zeta = \tilde{x} - Re^{i\theta}$ нетрудно переписать первый интеграл в правой части (16.14) так:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{O_R} \frac{1/(\zeta - \zeta')}{\tilde{x} - \zeta} d\zeta = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1/(\tilde{x} - \zeta' - Re^{i\theta})] d\theta,$$

откуда видно, что этот интеграл стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Таким образом, переходя в (16.14) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1/(x - \zeta')}{\tilde{x} - x} dx = \frac{1}{\tilde{x} - \zeta'}. \quad (16.15)$$

Подставляя (16.15) в правую часть (16.10), записываем

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \zeta'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - x} d\tilde{x} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\tilde{x}, 0)}{\tilde{x} - \zeta'} d\tilde{x}. \quad (16.16)$$

Наконец, подстановка (16.16) в (16.9) дает выражение для аналитического продолжения комплексной напряженности плоского поля в верхнюю полуплоскость по ее действительной части:

$$F(\zeta') = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx, \quad \text{Im } \zeta' > 0. \quad (16.17)$$

Аналогичным образом можно найти представление для функции $F(\zeta')$ по ее мнимой части. В самом деле, подставляя (16.7) в первый интеграл (16.6) и меняя местами порядок интегрирования, получаем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tilde{x}, 0) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1/(x-\zeta')}{\tilde{x}-x} dx \right\} d\tilde{x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x, 0)}{x-\zeta'} dx. \quad (16.18)$$

С учетом (16.15) формула (16.18) переписывается в виде

$$F(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x, 0)}{x-\zeta'} dx. \quad (16.19)$$

Выражения (16.17) и (16.19) играют чрезвычайно важную роль в теории аналитического продолжения геопотенциальных полей в верхнюю полуплоскость. В частности, раскрывая в левых и правых частях формул (16.17) и (16.19) вещественные и мнимые части, можно получить следующие *интегральные формулы Пуассона* для пересчета сопряженных гармонических функций³ U и V вверх:

$$U(x', z') = \frac{z'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{(x-x')^2 + z'^2} dx, \quad (16.20)$$

$$V(x', z') = \frac{z'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x, 0)}{(x-x')^2 + z'^2} dx;$$

$$U(x', z') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(x, 0)(x-x')}{(x-x')^2 + z'^2} dx, \quad (16.21)$$

$$V(x', z') = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)(x-x')}{(x-x')^2 + z'^2} dx.$$

Здесь $z' > 0$.

16.3. Аналитическое продолжение плоских полей в горизонтальный слой с помощью спектрального разложения ядра Коши

Обратимся теперь к решению задач второго класса — аналитическому продолжению поля в нижнюю полуплоскость. Трудность решения этой задачи обусловлена тем, что нам априори не известно

³ Напомним, что из условий Коши — Римана следует, что вещественные и мнимые части всякой аналитической в D функции являются гармоническими в D , при этом они называются сопряженными гармоническими функциями.

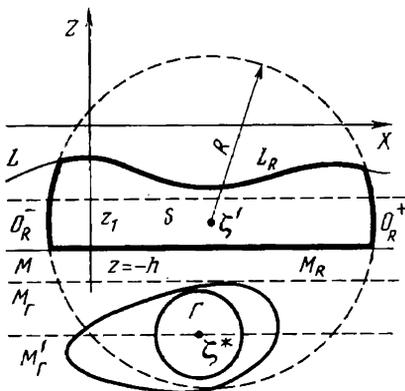


Рис. 25

Задача заключается в том, чтобы по значениям $F(\zeta)$ на L восстановить ее значения всюду внутри S . Решим эту задачу.

Прежде всего выразим значение функции $F(\zeta')$ в точке $\zeta' \in S$ через ее значения на прямой M , воспользовавшись формулой (16.4):

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x - ih)}{x - ih - \zeta'} dx. \quad (16.22)$$

Однако поле $F(\zeta)$ на прямой M нам не известно, поэтому, для того чтобы решить поставленную задачу, нам необходимо трансформировать интеграл по прямой M в интеграл по линии L , где задано поле $F(\zeta)$. Путь к такой трансформации лежит через разделение переменных в ядре Коши, которое может быть получено путем спектральных разложений.

В самом деле, справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{i(\zeta - \zeta')} = \int_{-\infty}^0 \exp(ik_x \zeta) \exp(-ik_x \zeta') dk_x, \quad (16.23)$$

где $\text{Im}(\zeta - \zeta') < 0$. В частности, при $\zeta = x - ih$

$$\frac{1}{i(x - ih - \zeta')} = \int_{-\infty}^0 \exp[ik_x(x - ih)] \exp(-ik_x \zeta') dk_x. \quad (16.24)$$

Подставляя это разложение в формулу (16.22) и меняя местами порядок интегрирования (что можно сделать благодаря абсолютной и равномерной сходимости интеграла (16.24)), записываем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - ih) \exp[ik_x(x - ih)] dx dk_x. \quad (16.25)$$

положение области Γ , занятой источниками поля $F(\zeta)$, т. е. не известны особые точки последнего. Более того, одна из целей аналитического продолжения как раз и состоит в том, чтобы определить положение этих особенностей. Вместе с тем для упрощения задачи мы можем предположить, что функция $F(\zeta)$ аналитична по крайней мере до некоторой горизонтальной прямой $M: z = -h, h > 0$ (рис. 25), причем $-h < z_1$, т. е. линия L всюду проходит выше прямой M . Обозначим через S область, заключенную между L и M (рис. 25).

Преобразуем внутренний интеграл в (16.25). Для этого проведем из точки ζ' как из центра окружность радиуса R и обозначим через O_R^- и O_R^+ части этой окружности, принадлежащие S , а через L_R и M_R — части кривой L и прямой M , попавшие внутрь окружности (см. рис. 25). Образует замкнутый контур $l_R = L_R \cup O_R^- \cup M_R \cup O_R^+$. Заметим, что подынтегральное выражение (16.25) $F(\zeta) \exp ik_x \zeta$ есть аналитическая функция ζ всюду в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > -h$, в частности внутри контура l_R . Следовательно, по интегральной теореме Коши

$$\int_{l_R} F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta = 0. \quad (16.26)$$

Записывая интеграл в левой части (16.26) как сумму четырех интегралов по соответствующим частям контура l_R , получаем

$$\begin{aligned} \int_{L_R} F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta + \int_{O_R^-} F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta + \\ + \int_{M_R} F(x - ih) \exp[ik_x(x - ih)] dx + \int_{O_R^+} F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta = 0, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где линия L_R проходится справа налево, а M_R — слева направо.

Оценим интегралы по отрезкам окружности O_R^- и O_R^+ :

$$\begin{aligned} |\Phi_{O_R^\pm}| = \left| \int_{O_R^\pm} F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta \right| = \left| \int_{O_R^\pm} F(\zeta) \exp(ik_x \text{Re } \zeta) \times \right. \\ \left. \times \exp(-k_x \text{Im } \zeta) d\zeta \right| \leq \int_{O_R^\pm} |F(\zeta)| |d\zeta| \leq \max_{\zeta \in O_R^\pm} |F(\zeta)| \int_{O_R^\pm} |d\zeta|, \end{aligned} \quad (16.28)$$

где учтено, что $\exp(-k_x \text{Im } \zeta) \leq 1$, так как согласно (16.1) $\text{Im } \zeta \leq 0$ на O_R^\pm и $k_x \leq 0$.

Отрезки окружности O_R^\pm при любых R все время заключены между прямыми $z=0$ и $z=-h$, причем при больших R отрезки окружности O_R^\pm приближаются по форме к вертикальным отрезкам длины h , поэтому по крайней мере

$$\int_{O_R^\pm} |d\zeta| < 2h. \quad (16.29)$$

Подставляя (16.29) в (16.28), находим

$$|\Phi_{O_R^\pm}| < 2 \max_{\zeta \in O_R^\pm} |F(\zeta)| h. \quad (16.30)$$

Поскольку $F(\xi)$ стремится к нулю на бесконечности, то правая часть (16.30) при больших R обращается в нуль, следовательно, исчезает и левая часть. Таким образом, переходя в (16.27) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x - ih) \exp[ik_x(x - ih)] dx = \int_L F(\xi) \exp(ik_x \xi) d\xi, \quad (16.31)$$

где линия L в отличие от формулы (16.27) проходится *слева направо*.

Итак, мы свели задачу вычисления внутреннего интеграла в (16.25) к интегрированию по линии L , где поле $F(\xi)$ задано. Подставляя (16.31) в (16.25), окончательно записываем

$$F(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \xi') \int_L F(\xi) \exp(ik_x \xi) d\xi dk_x. \quad (16.32)$$

Формула (16.32) и дает аналитическое решение задачи о продолжении поля вниз. Подчеркнем еще раз, что по построению эта формула справедлива только при условии, что $\text{Im } \xi' > -h$, и все особенности функции $F(\xi)$ находятся ниже прямой $z = -h$. Иными словами, эта формула справедлива до горизонтальной прямой, проходящей через ближайшую к линии L особую точку поля $F(\xi)$. Согласно результатам параграфов 14 и 15 особые точки могут находиться как на границе области Γ , содержащей источник поля, так и внутри Γ , следовательно, формула (16.32) заведомо позволяет продолжить поле до горизонтальной линии M_Γ , касающейся границы области Γ (см. рис. 25). Вместе с тем если точка касания линии M_Γ и границы области Γ не есть особая точка функции $F(\xi)$, то формула (16.32) позволяет продолжить поле и внутрь Γ — до прямой $M_{\Gamma'}$, проходящей через ближайшую внутреннюю особую точку функции $F(\xi)$. Например, если Γ — круг радиуса a с центром в точке ξ^* , заполненный массами однородной плотности ρ_0 , а $F(\xi)$ — комплексная напряженность гравитационного поля этих масс, то формула (16.32) позволяет в принципе продолжить поле $F(\xi)$ до горизонтальной прямой $M_{\Gamma'}$, проходящей через центр круга — точку ξ^* (см. рис. 25).

16.4. Случай задания поля на вещественной оси.

Формулы Заморева

Рассмотрим частный, но чрезвычайно важный в приложениях случай, когда линия L совпадает с вещественной осью.

Тогда формула (16.32) записывается в виде

$$F(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \xi') \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(ik_x x) dx dk_x. \quad (16.33a)$$

Примем, что $\xi' = x' - id$, тогда

$$F(x' - id) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x x') \exp(|k_x|d) \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(ik_x x) dx dk_x. \quad (16.33б)$$

Следуя параграфу 10 (п. 10.2), обозначим через $f(k_x, -d)$ пространственный спектр поля $F(x-id)$:

$$f(k_x, -d) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-id) \exp(ik_x x) dx. \quad (16.34)$$

Тогда на спектральном языке соотношения (16.33а), (16.33б) можно переписать следующим образом:

$$f(k_x, -d) = \Phi_d(k_x) f(k_x, 0), \quad (16.35)$$

где $\Phi_d(k_x)$ — частотная характеристика пересчета поля на глубину d , определяемая формулой

$$\Phi_d(k_x) = \begin{cases} \exp(|k_x|d), & k_x \leq 0, \\ 0, & k_x > 0. \end{cases} \quad (16.36)$$

Обозначим через $u(k_x, -d)$ и $v(k_x, -d)$ пространственные спектры действительной и мнимой частей функции $F(x-id)$, вычисляемые вдоль горизонтальной прямой $z = -d$:

$$u(k_x, -d) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, -d) \exp(ik_x x) dx, \quad (16.37а)$$

$$v(k_x, -d) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, -d) \exp(ik_x x) dx. \quad (16.37б)$$

Подставляя (16.37а), (16.37б) в (16.35), получаем

$$u(k_x, -d) + iv(k_x, -d) = \Phi_d(k_x) [u(k_x, 0) + iv(k_x, 0)]. \quad (16.38)$$

Очевидно, что спектры $u(k_x, 0)$ и $v(k_x, 0)$ связаны между собой соотношениями, вытекающими из формул (16.7) и (16.8). В самом деле, воспользовавшись представлением (11.23) для оператора Гильберта, перепишем (16.7) в виде

$$U(x, 0) = \hat{G}V(\tilde{x}, 0) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign } k_x \cdot v(k_x, 0) \exp(-ik_x x) dk_x.$$

Отсюда с учетом формул обращения преобразования Фурье получаем

$$u(k_x, 0) = -i \text{sign } k_x \cdot v(k_x, 0). \quad (16.39а)$$

Аналогично находим

$$v(k_x, 0) = i \operatorname{sign} k_x \cdot u(k_x, 0). \quad (16.396)$$

Формулы (16.39а), (16.39б), как нетрудно убедиться, остаются справедливыми и для спектров полей, рассчитанных вдоль любой прямой $z = -d$, проходящей выше всех особых точек функции $F(\xi)$, т. е. при $d < h$:

$$u(k_x, -d) = -i \operatorname{sign} k_x \cdot v(k_x, -d), \quad (16.40а)$$

$$v(k_x, -d) = i \operatorname{sign} k_x \cdot u(k_x, -d). \quad (16.40б)$$

Подставляя (16.40а), (16.40б) в (16.38), получаем две эквивалентные формулы

$$u(k_x, -d) [1 - \operatorname{sign} k_x] = \Phi_d(k_x) u(k_x, 0) [1 - \operatorname{sign} k_x], \quad (16.41а)$$

$$v(k_x, -d) [1 - \operatorname{sign} k_x] = \Phi_d(k_x) v(k_x, 0) [1 - \operatorname{sign} k_x]. \quad (16.41б)$$

Эти формулы при $k_x > 0$ обращаются в тривиальное тождество, а при $k_x \leq 0$ с учетом (16.36) дают

$$u(k_x, -d) = \exp(|k_x|d) u(k_x, 0), \quad (16.42)$$

$$v(k_x, -d) = \exp(|k_x|d) v(k_x, 0).$$

Согласно формуле (16.37а)

$$u(k_x, -d) = \bar{u}(-k_x, -d), \quad v(k_x, -d) = \bar{v}(-k_x, -d). \quad (16.43)$$

Следовательно, для $k_x > 0$ с учетом (16.42) и (16.43) имеем

$$\begin{aligned} u(k_x, -d) &= \bar{u}(-k_x, -d) = \exp(|k_x|d) \bar{u}(-k_x, 0) = \\ &= \exp(|k_x|d) u(k_x, 0) \end{aligned} \quad (16.44а)$$

и аналогично

$$v(k_x, -d) = \exp(|k_x|d) v(k_x, 0), \quad k_x > 0. \quad (16.44б)$$

Объединяя (16.42), (16.44а), (16.44б), окончательно записываем при любых k_x

$$u(k_x, -d) = \exp(|k_x|d) u(k_x, 0), \quad v(k_x, -d) = \exp(|k_x|d) v(k_x, 0). \quad (16.45)$$

Формула (16.45) показывает, что частотная характеристика $\Psi_d(k_x)$ операции пересчета функций, гармонических в верхней полуплоскости, вниз имеет вид

$$\Psi_d(k_x) = \exp(|k_x|d). \quad (16.46)$$

С помощью соотношений (16.39а), (16.39б) нетрудно показать, что функция $F(\xi)$ может быть аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость по значениям одной лишь ее действительной или мнимой части, заданной на действительной оси. В самом деле,

согласно (16.34), (16.37а), (16.37б) и (16.39а), (16.39б) имеем

$$\begin{aligned} f(k_x, 0) &= u(k_x, 0) + iv(k_x, 0) = \\ &= (1 - \operatorname{sign} k_x)u(k_x, 0) = i(1 - \operatorname{sign} k_x)v(k_x, 0). \end{aligned} \quad (16.47)$$

Подставляя (16.47) в (16.33а), получаем следующие две эквивалентные формулы:

$$F(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \exp(ik_x x) dx dk_x, \quad (16.48а)$$

$$F(\zeta') = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, 0) \exp(ik_x x) dx dk_x, \quad \zeta' \in S. \quad (16.48б)$$

Формулы (16.48) носят название *формул Заморева*. Они позволяют аналитически продолжить вниз функцию, аналитическую в верхней полуплоскости, по ее действительной или мнимой части, заданной на действительной оси. Эти формулы особенно важны в задачах гравиметрии, поскольку на практике измеряется обычно лишь одна компонента комплексной напряженности гравитационного поля g_z . Оказывается, что таких измерений вполне достаточно для восстановления всей комплексной напряженности $g(\zeta) = -g_x(x, z) + ig_z(x, z)$ как в верхней (формула (16.19)), так и в нижней полуплоскости до ближайшей к действительной оси особой точки функции $g(\zeta)$.

16.5. Аналитическое продолжение вниз функций, имеющих особенности как в нижней, так и в верхней полуплоскости

Рассмотрим теперь более сложную задачу, когда требуется продолжить вниз с кривой L функцию $F(\zeta)$, имеющую особенности не только ниже прямой M , но и выше L (см. рис. 25), т. е. как в нижней, так и в верхней полуплоскости. Предположим также, что функция $F(\zeta)$ удовлетворяет условиям

$$\lim F(\zeta) = 0, \quad \operatorname{Re} \zeta \rightarrow \pm \infty, \quad \zeta \in S, \quad (16.49)$$

где S — бесконечно протяженная по горизонтали область, заключенная между L и M .

Очевидно, что в качестве примера такой функции можно привести комплексную напряженность поля, имеющего источники в локальных областях Γ_e и Γ_i , расположенных как в верхней, так и в нижней полуплоскости (см. параграф 10). Задача заключается в том, чтобы по значениям функции $F(\zeta)$ на L найти ее значение в произвольной точке $\zeta' \in S$ (см. рис. 25).

Для решения задачи рассмотрим, так же как и выше в п. 16.3, контур $l_R = L_R \cup O_R^- \cup M_R \cup O_R^+$. Согласно интегральной формуле Коши

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad (16.50)$$

где контур l_R обходится против часовой стрелки.

Интеграл (16.50) можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$\begin{aligned} F(\zeta') = & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R^+} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{M_R} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{O_R^-} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta. \end{aligned} \quad (16.51)$$

Перейдем в (16.51) к пределу при $R \rightarrow \infty$. Тогда нетрудно показать (аналогично тому, как мы это делали выше), что в силу условия (16.49) интегралы по дугам окружности O_R^+ и O_R^- стремятся к нулю. Следовательно, мы получаем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad (16.52)$$

где линия L проходится *справа налево*, а линия M — *слева направо*.

Интеграл по M в формуле (16.52) идентичен интегралу (16.22), который, как было показано выше, может быть приведен к виду (16.32). Подставляя последнюю формулу в (16.52), находим

$$\begin{aligned} F(\zeta') = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \zeta') \int_L F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta dk_x, \quad \zeta' \in S, \end{aligned} \quad (16.53)$$

где интегрирование по L в обоих интегралах идет *слева направо*.

Формула (16.53) и дает решение поставленной задачи продолжения вниз. Преобразуем эту формулу с помощью спектрального разложения ядра Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i(\zeta - \zeta')} = & -\int_0^{\infty} \exp[ik_x(\zeta - \zeta')] dk_x = -\int_0^{\infty} \exp(ik_x \zeta) \times \\ & \times \exp(-ik_x \zeta') dk_x, \end{aligned} \quad (16.54)$$

где $\text{Im}(\zeta - \zeta') > 0$.

Подставляя (16.54) в (16.53), после некоторых упрощений находим

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x \zeta') \int_L F(\zeta) \exp(ik_x \zeta) d\zeta dk_x, \quad (16.55)$$

где интегрирование по L идет *слева направо*.

В частном случае, когда линия L совпадает с вещественной осью, формула (16.55) записывается в виде

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(ik_x x) dx dk_x, \quad (16.56)$$

или, если положить $\zeta' = x' - id$,

$$F(x' - id) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x x') \exp(-k_x d) \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(ik_x x) dx dk_x. \quad (16.57)$$

Переходя к пространственным спектрам, получаем

$$f(k_x, -d) = \Psi_d(k_x) f(k_x, 0), \quad (16.58)$$

где $\Psi_d(k_x)$ — частотная характеристика пересчета поля на глубину d , в данном случае равная

$$\Psi_d(k_x) = \exp(-k_x d), \quad -\infty < k_x < +\infty. \quad (16.59)$$

16.6. Аналитическое продолжение в области с криволинейными границами

Выше мы рассматривали задачу продолжения функции $F(\zeta)$ с линии L до некоторой горизонтальной прямой M , проходящей выше ближайших к линии L особенностей функции $F(\zeta)$, лежащих в нижней полуплоскости. Однако значительно больший интерес представляет продолжение поля в область, ограниченную снизу кривой линией N (рис. 26, а). В самом деле, при такой постановке можно продолжить поле не только в горизонтальный слой до уровня, отвечающего верхней точке области Γ , занятой источниками поля, но и ниже этого уровня (сбоку от области Γ) и даже под нее (рис. 27, а, б). Методам решения сформулированной выше задачи посвящено большое число публикаций (см., например, работы В. Н. Страхова [1970д, 1971а, б] или М. С. Жданова [1971, 1973а]). При этом в основе почти всех предложенных методов лежит естественная идея использования конформных отображений, позволяющих свести задачу аналитического продолжения в области с криволинейными границами к изученной выше задаче продолжения в области с горизонтальными границами.

Здесь мы опишем один из наиболее простых способов решения поставленной задачи. Рассмотрим вспомогательную плоскость ком-

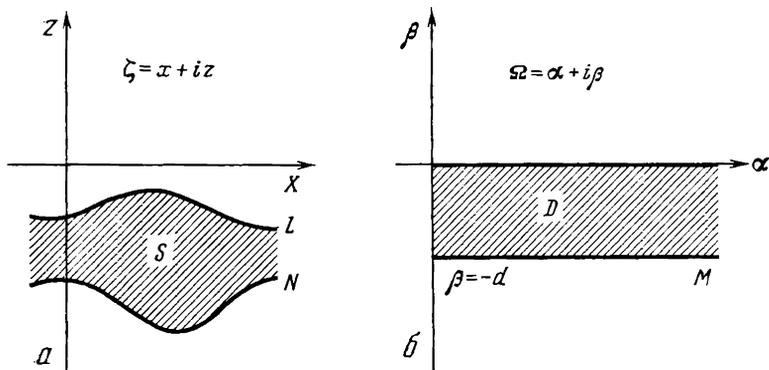


Рис. 26

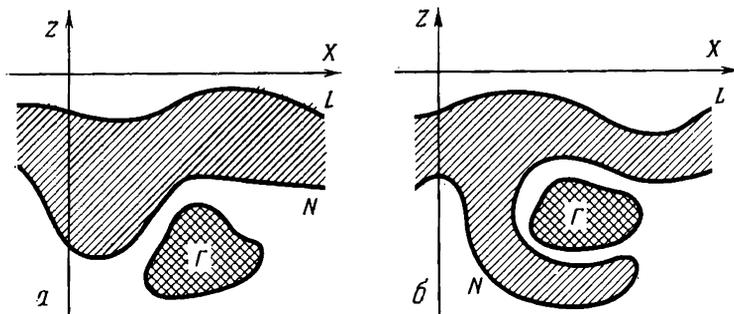


Рис. 27

плесного переменного $\Omega = \alpha + i\beta$ (рис. 26, б). Обозначим через D горизонтальную полосу на плоскости Ω , ограниченную осью α и прямой $\beta = -d$.

Пусть функция $\zeta = \sigma(\Omega)$ осуществляет конформное отображение горизонтальной полосы D на область S , причем так, что ось α переходит в линию L , а прямая $\beta = -d$ — в линию N . Рассмотрим функцию $F(\Omega) = F(\sigma(\Omega))$, получающуюся в результате антиувлечения функции $F(\zeta)$ на плоскость Ω посредством отображения $\sigma(\Omega)$. Функция $F(\Omega)$ аналитична в полосе D в силу аналитичности исходной функции в области S с криволинейными границами, причем так как функция $F(\zeta)$ задана на линии L , то функция $F(\Omega)$ известна на оси α . Следовательно, для продолжения функции $F(\Omega)$ с оси α в область D можно воспользоваться формулой (16.56) и записать

$$\tilde{F}(\Omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_{\alpha}\Omega') \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\alpha) \exp(ik_{\alpha}\alpha) d\alpha dk_{\alpha}, \quad (16.60)$$

где Ω' — прообраз точки ζ' на плоскости Ω :

$$\Omega' = \sigma^{-1}(\zeta') \quad (16.61)$$

и $\sigma^{-1}(\zeta)$ — отображение, обратное к $\sigma(\Omega)$.

Очевидно, что функции $F(\zeta)$ и $\bar{F}(\Omega)$ связаны между собой соотношениями

$$\bar{F}(\Omega) = F(\sigma(\Omega)), \quad F(\zeta) = \bar{F}(\sigma^{-1}(\zeta)). \quad (16.62)$$

С учетом этих соотношений, а также того факта, что $\alpha = \sigma^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in L$, получаем

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_{\alpha}\sigma^{-1}(\zeta')] \int_L \frac{F(\zeta) \exp[ik_{\alpha}\sigma^{-1}(\zeta)]}{(d\sigma/d\alpha)\sigma^{-1}(\zeta)} d\zeta dk_{\alpha}. \quad (16.63)$$

Полученная формула позволяет по значениям комплексно-аналитической функции $F(\zeta)$, заданным на линии L , определить значения этой функции всюду в пределах области S (с криволинейной границей N), где $F(\zeta)$ аналитична.

В частном случае, когда L совпадает с осью X , формула (16.63) упрощается:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_{\alpha}\sigma^{-1}(\zeta')] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) \exp[ik_{\alpha}\sigma^{-1}(x)]}{(d\sigma/d\alpha)\sigma^{-1}(x)} dx dk_{\alpha}. \quad (16.64)$$

16.7. Формула Бейтмена; продолжение комплексной напряженности поля в нижнюю полуплоскость по ее действительной части

Формула (16.64) в случае, когда рассматривается поле $F(\zeta)$, имеющее особенности только в нижней полуплоскости, позволяет аналитически продолжить это поле вниз только по его действительной (или мнимой) части, заданной на оси X .

В самом деле, образуем функцию

$$U(\zeta) = {}^{1/2}[F(\zeta) + \bar{F}(\bar{\zeta})], \quad (16.65)$$

где $F(\zeta)$ — комплексная напряженность плоского поля, источники которого расположены в конечной области Γ нижней полуплоскости (рис. 28).

Очевидно, что функция $U(\zeta)$ аналитична всюду на комплексной плоскости за исключением области Γ и области Γ_m , получающейся путем зеркального отражения Γ относительно действительной оси (см. рис. 28). Кроме того, легко видеть, что

$$U(x) = {}^{1/2}[U(x, 0) + iV(x, 0) + U(x, 0) - iV(x, 0)] = U(x, 0), \quad (16.66)$$

т. е. $U(\zeta)$ есть аналитическое продолжение действительной части $U(x, 0)$ функции $F(\zeta)$ с действительной оси в комплексную область.

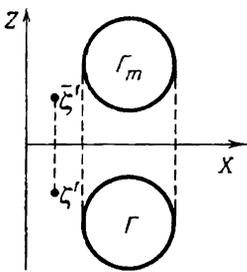


Рис. 28

С другой стороны, согласно (16.65)

$$F(\zeta') = 2U(\zeta') - \bar{F}(\bar{\zeta}'), \quad (16.67)$$

где ζ' — произвольная точка нижней полуплоскости ($\text{Im } \zeta' < 0$), лежащая вне Γ (см. рис. 28). Очевидно, что точка $\bar{\zeta}'$ лежит при этом в верхней полуплоскости, поэтому задача продолжения функции $F(\zeta)$ с действительной оси вниз сводится к продолжению вниз ее действительной части $U(\zeta)$ и продолжению функции $\bar{F}(\zeta)$, сопряженной с $F(\zeta)$, в верхнюю полуплоскость. Последняя

задача легко решается с помощью формулы (16.17):

$$\bar{F}(\zeta') = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx. \quad (16.68)$$

Подставляя (16.68) в (16.67), окончательно записываем

$$F(\zeta') = 2U(\zeta') + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx. \quad (16.69)$$

Формула (16.69) носит название формулы Бейтмена [Bateman, 1946]. Она позволяет восстанавливать функцию $F(\zeta')$ по аналитическому продолжению $U(\zeta')$ ее действительной части, заданной на горизонтальной оси, в комплексную область. При этом функция $U(\zeta')$ в формуле (16.69) может вычисляться на основе формулы (16.56) (при продолжении в горизонтальный слой) или формулы (16.64) (при продолжении в область S с криволинейной границей).

Например, подстановка (16.56) в (16.69) дает

$$F(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \exp(ik_x x) dx dk_x + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \zeta'} dx. \quad (16.70)$$

С другой стороны, согласно (16.54)

$$\frac{1}{i(x - \zeta')} = -\int_0^{\infty} \exp(ik_x x) \exp(-ik_x \zeta') dk_x, \text{ поскольку} \\ \text{Im}(x - \zeta') = -z' > 0.$$

С учетом этого соотношения формула (16.70) упрощается так:

$$F(\zeta') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_x \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \exp(ik_x x) dx dk_x, \quad (16.71)$$

что совпадает с выведенной ранее другим путем формулой (16.48а).

Воспользуемся теперь формулой (16.64) для вычисления $U(\xi')$ в (16.69):

$$F(\xi') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ik_{\alpha}\sigma^{-1}(\xi')] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0) \exp [ik_{\alpha}\sigma^{-1}(x)]}{(d\sigma/d\alpha)\sigma^{-1}(x)} dx dk_{\alpha} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, 0)}{x - \xi'} dx. \quad (16.72)$$

Последняя формула позволяет продолжать комплексную напряженность поля в области нижней полуплоскости с криволинейными границами по значениям ее действительной части $U(x, 0)$ на оси X . Согласно замечанию в п. 16.4 этот результат особенно важен в задачах гравиметрии.

Обратим внимание читателя в заключение этого параграфа на следующий важный факт. Все описанные выше интегральные формулы аналитического продолжения плоского поля в нижнюю полуплоскость дают строгое решение задачи, если мы располагаем точными и непрерывными значениями комплексных напряженностей поля на линии наблюдения L . Однако если попытаться численно реализовать эти формулы, непосредственно применив их к экспериментальным данным, известным лишь в дискретной последовательности точек на линии L и с определенной погрешностью, то мы не сможем получить удовлетворительного результата. Это обусловлено тем, что аналитическое продолжение функций в нижнюю полуплоскость является некорректно поставленной задачей, для которой малые вариации в исходных данных могут приводить к сколь угодно большим вариациям в решении. Для численного решения некорректно поставленных задач необходимо применение специальных регуляризирующих алгоритмов. В частности, при аналитическом продолжении вниз плоских полей такие регуляризирующие алгоритмы могут быть построены на базе интегральных формул, полученных в данном параграфе, однако эти вопросы уже выходят за рамки нашей книги.

В целом же теория решения некорректно поставленных задач составляет сегодня самостоятельный раздел математики. Описанию методов регуляризации посвящены специальные статьи и монографии, к которым мы и отсылаем читателя (см., например, [Тихонов, Арсенин, 1974; Страхов, 1969а, б; Дмитриев, Жданов, 1982] и др.).

АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Глава пятая

ТРЕХМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

17. ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ

В предыдущем разделе мы рассмотрели основные положения аналитической теории двумерных геопотенциальных полей, основанной на аппарате интеграла типа Коши. Однако двумерные (плоские) поля могут служить лишь приближенной моделью реальных, зависящих от трех пространственных координат геофизических полей. В связи с этим чрезвычайно важной задачей теоретической геофизики является обобщение результатов двумерной теории на трехмерный случай. Решению этой задачи как раз и посвящен данный раздел книги.

17.1. Векторные формулировки теоремы Остроградского — Гаусса

Основу аналитического аппарата для исследования трехмерных геопотенциальных полей составляет формула Остроградского — Гаусса, формулируемая для областей пространства, ограниченных гладкими или кусочно-гладкими поверхностями. Напомним, как вводится понятие гладкой поверхности.

Определение 17.1. *Поверхность S в пространстве называется гладкой, если:*

а) *в любой точке на поверхности S к ней можно провести касательную плоскость u , следовательно, нормаль, причем при переходе от одной точки к другой эта нормаль меняется непрерывно (без скачков);*

б) *существует такое фиксированное положительное число $\delta_0 > 0$, что для любой точки A на поверхности S можно провести сферу $O_\delta(A)$ с центром в точке A и радиусом δ ($\delta < \delta_0$), обладающую*

следующим свойством: все прямые линии, параллельные нормали ν , проведенной к поверхности S в точке A , лежащие внутри сферы $O_\delta(A)$, пересекают поверхность S только один раз (рис. 29).

Условие гладкости поверхности S в соответствии с требованием а) позволяет связать с каждой точкой A поверхности S специальную прямоугольную систему координат X, Y, Z , начало которой помещено в точку A , ось Z направлена по нормали ν , а оси X и Y лежат в касательной плоскости (рис. 30). Требование б) показывает, что в этой системе координат уравнение части поверхности Σ , попавшей внутрь сферы $O_\delta(A)$, может быть представлено в виде, разрешенном относительно z : $z=f(x, y)$, где функция f — непрерывно дифференцируема (поскольку согласно а) у S всюду есть нормаль и она непрерывна).

Отметим, что при решении некоторых задач необходимо, чтобы функция $f(x, y)$, описывающая гладкую поверхность S , была бы непрерывно дифференцируема не один, а несколько раз. Поэтому в дальнейшем, говоря о гладкой поверхности, мы будем подразумевать, что функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема нужное число раз.

Определение 17.2. Поверхность S называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких кусков.

Предположим теперь, что кусочно-гладкая поверхность S ограничивает некоторую конечную область D пространства. Пусть $\mathbf{F}(r)$ — векторная функция, непрерывно дифференцируемая всюду в области D вплоть до ее границы. Тогда согласно теореме Остроградского — Гаусса справедлива следующая формула:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (17.1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к S . Доказательство этой формулы можно найти в любом учебнике по математическому

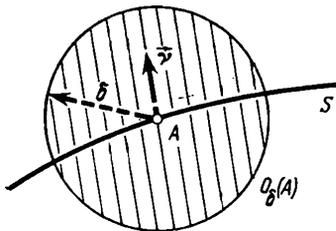


Рис. 29

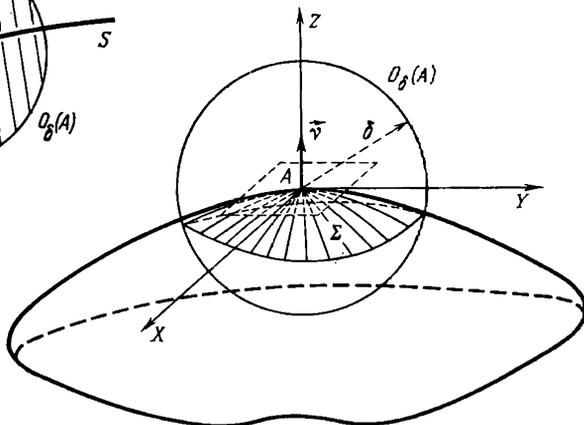


Рис. 30

анализу. Она носит название *первой векторной формулировки теоремы Остроградского — Гаусса*.

Можно привести другие эквивалентные векторные формулировки теоремы Остроградского — Гаусса. Например, положим, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \mathbf{C}, \quad (17.2)$$

где $U(\mathbf{r})$ — непрерывно дифференцируемая в D (вплоть до ее границы S) скалярная функция; \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор.

Подставляя (17.2) в (17.1), находим

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_D \text{grad } U dv = \mathbf{C} \cdot \iint_S U \mathbf{n} ds, \quad (17.3)$$

откуда

$$\mathbf{C} \cdot \left[\iiint_D \text{grad } U dv - \iint_S U \mathbf{n} ds \right] = 0. \quad (17.4)$$

Поскольку выбор вектора \mathbf{C} произволен, то из равенства (17.4) немедленно следует

$$\iiint_D \text{grad } U dv = \iint_S U \mathbf{n} ds. \quad (17.5)$$

Формула (17.5) называется *второй векторной формулировкой теоремы Остроградского — Гаусса*. *Третья векторная формулировка* теоремы Остроградского — Гаусса получается с помощью следующей подстановки:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{C} \times \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (17.6)$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ — непрерывно дифференцируемая в D (вплоть до ее границы S) векторная функция; \mathbf{C} — так же, как и выше, произвольный постоянный вектор.

Подставляя (17.6) в (17.1) и опуская несложные преобразования, аналогичные описанным выше, записываем

$$\iiint_D \text{rot } \mathbf{P} dv = - \iint_S \mathbf{P} \times \mathbf{n} ds. \quad (17.7)$$

Приведенные три эквивалентные векторные формулировки интегральной теоремы Остроградского — Гаусса чрезвычайно важны в теории геофизических полей.

17.2. Векторные формулировки теоремы Стокса

Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L , а $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — векторная функция, непрерывно дифференцируемая всюду на S вплоть до ее границы L . Заддим положительное направление единичного вектора нормали \mathbf{n} к поверхности S и положительное направление единичного вектора касательной $\boldsymbol{\tau}$ к контуру L так, чтобы эти направления были

согласованы в соответствии с правилом правого винта, т. е. чтобы при вращении правого винта в направлении τ острый двигалось в направлении \mathbf{n} . Тогда согласно теореме Стокса справедлива следующая формула:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dl. \quad (17.8)$$

Формула (17.8) носит название *первой векторной формулировки теоремы Стокса*. Ее доказательство можно найти в соответствующих курсах векторного анализа.

Зададим теперь поле \mathbf{F} соотношением (17.2):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{C}, \quad (17.9)$$

где \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор. Подставляя (17.9) в (17.8), после простых преобразований находим

$$-\mathbf{C} \iint_S [\operatorname{grad} U \times \mathbf{n}] \, ds = \mathbf{C} \int_L U \boldsymbol{\tau} \, dl, \quad (17.10)$$

откуда в силу произвольности в выборе вектора \mathbf{C}

$$-\iint_S [\operatorname{grad} U \times \mathbf{n}] \, ds = \int_L U \boldsymbol{\tau} \, dl. \quad (17.11)$$

Формула (17.11) называется *второй векторной формулировкой теоремы Стокса*.

17.3. Аналог интегральной формулы Коши

Получим теперь соотношение, являющееся трехмерным аналогом интегральной формулы Коши. Для этого представим векторную функцию $\Phi(\mathbf{r})$ в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} h) \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} P \times [\operatorname{grad} h \times \mathbf{C}], \quad (17.12)$$

где $h(\mathbf{r})$, $P(\mathbf{r})$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые в D (вплоть до ее границы S) функции; \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор. Вычисления показывают, что

$$\operatorname{div} \Phi = \mathbf{C} \cdot (\Delta P \operatorname{grad} h + \Delta h \operatorname{grad} P), \quad (17.13a)$$

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C} \cdot \{(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} P) \operatorname{grad} h + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} P] \times \operatorname{grad} h\} = \\ &= \mathbf{C} \cdot \{(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} h) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} h] \times \operatorname{grad} P\}. \end{aligned} \quad (17.13b)$$

Применяя к векторной функции $\Phi(\mathbf{r})$ формулу (17.1) и учитывая, так же как и выше, что выбор вектора \mathbf{C} произволен, получаем следующие два следствия из теоремы Остроградского — Гаусса:

$$\begin{aligned} \iiint_D (\Delta P \operatorname{grad} h + \Delta h \operatorname{grad} P) \, dv = \\ = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} P) \operatorname{grad} h + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} P] \times \operatorname{grad} h\} \, ds, \end{aligned} \quad (17.14a)$$

$$\begin{aligned} \iiint_D (\Delta P \operatorname{grad} h + \Delta h \operatorname{grad} P) dv = \\ = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} h) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} h] \times \operatorname{grad} P\} ds. \end{aligned} \quad (17.146)$$

Полагаем в (17.146), что h — функция, гармоническая в D и непрерывная вместе со своей производной вплоть до границы S , $P = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -1/4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — фундаментальная функция Грина для уравнения Лапласа, т. е.

$$\Delta h = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in D, \quad (17.15a)$$

$$\Delta P = \Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (17.156)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — сингулярная дельта-функция Дирака. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} h) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} h] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \\ = \begin{cases} \operatorname{grad} h(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.16)$$

Здесь дифференцирование и интегрирование в левой части (17.16) ведется по переменной \mathbf{r} , а \mathbf{r}' — фиксированная точка. Эта формула по своей структуре весьма схожа с интегральной формулой Коши (1.1). В самом деле, так же как и последняя, она позволяет восстанавливать значения полей внутри области D по их значениям на границе области, а вне D интеграл обращается в нуль.

Указанное сходство позволяет назвать формулу (17.16) *трехмерным аналогом интегральной формулы Коши*. Более того, оказывается, что это на первый взгляд чисто внешнее сходство отражает глубокое внутреннее единство данных соотношений, поскольку в двумерной ситуации формула (17.16) сводится к (1.1).

17.4. Связь между трехмерным аналогом и классической интегральной формулой Коши

Введем в пространстве правую декартову систему координат XYZ . Пусть S — цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Y , и функция h не зависит от y . Тогда $\mathbf{n} = (n_x, 0, n_z)$, $\operatorname{grad} h = (h_x, 0, h_z)$, а формула (17.16) переписывается в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} h) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} h] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \\ = \frac{-dx}{4\pi} \int_L [(n_x h_x + n_z h_z)(x' - x) + (n_z h_x - n_x h_z)(z' - z)] \times \end{aligned} \quad (17.17)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dl - \frac{\mathbf{d}_z}{4\pi} \int_L [(n_x h_x + n_z h_z)(z' - z) + \\ & + (n_x h_z - n_z h_x)(x' - x)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dl = B_x(\mathbf{r}') \mathbf{d}_x + B_z(\mathbf{r}') \mathbf{d}_z, \end{aligned}$$

где $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_z$ — единичные орты осей X и Z ; L — контур поперечного сечения поверхности S плоскостью XZ ;

$$B_{x(z)}(\mathbf{r}') = \begin{cases} h_{x(z)}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (17.18)$$

Как уже отмечалось в п. 7.1, декартовы компоненты единичного вектора $\mathbf{n}(n_x, 0, n_z)$ внешней нормали к L связаны с дифференциалами dx и dz простыми соотношениями (7.2):

$$n_x dl = dz, \quad n_z dl = -dx. \quad (17.19)$$

Кроме того, в силу (5.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{dy}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{2}{(x-x')^2 + (z-z')^2} \quad (17.20)$$

Подставляя (17.19) и (17.20) в (17.17), записываем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(x-x')(h_z dx - h_x dz) + (z-z')(h_x dx + h_z dz)}{(x-x')^2 + (z-z')^2} = \\ & = \begin{cases} h_x(x', z'), & (x', z') \in D, \\ 0, & (x', z') \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (17.21a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(z-z')(h_z dx - h_x dz) - (x-x')(h_x dx + h_z dz)}{(x-x')^2 + (z-z')^2} = \\ & = \begin{cases} h_z(x', z'), & (x', z') \in D, \\ 0, & (x', z') \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (17.21б) \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части равенства (17.21a) на i и сложим с (17.21б), тогда после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(-h_x + ih_z)[(x-x') - i(z-z')](dx + idz)}{(x-x')^2 + (z-z')^2} = \\ & = \begin{cases} -i[-h_x(x', z') + ih_z(x', z')], & (x', z') \in D, \\ 0, & (x', z') \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (17.22) \end{aligned}$$

Введем на плоскости XZ комплексную переменную $\zeta = x + iz$ и обозначим через $f(\zeta)$ комплексную функцию:

$$f(\zeta) = -h_x(x, z) + ih_z(x, z). \quad (17.23)$$

Очевидно, что функция $f(\zeta)$ аналитична в D и непрерывна в \bar{D} , так как h_x и h_z в силу гармоничности h связаны между собой условиями Коши — Римана.

Подставляя (17.23) в (17.22), получаем классическую интегральную формулу Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{-h_x + ih_z}{(x-x') + i(z-z')} d(x+iz) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} f(\zeta'), & \zeta' \in D, \\ 0, & \zeta' \in C\bar{D}. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.24)$$

Таким образом, (17.16) является естественным обобщением формулы Коши на трехмерный случай, поэтому ее и можно называть *трехмерным аналогом интегральной формулы Коши*.

Отметим в заключение этого пункта, что (17.16) можно переформулировать следующим образом. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — потенциальное в конечной области D векторное поле, все источники которого лежат вне D , т. е. \mathbf{F} — лапласово поле в D , непрерывно дифференцируемое вплоть до границы S . Тогда, полагая в (17.16)

$$\text{grad } h = \mathbf{F}, \quad (17.25)$$

записываем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \\ = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases} \end{aligned} \quad (17.26)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль по отношению к области D .

Таким образом, формула (17.26) *решает краевую задачу для лапласова векторного поля* \mathbf{F} .

17.5. Теорема Гаусса о гармонических функциях

Рассмотрим частный случай, когда $S = S_R$ — сферическая поверхность радиуса R с центром в точке \mathbf{r}_0 . Тогда из формулы (17.26) вытекает

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds. \quad (17.27)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (17.27), воспользовавшись тем, что на поверхности сферы S_R

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{R} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (17.28a)$$

$$\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{R^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \quad (17.28b)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \\ = \frac{1}{R^4} \{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})) + \\ + \mathbf{F}((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}))\} = - \frac{\mathbf{F}}{R^2}. \end{aligned} \quad (17.29)$$

Следовательно, формула (17.27) записывается в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} \mathbf{F}(\mathbf{r}) ds, \quad (17.30)$$

откуда для декартовых компонент векторного поля \mathbf{F} получаем

$$F_{x(yz)}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} F_{x(yz)}(\mathbf{r}) ds. \quad (17.31)$$

Учитывая, что в силу (17.25) все скалярные компоненты поля \mathbf{F} есть гармонические функции, соотношение (17.31) можно записать так:

$$U(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} U(\mathbf{r}) ds, \quad (17.32)$$

где U — любая гармоническая внутри сферы S_R функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области \bar{D}_R , ограниченной сферой.

Соотношение (17.32), выражающее тот факт, что значение гармонической функции в центре сферы совпадает со средним арифметическим ее значений по самой сфере, называется теоремой Гаусса о гармонических функциях.

17.6. Аналог формулы Коши для бесконечной области

Предположим теперь, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — лапласово поле всюду в бесконечной области $S\bar{D}$ (включая бесконечно удаленную точку), непрерывно дифференцируемое вплоть до границы S . Тогда нетрудно построить формулу типа (17.26) и для бесконечной области $S\bar{D}$. В самом деле, зафиксируем произвольную точку \mathbf{r}' и проведем из нее как из центра сферу $O_R(\mathbf{r}')$ столь большого радиуса R , чтобы

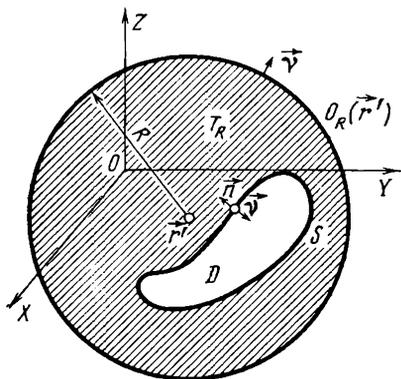


Рис. 31

область D оказалась целиком внутри $O_R(\vec{r}')$. Обозначим через T_R область, заключенную между $O_R(\vec{r}')$ и S (рис. 31). Применим к области T_R формулу (17.26):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \right. \\
 & \left. + [\mathbf{v} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds - \\
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_{O_R(\vec{r}')} \left\{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \right. \\
 & \left. + [\mathbf{v} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds = \\
 & = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in T_R, \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}' \in D, \end{cases} \quad (17.33)
 \end{aligned}$$

где \mathbf{v} — нормаль к поверхностям $O_R(\vec{r}')$ и S , внешняя по отношению к области T_R . На поверхности сферы $O_R(\vec{r}')$ выполняются соотношения, аналогичные (17.28а), (17.28б):

$$\mathbf{v} = (1/R)(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (17.34a)$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^3}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (17.34б)$$

С учетом этих соотношений, аналогично тому, как это было сделано в п. 17.5, интеграл по $O_R(\vec{r}')$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_{O_R(\vec{r}')} \left\{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{v} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds = \\
 & = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{O_R(\vec{r}')} \mathbf{F}(\mathbf{r}) ds = I_R. \quad (17.35)
 \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ равномерно по \mathbf{r} стремится к пределу $\mathbf{F}(\infty)$: $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\infty)$. Тогда имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \mathbf{F}(\infty). \quad (17.36)$$

Таким образом, переходя в (17.33) к пределу при $R \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds = \\
 & = \begin{cases} -\mathbf{F}(\mathbf{r}') + \mathbf{F}(\infty), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \\ \mathbf{F}(\infty), & \mathbf{r}' \in D, \end{cases} \quad (17.37)
 \end{aligned}$$

где учтено, что $\mathbf{v} = -\mathbf{n}$. Формула (17.37) является *трехмерным аналогом формулы Коши (1.2) для бесконечной области*.

17.7. Трехмерный аналог формул Помпей

Получим в заключение данного параграфа одно важное соотношение для потенциального поля, которое можно рассматривать как обобщение на трехмерный случай формул Помпей (см. п. 7.2).

Пусть \mathbf{F} — потенциальное в области D поле, удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = q, \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \mathbf{r} \in D. \quad (17.38)$$

Положив в (17.14а) и (17.14б)

$$\operatorname{grad} h = \mathbf{F}, P = -1/4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \quad (17.39)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (17.40a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}] \times \mathbf{F} \right\} ds + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (17.40б)
 \end{aligned}$$

Формулы (17.40а), (17.40б) и представляют собой *трехмерные аналоги формул Помпей*. Эти формулы дают решение уравнений (17.38) в области D :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\mathbf{r}') = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D q(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv, \quad \mathbf{r}' \in D, \quad (17.41a)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}') = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{F} + \left[\mathbf{n} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{F} \right\} ds + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D q(\mathbf{r}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv, \mathbf{r}' \in D. \end{aligned} \quad (17.416)$$

Если поле \mathbf{F} — лапласово в D , т. е. $\text{div} \mathbf{F} = 0$, $\text{rot} \mathbf{F} = 0$, то из (17.40а) немедленно следует трехмерная интегральная формула Коши (17.16).

18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

В данном параграфе мы определим понятие трехмерного аналога интеграла типа Коши и покажем, что его свойства во многом аналогичны свойствам классического интеграла Коши, изученным в параграфе 2. При этом, так же как и в классическом случае, основным вопросом будет изучение поведения аналога интеграла типа Коши на самой поверхности интегрирования и вблизи нее.

18.1. Понятие трехмерного аналога интеграла типа Коши

Трехмерный аналог интеграла типа Коши конструируется на базе формул (17.16). Прежде всего напомним, как определяются операторы двумерного дифференцирования (grad_S , div_S , rot_S) полей, заданных на поверхности S (сравните с формулами (4.15) — (4.17) п. 4.3):

$$\text{grad}_S h = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C h \mathbf{v} dl, \quad (18.1)$$

$$\text{div}_S \mathbf{h}_\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{v} dl,$$

$$\text{rot}_S \mathbf{h}_\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}}{\Delta S} \oint_C \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{l} dl,$$

где h — скалярное поле; \mathbf{h}_τ — тангенциальное по отношению к поверхности S векторное поле; C — контур, ограничивающий область ΔS поверхности S ; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S ; \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к C , лежащий на S ; \mathbf{l} — единичный вектор, направленный по касательной к C ; векторы \mathbf{n} , \mathbf{v} , \mathbf{l} образуют правую тройку, т. е. $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{l}$.

Пусть теперь на S задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\Phi = \Phi_n + \Phi_\tau$, удовлетворяющее условию

$$\text{rot}_S \Phi_\tau \equiv 0, \quad (18.2)$$

где φ_{τ} — тангенциальная часть Φ ; φ_n — нормальная часть Φ . Запишем следующее выражение:

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \Phi) = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \Phi) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \Phi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds. \quad (18.3)$$

Очевидно, что (18.3) имеет смысл во всех точках пространства, не принадлежащих S . Преобразуем (18.3), воспользовавшись очевидным равенством

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

и вынося grad' из-под знака интеграла¹:

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \Phi) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \Phi_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds. \quad (18.4)$$

Выражение (18.4) позволяет записать уравнения векторного поля \mathbf{C}^S . В самом деле, дивергенция \mathbf{C}^S равна

$$\operatorname{div}' \mathbf{C}^S = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\mathbf{n} \cdot \Phi_n) \Delta' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds \equiv 0 \text{ при } \mathbf{r}' \notin S. \quad (18.5)$$

Вычислим теперь ротор \mathbf{C}^S :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' \mathbf{C}^S &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \operatorname{div}' \frac{\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds \text{ при } \mathbf{r}' \notin S. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' \frac{[\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot [\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}] = -\operatorname{grad}_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot [\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}] = \\ &= \frac{\operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \operatorname{div}_S \left[\mathbf{n} \times \frac{\Phi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \end{aligned} \quad (18.7)$$

В силу (18.1) и (18.2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}] &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C [\mathbf{n} \times \Phi_{\tau}] \cdot \mathbf{v} dl = \\ &= -\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \Phi_{\tau} \cdot \mathbf{l} dl = -\operatorname{rot}_S \Phi_{\tau} \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \end{aligned} \quad (18.8)$$

¹ Здесь и всюду ниже штрих у операторов grad , div , rot , Δ означает дифференцирование по \mathbf{r}'

Аналогично

$$\operatorname{div}_S \left[\mathbf{n} \times \frac{\varphi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = - \operatorname{rot}_S \left(\frac{\varphi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{n} = - \operatorname{rot} \left(\frac{\varphi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (18.9)$$

Подставляя (18.8) и (18.9) в (18.7) и затем в (18.6), получаем

$$\operatorname{rot}' \mathbf{C}^{S'} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \operatorname{rot} \frac{\varphi_{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \text{ при } \mathbf{r}' \notin S, \quad (18.10)$$

так как в силу теоремы Стокса (17.8) поверхностный интеграл в правой части (18.10) сводится к криволинейному интегралу по границе S , а S — замкнутая поверхность.

Таким образом, всюду вне S функция \mathbf{C}^S описывает лапласово векторное поле

$$\operatorname{div} \mathbf{C}^S = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{C}^S = 0 \quad (18.11)$$

и скалярные компоненты \mathbf{C}^S — суть гармонические функции (в общем случае различные по разные стороны от S). Указанное свойство выражения (18.3), а также то обстоятельство, что в двумерной ситуации правая часть (18.3) сводится к комплексному интегралу типа Коши, позволяют назвать (18.3) *трехмерным аналогом интеграла типа Коши*, а функцию φ — его *векторной плотностью*.

В частном случае, когда $\varphi(\mathbf{r})$ есть граничные значения на S градиента гармонической внутри области D функции, то согласно (17.26)

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (18.12)$$

где \overline{CD} — бесконечная область, дополняющая замкнутую область \overline{D} до всего пространства.

Отметим, что понятие аналога интеграла типа Коши легко распространяется на случай, когда поверхность интегрирования S простирается в бесконечность. При этом, однако, требуется, так же как и в двумерном случае (см. п. 2.5), изучение поведения функций — плотностей интеграла типа Коши — на бесконечности. Указанное обобщение результатов п. 2.5 на трехмерный случай дано в п. 19.4. Подчеркнем также, что в данном выше определении аналога интеграла типа Коши существенно, что S — замкнутая поверхность (которая может замыкаться, однако, и через бесконечно удаленную точку).

Отметим также некоторые простые свойства интеграла типа Коши, непосредственно вытекающие из его определения (18.3):

а) если S_1 и S_2 — две поверхности, то

$$\mathbf{C}^{S_1}(\mathbf{r}'; \varphi) + \mathbf{C}^{S_2}(\mathbf{r}'; \varphi) = \mathbf{C}^{S_1 \cup S_2}(\mathbf{r}'; \varphi);$$

б) если Φ и Ψ — две векторные функции, заданные на S и удовлетворяющие условию (18.2), то

$$C^S(r'; \Phi) + C^S(r'; \Psi) = C^S(r'; \Phi + \Psi);$$

в) $C^S(r'; \lambda\Phi) = \lambda C^S(r'; \Phi)$, где $\lambda = \text{const}$.

Свойства б) и в) отражают линейность интеграла типа Коши относительно его плотности.

В заключение этого пункта отметим, что понятие трехмерного аналога интеграла типа Коши было введено впервые Моисилом, Теодореско и А. В. Бицадзе [Бицадзе, 1953, 1972]. Метод конструирования аналогов интеграла типа Коши, излагаемый в данной книге, развит в работах автора [Жданов, 1973б, 1974, 1975а, 1976а, б, 1979; Zhdanov, 1980b]. Близкий подход к решению названной проблемы содержится также в работах Колбенгайера [1976, 1978], Варговой [Vargova, 1977] и Ситаровой [1977], в которых трехмерные задачи теории потенциала исследуются с помощью четырехкомпонентных векторов, аналитических, согласно Моисила и Теодореско [Бицадзе, 1972].

18.2. Вычисление сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши

Интеграл типа Коши (18.3) в тех случаях, когда точка $r' = r_0$ лежит на поверхности S , представляет собой несобственный интеграл, так как подынтегральное выражение при $r = r_0$ обращается в бесконечность. Этот несобственный интеграл может быть вычислен при помощи специального приема. Обозначим через S_ρ часть поверхности S вне сферы O_ρ радиуса ρ с центром в точке r_0 . Несобственный интеграл по поверхности S может быть вычислен как предел (если он существует) соответствующих интегралов по поверхностям S_ρ при $\rho \rightarrow 0$:

$$C^S(r_0; \Phi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} C^{S_\rho}(r_0; \Phi). \quad (18.13)$$

Этот предел мы будем называть, следуя двумерному случаю (п. 2.2), *сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши*. Главное значение интеграла будем обозначать тем же символом, что и обычный интеграл, подразумевая, что если интеграл не имеет обычного смысла, то рассматривается его главное значение. Расчетные формулы при этом зависят от типа точки $r_0 \in S$, в которой вычисляется сингулярный интеграл.

В дальнейшем будем предполагать, что кусочно-гладкая поверхность S состоит из N гладких кусков Γ_i , $i=1, 2, \dots, N$, ограниченных замкнутыми контурами γ_i соответственно. Тогда все точки, принадлежащие внутренним частям Γ_i , являются, очевидно, обыкновенными точками поверхности S , т. е. в этих точках существуют касательные плоскости к поверхности. Точки же, принадлежащие контурам γ_i , могут оказаться особыми точками поверхности S ,

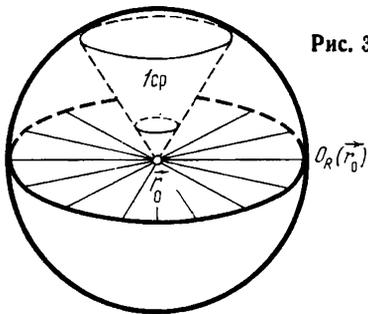
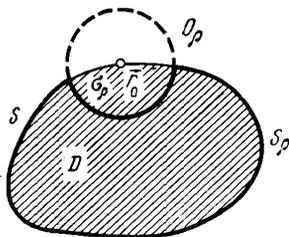


Рис. 32

Рис. 33



т. е. в этих точках поверхность S может не иметь касательных плоскостей.

Рассмотрим какую-либо особую точку g_0 поверхности S , являющуюся точкой соприкосновения гладких кусков $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \Gamma_{j_3}, \dots, \Gamma_{j_m}$. В пределах каждого куска Γ_{j_k} можно провести отрезки гладких кривых, лежащих на S и заканчивающихся в точке g_0 . Построив в точке g_0 односторонние касательные ко всем проведенным отрезкам гладких кривых, получим коническую поверхность с вершиной в точке g_0 . Обозначим через $\theta(g_0)$ величину телесного угла (в стерадианах), образованного построенной конической поверхностью (рис. 32).

Дадим следующие определения. Будем называть особую точку g_0 *угловой точкой*, если угол $\theta(g_0)$ отличен от 0 и 4π . Назовем особую точку g_0 *точкой возврата*, если угол $\theta(g_0)$ равен нулю или 4π . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только двух перечисленных выше типов особых точек. Отметим, что совокупности угловых точек и точек возврата могут образовывать на поверхности S угловые линии и ребра возврата соответственно.

Вернемся теперь к проблеме вычисления сингулярного интеграла (18.13). Мы покажем, что для существования интеграла (18.13) в смысле главного значения по Коши при любом $g_0 \in S$ достаточно потребовать, чтобы скалярные компоненты векторной функции $\Phi(\mathbf{r})$ как функции трех переменных удовлетворяли условию Гельдера всюду на S (см. п. 2.1), т. е. чтобы существовали положительные константы $A_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z; 0 < \lambda_{\alpha,\beta} \leq 1$), такие, что

$$|\Phi_\alpha(x'', y'', z'') - \Phi_\alpha(x', y', z')| \leq A_{\alpha x} |x'' - x'|^{\lambda_{\alpha x}} + \\ + A_{\alpha y} |y'' - y'|^{\lambda_{\alpha y}} + A_{\alpha z} |z'' - z'|^{\lambda_{\alpha z}}, \quad (18.14)$$

где $\alpha = x, y, z$; Φ_x, Φ_y, Φ_z — декартовы компоненты Φ .

Действительно, обозначим через σ_p часть сферы O_p , принадлежащую области D (рис. 33; область D на чертеже заштрихована). В качестве плотности $\Psi(\mathbf{r})$ интеграла типа Коши возьмем постоянное векторное поле, равное значению Φ в точке g_0 : $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Phi(g_0)$. Тогда интеграл типа Коши с указанной плотностью Ψ , вычисленный вдоль замкнутой поверхности, образованной S_p и частью сфе-

ры σ_ρ (рис. 33), в силу (18.12) равен нулю: $C^{S_\rho U\sigma_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}) = C^{S_\rho U\sigma_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) = 0$. Следовательно, выражение, стоящее в (18.13) под знаком предела, можно преобразовать, воспользовавшись свойствами а), б) п. 18.1, следующим образом:

$$\begin{aligned} C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) &= C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) - C^{S_\rho U\sigma_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) = \\ &= C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) - C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Условие Гельдера (18.14) обеспечивает существование обычного равномерно сходящегося несобственного интеграла

$$C^S(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)). \quad (18.16)$$

Действительно, если \mathbf{r}_0 принадлежит внутренней части Γ_i , то предел (18.16) существует как обыкновенный несобственный интеграл, так как $S_\rho \rightarrow S$ при $\rho \rightarrow 0$. Если же точка \mathbf{r}_0 является точкой соприкосновения m гладких кусков $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \Gamma_{j_3}, \dots, \Gamma_{j_m}$, то, разбивая интеграл под знаком предела на m интегралов по различным гладким кускам $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \dots, \Gamma_{j_m}$ и учитывая условия Гельдера, вычислим m обыкновенных несобственных интегралов, которые в сумме вновь дают соотношение (18.16).

Вычислим теперь предел второго интеграла в (18.15):

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} C^{S_\rho}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_\rho} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Очевидно, что на поверхности части сферы σ_ρ единичный вектор внешней нормали равен

$$\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / \rho. \quad (18.18a)$$

В то же время

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{\rho^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \quad (18.18b)$$

С учетом (18.18a), (18.18b) преобразуем подынтегральное выражение в (18.17):

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \\ = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \mathbf{n} \left(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) + \\ + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) \left(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) &= \frac{1}{\rho^4} \{ ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0)) (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - \\ - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \} &= -\frac{1}{\rho^2} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (18.19)$$

Подставляя (18.19) в (18.17), записываем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C^{\sigma\rho}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}_0)) = \frac{1}{4\pi} \varphi(\mathbf{r}_0) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\sigma_\rho|}{\rho^2}, \quad (18.20)$$

где $|\sigma_\rho|$ — площадь поверхности части сферы σ_ρ (см. рис. 33). Но предел отношения площади части сферы $|\sigma_\rho|$ к ρ^2 при $\rho \rightarrow 0$ равен величине телесного угла $\theta(\mathbf{r}_0)$ встерадианах: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\sigma_\rho|}{\rho^2} = \theta(\mathbf{r}_0)$. Следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C^{\sigma\rho}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}_0)) = \frac{1}{4\pi} \theta(\mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (18.21)$$

Переходя теперь к пределу при $\rho \rightarrow 0$ в (18.15) и учитывая (18.16) и (18.21), окончательно получаем

$$C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{4\pi} \theta(\mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (18.22)$$

Формула (18.22) позволяет вычислять значение сингулярного интеграла типа Коши как в обыкновенных (регулярных), так и в особых точках поверхности S . В частном случае, если \mathbf{r}_0 — обыкновенная точка, то $\theta(\mathbf{r}_0) = 2\pi$ и (18.22) принимает вид

$$C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (18.23)$$

18.3. Трехмерные аналоги формул Сохоцкого — Племеля

Для лапласова векторного поля, определяемого интегралом типа Коши, сама замкнутая поверхность интегрирования S является особой поверхностью. Важное значение для теории потенциала, так же как и в двумерном случае, имеет вопрос о поведении аналогов интеграла типа Коши при приближении к поверхности S с различных ее сторон. Для решения поставленной задачи обозначим через \mathbf{r}_0 произвольную фиксированную точку на поверхности S и представим интеграл (18.3) следующим образом:

$$C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r})) = \mathbf{A}(\mathbf{r}') + C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}_0)), \quad (18.24)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — некоторая вспомогательная функция, определяемая выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)). \quad (18.25)$$

Как видим, справедливость представления (18.24) непосредственно вытекает из линейности аналога интеграла типа Коши относительно его плотности.

Так же как и в параграфе 2, условимся обозначать предельные значения функций $C^S(\mathbf{r}'; \varphi)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ при стремлении точки \mathbf{r}' изнутри конечной области D , ограниченной S , к точке $\mathbf{r}_0 \in S$ через

$C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi)$, $A^+(\mathbf{r}_0)$, а извне — через $C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi)$, $A^-(\mathbf{r}_0)$. Чтобы подчеркнуть направление перехода к пределу, будем писать соответственно $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+$ и $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-$. На основе трехмерного аналога интегральной формулы Коши (17.16) (или (17.26)) и соотношения (18.22) можно записать

$$C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}_0)) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}_0), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in CD, \\ \frac{1}{4\pi} \theta(\mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0), & \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 \in S. \end{cases} \quad (18.26)$$

Отсюда видно, что интеграл $C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}_0))$ имеет различные предельные значения при $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0$ извне и изнутри области D :

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}_0)) = \varphi(\mathbf{r}_0), \quad \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} C^S(\mathbf{r}'; \varphi(\mathbf{r}_0)) = 0. \quad (18.27)$$

Так же как и в двумерном случае, нетрудно показать, что если плотность интеграла типа Коши $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет на S условию Гельдера (18.14), то векторная функция $A(\mathbf{r}')$, определяемая формулой (18.25), непрерывна всюду в пространстве, в частности, она непрерывна при переходе через поверхность S , т. е. при приближении \mathbf{r}' к \mathbf{r}_0 с любой стороны поверхности S функция $A(\mathbf{r}')$ имеет одно и то же предельное значение, равное согласно (18.22)

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^\pm} A(\mathbf{r}') = A(\mathbf{r}_0) = C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) - \frac{1}{4\pi} \theta(\mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0), \quad (18.28)$$

где $C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}))$ — сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши.

Рассматривая теперь пределы выражения (18.24) при стремлении $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0$ по пути, лежащему внутри области D , и по пути, лежащему снаружи области D , с учетом (18.27) и (18.28) получаем

$$\begin{aligned} C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) &= C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) + \left(1 - \frac{\theta(\mathbf{r}_0)}{4\pi}\right) \varphi(\mathbf{r}_0), \\ C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) &= C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) - \frac{\theta(\mathbf{r}_0)}{4\pi} \varphi(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (18.29)$$

Таким образом, трехмерный аналог интеграла типа Коши с плотностями, удовлетворяющими условию Гельдера, имеет предельные значения при приближении к поверхности S с каждой ее стороны. Однако эти предельные значения различны, так что при переходе через поверхность S происходит скачок. Величина скачка, как следует из формул (18.29), равна плотности $\varphi(\mathbf{r}_0)$:

$$C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi) - C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (18.30)$$

Соотношение (18.30) справедливо как в обыкновенных точках на поверхности S , так и в угловых точках и точках возврата. Отме-

тим, что из (18.29) вытекает также следующее представление для сингулярного интеграла в смысле главного значения по Коши:

$$C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = 1/2 [C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) + C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}))] + (\theta(\mathbf{r}_0)/4\pi - 1/2) \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (18.31)$$

В частном случае, когда \mathbf{r}_0 — обыкновенная точка поверхности S , имеем $\theta(\mathbf{r}_0) = 2\pi$ и (18.29) и (18.31) записываются в виде

$$C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) + 1/2 \varphi(\mathbf{r}_0), \quad (18.32a)$$

$$C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) - 1/2 \varphi(\mathbf{r}_0); \quad (18.32b)$$

$$C^S(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) = 1/2 [C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r})) + C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi(\mathbf{r}))]. \quad (18.33)$$

Формулы (18.29) — (18.33) представляют собой трехмерные аналоги формул Сохоцкого — Племеля (2.21a), (2.22b), (2.28). Они играют столь же важную роль в теории трехмерных интегралов типа Коши, как и классические формулы в теории функций комплексного переменного.

19. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Трехмерные аналоги формул Сохоцкого — Племеля позволяют обобщить на пространство трех измерений целый ряд теорем комплексного анализа, касающихся свойств краевых значений аналитических функций (см. параграф 3).

19.1. Интегральные краевые условия для лапласова поля

Рассмотрим некоторую область D в пространстве, ограниченную гладкой поверхностью S , и зададим на S произвольное непрерывное векторное поле φ . Сформулируем следующую задачу. Существует ли в области D (\overline{CD}) такое потенциальное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, источники которого находятся вне \overline{D} (вне CD) и для которого заданное поле φ является предельным значением на поверхности S ? Иными словами, существует ли такое лапласово поле \mathbf{F} в D (\overline{CD}), краевыми значениями которого является функция $\varphi(\mathbf{r})$? Эта задача аналогична задаче восстановления комплексно-аналитической функции внутри плоской области Γ по значениям непрерывной функции на границе области и, так же как и последняя, в общем случае не имеет решения.

В самом деле, по условию задачи искомое поле в области D должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (19.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (19.2)$$

$$\mathbf{F}|_S = \varphi. \quad (19.3)$$

Введем в пространстве декартову систему координат (X, Y, Z) и запишем условия (19.1) и (19.3) для декартовых компонент поля:

$$\Delta F_x(\mathbf{r})=0 \text{ при } \mathbf{r} \in D, F_x|_S = \varphi_x, \quad (19.4a)$$

$$\Delta F_y(\mathbf{r})=0 \text{ при } \mathbf{r} \in D, F_y|_S = \varphi_y, \quad (19.4b)$$

$$\Delta F_z(\mathbf{r})=0 \text{ при } \mathbf{r} \in D, F_z|_S = \varphi_z. \quad (19.4в)$$

Очевидно, что соотношения (19.4a)—(19.4в) описывают задачи Дирихле для скалярных компонент поля и каждая из них может быть решена независимо одна от другой. При этом, однако, в случае произвольного задания компонент φ_x , φ_y и φ_z нет никакой гарантии, что будет выполняться условие потенциальности поля — соотношение (19.2). В самом деле, зададим в качестве примера функцию φ следующим образом:

$$\varphi_x = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad \varphi_y = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}, \quad \varphi_z = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|},$$

где $\mathbf{r} \in S$, а точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ лежат вне области \bar{D} . Тогда легко видеть, что решением системы (19.4a)—(19.4в) является следующее векторное поле:

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}, \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \right\}, \quad (19.5)$$

которое, очевидно, не удовлетворяет уравнению (19.2). Таким образом, для того чтобы функция $\varphi(\mathbf{r})$ была бы краевым значением на поверхности S некоторого поля, лапласова в D ($C\bar{D}$), необходимо, чтобы она удовлетворяла на S определенным условиям. Указанные условия будем называть краевыми условиями для лапласова поля. Найдем эти условия. Отметим прежде всего тот очевидный факт, что одним из необходимых краевых условий для лапласова векторного поля является выполнение соотношения (18.2), $\text{rot}_S \varphi_x \equiv 0$ на S . Однако одного этого условия заведомо недостаточно, поскольку оно оставляет неопределенность в выборе нормальной составляющей поля φ_n на S .

Рассмотрим аналог интеграла типа Коши (18.3) с векторной плотностью $\varphi(\mathbf{r})$, непрерывной по Гельдеру. Если $\varphi(\mathbf{r})$ есть краевое значение лапласова в D поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, то согласно формуле (18.12)

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi) \equiv 0 \text{ для всех } \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \quad (19.6)$$

Докажем теперь достаточность условия (19.6) совместно с (18.2), для того чтобы $\varphi(\mathbf{r})$ было бы краевым значением на S поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, определяемого формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi), \quad \mathbf{r}' \in D, \quad (19.7)$$

лапласова в D и непрерывно продолжимого на S из D .

В самом деле, согласно (19.6) функция $\mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \varphi)$ непрерывно продолжима на S снаружи области D :

$$\mathbf{C}^{S^-}(\mathbf{r}_0; \varphi) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi) = 0. \quad (19.8)$$

С другой стороны, в соответствии с аналогом формул Сохоцкого — Племеля (18.30) функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ непрерывно продолжима на S изнутри области D , причем

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{S+}(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0). \quad (19.9)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 19.1. *Для того чтобы непрерывная по Гельдеру векторная функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$, заданная на гладкой замкнутой поверхности S и имеющая там дифференцируемые тангенциальные компоненты, была краевым значением лапласова в D векторного поля, необходимо и достаточно, чтобы $\text{rot}_S \boldsymbol{\varphi}_\tau \equiv 0$ и*

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = 0 \quad (19.10)$$

для всех $\mathbf{r}' \in \mathbf{C}\bar{D}$.

Теорему 19.1 можно несколько усилить, если перейти в формуле (19.10) к пределу при $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-$ и воспользоваться формулами Сохоцкого — Племеля (18.32а), (18.32б). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 19.2. *Необходимым и достаточным условием того, что векторная функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$, непрерывная по Гельдеру на гладкой замкнутой поверхности S и имеющая там дифференцируемые тангенциальные компоненты, служит краевым значением векторного поля, лапласова в D , являются следующие соотношения:*

$$\text{rot}_S \boldsymbol{\varphi}_\tau \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds = \\ &= 2\mathbf{C}^S(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}) \text{ для всех } \mathbf{r}_0 \in S. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Доказательство. Необходимость условия (19.11) непосредственно следует из соотношения (19.10) после выполнения в последнем предельного перехода при $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-$ и учета формул (18.32а), (18.32б).

Докажем достаточность. Пусть имеют место условия (19.11). Тогда для аналога интеграла типа Коши $\mathbf{C}(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi})$ согласно формулам Сохоцкого — Племеля (18.32а), (18.32б)

$$\mathbf{C}^{S+}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}) \equiv \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0). \quad (19.12)$$

Следовательно, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ есть краевое значение лапласова в D поля $\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi})$, что и требовалось доказать.

Как видим, доказательство теорем 19.1 и 19.2 полностью повторяет доказательство соответствующих двумерных теорем 3.1 и 3.3 для аналитических функций, что оказалось возможным благодаря установленной выше аналогии в свойствах классических и трехмерных интегралов типа Коши.

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно обобщить на трехмерный случай теоремы 3.2 и 3.4 для краевых значений функций, заданных в безграничной области $C\bar{D}$.

Теорема 19.3. *Для того чтобы непрерывная по Гельдеру векторная функция $\Phi(\mathbf{r})$, заданная на гладкой замкнутой поверхности S и имеющая там дифференцируемые тангенциальные компоненты, была краевым значением векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, лапласова в $C\bar{D}$ и равномерно стремящегося к конечному пределу $\mathbf{F}(\infty)$ на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rot}_S \Phi_{\mathbf{r}} = 0$$

и

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \Phi) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \Phi) \operatorname{grad}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \Phi] \times \operatorname{grad}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds = \mathbf{F}(\infty) \quad (19.13)$$

для всех $\mathbf{r}' \in D$ (где \mathbf{n} — нормаль, внешняя по отношению к области D).

Теорема 19.4. *Необходимым и достаточным условием того, что непрерывная по Гельдеру векторная функция $\Phi(\mathbf{r})$, заданная на S и имеющая там дифференцируемые тангенциальные компоненты, есть краевое значение на S поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, лапласова во внешней области $C\bar{D}$, являются следующие соотношения:*

$$\operatorname{rot}_S \Phi_{\mathbf{r}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_0) &= -2\mathbf{C}^S(\mathbf{r}_0; \Phi) + 2\mathbf{F}(\infty) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \Phi) \operatorname{grad}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \Phi] \times \operatorname{grad}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds + 2\mathbf{F}(\infty), \end{aligned} \quad (19.14)$$

где \mathbf{n} — то же, что и в (19.13).

Так же как и в двумерном случае, формулы (19.11) и (19.14) позволяют непосредственно вычислять трехмерные сингулярные интегралы типа Коши в случае, когда их плотность есть краевое значение лапласовых векторных полей.

19.2. Кусочно-лапласовы векторные поля.

Определение кусочно-лапласова поля по заданному скачку

Пусть D_1, D_2, \dots, D_N — несколько связных областей в пространстве, не имеющих общих внутренних точек, но взаимно соприкасающихся друг с другом вдоль гладких поверхностей S_1, S_2, \dots, S_M , являющихся общей частью их границ. Пусть в областях D_1, D_2, \dots, D_N заданы соответственно лапласовы векторы поля $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{r}), \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{r})$, непрерывно продолжимые на соответствующие граничные поверхности S_1, S_2, \dots, S_M .

Обозначим через $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ следующее векторное поле:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_1, \\ \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_2, \\ \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_N. \end{cases}$$

Такое поле мы будем называть *кусочно-лапласовым векторным полем с поверхностью скачков* $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_M$.

В качестве типичного примера кусочно-лапласова поля можно привести трехмерный аналог интеграла типа Коши $\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi})$. При этом, очевидно, *поверхность интегрирования S является поверхностью скачков* трехмерного интеграла типа Коши.

Важное значение для приложений имеет задача определения кусочно-лапласова векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, исчезающего на бесконечности, по заданному скачку на гладкой замкнутой поверхности S :

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{F}^-(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S, \quad (19.15)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — функция, непрерывная по Гельдеру на S .

Легко видеть, что в силу формул Сохоцкого — Племеля (18.30) решением этой задачи является как раз трехмерный аналог интеграла типа Коши:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi}) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varphi}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Так же как и в двумерном случае, это решение является единственным. В самом деле, если бы существовало два решения $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ и $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}')$, то их разность $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}') = \mathbf{F}(\mathbf{r}') - \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}')$ была бы лапласовым полем во всем безграничном пространстве, стремящимся к нулю на бесконечности. Согласно теореме Лиувилля для гармонических функций такое поле, как известно, есть тождественный нуль [Тиман, Трофимов, 1968].

Заметим, что полученный выше результат справедлив и для произвольной кусочно-гладкой замкнутой поверхности S (конечной или простирающейся в бесконечности).

19.3. Формулы обращения трехмерного аналога интеграла типа Коши

Чрезвычайно большой интерес для приложений представляет обобщение на трехмерный случай интегральных преобразований Коши (п. 3.3), поскольку последние представляют собой один из наиболее элегантных способов решения сингулярных интегральных уравнений. Покажем, что такое обобщение легко строится на основе аппарата трехмерных аналогов интеграла типа Коши.

Пусть S есть замкнутая гладкая поверхность, а $\varphi(\mathbf{r})$ — произвольная непрерывная по Гельдеру векторная функция, заданная на S , имеющая там дифференцируемые тангенциальные составляющие, удовлетворяющие уравнению (18.2).

Обозначим через $\psi(\mathbf{r}_0)$ следующий сингулярный интеграл:

$$\psi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \varphi) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \varphi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds = 2C^S(\mathbf{r}_0; \varphi). \quad (19.17)$$

Отметим, что аналогично двумерному случаю можно доказать, что функция $\psi(\mathbf{r})$ также непрерывна по Гельдеру на S и удовлетворяет условию (18.2). В частности, если $\varphi(\mathbf{r})$ есть краевое значение некоторого лапласова в D векторного поля, то согласно теореме 19.2 имеем

$$\psi(\mathbf{r}_0) \equiv \varphi(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (19.18)$$

Во всех других случаях $\psi(\mathbf{r}_0) \not\equiv \varphi(\mathbf{r}_0)$.

Если $\psi(\mathbf{r}_0)$ задана, а $\varphi(\mathbf{r}_0)$ неизвестна, то соотношение (19.17) аналогично (3.11) в двумерном случае можно рассматривать как *сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\varphi(\mathbf{r}_0)$* . Укажем способ решения этого уравнения.

Очевидно, что если воспользоваться аналогом интеграла типа Коши (18.3), то уравнение (19.17) на основании формулы Сохоцкого — Племеля (18.33) может быть переписано следующим образом:

$$C^{S+}(\mathbf{r}_0; \varphi) + C^{S-}(\mathbf{r}_0; \varphi) = \psi(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (19.19)$$

Так же как и в двумерном случае (п. 3.3), мы можем определить вспомогательное кусочно-лапласово поле $\Phi(\mathbf{r}')$ следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \begin{cases} C^S(\mathbf{r}'; \varphi), & \mathbf{r}' \in D, \\ -C^S(\mathbf{r}'; \varphi), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (19.20)$$

Подставляя (19.20) в (19.19), находим

$$\Phi^+(\mathbf{r}_0) - \Phi^-(\mathbf{r}_0) = \psi(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (19.21)$$

Таким образом, $\Phi(\mathbf{r}')$ — кусочно-лапласово поле с заданным скачком ψ . Следовательно, согласно результатам предыдущего пункта и формуле (19.16) имеем

$$\Phi(\mathbf{r}') = C^S(\mathbf{r}_0; \psi). \quad (19.22)$$

Вновь применяя к интегралу типа Коши $C^S(\mathbf{r}_0; \psi)$ формулу Сохоцкого — Племеля (18.33), записываем

$$\Phi^+(\mathbf{r}_0) + \Phi^-(\mathbf{r}_0) = 2C^S(\mathbf{r}_0; \psi). \quad (19.23)$$

С другой стороны, в силу (19.20) и формулы Сохоцкого — Племеля (18.30)

$$\Phi^+(\mathbf{r}_0) + \Phi^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}^{S^+}(\mathbf{r}_0; \varphi) - \mathbf{C}^{S^-}(\mathbf{r}_0; \varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0). \quad (19.24)$$

Приравнявая правые части (19.23) и (19.24), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_0) = 2 \mathbf{C}^S(\mathbf{r}_0; \psi) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \psi) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \psi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds. \end{aligned} \quad (19.25)$$

Формула (19.25) и дает решение сингулярного интегрального уравнения (19.17).

Очевидно, что с помощью аналогичных рассуждений мы можем опять из (19.25) получить (19.17). Следовательно, и в трехмерном случае мы имеем пару взаимно-обращаемых интегральных преобразований, которые мы назовем *трехмерными интегральными преобразованиями Коши*:

$$\psi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \varphi) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \varphi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds, \quad (19.26)$$

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \psi) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \psi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds.$$

Отметим, что по построению единичный вектор нормали \mathbf{n} в (19.26) направлен вовне области D , однако преобразования (19.26) остаются в силе, если в обеих формулах (19.26) заменить направление \mathbf{n} на противоположное.

19.4. Трехмерные преобразования Гильберта

Введем в пространстве декартову систему координат XYZ и запишем трехмерные интегральные преобразования Коши для случая, когда S есть координатная плоскость XY . При этом будем предполагать, что $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию Гельдера и условию $d\varphi_x/dy - d\varphi_y/dx = 0$ при всех конечных x и y и исчезает на бесконечности. Для вычисления интеграла типа Коши по бесконечной плоскости необходимо, так же как и в двумерном случае (п. 2.5), определить *главное значение трехмерного аналога интеграла типа Коши в бесконечных пределах*. Указанное понятие вводится следующим образом. Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, 0)$ плоскости XY и проведем из нее как из центра окружность L_R в плоскости XY радиуса R . Часть плоскости XY , ограниченную этой окружностью, обозначим P_R . Запишем интеграл типа Коши по части

плоскости P_R :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}_0; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{P_R} \{(x-x_0)\varphi_z \mathbf{d}_x + (y-y_0)\varphi_z \mathbf{d}_y - \\ &- [(x-x_0)\varphi_x + (y-y_0)\varphi_y] \mathbf{d}_z\} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{-3/2} ds. \end{aligned}$$

Предел последнего выражения при $R \rightarrow \infty$ (если он существует) и носит название *главного значения интеграла типа Коши с бесконечными пределами*. Нетрудно показать, используя полярные координаты, что если $\boldsymbol{\varphi}(x, y, 0)$ стремится к нулю на бесконечности, то главное значение трехмерного аналога интеграла типа Коши по бесконечной плоскости XY всегда существует. Тогда соотношения (19.26) принимают вид (в предположении, что нормаль \mathbf{n} направлена вверх)

$$\begin{aligned} \Psi(x_0, y_0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \{(x-x_0)\varphi_z \mathbf{d}_x + (y-y_0)\varphi_z \mathbf{d}_y - \\ &- [(x-x_0)\varphi_x + (y-y_0)\varphi_y] \mathbf{d}_z\} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{-3/2} dx dy, \end{aligned} \quad (19.27a)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \{(x-x_0)\psi_z \mathbf{d}_x + (y-y_0)\psi_z \mathbf{d}_y - \\ &- [(x-x_0)\psi_x + (y-y_0)\psi_y] \mathbf{d}_z\} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{-3/2} dx dy. \end{aligned} \quad (19.27б)$$

Обозначим символами \hat{G}_x и \hat{G}_y следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{G}_x f(x, y) &= \frac{-1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)f(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} dx dy, \end{aligned} \quad (19.28a)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_y f(x, y) &= \frac{-1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-y_0)f(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} dx dy. \end{aligned} \quad (19.28б)$$

Операторы \hat{G}_x и \hat{G}_y будем называть *трехмерными операторами Гильберта*. Тогда соотношения (19.27a), (19.27б) записываются

так:

$$\begin{aligned}\psi_x(x_0, y_0, 0) &= \hat{G}_x \varphi_z^*(x, y, 0), \\ \psi_y(x_0, y_0, 0) &= \hat{G}_y \varphi_z(x, y, 0),\end{aligned}\quad (19.29a)$$

$$\psi_z(x_0, y_0, 0) = -\hat{G}_x \varphi_x(x, y, 0) - \hat{G}_y \varphi_y(x, y, 0);$$

$$\varphi_x(x_0, y_0, 0) = \hat{G}_x \psi_z(x, y, 0),$$

$$\varphi_y(x_0, y_0, 0) = \hat{G}_y \psi_z(x, y, 0),\quad (19.29б)$$

$$\varphi_z(x_0, y_0, 0) = -\hat{G}_x \psi_x(x, y, 0) - \hat{G}_y \psi_y(x, y, 0).$$

Соотношения (19.29a), (19.29б) мы будем называть *трехмерными интегральными преобразованиями Гильберта*. Эти преобразования можно перегруппировать так:

$$\psi_x = \hat{G}_x \varphi_z, \quad \psi_y = \hat{G}_y \varphi_z, \quad \varphi_z = -\hat{G}_x \psi_x - \hat{G}_y \psi_y;\quad (19.30a)$$

$$\varphi_x = \hat{G}_x \psi_z, \quad \varphi_y = \hat{G}_y \psi_z, \quad \psi_z = -\hat{G}_x \varphi_x - \hat{G}_y \varphi_y.\quad (19.30б)$$

Таким образом, трехмерные преобразования Гильберта связывают вертикальную компоненту векторного поля φ с горизонтальными компонентами векторного поля ψ и наоборот.

Важное значение для дальнейшего имеет случай, когда $\varphi(x_0, y_0, 0)$ есть краевое значение на горизонтальной плоскости $z=0$ поля, лапласова всюду в нижнем полупространстве и стремящегося к нулю на бесконечности. Тогда в соответствии с (19.18) $\psi(x_0, y_0, 0) \equiv \varphi(x_0, y_0, 0)$. Следовательно, соотношения (19.30a), (19.30б) записываются в виде

$$\varphi_x = \hat{G}_x \varphi_z, \quad \varphi_y = \hat{G}_y \varphi_z, \quad \varphi_z = -\hat{G}_x \varphi_x - \hat{G}_y \varphi_y.\quad (19.31)$$

Аналогично в случае, когда $\varphi(x_0, y_0, 0)$ есть краевое значение на координатной плоскости $z=0$ векторного поля, лапласова всюду в верхнем полупространстве и стремящегося к нулю на бесконечности, соответствующие соотношения между вертикальной и горизонтальными компонентами поля φ получаются из (19.31) заменой знака в правой части:

$$\varphi_x = -\hat{G}_x \varphi_z, \quad \varphi_y = -\hat{G}_y \varphi_z, \quad \varphi_z = \hat{G}_x \varphi_x + \hat{G}_y \varphi_y.\quad (19.32)$$

Ниже мы увидим, что трехмерные операторы Гильберта играют столь же важную роль в теории трехмерных геопотенциальных полей, как обычный оператор Гильберта в двумерном случае.

20. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Трехмерные аналоги интеграла типа Коши иногда бывает полезно записывать с помощью матричной символики. Напомним, как изображаются основные операции векторной алгебры в матричном виде.

20.1. Запись операторов дифференцирования скалярных и векторных полей с помощью матричной символики

Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — два произвольных вектора, разложения которых по некоторому ортонормированному базису $\{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z\}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=x,y,z} A_\alpha \mathbf{d}_\alpha, \quad \mathbf{B} = \sum_{\beta=x,y,z} B_\beta \mathbf{d}_\beta, \quad (20.1)$$

где A_x, A_y, A_z и B_x, B_y, B_z — скалярные компоненты векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Выразим скалярное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} через скалярные произведения ортов. Эта операция линейна по каждому из аргументов, следовательно,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_\alpha B_\beta \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta.$$

Вследствие ортогональности векторов $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z$ имеем $\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, где

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

есть симметричный символ Кронекера, или δ -символ. Таким образом,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_\alpha B_\beta \delta_{\alpha\beta}. \quad (20.2)$$

Процедуру суммирования по дважды повторяющемуся индексу часто называют *сверткой*. Таким образом, скалярное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} записывается в виде свертки компонент этих векторов с δ -символом Кронекера.

Аналогичным образом можно выразить векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} . Так как эта операция линейна по каждому из аргументов, то

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_\alpha B_\beta \mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{d}_\beta.$$

Вследствие ортогональности векторов $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z$ $\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{d}_\beta = \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_\gamma$, где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — *кососимметричный символ Кронекера*, или ϵ -символ. При несовпадающих индексах имеем

$$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{zyx} = \epsilon_{yxz} = 1, \quad \epsilon_{yxz} = \epsilon_{zxy} = \epsilon_{xzy} = -1.$$

Значения $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю, если какие-либо два индекса совпадают (например, $\epsilon_{\alpha\alpha\gamma} = 0$). Отметим, что между δ - и ϵ -символами Кронекера существуют соотношения

$$\sum_{\zeta=x,y,z} \epsilon_{\alpha\zeta\eta} \epsilon_{\beta\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\eta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\eta}. \quad (20.3)$$

С помощью ε -символа векторное произведение векторов записывается так:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}. \quad (20.4)$$

Векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} есть свертка компонент этих векторов с ε -символом Кронекера и ортом \mathbf{d}_{γ} декартова базиса.

Рассмотрим теперь смешанное произведение трех векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \mathbf{d}_{\alpha} \cdot [\mathbf{d}_{\beta} \times \mathbf{d}_{\gamma}],$$

где $\mathbf{d}_{\alpha} \cdot [\mathbf{d}_{\beta} \times \mathbf{d}_{\gamma}] = \sum_{\xi=x,y,z} \delta_{\alpha\xi} \varepsilon_{\xi\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Следовательно,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (20.5)$$

Двойное векторное произведение векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} с учетом (20.3), (20.4) можно записать так:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] &= \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} \sum_{\zeta=x,y,z} \sum_{\eta=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\zeta\eta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} \mathbf{d}_{\eta} = \\ &= \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \mathbf{d}_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{d}_{\gamma}). \end{aligned} \quad (20.6)$$

Во всех приведенных выше формулах суммирование ведется по дважды повторяющимся индексам. Мы можем опустить знак суммы, договорившись, что дважды повторяющийся индекс указывает на необходимость суммирования по этому индексу. Такое правило носит название *соглашения о суммировании*. В дальнейшем мы будем пользоваться этим соглашением, полагая, что индексы, обозначенные греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, пробегают значения x, y, z . Используя соглашение о суммировании, формулы (20.2), (20.4), (20.5) и (20.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{\alpha} B_{\beta} \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_{\alpha} B_{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad (20.7)$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\zeta\eta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} \mathbf{d}_{\eta} = A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \mathbf{d}_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{d}_{\gamma}),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta = x, y, z.$

Теперь применим матричную символику для вычисления пространственных производных скалярного поля W и векторного поля \mathbf{A} :

$$\text{grad } W = W_{,\alpha} \mathbf{d}_{\alpha}, \quad \text{div } \mathbf{A} = A_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha,\beta}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = A_{\alpha,\beta} \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} \mathbf{d}_{\gamma},$$

$\alpha, \beta, \gamma = x, y, z.$ (20.8)

Здесь суммирование ведется по всем дважды повторяющимся индексам, а индекс после запятой означает дифференцирование по

переменной, обозначенной этим индексом: $W_{,\alpha} = \partial W / \partial \alpha$, $A_{\alpha,\beta} = \partial A_{\alpha} / \partial \beta$.

Введенные обозначения позволяют записать трехмерные аналоги интеграла типа Коши в матричной форме.

20.2. Матричное представление трехмерных аналогов интеграла типа Коши

Интеграл типа Коши (18.3) можно записать в матричной форме. Для этого разложим векторы \mathbf{C}^S , Φ , \mathbf{n} и $\text{grad } 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ по произвольному декартову базису $\{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^S &= C_{\alpha}^S \mathbf{d}_{\alpha}, \quad \Phi = \varphi_{\beta} \mathbf{d}_{\beta}, \quad \mathbf{n} = n_{\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}, \quad \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \\ &= \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \mathbf{d}_{\eta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z, \end{aligned} \quad (20.9)$$

где $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

Согласно (20.7) и (20.8)

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \Phi) \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \varphi_{\beta} n_{\gamma} \frac{r'_{\alpha}-r_{\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \delta_{\beta\gamma} \mathbf{d}_{\alpha} = \varphi_{\beta} n_{\gamma} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} \mathbf{d}_{\alpha}, \\ [\mathbf{n} \times \Phi] \times \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \varphi_{\beta} n_{\gamma} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \varepsilon_{\alpha\eta\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} \mathbf{d}_{\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta = x, y, z. \end{aligned}$$

После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \Phi] \times \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \\ = \varphi_{\beta} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\alpha\eta\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta}) n_{\gamma} \mathbf{d}_{\alpha} &= \Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} \varphi_{\beta} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} n_{\gamma} \mathbf{d}_{\alpha}, \\ \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z, \end{aligned} \quad (20.10)$$

где четырехиндексный Δ -символ выражается через δ - и ε -символы или с учетом (20.3) через δ -символы:

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} = \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\alpha\eta\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\eta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\eta}. \quad (20.11)$$

Подстановка (20.11) в (18.3) дает

$$C_{\alpha}^S(\mathbf{r}'; \Phi) = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} \varphi_{\beta} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} n_{\gamma} ds, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z. \quad (20.12)$$

С помощью матричных обозначений формулу (18.12), являющуюся трехмерным аналогом интегральной формулы Коши, можно записать так:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_S \Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} \varphi_{\beta} \frac{r'_{\eta}-r_{\eta}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} n_{\gamma} ds = \begin{cases} \varphi_{\alpha}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (20.13)$$

где φ_α ($\alpha = x, y, z$) — скалярные компоненты лапласова в D векторного поля φ . Матричные формулы (20.12) и (20.13) позволяют вычислять интегралы типа Коши по компонентам φ , их плотности.

Отметим в заключение этого параграфа, что матричная форма записи трехмерной интегральной формулы Коши (20.13) и трехмерного аналога интеграла типа Коши (20.12) дает основу для обобщения указанных формул на случай конечномерного евклидова пространства произвольного числа измерений. Для этого достаточно лишь соответствующим образом обобщить понятие интеграла по поверхности, площади поверхности и нормали к ней на случай пространств большего, чем три, числа измерений (элементарный подход к такому обобщению содержится, например, в книге А. Ф. Тимана и В. Н. Трофимова [1968]). Тем самым формулы (20.12) и (20.13) открывают путь к обобщению теории интегралов типа Коши на n -мерный случай. Именно этим определяется важное значение матричных формул для теории аналогов интеграла типа Коши. Однако указанное обобщение выходит далеко за рамки данной книги, посвященной в основном рассмотрению геофизического аспекта теории аналогов интеграла типа Коши, поэтому мы его здесь не приводим.

Глава шестая

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

В первом разделе книги мы показали, насколько эффективным оказывается теоретический анализ плоских задач гравиметрии и магнитометрии за счет записи гравитационных и магнитных полей в виде интегралов типа Коши. В связи с этим представляется чрезвычайно заманчивым получить аналогичные выражения для трехмерных геопотенциальных полей. Решению этой задачи, а также некоторым важным применениям аналогов интеграла типа Коши в теории геопотенциальных полей и посвящена настоящая глава.

21. НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ И ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

В параграфе 5 мы указали простую связь между интегралом типа Коши и логарифмическими потенциалами. Оказывается, что эта связь сохраняется и в трехмерном случае между аналогами интеграла типа Коши и ньютоновыми потенциалами.

21.1. Ньютонов потенциал

Рассмотрим некоторое безвихревое векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad (21.1)$$

где $q(\mathbf{r})$ — объемная плотность источников поля.

В параграфе 4 было отмечено, что безвихревое поле потенциально во всем пространстве:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \operatorname{grad} U(\mathbf{r}'), \quad (21.2)$$

где

$$U(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (21.3)$$

— скалярный потенциал поля; V — область распределения источников $q(\mathbf{r})$.

Потенциал (21.3), чтобы подчеркнуть его отличие от логарифмического потенциала, мы в дальнейшем будем называть *ньютоновым потенциалом*, поскольку он соответствует (при определенном задании плотности источников поля) потенциалу гравитационного притяжения, описываемого законом Ньютона. Как известно, ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (4.8) и вне источников — уравнению Лапласа (4.8а).

Приведем в качестве примеров потенциалы простейших источников безвихревого поля: точечного, дипольного, линейного, поверхностного и объемного.

21.2. Ньютонов потенциал простых источников поля

Рассмотрим точечный источник интенсивности Q , расположенный в точке \mathbf{r}_0 пространства. Его плотность может быть описана сингулярной δ -функцией Дирака $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$:

$$q(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (21.4)$$

где δ -функция определяется соотношением

$$\iiint_D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dv = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0), & \mathbf{r}_0 \in D, \\ 0, & \mathbf{r}_0 \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (21.5)$$

Здесь $f(\mathbf{r})$ — произвольная непрерывная в D функция. Подставляя (21.4) в (21.3), находим

$$U(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \quad (21.6)$$

Формула (21.6) описывает ньютонов потенциал точечного источника.

Пусть теперь L — некоторая гладкая линия в пространстве, вдоль которой непрерывным образом распределены точечные ис-

точники с линейной плотностью $q_L(\mathbf{r})$, являющейся непрерывной функцией $\mathbf{r} \in L$. Такой источник называется *линейным источником безвихревого поля*. Вычислим его ньютонов потенциал $U^L(\mathbf{r}')$:

$$U^L(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int_L \frac{q_L(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl. \quad (21.7)$$

Очевидно, что формула (21.7) получается путем интегрирования (21.6) вдоль линии L (при подстановке $Q=Q(\mathbf{r})=q_L(\mathbf{r})dl$).

Предположим теперь, что точечные источники с непрерывной поверхностной плотностью $q_s(\mathbf{r})$ заполняют некоторый гладкий кусок поверхности S в пространстве и $q_s(\mathbf{r})$ — непрерывная функция точек поверхности S . Такой источник называется *поверхностным источником безвихревого поля* или *простым слоем*.

Ньютонов потенциал простого слоя определяется соотношением

$$U^S(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{q_s(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds. \quad (21.8)$$

Наконец, ньютонов потенциал объема V , заполненного точечными источниками с объемной плотностью $q(\mathbf{r})$, задается формулой (21.3).

Перечисленные выше модели источников безвихревого поля в дальнейшем будем называть *простыми источниками*.

21.3. Ньютонов потенциал поляризованных источников поля

Простейшим примером поляризованного источника поля является дипольный источник, получаемый путем сближения двух точечных источников интенсивности $(+Q)$ и $(-Q)$, расположенных на малом расстоянии (в концах вектора $\Delta\mathbf{l}$) друг от друга. Предел произведения

$$\lim_{|\Delta\mathbf{l}| \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty} Q \Delta\mathbf{l} = \mathbf{M} \quad (21.9)$$

называется *моментом диполя*.

Объемная плотность дипольного источника определяется формулой

$$q(\mathbf{r}) = \mathbf{M} \cdot \text{grad}' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad (21.10)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки расположения диполя.

Подставляя (21.10) в (21.3), находим *ньютонов потенциал дипольного источника*

$$U_D(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} M \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{M} \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'|}, \quad (21.11)$$

где \mathbf{v} — единичный вектор, ориентированный по моменту диполя \mathbf{M} ($\mathbf{M} = M \cdot \mathbf{v}$).

Аналогично простым линейному и поверхностному источникам можно определить *поляризованные линейный и поверхностный источники*. В самом деле, предположим, что некоторая гладкая линия L или поверхность S непрерывным образом заполнены диполями (с моментами, ориентированными ортогонально L или S соответственно). Обозначим через \mathbf{m}_L и \mathbf{m}_S линейную и поверхностную плотности дипольных моментов и будем предполагать, что они есть непрерывные функции координат точек L или S . Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные приведенным в п. 5.1 для логарифмических потенциалов, получаем

$$U_D^L(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int_L \mathbf{m}_L(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dt, \quad (21.12a)$$

$$U_D^S(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{m}_S(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds. \quad (21.12б)$$

Здесь U_D^L и U_D^S — ньютоновы потенциалы линейного и поверхностного поляризованных источников. Отметим, что поверхностный поляризованный источник часто называют *двойным слоем*.

Выражению (21.12б) для потенциала двойного слоя можно придать более удобный для анализа вид. В самом деле, перепишем подынтегральное выражение в (21.12б):

$$\mathbf{m}_S(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds = -\frac{m_S(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n} \right) ds = -m_S(\mathbf{r}) \frac{ds^*}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2},$$

где $ds^* = \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n} \right) ds$ — проекция элемента поверхности ds на сферу радиуса $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ с центром в точке \mathbf{r}' .

Следовательно, $ds^*/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = d\Omega$ — есть мера телесного угла, под которым из точки \mathbf{r}' виден элемент поверхности ds (взятый с соответствующим знаком в зависимости от того, составляет ли нормаль \mathbf{n} к поверхности S острый угол с вектором $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ или тупой). Таким образом, формула (21.12б) может быть записана так:

$$U_D^S(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \iint_S m_S(\mathbf{r}) d\Omega. \quad (21.13a)$$

В частном случае однородного двойного слоя $m_S = \text{const}$ и (21.13a) переписывается в виде

$$U_D^S(\mathbf{r}') = m_S \frac{\Omega_{r'}}{4\pi}, \quad (21.13б)$$

где $\Omega_{r'}$ — телесный угол видимости поверхности S из точки \mathbf{r}'

Предположим теперь, что дипольные источники непрерывным образом заполняют некоторую область V пространства. Такой источник называется *объемным поляризованным источником безвих-*

ревого поля. Его ньютонов потенциал равен

$$U_D^V(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv, \quad (21.14)$$

где \mathbf{m} — объемная плотность дипольных моментов (поляризация) объемного поляризованного источника.

Преобразуем подынтегральное выражение в (21.14):

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \text{div} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\text{div} \mathbf{m}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (21.15)$$

Подставляя (21.15) в (21.14) и пользуясь теоремой Остроградского — Гаусса, окончательно записываем

$$U_D^V(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{q_S(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{q(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv, \quad (21.16)$$

где

$$q_S(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad q(\mathbf{r}) = -\text{div} \mathbf{m}(\mathbf{r}). \quad (21.17)$$

Таким образом, мы видим, что объемный поляризованный источник эквивалентен сумме простого объемного источника и простого слоя.

21.4. Трехмерный интеграл типа Коши как сумма полей простого и двойного слоев

В параграфе 5 мы показали, что классический интеграл типа Коши может быть записан в виде суммы логарифмических потенциалов простого и двойного слоев. Оказывается, что аналогичный результат имеет место и в трехмерном случае.

Прежде всего отметим, что аналог интеграла типа Коши $\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi)$ в соответствии с (18.11) всюду вне S представим как градиент некоторых гармонических функций $\Psi^\pm(\mathbf{r}')$ (разных по разные стороны от S):

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi) = \text{grad} \Psi^\pm(\mathbf{r}'), \quad (21.18)$$

где индекс «+» относится к области D , а индекс «-» — к $\bar{C}D$. Путем несложных преобразований можно получить явное выражение для Ψ^\pm . В самом деле, ввиду (18.2) записываем

$$\varphi_\tau = \text{grad}^S \varphi, \quad (21.19)$$

где φ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая на S функция, которую будем называть *скалярной плотностью* интеграла типа Коши.

Второй интеграл в (18.4) с учетом (21.19) можно преобразовать так:

$$-\frac{1}{4\pi} \text{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \varphi_\tau}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds = \frac{1}{4\pi} \text{rot}' \iint_S \frac{\text{grad}^S \varphi \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \frac{\operatorname{rot}^S(\varphi \mathbf{n})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \left\{ \operatorname{rot}^S \frac{\varphi \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \right. \\
&+ \operatorname{grad}^S \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \varphi \mathbf{n} \left. \right\} ds = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \left\{ \iint_S \left[\operatorname{grad} \frac{\varphi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \mathbf{n} \right] ds + \right. \\
&+ \left. \iint_S \left[\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \varphi \mathbf{n} \right] ds \right\} \quad (21.20)
\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (21.20) равен нулю по теореме Стокса (17.11), так как S — замкнутая поверхность. Преобразуем второй интеграл:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \left[\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \varphi \mathbf{n} \right] ds = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \left[\operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \varphi \mathbf{n} \right] ds = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}' \iint_S \operatorname{rot}' \frac{\varphi \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \operatorname{div}' \frac{\varphi \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \varphi \mathbf{n} ds = \\
&= \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \iint_S \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \varphi \mathbf{n} ds \quad (21.21)
\end{aligned}$$

при $\mathbf{r}' \notin S$.

Отметим, в частности, что при выводе формулы (21.21) мы доказали следующее полезное для дальнейшего тождество:

$$-\iint_S \left[[\mathbf{n} \times \varphi] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] ds = \operatorname{grad}' \iint_S \varphi \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds. \quad (21.22)$$

Введем следующие обозначения:

$$q^S = -(\mathbf{n} \cdot \varphi), \quad \mathbf{m}^S = -\varphi \mathbf{n}. \quad (21.23)$$

Тогда, подставляя (21.21) в (18.4) и учитывая (21.23), получаем

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \varphi) = \operatorname{grad}' \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{q^S}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{m}^S \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds \right\} \quad (21.24)$$

Отсюда

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{q^S}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{m}^S \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds. \quad (21.25)$$

Таким образом, мы видим, что трехмерный аналог интеграла типа Коши может быть представлен как градиент суммы ньютоновых потенциалов простого слоя с поверхностной плотностью $q^S = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi})$ и двойного слоя с плотностью дипольных моментов $m^S = -\boldsymbol{\varphi} \mathbf{n}$:

$$C^S(\mathbf{r}'; \boldsymbol{\varphi}) = \text{grad}' \{U^S(\mathbf{r}') + U_D^S(\mathbf{r}')\}. \quad (21.26)$$

Такое представление аналогично соответствующему представлению вещественной и мнимой частей классического интеграла типа Коши в виде суперпозиции полей простого и двойного слоев (формула (5.30)). Так же как и в двумерном случае, представление (21.26) позволяет в принципе получить все свойства трехмерных аналогов интеграла типа Коши на основе анализа свойств ньютоновых потенциалов простого и двойного слоев. Однако мы уже убедились в первом разделе книги, что аппарат интеграла типа Коши является значительно более сильным средством решения задач теории геопотенциальных полей, чем аппарат логарифмического потенциала. Точно так же обстоит дело и в трехмерном случае.

22. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ВИДЕ АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Замечательные успехи в теоретическом анализе плоских задач гравиметрии и магнитометрии, как уже отмечалось выше, были достигнуты за счет выражения гравитационных и магнитных полей в виде интегралов типа Коши. В связи с этим представляется чрезвычайно важным получить аналогичные выражения для трехмерных полей.

22.1. Уравнения гравитационного поля

Гравитационное поле $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ трехмерного распределения масс с плотностью $\rho(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi\gamma\rho, \quad \text{rot } \mathbf{g} = 0, \quad (22.1)$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная.

Таким образом, плотность источников гравитационного поля равна

$$q = -4\pi\gamma\rho. \quad (22.2)$$

Из (22.1) следует, что вне масс гравитационное поле — лапласово. Оно выражается через гравитационный потенциал U ($\mathbf{g} = \text{grad } U$), удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \quad (22.3)$$

Подставляя (22.2) в (21.3), получаем известные выражения для гравитационного потенциала и поля объемного распределения масс

$$U(\mathbf{r}') = \gamma \iiint_D \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv, \quad (22.4)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv, \quad (22.5)$$

где D — область, занятая массами.

Формулы (22.4) и (22.5) дают представление гравитационного поля в виде объемных интегралов. Вместе с тем в трехмерном случае, так же как и в двумерном, чрезвычайно полезными при решении многих теоретических и практических задач являются представления гравитационных полей в виде интегралов по поверхности объемов, заполненных массами.

22.2. Представление гравитационного поля трехмерного однородного тела в виде интеграла типа Коши

Применим аппарат аналогов интеграла типа Коши для вычисления гравитационного поля однородного тела D , заполненного массами плотности ρ_0 и ограниченного кусочно-гладкой поверхностью S . Для этого воспользуемся трехмерной формулой Помпей (17.40а), предварительно переписав ее в виде

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{F}(\mathbf{r})) + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (22.6)$$

Положим в (22.6)

$$\mathbf{F} = (4\pi/3) \gamma \rho_0 \mathbf{r}, \quad (22.7)$$

тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 4\pi \gamma \rho_0 \quad (22.8)$$

и (22.6) можно записать так:

$$\mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}\right) + \gamma \iiint_D \rho_0 \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}', & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (22.9)$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с (22.5) объемный интеграл в левой части (22.9) есть (со знаком минус) гравитационное поле $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ однородного тела D . Следовательно,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}\right), & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}' + \mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}\right), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (22.10)$$

Таким образом, мы получили выражение для гравитационного поля $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ как вне, так и внутри однородного тела D через интеграл типа Коши по поверхности тела S . Отметим, что в силу формул Сохоцкого — Племеля (18.29) правые части (22.10) имеют одинаковые пределы при стремлении точки \mathbf{r}' к поверхности S изнутри и снаружи тела D . Следовательно, гравитационное поле $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ есть функция, непрерывная во всем пространстве.

Иследуем выражение (22.10). Для этого запишем сначала представление для гравитационного поля вне масс:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}'\right) \quad (22.11)$$

Как видим, задача определения гравитационного поля вне масс сводится к вычислению интеграла типа Коши по поверхности S , ограничивающей массы, с плотностью

$$\varphi(\mathbf{r}) = (4\pi/3)\gamma\rho_0\mathbf{r}. \quad (22.12)$$

Представление (22.11) обобщает на трехмерный случай формулу Цирульского (8.7) для комплексной напряженности плоского поля

$$g(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(-2\pi\gamma\rho_0\bar{\zeta})}{\zeta - \zeta'} d\zeta, \quad (22.13)$$

где L — контур поперечного сечения двумерного тела, вытянутого по оси Y ; $g(\zeta')$ — комплексная напряженность гравитационного поля, связанная с $\mathbf{g}(\mathbf{r}') = (g_x, 0, g_z)$ формулой $g(\zeta') = -g_x(x', z') + ig_z(x', z')$, $\bar{\zeta}$ — комплексно-сопряженная величина с $\zeta = x + iz$.

Ввиду результатов п. 17.4 очевидно, что в двумерной ситуации (22.11) автоматически переходит в (22.13) при замене коэффициента $4\pi/3$ на 2π (что связано с переходом от трехмерной конечной области к двумерной, т. е. бесконечно протяженной по оси Y).

Запишем теперь представление для гравитационного поля внутри масс:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}' + \mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}'\right). \quad (22.14)$$

Слагаемые, стоящие в правой части (22.14), имеют простой физический смысл. В самом деле, обозначим

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}', \quad (22.15)$$

$$\mathbf{g}_{CD}(\mathbf{r}') = -\mathbf{C}^S\left(\mathbf{r}'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}'\right) \quad (22.16)$$

Очевидно, что поле \mathbf{g}_0 всюду в пространстве удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_0 = -4\pi\gamma\rho_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g}_0 = 0. \quad (22.17)$$

Сравнивая (22.17) с (22.1), видим, что g_0 есть гравитационное поле масс, равномерно заполняющих все пространство с постоянной плотностью ρ_0 .

С другой стороны, согласно (22.14)–(22.16)

$$g_{CD}(r') = g_0(r') - g(r'). \quad (22.18)$$

В то же время $g(r')$ — это поле масс, сосредоточенных с плотностью ρ_0 внутри области D . Следовательно, согласно принципу суперпозиции полей $g_{CD}(r')$ есть гравитационное поле масс, равномерно распределенных с плотностью ρ_0 в безграничной области $C\bar{D}$, дополняющей область D до всего пространства. Таким образом, трехмерный аналог интеграла типа Коши с плотностью, равной $\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r$, вне D имеет смысл гравитационного поля области D , а

внутри D — гравитационного поля области $C\bar{D}$ (взятого со знаком минус).

Отметим, что правую часть (22.10) можно записать в виде единой формулы. Для этого достаточно учесть, что функция $(4\pi/3) \gamma \rho_0 r'$ постоянна по r , т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа в области D по g . Следовательно, по трехмерной формуле Коши (17.26)

$$C^S(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r') = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r', & r' \in D, \\ 0, & r' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (22.19)$$

С учетом (22.19) и свойства линейности интеграла типа Коши (п. 18.1) формулу (22.10) можно переписать так:

$$g(r') = C^S(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 (r - r')) \quad (22.20)$$

Таким образом, мы получили единое аналитическое выражение для гравитационного поля однородного тела внутри и вне масс. Выражение (22.20) является обобщением на трехмерный случай формулы (8.13).

Раскроем явный вид формулы (22.20):

$$g(r') = \frac{1}{3} \gamma \rho_0 \iint_S \left\{ 2n \cdot (r - r') \frac{r'_i - r_i}{|r - r'|^3} + \frac{n}{|r - r'|} \right\} ds. \quad (22.21)$$

Выражение (22.21) оказывается полезным при практическом решении прямых задач гравиметрии.

Отметим, однако, что, поскольку плотность $(4\pi/3) \gamma \rho_0 (r - r')$ зависит от r' (точки вычисления интеграла типа Коши), свойства этого интеграла, изученные в п. 18, в целом уже не выполняются. В частности,

$$\operatorname{div}' C^S(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 (r - r')) = -4\pi \gamma \rho_0 \neq 0.$$

22.3. Гравитационное поле тела с произвольным распределением плотности

Рассмотрим теперь случай, когда плотность тела D есть произвольная непрерывная функция координат $\rho(\mathbf{r})$. Доопределим функцию $\rho(\mathbf{r})$ в некоторой области D^* , целиком содержащей внутри себя область D и поверхность $S(D^* \supset D \cup S)$, причем так, чтобы $\rho(\mathbf{r})$ была бы непрерывной функцией в D^* . Пусть $\sigma(\mathbf{r})$ — произвольное частное решение уравнений

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma\rho(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \sigma(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D^*. \quad (22.22)$$

Отметим, что уравнение (22.22) имеет внутри D общее решение, выражаемое формулой

$$\sigma(\mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \rho(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv, \quad (22.23)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ — произвольное лапласово в D векторное поле. Формула (22.23) вытекает из трехмерной формулы Помпей (22.6), если положить в последней $\varphi(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \sigma(\mathbf{r}))$. Частные решения уравнений (22.22) в области D могут быть получены, если положить в (22.23) $\varphi(\mathbf{r}') = \operatorname{const}$.

Подставляя любое частное решение (22.23) $\sigma(\mathbf{r})$ в формулу Помпей (22.6), получаем

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \sigma(\mathbf{r})) + \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \\ \sigma(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases}$$

Объемный интеграл в левой части последнего равенства равен (со знаком минус) гравитационному полю $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ области D , заполненной массами плотности $\rho(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = -\gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \gamma \iiint_D \rho(\mathbf{r}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv.$$

Следовательно,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \sigma(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \\ -\sigma(\mathbf{r}') + \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \sigma(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (22.24)$$

Итак, мы получили выражение для гравитационного поля произвольного непрерывного распределения масс в виде интеграла типа Коши по поверхности области, занятой массами. Отметим, что и в этом случае ввиду формул Сохоцкого — Племеля (18.29) $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ есть непрерывная функция во всем пространстве (условия Гельдера для функции $\sigma(\mathbf{r})$ выполняются автоматически в силу ее дифференцируемости).

Как и в предыдущем пункте, правую часть формулы (22.24) можно записать в виде единого аналитического выражения, учи-

⁴ Отметим, что область D^* может совпадать со всем трехмерным пространством.

тывая, что

$$C^S(r'; \sigma(r')) = \begin{cases} \sigma(r'), & r' \in D, \\ 0, & r' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (22.25)$$

Объединяя (22.25) с (22.24), получаем следующее единое представление для гравитационного поля в виде интеграла типа Коши по поверхности S области, занятой массами:

$$g(r') = C^S(r'; \sigma(r) - \sigma(r')), \quad (22.26)$$

где $\sigma(r)$ — произвольное частное решение уравнений (22.22).

Подчеркнем, однако, что интеграл в правой части (22.26) лишь формально, по своей аналитической структуре, является интегралом типа Коши. Дело в том, что его плотность $\sigma(r) - \sigma(r')$ зависит от координат точки вычисления самого интеграла, поэтому свойства интеграла типа Коши, изученные в параграфе 18, здесь в целом уже не выполняются. Например,

$$\operatorname{div}' C^S(r'; \sigma(r) - \sigma(r')) = -4\pi\gamma\rho \neq 0.$$

22.4. Случай вертикальных или одномерных горизонтальных изменений плотности

Проиллюстрируем развитую выше общую теорию на примере решения прямых задач гравиметрии для случая вертикальных или одномерных горизонтальных изменений плотности. В двумерном случае, как мы знаем (см. параграф 8), существуют чрезвычайно простые и удобные формулы для решения поставленной задачи. Построим аналогичные формулы для трехмерного поля. Положим

$$\rho(r) = \rho(z), \quad (22.27)$$

т. е. плотность масс, распределенных в области D , меняется лишь с глубиной. Тогда в качестве частного решения уравнений (22.22) можно взять следующую векторную функцию:

$$\sigma(r) = 4\pi\gamma R(z) \mathbf{d}_z, \quad (22.28)$$

где

$$R(z) = \int \rho(z) dz, \quad (22.29)$$

а \mathbf{d}_z — единичный орт оси Z . Подставляя (22.28) в (22.26), записываем

$$g(r') = C^S(r'; 4\pi\gamma(R(z) - R(z')) \mathbf{d}_z). \quad (22.30)$$

В частности, вне тела D формула (22.30) упрощается:

$$g(r') = C^S(r'; 4\pi\gamma R(z) \mathbf{d}_z). \quad (22.31)$$

Раскрывая явный вид выражения для интеграла типа Коши, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{r}') &= -\gamma \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot R(z) \mathbf{d}_z) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\
&\quad \left. + [\mathbf{n} \times R(z) \mathbf{d}_z] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \\
&= -\gamma \iint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{d}_z + \right. \\
&\quad \left. + \left[\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{d}_z \right\} R(z) ds.
\end{aligned} \tag{22.32}$$

Из формулы (22.32), в частности, вытекает простое соотношение для определения вертикальной составляющей гравитационного поля тела D , ограниченного поверхностью S , плотность которого есть функция только вертикальной координаты:

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \iint_S R(z) \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{n} \right) ds. \tag{22.33}$$

Заметим, что согласно результатам п. 21.3

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{n} = d\Omega, \tag{22.34}$$

где $d\Omega$ — телесный угол видимости элемента поверхности ds из точки \mathbf{r}' . Тогда (22.33) записывается в виде

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \iint_S R(z) d\Omega. \tag{22.35}$$

Сравнивая (22.35) с (21.13а), видим, что вертикальная компонента гравитационного поля тела с вертикально-меняющейся плотностью совпадает с потенциалом двойного слоя S с плотностью дипольных моментов $\mathbf{m}_s = 4\pi\gamma R(z)$.

Формулы (22.35) чрезвычайно удобны для расчета гравитационного поля тел с плотностями, являющимися лишь вертикальными функциями координат.

В качестве примера приведем явные выражения для формулы (22.35) в некоторых простых случаях вертикальных распределений.

1. Однородное тело: $\rho(z) = \rho_0 = \text{const}$. Тогда

$$R(z) = \rho_0 z. \tag{22.36}$$

Подставляя (22.36) в (22.35), получаем

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \rho_0 \iint_S z d\Omega. \tag{22.37}$$

2. Тело с линейным изменением плотности по вертикали: $\rho(z) = \rho_0 + az$. Тогда

$$R(z) = \rho_0 z + \frac{1}{2} az^2. \tag{22.38}$$

Подставляя (22.38) в (22.35), получаем

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma\rho_0 \iint_S z d\Omega + 1/2\gamma a \iint_S z^2 d\Omega. \quad (22.39)$$

3. Тело с экспоненциальным изменением плотности на вертикали: $\rho(z) = \rho_0 + ae^{\lambda z}$. В этом случае

$$R(z) = \rho_0 z + (a/\lambda) e^{\lambda z}. \quad (22.40)$$

Откуда для вертикальной компоненты гравитационного поля получаем

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma\rho_0 \iint_S z d\Omega + \gamma \frac{a}{\lambda} \iint_S e^{\lambda z} d\Omega. \quad (22.41)$$

4. Бесконечно протяженный горизонтально-однородный пласт, ограниченный плоскостями $z=z_1$ и $z=z_2$ ($z_1 < z_2$) с произвольным изменением плотности по оси Z , $\rho = \rho(z)$.

Очевидно, что формулу (22.35) в этом случае можно переписать так:

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma R(z_1) \iint_{z=z_1} d\Omega - \gamma R(z_2) \iint_{z=z_2} d\Omega, \quad z' > z_2. \quad (22.42)$$

Телесные углы видимости плоскостей $z=z_1$ и $z=z_2$ равны 2π . Следовательно,

$$g_z(\mathbf{r}') = 2\pi\gamma [R(z_1) - R(z_2)]. \quad (22.43)$$

Например, в случае однородного пласта ввиду (22.36)

$$g_z(\mathbf{r}') = -2\pi\gamma\rho_0(z_2 - z_1), \quad z' > z_2. \quad (22.44)^2$$

Для пласта с линейным изменением плотности согласно (22.38)

$$g_z(\mathbf{r}') = -2\pi\gamma\rho_0(z_2 - z_1) - \pi\gamma a(z_2^2 - z_1^2), \quad z' > z_2. \quad (22.45)$$

Наконец, для пласта с экспоненциальным изменением плотности

$$(g_z \mathbf{r}') = -2\pi\gamma\rho_0(z_2 - z_1) - 2\pi\gamma \frac{a}{\lambda} (e^{\lambda z_2} - e^{\lambda z_1}). \quad (22.46)$$

Приведенных примеров достаточно, чтобы продемонстрировать простоту и удобство применения формулы (22.35) для практических расчетов.

Обратимся теперь к анализу ситуации, когда плотность ρ меняется лишь по одному из горизонтальных направлений. Например,

$$\rho = \rho(x). \quad (22.47)$$

² Отметим, что в данной книге ось Z направлена вверх, поэтому в правой части (22.44) возникает знак „минус“ в отличие от аналогичной формулы, приводимой в стандартных учебниках по гравиметрии, в которых ось Z , как правило, направлена вниз.

Тогда в качестве частного решения уравнений (22.22) можно взять функцию

$$\sigma(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma P(x) \mathbf{d}_x, \quad (22.48)$$

где

$$P(x) = \int \rho(x) dx \quad (22.49)$$

и \mathbf{d}_x — единичный орт оси X . Подставляя (22.48) в (22.26), получаем

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; 4\pi\gamma(P(x) - P(x')) \mathbf{d}_x), \quad (22.50)$$

или вне тела:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; 4\pi\gamma P(x) \mathbf{d}_x). \quad (22.51)$$

По аналогии с (22.32) перепишем подробно правую часть формулы (22.51):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}') = & -\gamma \iiint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{d}_x + \right. \\ & \left. + \left[\mathbf{n} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{d}_x \right\} P(x) ds. \end{aligned} \quad (22.52)$$

В проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} g_x(\mathbf{r}') &= -\gamma \iiint_S \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) P(x) ds = \gamma \iiint_S P(x) d\Omega, \\ g_y(\mathbf{r}') &= -\gamma \iiint_S \frac{n_x(y' - y) - n_y(x' - x)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} P(x) ds, \\ g_z(\mathbf{r}') &= \gamma \iiint_S \frac{n_x(z' - z) - n_z(x' - x)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} P(x) ds. \end{aligned} \quad (22.53)$$

Формулы (22.52), (22.53) позволяют свести к поверхностному интегрированию задачу вычисления гравитационного поля объемного тела D с произвольным законом изменения плотности вдоль оси X . Аналогичные формулы могут быть получены для случая, когда $\rho = \rho(y)$.

22.5. Некоторые специальные виды распределений плотности

Рассмотрим теперь более сложные распределения плотности внутри тела. Пусть плотность тела $\rho(\mathbf{r})$ представима в виде суммы трех произвольных интегрируемых функций, зависящих отдельно от координат x , y и z :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_x(x) + \rho_y(y) + \rho_z(z). \quad (22.54)$$

Зададим функцию $\sigma(\mathbf{r})$ в виде

$$\sigma(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma [P(x)\mathbf{d}_x + Q(y)\mathbf{d}_y + R(z)\mathbf{d}_z], \quad (22.55)$$

где

$$P(x) = \int \rho_x(x) dx, \quad Q(y) = \int \rho_y(y) dy, \quad R(z) = \int \rho_z(z) dz. \quad (22.56)$$

Очевидно, что функция $\sigma(\mathbf{r})$, определяемая выражением (22.55), удовлетворяет уравнению (22.22). Следовательно, подставляя (22.55) в (22.26), находим поле тела с заданной плотностью (22.54):

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = 4\pi\gamma \mathcal{C}^S(\mathbf{r}', [(P(x) - P(x'))\mathbf{d}_x + (Q(y) - Q(y'))\mathbf{d}_y + (R(z) - R(z'))\mathbf{d}_z]). \quad (22.57)$$

В качестве примера распределения плотности, представимого в виде (22.54), приведем *линейное изменение плотности*. Тогда

$$\rho(\mathbf{r}) = a_x x + a_y y + a_z z + \rho_0, \quad P(x) = \frac{1}{2} a_x x^2 + \frac{1}{2} \rho_0 x, \\ Q(y) = \frac{1}{2} a_y y^2 + \frac{1}{3} \rho_0 y, \quad R(z) = \frac{1}{2} a_z z^2 + \frac{1}{3} \rho_0 z.$$

Отсюда

$$\sigma(\mathbf{r}) = 2\pi\gamma (a_x x^2 \mathbf{d}_x + a_y y^2 \mathbf{d}_y + a_z z^2 \mathbf{d}_z) + \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{r}. \quad (22.58)$$

Подставляя (22.58) в (22.57), получаем

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = 2\pi\gamma \mathcal{C}^S(\mathbf{r}', [a_x (x^2 - x'^2) \mathbf{d}_x + a_y (y^2 - y'^2) \mathbf{d}_y + a_z (z^2 - z'^2) \mathbf{d}_z + \frac{2}{3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]). \quad (22.59)$$

Формула (22.59) обобщает на трехмерный случай соотношение (8.37).

22.6. Вычисление гравитационного поля трехмерной бесконечно протяженной однородной области

Формулы (22.10) и (22.20) были получены для полей масс, сосредоточенных в конечных областях пространства. Однако эти формулы, аналогично тому, как это сделано в п. 8.7 для двумерных полей, нетрудно распространить на случай, особенно интересный для структурной гравиразведки, когда возмущающее тело простирается в бесконечность.

Рассмотрим область D , ограниченную поверхностью $\Gamma: z = \Delta z(x, y) - h$ и плоскостью $P: z = -h$, причем $h \geq \Delta z(x, y) \geq 0$ и $(\Delta z(x, y) - a) \rightarrow 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, где $a = \text{const}$. Вычислим гравитационный эффект области D , заполненной возмущающими массами однородной плотности ρ_0 . Для этого вырежем из D область D_R , ограниченную сферической поверхностью $O_R (x^2 + y^2 + z^2 = R^2)$ и частями Γ_R и P_R поверхностей Γ и P , вырезаемыми из них сферой O_R . Боковую поверхность сферы O_R , заключенную между Γ и P , обо-

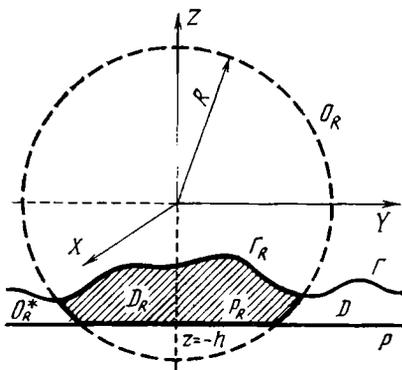


Рис. 34

значим O_R^* (рис. 34). Если через $\mathbf{g}^R(\mathbf{r}')$ обозначить внешнее гравитационное поле области D_R , то гравитационный эффект от области D можно выразить так:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{g}^R(\mathbf{r}'). \quad (22.60)$$

Функция $\mathbf{g}^R(\mathbf{r}')$ согласно (22.11) определяется в виде

$$\mathbf{g}^R(\mathbf{r}') = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (22.61)$$

где $S_R = O_R^* \cup \Gamma_R \cup P_R$ — граница области D_R .

Вычислим последний интеграл, воспользовавшись свойством а) п. 18.1:

$$\mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \mathbf{C}^{\Gamma_R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) + \mathbf{C}^{P_R}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}). \quad (22.62)$$

Интеграл типа Коши по части плоскости P_R можно вычислить следующим образом:

$$\mathbf{C}^{P_R}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = \mathbf{C}^{P_R}(\mathbf{r}'; \Phi^P(\mathbf{r})), \quad (22.63)$$

где $\Phi^P(\mathbf{r})$ — некоторая функция, равная \mathbf{r} на плоскости P_R :

$$\Phi^P(\mathbf{r}) = x \mathbf{d}_x + y \mathbf{d}_y - (2z + 3h) \mathbf{d}_z. \quad (22.64)$$

В самом деле, при $\mathbf{r} \in P_R$

$$\Phi^P(\mathbf{r}) = \Phi^P(x, y, -h) = x \mathbf{d}_x + y \mathbf{d}_y - h \mathbf{d}_z = \mathbf{r} |_{P_R}. \quad (22.65)^3$$

С другой стороны, функция $\Phi^P(\mathbf{r})$ в любой конечной области пространства удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\operatorname{div} \Phi^P(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \Phi^P(\mathbf{r}) = 0. \quad (22.66)$$

Указанное свойство позволяет преобразовать интеграл, стоящий в правой части (22.63). В самом деле, ввиду (22.66) и свойства интеграла типа Коши (18.12)

$$\mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}'; \Phi^P(\mathbf{r})) = 0, \quad (22.67)$$

если точки \mathbf{r}' лежат вне D ($\mathbf{r}' \in C\bar{D}$). Разбивая интеграл в (22.67) на два интеграла по поверхностям P_R и $\Gamma_R \cup O_R^*$ соответственно, находим

$$\mathbf{C}^{P_R}(\mathbf{r}'; \Phi^P(\mathbf{r})) = -\mathbf{C}^{\Gamma_R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; \Phi^P(\mathbf{r})). \quad (22.68)$$

³ В дальнейшем мы будем называть соотношение вида (22.65) уравнением поверхности P_R в гармонической форме (см. п. 26.1).

Подставляя (22.68) в (22.62), записываем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) &= \mathbf{C}^{\Gamma_R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - \mathbf{C}^{\Gamma_R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; \varphi^P(\mathbf{r})) = \\ &= \mathbf{C}^{\Gamma_R}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r})) + \mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (22.69)$$

Отсюда ввиду (22.60) и (22.61) получаем

$$g(\mathbf{r}') = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \left\{ \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{C}^{\Gamma_R}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r})) + \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r})) \right\}, \quad (22.70)$$

где

$$\mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r}) = 3(z+h) \mathbf{d}_z. \quad (22.71)$$

Нетрудно убедиться, что второй предел в (22.70) равен нулю.

В самом деле, оценим по модулю интеграл $\mathbf{C}^{O_R^*}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r}))| &= \frac{3}{4\pi} \left| \iint_{O_R^*} \left\{ (\mathbf{n} \cdot (z+h) \mathbf{d}_z) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\mathbf{n} \times (z+h) \mathbf{d}_z] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds \right| \leq \\ &\leq \frac{6}{4\pi} \iint_{O_R^*} |\mathbf{n}| |z+h| \left| \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right| ds. \end{aligned}$$

Но при больших R заведомо выполняется

$$\left| \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right| < \frac{C_1}{R^2}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad |z+h| = |\Delta z| < 2a.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r}))| \leq \frac{3C_1 a}{\pi R^2} \iint_{O_R^*} ds. \quad (22.72)$$

Площадь поверхности O_R^* при больших R , очевидно, пропорциональна площади прямого кругового кольца высоты a и радиуса R : $\iint_{O_R^*} ds \leq C_2 2\pi R a$. Отсюда окончательно находим

$$|\mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r}))| \leq \frac{6C_1 C_2 a^2}{R} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (22.73)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, согласно (22.70), (22.71)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(\mathbf{r}') &= \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \mathbf{C}^\Gamma(\mathbf{r}'; \mathbf{r} - \varphi^P(\mathbf{r})) = 4\pi \gamma \rho_0 \mathbf{C}^\Gamma(\mathbf{r}'; (z+h) \mathbf{d}_z) = \quad (22.74) \\
 &= -\gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot (z+h) \mathbf{d}_z) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \right. \\
 &\quad \left. + [\mathbf{n} \times (z+h) \mathbf{d}_z] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds,
 \end{aligned}$$

где \mathbf{n} направлен вверх.

Формулу (22.74), используя простое векторное тождество, можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(\mathbf{r}') &= -\gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (z+h) \mathbf{d}_z + \left[\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \times (z+h) \mathbf{d}_z \right\} ds, \quad (22.75)
 \end{aligned}$$

откуда немедленно следуют простые выражения для скалярных компонент гравитационного поля:

$$g_x(\mathbf{r}') = -\gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} (z+h) \frac{n_z(x'-x) - n_x(z'-z)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds, \quad (22.76a)$$

$$g_y(\mathbf{r}') = -\gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} (z+h) \frac{n_z(y'-y) - n_y(z'-z)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds, \quad (22.76б)$$

$$g_z(\mathbf{r}') = -\gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} (z+h) \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds. \quad (22.76в)$$

Отметим, что формулу (22.76в) для вертикальной компоненты гравитационного поля с учетом (22.34) можно записать так:

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \rho_0 \iint_{\Gamma} (z+h) d\Omega, \quad (22.77)$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым из точки \mathbf{r}' виден элемент поверхности ds . Как видим, последняя формула совпадает с выражением для ньютонова потенциала двойного слоя (совмещенного с поверхностью Γ) с плотностью дипольных моментов

$$m_s(\mathbf{r}) = 4\pi \gamma \rho_0 (z+h) = 4\pi \gamma \rho_0 \Delta z(x, y). \quad (22.78)$$

Раскроем теперь явные выражения для компонент гравитационного поля бесконечной области, учитывая, что на Γ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 n_x ds &= -\frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial x} dx dy, \quad n_y ds = -\frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial y} dx dy, \\
 n_z ds &= dx dy, \quad (z+h) = \Delta z(x, y).
 \end{aligned}$$

Тогда соотношения (22.76а)–(22.76в) можно переписать так:

$$g_x(x', y', z') = -\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x, y) \times \\ \times \frac{(x' - x) + (z' - \Delta z(x, y) + h) \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial x}}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - \Delta z(x, y) + h)^2]^{3/2}} dx dy, \quad (22.79a)$$

$$g_y(x', y', z') = -\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta z(x, y) \left\{ (y' - y) + (z' - \Delta z(x, y) + h) \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial y} \right\} \\ \times [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - \Delta z(x, y) + h)^2]^{-3/2} dx dy, \quad (22.79б)$$

$$g_z(x', y', z') = \gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta z(x, y) \left\{ (x' - x) \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial x} + (y' - y) \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial y} - (z' - \Delta z(x, y) + h) \right\} \times \\ \times [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - \Delta z(x, y) + h)^2]^{-3/2} dx dy. \quad (22.79в)$$

Формулы (22.79а)–(22.79в) и дают решение задачи о гравитационном поле бесконечно протяженной области.

Как и в двумерном случае, на базе формул (22.79а)–(22.79в) можно получить *трехмерные линеаризованные представления гравитационного поля*. В самом деле, предположим, что поверхность Γ — очень плавно меняющаяся поверхность, незначительно отклоняющаяся от плоскости P ($z = -h$), т. е. предположим, что

$$\left| \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \Delta z(x, y)}{\partial y} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Delta z(x, y)}{h} \right| \ll 1.$$

Тогда формулы (22.79а)–(22.79в) обращаются в известные выражения для производных ньютонова потенциала простого слоя с поверхностной плотностью, равной $q_s(x, y) = \rho_0 \Delta z(x, y)$:

$$g(\mathbf{r}') = -\gamma\rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (\mathbf{d}_z \cdot (z + h) \mathbf{d}_z) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ \left. + [\mathbf{d}_z \times (z + h) \mathbf{d}_z] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dx dy = -\gamma\rho_0 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta z(x, y) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx dy = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 \Delta z(x, y) \times \\ \times \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx dy. \quad (22.80)$$

Формула (22.80) является трехмерным аналогом формул (8.55).

22.7. Поле бесконечно протяженной области, заполненной массами с плотностью, меняющейся по Z

Все результаты, полученные в предыдущем пункте, можно обобщить на чрезвычайно важный для практики случай, когда плотность внутри бесконечной области D меняется по Z . В самом деле, пусть всюду внутри D $\rho = \rho(z)$. Следуя п. 22.4, обозначим $R(z) = \int \rho(z) dz$. Тогда согласно (22.31) выражение (22.61) для гравитационного поля \mathbf{g}^R части D_R области D можно записать в виде

$$\mathbf{g}^R(\mathbf{r}') = 4\pi\gamma \mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z). \quad (22.81)$$

Последний интеграл представим в виде, аналогичном (22.62):

$$\mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z) = \mathbf{C}^{\Gamma R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z) + \mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z),$$

где второе слагаемое вычисляется так:

$$\mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z) = R(-h) \mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; \mathbf{d}_z) = R(-h) \mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; \Psi(\mathbf{r})).$$

Здесь плотность $\Psi(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{d}_z$. Очевидно, что

$$\operatorname{div} \Psi = 0, \quad \operatorname{rot} \Psi = 0.$$

Следовательно, повторяя все рассуждения п. 22.6, можно преобразовать $\mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; \mathbf{d}_z)$ к виду

$$\mathbf{C}^{PR}(\mathbf{r}'; \mathbf{d}_z) = -\mathbf{C}^{\Gamma R \cup O_R^*}(\mathbf{r}'; \mathbf{d}_z).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{SR}(\mathbf{r}'; R(z) \mathbf{d}_z) &= \mathbf{C}^{\Gamma R}(\mathbf{r}'; [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z) + \\ &\mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z). \end{aligned} \quad (22.82)$$

Положим для простоты, что $\Delta z(x, y) \rightarrow 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, т. е. считаем, что в данном случае $a = 0$. Тогда нетрудно убедиться, повторяя все рассуждения п. 22.6, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{C}^{O_R^*}(\mathbf{r}'; [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z) = 0.$$

Следовательно, подставляя (22.82) в (22.81) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, окончательно получаем следующее выражение для поля всей области D :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}') &= 4\pi\gamma \mathbf{C}^{\Gamma}(\mathbf{r}'; [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z) = \\ &= -\gamma \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ &\left. + [\mathbf{n} \times [R(z) - R(-h)] \mathbf{d}_z] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds. \end{aligned} \quad (22.83)$$

Как видим, формула (22.83) получается из формулы (22.74) простой подстановкой $R(z) - R(-h)$ вместо $\rho_0(z+h)$. Аналогичным образом могут быть распространены на случай произвольного распределения плотности по вертикали и формулы п. 22.6 (22.75) — (22.79в). В частности, формула (22.77) для вертикальной компоненты гравитационного поля принимает следующий вид:

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \iiint_{\Gamma} [R(z) - R(-h)] d\Omega. \quad (22.84)$$

Например, если плотность тела растет с глубиной по линейному закону, то согласно (22.38) $R(z) = \rho_0 z + \frac{1}{2} a z^2$ и (22.84) записываем в виде

$$g_z(\mathbf{r}') = \gamma \iiint_{\Gamma} \rho_0(z+h) \left(1 + \frac{a}{2\rho_0} z - \frac{ah}{2\rho_0} \right) d\Omega. \quad (22.85)$$

23. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Дадим теперь представление магнитного поля в виде трехмерных аналогов интеграла типа Коши по границе области, заполненной намагниченными массами.

23.1. Напряженность и потенциал постоянного магнитного поля

Прежде всего напомним, как вычисляется напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ и магнитный потенциал $W(\mathbf{r}')$ области D , заполненной намагниченными массами с интенсивностью намагничивания (вектором намагниченности) $\mathbf{I}(\mathbf{r}) = (I_x(\mathbf{r}), I_y(\mathbf{r}), I_z(\mathbf{r}))$.

Будем предполагать, что $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ — непрерывно дифференцируемая функция всюду в D вплоть до ее границы S . Плотность дипольных моментов соответствующего объемного поляризованного источника при этом, как известно, равна

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = 4\pi \mathbf{I}(\mathbf{r}). \quad (23.1)$$

Следовательно, в соответствии с (21.14)

$$W(\mathbf{r}') = \iiint_D \mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv. \quad (23.2)$$

Отсюда магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ можно записать так:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \text{grad}' \iiint_D \mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv. \quad (23.3)$$

Выражение (23.2) для магнитного потенциала можно преобразовать, воспользовавшись эквивалентностью объемного поляризо-

ванного источника сумме простого объемного источника и простого слоя (формула (21.16)):

$$W(\mathbf{r}') = - \iint_S \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \iiint_D \frac{\operatorname{div} \mathbf{I}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv, \quad (23.4)$$

где S — граница D . Таким образом, магнитное поле можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & - \iint_D (\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \\ & + \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{I}(\mathbf{r}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Выразим правую часть формулы (23.5) в виде аналога интеграла типа Коши по поверхности S , ограничивающей намагниченные массы.

23.2. Представление магнитного поля произвольного распределения намагниченных масс

Заметим прежде всего, что поверхностный интеграл в правой части (23.5) есть аналог интеграла типа Коши с плотностью

$$\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r})|_S, \quad (23.6)$$

где $\mathbf{I}_n(\mathbf{r})|_S$ — нормальная компонента вектора намагниченности на поверхности S :

$$- \iint_S (\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; -4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r})). \quad (23.7)$$

Преобразуем теперь объемный интеграл в (23.5), воспользовавшись, так же и в случае гравитационного поля, трехмерной формулой Помпей (17.40а), переписанной в виде (22.6). Для этого доопределим функцию $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ в некоторой области D^* , целиком содержащей внутри себя область D и поверхность S , причем так, чтобы $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ была бы непрерывно дифференцируемой функцией в D^* .

Пусть $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — произвольное частное решение в D^* уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{I}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0. \quad (23.8)$$

Отметим, что общее решение (23.8) в D можно немедленно записать с помощью трехмерной формулы Помпей (22.6)

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r}') + \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{I} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv, \quad (23.9)$$

где $\Psi(\mathbf{r}')$ — произвольное лапласово в D векторное поле.

Подставляя любое частное решение (23.8) в формулу Помпей (22.6), получаем

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{h}(\mathbf{r})) + \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{I} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{r}'); & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (23.10)$$

Отсюда находим выражение для объемного интеграла в (23.5)

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{I} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv = \begin{cases} \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{h}(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ -\mathbf{h}(\mathbf{r}') + \mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \mathbf{h}(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (23.11)$$

Подставляя (23.11) и (23.7) в (23.5), окончательно определяем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{h}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \\ -\mathbf{h}(\mathbf{r}') + \mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \mathbf{h}(\mathbf{r}) - 4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r})), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (23.12)$$

Таким образом, мы получили представление в виде интеграла типа Коши для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ внутри и вне области, занятой намагниченными массами. Отметим, что в силу формул Сохоцкого—Племеля (18.30) на границе S области, занятой намагниченными массами, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}_0) &= -\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{C}^{S+}(\mathbf{r}'; \mathbf{h} - 4\pi \mathbf{I}_n) - \mathbf{C}^{S-}(\mathbf{r}'; \mathbf{h} - 4\pi \mathbf{I}_n) = \\ &= -\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{h}(\mathbf{r}_0) - 4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r}_0) = -4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (23.13)$$

где $\mathbf{r}_0 \in S$ и $\mathbf{I}_n(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{I}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ — нормальная компонента вектора намагниченности на поверхности S . Следовательно, тангенциальные компоненты магнитного поля непрерывны при переходе через границу тела S , а нормальные терпят разрыв, равный $-4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r}_0)$.

Правую часть формулы (23.12), так же как и в случае гравитационного поля, можно записать в виде единого аналитического выражения:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^S(\mathbf{r}', \mathbf{h}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{r}') - 4\pi \mathbf{I}_n(\mathbf{r})). \quad (23.14)$$

Выражение (23.14) дает одно из наиболее удобных представлений магнитного поля произвольного распределения намагниченных масс. Этим представлением мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

23.3. Потенциальное распределение намагниченности

Предположим теперь, что намагниченность \mathbf{I} потенциальна в D :

$$\mathbf{I} = \operatorname{grad} U, \quad (23.15a) \quad \operatorname{rot} \mathbf{I} = 0. \quad (23.15b)$$

Тогда формулы (23.12) и (23.14) могут быть существенно упрощены. В самом деле, в этом случае в качестве частного решения

уравнений (23.8) можно взять сам вектор намагниченности, умноженный на 4π :

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = 4\pi\mathbf{I}(\mathbf{r}). \quad (23.16)$$

Подставляя (23.16) в (23.14), находим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = 4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r}) - \mathbf{I}_n(\mathbf{r}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}')). \quad (23.17)$$

Или, представляя $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ на S в виде суммы тангенциальной \mathbf{I}_τ и нормальной \mathbf{I}_n компонент:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_\tau(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S,$$

записываем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = 4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_\tau(\mathbf{r}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}')). \quad (23.18)$$

В частности, для магнитного поля вне масс ввиду тождества $\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r}')) \equiv 0$ получаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = 4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_\tau(\mathbf{r})), \quad (23.19)$$

или подробно

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = - \iint_S \left[[\mathbf{n} \times \mathbf{I}_\tau(\mathbf{r})] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] ds. \quad (23.20)$$

Используя тождество (21.22), выражение (23.20) можно переписать так:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \text{grad}' \left\{ \iint_S U \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds \right\}, \quad (23.21)$$

откуда магнитный потенциал W равен

$$W(\mathbf{r}') = \iint_S U \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds. \quad (23.22)$$

Таким образом, магнитный потенциал тела с произвольным потенциальным распределением намагниченности равен потенциалу двойного слоя, который совпадает с границей тела S и имеет плотность дипольных моментов \mathbf{m}_s , равную

$$\mathbf{m}_s = -4\pi U \mathbf{n}, \quad (23.23)$$

где U — потенциал вектора плотности намагничения \mathbf{I} .

С учетом формулы (21.13а) выражение (23.22) может быть записано в виде

$$W(\mathbf{r}') = - \iint_S U(\mathbf{r}) d\omega, \quad (23.24)$$

где $d\omega$ — телесный угол, под которым виден из точки \mathbf{r}' элемент поверхности ds .

23.4. Лапласово распределение намагниченности

Предположим теперь, что намагниченность $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ — лапласово поле всюду в D , т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{I}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{I}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D. \quad (23.25)$$

Выясним, как упростится в этом случае формула (23.14). Отметим, что при условии (23.25) можно вновь положить в (23.14) $\mathbf{h} \equiv 4\pi\mathbf{I}$, что приводит снова к формуле (23.17). Однако в силу лапласовости $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ в D согласно (18.12) имеем

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r})) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \\ \mathbf{I}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (23.26)$$

С другой стороны, очевидно, выполняется соотношение

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r}')) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \\ \mathbf{I}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D. \end{cases} \quad (23.27)$$

Сравнивая (23.27) и (23.26), видим, что имеет место следующее важное тождество:

$$\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r})) \equiv \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}(\mathbf{r}')). \quad (23.28)$$

Подставляя (23.28) в (23.17), находим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = -4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_n(\mathbf{r})). \quad (23.29)$$

Таким образом, мы имеем следующие два эквивалентных представления для магнитного поля масс с лапласовым распределением вектора намагниченности $\mathbf{I}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = -4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_\tau(\mathbf{r}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}')), \quad (23.30)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = -4\pi\mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_n(\mathbf{r})). \quad (23.31)$$

Отметим, что формулы (23.30), (23.31) справедливы для точек наблюдения, лежащих как вне масс ($\mathbf{r}' \in C\bar{D}$), так и внутри масс ($\mathbf{r}' \in D$).

Раскрывая выражение (23.31), согласно (18.3) окончательно получаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_S (\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds, \quad (23.32)$$

откуда магнитный потенциал $\mathcal{W}(\mathbf{r}')$ равен

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}') = - \iint_S \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds. \quad (23.33)$$

Как видим, магнитный потенциал тела с произвольным лапласовым распределением намагниченности равен потенциалу простого слоя, совпадающего с границей тела S и имеющего поверхностную плотность источников q_s , равную

$$q_s = 4\pi (\mathbf{I}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})|_s. \quad (23.34)$$

Подчеркнем, что формулы (23.31) и (23.33) справедливы во всем пространстве. Таким образом, *магнитное поле лапласова распределения намагниченности является лапласовым как вне масс, так и внутри масс*. Однако лапласовы поля, описывающие магнитное поле в D и $C\bar{D}$, являются *различными*, поскольку при переходе через границу тела интеграл типа Коши (23.31) испытывает скачок. Заметим, наконец, что вне масс для лапласова распределения намагниченности также справедливы формулы (23.19), (23.22) и (23.24).

23.5. Магнитное поле однородно намагниченного тела

В качестве частного, но чрезвычайно важного примера лапласова распределения намагниченности рассмотрим случай однородного намагничивания:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}^0 = \text{const.} \quad (23.35)$$

В соответствии с формулами (23.30), (23.31) магнитное поле однородно намагниченного тела может быть представлено следующим способом:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = 4\pi C^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_r^0 - \mathbf{I}^0) = -4\pi C^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_n^0). \quad (23.36)$$

Важно подчеркнуть, что *представление (23.36) описывает поле во всем пространстве: вне намагниченных масс и внутри намагниченных масс*.

Если ограничиться анализом только внешнего поля (вне масс), то ввиду тождества

$$C^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}^0) \equiv 0, \quad \mathbf{r}' \in C\bar{D},$$

справедливо следующее представление магнитного поля, эквивалентное (23.36):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = 4\pi C^S(\mathbf{r}'; \mathbf{I}_r^0). \quad (23.37)$$

Раскрывая явный вид выражения для трехмерного аналога интеграла типа Коши (см. (18.3)), получаем следующие аналитические представления для магнитного поля:

а) в любой точке пространства

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_S (\mathbf{I}^0 \cdot \mathbf{n}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds; \quad (23.38)$$

б) вне масс

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = - \iint_S \left[\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{I}^0] \right] ds. \quad (23.39)$$

Из выражений (23.38) и (23.39) в соответствии с формулами (23.33) и (23.22) вытекают следующие представления для магнитного потенциала $W(\mathbf{r}')$:

а) в любой точке пространства

$$W(\mathbf{r}') = -I_0 \cdot \iint_S \frac{n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds; \quad (23.40)$$

б) вне масс

$$W(\mathbf{r}') = \iint_S U \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds, \quad (23.41)$$

где U в соответствии с (23.15а) равен

$$U = I_0 \cdot r. \quad (23.42)$$

Обе формулы (23.40) и (23.41) полезны при практическом решении прямых задач магнитометрии.

24. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КЕРТЦА — ЗИБЕРТА РАЗДЕЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В параграфе 11 мы рассмотрели метод Кертца—Зиберта разделения плоского поля на внешнюю и внутреннюю части. Аппарат трехмерных аналогов интеграла типа Коши позволяет обобщить этот метод на случай трех переменных.

24.1. Постановка задачи разделения трехмерного поля

Рассмотрим некоторое потенциальное поле $F(\mathbf{r})$, создаваемое двумя источниками: внешним, распределенным с плотностью $q_e(\mathbf{r})$ в области Q_e , и внутренним, сосредоточенным с плотностью $q_i(\mathbf{r})$ в области Q_i (рис. 35). Очевидно, что

$$F(\mathbf{r}) = F^e(\mathbf{r}) + F^i(\mathbf{r}), \quad (24.1)$$

где F^e и F^i — поля, создаваемые каждым из источников q_e и q_i порознь. Эти поля, так же как и в двумерном случае, называются *внешним* и *внутренним* полями. Обозначим через S произвольную кусочно-гладкую поверхность, разделяющую области Q_e и Q_i , причем S может быть замкнутой или проходить через бесконечно удаленную точку. Задача заключается в том, чтобы по полю F , заданному на S , найти F^e и F^i также на S . Решим эту задачу.

24.2. Разделение полей в обыкновенных точках поверхности

Рассмотрим произвольную точку \mathbf{r}_0 , принадлежащую поверхности S , и проведем из этой точки сферу радиуса R столь большого, чтобы область D , целиком попала внутрь этой сферы. Часть сферы, ограниченную поверхностью S и лежащую в том же полупространстве, что и Q_e , обозначим O_R . Часть поверхности S , ограниченную сферой, обозначим S_R .

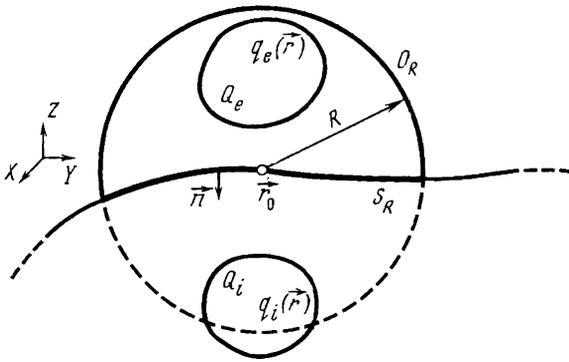


Рис. 35

Определим трехмерный аналог интеграла типа Коши по замкнутой поверхности $\Gamma_R = O_R \cup S_R$: $C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}(r))$. В силу формулы (24.1) и свойства линейности интеграла типа Коши имеем

$$C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}(r)) = C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}^e(r)) + C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}^i(r)). \quad (24.2)$$

Обозначим через D_R область, ограниченную Γ_R . Поскольку поле \mathbf{F}^i — лапласово всюду внутри D_R и непрерывно в \bar{D}_R , согласно трехмерному аналогу интегральной формулы Коши (18.12) имеем

$$C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}^i(r)) = \begin{cases} \mathbf{F}^i(r'), & r' \in D_R, \\ 0 & r' \in \bar{C}D_R. \end{cases} \quad (24.3)$$

Аналогично, так как \mathbf{F}^e — лапласово всюду вне \bar{D}_R (в области $\bar{C}D_R$), непрерывно в CD_R и исчезает на бесконечности, то согласно (17.37)

$$C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}^e(r)) = \begin{cases} 0 & r' \in D_R, \\ -\mathbf{F}(r'), & r' \in \bar{C}D_R. \end{cases} \quad (24.4)$$

Подставляя формулы (24.3) и (24.4) в (24.2), получаем

$$C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}(r)) = \begin{cases} \mathbf{F}^i(r'), & r' \in D_R, \\ -\mathbf{F}^e(r'), & r' \in \bar{C}D_R. \end{cases} \quad (24.5)$$

Устремим теперь в формуле (24.5) точку r' к поверхности S , оставаясь либо внутри области D_R ($r' \rightarrow r_0^+$), либо снаружи ($r' \rightarrow r_0^-$). Тогда в силу непрерывности внешних и внутренних полей в окрестности точки $r_0 \in S$ находим

$$\mathbf{F}^i(r_0) = \lim_{r' \rightarrow r_0^+} C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}(r)) = C^{\Gamma_{R^+}}(r_0; \mathbf{F}(r)), \quad (24.6)$$

$$\mathbf{F}^e(r_0) = - \lim_{r' \rightarrow r_0^-} C^{\Gamma_R}(r'; \mathbf{F}(r)) = -C^{\Gamma_{R^-}}(r'; \mathbf{F}(r)).$$

Предположим, что r_0 — обыкновенная точка поверхности S (т. е. в этой точке существует касательная плоскость к S). Тогда, подставляя в (24.6) формулы Сохоцкого — Племеля (18.32а), (18.32б), записываем

$$\begin{aligned} F^i(r_0) &= 1/2 F(r_0) + C^{FR}(r_0; F(r)), \\ F^e(r_0) &= 1/2 F(r_0) - C^{FR}(r_0; F(r)), \end{aligned} \quad (24.7)$$

где $C^{FR}(r_0; F(r))$ — сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши

Вычислим предел сингулярного интеграла при $R \rightarrow \infty$. Для этого представим его в виде

$$C^{FR}(r_0; F(r)) = C^{OR}(r_0; F(r)) + C^{SR}(r_0; F(r)). \quad (24.8)$$

Первый интеграл в правой части (24.8) с помощью преобразований, аналогичных п. 17.5, можно представить в виде

$$C^{OR}(r_0; F(r)) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{O_R} F(r) ds. \quad (24.9)$$

Поскольку $\lim_{|r| \rightarrow \infty} F(r) = 0$, то правая часть (24.9) также стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} C^{FR}(r_0; F(r)) = \lim_{R \rightarrow \infty} C^{SR}(r_0; F(r)) = C^S(r_0; F(r)). \quad (24.10)$$

Таким образом, переходя в (24.7) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая (24.10), получаем

$$\begin{aligned} F^i(r_0) &= 1/2 F(r_0) + C^S(r_0; F(r)), \\ F^e(r_0) &= 1/2 F(r_0) - C^S(r_0; F(r)). \end{aligned} \quad (24.11)$$

Раскрывая явное выражение для сингулярного интеграла, окончательно записываем

$$F^i(r_0) = 1/2 F(r_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds; \quad (24.12)$$

$$F^e(r_0) = 1/2 F(r_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds,$$

где нормаль \mathbf{n} направлена вниз, как показано на рис. 35.

Формулы (24.12) решают задачу разделения произвольного потенциального поля $F(\mathbf{r})$, заданного на кусочно-гладкой поверхности S , на внешнюю и внутреннюю части в обыкновенных точках этой поверхности.

24.3. Разделение полей в особых точках поверхности

Пусть $r_0 \in S$ особая точка поверхности S и $\theta(r_0)$ — величина телесного угла (в стерадианах) конической поверхности, образованной односторонними касательными к S в точке r_0 (см. п. 18.2). Тогда предельные значения интегралов типа Коши в формуле (24.6) следует определять по соотношениям (18.29)

$$F^i(r_0) = \left(1 - \frac{\theta(r_0)}{4\pi}\right) F(r_0) + C^{IR}(r_0; F(r)), \quad (24.13)$$

$$F^e(r_0) = \frac{\theta(r_0)}{4\pi} F(r_0) - C^{IR}(r_0; F(r)).$$

Переходя, так же как и выше, в формулах (24.13) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и раскрывая явные значения сингулярного интеграла типа Коши, окончательно находим

$$F^i(r_0) = \left(1 - \frac{\theta(r_0)}{4\pi}\right) F(r_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds; \quad (24.14)$$

$$F^e(r_0) = \frac{\theta(r_0)}{4\pi} F(r_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} ds.$$

Последние соотношения решают задачу разделения потенциальных полей в особых точках поверхности S .

24.4. Обобщенные формулы Кертца — Зиберта

Пусть теперь поверхность S совпадает с координатной плоскостью $X\dot{Y}$. Тогда формулы (24.14) принимают следующий вид (где учтено, что нормаль \mathbf{n} направлена в противоположном направлении относительно оси Z):

$$F^i(x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2} F(r_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)F_z dx + (y-y_0)F_z dy - [(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y] dz}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} dx dy; \quad (24.15a)$$

$$F^e(x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2} F(r_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)F_z dx + (y-y_0)F_z dy - [(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y] dz}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{3/2}} dx dy. \quad (24.15b)$$

Если воспользоваться трехмерными операторами Гильберта (19.28а), (19.28б), то последние соотношения принимают вид

$$F_x^i = 1/2 \{F_x - \hat{G}_x F_z\}, F_y^i = 1/2 \{F_y - \hat{G}_y F_z\}, F_z^i = 1/2 \{F_z + \hat{G}_x F_x + \hat{G}_y F_y\}; \quad (24.16а)$$

$$F_x^e = 1/2 \{F_x + \hat{G}_x F_z\}, F_y^e = 1/2 \{F_y + \hat{G}_y F_z\}, F_z^e = 1/2 \{F_z - \hat{G}_x F_x - \hat{G}_y F_y\}. \quad (24.16б)$$

Формулы (24.16а), (24.16б) представляют собой *обобщение на трехмерный случай формул Кертца—Зибберта* (11.19)—(11.20). Так же как и в двумерном случае, трехмерные формулы Кертца—Зибберта позволяют записать интегральные соотношения между компонентами внешнего или внутреннего поля. Действительно, если в (24.16а) положить внешнее поле равным нулю, то

$$F_x^i = -\hat{G}_x F_z^i, F_y^i = -\hat{G}_y F_z^i, F_z^i = \hat{G}_x F_x^i + \hat{G}_y F_y^i. \quad (24.17а)$$

Аналогично, полагая в (24.16б) внутреннее поле равным нулю, находим

$$F_x^e = \hat{G}_x F_z^e, F_y^e = \hat{G}_y F_z^e, F_z^e = -\hat{G}_x F_x^e - \hat{G}_y F_y^e. \quad (24.17б)$$

Таким образом, знание вертикальной компоненты внешнего или внутреннего поля позволяет найти само поле.

Глава седьмая

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

25. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛАПЛАСОВА ПОЛЯ

В гл. 4 мы напомнили читателю основные принципы теории аналитического продолжения функций комплексного переменного. Оказывается, что большинство положений этой теории применимо и к трехмерным лапласовым векторным полям, описываемым вещественными векторными функциями вещественного переменного. Основой такой взаимосвязи является аналитическая природа лапласовых векторных полей.

25.1. Аналитическая природа лапласовых векторных полей

Напомним, что окрестностью $\varepsilon(\mathbf{r}_0)$ точки \mathbf{r}_0 в пространстве называется область, ограниченная сферой радиуса ε с центром в точке \mathbf{r}_0 . *Функция трех переменных* $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ называется

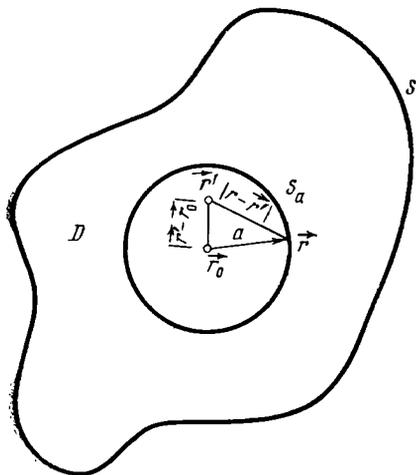


Рис. 36

аналитической в области D , если для любой внутренней точки $r_0(x_0, y_0, z_0)$ из D можно указать окрестность, где $U(r)$ есть сумма абсолютно сходящегося степенного ряда (ряда Тейлора):

$$\begin{aligned}
 U(r) &= U(x, y, z) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{klm} (x-x_0)^k \times \\
 &\times (y-y_0)^l (z-z_0)^m, \quad (25.1)
 \end{aligned}$$

где u_{klm} — коэффициенты ряда Тейлора.

Указанное определение легко обобщается на случай векторных полей. Векторное поле $F(r)$ называется аналитическим в области D , если для любой внутренней точки $r_0 \in D$ существует окрестность, ряда:

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{klm} (x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m, \quad (25.2)$$

где $F(r)$ представимо в виде абсолютно сходящегося степенного где f_{klm} — векторные коэффициенты степенного ряда.

Покажем теперь, что всякое лапласово в D векторное поле является аналитическим в D . Для этого зафиксируем некоторую точку r_0 из D и окружим эту точку сферой S_a радиуса a , целиком лежащей внутри D (рис. 36). С помощью трехмерного аналога интегральной формулы Коши (17.26) можно представить $F(r')$ в любой точке r' , лежащей внутри сферы S_a , через значения этого поля на самой сфере:

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_a} \left\{ (n \cdot F) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds. \quad (25.3)$$

Преобразуем выражение $|r-r'|$ по теореме косинусов (см. рис. 36)

$$|r-r'| = [a^2 + |r'-r_0|^2 + 2(r-r_0)(r'-r_0)]^{1/2} = a \sqrt{1+t}, \quad (25.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{a^2} [|r'-r_0|^2 - 2(r-r_0)(r'-r_0)] = \frac{1}{a^2} [(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 + \\
 &+ (z'-z_0)^2 - 2(x-x_0)(x'-x_0) - 2(y-y_0)(y'-y_0) - 2(z-z_0)(z'-z_0)], \quad (25.5)
 \end{aligned}$$

причем $-1 < t < 3$. Отсюда

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = a^{-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \quad (25.6)$$

Выражение $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ при $|t| < 1$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по степеням t :

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad (25.7)$$

Как видно из (25.5), t выражается через первую и вторую степени $(x'-x_0)$, $(y'-y_0)$ и $(z'-z_0)$. Следовательно, подставляя (25.5) в (25.7), а последнее соотношение в (25.6), мы можем окончательно записать

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{klm} (x'-x_0)^k (y'-y_0)^l (z'-z_0)^m, \quad (25.8)$$

где коэффициенты $b_{klm} = b_{klm}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ есть функции, зависящие от расположения точек \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 . Это разложение верно при условии, что $|t| < 1$. Согласно (25.5) это условие выполняется, если

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'| < \delta, \quad (25.9)$$

где $\delta = (\sqrt{2}-1)a$.

Подставляя степенной ряд (25.8) в (25.3) и учитывая, что этот ряд допускает почленное дифференцирование и интегрирование, получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}_{klm} (x'-x_0)^k (y'-y_0)^l (z'-z_0)^m, \quad (25.10)$$

где

$$\mathbf{f}_{klm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_a} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad } b_{klm} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad } b_{klm}\} ds. \quad (25.11)$$

Последнее разложение, так же как и (25.8), верно в окрестности $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'| < \delta$.

Итак, мы указали окрестность точки \mathbf{r}_0 , в пределах которой лапласово поле \mathbf{F} представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося степенного ряда. Аналогичным образом можно показать, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ разлагается в степенные ряды в окрестности любой внутренней точки области D . Следовательно, всюду в D лапласово поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ является аналитической функцией.

25.2. Единственность лапласовых векторных полей и гармонических функций

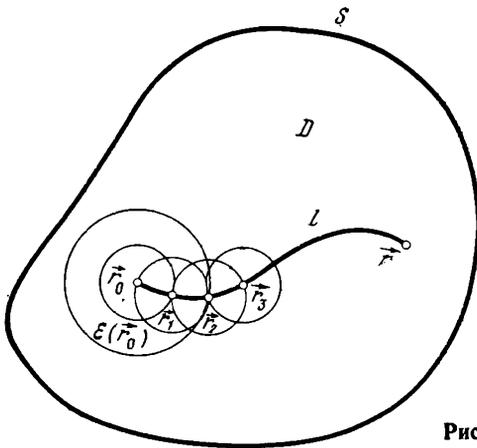


Рис. 37 этой области, то они совпадают всюду внутри D .

Приведем доказательство этого важного положения, следуя работе [Тиман, Трофимов, 1968]. Обозначим через $F(r)$ разность: $F(r) = F_1(r) - F_2(r)$. Очевидно, что мы можем считать, что $F(r) \equiv 0$ при $r \in \varepsilon(r_0)$.

Пусть r — произвольная точка из D . Соединим точку r с r_0 произвольной кусочно-гладкой линией l , лежащей внутри D , и возьмем δ_1 меньше, чем расстояние 1 между l и S (S — граница D). Будем полагать также, что $\delta_1 < \varepsilon$.

Пусть δ ($\delta < \delta_1$) есть радиус окрестности, где справедливо разложение (25.10). Рассмотрим шар радиуса $^3/4\delta$ с центром в точке r_0 . Всюду в этом шаре $F(r) \equiv 0$, следовательно, если точка r находится в этом шаре, то значение в ней рассматриваемого векторного поля равно нулю, что и требовалось доказать.

В противном случае рассматриваем шар $O(r_1)$ радиуса $^3/4\delta$ с центром в точке r_1 , общей для кривой l и границы прежнего шара с центром в точке r_0 (рис. 37). В силу аналитичности поля $F(r)$ всюду в окрестности точки $r_1(x, y, z)$ радиуса δ имеет место разложение

$$F(r') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{klm} (x' - x_1)^k (y' - y_1)^l (z' - z_1)^m. \quad (25.12)$$

С другой стороны, так как $r_1 \in \varepsilon(r_0)$ (см. рис. 37), то в некоторой окрестности r_1 $F(r) \equiv 0$, следовательно, все коэффициенты разложения (25.12) обращаются в нуль в шаре $O(r_1)$. Если $r \in O(r_1)$, то все доказано. В противном случае рассматриваем шар $O(r_2)$ радиуса $^3/4\delta$ с центром в точке r_2 , общей для границы второго шара и дуги кривой l , соединяющей r_0 и r , и т. д. Так как кривая l имеет конечную длину, то за конечное число шагов мы достигнем точки r .

¹ Расстояние между l и S определяется как нижняя грань расстояний между всевозможными парами точек, одна из которых принадлежит l , а другая S .

Таким образом, мы доказали, что $F(\mathbf{r}) \equiv 0$ всюду в D , следовательно, $F_1(\mathbf{r}) \equiv F_2(\mathbf{r})$ также всюду в D .

Отметим, что свойство единственности лапласовых векторных полей в скалярном случае означает единственность гармонических функций. В свою очередь из свойства единственности функций, допускающих разложение в степенной ряд, вытекает, что *если аналитическая в области D функция гармонична в окрестности $O(\mathbf{r}_0)$ какой-либо точки \mathbf{r}_0 из D , то она является гармонической во всей области.*

В самом деле, рассматривая функцию $\Delta U(\mathbf{r})$ (лапласиан от $U(\mathbf{r})$) и соответствующее ей разложение в степенной ряд, мы видим, что она аналитична всюду в области D (так как $U(\mathbf{r})$ аналитична) и в силу гармоничности $U(\mathbf{r})$ тождественно равна нулю в $O(\mathbf{r}_0)$. Следовательно, по свойству единственности $\Delta U(\mathbf{r})$ обращается в нуль всюду внутри D , т. е. $U(\mathbf{r})$ — гармоническая в D функция.

25.3. Понятие аналитического продолжения векторного поля; риманово пространство

Так же как и в двумерном случае, можно ввести понятие аналитического продолжения трехмерных векторных полей.

О п р е д е л е н и е 25.1. *Аналитическим продолжением векторного поля $\Phi_0(\mathbf{r})$, заданного в некоторой области D_0 пространства, называется его доопределение до поля $\Phi(\mathbf{r})$, определенное в некоторой более широкой области $D \supset D_0$, такое, что $\Phi(\mathbf{r})$ аналитично в D , а его сужение на области D_0 совпадает с $\Phi_0(\mathbf{r})$: $\Phi(\mathbf{r})|_{D_0} \equiv \Phi_0(\mathbf{r})$.*

В силу свойства единственности, сформулированного ниже, очевидно, что если существует аналитическое продолжение, то оно единственно.

По аналогии с двумерным случаем (п. 12.3) будем называть аналитическое поле $\Phi(\mathbf{r})$ вместе с областью D его задания *элементом* и обозначать (Φ, D) . Элемент (Φ_2, D_2) называется *непосредственным аналитическим продолжением* элемента (Φ_1, D_1) , если $D_2 \cap D_1 = \Delta$ является областью и $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ в Δ . Совокупность конечного числа элементов (Φ_0, D_0) , (Φ_1, D_1) , ..., (Φ_M, D_M) образует *цепь*, если каждый последующий элемент в указанной совокупности есть непосредственное аналитическое продолжение предыдущего.

Точно так же, как и в двумерном случае, можно определить *понятие общей аналитической функции векторного поля*, как такого множества \mathcal{H} элементов (Φ, D) , для любых двух элементов которого один получается из другого при помощи цепи, все элементы которой принадлежат \mathcal{H} . Векторные поля Φ_j , принадлежащие различным элементам, будем называть *ветвями* общей аналитической функции векторного поля. Общую аналитическую функцию векторного поля, содержащую все аналитические продолжения каждого ее элемента, будем называть *полной аналитической функцией векторного поля*.

Очевидно, что и в трехмерном случае также может иметь место ситуация, изображенная на рис. 16, т. е. при аналитическом продолжении векторного поля Φ_0 мы можем вернуться в область задания исходного элемента (Φ_0, D_0). Таким образом, общие аналитические функции и полные аналитические функции векторного поля, как и в теории функций комплексного переменного, могут быть *многозначными*.

При изучении многозначных аналитических функций и многозначных аналитических векторных полей в пространстве трех измерений необходимо, так же как и в двумерном случае, вместо обычных областей задания этих функций рассматривать многолистные пространства, составленные из нескольких экземпляров (листов) трехмерных областей. Эти многолистные пространства можно представить себе расположенными над обычными трехмерными областями, причем они имеют над точкой g' столько листов (столько экземпляров трехмерных областей), сколько значений приписывает аналитическая функция или аналитическое векторное поле этой точке. Таким образом, в указанных пространствах аналитические функции векторного поля (общие или полные) можно рассматривать как *однозначные функции*, что существенно упрощает их изучение.

Введенное выше многолистное пространство называется римановым пространством данной аналитической функции трех вещественных переменных или данного аналитического векторного поля. Таким образом, *полная аналитическая функция векторного поля есть функция точки ее риманова пространства (а не точки g' обычного евклидова пространства)*. Это обстоятельство надо постоянно иметь в виду при анализе аналитического продолжения векторных полей.

Подчеркнем, что мы здесь не даем достаточно полной теории римановых пространств, изложение которой можно найти в соответствующих математических курсах, а знакомим читателя лишь с основными идеями аналитического продолжения векторных полей, необходимыми для понимания дальнейшего материала книги.

По аналогии с аналитическим продолжением произвольного аналитического векторного поля можно определить понятие аналитического продолжения лапласова поля.

О п р е д е л е н и е 25.2. *Аналитическим продолжением лапласова поля $F_0(\mathbf{r})$, заданного в некоторой области D_0 пространства, называется его доопределение до функции $F(\mathbf{r})$, определенной в некоторой более широкой области $D \supset D_0$, такое, что $F(\mathbf{r})$ — лапласово в D и его сужение на области D_0 совпадает с $F_0(\mathbf{r})$: $F(\mathbf{r})|_{D_0} \equiv F_0(\mathbf{r})$.*

В силу свойства единственности лапласовых векторных полей, доказанного выше, очевидно, что если аналитическое продолжение существует, то оно единственно.

Все введенные выше понятия для описания аналитического продолжения произвольного векторного поля, очевидно, могут быть применены при изучении лапласовых полей. В частности, мы мо-

жем говорить об элементе, о непосредственном аналитическом продолжении, цепи, общей и полной аналитических функциях лапласова поля и о его римановом пространстве. Всеми этими понятиями мы будем пользоваться в дальнейшем.

Заметим в заключение этого пункта, что при доказательстве свойства единственности лапласовых векторных полей мы по существу использовали лишь их аналитичность. Поэтому свойство единственности можно сформулировать для всякого аналитического векторного поля, а именно: *если два аналитических в области D поля $\Phi_1(\mathbf{r})$ и $\Phi_2(\mathbf{r})$ принимают одинаковые значения в окрестности $\varepsilon(\mathbf{r}_0)$ точки \mathbf{r}_0 этой области, то они совпадают всюду внутри D .*

25.4. Продолжение лапласова поля с помощью тейлоровских разложений

Аналитическая природа лапласовых векторных полей позволяет говорить об аналитическом продолжении этих полей. Действительно, пусть лапласово поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ задано в некоторой области D пространства. Разложим лапласово поле в степенные ряды в окрестностях всех внутренних точек области D . Эти степенные ряды сходятся в пределах соответствующих шаровых окрестностей точек $\varepsilon(\mathbf{r})$, где ε — радиусы сходимости степенных рядов. Рассмотрим область $D^{(1)}$, получающуюся в результате объединения всех шаров $\varepsilon(\mathbf{r})$. Может оказаться, что эта область больше, чем первоначальная область, $D^{(1)} \supset D$. Поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ было определено только в D , но поскольку степенные ряды типа (25.10) позволяют вычислить значения лапласова поля внутри любой точки из шара сходимости, то мы можем определить $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и в области $D^{(1)}$. Теперь вновь разлагаем $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в степенные ряды в окрестности любой точки \mathbf{r} из $D^{(1)}$. Строим соответствующие шары сходимости и, объединяя их, образуем новую область $D^{(2)}$. Если область $D^{(2)}$ больше, чем $D^{(1)}$, $D^{(2)} \supset D^{(1)}$, то это означает, что мы сумели продолжить лапласово поле еще дальше за пределы области D . Повторяя неоднократно эту операцию, мы продолжим функцию $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ во все те области пространства, где это возможно. Такое продолжение называют *аналитическим продолжением в смысле Вейерштрасса*, а получающаяся в итоге функция *есть полная аналитическая функция лапласова векторного поля*.

Точки, в которые нельзя указанным выше образом продолжить лапласово поле, называются его *особыми точками*.

Таким образом, *особая точка лапласова поля (или любого аналитического векторного поля) есть такая точка, в окрестности которой поле не может быть представлено сходящимся степенным рядом*. Совокупности особых точек могут образовывать *особые линии, поверхности и целые области*. При этом наряду с *изолированными особыми точками* можно рассматривать *изолированные особые линии*. Последние, так же как особые точки в двумерном случае, делятся на особые линии однозначного или многозначного характера в зависимости от того, однозначна или многозначна

функция в их достаточно малой окрестности. Особые линии многозначного характера называют также *линиями ветвления* поля. С примером линий ветвления лапласовых векторных полей мы познакомимся ниже при аналитическом продолжении геопотенциальных полей внутрь масс и за массы (см. параграфы 27 и 28).

Заметим, наконец, что функция, получаемая с помощью аналитического продолжения гармонической функции, сама является гармонической. Поэтому можно говорить о *гармоническом продолжении* гармонических функций и их особых точках. Этой терминологией мы также будем пользоваться в дальнейшем. Совершенно аналогично показывается, что *полная аналитическая функция лапласова векторного поля во всей области ее существования удовлетворяет уравнению Лапласа.*

25.5. Теорема Сталя (принцип непрерывности для лапласова поля)

Наряду с определением понятия аналитического продолжения функции трех переменных в смысле Вейерштрасса, данным выше, можно, так же как и в двумерном случае, определить процедуру продолжения в смысле Пенлеве. В основе этого определения лежит следующая теорема Сталя [Сретенский, 1946].

Теорема 25.1. Пусть D_1 и D_2 — две трехмерные области, пересечение которых есть пустое множество и которые имеют общий участок границ, состоящий из гладкой поверхности S . Если векторные поля $F_1(\mathbf{r})$ и $F_2(\mathbf{r})$ — лапласовы в области D_1 и D_2 соответственно, непрерывны вплоть до S и, кроме того,

$$F_1(\mathbf{r}) \equiv F_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (25.13)$$

то поле $F_2(\mathbf{r})$ является аналитическим продолжением поля $F_1(\mathbf{r})$ из области D_1 в область D_2 через поверхность S .

Докажем теорему. Для этого определим поле $F(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$F(\mathbf{r}) = \begin{cases} F_1(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_1, \\ F_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_2, \\ F_1(\mathbf{r}) = F_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \end{cases} \quad (25.14)$$

Очевидно, что нам необходимо установить аналитичность поля $F(\mathbf{r})$ в окрестности произвольной точки \mathbf{r}_0 поверхности S (за исключением, быть может, ее границы — контура l). Проведем из точки \mathbf{r}_0 сферу O_δ радиуса δ столь малого, чтобы она вырезала из S только один связный кусок δS (рис. 38). Очевидно, это возможно, так как S — гладкая поверхность. Обозначим через $O_\delta^{(1)}$ часть сферы O_δ , лежащую в D_1 , а через $O_\delta^{(2)}$ — часть сферы, попавшую в D_2 . Соответственно $V_\delta^{(1)}$ и $V_\delta^{(2)}$ — части шара, ограниченного O_δ , лежащие в D_1 и D_2 .

В силу трехмерной интегральной формулы Коши (18.12) имеем

$$\mathbf{C}_{\delta}^{o(1)+\delta S}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_1(\mathbf{r})) = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}), & \mathbf{r}' \in V_{\delta}^{(1)}, \\ 0 & \mathbf{r}' \in V_{\delta}^{(2)}, \end{cases} \quad (25.15a)$$

$$\mathbf{C}_{\delta}^{o(2)+\delta S}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_2(\mathbf{r})) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \in V_{\delta}^{(1)}, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r}' \in V_{\delta}^{(2)}. \end{cases} \quad (25.15b)$$

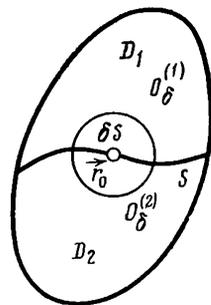


Рис. 38

Складывая левые и правые части (25.15a), (25.15b), с учетом (25.14) получаем

$$\mathbf{C}_{\delta}^{o(1)+\delta S}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_1(\mathbf{r})) + \mathbf{C}_{\delta}^{o(2)+\delta S}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_2(\mathbf{r})) = \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \quad (25.16)$$

Вместе с тем благодаря совпадению граничных значений полей $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$ на S интегралы типа Коши, взятые вдоль δS (с разными направлениями нормалей к δS), сокращаются и мы получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_{\delta}^{o(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_1(\mathbf{r})) + \mathbf{C}_{\delta}^{o(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}_2(\mathbf{r})) = \mathbf{C}^{o\delta}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}(\mathbf{r})). \quad (25.17)$$

В свою очередь интеграл типа Коши, стоящий в правой части (25.17), всюду внутри O_{δ} определяет лапласово векторное поле, т. е. аналитическую функцию, что и требовалось доказать.

Теорему 25.1 можно рассматривать как *принцип непрерывности* для трехмерных лапласовых полей. Тот факт, что функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, определяемая соотношением (25.14), есть аналитическая функция всюду в $D = D_1 \cup D_2$, как раз и означает, что $\mathbf{F}_2(\mathbf{r})$ есть аналитическое продолжение поля $\mathbf{F}_1(\mathbf{r})$ из D_1 в более широкую область D .

26. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поверхность интегрирования, как уже отмечалось в параграфе 18, является особой поверхностью для функций, описываемых интегралами типа Коши. В то же время в ряде случаев оказывается возможным аналитически продолжить интегралы типа Коши через поверхность интегрирования. Эта задача имеет важное значение в геофизических приложениях. Определим класс поверхностей интегрирования, для которых справедливо указанное свойство трехмерных интегралов типа Коши.

26.1. Понятие аналитического куска поверхности; уравнения поверхности в гармонической форме

Рассмотрим некоторый простой гладкий кусок поверхности Γ , уравнение которого параметрически представляется следующим образом:

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad z = z(s, t) \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad t_a \leq t \leq t_b, \quad (26.1)$$

где s_a, t_a и s_b, t_b — некоторые константы.

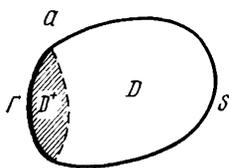


Рис. 39

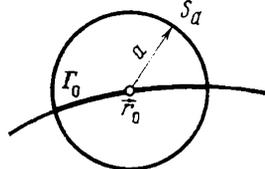
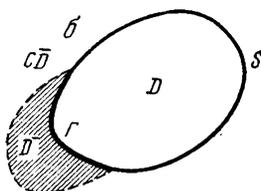


Рис. 40

Поверхность Γ называется аналитической, если $x(s, t)$, $y(s, t)$ и $z(s, t)$ — аналитические функции действительных переменных s и t в прямоугольнике:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_a \leq s \leq s_b \\ t_a \leq t \leq t_b \end{array} \right\}$$

Аналитический кусок поверхности Γ называется *регулярным* или *правильным*, если ранг матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right\|$$

равен 2. Это эквивалентно условию

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \neq 0, \quad (26.2)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.

Отметим, что наряду с представлением (26.1) существует эквивалентная форма задания аналитического куска поверхности следующим уравнением:

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (26.3)$$

где $\Phi(x, y, z)$ — аналитическая функция трех действительных переменных в некоторой трехмерной окрестности поверхности Γ .

В дальнейшем важное значение будет иметь особый класс поверхностей, которые мы назовем гармоническими поверхностями.

Определение 26.1. Будем говорить, что некоторый кусок Γ поверхности S , ограничивающей область D , имеет гармоническую внутреннюю сторону (является предельно-гармоническим с внутренней стороны), если в области $D^+ \subset D$, примыкающей к поверхности Γ (рис. 39, а), существует гармоническая функция $\Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r})$, такая, что

$$\text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (26.4)$$

Определение 26.2. Аналогично будем говорить, что поверхность Γ имеет гармоническую внешнюю сторону (является

предельно-гармонической с внешней стороны), если в некоторой области $D \subset C\bar{D}$, примыкающей к поверхности Γ (рис. 39, б), существует гармоническая функция $\Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r})$, такая, что

$$\text{grad } \Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (26.5)$$

Определение 26.3. Если поверхность Γ имеет гармонические внешнюю и внутреннюю стороны, то будем говорить, что Γ есть гармоническая поверхность. При этом уравнение такой поверхности принимает вид

$$\text{grad } \Phi^{\Gamma}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (26.6)$$

где $\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r}) \equiv \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}) \equiv \Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r})$.

Легко убедиться, что всякая гармоническая поверхность является аналитической поверхностью, т. е. уравнение этой поверхности определяется с помощью аналитических функций. В самом деле, функция $\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r})$, задающая уравнение (26.6) гармонической поверхности, является гармонической, а всякая гармоническая функция, как было показано выше, аналитична.

Докажем теперь обратное положение. Всякая аналитическая поверхность Γ является гармонической, т. е. в окрестности Γ существует такая гармоническая функция $\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r})$, что на Γ выполнено $\mathbf{r} = \text{grad } \Phi^{\Gamma}(\mathbf{r})$.

Доказательство. Пусть Γ — аналитическая поверхность. Выделим некоторую точку $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$ и рассмотрим уравнение

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -3. \quad (26.7)$$

Согласно теореме Коши — Ковалевской [Сретенский, 1946, с. 208] можно найти такой аналитический интеграл $\varphi(\mathbf{r})$ уравнения (26.7), который вместе со своей нормальной производной обращался бы в нуль на поверхности Γ в некоторой окрестности Γ_0 точки \mathbf{r}_0 (рис. 40). Следовательно,

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_0. \quad (26.8)$$

Построим сферу S_a с центром в точке \mathbf{r}_0 и столь малого радиуса a , чтобы внутри этой сферы функция $\varphi(\mathbf{r})$ была аналитической, и определим внутри сферы S_a функцию $\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r})$:

$$\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}r^2. \quad (26.9)$$

Очевидно, что

$$\Delta \Phi^{\Gamma}(\mathbf{r}) = \Delta \varphi(\mathbf{r}) + 3 = 0,$$

т. е. $\Phi^{\Gamma}(\mathbf{r})$ — гармоническая функция внутри S_a . С другой стороны, согласно (26.8) и (26.9)

$$\text{grad } \Phi^{\Gamma}(\mathbf{r}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{r} = \mathbf{r} \text{ при } \mathbf{r} \in \Gamma_0. \quad (26.10)$$

Следовательно, по определению Γ_0 есть гармоническая поверхность. Повторяя это рассуждение для каждой точки $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$, находим, что вся Γ — гармоническая поверхность.

Таким образом, понятие гармонической поверхности совпадает с понятием аналитической поверхности. В дальнейшем уравнения

(26.4)–(26.6) будем называть *уравнениями поверхности* Γ (или ее внутренней и внешней сторон) *в гармонической форме*. В качестве примера гармонической поверхности рассмотрим сферу S_{R_0} радиуса R_0 с центром в начале координат: $x^2+y^2+z^2=R_0^2$. Определим гармоническую функцию $\Phi^\Gamma(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{-R_0^3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{R_0^3}{r^3},$$

где $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Тогда

$$\text{grad } \Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{R_0^3}{r^3} \mathbf{r}. \quad (26.11)$$

Функция $\Phi^\Gamma(\mathbf{r})$ по определению удовлетворяет во всем пространстве (кроме начала координат) уравнению Лапласа $\Delta\Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = 0$ и условию

$$\text{grad } \Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{R_0^3}{R_0^3} \mathbf{r} = \mathbf{r} \text{ при } r \in O_{R_0}; \quad (26.12)$$

Уравнение (26.12) и представляет собой уравнение сферы O_{R_0} в гармонической форме.

Другим простейшим примером гармонической поверхности может служить плоскость $P: c_x x + c_y y + c_z z = c_0$, т. е. $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_0$, где $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

Действительно, соответствующая гармоническая функция может быть задана в виде

$$\Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = -\frac{3}{2} \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})^2}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} + \frac{1}{2} r^2 + \frac{3c_0(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \quad (26.13)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\text{grad } \Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = -3 \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{c} + \mathbf{r} + \frac{3c_0 \mathbf{c}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}$$

Отсюда

$$\Delta\Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = \text{div grad } \Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = -3+3=0,$$

т. е. $\Phi^\Gamma(\mathbf{r})$ — функция гармоническая.

С другой стороны, поскольку на плоскости P имеем $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_0$, то $\text{grad } \Phi^\Gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ при $\mathbf{r} \in P$. Следовательно, функция $\Phi^\Gamma(\mathbf{r})$, определяемая формулой (26.13), задает уравнение плоскости P в гармонической форме.

26.2. Связь между уравнением поверхности в гармонической форме и уравнением плоской кривой в форме Цирульского

В частном случае, если аналитическая поверхность Γ представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Y , то из (26.6) можно получить уравнение проекции L по-

верхности Γ на плоскость XZ :

$$\frac{\partial \Phi^\Gamma(x, 0, z)}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial \Phi^\Gamma(x, 0, z)}{\partial z} = z. \quad (26.14)$$

Если ввести на плоскости XZ комплексную переменную $\zeta = x + iz$ и обозначить $\partial \Phi^\Gamma(x, 0, z)/\partial x = a(x, z)$, $\partial \Phi^\Gamma(x, 0, z)/\partial z = -b(x, z)$, то соотношение (26.14) в комплексной форме принимает вид

$$x - iz = a(x, z) + ib(x, z). \quad (26.15)$$

Легко убедиться, что в силу гармоничности функции $\Phi(r)$ функции a и b удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\partial a/\partial z = -\partial b/\partial x, \quad \partial a/\partial x = \partial b/\partial z.$$

Следовательно, функция $\psi(\zeta) = a(x, z) + ib(x, z)$, стоящая в правой части (26.15), является комплексно-аналитической и равенство (26.15) записывается окончательно в виде

$$\bar{\zeta} = \psi(\zeta), \quad (26.16)$$

где черта над ζ означает взятие сопряженной величины. Выражение (26.16) есть уравнение плоской кривой в форме Цирульского (13.11). Таким образом, в случае двумерных возмущающих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, уравнения этих поверхностей в гармонической форме (26.6) переходят в уравнения контуров поперечного сечения возмущающих тел в форме Цирульского (26.16). Выявленная взаимосвязь между уравнениями (26.6) и (26.16) позволяет непосредственно переносить результаты, полученные для трехмерных полей, на двумерный случай.

26.3. Продолжение интеграла типа Коши через поверхность интегрирования

Рассмотрим некоторый аналитический кусок Γ поверхности S , на которой задан аналог интеграла типа Коши с векторной плотностью $\Phi(r)$. Будем предполагать, что компоненты $\Phi(r)$ описываются на Γ аналитическими функциями координат. Заметим, что при этом они заведомо являются дифференцируемыми на Γ , следовательно, удовлетворяют условию Гельдера. Зафиксируем некоторую точку $r_0 \in \Gamma$. Тогда согласно теореме Коши — Ковалевской [Сретенский, 1946] в окрестности точки r_0 существует гармоническая функция $\Phi^\Gamma(r)$, удовлетворяющая на поверхности Γ условию

$$\left. \frac{\partial \Phi^\Gamma}{\partial n} \right|_\Gamma = \Phi_n, \quad \Phi^\Gamma|_\Gamma = \Phi, \quad (26.17)$$

где Φ — скалярная плотность интеграла типа Коши, связанная с векторной плотностью соотношением (21.19). Ясно, что

$$\text{grad } \Phi^\Gamma|_\Gamma = \Phi. \quad (26.18)$$

Воспользуемся теперь формулами Сохоцкого – Племеля для аналогов интеграла типа Коши. Согласно (18.30) и (26.18)

$$C^-(r_0; \varphi) = C^+(r_0; \varphi) - \text{grad } \Phi^\Gamma(r_0). \quad (26.19)$$

Очевидно, что правая часть (26.19) представляет собой граничные значения на Γ векторных полей, лапласовых в некоторой области D^+ , примыкающей к Γ и целиком лежащей внутри D . Левая часть описывает граничные значения векторных полей, лапласовых всюду вне D . Следовательно, по теореме Сталя (п. 25.5) правая часть представляет собой аналитическое продолжение левой через поверхность Γ . Аналогично доказывается возможность продолжения интегралов типа Коши через аналитический кусок поверхности Γ изнутри наружу.

Из формулы (26.19) видно, что продолженные через поверхность значения аналогов интеграла типа Коши $C^{\text{cont}}(r; \varphi)$ отличаются от самих интегралов $C(r; \varphi)$ на величину, равную $-\text{grad } \Phi^\Gamma(r)$:

$$C^{\text{cont}}(r; \varphi) - C(r; \varphi) = -\text{grad } \Phi^\Gamma(r). \quad (26.20)$$

Отсюда вытекают два следствия. Во-первых, особые точки C^{cont} совпадают с особыми точками $\text{grad } \Phi^\Gamma(r)$. Во-вторых, линии смыкания различных аналитических кусков поверхности S являются линиями ветвления для аналогов интеграла типа Коши. Эти свойства аналогов интеграла типа Коши позволяют нам в дальнейшем исследовать вопрос об аналитическом продолжении внешних геопотенциальных полей внутрь возмущающих масс.

27. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ВНУТРЬ ОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО ТЕЛА

Полученные в параграфах 22 и 23 представления внешних гравитационных и магнитных полей в виде аналогов интеграла типа Коши лежат в основе теории продолжения поля внутрь масс и за массы. Изложение основ этой теории начнем с изучения общих свойств гравитационного поля однородного материального тела, ограниченного аналитической поверхностью.

27.1. Свойства гравитационного поля тела, ограниченного аналитической поверхностью

Рассмотрим произвольное тело конечного объема D , заполненного массами постоянной положительной плотности ρ_0 и ограниченного гладкой поверхностью S . Внешний потенциал этого тела обозначим $U(r)$, $r \in \overline{CD}$. Определим также внешний потенциал $U_{CD}(r)$, $r \in D$, области CD , заполненной массами той же плотности (рис. 41).

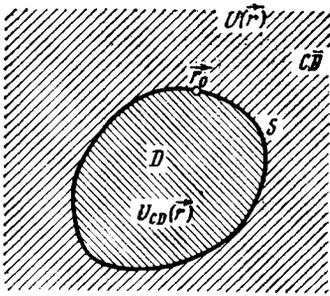


Рис. 41

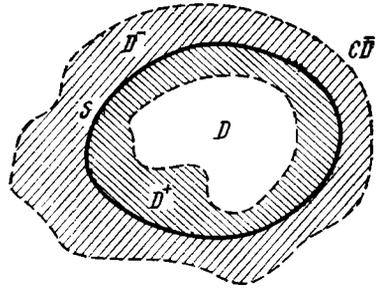


Рис. 42

Согласно формулам (22.11) и (22.16) имеем

$$g(r') = \text{grad}' U(r') = C^S \left(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r \right), \quad r' \in CD, \quad (27.1)$$

$$g_{CD}(r') = \text{grad}' U_{CD}(r') = -C^S \left(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r \right), \quad r' \in D.$$

Разность предельных значений интеграла, стоящего в правой части (27.1), на поверхности S при подходе к этой поверхности изнутри и извне области D определяется согласно формуле Сохоцкого — Племеля (18.30):

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} C^S \left(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r \right) - \lim_{r \rightarrow r_0^-} C^S \left(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r \right) = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r_0.$$

С учетом (27.1) записываем

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} [-g_{CD}(r)] - \lim_{r \rightarrow r_0^-} [g(r)] = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r_0.$$

Отсюда окончательно получаем

$$g(r_0) + g_{CD}(r_0) = -\left(4\pi/3\right) \gamma \rho_0 r_0. \quad (27.2)$$

Из соотношения (27.2) могут быть сделаны следующие выводы, обобщающие на трехмерный случай соответствующие результаты, полученные Цирульским для плоских полей (п. 15.1).

Теорема 27.1. *Для того чтобы замкнутая гладкая поверхность S была гармонической поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы функция $U(r)$ могла быть аналитически (гармонически) продолжена внутрь, а функция $U_{CD}(r)$ — во внешность области, ограниченной S , через любую точку поверхности S .*

Доказательство. Докажем достаточность условия теоремы. Пусть функция $U(r)$ может быть продолжена внутрь в некоторую часть D^+ области D , прилегающую к S , а функция $U_{CD}(r)$ — вовне, в некоторую часть D^- области CD , прилегающую к S

(рис. 42). Обозначим через D^s область, образованную объединением областей D^+ и D^- (заштрихованы на рис. 42). Тогда функции $U(r)$ и $U_{CD}(r)$ — гармонические всюду в D^s . Определим функцию $\Phi^s(r)$ так:

$$\Phi^s(r) = -\frac{3}{4\pi\gamma\rho_0} [U(r) + U_{CD}(r)], \quad r \in D^s. \quad (27.3)$$

Эта функция по построению гармоническая в D^s , причем согласно (27.2)

$$\text{grad } \Phi^s(r) = -\frac{3}{4\pi\gamma\rho_0} [g(r) + g_{CD}(r)] = r, \quad r \in S. \quad (27.4)$$

Выражение (27.4) есть уравнение поверхности S в гармонической форме. Следовательно, S — гармоническая поверхность, что и требовалось доказать.

Докажем теперь необходимость выполнения условия теоремы. Пусть поверхность S — гармоническая и ее уравнение в гармонической форме имеет вид

$$\text{grad } \Phi^s(r) = r. \quad (27.5)$$

Тогда, подставляя (27.5) в (27.2), получаем

$$g(r_0) + g_{CD}(r_0) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^s(r_0), \quad (27.6)$$

где r_0 — произвольная точка поверхности S . Из (27.6) следует

$$g(r_0) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^s(r_0) - g_{CD}(r_0). \quad (27.7)$$

Поле $g_{CD}(r)$ — лапласово в D , а $\text{grad } \Phi^s$ — лапласов в некоторой области D^+ , принадлежащей D (рис. 42), поэтому эти функции, стоящие в правой части равенства (27.7), допускают аналитическое продолжение внутрь D (по крайней мере в области D^+). Следовательно, и $g(r)$ может быть аналитически продолжена внутрь D :

$$g^{\text{cont}}(r) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^s(r) - g_{CD}(r). \quad (27.8)$$

Интегрируя (27.8) и учитывая, что $g = \text{grad } U$ и $g_{CD} = \text{grad } U_{CD}$, получаем

$$U^{\text{cont}}(r) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \Phi^s(r) - U_{CD}(r), \quad r \in D^+, \quad (27.9)$$

где произвольная константа, появляющаяся при интегрировании, введена в функцию $\Phi^s(r)$.

Аналогично доказывается возможность продолжения $U_{CD}(r)$ во вне области D и справедливость формулы

$$U_{CD}^{\text{cont}}(r) = -\left(\frac{4\pi}{3}\right)\gamma\rho_0 \Phi^s(r) - U(r), \quad r \in D^-. \quad (27.10)$$

Из соотношений (27.9) и (27.10) следует, что множество особых точек аналитически продолженных через поверхность S полей совпадает со множеством особенностей функции $\Phi^s(r)$ внутри и вне области D соответственно.

Обратимся теперь к формуле (22.14), определяющей гравитационное поле $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ внутри тела ($\mathbf{r}' \in D$). С учетом (22.16) этой формуле можно придать следующий вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = - (4\pi/3) \gamma \rho_0 \mathbf{r} - \mathbf{g}_{CD}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D. \quad (27.11)$$

Сравнивая формулы (27.11) и (27.8), видим, что аналитическое продолжение внешнего гравитационного поля внутрь масс отличается от истинного поля на величину, равную

$$\mathbf{g}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) - \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 [\mathbf{r} - \text{grad } \Phi^S(\mathbf{r})]. \quad (27.12)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда функция $\Phi^S(\mathbf{r})$, описывающая гармоническую поверхность S , не имеет особенностей вне S . Тогда из доказательства теоремы 27.1 видно, что функция $U_{CD}(\mathbf{r})$, аналитически продолженная во все пространство, нигде не имеет особенностей, т. е. является гармонической во всем пространстве. По теореме Лиувилля [Сретенский, 1946] функция, гармоническая во всем пространстве, тождественно равна константе:

$$U_{CD}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) \equiv \text{const}. \quad (27.13)$$

Подставив (27.13) в (27.10), находим

$$U(\mathbf{r}) = - (4\pi/3) \gamma \rho_0 \Phi^S(\mathbf{r}) + \text{const}. \quad (27.14)$$

Перейдем в (27.14) к пределу при $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(\mathbf{r}) = - (4\pi/3) \gamma \rho_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^S(\mathbf{r}) + \text{const}.$$

Но $\lim_{r \rightarrow \infty} U(\mathbf{r}) = 0$, следовательно,

$$\text{const} = (4\pi/3) \gamma \rho_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^S(\mathbf{r}). \quad (27.15)$$

Подставляя (27.15) в (27.14), получаем

$$U(\mathbf{r}) = - (4\pi/3) \gamma \rho_0 \Phi^S(\mathbf{r}) + (4\pi/3) \gamma \rho_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^S(\mathbf{r}). \quad (27.16)$$

Формула (27.16) позволяет, не прибегая к интегрированию, решить прямую задачу теории трехмерного потенциала для тела, ограниченного гармонической поверхностью S , которая определяется функцией $\Phi^S(\mathbf{r})$, гармонической всюду вне S . Например, для шара радиуса R_0 с центром в начале координат согласно (26.11) имеем

$$\Phi(\mathbf{r}) = - R_0^3 / r. \quad (27.17)$$

Подставляя (27.17) в (27.16), определяем

$$U(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \frac{R_0^3}{r} = \gamma \frac{M}{r}, \quad (27.18)$$

где $M = \rho_0 (4\pi/3) R_0^3$ — масса шара.

27.2. Связь формы поверхности трехмерного однородного материального тела с расположением особенностей аналитически продолженных внутрь тела значений гравитационного поля

Обобщим результаты, полученные в п. 27.1, на случай тела, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью. Центральным при этом является вопрос о связи особых точек аналитически (гармонически) продолженных значений гравитационного поля с формой поверхности возмущающего тела.

Впервые этот вопрос исследовался в работах Шмидта и Вавра [Wavre, 1934], которые показали, что гравитационный потенциал может быть продолжен через поверхность тела внутрь масс, если эта поверхность — аналитическая. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах А. В. Цирульского [1963], А. В. Цирульского и М. И. Сиротина [1964], Г. Я. Голиздры [1966], В. Н. Страхова [1970 г], где было показано, что в случае двумерных (плоских) полей поставленная проблема может быть решена исчерпывающим образом и в то же время достаточно просто путем использования аппарата теории функций комплексного переменного и прежде всего интеграла Коши. Результаты этих исследований мы рассмотрели в гл. 4. В настоящем параграфе мы увидим, что и в трехмерном случае указанный вопрос может быть разрешен с неменьшей полнотой и легкостью благодаря использованию развитого выше аппарата трехмерных аналогов интеграла типа Коши.

Согласно формуле (27.1) интеграл типа Коши

$$C^S \left(r'; \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r \right) \quad (27.19)$$

имеет вне D смысл гравитационного поля области D , а внутри D — гравитационного поля (со знаком «минус») области CD , заполненных массами постоянной плотности ρ_0 . Разность предельных значений интеграла (27.19) на кусочно-гладкой поверхности S , ограничивающей область D , при подходе к этой поверхности изнутри и извне области D определяется аналогично (27.2) согласно формуле Сохоцкого — Племеля (18.30):

$$g(r_0) + g_{CD}(r_0) = -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 r_0, \quad \text{где } r_0 \in S. \quad (27.20)$$

Предположим теперь, что гравитационное поле $g(r)$ области D задано в некоторой области Ω , лежащей вне D ($\Omega \subset CD$). Функцию $g(r)$ можно аналитически продолжить во все точки области CD , поскольку она там гармонична. Выясним, при каких условиях внешнее гравитационное поле может быть продолжено внутрь области D , т. е. *внутрь масс*, и где находятся особенности такого продолжения.

Теорема 27.2. *Функция $g(r)$ ($g_{CD}(r)$) может быть аналитически продолжена внутрь (вовне) области D через любую точку не-*

которой поверхности Γ , принадлежащей S , за исключением, быть может, контура l , ее ограничивающего, в том и только том случае, когда поверхность Γ имеет гармоническую внутреннюю (внешнюю) сторону.

Доказательство. Предположим первоначально, что поверхность Γ имеет гармоническую внутреннюю сторону и уравнение ее внутренней стороны в гармонической форме имеет вид

$$\text{grad } \Phi^{+\Gamma} = g. \quad (27.21)$$

Тогда, подставляя (27.21) в (27.20), имеем

$$g(\mathbf{r}_0) + g_{CD}(\mathbf{r}_0) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}_0), \quad (27.22)$$

откуда

$$g(\mathbf{r}_0) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}_0) - g_{CD}(\mathbf{r}_0), \quad (27.23)$$

где \mathbf{r}_0 — произвольная внутренняя точка поверхности Γ .

Поскольку функции, стоящие в правой части (27.23), допускают аналитическое продолжение внутрь D , то и $g(\mathbf{r})$ может быть аналитически продолжена внутрь D , в некоторую область D^+ (см. рис. 42):

$$g^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{3}\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}) - g_{CD}(\mathbf{r}). \quad (27.24)$$

Учитывая, что $g^{\text{cont}} = \text{grad } U^{\text{cont}}$, и интегрируя (27.24), получаем

$$U^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}) - U_{CD}(\mathbf{r}), \quad (27.25)$$

где произвольная константа, появляющаяся при интегрировании, введена в функцию $\Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r})$.

Если теперь предположить, напротив, что функция $g(\mathbf{r})$ может быть аналитически продолжена в некоторую область $D^+ \subset D$ (см. рис. 42), примыкающую к Γ (за исключением, быть может, контура l), то, вводя обозначения

$$\text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}) = -\frac{3}{4\pi\gamma\rho_0} (g(\mathbf{r}) + g_{CD}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in D^+, \quad (27.26)$$

получаем на основании (27.20)

$$\text{grad } \Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r}_0) = g, \quad \mathbf{r}_0 \in \Gamma, \quad (27.27)$$

откуда следует, что поверхность Γ имеет гармоническую внутреннюю сторону.

Аналогично проводится доказательство для функции g_{CD} , причем гармоническое продолжение этой функции в $C\bar{D}$ определяется формулой

$$g_{CD}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \text{grad } \Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}), \quad (27.28)$$

откуда

$$U_{CD}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0 \Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}). \quad (27.29)$$

Из соотношений (27.25) и (27.29) следует, что множество особых точек аналитически продолженных через поверхность Γ полей совпадает со множеством особенностей функции $\Phi^{+\Gamma}(\mathbf{r})$ внутри D и функции $\Phi^{-\Gamma}(\mathbf{r})$ вне D соответственно.

Выясним теперь, какие точки на поверхности возмущающего тела являются особыми для аналитически продолженных потенциальных полей. Пусть гладкие куски Γ_i , составляющие поверхность S , имеют гармонические внутренние стороны и уравнения этих сторон в гармонической форме имеют вид

$$\text{grad } \Phi^{+\Gamma_i}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

причем

$$\Phi^{+\Gamma_i}(\mathbf{r}) \neq \Phi^{+\Gamma_j}(\mathbf{r}) \quad \text{при } i \neq j. \quad (27.30)$$

Предположим, что контуры l_i и l_{i+1} , ограничивающие поверхности Γ_i и Γ_{i+1} , совпадают по некоторому отрезку $l_{i,i+1}$. Этот отрезок будем называть линией смыкания двух поверхностей Γ_i и Γ_{i+1} . Покажем, что линии смыкания поверхностей являются линиями ветвления для потенциала и его производных.

Действительно, гармонически продолжая $U(\mathbf{r})$ через поверхность Γ_i , находим в силу (27.25)

$$U^{(i)}(\mathbf{r}) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0\Phi^{+\Gamma_i}(\mathbf{r}) - U_{CB}(\mathbf{r}), \quad (27.31)$$

а продолжая $U(\mathbf{r})$ через поверхность Γ_{i+1} , определяем

$$U^{(i+1)}(\mathbf{r}) = -(4\pi/3)\gamma\rho_0\Phi^{+\Gamma_{i+1}}(\mathbf{r}) - U_{CB}(\mathbf{r}). \quad (27.32)$$

В силу условия (27.30) $U^{(i)}(\mathbf{r}) \neq U^{(i+1)}(\mathbf{r})$, следовательно, $l_{i,i+1}$ есть линия ветвления-потенциала. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 27.3. *Линии смыкания различных гармонических (аналитических) кусков поверхности S , ограничивающей область D , являются линиями ветвления для гармонически продолженных внутрь D значений внешнего гравитационного поля области D , заполненной массами постоянной плотности ρ_0 .*

Необходимо отметить, что на поверхности возмущающего тела могут лежать не только особые линии потенциальных полей, но и особые точки.

Теорема 27.4. *Всякая точка поверхности S , ограничивающей область D , заполненную возмущающими массами постоянной плотности ρ_0 , особая в дифференциально-геометрическом смысле (угловая точка или точка возврата), является особой и для соответствующих потенциальных полей (либо поля \mathbf{g} , либо для поля \mathbf{g}_{CB} , либо для обоих полей \mathbf{g} и \mathbf{g}_{CB}).*

Доказательство. Предположим противоположное утверждению теоремы, т. е. предположим, что точка $\mathbf{r}_0 \in S$ — особая в дифференциально-геометрическом смысле точка поверхности и в то же время поля \mathbf{g} и \mathbf{g}_{CB} могут быть гармонически продолжены через любую точку поверхности S , принадлежащую некоторой окре-

стности точки r_0 , в том числе через саму r_0 . Обозначим часть поверхности S , принадлежащую указанной окрестности точки r_0 , через Γ . Тогда согласно теореме 27.2 Γ_0 есть гармоническая (аналитическая) поверхность и ее уравнение в гармонической форме имеет вид $\text{grad } \Phi(\mathbf{r}) - \mathbf{r} = \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0$. Поскольку r_0 — геометрически особая точка поверхности S , то [Рашевский, 1956]

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\partial z} = 0 \quad \text{при } \mathbf{r} = r_0. \quad (27.33)$$

Из 27.33, в частности, следует

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{\mathbf{r}=r_0} - 1 = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{\mathbf{r}=r_0} - 1 = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{r}=r_0} - 1 = 0.$$

Суммируя, получаем $\Delta \Phi|_{\mathbf{r}=r_0} = 3$, что противоречит свойству гармоничности функции $\Phi(\mathbf{r})$. Тем самым теорема доказана.

27.3. Определение формы поверхности трехмерных материальных тел на основе аналитического продолжения гравитационного поля

Результаты предыдущего пункта позволяют подойти к решению проблемы определения формы поверхности возмущающих масс известной однородной плотности ρ_0 .

Прежде всего нетрудно убедиться в том, что поставленная задача может быть решена однозначно, если известно гравитационное поле \mathbf{g} в некоторых областях $\Omega^- \subset C\bar{D}$ и $\Omega^+ \subset D$. Действительно, в этом случае с помощью операции гармонического (аналитического) продолжения можно в соответствии с теоремой 27.3 определить все линии смыкания различных гармонических кусков поверхности S друг с другом, т. е. определить все контуры l_i , ограничивающие поверхности Γ_i соответственно. Таким образом, можно построить «пространственный каркас», на который «натянута» искомая поверхность S . Далее, с помощью формулы (27.11) можно по полю $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, известному внутри D , найти функцию $\mathbf{g}_{CD}(\mathbf{r})$, определяющую гравитационное поле области $C\bar{D}$, заполненной массой плотности ρ_0 . После этого функции $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$, задающие уравнения гармонических кусков Γ_i , в принципе определяются однозначно, поскольку согласно теореме 27.2 и формулам (27.25) и (27.28) множества особых точек гармонически продолженных сквозь контуры l_i полей \mathbf{g} и \mathbf{g}_{CD} совпадают со множеством особенностей функций $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри D и вне D соответственно.

Если обозначить через $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{g}_{CD}^{(i)}(\mathbf{r})$ результаты гармонического продолжения функций \mathbf{g} и \mathbf{g}_{CD} сквозь контуры l_i , то на основании (27.24), (27.28) функции $\text{grad } \Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ могут быть непосредственно вычислены по формуле

$$\text{grad } \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = - \frac{\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_{CD}^{(i)}(\mathbf{r})}{(4\pi/3)\gamma\rho_0}. \quad (27.34)$$

Отсюда уравнения поверхностей Γ_i в гармонической форме принимают вид

$$r = - [g^{(i)}(r) + g_{CD}^{(i)}(r)] / \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0. \quad (27.35)$$

Отметим, что на практике, обычно, поле $g(r)$ внутри масс неизвестно, поэтому задача определения формы поверхности S по g , измеренному вне масс, в общем случае неоднозначна. Однако если нам известен хотя бы один гармонический кусок поверхности S , то задача нахождения всей поверхности S по внешнему потенциалу вновь становится однозначной.

В самом деле, пусть известна функция $\Phi^{(1)}(r)$, описывающая гармонический кусок Γ_1 , тогда в соответствии с (27.34)

$$g_{CD}(r) = - (4\pi/3) \gamma \rho_0 \operatorname{grad} \Phi^{(1)}(r) - g^{(1)}(r) \quad (27.36)$$

и по (27.11)

$$g(r) = g^{(1)}(r) + (4\pi/3) \gamma \rho_0 [\operatorname{grad} \Phi^{(1)}(r) - r], \quad r \in D. \quad (27.37)$$

Поскольку мы нашли g и g_{CD} в некоторой области внутри D , то мы находимся уже в условиях задачи, рассмотренной выше, которая имеет единственное решение.

Продолжив g внутрь D сквозь контуры l_i , определим функции $g^{(i)}(r)$, причем в соответствии с (27.24)

$$\operatorname{grad} \Phi^{(i)}(r) = - \frac{g^{(i)}(r) + g_{CD}(r)}{(4\pi/3) \gamma \rho_0}. \quad (27.38)$$

Подставляя (27.36) в (27.38), получаем

$$\operatorname{grad} \Phi^{(i)}(r) = \frac{g^{(i)}(r) - g^{(i)}(r)}{(4\pi/3) \gamma \rho_0} + \operatorname{grad} \Phi^{(1)}(r). \quad (27.39)$$

Соответственно уравнения поверхностей Γ_i в гармонической форме с учетом (27.39) принимают вид

$$r = [g^{(i)}(r) - g^{(i)}(r)] / (4\pi/3) \gamma \rho_0 + \operatorname{grad} \Phi^{(1)}(r), \quad i=2, 3, \dots, N. \quad (27.40)$$

Формулы (27.34) и (27.40) дают решение задачи об определении формы поверхности S , составленной из конечного числа гармонических (аналитических) кусков, с помощью гармонического продолжения гравитационного потенциала.

Изложенный выше метод поиска поверхности S представляет собой обобщение на трехмерный случай соответствующих методов поиска контуров поперечного сечения двумерных возмущающих тел, развитых в работах А. А. Заморева [1942] и В. Н. Страхова [1970 г].

28. ПРОДОЛЖЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть перенесены на магнитное поле и, кроме того, легко обобщаются на случай гравитационных и магнитных полей, создаваемых телами с произвольным аналитическим распределением плотности или намагниченности.

28.1. Аналитические представления полей, продолженных внутрь масс

Рассмотрим трехмерную область D , ограниченную поверхностью S и заполненную гравитационными или магнитными массами с плотностью $\rho(\mathbf{r})$ или намагниченностью $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ соответственно. Пусть Γ — некоторый аналитический кусок поверхности S и всюду в D^* (области, содержащей D вместе с границей S) плотность $\rho(\mathbf{r})$ и намагниченность $\mathbf{I}(\mathbf{r})$ есть аналитические функции координат. Тогда очевидно, что на Γ функции $\sigma|_{\Gamma}$, $\mathbf{h}|_{\Gamma}$ и $\mathbf{I}_n|_{\Gamma}$ аналитичны (где $\sigma(\mathbf{r})$ — функция, удовлетворяющая уравнению (22.22), а $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — уравнению (23.8)).

Следовательно, согласно теореме Коши — Ковалевской в окрестности Γ существуют такие гармонические функции $\Phi^g(\mathbf{r})$ и $\Phi^h(\mathbf{r})$, что на Γ

$$\text{grad } \Phi^g|_{\Gamma} = \sigma|_{\Gamma}, \quad (28.1a)$$

$$\text{grad } \Phi^h|_{\Gamma} = (\mathbf{h} - 4\pi\mathbf{I}_n)|_{\Gamma}. \quad (28.16)$$

Например, если область D заполнена массами однородной плотности ρ_0 , то $\sigma(\mathbf{r}) = (4\pi/3)\gamma\rho_0 r$ и уравнения (28.1a), (28.16) обращаются в уравнение аналитического куска поверхности Γ в гармонической форме:

$$\text{grad } \Phi^g(\mathbf{r})|_{\Gamma} = (4\pi/3)\gamma\rho_0 r.$$

Формулы (28.1a), (28.16), задающие уравнение аналитического куска поверхности S , позволяют воспользоваться результатами параграфов 22, 23 и п. 26.3, согласно которым внешние гравитационные и магнитные поля, описываемые трехмерными интегралами типа Коши, могут быть продолжены внутрь масс. В самом деле, ввиду (22.24) и (23.12) гравитационное $\mathbf{g}(\mathbf{r}')$ и магнитное $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ поля вне масс определяются выражениями

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^g(\mathbf{r}'; \sigma(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \quad (28.2a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^h(\mathbf{r}'; \mathbf{h}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{I}_n(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \quad (28.26)$$

Следовательно, ввиду (26.20) продолженные значения полей определяются следующими формулами:

$$\mathbf{g}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi^g(\mathbf{r}) + \vec{\mathcal{F}}^g(\mathbf{r}), \quad (28.3a)$$

$$\mathbf{H}^{\text{cont}}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi^H(\mathbf{r}) + \vec{\mathcal{F}}^H(\mathbf{r}), \quad (28.3b)$$

где

$$\vec{\mathcal{F}}^g(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^g(\mathbf{r}; \sigma) = \mathbf{C}^g(\mathbf{r}; \text{grad } \Phi^g), \quad (28.4)$$

$$\vec{\mathcal{F}}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^H(\mathbf{r}; \mathbf{h} - 4\pi\mathbf{I}_n) = \mathbf{C}^H(\mathbf{r}; \text{grad } \Phi^H).$$

Формулы (28.3a), (28.3b) позволяют исчерпывающим образом исследовать вопрос об аналитическом продолжении внешнего поля внутрь области D .

28.2. Случай области, ограниченной аналитической поверхностью

Если поверхность S есть аналитическая поверхность, а распределения $\rho(\mathbf{r})$ и $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ описываются аналитическими функциями, то справедливы следующие теоремы, обобщающие на трехмерный случай соответствующие теоремы В. Н. Страхова [Страхов, 1970в]².

Теорема 28.1. Если S — замкнутая аналитическая поверхность, описываемая уравнениями (28.1), то функции $\Phi^g(\mathbf{r})$ и $\Phi^H(\mathbf{r})$ обязательно имеют особенности внутри S , причем множество их особенностей совпадает со множеством особенностей функций $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ или $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, аналитически продолженных внутрь S .

Теорема 28.2. Для того чтобы две различные области D_1 и D_2 , заполненные массами с различными аналитическими распределениями плотности $\rho_1(\mathbf{r})$ и $\rho_2(\mathbf{r})$ или намагниченности $\mathbf{l}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{l}_2(\mathbf{r})$ и ограниченные аналитическими поверхностями S_1 и S_2 , создавали тождественно равные внешние поля

$$\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (28.5a)$$

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (28.5b)$$

необходимо и достаточно, чтобы области D_1 и D_2 пересекались и функции $\Phi^{g(1)}$ и $\Phi^{g(2)}$ или $\Phi^{H(1)}$ и $\Phi^{H(2)}$, задающие поверхности S_1 и S_2 , имели особенности лишь в общей части $D_0 = D_1 \cap D_2$, причем разности $\Phi^{g(1)} - \Phi^{g(2)} = \delta\Phi^g$ или $\Phi^{H(1)} - \Phi^{H(2)} = \delta\Phi^H$ были бы функциями, гармоническими в D_0 .

Справедливость теоремы 28.1 следует непосредственно из соотношений (28.3a)–(28.4). Докажем теорему 28.2, причем для краткости все рассуждения проведем только для намагниченных масс.

² Для области с однородной плотностью или намагниченностью в двумерном случае эти теоремы были впервые сформулированы и доказаны А. В. Цирульским [1963, 1969], а в трехмерном случае — в нашей работе [Жданов, 1973б].

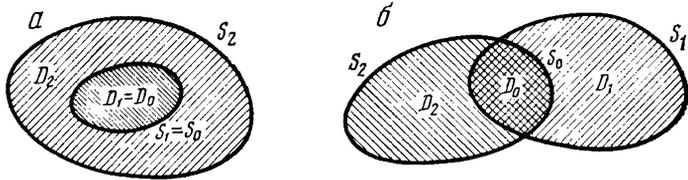


Рис. 43

Необходимость. В силу теоремы 28.1 очевидно, что функции $\Phi^{H(1)}$ и $\Phi^{H(2)}$ должны иметь общие особенности, которые обязаны находиться одновременно внутри D_1 и D_2 . Следовательно, области D_1 и D_2 либо пересекаются, либо находятся одна внутри другой, $D_1 \cap D_2 = D_0 \neq \emptyset$. В дальнейшем мы будем полагать для определенности, что $D_2 \setminus D_0$ не пусто (т. е. что либо D_1 целиком лежит в D_2 (рис. 43, а), либо пересекается с последней (рис. 43, б).

Далее из формул (28.3а), (28.3б) имеем

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi^{H(1)}(\mathbf{r}) + \vec{\mathcal{F}}^{H(1)}(\mathbf{r}), \quad (28.6)$$

$$\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi^{H(2)}(\mathbf{r}) + \vec{\mathcal{F}}^{H(2)}(\mathbf{r}),$$

где функции $\vec{\mathcal{F}}^{H(1)}$ и $\vec{\mathcal{F}}^{H(2)}$, гармонические в D_1 и D_2 соответственно, определяются формулами

$$\vec{\mathcal{F}}^{H(1)} = \mathbf{C}^{S_1}(\mathbf{r}; \text{grad } \Phi^{H(1)}), \quad \vec{\mathcal{F}}^{H(2)} = \mathbf{C}^{S_2}(\mathbf{r}; \text{grad } \Phi^{H(2)}).$$

Очевидно, что функция $\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r})$ — гармоническая в $D_2 \setminus D_0$. Следовательно, по условию теоремы функция $\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})$ (или ее аналитическое продолжение) также гармоническая в $D_2 \setminus D_0$. Таким образом, согласно (28.6) $\text{grad } \Phi^{H(2)}$ как разность двух гармонических функций сам является гармонической функцией в $D_2 \setminus D_0$. Поэтому, воспользовавшись свойством (18.12) аналогов интеграла типа Коши, мы можем записать

$$\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{S_2}(\mathbf{r}'; \mathbf{h} - 4\pi \mathbf{l}_n^{(2)}) = \mathbf{C}^{S_2}(\mathbf{r}'; \text{grad } \Phi^{H(2)}) = \mathbf{C}^{S_0}(\mathbf{r}'; \text{grad } \Phi^{H(2)}), \quad (28.7)$$

где S_0 — граница D_0 ; $\mathbf{r}' \in \text{CD}_0$.

Аналогично показывается, что

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{S_0}(\mathbf{r}'; \text{grad } \Phi^{H(1)}). \quad (28.8)$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{C}^{S_0}(\mathbf{r}'; \text{grad } \Phi^{H(1)} - \text{grad } \Phi^{H(2)}) = \mathbf{C}^{S_0}(\mathbf{r}'; \text{grad } \delta\Phi^H) \equiv 0, \quad \mathbf{r}' \in \text{CD}_0.$$

Следовательно, по теореме 19.1 векторное поле $\text{grad } \delta\Phi^H$ — лапласово всюду в D : $\text{div grad } \delta\Phi^H(\mathbf{r}) \equiv 0, \mathbf{r} \in D_0$, т. е. $\Delta \delta\Phi^H(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in D_0$, и $\delta\Phi^H$ есть функция, гармоническая всюду в D_0 , что и требовалось доказать.

Достаточность. Вычислим разность полей $\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r})$, воспользовавшись формулами (28.7) и (28.8):

$$\mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{S_0}(\mathbf{r}; \text{grad } \delta\Phi^H), \quad \mathbf{r}' \in \text{CD}_0. \quad (28.9)$$

Но если $\delta\Phi^H$ — функция, гармоническая всюду в D_0 , то согласно теореме 19.1 интеграл типа Коши, стоящий в правой части (28.9), тождественно равен нулю. Следовательно,

$$H^{(1)}(r) \equiv H^{(2)}(r), \quad r \in CD_0.$$

Тем самым теорема 28.2 полностью доказана.

28.3. Случай области, ограниченной кусочно-аналитической поверхностью

В общем случае, когда граница S области D есть кусочно-аналитическая поверхность, справедливы следующие утверждения, обобщающие на трехмерный случай теоремы В. Н. Страхова для плоских полей, приведенные в параграфах 14 и 15.

Теорема 28.3. Внешнее гравитационное или магнитное поле, порождаемое аналитическими распределениями плотности или намагниченности внутри области D (такими, что на границе S области D функции $\sigma|_S$, $h|_S$ и $I_n|_S$ удовлетворяют условиям Гельдера) допускает аналитическое продолжение через любой аналитический кусок Γ поверхности S , кроме, быть может, его границы. Особые точки продолженного поля совпадают с особыми точками функций, описывающих уравнения поверхностей Γ в форме (28.1a), (28.1б).

Теорема 28.4. Если граница S области D состоит из конечного числа различных аналитических кусков Γ_i ($i=1, 2, \dots, N$) (различных в том смысле, что в уравнениях этих поверхностей (28.1a), (28.1б) фигурируют различные аналитические функции $\Phi^{(i)}(r)$, $i=1, 2, \dots, N$), то при любом аналитическом распределении плотности или намагниченности внутри D (таким, что $\sigma|_S$, $h|_S$ и $I_n|_S$ удовлетворяют условиям Гельдера) линии смыкания различных аналитических кусков Γ_i и Γ_j являются линиями ветвления внешнего поля.

Доказательство теорем 28.3 и 28.4 немедленно следует из формул (28.3a), (28.3б) и (28.4). Указанные формулы могут быть также использованы для решения некоторых обратных задач гравиметрии и магнитометрии на основе аналитического продолжения. Пример такой задачи для однородного материального тела был рассмотрен нами в п. 27.3. Следует отметить, однако, что приведенный в параграфе 27 способ решения обратной задачи на основе аналитического продолжения имеет не столько практическое, сколько теоретическое значение, поскольку он раскрывает условия однозначности решения обратной задачи. Распространим этот результат на трехмерные тела с произвольным аналитическим распределением плотности (или намагниченности).

Пусть поверхность S есть сумма нескольких аналитических кусков Γ_i , $i=1, 2, \dots, N$, и нам известно аналитическое распределение плотности внутри S (такое, что на S соответствующая функция $\sigma(r)$ — частное решение уравнения (22.22) — удовлетворяет условию Гельдера). Предположим, кроме того, что нам известна ана-

литическая функция $\Phi^{g^{(1)}}$, определяющая уравнение поверхности Γ_1 в форме (28.1a), и известно, что эта функция аналитична всюду внутри D (за исключением, быть может, конечного числа изолированных особых точек). Ставится задача: по гравитационному полю $g(r)$, известному вне масс, на основе процедуры аналитического продолжения найти всю поверхность S .

Решение этой задачи вытекает из формулы (28.3a). В самом деле, обозначим через $g^{(1)}(r)$ результат аналитического продолжения внешнего гравитационного поля через поверхность Γ_1 . Тогда

$$\vec{F}^g(r) = g^{(1)}(r) + \text{grad } \Phi^{g^{(1)}}(r), \quad (28.10)$$

и, в частности, для известного куска поверхности Γ_1

$$\vec{F}^g(r) = g^{(1)}(r) + \text{grad } \Phi^{g^{(1)}}(r). \quad (28.11)$$

Приравнявая правые части (28.10) и (28.11), находим

$$\text{grad } \Phi^{g^{(1)}}(r) = \text{grad } \Phi^{g^{(1)}}(r) - g^{(1)}(r) + g^{(1)}(r). \quad (28.12)$$

Следовательно, уравнение поверхности Γ_1 с учетом (28.1a), (28.16) принимает вид

$$\text{grad } \Phi^{g^{(1)}}(r) - g^{(1)}(r) + g^{(1)}(r) = \sigma(r), \quad (28.13)$$

где $\sigma(r)$ — частное решение уравнения (22.22).

Формула (28.13) дает решение задачи об определении формы поверхности S , составленной из конечного числа аналитических кусков, при помощи процедуры аналитического продолжения. Как видим, задача имеет единственное решение, если известно не только распределение плотности внутри S , но и какая-либо (в принципе сколь угодно малая) часть этой поверхности. В противном случае, как следует из теоремы 28.2, обратная задача неоднозначна. Аналогичный результат имеет место для магнитного поля.

29. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЛАПЛАСОВЫХ ПОЛЕЙ

Методы аналитического продолжения лапласовых векторных полей, изложенные выше в параграфе 25, полезны при теоретических рассуждениях, но практически неприменимы при численных расчетах. В то же время при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий приходится решать практические задачи гармонического продолжения функций, измеренных на земной поверхности (поверхности наблюдения). Ниже мы рассмотрим один подход к решению этой проблемы, основанный на применении трехмерных аналогов интеграла типа Коши.

29.1. Аналитическое продолжение лапласова поля в верхнее полупространство

Зададим поверхность наблюдения в виде произвольной кусочно-гладкой поверхности S , проходящей через бесконечно удаленную точку (рис. 44), $S = \{z=z(x, y), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$, причем $0 \geq z(x, y) \geq -h, h > 0$.

Верхнее полупространство, ограниченное поверхностью S , обозначим Ω^+ . Пусть поле $F(\mathbf{r})$ — лапласово в Ω^+ и нам известны значения этого поля на S . Поставим задачу: продолжить аналитически $F(\mathbf{r})$ в верхнее полупространство Ω^+ . Для решения задачи рассмотрим произвольную точку \mathbf{r}' из Ω^+ и попытаемся восстановить поле $g(\mathbf{r})$ в этой точке. Окружим точку \mathbf{r}' сферой $O_R(\mathbf{r}')$ радиуса R с центром в точке \mathbf{r}' . Часть поверхности этой сферы, принадлежащую Ω^+ , обозначим O_R^+ . Сфера $O_R(\mathbf{r}')$ вырезает из поверхности S некоторую часть S_R . Построим замкнутую поверхность γ_R , составленную из поверхностей S_R и O_R , тогда по формуле Коши (18.12)

$$F(\mathbf{r}') = C^{VR}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})). \quad (29.1)$$

Интеграл типа Коши по поверхности γ_R можно разбить на два интеграла:

$$C^{VR}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})) = C^{OR^+}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})) + C^{SR}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})). \quad (29.2)$$

Первый интеграл по поверхности части сферы O_R^+ согласно (24.9) равен

$$C^{OR^+}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\int_{O_R^+} F(\mathbf{r}) ds. \quad (29.3)$$

Применяя теорему о среднем, находим

$$C^{OR^+}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r})) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\int_{O_R^+} ds F(\tilde{\mathbf{r}}), \quad (29.4)$$

где $\tilde{\mathbf{r}} \in O_R^+$

Ясно, что

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int\int_{O_R^+} ds \leq 1, \quad (29.5)$$

следовательно, оценивая интеграл (29.4) по модулю, с учетом (29.5) находим

$$|C^{OR^+}(\mathbf{r}'; F(\mathbf{r}))| \leq |F(\tilde{\mathbf{r}})|. \quad (29.6)$$

Потребуем, чтобы

$$\max_{\tilde{r} \in O_R^+} |\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}})| \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (29.7)$$

Тогда

$$|\mathbf{C}^{O_R^+}(\mathbf{r}'; \mathbf{F}(\mathbf{r}))| \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (29.8)$$

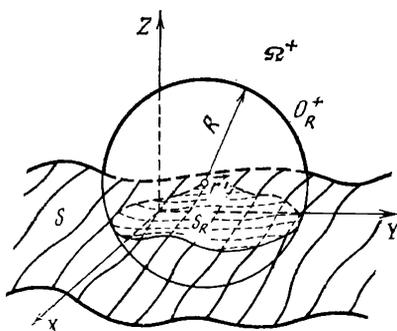


Рис. 44

Отметим, что лапласовы векторные поля, источники которых сосредоточены в конечных областях пространства, всегда удовлетворяют условию (29.7).

Второй интеграл в (29.2) при $R \rightarrow \infty$ стремится к интегралу по всей поверхности S . Таким образом, переходя в (29.1) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая (29.2) и (29.8), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= \mathbf{C}^S(\mathbf{r}'; \mathbf{F}(\mathbf{r})) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds, \end{aligned} \quad (29.9)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , направленный в нижнее полупространство.

Формула (29.9) позволяет по значениям лапласова поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ на поверхности наблюдения S восстановить значения этого поля всюду в верхнем полупространстве, т. е. решает задачу аналитического продолжения вверх.

29.2. Аналитическое продолжение лапласова поля в нижнее полупространство

Перейдем теперь к анализу задачи продолжения лапласовых полей в нижнее полупространство. Пусть выполнены условия п. 29.1 и поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — лапласово во всем верхнем полупространстве $z > -A$ и достаточно быстро убывает на бесконечности (точная оценка необходимой скорости убывания $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ на бесконечности будет дана ниже). На поверхности S значения функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ известны. Поставим задачу найти $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ всюду при $z > -A$.

Предположим, что $\mathbf{r}'(x', y', z')$ — некоторая точка пространства, лежащая ниже S , причем $z' > -A$ (рис. 45). Выберем столь малое ϵ , что $z' > -A + \epsilon$ и проведем горизонтальную плоскость Σ на глубине $z = -A + \epsilon$. Постараемся отыскать значение $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ в точке \mathbf{r}' . Отметим прежде всего, что если бы нам было известно поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ на поверхности Σ , то мы могли бы определить его значение в точке

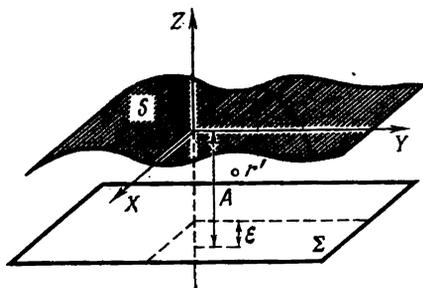


Рис. 45

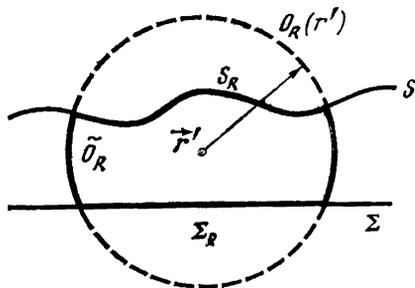


Рис. 46

r' по формуле (29.9) аналитического продолжения вверх, так как точка r' лежит выше Σ :

$$F(r') = C^\Sigma(r'; F(r)) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ (n \cdot F) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} + [n \times F] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r'|} \right\} ds. \quad (29.10)$$

Преобразуем интеграл по поверхности Σ в интеграл по поверхности S . Для этого воспользуемся известным спектральным разложением

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(r')g(r)}{\eta_0} dk_x dk_y, \quad (29.11)$$

где спектральные гармоники f и g равны:

$$\begin{aligned} f(r') &= \exp[i(k_x x' + k_y y')] \exp(-\eta_0 z'), \\ g(r) &= \exp[-i(k_x x + k_y y)] \exp(\eta_0 z) \Big|_{z' > z}, \\ \eta_0 &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \end{aligned} \quad (29.12)$$

Подставим (29.11) в (29.10) и, так как все интегралы сходятся равномерно по соответствующим параметрам, поменяем местами порядок интегрирования:

$$F(r') = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(r')}{\eta_0} \iint_{\Sigma} \{ (n \cdot F) \operatorname{grad} g + [n \times F] \times \operatorname{grad} g \} ds dk_x dk_y. \quad (29.13)$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, построим сферу $O_R(r')$ с центром в точке r' и радиусом R (рис. 46). Часть этой сферы, заключенную между S и Σ , обозначим \tilde{O}_R . Сфера $O_R(r')$ вырезает из поверхности S некоторую часть S_R , а из поверхности Σ — некоторую часть Σ_R . Рассмотрим замкнутую поверхность $\Gamma_R = S_R \cup \tilde{O}_R \cup \Sigma_R$.

Нетрудно убедиться, что функция $g(\mathbf{r})$ гармонична внутри области D_R , ограниченной Γ_R , $\Delta g(\mathbf{r})=0$. Следовательно, по формуле (17.14) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_0} \iint_{\Gamma_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} g\} ds = \\ = \frac{1}{\eta_0} \iiint_{D_R} (\operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{grad} g + \Delta g \mathbf{F}) dv = 0, \end{aligned} \quad (29.14)$$

поскольку в силу лапласовости $\mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$ в D_R .

Поверхностный интеграл в (29.14) можно представить в виде суммы трех интегралов по соответствующим частям поверхности Γ_R :

$$\frac{1}{\eta_0} \left\{ \iint_{S_R} \dots ds + \iint_{\Sigma_R} \dots ds + \iint_{\tilde{\sigma}_R} \dots ds \right\} = 0. \quad (29.15)$$

Оценим по модулю интеграл по $\tilde{\sigma}_R$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\eta_0} \iint_{\tilde{\sigma}_R} \dots ds \right| = \left| \frac{1}{\eta_0} \iint_{\tilde{\sigma}_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} g + \right. \\ \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} g\} ds \right| \leq 2 \iint_{\tilde{\sigma}_R} |\mathbf{n}| |\mathbf{F}| \left| \frac{\operatorname{grad} g}{\eta_0} \right| ds. \end{aligned} \quad (29.16)$$

Но

$$\left| \frac{\operatorname{grad} g}{\eta_0} \right| \leq \left(\frac{|k_x|}{\eta_0} + \frac{|k_y|}{\eta_0} + 1 \right) \exp(\eta_0 z) \leq 3, \quad (29.17)$$

так как $z < 0$ на поверхности $\tilde{\sigma}_R$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{\eta_0} \iint_{\tilde{\sigma}_R} \dots ds \right| \leq 6 \iint_{\tilde{\sigma}_R} |\mathbf{F}| ds \leq 6 \max_{\tilde{\mathbf{r}} \in \tilde{\sigma}_R} |\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}})| \iint_{\tilde{\sigma}_R} ds. \quad (29.18)$$

По построению поверхность $\tilde{\sigma}_R$ при любых R все время заключена между плоскостями $z=0$ и $z=-A$, причем при больших R кольцо $\tilde{\sigma}_R$ приближается по форме к прямому круговому кольцу радиуса R , поэтому

$$\iint_{\tilde{\sigma}_R} ds \leq M 2\pi R A, \quad (29.19)$$

где M — некоторая константа. Подставляя (29.19) в (29.18), находим, что

$$\left| \frac{1}{\eta_0} \iint_{\tilde{\sigma}_R} \dots ds \right| \leq 6 \max_{\tilde{\mathbf{r}} \in \tilde{\sigma}_R} |\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}})| M 2\pi R A. \quad (29.20)$$

Потребуем, чтобы $F(\mathbf{r})$ убывала на бесконечности быстрее, чем обратная степень R :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{\tilde{r} \in \tilde{O}_R} |F(\mathbf{r})| = 0.$$

Тогда при $R \rightarrow \infty$, т. е. при бесконечном «раздувании» сферы $O_R(\mathbf{r}')$, интеграл по \tilde{O}_R (29.15) стремится к нулю. Таким образом, переходя в (29.15) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{\eta_0} \left\{ \iint_S \dots ds + \iint_{\Sigma} \dots ds \right\} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\eta_0} \iint_S ds = - \frac{1}{\eta_0} \iint_{\Sigma} ds. \quad (29.21)$$

Таким образом, мы преобразовали интеграл по поверхности Σ в интеграл по поверхности S , где поле $F(\mathbf{r})$ нам известно. Поскольку указанный переход к пределу выполняется равномерно по η_0 , то он возможен и под знаком внешнего интеграла в (29.13):

$$F(\mathbf{r}') = - \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\mathbf{r}')}{\eta_0} \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad } g + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad } g \} ds dk_x dk_y, \quad (29.22)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , направленный в нижнее полупространство.

Соотношение (29.22) дает решение задачи об аналитическом продолжении лапласова поля в нижнее полупространство до горизонтальной плоскости, проходящей через ближайшую особую точку функции $F(\mathbf{r})$.

Отметим в заключение этого раздела, что процедура аналитического продолжения вниз лапласова векторного поля, так же как и в случае плоских полей (параграф 16), является некорректно поставленной задачей. Поэтому для ее численного решения необходимо применение соответствующих регуляризирующих алгоритмов [Тихонов, Арсенин, 1974; Страхов, 1969а, б], которые могут строиться, в частности, на основе описанных выше интегральных формул [Жданов, 1976б].

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА СТРЭТТОНА — ЧУ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава восьмая

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА СТРЭТТОНА — ЧУ

30. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Аппарат трехмерных аналогов интеграла типа Коши, развитый в предыдущем разделе книги, позволяет, как мы убедились выше, перенести многие идеи и методы теории функций комплексного переменного на трехмерные ситуации, важные при изучении геопотенциальных полей. Представляется чрезвычайно заманчивым распространить эти методы на другие геофизические поля, в частности на электромагнитное поле. Естественным обобщением понятия интеграла типа Коши в теории электромагнитного поля являются, как мы покажем в данной главе, интегралы типа Стрэттона — Чу, вводимые на основе известных интегральных формул Стрэттона — Чу [Стрэттон, 1948].

В целях полноты изложения мы начнем этот раздел книги с описания основных уравнений теории электромагнитного поля.

30.1. Уравнения макроскопической электродинамики

В основе теории электромагнитных полей, изучаемых в геофизике, лежат уравнения макроскопической электродинамики — уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (30.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (30.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (30.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q + q^e, \quad (30.1d)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} — векторы электрического поля; \mathbf{H} и \mathbf{B} — векторы магнитного поля; \mathbf{j} — плотность токов проводимости; q — объемная плотность свободных электрических зарядов; \mathbf{j}^e и q^e — плотности сторонних электрических токов и зарядов, связанные между собой уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^e = -\partial q^e / \partial t. \quad (30.2)$$

К уравнениям (30.1a)–(30.1г) следует добавить уравнения связи, выражающие электромагнитные свойства среды, которые в случае линейных и изотропных сред принимают вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (30.3)$$

где ε , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Плотность токов проводимости выражается через электрическое поле с помощью закона Ома (в дифференциальной форме):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (30.4)$$

где σ — электропроводность среды, обратная к ее удельному электрическому сопротивлению ρ , $\sigma = 1/\rho$.

30.2. Поле в областях однородности среды

В областях, где ε , μ , σ постоянны, уравнения (30.1a)–(30.1г) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad (30.5a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t, \quad (30.5б)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (30.5в)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q + q^e}{\varepsilon}. \quad (30.5г)$$

Во многих задачах бывает полезно *разделить уравнения Максвелла* (30.5a)–(30.5г), т. е. записать отдельные уравнения для электрического и магнитного полей. Для этого применим к левой и правой частям (30.5б) оператор rot и затем подставим в (30.5a):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t}. \quad (30.6)$$

Аналогично действуя оператором rot на (30.5a), с учетом (30.5б) получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.7)$$

Ввиду векторного тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

и уравнения Максвелла (30.5г) соотношение (30.6) можно переписать так:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad} (q + q^e). \quad (30.8a)$$

Как известно [Стрэттон, 1948], в отсутствие сторонних электрических токов и зарядов свободные электрические заряды в однородной среде чрезвычайно быстро исчезают (релаксируют), поэтому можно записать

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (30.8б)$$

Такие же преобразования (с помощью уравнения Максвелла (30.5в)) позволяют привести (30.7) к виду

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \text{rot} \mathbf{j}^e, \quad (30.9a)$$

или при $\mathbf{j}^e = 0$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (30.9б)$$

Уравнения (30.8б) и (30.9б), которым удовлетворяют векторы электрического и магнитного полей в области однородности среды в отсутствие сторонних токов и зарядов, называются *однородными телеграфными уравнениями*.

30.3. Граничные условия

На границе между различными однородными областями параметры ϵ , μ , σ могут скачкообразно изменяться. При этом согласно формулам (30.3), (30.4) неизбежно испытывают скачки и некоторые векторы поля. Поэтому для решения задач электродинамики необходимо помимо уравнений Максвелла знать граничные условия — соотношения между векторами поля в двух бесконечно близких точках, находящихся по разные стороны от границы раздела сред с различными электромагнитными параметрами.

Сформулируем граничные условия для наиболее важного на практике случая, когда гладкая поверхность S разделяет две среды 1 и 2, в каждой из которых параметры постоянны либо меняются от точки к точке достаточно медленно, так, что в малой окрестности любой точки на границе последнюю можно считать плоской, а параметры среды — неизменными. Обозначим через \mathbf{n} вектор единичной нормали к поверхности S в данной точке. Будем полагать также, что на границе S сторонние токи и заряды отсутствуют. Тогда справедливы следующие соотношения.

1. Для нормальных составляющих поля:

$$(\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = \eta, \quad (30.10)$$

где η — поверхностная плотность электрического заряда на S . Следовательно, нормальная составляющая магнитного поля \mathbf{B} непрерывна при переходе через границу раздела сред, а нормальная составляющая электрического поля \mathbf{D} терпит разрыв, равный поверхностной плотности электрического заряда.

2. Для касательных составляющих поля:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{j}^s, \quad (30.11)$$

где \mathbf{j}^s — плотность поверхностного электрического тока,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0. \quad (30.12)$$

Плотность поверхностного тока \mathbf{j}^s отлична от нуля только на поверхности идеального проводника, следовательно, для реальных сред (30.11), (30.12) можно переписать так:

$$\mathbf{H}_\tau^{(2)} - \mathbf{H}_\tau^{(1)} = 0, \quad \mathbf{E}_\tau^{(2)} - \mathbf{E}_\tau^{(1)} = 0, \quad (30.13)$$

где индексом τ обозначена касательная к S компонента поля. Таким образом, касательные составляющие вектора магнитного поля \mathbf{H} непрерывны на границах реальных сред, а вектора электрического поля \mathbf{E} непрерывны на границах любых сред.

В качестве важного частного случая рассмотрим граничные условия для переменных полей у поверхности идеального проводника. Как известно, в электростатике при любой проводимости материала электрическое поле в нем отсутствует. В то же время переменные поля проникают в материал с конечной проводимостью. Однако если проводник является идеальным, то электромагнитное поле в нем также отсутствует.

В самом деле, внутри идеального проводника заряды столь подвижны, что мгновенно реагируют на сколь угодно быстрые изменения поля. При этом они создают на поверхности идеального проводника такую поверхностную плотность заряда η , которая обеспечивает нулевое электрическое поле внутри проводника. Кроме того, при изменении во времени магнитного поля поверхностные электрические заряды перемещаются, создавая такой поверхностный ток \mathbf{j}^s , при котором магнитное поле внутри проводника отсутствует. Таким образом, в идеальном проводнике электромагнитное поле равно нулю: $\mathbf{D} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv 0$. Если приписать области, занятой идеальным проводником, индекс 2, то из выписанных ранее граничных условий¹ получаем

$$\mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = -\eta, \quad (30.14a) \quad \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (30.14b)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{n} = \mathbf{j}^s, \quad (30.14b) \quad \mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{n} = 0. \quad (30.14r)$$

Таким образом, нормальная составляющая магнитного поля \mathbf{B} и тангенциальная составляющая электрического поля \mathbf{E} на поверхности идеального проводника равны нулю. Нормальная составляющая \mathbf{D} равна (со знаком минус) поверхностной плотности электрического заряда, а плотность поверхностного электрического тока равна по величине и перпендикулярна по направлению касательной составляющей магнитного поля \mathbf{H} у поверхности проводника.

30.4 Уравнения монохроматического поля

В силу линейности уравнений Максвелла поле, произвольно меняющееся во времени, может быть представлено в виде суммы гармонических полей, зависимость которых от времени выражена с помощью множителя $\exp(-i\omega t)$. Для монохроматического поля уравнения (30.1a)–(30.1г) принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \mathbf{j}^* - i\omega \mathbf{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= q + q^*. \end{aligned} \quad (30.15)$$

В области однородности среды, где параметры ϵ , μ , σ постоянны, уравнения (30.5a)–(30.5г) записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma^* \mathbf{E} + \mathbf{j}^*, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= q^* / \epsilon^*, \end{aligned} \quad (30.16)$$

где $\epsilon^* = \epsilon + i\sigma/\omega$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды, а $\sigma^* = \sigma - i\omega\epsilon$ – комплексная электропроводность.

Соответственно уравнения (30.8a) и (30.9a), справедливые для ϵ , μ , $\sigma = \text{const}$, принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} + k^{*2} \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{j}^* + (1/\epsilon^*) \operatorname{grad} q^*, \\ \Delta \mathbf{H} + k^{*2} \mathbf{H} &= -\operatorname{rot} \mathbf{j}^*, \end{aligned} \quad (30.17)$$

где коэффициент k^* – волновое число среды:

$$k^{*2} = i\omega \mu \sigma + \omega^2 \mu \epsilon = i\omega \mu \sigma^* \quad (30.18)$$

Уравнения (30.17) называются *уравнениями Гельмгольца*. Значение k^* выбирают с положительной вещественной частью:

$$\operatorname{Re} k^* > 0. \quad (30.19)$$

Если в рассматриваемой однородной области отсутствуют сторонние токи и сторонние заряды, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma^* \mathbf{E}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (30.20)$$

В этом случае уравнения (30.17) сводятся к однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + k^{*2} \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^{*2} \mathbf{H} = 0. \quad (30.21)$$

30.5. Квазистационарное электромагнитное поле

Во многих задачах геофизики рассматривают электромагнитные поля, которые медленно меняются во времени. В уравнениях такого поля можно пренебречь второй производной по времени $\partial^2/\partial t^2$. Эта модель носит название *квазистационарной*. Квазистационарное электромагнитное поле описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^*, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\frac{1}{\sigma} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \sigma + \operatorname{div} \mathbf{j}^*). \end{aligned} \quad (30.22)$$

В областях с постоянной электропроводностью и магнитной проницаемостью

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.23)$$

Следовательно, телеграфные уравнения переходят в *уравнения диффузии*

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} - \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}^e, \quad (30.24)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}^e.$$

Так же как и в общем случае, квазистационарное электромагнитное поле с помощью фурье-преобразования может быть представлено в виде суммы гармонических полей, зависимость которых от времени выражается множителем $\exp(-i\omega t)$. Гармоники квазистационарного поля удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (30.25)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \sigma + \operatorname{div} \mathbf{j}^e).$$

Разделяя электрические и магнитные поля в (30.25) при $\sigma = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, записываем

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{j}^e - \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}^e, \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.26)$$

При этом волновое число среды в квазистационарной модели поля определяется равенством

$$k^2 = i\omega \mu \sigma. \quad (30.27)$$

Значения k также выбирают с положительной вещественной частью:

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1 + i) = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i),$$

где λ — длина квазистационарной электромагнитной волны, вычисляемая по формуле $\lambda = 2\pi \sqrt{2/\omega \mu \sigma}$.

30.6. Волновые уравнения поля

В изоляторе (при $\sigma = 0$) уравнение (30.1a) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}^e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (30.28)$$

Если при этом $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, то уравнения поля (30.8а) и (30.9а) переходят в *волновые уравнения*:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad } q^e, \quad (30.29)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{j}^e.$$

30.7. Уравнения поля с учетом магнитных токов и зарядов

Обратимся вновь к уравнениям (30.5а)–(30.5г) произвольного электромагнитного поля в однородной и изотропной области среды. Первое, что бросается в глаза, это несимметричность правых частей уравнений относительно электрического и магнитного полей. Указанная несимметричность возникает вследствие того, что мы не включили в эти уравнения сторонние магнитные токи и заряды. Исправим это положение и введем, следуя Стрэттону [1948], соответствующие дополнительные члены

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (30.30а)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{j}^m, \quad (30.30б)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{q^m}{\mu}, \quad (30.30в)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\tilde{q}^e}{\epsilon}. \quad (30.30г)$$

Здесь $\tilde{q}^e = q + q^e$ есть сумма свободных и сторонних электрических зарядов; \mathbf{j}^m и q^m — плотности сторонних «магнитных токов» и «магнитных зарядов», связанные между собой уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j}^m = -\frac{\partial q^m}{\partial t}. \quad (30.31)$$

Очевидно, что величины \mathbf{j}^m и q^m носят фиктивный характер, так как, насколько нам известно, в природе магнитных зарядов не существует. Однако, как мы увидим ниже, в ряде теоретических задач для описания разрывов непрерывности электромагнитных полей эти фиктивные магнитные токи и заряды оказываются чрезвычайно полезными.

Применяя к левым и правым частям уравнений (30.30а) и (30.30б) оператор rot , получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{j}^m, \quad (30.32)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\sigma \mathbf{j}^m - \epsilon \frac{\partial \mathbf{j}^m}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{j}^e.$$

Уравнения (30.30а)–(30.30г) приобретают особенно стройный, симметричный вид при переходе к монохроматическому полю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \quad (30.33a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H} - \mathbf{j}^m, \quad (30.33b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{q^m}{\mu}, \quad (30.33в)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q^e}{\epsilon^*}. \quad (30.33г)$$

В частности, уравнения Гельмгольца (30.17) можно записать так:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{j}^e + \frac{1}{\epsilon^*} \operatorname{grad} q^e + \operatorname{rot} \mathbf{j}^m, \quad (30.34)$$

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{j}^m + \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} q^m - \operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.35)$$

30.8. Стационарное электромагнитное поле

Стационарным, как известно, называется поле, не зависящее от времени. Его уравнения в однородной и изотропной области среды получаются из (30.30а)–(30.30г), если положить все производные по времени равными нулю и учесть, что $\tilde{q}^* = q + q^e = 0$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{j}^m, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = q^m / \mu, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (30.36)$$

При этом уравнения непрерывности для сторонних электрических и магнитных токов принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^e = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}^m = 0. \quad (30.37)$$

Соответственно уравнения (30.32) записываются

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \mathbf{j}^m, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\sigma \mathbf{j}^m + \operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.38)$$

Следовательно, стационарные электрические и магнитные поля удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\Delta \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{j}^m, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} q^m + \sigma \mathbf{j}^m - \operatorname{rot} \mathbf{j}^e. \quad (30.39)$$

В заключение этого параграфа отметим, что наиболее подробно мы будем изучать монохроматические электромагнитные поля, удовлетворяющие уравнениям (30.33а)–(30.33г) и (30.34), (30.35). Но в отдельных разделах книги мы будем рассматривать неустановившиеся во времени электромагнитные поля, а также квазистационарные и волновые модели поля.

31. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Прежде чем переходить к непосредственному интегрированию уравнений электромагнитного поля, рассмотрим аналогичную задачу для произвольного векторного поля, удовлетворяющего уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = q, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{j}, \quad (31.1)$$

где q, \mathbf{j} — объемные плотности источников и вихрей поля \mathbf{F} .

31.1. Вспомогательные интегральные тождества

Получим некоторые полезные соотношения для векторного поля \mathbf{F} и его пространственных производных, вытекающие из формул Остроградского — Гаусса. Для этого зададим вспомогательное векторное поле $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{C} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} P - [\mathbf{C} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] P, \quad (31.2)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r}), P(\mathbf{r})$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые в D (вплоть до ее границы S) функции; \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор.

Вычислим $\operatorname{div} \Phi$. Эту операцию лучше всего выполнить с помощью оператора Гамильтона:

$$\operatorname{div} \Phi = \nabla \cdot \Phi = \nabla \cdot \{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) \nabla P\} + \nabla \cdot \{[\mathbf{C} \times \mathbf{F}] \times \nabla P\} - \nabla \cdot \{[\mathbf{C} \times \nabla \times \mathbf{F}] P\}. \quad (31.3)$$

Вычислим последовательно все три слагаемых в правой части (31.3):

$$\nabla \cdot \{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) \nabla P\} = \nabla P \cdot \nabla (\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) \Delta P, \quad (31.4)$$

$$\nabla \cdot \{[\mathbf{C} \times \mathbf{F}] \times \nabla P\} = \nabla P \cdot [\nabla \times [\mathbf{C} \times \mathbf{F}]] = \nabla P \cdot \{\mathbf{C} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{F}\}, \quad (31.5)$$

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot \{[\mathbf{C} \times \nabla \times \mathbf{F}] P\} = -P \nabla \cdot [\mathbf{C} \times \nabla \times \mathbf{F}] - \\ & - [\mathbf{C} \times \nabla \times \mathbf{F}] \cdot \nabla P = P \mathbf{C} \cdot [\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}] - \nabla P \cdot \{\nabla (\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{F}\} \end{aligned} \quad (31.6)$$

Подставляя (31.4)–(31.6) в (31.3) и сокращая подобные члены, окончательно записываем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Phi &= \mathbf{C} \cdot \Delta P \mathbf{F} + \mathbf{C} \cdot \nabla P (\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{C} \cdot P [\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}] = \\ &= \mathbf{C} \cdot \{\Delta P \cdot \mathbf{F} + \operatorname{grad} P \cdot \operatorname{div} \mathbf{F} + P \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}\}. \end{aligned} \quad (31.7)$$

С другой стороны, справедлива формула

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{C} \cdot \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] P\} = \\ &= \mathbf{C} \cdot \{(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} P) \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} P] \times \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] P\}, \end{aligned} \quad (31.8)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к S . Применяя к векторной функции $\Phi(\mathbf{r})$ формулу Остроградского — Гаусса (17.1) и

учитывая, так же как и в параграфе 17, что выбор вектора C произволен, получаем следующее важное интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \iiint_D (\Delta P \cdot \mathbf{F} + \text{grad } P \text{ div } \mathbf{F} + P \text{ rot rot } \mathbf{F}) dv = \\ = \begin{cases} \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{ grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}] P\} ds, & (31.9a) \\ \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \text{grad } P) \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \text{grad } P] \times \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}] P\} ds. & (31.9б) \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что если $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, то формулы (31.9a), (31.9б) дают

$$\begin{aligned} \iiint_D (\Delta P \cdot \mathbf{F} + \text{grad } P \text{ div } \mathbf{F}) dv = \\ = \begin{cases} \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{ grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad } P\} ds, \\ \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \text{grad } P) \mathbf{F} + [\mathbf{n} \times \text{grad } P] \times \mathbf{F}\} ds. \end{cases} \quad (31.10) \end{aligned}$$

Отсюда при $\mathbf{F} = \text{grad } h$ немедленно вытекают соотношения (17.14a), (17.14б).

31.2. Векторные аналоги формул Помпей

Соотношения (31.9a), (31.9б) позволяют получить интегральные формулы, дающие аналитическое решение уравнений векторного поля (31.1). Итак, пусть дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле \mathbf{F} удовлетворяет всюду в области D (вплоть до ее границы S) уравнениям (31.1). Предположим, что плотности источников q и вихрей \mathbf{j} векторного поля известны в D , а само поле \mathbf{F} задано на границе S . Необходимо найти поле \mathbf{F} внутри D .

Для решения задачи обратимся к формулам (31.9a), (31.9б) и положим в них $P = -1/4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Тогда получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{ grad } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ \left. + [\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds + \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \text{div } \mathbf{F} \cdot \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{rot rot } \mathbf{F} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dv = \\ = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (31.11a) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} \mathbf{F} + \left[\mathbf{n} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{F} + \\
& + \left[\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{F} \right] \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Big\} ds + \\
& + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \text{div} \mathbf{F} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \text{rot} \text{rot} \mathbf{F} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} dv = \\
& = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (31.116)
\end{aligned}$$

Формулы (31.11а), (31.116) можно несколько упростить, воспользовавшись следующим тождеством, вытекающим из третьей векторной формулировки теоремы Остроградского — Гаусса (17.7):

$$\begin{aligned}
& \iiint_D \text{rot} \text{rot} \mathbf{F} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv = \\
& = \iint_S \left[\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{F} \right] \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds + \iiint_D \left[\text{rot} \mathbf{F} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] dv. \quad (31.12)
\end{aligned}$$

Подставляя (31.12) в (31.11), находим

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds \right. \\
& \left. -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{F} + \left[\mathbf{n} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{F} \right\} ds \right\} + \\
& + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \text{div} \mathbf{F} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \text{rot} \mathbf{F} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} dv = \\
& = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (31.13)
\end{aligned}$$

Формулы (31.13) обобщают на случай произвольного векторного поля формулы (17.40а), (17.40б), поэтому мы будем называть их векторными аналогами формул Помпей. Эти формулы и дают решение сформулированной выше задачи. В самом деле, подставляя в (31.13) уравнения (31.1), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}') = & \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} ds \right. \\
& \left. -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{F} + \left[\mathbf{n} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{F} \right\} ds \right\} + \\
& + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ q \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mathbf{j} \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} dv. \quad (31.14)
\end{aligned}$$

В случае потенциального в области D поля F формулы (31.14) переходят в (17.41а), (17.41б), а для лапласова векторного поля из (31.14) немедленно следует трехмерная интегральная формула Коши (17.26).

32. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ СТРЭТТОНА — ЧУ

Воспользуемся соотношениями, приведенными в предыдущем параграфе, для построения теории интегральных представлений электромагнитного поля в однородной и изотропной области пространства. В основе этой теории лежат интегральные формулы Стрэттона — Чу [Стрэттон, 1948], к выводу которых мы и переходим.

При этом мы постараемся дать достаточно полную сводку интегральных формул для различных моделей электромагнитного поля, уравнения которых были приведены в параграфе 30. Отметим, что материал этого параграфа во многом носит справочный характер, поэтому читатель, интересующийся геоэлектрическими приложениями аппарата интегралов типа Стрэттона — Чу, может сразу перейти к чтению параграфа 33.

32.1. Формулы Стрэттона — Чу

для нестационарного электромагнитного поля (общий случай)

Рассмотрим следующую электродинамическую задачу: *выразить электромагнитное поле E , H в некоторой области D через значения E , H на внутренней стороне поверхности S , ограничивающей эту область.* Предположим, что электромагнитные параметры среды ϵ , μ , σ внутри D постоянны, тогда электромагнитное поле в D удовлетворяет уравнениям (30.30а)–(30.30г) и (30.32). Учитывая эти уравнения, воспользуемся формулой (31.9а) и положим в ней $F \equiv E$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \Delta P \cdot E - \mu \epsilon P \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma P \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tilde{q}^e}{\epsilon} \operatorname{grad} P - \right. \\ & \quad \left. - \mu \frac{\partial j^e}{\partial t} P - \operatorname{rot} j^m \cdot P \right\} dv = \\ & = \iint_S \left\{ (n \cdot E) \operatorname{grad} P + [n \times E] \times \operatorname{grad} P - \right. \\ & \quad \left. - \mu \left[n \times \frac{\partial H}{\partial t} \right] P - [n \times j^m] P \right\} ds. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Отметим, что ввиду третьей векторной формулировки формулы Остроградского — Гаусса (17.7) справедливо тождество

$$\iiint_D \operatorname{rot} j^m \cdot P dv = \iint_S [n \times j^m] P ds + \iiint_D [j^m \times \operatorname{grad} P] dv, \quad (32.2)$$

которое позволяет несколько упростить (32.1):

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \Delta P \cdot \mathbf{E} - \mu \varepsilon P \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma P \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\tilde{q}^e}{\varepsilon} \operatorname{grad} P - \right. \\ & \quad \left. - \mu \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} \cdot P - \mathbf{j}^m \times \operatorname{grad} P \right\} dv = \\ & = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} P - \mu \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] P \right\} ds, \end{aligned} \quad (32.3)$$

Аналогичная подстановка для магнитного поля $\mathbf{F} \equiv \mathbf{H}$ дает

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \Delta P \cdot \mathbf{H} - \mu \varepsilon P \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma P \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{q^m}{\mu} \operatorname{grad} P - \right. \\ & \quad \left. - \sigma \mathbf{j}^m P - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{j}^m}{\partial t} \cdot P + \mathbf{j}^e \times \operatorname{grad} P \right\} dv = \\ & = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} P + \right. \\ & \quad \left. + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P + \varepsilon \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] P \right\} ds. \end{aligned} \quad (32.4)$$

Интегрируя (32.3) и (32.4) в бесконечных пределах по времени t и перебрасывая с помощью интегрирования по частям производную $\partial/\partial t$ под знаком интеграла с полей на функцию P , записываем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left\{ \mathbf{E} \left(\Delta P - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\tilde{q}^e}{\varepsilon} \operatorname{grad} P + \right. \\ & \quad \left. + \mu \mathbf{j}^e \frac{\partial P}{\partial t} - \mathbf{j}^m \times \operatorname{grad} P \right\} dv dt = \end{aligned} \quad (32.5a)$$

$$\begin{aligned} & = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} P + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial P}{\partial t} \right\} ds dt, \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left\{ \mathbf{H} \left(\Delta P - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{q^m}{\mu} \operatorname{grad} P - \sigma \mathbf{j}^m P + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \mathbf{j}^m \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{j}^e \times \operatorname{grad} P \right\} dv dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} P + \right. \\ & \quad \left. + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P - \varepsilon [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \frac{\partial P}{\partial t} \right\} ds dt. \end{aligned} \quad (32.5b)$$

Выберем в качестве P функцию G^t , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G^t - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 G^t}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial G^t}{\partial t} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (32.6)$$

Здесь δ — функция Дирака и лапласиан действует на переменную \mathbf{r} .

Как видим, G^t есть фундаментальная функция Грина для телеграфного уравнения. Как известно [Морс и Фешбах, 1958, т. 1, с. 803], она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G^t(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = & \frac{\exp [(-\sigma(t' - t))/2\varepsilon]}{4\pi \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ \delta \left(\frac{t' - t - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{\varepsilon}} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - (t' - t)^2/\mu\varepsilon}} \times \\ & \left. \times J_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{\varepsilon}} \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - (t' - t)^2/\mu\varepsilon} \right] \kappa \left(\frac{t' - t - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (32.7)$$

где J_1 — функция Бесселя, а κ — функция Хевисайда:

$$\kappa(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (32.8)$$

Подставляя (32.7) вместо P в (32.5), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^t + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^t + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right\} dt ds - \\ & - \iiint_D \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ \frac{\tilde{q}^e}{\varepsilon} \text{grad } G^t + \mu \mathbf{j}^2 \frac{\partial G^t}{\partial t} - \mathbf{j}^m \times \text{grad } G^t \right\} dt dv = \\ & = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \end{aligned} \quad (32.9a)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G^t + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G^t + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^t - \right. \\ & \left. - \varepsilon [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right\} dt ds - \iiint_D \int_{-\infty}^{t' - \sqrt{\mu\varepsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \\ & \times \left\{ \frac{q^m}{\mu} \text{grad } G^t - \sigma \mathbf{j}^m G^t + \varepsilon \mathbf{j}^m \frac{\partial G^t}{\partial t} + \mathbf{j}^e \times \text{grad } G^t \right\} dt dv = \\ & = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D; \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \end{aligned} \quad (32.9b)$$

Формулы (32.9а), (32.9б), решающие сформулированную в начале этого пункта задачу, будем называть *интегральными формулами Стрэттона — Чу для нестационарного электромагнитного поля*.

Если внутри области D нет сторонних токов и зарядов, то объемные интегралы в (32.9а), (32.9б) пропадают и формулы Стрэттона — Чу принимают вид

$$\iint_S \int_{-\infty}^{t'-\sqrt{\mu\epsilon}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^t + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^t + \mu[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^t}{\partial t} \right\} dt ds = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \quad (32.10a)$$

$$\iint_S \int_{-\infty}^{t'-\sqrt{\mu\sigma}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^t + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^t + \sigma[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^t - \epsilon[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \frac{\partial G^t}{\partial t} \right\} dt ds = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.10б)$$

Таким образом, значения электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} всюду внутри области D определяются по его значениям на границе области S .

32.2. Формулы Стрэттона — Чу для квазистационарного поля

Проинтегрируем теперь уравнения квазистационарного поля по области D (полагая, как и выше, что внутри D имеем ϵ , μ , $\sigma = \text{const}$). Для этого положим в (31.9) $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ и воспользуемся уравнениями (30.22) и (30.23):

$$\iiint_D \left\{ \Delta P \cdot \mathbf{E} - \operatorname{grad} P \cdot \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{j}^e - \mu P \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t} - \mu \sigma P \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} dv = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} P - \mu \left[\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] P \right\} ds. \quad (32.11)$$

Для квазистационарного магнитного поля соответственно получаем

$$\iiint_D \left\{ \Delta P \cdot \mathbf{H} - \mu \sigma P \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{j}^e \cdot P \right\} dv = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} P + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P + [\mathbf{n} \times \mathbf{j}^e] P \right\} ds. \quad (32.12)$$

С учетом тождества

$$\iiint_D \operatorname{rot} \mathbf{j}^e \cdot P dv = \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{j}^e] P ds + \iiint_D [\mathbf{j}^e \times \operatorname{grad} P] dv$$

формула (32.12) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \Delta P \cdot \mathbf{H} - \mu \sigma P \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{j}^e \times \text{grad } P \right\} dv = \\ & = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } P + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P \right\} ds. \end{aligned} \quad (32.13)$$

Интегрируя, как и выше, выражения (32.11) и (32.13) в бесконечных пределах по t , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left\{ \mathbf{E} \left(\Delta P + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{1}{\sigma} \text{div } \mathbf{j}^e \cdot \text{grad } P + \mu \mathbf{j}^e \frac{\partial P}{\partial t} \right\} dv dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } P + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial P}{\partial t} \right\} ds dt, \end{aligned} \quad (32.14a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint_D \left\{ \mathbf{H} \left(\Delta P + \mu \sigma \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \mathbf{j}^e \times \text{grad } P \right\} dv dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } P + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P \right\} ds dt. \end{aligned} \quad (32.14b)$$

Зададим в качестве P функцию Грина G^d для уравнения диффузии.

$$G^d(\cdot, t | \mathbf{r}', t') = - \frac{\sqrt{\mu \sigma}}{8\pi^{3/2} (t' - t)^{3/2}} \exp \left[- \frac{\mu \sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4(t' - t)} \right] \kappa(t' - t), \quad (32.15)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G^d + \mu \sigma \frac{\partial G^d}{\partial t} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (32.16)$$

Тогда из (32.14) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^d + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right\} ds - \right. \\ & \quad \left. - \iiint_D \left\{ \frac{1}{\sigma} \text{div } \mathbf{j}^e \cdot \text{grad } G^d + \mu \mathbf{j}^e \frac{\partial G^d}{\partial t} \right\} dv \right\} dt = \\ & = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \end{aligned} \quad (32.17a)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{t'} \left\{ \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^d + \right. \\
& \quad \left. + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^d \} ds - \iiint_D [j^e \times \operatorname{grad} G^d] dv \right\} dt = \\
& = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.176)
\end{aligned}$$

Последние соотношения представляют собой *интегральные формулы Стрэттона — Чу* для квазистационарного электромагнитного поля. При отсутствии внутри D сторонних токов эти формулы принимают вид

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^d + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right\} ds dt = \\
& = \begin{cases} \Gamma(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \quad (32.18a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^d + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^d \right\} ds dt = \\
& = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.186)
\end{aligned}$$

32.3. Волновая модель поля

Интегральные формулы Стрэттона — Чу для волнового электромагнитного поля могут быть в соответствии с п. 30.6 получены непосредственно из соотношений (32.5a), (32.5б), если положить в последних $\sigma=0$, $\tilde{q}^e=q^e$ (приравнять нулю свободные электрические заряды q) и

$$\begin{aligned}
P &= G^w = G^w(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t) = \\
&= -\frac{1}{4\pi \sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta\left(\frac{t'-t-\sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right), \quad (32.19)
\end{aligned}$$

где G^w — фундаментальная функция Грина для волнового уравнения:

$$\Delta G^w - \mu\epsilon \frac{\partial^2 G^w}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta(t-t'). \quad (32.20)$$

Выполняя указанную подстановку, записываем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t} \right\} ds - \iiint_B \left\{ \frac{q^e}{\varepsilon} \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \mathbf{j}^e \frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t} - \mathbf{j}^m \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} \right\} dv \right\} dt = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (32.21a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \varepsilon [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t} \right\} ds - \iiint_B \left\{ \frac{q^m}{\mu} \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon \mathbf{j}^m \frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t} + \mathbf{j}^e \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} \right\} dv \right\} dt = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (32.21b)$$

Вынесем в формулах (32.21a), (32.21b) дифференциальные операторы за знак интегралов. Действительно, поскольку оператор grad действует только на функцию Грина, можно записать

$$\operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} = -\operatorname{grad}' G^{\mathbb{W}} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} = -\operatorname{grad}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^{\mathbb{W}}, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad}' G^{\mathbb{W}} = \operatorname{rot}' [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^{\mathbb{W}}, \quad (32.22a)$$

$$\frac{q^e}{\varepsilon} \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} = -\operatorname{grad}' \frac{q^e}{\varepsilon} G^{\mathbb{W}} \quad \mathbf{j}^m \times \operatorname{grad} G^{\mathbb{W}} = \operatorname{rot}' \mathbf{j}^m G^{\mathbb{W}}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t} = -\frac{\partial G^{\mathbb{W}}}{\partial t'} \quad (32.22b)$$

С учетом (32.22a), (32.22b) перепишем (32.21a):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\operatorname{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^{\mathbb{W}} ds + \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^{\mathbb{W}} ds - \right. \\ \left. - \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^{\mathbb{W}} ds + \operatorname{grad}' \iiint_B \frac{q^e}{\varepsilon} G^{\mathbb{W}} dv + \right. \\ \left. + \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_B \mathbf{j}^e G^{\mathbb{W}} dv + \operatorname{rot}' \iiint_B \mathbf{j}^m G^{\mathbb{W}} dv \right\} dt = \\ = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (32.23)$$

Подставляя (32.19) в (32.23), находим

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi V\mu\epsilon} \left\{ -\text{grad}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{E}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds - \right. \\
 & \quad -\mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \frac{1}{\epsilon} \text{grad}' \iiint_D \frac{\tilde{q}^e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \\
 & \quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_D \frac{\tilde{\mathbf{j}}^e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \text{rot}' \iiint_D \frac{\tilde{\mathbf{j}}^m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \right\} = \\
 & = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (32.24a)
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{q}^{e,m}, \tilde{\mathbf{j}}^{e,m}$ — значения электрических и магнитных полей, зарядов и токов в запаздывающие моменты времени:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}', t' - \sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\mathbf{r}', t' - \sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \\
 \tilde{q}^{e,m} &= \tilde{q}^{e,m}(\mathbf{r}', t' - \sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad \tilde{\mathbf{j}}^{e,m} = \mathbf{j}^{e,m}(\mathbf{r}', t' - \sqrt{\mu\epsilon} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|).
 \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования выражения (32.21б) дают

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi V\mu\epsilon} \left\{ -\text{grad}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \right. \\
 & \quad + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \frac{1}{\mu} \text{grad}' \iiint_D \frac{\tilde{q}^m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv + \\
 & \quad \left. + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_D \frac{\tilde{\mathbf{j}}^m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv - \text{rot}' \iiint_D \frac{\tilde{\mathbf{j}}^e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \right\} = \\
 & = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.24б)
 \end{aligned}$$

Соотношения (32.24а), (32.24б) представляют собой *интегральные формулы Стрэттона — Чу* для волнового электромагнитного поля. Если внутри области D нет сторонних токов и зарядов, то формулы Стрэттона — Чу (32.24а), (32.24б) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi V\mu\epsilon} \left\{ -\text{grad}' \iint_S \frac{[\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{E}}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds - \right. \\
 & \quad \left. -\mu \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds \right\} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \quad (32.25a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi V\mu\epsilon} \left\{ -\text{grad}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \text{rot}' \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds + \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon \frac{\partial}{\partial t'} \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds \right\} = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.25б)
 \end{aligned}$$

Отметим в заключение этого пункта, что если в формулах (32.25а), (32.25б) вновь внести операторы grad' и rot' под знаки интегралов и учесть уравнения (30.1а)–(30.1г) для волнового поля (при $\sigma=0$), то мы получим известные интегральные формулы Кирхгофа [Стрэттон, 1948].

32.4. Случай стационарного поля

В случае стационарного электромагнитного поля подстановка в (31.9а) $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}$ с учетом (30.36) и (30.38) дает

$$\begin{aligned} & \iiint_D \{ \mathbf{E} \Delta P - \text{rot } \mathbf{j}^m \cdot P \} dv = \\ & = \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } P - [\mathbf{n} \times \mathbf{j}^m] P \} ds. \end{aligned} \quad (32.26)$$

Отсюда, учитывая тождество (32.2), получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_D \{ \mathbf{E} \Delta P - \mathbf{j}^n \times \text{grad } P \} dv = \\ & = \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } P \} ds \end{aligned} \quad (32.27a)$$

и аналогично для магнитного поля

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left\{ \mathbf{H} \Delta P + \frac{q^m}{\mu} \text{grad } P - \sigma \mathbf{j}^m P + \mathbf{j}^e \times \text{grad } P \right\} dv = \\ & = \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } P + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P \} ds. \end{aligned} \quad (32.27б)$$

Подставляя в (32.27а), (32.27б) в качестве P фундаментальную функцию Грина G для уравнения Лапласа

$$P = G = \frac{-1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds - \\ & -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \mathbf{j}^m \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dv = \\ & = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D; \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \quad (32.28a) \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left\{ \frac{q^m}{\mu} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \right. \\
& \left. - \sigma \mathbf{j}^m \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{j}^e \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dv = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0 & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{32.28б}$$

Итак, мы получили интегральные формулы Стрэттона — Чу для стационарного электромагнитного поля. В отсутствие сторонних электрических и магнитных токов и зарядов формулы (32.28а), (32.28б) приобретают вид

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \\
& = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0 & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases}
\end{aligned} \tag{32.29а}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\
& \left. + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{32.29б}$$

Отметим, что формула (32.29а) полностью совпадает с трехмерной интегральной формулой Коши (17.26). Этот результат является, по существу, простым следствием того, что стационарное электрическое поле \mathbf{E} — лапласово в области, где нет сторонних зарядов и токов.

Таким образом, значение электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} всюду внутри области D определяется по его значениям на границе области S .

32.5. Формулы Стрэттона — Чу для монохроматического поля (общий случай)

Предположим теперь, что нам задано монохроматическое электромагнитное поле, удовлетворяющее в области D вплоть до границы уравнениям (30.33а) — (30.33г). Тогда, полагая в (31.9а) $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}$ и учитывая (30.34), получаем

$$\begin{aligned}
& \iiint_D \left\{ \mathbf{E} (\Delta P + k^2 P) + \frac{q^e}{\epsilon^*} \operatorname{grad} P + i\omega\mu \mathbf{j}^e P - \operatorname{rot} \mathbf{j}^m \cdot P \right\} dv = \\
& = \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} P + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] P - [\mathbf{n} \times \mathbf{j}^m] P \right\} ds.
\end{aligned} \tag{32.30}$$

Ввиду тождества (32.12) последнее выражение может быть записано так:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left\{ \mathbf{E}(\Delta P + k^2 P) + \frac{q^e}{\epsilon^*} \text{grad } P + i\omega\mu \mathbf{j}^e P - \mathbf{j}^m \times \text{grad } P \right\} dv = \\ & = \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } P + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] P \} ds. \end{aligned} \quad (32.31)$$

Аналогичная подстановка для магнитного поля дает

$$\begin{aligned} & \iint_D \left\{ \mathbf{H}(\Delta P + k^2 P) + \frac{q^m}{\mu} \text{grad } P - \sigma^* \mathbf{j}^m P + \mathbf{j}^e \times \text{grad } P \right\} dv = \\ & = \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } P + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P \} ds. \end{aligned} \quad (32.32)$$

Выберем в качестве P фундаментальную функцию Грина для уравнения Гельмгольца

$$G^h = G(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = -\frac{e^{ik^*|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (32.33)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G^h + k^2 G^h = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (32.34)$$

Подставляя (32.33) в (32.31) и (32.32), получаем интегральные формулы Стрэттона — Чу для монохроматического поля

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \} ds - \\ & - \iint_D \left\{ \frac{q^e}{\epsilon^*} \text{grad } G^h + i\omega\mu \mathbf{j}^e G^h - \mathbf{j}^m \times \text{grad } G^h \right\} dv = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \end{aligned} \quad (32.35a)$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h \} ds - \\ & - \iint_D \left\{ \frac{q^m}{\mu} \text{grad } G^h - \sigma^* \mathbf{j}^m G^h + \mathbf{j}^e \times \text{grad } G^h \right\} dv = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \end{aligned} \quad (32.35b)$$

Наконец, если в области D нет сторонних токов и зарядов, то формулы (32.35a), (32.35b) принимают вид

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \} ds = \\ & = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \end{aligned} \quad (32.36a)$$

$$\iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h\} ds =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.366)$$

32.6. Модифицированные формулы Стрэттона — Чу для монохроматического поля

Существует другое представление формул Стрэттона — Чу, в котором дифференциальные операторы вынесены за знак интеграла. Так как оператор grad действует только на функцию Грина, то можно, так же как и в п. 32.3, произвести замену $\operatorname{grad} = -\operatorname{grad}'$, где оператор со штрихом действует на \mathbf{r}' . Тогда

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^h = -\operatorname{grad}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^h,$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^h = -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad}' G^h = \operatorname{rot}' [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h.$$

После этой замены формула (32.36a) принимает вид

$$\operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds - \operatorname{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^h ds + i\omega\mu \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.37)$$

Аналогично преобразуется формула (32.36б):

$$\operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds - \operatorname{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) G^h ds + \sigma^* \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0 & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (32.38)$$

Формулы Стрэттона — Чу имеют простую физическую интерпретацию. Пусть на замкнутой поверхности Γ распределены электрические и магнитные токи и заряды с поверхностной плотностью \mathbf{j}_S^e , \mathbf{j}_S^m и q_S^e , q_S^m . Они возбуждают электромагнитное поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \iint_S \left\{ \frac{q_S^e}{\epsilon^*} \operatorname{grad} G^h - \mathbf{j}_S^m \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu \mathbf{j}_S^e G^h \right\} ds,$$

$$(32.39)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = - \iint_S \left\{ \frac{q_S^m}{\mu} \operatorname{grad} G^h + \mathbf{j}_S^e \times \operatorname{grad} G^h - \sigma^* \mathbf{j}_S^m G^h \right\} ds, \quad \mathbf{r}' \notin S.$$

Сравнивая (32.39) с (32.36a), (32.36б), видим, что электромагнитное поле в D совпадает с полем, возбуждаемым токами и зарядами, которые распределены на S с плотностью

$$\mathbf{j}_S^e = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_S^m = \mathbf{n} \times \mathbf{E}; \quad q_S^e = -\epsilon^* (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad q_S^m = -\mu (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}). \quad (32.40)$$

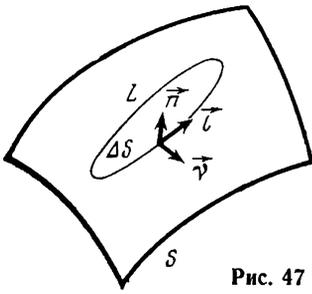


Рис. 47

Таким образом, в формулах Стрэттона — Чу реальные возбудители, распределенные вне области D , заменяются эквивалентными (фиктивными) возбудителями, распределенными на поверхности S .

Формулы (32.36а) — (32.38) содержат произведения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_n$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = H_n$, $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau$, $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau$, связанные с нормальными E_n , H_n и тангенциальными \mathbf{E}_τ , \mathbf{H}_τ компонентами поля. Однако E_n , H_n

всегда можно исключить из рассмотрения, так как согласно уравнениям Максвелла они выражаются через \mathbf{E}_τ , \mathbf{H}_τ .

В самом деле, соотношения между нормальными E_n , H_n и тангенциальными \mathbf{E}_τ , \mathbf{H}_τ компонентами электромагнитного поля на поверхности S легко получаются с помощью двумерных операторов дифференцирования, вводимых по аналогии с плоскими двумерными операторами параграфа 4 (см. также параграф 18):

$$\text{grad}_S W = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L W \mathbf{v} dl, \quad (32.41a)$$

$$\text{div}_S \mathbf{A}_\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{A}_\tau \cdot \mathbf{v} dl, \quad (32.41б)$$

$$\text{rot}_S \mathbf{A}_\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \times \mathbf{A}_\tau dl = \left\{ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}}{\Delta S} \oint_L (\mathbf{A}_\tau \cdot \mathbf{l}) dl \right\}, \quad (32.41в)$$

где W — скалярное поле; \mathbf{A}_τ — тангенциальная компонента векторного поля; L — контур, ограничивающий область ΔS поверхности S ; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S ; \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к L , лежащий на поверхности S ; \mathbf{l} — единичный вектор, направленный по касательной к L (рис. 47).

Векторы \mathbf{n} , \mathbf{v} , \mathbf{l} образуют правую тройку, т. е. $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{l}$. Запишем, например, с помощью двумерных операторов и уравнений

$$\begin{aligned} H_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}}{i\omega\mu} = \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rot}_S \mathbf{E}_\tau}{i\omega\mu} = \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{E}_\tau \cdot \mathbf{l} dl = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{E}_\tau \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] dl = \frac{1}{i\omega\mu} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L [\mathbf{E}_\tau \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} dl = \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu} \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau] = -\frac{1}{i\omega\mu} \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (32.42)$$

Аналогично

(30.35) нормальную компоненту магнитного поля:

$$E_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rot}_S \mathbf{H}_\tau}{\sigma^*} = -\frac{1}{\sigma^*} \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau] = -\frac{1}{\sigma^*} \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]. \quad (32.43)$$

Двумерный аналог формулы Остроградского—Гаусса имеет вид

$$\iint_S \operatorname{div}_S \mathbf{A}_\tau ds = \oint_L \mathbf{A}_\tau \cdot \mathbf{v} dl. \quad (32.44)$$

Если поверхность S замкнута, то

$$\iint_S \operatorname{div}_S \mathbf{A}_\tau ds = 0. \quad (32.45)$$

Учитывая формулы (32.42) и (32.43), исключим нормальные компоненты поля из (32.37) и (32.38). Наиболее простой результат получается, если подействовать оператором rot' на последние формулы. Тогда интегралы, содержащие E_n и H_n , выпадают и формулы Стрэттона—Чу с учетом (30.35) приобретают вид

$$\frac{1}{\sigma^*} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds + \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (32.46)$$

$$\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds + \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (32.47)$$

Эти формулы, предложенные Х. Хэнлом [Хэнл и др., 1964], мы будем называть *модифицированными интегральными формулами Стрэттона—Чу*.

32.7. Двумерные формулы Стрэттона — Чу

Если область D ограничена цилиндрической поверхностью S , образующая которой параллельна оси Y , а электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} однородно по этой оси, то задача сводится к двумерной. Двумерные формулы Стрэттона—Чу сохраняют структуру трехмерных, однако интегрирование ведется по замкнутому контуру Γ (проекции поверхности S на плоскость XZ) и фундаментальная функция Грина имеет вид

$$G^h = G^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k^* |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (32.48)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

В качестве примера приведем двумерные аналоги формул (32.36а), (32.36б). С учетом (32.48) получаем

$$\oint_{\Gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h\} dl = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (32.49a)$$

$$\oint_{\Gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h\} dl = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases} \quad (32.49б)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали; контур Γ обходится против часовой стрелки.

32.8. Формулы Стрэттона — Чу как аналог формулы Коши

Примечательна аналогия между интегральными формулами Стрэттона—Чу и интегральной формулой Коши. Во всех этих формулах значения функции во внутренних точках области находятся по ее значениям на границе, а интегралы во внешних точках равны нулю. Эта аналогия не является формальной, она отражает общность рассматриваемых соотношений.

В самом деле, при $\sigma^* = 0$ формула (32.36б) обращается в трехмерную интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} ds = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (32.50)$$

которая в двумерном случае идентична классической интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta = \begin{cases} f(\zeta'), & \zeta' \in D, \\ 0, & \zeta' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad (32.51)$$

где $\zeta = x + iz$; Γ — контур пересечения цилиндрической поверхности S с плоскостью XZ ; $f(\zeta) = -H_x + iH_z$ (см. параграф 17.4).

Таким образом, можно считать, что формулы Стрэттона—Чу являются обобщением формулы Коши на электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . Это обобщение позволяет перенести в электродинамику многие идеи теории функций комплексного переменного.

33. ИНТЕГРАЛЫ ТИПА СТРЭТТОНА — ЧУ

По аналогии с интегралами типа Коши можно ввести в рассмотрение интегралы типа Стрэттона—Чу [Жданов, 1975б; Zhdanov, 1980а; Бердичевский, Жданов, 1981]. В целях упрощения изложения рассмотрим теорию интегралов типа Стрэттона—Чу в основном для монохроматического поля. Вместе с тем нетрудно выполнить аналогичные построения для общих уравнений электродинамики. В качестве примера подобных обобщений мы приведем в конце этого параграфа интегралы типа Стрэттона—Чу для квазистационарного поля.

33.1. Понятие интеграла типа Стрэттона — Чу для монохроматического поля

Пусть на внутренней стороне замкнутой гладкой поверхности S , ограничивающей область D , заданы некоторые векторные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , удовлетворяющие следующим условиям: а) они имеют непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты $\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$; б) их нормальные компоненты E_n, H_n связаны с тангенциальными компонентами $\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$ соотношениями (32.42) и (32.43):

$$E_n = -\frac{1}{\sigma^*} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau], \quad H_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau], \quad (33.1)$$

где σ^*, μ, ω — некоторые константы. Так как соотношения (32.42), (32.43) являются двумерным следствием уравнений Максвелла, то поля \mathbf{E}, \mathbf{H} относятся к классу электромагнитных полей.

Рассмотрим выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^E(\mathbf{r}') &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h\} ds = \\ &= \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds - \operatorname{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^h ds + i\omega\mu \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds, \end{aligned} \quad (33.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h\} ds = \\ &= \operatorname{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds - \operatorname{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) G^h ds + \sigma^* \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds, \end{aligned} \quad (33.3)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внутренней нормали; G^h — фундаментальная функция Грина,

$$G^h = G^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-\exp ik^* |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}; \quad k^* = \sqrt{i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon}, \quad \operatorname{Re} k^* > 0.$$

Эти выражения совпадают с интегралами из формул Стрэттона—Чу (32.36а)–(32.38). Они могут быть названы *интегралами типа Стрэттона—Чу*. Функции \mathbf{E} и \mathbf{H} — это «электрическая» и «магнитная» плотности интегралов типа Стрэттона—Чу.

33.2. Свойства интегралов типа Стрэттона — Чу

Свойства интегралов типа Стрэттона—Чу во многом повторяют свойства трехмерных аналогов интеграла типа Коши, подробно изученные в параграфах 17 и 18, поэтому при изложении этих свойств детали доказательств мы часто будем опускать.

Перечислим основные свойства интегралов типа Стрэттона—Чу.

1. Интегралы типа Стрэттона—Чу вне поверхности S удовлет-

воряют уравнениям Максвелла. Для доказательства определим $\text{rot}' C^H$. Согласно (33.3)

$$\text{rot}' C^H(\mathbf{r}') = \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds + \sigma^* \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds.$$

Первый интеграл в правой части этого выражения с учетом (32.43) и (32.45) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds &= \text{grad}' \text{div}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds - \Delta' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \\ &= \text{grad}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \text{grad}' G^h ds - \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \Delta' G^h ds = \\ &= -\text{grad}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \text{grad}_S G^h ds + k^{*2} \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \\ &= -\text{grad}' \iint_S \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds + \text{grad}' \iint_S G^h \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] ds + \\ &+ i\omega\mu\sigma^* \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = -\sigma^* \text{grad}' \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^h ds + \\ &+ i\omega\mu\sigma^* \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \sigma^* \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad} G^h ds + i\omega\mu\sigma^* \times \\ &\times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds. \end{aligned}$$

Преобразование второго интеграла не встречает затруднений:

$$\sigma^* \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds = \sigma^* \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad} G^h ds.$$

Окончательно получаем

$$\text{rot}' C^H(\mathbf{r}') = \sigma^* \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad} G^h + i\omega\mu[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \} ds.$$

Сравним этот результат с (33.2). Как видно,

$$\text{rot}' C^H(\mathbf{r}') = \sigma^* C^E(\mathbf{r}'), \quad (33.4a)$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что

$$\text{rot}' C^E(\mathbf{r}') = i\omega\mu C^H(\mathbf{r}'). \quad (33.4b)$$

Из (33.4a), (33.4b) следует, что функции C^E , C^H вне поверхности S удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta C^{E,H} + k^{*2} C^{E,H} = 0. \quad (33.5)$$

2. Если плотности \mathbf{E} , \mathbf{H} интегралов типа Стрэттона—Чу совпадают с граничными значениями векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые удовлетворяют в области D и на поверхности S уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H},$$

то

$$C^E(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}; \end{cases} \quad C^H(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (33.6)$$

Доказательство непосредственно вытекает из интегральных формул Стрэттона—Чу (32.36).

3. Если плотности \mathbf{E} , \mathbf{H} интегралов типа Стрэттона—Чу совпадают с граничными значениями векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые удовлетворяют в области $C\bar{D}$ и на поверхности S уравнениям Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E}$, $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}$ и исчезают в бесконечности, то

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ -\mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}; \end{cases} \quad \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ -\mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (33.7)$$

Это свойство интегральных формул Стрэттона—Чу устанавливается аналогично формуле (17.37) п. 17.6 с учетом того, что интегралы \mathbf{C}^E , \mathbf{C}^H по сфере радиуса R стремятся к нулю, если R стремится к бесконечности.

4. Если плотности \mathbf{E} и \mathbf{H} интегралов типа Стрэттона—Чу удовлетворяют на S условиям Гельдера (18.14), то на внутренней и внешней сторонах гладкой поверхности S существуют предельные значения интегралов типа Стрэттона—Чу, равные при $\mathbf{r}_0 \in S$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{E+}(\mathbf{r}_0) &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{C}^E(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{C}^{H+}(\mathbf{r}_0) &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{C}^{E-}(\mathbf{r}_0) &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{C}^E(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{C}^{H-}(\mathbf{r}_0) &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (33.8)$$

где сингулярные интегралы

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h\} ds, \\ \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h\} ds, \end{aligned} \quad (33.9)$$

$$G^h = G^h(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp ik^* |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

определяются в смысле главного значения по Коши в соответствии с определением, данным в п. 18.2 (формула (18.13)). Таким образом, интегралы типа Стрэттона—Чу испытывают на S разрывы, равные

$$\mathbf{C}^{E+}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{C}^{E-}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{C}^{H+}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{C}^{H-}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{H}(\mathbf{r}_0). \quad (33.10)$$

В то же время суммы предельных значений интегралов типа Стрэттона—Чу равны в соответствии с (33.8) удвоенным сингулярным интегралам:

$$C^{E+}(\mathbf{r}_0) + C^{E-}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^E(\mathbf{r}_0), \quad C^{H+}(\mathbf{r}_0) + C^{H-}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^H(\mathbf{r}_0). \quad (33.11)$$

Доказательство формул (33.8)–(33.11) повторяет доказательство трехмерных аналогов формул Сохоцкого—Племеля (см. п. 18.3), поэтому мы здесь ограничимся пояснением этих формул на физическом уровне.

Возьмем любое поле \mathbf{F} , которое возбуждается источниками и вихрями, распределенными на замкнутой поверхности S с плотностью q_s и \mathbf{j}_s , и удовлетворяет вне поверхности S уравнению Гельмгольца $\Delta \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0$. Как известно (ср., например, (32.39)),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = - \iint_S \{q_s \text{grad } G^h + \mathbf{j}_s \times \text{grad } G^h\} ds.$$

Предельные значения этого поля на внутренней S^+ и внешней S^- сторонах поверхности S равны

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_0) - 1/2 \{q_s(\mathbf{r}_0) \mathbf{n} + \mathbf{j}_s(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}\}, \quad (33.12)$$

$$\mathbf{F}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_0) + 1/2 \{q_s(\mathbf{r}_0) \mathbf{n} + \mathbf{j}_s(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}\}$$

при $\mathbf{r}_0 \in S$, где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали, а сингулярный интеграл $\mathbf{F}_0(\mathbf{r}_0)$ существует в смысле главного значения по Коши.

Для разрыва поля \mathbf{F} на поверхности S имеем

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{F}^-(\mathbf{r}_0) = -q_s(\mathbf{r}_0) \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{j}_s(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}_0). \quad (33.13)$$

Сопоставим поле \mathbf{F} с \mathbf{C}^E . Векторная функция \mathbf{C}^E обладает свойствами электрического поля, и ее разрыв на поверхности S вызван действием эквивалентных электрических зарядов и магнитных токов. Следовательно, для перехода от \mathbf{F} к \mathbf{C}^E мы должны принять, что $q_s = q_E^e / \epsilon^*$ и $\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_s^m$, откуда в соответствии с (32.40) (33.12), (33.13) имеем

$$-q_s \mathbf{n} - \mathbf{j}_s \times \mathbf{n} = \frac{-q_s^e \mathbf{n}}{\epsilon^*} + \mathbf{j}_s^m \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} = \mathbf{E},$$

т. е.

$$C^{E+}(\mathbf{r}_0) = C_0^E(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad C^{E-}(\mathbf{r}_0) = C_0^E(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0),$$

$$C^{E+} - C^{E-} = \mathbf{E},$$

что и требовалось определить. Аналогично определяются предельные значения и разрывы интеграла \mathbf{C}^H . Формулы (33.8), (33.10) и (33.11) являются электромагнитными аналогами трехмерных формул Сохоцкого—Племеля (18.30), (18.32) и (18.33).

33.3. Модифицированные интегралы типа Стрэттона — Чу

В интегралах типа Стрэттона—Чу, так же как и в трехмерных аналогах интеграла типа Коши, поверхность S предполагается замкнутой. Однако можно предложить такую форму этих интегралов, которая сохраняет свои свойства в случае незамкнутой поверхности интегрирования Γ [Бердичевский, Жданов, 1981].

Пусть поверхность Γ ограничена контуром L . Рассмотрим интегралы

$$\mathbf{M}^E(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^E(\mathbf{r}') + \frac{1}{\sigma^*} \mathbf{L}^H(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{M}^H(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{L}^E(\mathbf{r}'), \quad (33.14)$$

где

$$\mathbf{L}^E(\mathbf{r}') = \text{grad}' \oint_L G^h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \mathbf{L}^H(\mathbf{r}') = \text{grad}' \oint_L G^h \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}. \quad (33.15)$$

Направление нормали к поверхности Γ и направление обхода контура L должны быть согласованы так, чтобы единичные векторы \mathbf{n} , \mathbf{v} и \mathbf{l} составляли правую тройку (см. рис. 47).

Интегралы \mathbf{M}^E , \mathbf{M}^H являются *модифицированными интегралами типа Стрэттона—Чу*. Они отличаются от интегралов \mathbf{C}^E , \mathbf{C}^H наличием членов, содержащих линейные интегралы \mathbf{L}^E , \mathbf{L}^H , которые отражают вклад эквивалентных электрических и магнитных зарядов, накапливающихся на границе поверхности Γ . В случае, когда поверхность Γ замкнута, $\mathbf{M}^E = \mathbf{C}^E$ и $\mathbf{M}^H = \mathbf{C}^H$, так как $\mathbf{L}^E = \mathbf{L}^H = 0$. Следовательно, на замкнутой поверхности Γ интегралы $\mathbf{C}^{E,H}$ и $\mathbf{M}^{E,H}$ тождественны.

Преобразуем выражения для \mathbf{M}^E и \mathbf{M}^H . Согласно (32.43), (32.44)

$$\begin{aligned} \oint_L G^h \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L G^h \mathbf{H} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= - \iint_{\Gamma} \text{div}_S G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{\Gamma} G^h \text{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{s} - \\ &- \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \text{grad}_S G^h \cdot d\mathbf{s} = \sigma^* \iint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) G^h \cdot d\mathbf{s} + \text{div}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в (33.14), получаем с учетом (33.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^E(\mathbf{r}') &= \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h \cdot d\mathbf{s} + i\omega\mu \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \cdot d\mathbf{s} + \\ &+ \frac{\text{grad}' \text{div}'}{\sigma^*} \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \cdot d\mathbf{s} = \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h \cdot d\mathbf{s} + \\ &+ \frac{\text{grad}' \text{div}' - \Delta'}{\sigma^*} \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\sigma^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h \cdot d\mathbf{s} + \\ &+ \text{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (33.16)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\mathbf{M}^H(\mathbf{r}') = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] G^h ds + \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds. \quad (33.17)$$

Сравним (33.16) и (33.17) с (32.46) и (32.47). Модифицированные интегралы типа Стрэттона—Чу и интегралы из модифицированных формул Стрэттона—Чу имеют одинаковую структуру. Если поверхность Γ замкнута, то интегралы \mathbf{M}^E , \mathbf{M}^H обладают теми же свойствами, что и интегралы \mathbf{C}^E , \mathbf{C}^H .

Интересно рассмотреть свойства интегралов \mathbf{M}^E , \mathbf{M}^H в случае незамкнутой поверхности Γ .

1. Модифицированные интегралы типа Стрэттона—Чу вне поверхности Γ , ограниченной контуром L , удовлетворяют уравнениям Максвелла. Согласно (33.16), (33.17)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' \mathbf{M}^H(\mathbf{r}') &= \frac{\operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \operatorname{rot}'}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \\ &= -\frac{\operatorname{rot}' \Delta'}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \\ &= -\frac{\operatorname{rot}'}{i\omega\mu} \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \Delta' G^h ds + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \\ & \hspace{20em} (33.18a) \\ &= \sigma^* \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h ds + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h ds = \sigma^* \mathbf{M}^E(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{rot}' \mathbf{M}^E(\mathbf{r}') = i\omega\mu \mathbf{M}^H(\mathbf{r}'). \quad (33.18b)$$

Отсюда, очевидно, следует, что функции \mathbf{M}^E , \mathbf{M}^H удовлетворяют уравнению Гельмгольца: $\Delta' \mathbf{M}^{E,H} + k^2 \mathbf{M}^{E,H} = 0$.

2. Найдем предельные значения модифицированных интегралов типа Стрэттона—Чу на поверхности Γ , ограниченной контуром L . Выберем положительную и отрицательную стороны поверхности Γ так, чтобы вектор нормали был ориентирован от положительной стороны к отрицательной. Согласно (33.8), (33.14) при $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{E+}(\mathbf{r}_0) &= \mathbf{C}^{E+}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \mathbf{L}^H(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \mathbf{L}^H(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{M}^{H+}(\mathbf{r}_0) &= \mathbf{C}^{H+}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{L}^E(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{L}^E(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{M}^{E-}(\mathbf{r}_0) &= \mathbf{C}^{E-}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \mathbf{L}^H(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{\sigma^*} \mathbf{L}^H(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{M}^{H-}(\mathbf{r}_0) &= \mathbf{C}^{H-}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{L}^E(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{L}^E(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (33.19)$$

где $M^{E,H\pm}$, $C^{E,H\pm}$ — предельные значения интегралов на положительной и отрицательной сторонах поверхности Γ ; $C_0^{E,H}$ — сингулярные интегралы (33.9), существующие в смысле главного значения; $L^{E,H}$ — собственные интегралы (33.15).

Таким образом, модифицированные интегралы типа Стрэттона—Чу испытывают на поверхности Γ разрывы:

$$M^{E+} - M^{E-} = E; \quad M^{H+} - M^{H-} = H. \quad (33.20)$$

Мы рассмотрели основные свойства интегральных соотношений Стрэттона—Чу. Все эти соотношения аналогично тому, как это было сделано для трехмерных аналогов интеграла типа Коши в параграфе 16, распространяются на кусочно-гладкие поверхности.

33.4. Матричное представление

Интегралы типа Стрэттона—Чу (33.2), (33.3) и (33.16), (33.17) можно записать в матричной форме. Мы ограничимся рассмотрением интегралов (33.2), (33.3). Разложим векторы C^E , C^H и E , H , n по произвольному декартову базису $\{d_x, d_y, d_z\}$:

$$C^E = C_\alpha^E d_\alpha, \quad C^H = C_\alpha^H d_\alpha, \quad E = E_\beta d_\beta, \quad H = H_\beta d_\beta, \quad n = n_\gamma d_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = x, y, z.$$

Согласно (20.7) и (20.8)

$$(n \cdot E) \operatorname{grad} G^h = E_\beta n_\gamma G_{,\alpha}^h \delta_{\beta\gamma} d_\alpha = E_\beta n_\gamma G_{,\eta}^h \delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} d_\alpha;$$

$$[n \times E] \times \operatorname{grad} G^h = E_\beta n_\gamma G_{,\eta}^h \varepsilon_{\alpha\eta\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta} d_\alpha; \quad \alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta = x, y, z;$$

$$i\omega\mu [n \times H] G^h = i\omega\mu H_\beta n_\gamma G_{,\eta}^h \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} d_\alpha.$$

После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} (n \cdot E) \operatorname{grad} G^h + [n \times E] \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu [n \times H] G^h &= \\ &= \{E_\beta G_{,\eta}^h (\delta_{\alpha\eta} \delta_{\beta\gamma} + \varepsilon_{\alpha\eta\zeta} \varepsilon_{\beta\gamma\zeta}) + i\omega\mu H_\beta G_{,\eta}^h \varepsilon_{\gamma\beta\alpha}\} n_\gamma d_\alpha = \\ &= [\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} E_\beta G_{,\eta}^h + i\omega\mu \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} H_\beta G_{,\eta}^h] n_\gamma d_\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z, \end{aligned} \quad (33.21)$$

где четырехиндексный Δ -символ выражается через δ - и ε -символы Кронекера посредством формулы (20.11). Подстановка (33.21) в (33.2) дает

$$C_\alpha^E(r') = \iint_S [\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} E_\beta G_{,\eta}^h + i\omega\mu \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} H_\beta G_{,\eta}^h] n_\gamma ds, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z. \quad (33.22)$$

Аналогично находится матричная форма интеграла C^H . Согласно (33.3)

$$C_\alpha^H(r') = \iint_S [\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} H_\beta G_{,\eta}^h + \sigma^* \varepsilon_{\gamma\beta\alpha} E_\beta G_{,\eta}^h] n_\gamma ds, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z. \quad (33.23)$$

Матричные формулы позволяют вычислять интегралы типа Стрэттона—Чу по компонентам E_p, H_p их электрической и магнитной плотности.

33.5. Интегралы типа Стрэттона — Чу для квазистационарного поля

По аналогии с интегралами типа Стрэттона—Чу для монохроматических полей можно ввести в рассмотрение интегралы типа Стрэттона—Чу для произвольных переменных во времени полей, в частности для наиболее важной в геофизических приложениях модели квазистационарного поля.

Пусть на внутренней стороне замкнутой гладкой поверхности S , ограничивающей область D , заданы некоторые векторные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , зависящие от времени t и удовлетворяющие следующим условиям: а) они имеют непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты $\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$; б) их нормальные компоненты E_n, H_n связаны с тангенциальными компонентами $\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$ следующими соотношениями:

$$E_n = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau], \quad \frac{\partial H_n}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau], \quad (33.24)$$

где σ, μ — некоторые константы; div_S — символ поверхностной дивергенции.

Нетрудно показать аналогично п. 32.6, что соотношения (33.24) являются двумерным следствием уравнений Максвелла (30.22) для квазистационарного поля. Поэтому функции \mathbf{E}, \mathbf{H} относятся к классу электромагнитных полей.

Рассмотрим выражения

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G^d + \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{\partial G^d}{\partial t} \right\} ds dt, \quad (33.25a)$$

$$\mathbf{C}^H(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G^d + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^d \right\} ds dt, \quad (33.25b)$$

где G^d — фундаментальная функция Грина для уравнения диффузии, определяемая формулой (32.15). Эти выражения совпадают с интегралами из формул Стрэттона—Чу (32.18a), (32.18б). Функции \mathbf{E} и \mathbf{H} , связанные соотношениями (33.24), — это «электрическая» и «магнитная» плотности интегралов типа Стрэттона—Чу для квазистационарного поля. Интегралы типа Стрэттона—Чу (33.25a), (33.25б) обладают рядом свойств (аналогичных свойствам их монохроматических аналогов, приведенных в п. 33.2), основными из которых являются следующие.

1. Интегралы типа Стрэттона—Чу вне поверхности S удовлетворяют уравнениям квазистационарного поля

$$\operatorname{rot}' \mathbf{C}^H = \sigma \mathbf{C}^E, \operatorname{rot}' \mathbf{C}^E = -\mu \frac{\partial \mathbf{C}^H}{\partial t'}, \quad (33.26)$$

откуда следует, что вне S поля \mathbf{C}^E , \mathbf{C}^H удовлетворяют уравнению диффузии

$$\Delta' \mathbf{C}^{E,H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{C}^{E,H}}{\partial t'} = 0. \quad (33.27)$$

2. Если плотности \mathbf{E} , \mathbf{H} интегралов типа Стрэттона—Чу совпадают с граничными значениями векторных полей \mathbf{E} , \mathbf{H} , которые удовлетворяют в области D и на S уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (33.28)$$

то имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}, \end{cases} \quad \mathbf{C}^H(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \overline{CD}. \end{cases} \quad (33.29)$$

3. В случае, если электрическая \mathbf{E} и магнитная \mathbf{H} плотности интегралов типа Стрэттона—Чу непрерывны по Гельдеру на S (формула (18.14)), существуют предельные значения этих интегралов на внутренней и внешней стороне гладкой поверхности S , определяемые формулами вида (33.8).

Доказательство перечисленных выше свойств аналогично приведенному выше в п. 33.2 для монохроматического поля.

В заключение этого пункта дадим простую физическую интерпретацию интегралов (33.25а), (33.25б). Пусть на замкнутой поверхности распределены сторонние электрические и магнитные токи и заряды с поверхностной плотностью j_s^e , j_s^m , q_s^e , q_s^m . Всюду вне S они возбуждают электромагнитное поле:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ \frac{q_s^e}{\varepsilon} \operatorname{grad} G^d - j_s^m \times \operatorname{grad} G^d + \mu j_s^e \frac{\partial G^d}{\partial t} \right\} ds dt, \quad (33.30a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{t'} \iint_S \left\{ \frac{q_s^m}{\mu} \operatorname{grad} G^d + j_s^e \times \operatorname{grad} G^d - \sigma j_s^m G^d \right\} ds dt. \quad (33.30б)$$

Сравнивая (33.25а), (33.25б) с (33.30), мы видим, что электромагнитное поле реальных источников вне S совпадает с полем, возбуждаемым эквивалентными сторонними (фиктивными) токами и зарядами, распределенными на S . Плотность фиктивных источников выражается через нормальные и тангенциальные компоненты электромагнитного поля

$$j_s^e = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad j_s^m = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad q_s^e = -\varepsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad q_s^m = -\mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}). \quad (33.31)$$

34. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ СТРЕТТОНА — ЧУ НА НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Теория интегралов типа Стрэттона—Чу, развитая в предыдущих параграфах, может быть обобщена на случай неоднородных сред, что существенно расширяет область ее применения в геофизике.

Задача формулируется следующим образом. Рассмотрим магнитооднородную среду ($\mu = \text{const}$) с заданным кусочно-непрерывным распределением электропроводности $\sigma^*(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$. Выделим в ней некоторый объем D , ограниченный поверхностью S . Электромагнитное поле в модели возбуждается источниками, расположенными вне области D . Будем предполагать, что зависимость полей от времени выражена множителем $\exp(-i\omega t)$, т. е. будем рассматривать монохроматическое поле.

Необходимо найти выражения для электромагнитного поля в любой точке \mathbf{r}_0 внутри области D по его значениям на внутренней стороне поверхности S .

34.1. Электромагнитные тензоры Грина и их свойства

Электрическое и магнитное поля в рассматриваемой модели всюду в области D удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (34.1)^1$$

где $\sigma^*(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon(\mathbf{r})$ — комплексная электропроводность среды.

В силу принципа единственности [Harrington, 1961] электромагнитное поле в конечной области, свободной от источников, однозначно определяется тангенциальными компонентами поля на границе S . Кроме того, исходные уравнения (34.1) линейны относительно токов. Это дает основание представить искомое электромагнитное поле в любой точке \mathbf{r}' внутри области D в виде [Фелсен, Маркувиц, 1978]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \iint_S \{ \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}_S^e(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}_S^m(\mathbf{r}) \} ds, \quad (34.2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = - \iint_S \{ \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}_S^e(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}_S^m(\mathbf{r}) \} ds, \quad \mathbf{r}' \in D,$$

где $\mathbf{j}_S^e(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}_S^m(\mathbf{r})$ — плотности соответственно электрических и магнитных (фиктивных) токов на поверхности S , а $\hat{\mathcal{G}}_{11}$, $\hat{\mathcal{G}}_{12}$, $\hat{\mathcal{G}}_{21}$, $\hat{\mathcal{G}}_{22}$ — электромагнитные тензоры Грина, векторные компоненты которых имеют смысл электрических и магнитных полей, возбуж-

¹ В пределах данного параграфа для обозначения операций rot, div и grad мы будем пользоваться оператором ∇ , поскольку это облегчает работу с тензорными объектами.

даемых в точке \mathbf{r}' электрическими или магнитными источниками единичной интенсивности, расположенными в точке \mathbf{r} поверхности S (т. е. точечными электрическими и магнитными диполями); интегрирование ведется по координате \mathbf{r} . (Читатель, мало знакомый с понятием электромагнитного тензора Грина, может найти необходимые сведения в приложении. Там же дан подробный вывод формул (34.2), основанный на лемме Лоренца для неоднородной среды.) Перечислим свойства, которыми обладают функции $\mathcal{G}_{ij}(i, j=1, 2)$.

Во-первых, они как поля элементарных источников электрического и магнитного типов подчиняются следующим уравнениям Максвелла:

$$\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{11} = i\omega\mu\hat{\mathcal{G}}_{21}, \quad \nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{21} = \sigma^*(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{11} - \hat{I}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}); \quad (34.3)$$

$$\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{12} = i\omega\mu\hat{\mathcal{G}}_{22} + \hat{I}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad \nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{22} = \sigma^*(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{12}, \quad (34.4)$$

где δ — функция Дирака; а \hat{I} — идемпотент (см. приложение).

Из (34.3) и (34.4) следует, что $\hat{\mathcal{G}}_{11}$ и $\hat{\mathcal{G}}_{12}$ удовлетворяют также уравнениям

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{11}] - k^{*2}(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{11} = -i\omega\mu\hat{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (34.5)$$

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{12}] - k^{*2}(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{12} = i\omega\mu\nabla' \times \hat{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

а $\hat{\mathcal{G}}_{21}$ и $\hat{\mathcal{G}}_{22}$ — уравнениям

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{21}] - k^{*2}(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{21} - \nabla'\sigma^* \times \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{21} = -\nabla' \times \hat{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (34.6)$$

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{22}] - k^{*2}(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{G}}_{22} - \nabla'\sigma^* \times \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{22} = \sigma^*(\mathbf{r}')\hat{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где $k^*(\mathbf{r}') = i\omega\mu\sigma^*(\mathbf{r}')$.

Во-вторых, тензорные функции $\hat{\Phi}_{ij}(i, j=1, 2)$ обладают симметрией и, пользуясь леммой Лоренца, нетрудно показать, что они удовлетворяют следующим соотношениям взаимности:

$$\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \quad \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \quad (34.7)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = -\tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{21}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \quad \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}),$$

где «волной» обозначена операция транспонирования.

Доказательство перечисленных выше свойств электромагнитных тензоров Грина дано в приложении.

34.2. Формулы Стрэттона — Чу для неоднородной среды

Как следует из формул (34.3), (34.4) и (34.7), электрическое и магнитное поля в представлении (34.2) можно выразить через какую-либо одну из функций $\hat{\mathcal{G}}_i(i, j=1, 2)$. Введем для удобства тензорные функции «электрического» и «магнитного» типа по формулам

$$\hat{G}^e(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')(i\omega\mu)^{-1}, \quad \hat{G}^m(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')(i\omega\mu)^{-1}. \quad (34.8)$$

Тогда, используя (34.3), (34.4), (34.7), (34.8), все тензорные функции $\hat{\mathcal{G}}_i(i, j=1, 2)$ можно выразить через \hat{G}^e и \hat{G}^m :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= i\omega\mu\hat{G}^e(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad \tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\tilde{\hat{\mathcal{G}}}_{21}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = \\ &= -i\omega\mu\tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = -\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \\ \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= i\omega\mu\hat{G}^m(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\nabla \times \tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = \\ &= -\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (34.9)$$

где оператор ∇' действует на координаты вектора \mathbf{r}' , а «волной», как и выше, обозначена операция транспонирования.

Выражая поверхностные электрические и магнитные токи через тангенциальные компоненты соответственно магнитного и электрического полей

$$\mathbf{j}_s^e = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_s^m = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (34.10)$$

(здесь и всюду ниже \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S) и подставляя (34.9) и (34.10) в (34.2), получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \iint_S \{i\omega\mu\hat{G}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r})][\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} ds, \quad (34.11a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_S \{i\omega\mu\hat{G}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r})][\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} ds, \quad \mathbf{r}' \in D.$$

Отметим, что формулы (34.11a) для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в области D можно вывести и непосредственно с помощью леммы Лоренца (см. приложение), при этом вне области D выполняется

$$\iint_S \{i\omega\mu\hat{G}^{e,m}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^{e,m}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})][\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} ds = 0, \quad \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \quad (34.11b)$$

где $C\bar{D}$ — дополнение области \bar{D} (с границей) до всего пространства.

Итак, формулы (34.11a), (34.11b) представляют собой интегральные формулы Стрэттона—Чу для неоднородной среды. Отметим, что для случая горизонтально-слоистой среды соответствующее обобщение формул Стрэттона—Чу было впервые получено Е. В. Захаровым и И. В. Ильиным [1970].

34.3. Переход к модели однородной среды

Покажем теперь, что в случае однородной среды формулы (34.11а), (34.11б) редуцируются к формулам Стрэттона—Чу (32.36а), (32.36б). Действительно, при $\sigma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ из уравнений (34.3) и (34.5) следует

$$\Delta \hat{\mathcal{G}}_{11} + k^{**} \hat{\mathcal{G}}_{11} - \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = i\omega \mu \hat{l} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где $k^{**} = i\omega \mu \sigma^* = \text{const}$, или в операторном виде

$$[\Delta' + k^{**}] \hat{\mathcal{G}}_{11} = \left[i\omega \mu \hat{l} + \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \nabla' \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (34.12)$$

Введем скалярную функцию $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ так, чтобы

$$\hat{\mathcal{G}}_{11} = \left[i\omega \mu \hat{l} + \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \nabla' \right] G. \quad (34.13)$$

Такая подстановка удовлетворяет уравнению (34.12), если функция G удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta' G + k^{**} G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (34.14)$$

и, следовательно, имеет вид

$$G = G^h(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp ik^* |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (34.15)$$

С другой стороны, при постоянном значении σ^* из уравнений (34.4) и (34.6) следует

$$\Delta' \hat{\mathcal{G}}_{22} + k^{**} \hat{\mathcal{G}}_{22} = - \frac{1}{i\omega \mu} \nabla' \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \sigma^* \hat{l} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

или в операторном виде

$$[\Delta' + k^{**}] \hat{\mathcal{G}}_{22} = -[\sigma^* \hat{l} + (i\omega \mu)^{-1} \nabla' \nabla'] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (34.16)$$

Из (34.16) видно, что тензорную функцию $\hat{\mathcal{G}}_{22}$ можно также выразить через скалярную функцию G^h , удовлетворяющую уравнению (34.14):

$$\hat{\mathcal{G}}_{22} = -[\sigma^* \hat{l} + (i\omega \mu)^{-1} \nabla' \nabla'] G^h \quad (34.17)$$

Тогда из уравнений (34.3) и (34.4) с учетом (34.13) и (34.17) следует

$$\hat{\mathcal{G}}_{12} = -\nabla' \times \hat{l} G^h, \quad (34.18) \quad \hat{\mathcal{G}}_{21} = \nabla' \times \hat{l} G^h. \quad (34.19)$$

Таким образом, в однородной среде появляется дополнительное свойство симметрии электромагнитных тензорных функций:

$$\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'). \quad (34.20)$$

Обозначим в случае однородной среды электрическую и магнитную функции Грина, введенные ранее согласно (34.8), через

\hat{G}_0^e и \hat{G}_0^m соответственно. Тогда ввиду (34.8), (34.13) и (34.19) записываем

$$\hat{G}_0^e = \left[\hat{I} + \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' \right] G^h, \quad \hat{G}_0^m = [\nabla' \times \hat{I} G^h] \frac{1}{i\omega\mu}. \quad (34.21)$$

Непосредственной проверкой можно удостовериться, что

$$\hat{G}_0^e(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \tilde{\hat{G}}_0^e(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad \hat{G}_0^m(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\tilde{\hat{G}}_0^m(\mathbf{r}|\mathbf{r}'). \quad (34.22)$$

Выразим теперь электромагнитные тензорные функции $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$ через \hat{G}_0^e и \hat{G}_0^m , учитывая (34.3), (34.4), (34.7) и (34.20):

$$\hat{\mathcal{G}}_{11} = i\omega\mu\hat{G}_0^e, \quad \hat{\mathcal{G}}_{21} = i\omega\mu\hat{G}_0^m = \nabla' \times \hat{G}_0^e, \quad (34.23)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{12} = -\hat{\mathcal{G}}_{21} = -i\omega\mu\hat{G}_0^m = -\nabla' \times \hat{G}_0^e,$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{22} = -\nabla' \times \hat{G}_0^m = -\frac{1}{i\omega\mu} [\nabla' \times [\nabla' \times \hat{G}_0^e]] = -\sigma^* \hat{G}_0^e.$$

Подставляя (34.23) и (34.10) в (34.2), записываем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \iint_{\mathcal{S}} \{ i\omega\mu \overline{\hat{G}_0^e}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\nabla' \times \hat{G}_0^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds, \quad (34.24)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_{\mathcal{S}} \{ i\omega\mu \hat{G}_0^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\nabla' \times \hat{G}_0^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds, \quad \mathbf{r}' \in D$$

Выражения (34.24) представляют собой формулы Стрэттона—Чу для однородной среды, согласующиеся с полученными ранее формулами (34.11а), (34.11б) для неоднородной среды. Если использовать только электрическую тензорную функцию, то формулы (34.24) принимают вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \iint_{\mathcal{S}} \{ i\omega\mu \hat{G}_0^e [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\nabla' \times \hat{G}_0^e] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds, \quad (34.25)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_{\mathcal{S}} \sigma^* \{ [\nabla' \times \hat{G}_0^e] [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + \sigma^* \hat{G}_0^e [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds, \quad \mathbf{r}' \in D.$$

Перепишем теперь правые части (34.24), учитывая (34.8), (34.13), (31.17)–(34.19):

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} \{ i\omega\mu \hat{G}_0^e [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\nabla' \times \hat{G}_0^e] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds = \\ & = \iint_{\mathcal{S}} \left\{ i\omega\mu \left[\hat{I} + \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' \right] G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\nabla' \times G^h \hat{I}] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \right\} ds, \end{aligned} \quad (34.26)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} \{ [\nabla' \times \hat{G}_0^e] [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + \sigma^* \hat{G}_0^e [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds = \\ & = \iint_{\mathcal{S}} \{ [\nabla' \times (G^h \hat{I})] [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + \sigma^* \left[\hat{I} + \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' \right] G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \} ds. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} [\nabla' \times (G^h \hat{\Gamma})] [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] &= \nabla' \times (G^h \hat{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]) = \nabla' \times G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \\ &= [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla G^h \end{aligned} \quad (34.27)$$

и аналогично

$$[\nabla' \times (G^h \hat{\Gamma})] [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}] = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla G^h.$$

Кроме того, можно показать, что

$$\iint_S i\omega\mu \left\{ \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' G^h \right\} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] ds = - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla' G^h ds, \quad (34.28)$$

$$\iint_S \sigma^* \left\{ \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' G^h \right\} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] ds = - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla' G^h ds.$$

Действительно, учитывая (34.21) и (34.22), а также тот факт, что оператор ∇ действует только на координаты вектора \mathbf{r} , а ∇' — на координаты вектора \mathbf{r}' , записываем

$$\begin{aligned} i\omega\mu \left\{ \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' G^h \right\} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] &= \frac{1}{\sigma^*} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \nabla' \nabla' G^h = \frac{1}{\sigma^*} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \nabla') \nabla' G^h = \\ &= \frac{1}{\sigma^*} \nabla' (\nabla' G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) = - \frac{1}{\sigma^*} \nabla' (\nabla G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) = \\ &= - \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \{ \nabla \cdot (G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) - G^h \nabla \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \}. \end{aligned} \quad (34.29)$$

Проинтегрируем (34.29) по замкнутой поверхности S :

$$\begin{aligned} \iint_S i\omega\mu \left\{ \frac{1}{k^{*2}} \nabla' \nabla' G^h \right\} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] ds &= \\ &= - \frac{1}{\sigma^*} \nabla' \iint_S \{ \nabla \cdot (G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) - G^h \nabla \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \} ds. \end{aligned} \quad (34.30)$$

Как непосредственно следует из уравнений Максвелла,

$$\frac{1}{\sigma^*} \nabla_S \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}. \quad (34.31)$$

Кроме того, поскольку поверхность S замкнута, то ввиду (32.44)

$$\iint_S \{ \nabla \cdot (G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) \} ds \equiv 0. \quad (34.32)$$

Подставляя (34.31) и (34.32) в (34.30), получаем первую из формул (34.28). Вторая формула (34.28) непосредственно следует из

первой, если поменять местами \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также заменить σ^* на $i\omega\mu$. Окончательно формулы (34.24) с учетом (34.27) и (34.28) принимают вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \iint_S \{i\omega\mu[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]G^h + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla G^h\} ds, \quad (34.33)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_S \{[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla G^h + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla G^h + \sigma^* G^h [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} ds.$$

Таким образом, мы получили формулы Стрэттона—Чу (32.36а), (32.36б) для однородной среды.

34.4. Интегралы типа Стрэттона — Чу в неоднородной среде и их свойства

Введем в рассмотрение интегральные операторы \hat{F} и $\hat{\Psi}$, такие, что

$$\hat{F}^\Gamma(\hat{G})\mathbf{P} = \iint_\Gamma i\omega\mu\hat{G}[\mathbf{n} \times \mathbf{P}] ds, \quad \hat{\Psi}^\Gamma(\hat{G})\mathbf{P} = \iint_\Gamma [\tilde{\mathbf{V}} \times \tilde{\mathbf{G}}][\mathbf{n} \times \mathbf{P}] ds, \quad (34.34)$$

где \mathbf{P} — произвольное векторное поле, заданное и интегрируемое на замкнутой поверхности Γ ; \mathbf{n} — вектор внешней нормали к Γ .

Пусть $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — произвольные кусочно-дифференцируемые векторные поля, заданные вдоль некоторой гладкой замкнутой поверхности S , ограничивающей конечную область D пространства. Пусть $\hat{G}^e(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ и $\hat{G}^m(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ — тензорные функции, удовлетворяющие уравнениям (34.1) с заданными параметрами μ , ω и $\sigma^*(\mathbf{r})$ (кусочно-непрерывной в \bar{D}), а также условиям излучения на бесконечности [Стрэттон, 1948].

Определим на S векторные поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in S$) так, чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{h}_\tau, \quad \mathbf{v}_n = \frac{-i}{\mu\omega} \nabla \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{e}], \quad \mathbf{u} = -\frac{1}{\sigma^*} \nabla [\mathbf{n} \times \mathbf{h}], \quad (34.35)$$

где индексами τ и n обозначены соответственно тангенциальные и нормальные компоненты векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{e} , \mathbf{h} по отношению к поверхности S , а параметр $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}^*(\mathbf{r})$ совпадает с $\sigma^*(\mathbf{r})$ всюду на S , кроме, быть может, множества точек меры нуль: $\tilde{\sigma}^*(\mathbf{r}) = \sigma^*(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$. Тогда, очевидно, выражения

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \hat{F}^S(\hat{G}^e)\mathbf{v} + \hat{\Psi}^S(\hat{G}^e)\mathbf{u}, \quad \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \hat{F}^S(\hat{G}^m)\mathbf{v} + \hat{\Psi}^S(\hat{G}^m)\mathbf{u} \quad (34.36)$$

имеют смысл в любой точке пространства, не принадлежащей S , и, как можно показать, представляют собой решения уравнений Максвелла (34.1). Интегралы (34.36) будем называть *интегралами типа Стрэттона—Чу для неоднородной среды*.

Свойства интегралов типа Стрэттона—Чу, перечисленные в параграфе 33 для случая однородной среды, без труда переносятся на случай неоднородной среды.

1. Векторы \mathbf{M}^e и \mathbf{M}^m , введенные согласно (34.36) вне поверхности S , удовлетворяют уравнениям Максвелла (34.1).

Убедимся в справедливости сделанного утверждения непосредственной проверкой. Действительно, используя (34.3)–(34.8), а также то обстоятельство, что оператор ∇' действует только на координаты вектора \mathbf{r}' , можно записать

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') &= \iint_S \{i\omega\mu[\nabla' \times \hat{G}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] \mathbf{v}_\tau + \nabla' \times [\tilde{\nabla} \times \hat{G}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] \mathbf{u}_\tau\} ds = \\ &= \iint_S \{(i\omega\mu)^{-1} \hat{G}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{v}_\tau + i\omega\mu[\nabla' \times \tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}')] \mathbf{u}_\tau\} ds = \\ &= i\omega\mu \iint_S \{i\omega\mu \hat{G}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{v}_\tau + [\tilde{\nabla} \times \tilde{\hat{G}}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r}')] \mathbf{u}_\tau\} ds = i\omega\mu \mathbf{M}^m(\mathbf{r}'), \\ \nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') &= \iint_S \{i\omega\mu[\nabla' \times \hat{G}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] \mathbf{v}_\tau + \nabla' \times [\tilde{\nabla} \times \hat{G}^m(\mathbf{r}'|\mathbf{r})] \mathbf{u}_\tau\} ds = \\ &= \sigma^*(\mathbf{r}') \iint_S \{i\omega\mu \hat{G}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{v}_\tau + i\omega\mu \tilde{\hat{G}}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r}') \mathbf{u}_\tau\} ds = \\ &= \sigma^*(\mathbf{r}') \iint_S \{i\omega\mu \hat{G}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{v}_\tau + [\tilde{\nabla} \times \tilde{\hat{G}}^e(\mathbf{r}'|\mathbf{r}')] \mathbf{u}_\tau\} ds = \sigma^*(\mathbf{r}') \mathbf{M}^e(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (34.37)$$

что и требовалось доказать.

Из (34.37) следует, что вне поверхности S (при $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$) векторы \mathbf{M}^e и \mathbf{M}^m удовлетворяют тем же уравнениям, что и электрическая (\hat{G}^e) и магнитная (\hat{G}^m) тензорные функции. Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla' \times [\nabla' \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}')] &= i\omega\mu \nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = i\omega\mu \sigma^*(\mathbf{r}') \mathbf{M}^e(\mathbf{r}'), \\ \nabla' \times [\nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}')] &= \nabla' \times (\sigma^*(\mathbf{r}') \mathbf{M}^e(\mathbf{r}')) = \sigma^*(\mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') + \\ &+ \nabla' \sigma^*(\mathbf{r}') \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = i\omega\mu \sigma^*(\mathbf{r}') \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') + \\ &+ \nabla' \sigma^*(\mathbf{r}') \times \left[\frac{1}{\sigma^*(\mathbf{r}')} \nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nabla' \times [\nabla' \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}')] - k^{**}(\mathbf{r}') \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') &= 0, \\ \nabla' \times [\nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}')] - k^{**}(\mathbf{r}') \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') - \nabla' \sigma^* \times \left[\frac{1}{\sigma^*} \nabla' \times \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') \right] &= 0, \end{aligned} \quad (34.38)$$

где, как и раньше, $k^{**}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\sigma^*(\mathbf{r})$.

2. Если плотности \mathbf{u} и \mathbf{v} интегралов типа Стрэттона—Чу совпадают с граничными значениями векторных полей \mathbf{e} и \mathbf{h} , которые

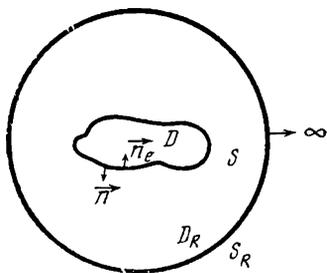


Рис. 48

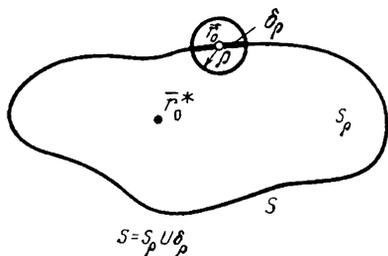


Рис. 49

удовлетворяют в области уравнениям Максвелла $\nabla \times \mathbf{h} = \sigma^*(\mathbf{r})\mathbf{e}$, $\nabla \times \mathbf{e} = i\omega\mu\mathbf{h}$, то

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases} \quad \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D, \\ 0, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (34.39)$$

Доказательство непосредственно следует из формул (34.11a) и (34.11б).

3. Если плотности \mathbf{u} и \mathbf{v} интегралов типа Стрэттона—Чу совпадают с граничными значениями векторных полей \mathbf{e} и \mathbf{h} , которые удовлетворяют в области $C\bar{D}$ и на поверхности S уравнениям Максвелла $\nabla \times \mathbf{h} = \sigma^*(\mathbf{r})\mathbf{e}$, $\nabla \times \mathbf{e} = i\omega\mu\mathbf{h}$ и исчезают в бесконечности, т. е.

$$\mathbf{e} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \mathbf{h} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (34.40)$$

то

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ -\mathbf{u}, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases} \quad \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ -\mathbf{v}, & \mathbf{r}' \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (34.41)$$

Для доказательства (34.41) окружим область D сферой радиуса R и рассмотрим область D_R , ограниченную поверхностями S и S_R (рис. 48). Устремляя радиус R сферы к бесконечности и учитывая (34.39) и (34.40), записываем

$$-\mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases} \quad -\mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in C\bar{D}, \end{cases}$$

где появление знака «минус» в левых частях связано с тем, что на поверхности S направление внешней нормали \mathbf{n}_e к области D_R противоположно принятому ранее положительному направлению нормали к этой поверхности (рис. 48). Таким образом, (34.41) доказано.

4. Пусть функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируемы вдоль некоторой поверхности S , ограничивающей конечную область пространства, и удовлетворяют вдоль S условиям

$$v_n = \frac{-i}{\mu\omega} \nabla' [\mathbf{n} \times \mathbf{u}], \quad u_n = -\frac{1}{\sigma^*} \nabla' [\mathbf{n} \times \mathbf{v}], \quad (34.42)$$

где $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}^*(\mathbf{r}')$, причем $\tilde{\sigma}^*(\mathbf{r}') = \sigma^*(\mathbf{r}')$, $\mathbf{r}' \in S$ (кроме, быть может, множества точек меры нуль). Тогда на внутренней и внешней сторонах поверхности S существуют предельные значения интегралов типа Стрэттона—Чу, равные (в обыкновенных точках):

$$\mathbf{M}^{e+}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^E(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{u}(\mathbf{r}_0), \quad (34.43a)$$

$$\mathbf{M}^{m+}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^H(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{v}(\mathbf{r}_0), \quad (34.43б)$$

$$\mathbf{M}^{e-}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{M}^e(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^E(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{u}(\mathbf{r}_0), \quad (34.43в)$$

$$\mathbf{M}^{m-}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{M}^m(\mathbf{r}') = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^H(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{v}(\mathbf{r}_0), \quad (34.43г)$$

где $\mathbf{C}_0^{E,H}(\mathbf{r}_0)$ — обычные сингулярные интегралы типа Стрэттона—Чу для однородной среды, которые можно определить формулами

$$\mathbf{C}_0^{E,H}(\mathbf{r}_0) = \hat{F}^S(\hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}))\mathbf{v} + \hat{\Psi}^S(\hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}))\mathbf{u}, \quad (34.43д)$$

$$\Delta \mathbf{C}^{E,H}(\mathbf{r}_0) = \hat{F}^S(\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}))\mathbf{v} + \hat{\Psi}^S(\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}))\mathbf{u}. \quad (34.43е)$$

Здесь $\hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$ — функции Грина однородной среды с $\sigma^* = \sigma^*(\mathbf{r}_0)$, а $\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0) = \hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r}) - \hat{G}_0^{e,m}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$. Сингулярные интегралы $\mathbf{C}_0^{E,H}$ определяются, как обычно, в смысле главного значения по Коши.

Докажем справедливость (34.43а) и (34.43б). Возьмем точку \mathbf{r}_0^* вне поверхности S , $\mathbf{r}_0^* \in D$ (рис. 49). Очевидно, интегралы $\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}_0^*)$ можно представить в виде

$$\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}_0^*) = \mathbf{C}_0^{E,H}(\mathbf{r}_0^*) + \Delta \mathbf{C}^{E,H}(\mathbf{r}_0^*), \quad (34.44)$$

где $\mathbf{C}_0^{E,H}(\mathbf{r}_0^*)$ и $\Delta \mathbf{C}^{E,H}(\mathbf{r}_0^*)$ — обыкновенные неособенные интегралы ($\mathbf{r}_0^* \notin S$, $\mathbf{r} \in S$).

Найдем предельные значения $\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}_0^*)$ при $\mathbf{r}_0^* \rightarrow \mathbf{r}_0$ ($\mathbf{r}_0 \in S$, $\mathbf{r}_0^* \in D$):

$$\lim_{\mathbf{r}_0^* \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}_0^*) = \lim_{\mathbf{r}_0^* \rightarrow \mathbf{r}_0} \{\mathbf{C}_0^{E,H}(\mathbf{r}_0^*) + \Delta \mathbf{C}^{E,H}(\mathbf{r}_0^*)\}. \quad (34.45)$$

Заметим предварительно, что

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{C}^{E,H}(\mathbf{r}_0^*) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{[\hat{F}^{S\rho}(\hat{G}_0^{e,m}) - \hat{F}^{S\rho}(\hat{G}_0^{e,m})]\mathbf{v} + \\ &+ [\hat{\Psi}^{S\rho}(\hat{G}_0^{e,m}) - \Psi^{S\rho}(\hat{G}_0^{e,m})]\mathbf{u}\} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{\hat{F}^{S\rho}(\Delta \hat{G}_0^{e,m})\mathbf{v} + \hat{\Psi}^{S\rho}(\Delta \hat{G}_0^{e,m})\mathbf{u}\}, \end{aligned} \quad (34.46)$$

где $\mathbf{r} \in S$, а $S_\rho = S \setminus \delta\rho$ — часть поверхности S , из которой вырезана область $\delta\rho$ сферой с центром в точке \mathbf{r}_0 и радиусом ρ (см. рис. 49).

Тогда, с учетом (34.46) можно записать

$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow r_0^*} \Delta C^{E,H}(r_0^*) &= \lim_{r_0 \rightarrow r_0^*} \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \hat{F}^{S\rho} (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0^* | r)) \mathbf{v} + \\ &+ \hat{\Psi}^{S\rho} (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0^* | r)) \mathbf{u} \} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \hat{F}^{S\rho} (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0 | r)) \mathbf{v} + \hat{\Psi}^{S\rho} (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0 | r)) \mathbf{u} \}, \end{aligned} \quad (34.47)$$

где учтено, что, согласно [Дмитриев, Фарзан, 1980], существует конечный предел $\lim_{r \rightarrow r_0} \Delta \hat{G}^{e,m}(r_0 | r)$. Следовательно, предел (34.47) существует как обыкновенный несобственный интеграл

$$\lim_{r_0 \rightarrow r_0^*} \Delta C^{E,H}(r_0^*) = \hat{F}^S (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0 | r)) \mathbf{v} + \hat{\Psi}^S (\Delta \hat{G}^{e,m}(r_0 | r)) \mathbf{u} = \Delta C^{E,H}(r_0). \quad (34.48)$$

Интегралы $C_0^{E,H}(r_0^*)$ являются обычными интегралами типа Стрэттона—Чу для однородной среды, поэтому их пределы определяются известными выражениями (33.8)

$$\lim_{r_0^* \rightarrow r_0^+} C^E(r_0^*) = C_0^E(r_0) + 1/2 \mathbf{u}(r_0), \quad \lim_{r_0^* \rightarrow r_0^+} C^H(r_0^*) = C_0^H(r_0) + 1/2 \mathbf{v}(r_0). \quad (34.49)$$

Подставляя (34.48) и (34.49) в (34.45), получаем (34.43а) и (34.43б), что и требовалось доказать. Аналогично доказываются (34.43в) и (34.43г) (при этом $r_0^* \in C\bar{D}$). Из (34.43а)–(34.43е), в частности, следует, что

$$\mathbf{M}_+^e - \mathbf{M}_-^e = \mathbf{u}(r_0), \quad \mathbf{M}_+^m - \mathbf{M}_-^m = \mathbf{v}(r_0), \quad r_0 \in S. \quad (34.50)$$

Формулы (34.43а)–(34.43е) и (34.50) можно рассматривать как *электромагнитные аналоги трехмерных формул Сохоцкого—Племеля* (18.30), (18.32) и (18.33).

Таким образом, мы распространили теорию интегралов типа Стрэттона—Чу на неоднородные среды. Отметим, что в общем случае произвольной среды определение электромагнитных тензоров Грина представляет собой весьма сложную задачу. Однако существует целый ряд классов моделей неоднородных сред, для которых эта задача может быть успешно решена. Наиболее важным примером таких моделей является горизонтально-слоистая среда. В этой модели соответствующие тензоры Грина могут быть записаны в явном виде с помощью интегральных преобразований Фурье или Ханкеля от элементарных функций [Weidelt, 1975].

35. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Аппарат интегралов типа Стрэттона—Чу, развитый в предыдущих параграфах книги, позволяет распространить на электромагнитные поля ряд теорем комплексного анализа, описывающих свойства краевых значений аналитических функций. Изложению этих теорем, чрезвычайно полезных при решении различных задач электродинамики, и посвящен данный параграф. При этом в целях простоты мы ограничимся рассмотрением случая монохроматического электромагнитного поля, хотя все основные положения излагаемой ниже теории справедливы и для нестационарного поля.

35.1. Интегральные краевые условия для электромагнитного поля на границе однородной области

Рассмотрим некоторую область D в пространстве, ограниченную гладкой поверхностью S . Предположим, что внутри области электромагнитные параметры среды ϵ , μ , σ постоянны и известны. Пусть на S заданы непрерывные по Гельдеру и имеющие непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in S$). Каким условиям должны удовлетворять эти функции, для того чтобы их можно было бы рассматривать как краевые значения некоторого монохроматического электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющего внутри D (вплоть до границы S) уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (35.1)$$

где $\sigma^* = \sigma - i\omega\epsilon$, ω — круговая частота поля?

Будем решать эту задачу, опираясь на теоремы, полученные в параграфе 19 для лапласовых векторных полей, и используя аппарат интегралов типа Стрэттона—Чу.

Прежде всего отметим, что простейшее *необходимое условие*, накладываемое на \mathbf{e} и \mathbf{h} , имеет согласно (32.42) и (32.43) вид

$$e_n = -\frac{1}{\sigma^*} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_\tau], \quad h_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\tau], \quad (35.2)$$

где e_n , h_n и \mathbf{e}_τ , \mathbf{h}_τ — нормальные и тангенциальные компоненты векторных функций \mathbf{e} и \mathbf{h} на поверхности S . Однако это условие не является достаточным для того, чтобы функции \mathbf{e} и \mathbf{h} были бы краевыми значениями электромагнитного поля, удовлетворяющего уравнениям (35.1) в D .

Для того чтобы найти необходимые и достаточные условия, накладываемые на краевые значения электромагнитного поля, запишем интегралы типа Стрэттона—Чу (33.2) и (33.3) с электрической плотностью \mathbf{e} и магнитной плотностью \mathbf{h} (при этом пред-

полагаем, что выполняются условия (35.2)):

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h\} ds, \quad (35.3a)$$

$$\mathbf{C}^H(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] \times \text{grad } G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] \bar{G}^h\} ds. \quad (35.3b)$$

Согласно свойству 2 интегралов типа Стрэттона—Чу (см. параграф 33) *необходимым условием* того, чтобы \mathbf{e} , \mathbf{h} были краевыми значениями некоторого электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , возбуждаемого внешними по отношению к \bar{D} источниками, являются следующие тождества:

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0, \quad \mathbf{C}^H(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0 \quad \text{для всех } \mathbf{r}' \in \bar{C}\bar{D}. \quad (35.4)$$

Условия (35.4) в совокупности с (35.2) являются также *достаточными условиями* того, чтобы \mathbf{e} , \mathbf{h} были бы краевыми значениями на S полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , определяемых формулами

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^H(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}). \quad (35.5)$$

Для доказательства этого положения воспользуемся электромагнитными аналогами формул Сохоцкого—Племеля (33.10)

$$\mathbf{C}^{E+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) - \mathbf{C}^{E-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \quad (35.6)$$

где $\mathbf{r}_0 \in S$. Очевидно, что в соответствии с (35.4) функция $\mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h})$ непрерывно продолжима на S снаружи области D , причем

$$\mathbf{C}^{E-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = 0. \quad (35.7)$$

Подставляя (35.7) в (35.6), видим, что функция $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ непрерывно продолжима на S изнутри области D , причем

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{E+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \quad (35.8)$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается справедливость соотношения

$$\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{H+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}_0). \quad (35.9)$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 35.1. *Для того чтобы непрерывные по Гельдеру и имеющие непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, заданные на гладкой замкнутой поверхности S (ограничивающей область D), были краевыми значениями на внутренней стороне этой поверхности некоторо-*

го электромагнитного поля, возбуждаемого внешними по отношению к области \bar{D} источниками, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (35.2) и (35.4).

Эту теорему можно рассматривать как электромагнитный аналог теоремы 19.1 для краевых значений лапласова поля.

Легко видеть, что с помощью аппарата интегралов типа Стрэттона—Чу и электромагнитных аналогов формул Сохоцкого—Племеля на случай электромагнитного поля могут быть перенесены и все остальные теоремы п. 19.2. Мы приведем здесь лишь формулировки этих теорем, предоставляя доказательство читателю.

Теорема 35.2. *Необходимым и достаточным условием того, что векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, непрерывные по Гельдеру на гладкой замкнутой поверхности S (ограничивающей область D) и имеющие там дифференцируемые тангенциальные компоненты, служат краевыми значениями на внутренней стороне S электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} , возбуждаемого внешними по отношению к области D источниками, являются следующие соотношения:*

$$e_n = -\frac{1}{\sigma^*} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_\tau], \quad h_n = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{div}_S [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\tau]; \quad (35.10)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad (35.11)$$

где $\mathbf{C}_0^E, \mathbf{C}_0^H$ — сингулярные интегралы, определяемые в смысле главного значения по Коши в соответствии с формулами (33.9); \mathbf{n} — внешняя нормаль по отношению к области D .

Теорема 35.3. *Для того чтобы непрерывные по Гельдеру и имеющие непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, заданные на гладкой замкнутой поверхности S (ограничивающей область D), были краевыми значениями на внешней стороне этой поверхности некоторого электромагнитного поля, возбуждаемого источниками, сосредоточенными внутри D , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (35.10) и*

$$\mathbf{C}^E(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0, \quad \mathbf{C}^H(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0 \quad \text{для всех } \mathbf{r}' \in D, \quad (35.12)$$

или

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = -2\mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = -2\mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}). \quad (35.13)$$

Соотношения (35.11) и (35.13) называются *интегральными краевыми условиями для монохроматического электромагнитного поля на границе однородной области.*

35.2. Интегральные краевые условия для электромагнитного поля на границе неоднородной области

Предположим теперь, что внутри области D комплексная электропроводность $\sigma^*(\mathbf{r})$ есть произвольная непрерывная (вплоть до границы S) функция координат, а $\mu = \text{const}$. Сформулируем, каким

условиям должны удовлетворять функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, заданные на границе S области D , для того чтобы их можно было рассматривать как краевые значения некоторого монохроматического поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , возбуждаемого внешними по отношению к области D источниками. Прежде всего необходимо, чтобы функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, так же как и в случае однородной области D , были связаны между собой соотношениями (35.2). Однако эти условия, очевидно, не являются достаточными. Для нахождения необходимых и достаточных краевых условий запишем интегралы типа Стрезтона—Чу для неоднородной среды (34.36) с плотностями, равными $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \hat{\mathbf{F}}^S(\hat{G}^e)\mathbf{e} + \hat{\Psi}^S(\hat{G}^e)\mathbf{h}, \quad (35.14)$$

$$\mathbf{M}^m(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \hat{\mathbf{F}}^S(\hat{G}^m)\mathbf{e} + \hat{\Psi}^S(\hat{G}^m)\mathbf{h},$$

где интегральные операторы $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\Psi}$ определяются формулами (34.34). Так же как и в случае однородной области D , нетрудно показать, опираясь на формулы (34.50), что *необходимым и достаточным условием того, что векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, непрерывно дифференцируемые на гладкой замкнутой поверхности S , ограничивающей область D , служат краевыми значениями на внутренней стороне S электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющего всюду в D вплоть до границы S уравнениям*

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma^*(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (35.15)$$

являются следующие тождества:

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0, \quad \mathbf{M}^m(\mathbf{r}'; \mathbf{e}, \mathbf{h}) \equiv 0 \quad \text{для всех } \mathbf{r}' \in S\bar{D}. \quad (35.16)$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в п. 19.1, используя формулы (34.43а)–(34.43е), можно получить условия, эквивалентные (35.15):

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + 2\Delta\mathbf{C}^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad (35.17)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + 2\Delta\mathbf{C}^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}),$$

где сингулярные интегралы \mathbf{C}_0 и $\Delta\mathbf{C}$ определяются формулами (34.43д, е).

Соотношения (35.17) в совокупности с (35.2) представляют собой наиболее удобную форму записи интегральных краевых условий для электромагнитного поля на границе неоднородной области.

Отметим, наконец, что нетрудно показать, опираясь на результаты параграфа 34, что условия (35.17) остаются справедливыми и для области D с кусочно-непрерывным распределением комплексной электропроводности.

35.3. Определение электромагнитного поля по заданному скачку

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на гладкой замкнутой поверхности S заданы векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, непрерывные по Гельдеру на S и имеющие там непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты, а также связанные между собой соотношениями (35.2) (двумерным следствием уравнений Максвелла). Требуется найти поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющее всюду вне S уравнениям Максвелла (35.1), исчезающее на бесконечности и испытывающее при переходе через поверхность S скачок, равный

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{H}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{h}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (35.18)$$

Легко видеть, что решением этой задачи на основании электромагнитных аналогов формул Сохоцкого—Племеля (33.10) являются следующие интегралы типа Стрэттона—Чу:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^E(\mathbf{r}') = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h\} ds, \quad (35.19)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^H(\mathbf{r}') = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] \text{grad } G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] G^h\} ds.$$

Отметим, что это решение, так же как и в случае комплексно-аналитических функций (п. 3.2) и трехмерных лапласовых полей (п. 19.2), является *единственным*. Доказательство этого факта немедленно следует из свойства единственности электромагнитного поля (аналогичного свойству единственности гармонических функций), которое мы рассмотрим в параграфе 38.

Наряду с представлением (35.19) для определения электромагнитного поля по заданному скачку можно воспользоваться эквивалентными выражениями для этого поля через модифицированные интегралы типа Стрэттона—Чу (33.16), (33.17)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}^E(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h ds + \text{rot}' \iint_S [\times \mathbf{e}] G^h ds, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}^H(\mathbf{r}') = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] G^h ds + \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h ds. \quad (35.20)$$

Преимуществом представлений (35.20) по сравнению с (35.19) является то, что в них явным образом учитывается лишь скачок тангенциальных компонент поля, поскольку $\mathbf{n} \times \mathbf{h} = \mathbf{nh}_\tau$, $\mathbf{n} \times \mathbf{e} = \mathbf{ne}_\tau$. Кроме того, в случае представлений (35.20) поверхность S может быть незамкнутой. Иными словами, эти представления решают следующую задачу:

На произвольной замкнутой или разомкнутой гладкой поверхности S заданы непрерывно дифференцируемые векторные функции $\mathbf{e}_t(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}_t(\mathbf{r})$, направленные всюду по касательной к S . Требуется определить электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , исчезающее на бесконечности и удовлетворяющее всюду вне S уравнениям (35.17), тангенциальные компоненты которого испытывают на S скачок, равный \mathbf{e}_t и \mathbf{h}_t соответственно.

Подчеркнем, что решение (35.20) сформулированной задачи об определении электромагнитного поля по заданному скачку является единственным.

Наконец, в заключение следует отметить, что полученный выше результат легко обобщается на случай среды с произвольным кусочно-непрерывным распределением $\sigma^*(\mathbf{r})$. Для этого достаточно лишь воспользоваться интегралами типа Стрэттона—Чу для неоднородных сред (формула (34.36)).

35.4. Формулы обращения интегралов типа Стрэттона — Чу

Рассмотрим, как обычно, некоторую область D в пространстве, ограниченную гладкой поверхностью S . Зададим на S произвольные непрерывные по Гельдеру векторные функции $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, имеющие непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты и связанные между собой условиями (35.2). Обозначим через $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ сингулярные интегралы:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = 2 \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] \times \text{grad } G^h + \\ + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h \} ds, \quad (35.21a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = 2 \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] \times \text{grad } G^h + \\ + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] G^h \} ds, \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (35.21б)$$

Предположим теперь, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ заданы, а $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ неизвестны. Тогда выражения (35.21a), (35.21б) представляют собой *сингулярные интегральные уравнения относительно функций $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$* , аналогичные уравнениям (3.11) и (19.17) для интегралов типа Коши и их трехмерных аналогов. Решим эти уравнения. Для этого воспользуемся методом, уже описанным выше для обращения интегралов типа Коши (п. 3.3, 19.3).

Прежде всего отметим, что, опираясь на свойства интегралов типа Стрэттона—Чу (п. 33.2), нетрудно убедиться в том, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, так же как и \mathbf{e} , \mathbf{h} , непрерывны по Гельдеру на S и связаны между собой условиями (35.2). В частности, если \mathbf{e} , \mathbf{h} есть краевые значения на S некоторого электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , возбуждаемого внешними по отношению к D источниками, то согласно теореме 35.2

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{h}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S. \quad (35.22)$$

В общем же случае $\mathbf{u} \neq \mathbf{e}$ и $\mathbf{v} \neq \mathbf{h}$.

Найдем \mathbf{h} и \mathbf{e} . Предварительно, воспользовавшись электромагнитными аналогами формул Сохоцкого—Племеля (33.11), перепишем формулы (35.21а), (35.21б) в следующем виде:

$$\mathbf{C}^{\mathbf{E}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + \mathbf{C}^{\mathbf{E}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0), \quad (35.23)$$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{H}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + \mathbf{C}^{\mathbf{H}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0).$$

Следуя выводу, данному в п. 3.3 и 19.3, обозначим через $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ функции, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{C}^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; \mathbf{e}, \mathbf{h}), & \mathbf{r} \in D, \\ -\mathbf{C}^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; \mathbf{e}, \mathbf{h}), & \mathbf{r} \in C\bar{D}; \end{cases} \quad (35.24a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{C}^{\mathbf{H}}(\mathbf{r}; \mathbf{e}, \mathbf{h}), & \mathbf{r} \in D, \\ -\mathbf{C}^{\mathbf{H}}(\mathbf{r}; \mathbf{e}, \mathbf{h}), & \mathbf{r} \in C\bar{D}. \end{cases} \quad (35.24б)$$

Очевидно, что функции $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ всюду вне S удовлетворяют уравнениям Максвелла (35.1) и согласно (35.23) при переходе через S испытывают скачок:

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{H}^+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0). \quad (35.25)$$

В соответствии с результатами п. 35.3 электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} определяется по заданному скачку с помощью следующих интегралов типа Стрэттона—Чу:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}'; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{\mathbf{H}}(\mathbf{r}'; \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (35.26)$$

Применяя к интегралам (35.26) электромагнитные аналоги формул Сохоцкого—Племеля (33.11), записываем

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}^{\mathbf{E}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{C}^{\mathbf{E}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mathbf{C}_0^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (35.27)$$

$$\mathbf{H}^+(\mathbf{r}_0) + \mathbf{H}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}^{\mathbf{H}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{C}^{\mathbf{H}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mathbf{C}_0^{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

С другой стороны, в силу (35.24) и формул Сохоцкого—Племеля (33.10)

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}^{\mathbf{E}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) - \mathbf{C}^{\mathbf{E}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \quad (35.28)$$

$$\mathbf{H}^+(\mathbf{r}_0) + \mathbf{H}^-(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}^{\mathbf{H}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) - \mathbf{C}^{\mathbf{H}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}_0).$$

Левые части равенств (35.27) и (35.28) равны, следовательно, равны и правые части:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 2\mathbf{C}_0^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \iint_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] \times \text{grad } G^h + \\ + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] G^h \} ds, \end{aligned} \quad (35.29a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \times \operatorname{grad} G^h + \\ + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] G^h\} ds. \end{aligned} \quad (35.296)$$

Полученные формулы (35.29а) (35.29б) решают сингулярные интегральные уравнения (35.21а), (35.21б).

Легко видеть, что с помощью аналогичных рассуждений можно вновь от формул (35.29а), (35.28б) перейти к формулам (35.21а), (35.21б). Таким образом, мы получим пару взаимно-обращаемых интегральных преобразований, которые мы назовем интегральными преобразованиями Стрэттона—Чу:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = 2 \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] G^h\} ds, \quad (35.30а)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = 2 \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] \times \operatorname{grad} G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] G^h\} ds;$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 2 \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] \times \operatorname{grad} G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] G^h\} ds, \quad (35.30б)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = 2 \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{grad} G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \times \operatorname{grad} G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{u}] G^h\} ds.$$

Заметим, что по построению нормаль \mathbf{n} в (35.30) направлена вовне области D , однако, так же как и для трехмерных интегральных преобразований Коши, эти формулы остаются в силе, если в них всюду заменить направление нормали \mathbf{n} на противоположное.

Очевидно, что при $\omega=0$ и $\sigma^*=0$ (стационарное поле в изоляторе) формулы (35.30) переходят в формулы (19.26), т. е. интегральные преобразования Стрэттона—Чу вырождаются в интегральные преобразования Коши.

Наряду с интегральными преобразованиями Стрэттона—Чу (35.30) можно построить пару взаимно-обращаемых преобразований, основанных на интегралах типа Стрэттона—Чу для неоднородной среды:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + 2\Delta C^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}), \quad (35.31а)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) + 2\Delta C^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h});$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\Delta C^E(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (35.31б)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) = 2C_0^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\Delta C^H(\mathbf{r}_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

где сингулярные интегралы $C_0^{E,H}$ и $\Delta C^{E,H}$ определяются формулами (34.43д), (34.43е).

35.5. Интегральные преобразования Стрэттона — Чу по плоскости

Перепишем формулы (35.30) для случая, когда S — координатная плоскость $X\bar{Y}$, в предположении, что функции e , h и u , v стремятся к нулю на бесконечности. Тогда существуют главные значения интегралов типа Стрэттона—Чу в бесконечных пределах (в смысле, аналогичном определенному в п. 19.4 для интегралов типа Коши) и формула (35.30а) принимает вид

$$u(x_0, y_0, 0) = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e_z \frac{\partial G^h}{\partial x} \mathbf{d}_x + e_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \mathbf{d}_y - \left(e_x \frac{\partial G^h}{\partial x} + e_y \frac{\partial G^h}{\partial y} \right) \mathbf{d}_z + i\omega\mu (h_x G^h \mathbf{d}_y - h_y G^h \mathbf{d}_x) \right\} ds, \quad (35.32)$$

$$v(x_0, y_0, 0) = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ h_z \frac{\partial G^h}{\partial x} \mathbf{d}_x + h_z \frac{\partial G^h}{\partial y} \mathbf{d}_y - \left(h_x \frac{\partial G^h}{\partial x} + h_y \frac{\partial G^h}{\partial y} \right) \mathbf{d}_z + \sigma^* (e_x G^h \mathbf{d}_y - e_y G^h \mathbf{d}_x) \right\} ds.$$

Здесь учтено, что нормаль \mathbf{n} смотрит вверх.

Обозначим символами \hat{G}_x^h и \hat{G}_y^h следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{x|f}^h(x, y) &= \hat{G}_{x|f}^h = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G^h}{\partial x} f dx dy, \\ \hat{G}_{y|f}^h(x, y) &= \hat{G}_{y|f}^h = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G^h}{\partial y} f dx dy, \\ \hat{G}^h f(x, y) &= \hat{G}^h f = 2 \iint_{-\infty}^{+\infty} G^h f dx dy. \end{aligned} \quad (35.33)$$

Тогда соотношения (35.32) можно записать так:

$$u_x = \hat{G}_x^h e_z - i\omega\mu \hat{G}^h h_y, \quad u_y = \hat{G}_y^h e_z + i\omega\mu \hat{G}^h h_x, \quad u_z = -\hat{G}_x^h e_x - \hat{G}_y^h e_y; \quad (35.34a)$$

$$v_x = \hat{G}_x^h h_z - \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad v_y = \hat{G}_y^h h_z + \sigma^* \hat{G}^h e_x, \quad v_z = -\hat{G}_x^h h_x - \hat{G}_y^h h_y. \quad (35.34b)$$

Аналогичным образом записываются формулы обращения (35.30б):

$$e_x = \hat{G}_x^h u_z - i\omega\mu \hat{G}^h v_y, \quad e_y = \hat{G}_y^h u_z + i\omega\mu \hat{G}^h v_x, \quad e_z = -\hat{G}_x^h u_x - \hat{G}_y^h u_y; \quad (35.35a)$$

$$h_x = \hat{G}_x^h v_z - \sigma^* \hat{G}^h u_y, \quad h_y = \hat{G}_y^h v_z + \sigma^* \hat{G}^h u_x, \quad h_z = -\hat{G}_x^h v_x - \hat{G}_y^h v_y. \quad (35.35b)$$

Соотношения (35.34a)–(35.35b) представляют собой обобщение на случай электромагнитного поля трехмерных преобразований Гильберта (19.29a), (19.29б).

Предположим, наконец, что \mathbf{e} , \mathbf{h} есть краевые значения на плоскости $z=0$ поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющего всюду в нижнем полупространстве уравнениям Максвелла (35.1) и стремящегося к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы 35.2 справедливо тождество $\mathbf{e} \equiv \mathbf{u}$; $\mathbf{h} \equiv \mathbf{v}$ и соотношения (35.34a)–(35.35b) принимают вид

$$e_x = \hat{G}_x^h e_z - i\omega\mu \hat{G}^h h_y, \quad e_y = \hat{G}_y^h e_z + i\omega\mu \hat{G}^h h_x, \quad e_z = -\hat{G}_x^h e_x - \hat{G}_y^h e_y; \quad (35.36a)$$

$$h_x = \hat{G}_x^h h_z - \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad h_y = \hat{G}_y^h h_z + \sigma^* \hat{G}^h e_x, \quad h_z = -\hat{G}_x^h h_x - \hat{G}_y^h h_y; \quad (35.36б)$$

Аналогично если \mathbf{e} , \mathbf{h} есть краевые значения поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющего уравнениям Максвелла (35.1) всюду в верхнем полупространстве и исчезающего на бесконечности, то, заменяя знак правой части (35.36a), (35.36б) на противоположный (так как меняется направление нормали \mathbf{n}), получаем

$$e_x = -\hat{G}_x^h e_z + i\omega\mu \hat{G}^h h_y, \quad e_y = -\hat{G}_y^h e_z - i\omega\mu \hat{G}^h h_x, \quad e_z = \hat{G}_x^h e_x + \hat{G}_y^h e_y; \quad (35.37a)$$

$$h_x = -\hat{G}_x^h h_z + \sigma^* \hat{G}^h e_y, \quad h_y = -\hat{G}_y^h h_z - \sigma^* \hat{G}^h e_x, \quad h_z = \hat{G}_x^h e_x + \hat{G}_y^h e_y. \quad (35.37б)$$

Соотношения (35.36a)–(35.37б) дают простые линейные связи между различными компонентами электромагнитного поля на горизонтальной плоскости. При $\omega=0$ и $\sigma=0$ эти соотношения переходят в трехмерные преобразования Гильберта (19.31), (19.32).

36. МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЗЕМЛИ

36.1. Разделение электромагнитного поля на внешнюю и внутреннюю части

Проблема разделения электромагнитного поля Земли на внешнюю и внутреннюю части, как уже отмечалось в параграфе 10, является одной из основных задач геомагнетизма. Геофизические аспекты этой проблемы применительно к переменным полям достаточно подробно рассмотрены в работе [Бердичевский, Жданов, 1981], здесь же мы ограничимся кратким описанием постановки задачи.

Рассмотрим модель, в которой бесконечно протяженная гладкая поверхность S отделяет неоднородную проводящую Землю (Ω_-) от однородной проводящей атмосферы (Ω_+) (рис. 50). Модель возбуждается сторонними токами, распределенными с плотностью \mathbf{j}^* в области Q_* атмосферы. Зависимость поля от времени выражена множителем $\exp(-i\omega t)$ (рассматривается монохрома-

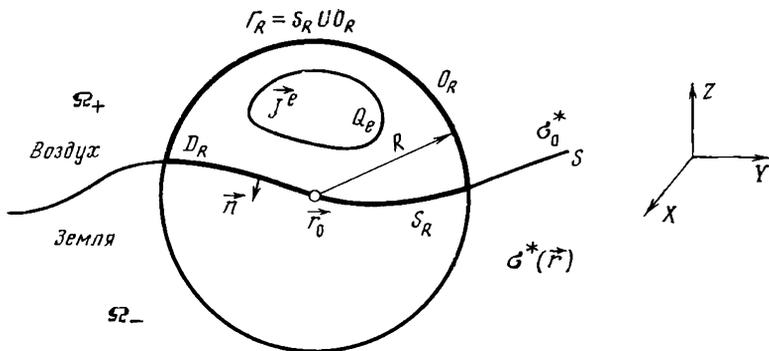


Рис. 50

тическое поле). Комплексную электропроводность атмосферы обозначим σ_0^* , а Земли — $\sigma^*(r)$. Магнитная проницаемость повсеместно постоянна и равна μ_0 . Электромагнитное поле в этой модели удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{cases} \sigma_0^* \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, & \mathbf{r} \in \Omega_+, \\ \sigma^*(r) \mathbf{E}, & \mathbf{r} \in \Omega_-, \end{cases} \quad (35.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}.$$

Тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на поверхности S непрерывны.

Представим электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в виде суммы внешнего \mathbf{E}^e , \mathbf{H}^e и внутреннего \mathbf{E}^i , \mathbf{H}^i полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^i, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^i, \quad (36.2)$$

где \mathbf{E}^e , \mathbf{H}^e — поле, создаваемое токами \mathbf{j}^e в случае, когда комплексная электропроводность Земли равна электропроводности атмосферы:

$$\sigma^*(r) \equiv \sigma_0^*, \quad (36.3)$$

а \mathbf{E}^i , \mathbf{H}^i — та часть полного поля, которая возникает за счет отличия электропроводности Земли от атмосферы.

Внешнее и внутреннее поля удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^e = \sigma_0^* \mathbf{E}^e + \mathbf{j}^e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^e = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^e; \quad (36.4a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^i = \sigma_0^* \mathbf{E}^i + \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^i = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^i, \quad (36.4b)$$

где $\mathbf{j} = [\sigma^*(r) - \sigma_0^*] \mathbf{E}$ — избыточные токи, индуцируемые в Земле.

Поставим задачу: *определить внешние и внутренние поля \mathbf{E}^e , \mathbf{H}^e и \mathbf{E}^i , \mathbf{H}^i на земной поверхности S по полному полю \mathbf{E} , \mathbf{H} , заданному также на S .*

Если комплексная электропроводность воздуха равна нулю, $\sigma_0^* = 0$, то ввиду (36.1) и (36.4a), (36.4b) магнитное поле в атмо-

сфере (вне области Q_e) становится лапласовым и для разделения полей применим метод Кертца—Зибберта, описанный в параграфе 24. Вместе с тем с помощью интегралов типа Стрэттона—Чу можно построить более общий метод, применимый к трехмерным моделям с проводящей атмосферой. Этот метод мы назовем *общенным методом Кертца—Зибберта*.

Возьмем на земной поверхности S какую-либо точку и опишем из нее сферу столь большого радиуса R , чтобы область источника Q_e оказалась внутри сферы. Пусть O_R есть часть сферы, лежащая в Ω_+ , а S_R — часть земной поверхности, лежащая внутри сферы. Рассмотрим интеграл типа Стрэттона—Чу по замкнутой кусочно-гладкой поверхности $\Gamma_R = S_R \cup O_R$:

$$C^H(r') = \iint_{\Gamma_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds,$$

$$\text{где } G_0^h = G^h(r' | r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0^* |r' - r|)}{|r' - r|}; \quad k_0^* = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0^*}.$$

Представим C^H в виде суммы, $C^H = C^{H^e} + C^{H^i}$, в которой интегралы C^{H^e} и C^{H^i} определяются по значениям внешнего \mathbf{H}^e , \mathbf{E}^e и внутреннего \mathbf{H}^i , \mathbf{E}^i электромагнитных полей:

$$C^{H^e}(r') = \iint_{\Gamma_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e) \operatorname{grad} G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^e] \times \operatorname{grad} G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^e] G_0^h\} ds,$$

$$C^{H^i}(r') = \iint_{\Gamma_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^i) \operatorname{grad} G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^i] \times \operatorname{grad} G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i] G_0^h\} ds.$$

Внешнее электромагнитное поле вне Q_e удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^e = \sigma_0^* \mathbf{E}^e |_{r \notin Q_e}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^e = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^e |_{r \notin Q_e}$$

и исчезает на бесконечности. Следовательно, согласно (33.7)

$$C^{H^e}(r') = \begin{cases} 0, & r' \in D_R, \\ -\mathbf{H}^e(r'), & r' \in C\bar{D}_R, \end{cases}$$

где D_R и $C\bar{D}_R$ — области, внутренняя и внешняя по отношению к Γ_R .

Внутреннее электромагнитное поле в $D_R \subset \Omega_+$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^i = \sigma_0^* \mathbf{E}^i |_{r \in D_R \subset \Omega_+}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^i = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^i |_{r \in D_R \subset \Omega_+}$$

Следовательно, согласно (33.6)

$$C^{H^i}(r') = \begin{cases} \mathbf{H}^i(r'), & r' \in D_R, \\ 0, & r' \in C\bar{D}_R. \end{cases}$$

Суммируя C^{H^e} и C^{H^i} находим

$$C^H(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_R, \\ -\mathbf{H}^e(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in \overline{CD}_R. \end{cases}$$

Отсюда легко получить предельные значения C^H на поверхности S_R . Благодаря непрерывности магнитного поля

$$C_i^H(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^+} C^H(\mathbf{r}') = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S_R, \quad (36.5)$$

$$C_e^H(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_0^-} C^H(\mathbf{r}') = -\mathbf{H}^e(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \notin S_R.$$

Предельные значения C^H могут быть найдены и по формулам (33.8), являющимся аналогом формул Сохоцкого—Племеля:

$$C_i^H(\mathbf{r}_0) = C_0^H(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \quad C_e^H(\mathbf{r}_0) = C_0^H(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \quad (36.6)$$

где сингулярный интеграл

$$C_0^H(\mathbf{r}_0) = \iint_{\Gamma_R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds,$$

$$G_0^h = G^h(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(i k_0^* |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|},$$

определяется в смысле главного значения по Коши. Приравнивая (36.5) к (36.6), получаем

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}_0) = 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + C_0^H(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{H}^e(\mathbf{r}_0) = 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) - C_0^H(\mathbf{r}_0). \quad (36.7)$$

Теперь перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. Так как поле на бесконечности исчезает, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\partial R} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds = 0,$$

откуда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} C^H(\mathbf{r}_0) = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds.$$

Следовательно, согласно (36.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_0) &= 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_0^h + \\ &+ \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds, \end{aligned} \quad (36.8)$$

$$\mathbf{H}^e(\mathbf{r}_0) = 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) - \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_0^h\} ds,$$

где единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен из воздуха в Землю.

Мы получили обобщенные формулы Кертца—Зиберта, являющиеся аналогом формул (24.12). Они позволяют разделить магнитное поле на внешнюю и внутреннюю части в широком классе трехмерных моделей с проводящей атмосферой и произвольным рельефом земной поверхности. Аналогичные формулы разделения могут быть получены для электрического поля.

36.2. Разделение электромагнитного поля на нормальную и аномальную части

Задача разделения электромагнитного поля на нормальную и аномальную части является естественным обобщением рассмотренной выше задачи определения внешних и внутренних полей.

Для постановки задачи обратимся к модели, аналогичной изображенной на рис. 50, однако теперь будем предполагать, что граница раздела земля — воздух — поверхность P есть горизонтальная плоскость $z=0$ (рис. 51). Комплексная электропроводность Земли всюду вне некоторой области $Q_i \subset \Omega_-$ есть функция только вертикальной координаты z , $\sigma^*(\mathbf{r}) = \sigma_n^*(z)$. Внутри неоднородной области Q_i электропроводность равна $\sigma_i^* = \sigma_n^*(z) + \sigma_a^*(\mathbf{r})$, где $\sigma_a^*(\mathbf{r})$ — произвольная функция координат. Модель, так же как и выше, возбуждается сторонними токами, текущими с плотностью \mathbf{j}^e в области Q_e атмосферы.

Электромагнитное поле в этой модели можно представить в виде суммы нормального $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$ и аномального $\mathbf{E}^a, \mathbf{H}^a$ полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^n + \mathbf{E}^a, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^n + \mathbf{H}^a, \quad (36.9)$$

где $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^n$ — поле, создаваемое токами \mathbf{j}^e в отсутствие неоднородной области Q_i , $\sigma_a^* \equiv 0$, а $\mathbf{E}^a, \mathbf{H}^a$ — та часть полного поля, которая создается за счет неоднородности Q_i .

Нормальные и аномальные поля удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H}^n = \sigma_n^* \mathbf{E}^n + \mathbf{j}^e, \quad \text{rot } \mathbf{E}^n = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^n; \quad (36.10a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}^a = \sigma_n^* \mathbf{E}^a + \mathbf{j}^i, \quad \text{rot } \mathbf{E}^a = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^a, \quad (36.10б)$$

где $\mathbf{j}^i = \sigma_a^* \mathbf{E}^a$ — избыточные токи, текущие в глубинной неоднородности Q_i .

Пусть электромагнитное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} известно на некоторой поверхности S , простирающейся влево и вправо в бесконечность и имеющей произвольный рельеф или совпадающей с границей раздела земля — воздух P (первый случай реально может возникать при измерении электромагнитного поля в толще океана). Требуется разделить поле на нормальную и аномальную части.

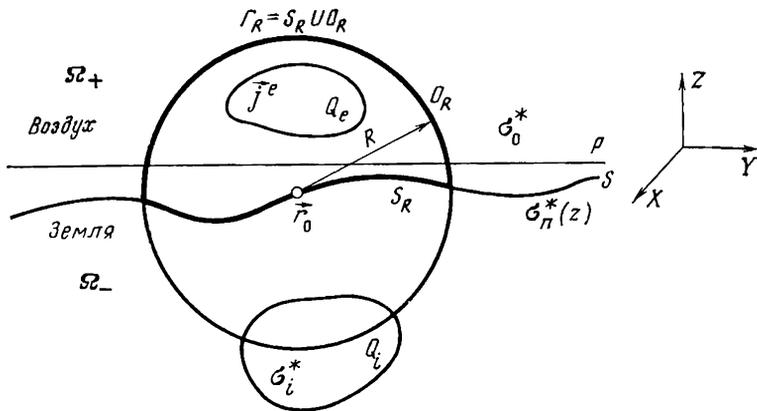


Рис. 51

Для решения поставленной задачи может быть применен аппарат интегралов типа Стрэттона — Чу в неоднородной среде, причем схема его применения полностью аналогична приведенной выше для разделения поля на внешнюю и внутреннюю части.

Выберем на поверхности S точку r_0 и опишем из нее сферу радиуса R так, чтобы область источника Q_e оказалась внутри сферы. Пусть O_R — часть сферы, лежащая выше S , а S_R — часть поверхности S , находящаяся внутри сферы. Рассмотрим интегралы типа Стрэттона — Чу по замкнутой кусочно-гладкой поверхности $\Gamma_R = S_R \cup O_R$:

$$\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}) = \hat{F}^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,m}) \mathbf{H} + \Psi^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,n}) \mathbf{E},$$

где $\hat{G}_n^{e,m}$ — электрическая и магнитная тензорные функции Грина нормального горизонтально-слоистого разреза σ_n^* . Представим $\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r})$ в виде суммы: $\mathbf{M}^{e,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_n^{e,m}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_a^{e,m}(\mathbf{r})$, в которой интегралы $\mathbf{M}_n^{e,m}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{M}_a^{e,m}(\mathbf{r})$ определяются по значениям нормально-го \mathbf{E}^n , \mathbf{H}^n и аномального \mathbf{E}^a , \mathbf{H}^a электромагнитных полей:

$$\mathbf{M}_n^{e,m}(\mathbf{r}) = \hat{F}^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,m}) \mathbf{H}^n + \hat{\Psi}^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,m}) \mathbf{E}^n,$$

$$\mathbf{M}_a^{e,m}(\mathbf{r}) = \hat{F}^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,m}) \mathbf{H}^a + \hat{\Psi}^{\Gamma R} (\hat{G}_n^{e,m}) \mathbf{E}^a$$

Нормальное электромагнитное поле вне области D_R удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H}^n = \sigma_n^* \mathbf{E}^n, \quad \text{rot } \mathbf{E}^n = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^n, \quad \mathbf{r} \in CD_{\bar{D}_R},$$

и исчезает на бесконечности. Поэтому согласно (34.41)

$$\mathbf{M}_n^e(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in D_R, \\ -\mathbf{E}^n(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in CD_{\bar{D}_R}, \end{cases} \quad (36.11a)$$

$$\mathbf{M}_n^m(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in D_R, \\ -\mathbf{H}^n(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in CD_{\bar{D}_R}. \end{cases} \quad (36.11b)$$

Аномальное электромагнитное поле в $D_R \subset S_+$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^a = \sigma_n^* \mathbf{E}^a, \operatorname{rot} \mathbf{E}^a = i\omega\mu \mathbf{H}^a, \mathbf{r} \in D_R \subset \Omega_+.$$

Следовательно, согласно (34.39)

$$\mathbf{M}_a^e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}^a(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_R, \\ 0, & \mathbf{r} \in \overline{CD}_R; \end{cases} \quad (36.12a)$$

$$\mathbf{M}_a^m(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}^a(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_R, \\ 0, & \mathbf{r} \in \overline{CD}_R. \end{cases} \quad (36.12б)$$

Суммируем (36.11a) и (36.12a), а также (36.11б) и (36.12б):

$$\mathbf{M}^e(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}^a(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_R, \\ -\mathbf{E}^n(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \overline{CD}_R; \end{cases} \quad (36.13a)$$

$$\mathbf{M}^m(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}^a(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_R, \\ -\mathbf{H}^n(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \overline{CD}_R. \end{cases} \quad (36.13б)$$

Без ограничения общности можно считать, что электрическое и магнитное поля непрерывны по обе стороны от поверхности S (точки поверхности S , где это условие не выполняется, исключим из рассмотрения). Следовательно, существуют пределы

$$\mathbf{M}_a^e(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{M}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^a(\mathbf{r}_0), \quad (36.14a)$$

$$\mathbf{M}_n^e(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{M}^e(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}^n(\mathbf{r}_0); \quad (36.14б)$$

$$\mathbf{M}_a^m(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^+} \mathbf{M}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^a(\mathbf{r}_0), \quad (36.15a)$$

$$\mathbf{M}_n^m(\mathbf{r}_0) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^-} \mathbf{M}^m(\mathbf{r}) = -\mathbf{H}^n(\mathbf{r}_0). \quad (36.15б)$$

С другой стороны, предельные значения $\mathbf{M}^{e,m}$ можно найти по формулам (34.34a) — (34.43e):

$$\mathbf{M}_a^e(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^E(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0), \quad (36.16a)$$

$$\mathbf{M}_n^e(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^E(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^E(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0); \quad (36.16б)$$

$$\mathbf{M}_a^m(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^H(\mathbf{r}_0) + 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \quad (36.17a)$$

$$\mathbf{M}_n^m(\mathbf{r}_0) = \mathbf{C}_0^H(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{C}^H(\mathbf{r}_0) - 1/2 \mathbf{H}(\mathbf{r}_0), \quad (36.17б)$$

где сингулярные интегралы \mathbf{C}_0^E , \mathbf{C}_0^H определяются в смысле главного значения по Коши.

Приравнивая (36.14а) и (36.16а), (36.14б) и (36.16б), (36.15а) и (36.17а), (36.15б) и (36.17б), получаем

$$\begin{aligned} E^a(r_0) &= 1/2 E(r_0) + C_0^E(r_0) + \Delta C^E(r_0), \\ E^n(r_0) &= 1/2 E(r_0) - C_0^E(r_0) - \Delta C^E(r_0), \end{aligned} \tag{36.18}$$

$$\begin{aligned} H^a(r_0) &= 1/2 H(r_0) + C_0^H(r_0) + \Delta C^H(r_0), \\ H^n(r_0) &= 1/2 H(r_0) - C_0^H(r_0) - \Delta C^H(r_0). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к пределу при $R \rightarrow \infty$. Тогда в силу условия излучения на бесконечности интегралы $C_0^{E,H}$ и $\Delta C^{E,H}$ по полусфере O_R стремятся к нулю и остается лишь интегрирование по поверхности S . Таким образом, формулы (36.18) дают решение поставленной задачи.

Отметим, что в случае однородного нормального разреза ($\sigma_n^*(z) = \sigma^* = \text{const}$) интегралы $\Delta C^H(r_0) \equiv \Delta C^E(r_0) \equiv 0$ и формулы (36.18) переходят в формулы разделения поля на внешнюю и внутреннюю части (36.8).

Глава девятая

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

37. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Задача *аналитического продолжения* состоит в распространении электромагнитного поля за пределы области или поверхности его первоначального определения. Общие принципы аналитического продолжения функций комплексного переменного были изложены в гл. 4, а аналитического векторного поля — в параграфе 25. Применим эти принципы к электромагнитному полю. При этом мы в целях простоты ограничимся рассмотрением монохроматического поля, хотя все результаты, излагаемые ниже, справедливы и для общего случая переменных полей.

Коэффициенты уравнений, которым удовлетворяет электромагнитное поле, зависят от ϵ , μ , σ , т. е. от свойств среды. Это определяет специфику задачи. Важнейшим вопросом теории является доказательство аналитичности электромагнитного поля и единственности его аналитического продолжения.

37.1. Аналитическая природа электромагнитного поля

В этом пункте мы покажем, что гармоническое во времени электромагнитное поле в областях постоянства электромагнитных параметров среды есть аналитическая функция. При доказательстве этого положения мы в отличие от параграфа 25 будем пользоваться не векторными, а матричными представлениями интегралов типа Стрэттона — Чу. При этом мы преследуем лишь цель иллюстрации возможностей матричного подхода к рассматриваемым задачам.

Пусть область D , ограниченная поверхностью S , заполнена однородной средой с электропроводностью $\sigma^* = \text{const}$. Электромагнитное поле возбуждается внешними источниками. Векторные функции \mathbf{E} и \mathbf{H} в D и на S удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + k^* \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^* \mathbf{H} = 0,$$

$$\text{де } k^* = i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon.$$

Возьмем в D любую внутреннюю точку \mathbf{r}_0 и, следуя параграфу 25, проведем из нее сферу S_a радиусом a , лежащую внутри D (см. рис. 36). Воспользуемся интегральными формулами Стрэттона — Чу и выразим электромагнитное поле в какой-либо точке \mathbf{r}' внутри S_a через его значения на S_a . Согласно (32.36a), (32.36b)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G^h + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G^h\} ds, \quad (37.1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G^h + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G^h\} ds,$$

$$\text{где } G^h = G^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(ik^*|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}.$$

Введем систему декартовых координат x, y, z и запишем интегралы Стрэттона — Чу в матричной форме. Согласно (33.22), (33.23)

$$E_\alpha(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} [\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} E_\beta G^h_{,\eta} + i\omega\mu\epsilon_{\gamma\beta\alpha} H_\beta G^h] n_\gamma ds, \quad (37.2)$$

$$H_\alpha(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} [\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} H_\beta G^h_{,\eta} + \sigma^* \epsilon_{\gamma\beta\alpha} E_\beta G^h] n_\gamma ds, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z.$$

Теперь преобразуем функцию Грина G^h . Согласно (25.4)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a\sqrt{1+t}, \quad (37.3)$$

где t определяется формулой (25.5). В таком представлении

$$G^h = \frac{-1}{4\pi a} \frac{\exp(ik^*a\sqrt{1+t})}{\sqrt{1+t}}, \quad (37.4)$$

где t может принимать значения от -1 до 3 . Из (37.4) следует, что при $|t| < 1$ функция Грина разлагается в сходящийся степенной ряд

$$G^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{h(n)} t^n, \quad (37.5)$$

который с учетом (25.5) преобразуется к виду

$$G^h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{klm} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l (z' - z_0)^m, \quad (37.6)$$

где коэффициенты $g_{klm} = g_{klm}(\mathbf{r}' | \mathbf{r})$ — функции взаимного положения точек \mathbf{r}' и $\mathbf{r} \in S_a$.

Подставляя степенной ряд (37.6) в интегралы (37.2) и учитывая, что этот ряд допускает почленное дифференцирование и интегрирование, получаем

$$E_{\alpha}(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} \left[\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} E_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{klm,\eta} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l (z' - z_0)^m + \right. \\ \left. + i\omega\mu\epsilon_{\gamma\beta\alpha} H_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{klm} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l (z' - z_0)^m \right] n_{\gamma} ds = \quad (37.7)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_{\alpha klm} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l (z' - z_0)^m.$$

$$H_{\alpha}(\mathbf{r}') = \iint_{S_a} \left[\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} H_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{klm,\eta} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l \times \right. \\ \left. \times (z' - z_0)^m + \sigma^* \epsilon_{\gamma\beta\alpha} E_{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}_{klm} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l \times \right. \\ \left. \times (z' - z_0)^m \right] n_{\gamma} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{\alpha klm} (x' - x_0)^k (y' - y_0)^l (z' - z_0)^m. \quad (37.8)$$

Здесь

$$e_{\alpha klm} = \iint_{S_a} (\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} E_{\beta} g_{klm,\eta} + i\omega\mu\epsilon_{\gamma\beta\alpha} H_{\beta} \hat{g}_{klm}) n_{\gamma} ds,$$

$$h_{\alpha klm} = \iint_{S_a} (\Delta_{\alpha\beta\gamma\eta} H_{\beta} \hat{g}_{klm,\eta} + \sigma^* \epsilon_{\gamma\beta\alpha} E_{\beta} \hat{g}_{klm}) n_{\gamma} ds, \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = x, y, z.$$

Степенные ряды (37.7) и (37.8) сходятся к E_{α} , H_{α} при условии, что $|t| < 1$. Согласно (25.5) это условие выполняется, если $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| < \delta$, где $\delta = (\sqrt{\gamma z - 1})a$. Таким образом, мы указали окрестность $\delta(\mathbf{r}_0)$, в которой компоненты электромагнитного поля раз-

лагаются в сходящиеся степенные ряды. Точка r_0 была выбрана в D произвольно. Следовательно, всюду в области D электрическое E и магнитное H поля являются аналитическими функциями.

Заметим, что функции E и H имеют одинаковые радиусы сходимости рядов Тейлора. Они связаны уравнениями Максвелла и поэтому из аналитичности одного поля следует аналитичность другого поля.

37.2. Понятие аналитического продолжения электромагнитного поля

Коль скоро мы доказали, что векторы электромагнитного поля E и H суть аналитические функции, то все понятия аналитического продолжения векторных полей, введенные в п. 25.3, становятся применимыми и для электромагнитного поля.

Прежде всего дадим формулировку задачи продолжения электромагнитного поля. Пусть электромагнитное поле E^0, H^0 определено в области D_0 , заполненной однородной средой с комплексной электропроводностью σ_0^* и магнитной проницаемостью μ_0 . *Аналитическим продолжением поля E^0, H^0 в более широкую область D , содержащую среду с любыми изменениями электропроводности и магнитной проницаемости, называется его доопределение до поля E, H , которое повсюду в D удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot} H = \sigma_0^* E$, $\operatorname{rot} E = i\omega\mu_0 H$ и совпадает с E^0, H^0 в D_0 .*

В силу свойства единственности аналитических векторных полей, доказанного в п. 25.2, ясно, что если существует аналитическое продолжение электромагнитного поля, то оно единственно.

Очевидно также, что к электромагнитному полю могут быть применены все понятия аналитического продолжения векторных полей, введенные в п. 25.3. Например, *аналитическим элементом электромагнитного поля* мы будем называть поле E, H вместе с однородной областью его задания D (с постоянными электромагнитными параметрами ϵ, μ, σ) и обозначать его (E, H, D) . По аналогии с произвольным векторным полем строятся также понятия *цепи, общей и полной аналитических функций электромагнитного поля* (п. 25.3). Более подробно, на примерах, мы рассмотрим этот вопрос чуть ниже, в п. 37.5.

Классическим методом построения полных аналитических функций электромагнитного поля является метод Вейерштрассе, основанный на тейлоровских разложениях.

Рассмотрим область D_0 , ограниченную поверхностью S . Она заполнена однородной средой с комплексной электропроводностью σ_0^* и магнитной проницаемостью μ_0 и свободна от сторонних возбудителей поля. Электропроводность среды и магнитная проницаемость вне D_0 меняются любым образом. Пусть в D_0 определено поле E^0, H^0 . Для продолжения E^0, H^0 за пределы области D_0 возьмем какую-либо точку $r_0 \in D_0$ и, вычислив все производные поля, образуем его тейлоровское разложение по степеням $x-x_0, y-y_0, z-z_0$. Таким образом, мы получим представление поля E^0, H^0 в шаре сходи-

мости степенного ряда. Теперь возьмем в этом шаре какую-либо точку \mathbf{r} , и образуем новое тейлоровское разложение, которое может вывести нас в более широкую область. Повторяя такие разложения для все новых и новых точек, в окрестности которых определено электромагнитное поле, мы последовательно увеличиваем область продолжения этого поля и можем выйти далеко за пределы D_0 . После всех возможных продолжений по всем возможным цепочкам шаров сходимости степенных рядов (ветвям общих аналитических функций электромагнитного поля) мы получаем функции \mathbf{E} , \mathbf{H} , которые существуют в области $D \supseteq D_0$ и носят название *полных аналитических функций электрического и магнитного полей*. Полные аналитические функции непродолжаемы. Точки, в которых полные аналитические функции не определяются, суть *особые точки* электромагнитного поля. Особые точки могут быть изолированными или составлять *особые линии и особые поверхности*. Особые точки, линии и поверхности связаны с возбудителями электромагнитного поля.

С помощью тейлоровских разложений можно продолжить поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , первоначально определенное в любой сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{r}_0 \in D_0$.

Мы рассмотрели задачу о продолжении электромагнитного поля из области D_0 в область D . Если электропроводность σ_0^* и магнитная проницаемость μ_0 среды, заполняющей область D_0 , известны, то можно решить задачу о продолжении электромагнитного поля с поверхности S . Пусть поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 определено на внутренней стороне гладкой поверхности S , ограничивающей область D_0 , и имеет все тангенциальные производные. Возьмем какую-либо точку $\mathbf{r}_0 \in S$. Непосредственным дифференцированием найдем все производные поля по тангенциальным направлениям. Воспользуемся соотношениями, вытекающими из уравнений Максвелла, и при известных значениях σ_0^* и μ_0 вычислим все производные поля по внутренней нормали. Теперь мы можем образовать тейлоровское разложение поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 по степеням $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. Это разложение выводит нас в область D_0 . Продолжая тейлоровские разложения и образуя различные цепочки шаров сходимости степенных рядов, мы можем определить поле \mathbf{E} , \mathbf{H} во всей области D существования полных аналитических функций. Эта же задача может быть решена, когда поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 определено на внутренней стороне любого сколь угодно малого гладкого куска Γ поверхности S , ограничивающей область D_0 . Отметим еще раз, что в силу результатов п. 25.2 аналитическое продолжение электромагнитного поля единственно.

37.3. Уравнения полных аналитических функций

В области D_0 первоначального определения поля полные аналитические функции \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma_0^* \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (37.9)$$

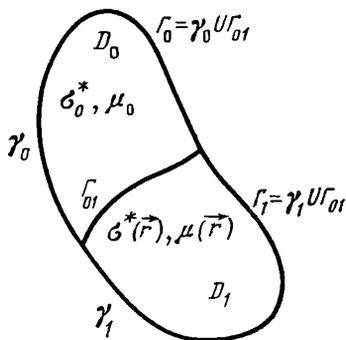


Рис. 52

где σ_0^* , μ_0 — электропроводность и магнитная проницаемость среды, заполняющей область D_0 .

Каким уравнениям удовлетворяют функции \mathbf{E} , \mathbf{H} за пределами области D_0 , т. е. там, где электропроводность среды может оказаться отличной от σ_0^* ? Для ответа введем функции $\mathbf{P} = \text{rot } \mathbf{H} - \sigma_0^* \mathbf{E}$, $\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{E} - i\omega\mu_0 \mathbf{H}$, которые аналитичны во всей области D их существования и тождественно равны нулю в области D_0 первоначального определения поля. Доказывая единственность аналитического продолжения лапласова поля (п. 25.2), мы

видели, что такие функции тождественно равны нулю по всей области их существования. Следовательно, полные аналитические функции повсюду удовлетворяют уравнениям (37.9) с коэффициентами σ_0^* , μ_0 , равными электропроводности и магнитной проницаемости среды в области первоначального определения поля. Как бы ни менялись электропроводность и магнитная проницаемость окружающей среды, электромагнитное поле продолжается вместе с коэффициентами уравнений Максвелла, которым оно удовлетворяло в D_0 . То же самое можно сказать об уравнениях Гельмгольца, которые являются следствием уравнений Максвелла.

37.4. Принцип непрерывности для электромагнитного поля

Задачу аналитического продолжения электромагнитного поля можно также решать на основе *принципа непрерывности*, обобщающего на электромагнитное поле продолжение по Пенлеве (п. 12.7, 25.5).

Рассмотрим электромагнитное поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , определенное в области D_0 , которая ограничена кусочно-гладкой поверхностью Γ_0 и заполнена однородной средой с электропроводностью σ_0^* и магнитной проницаемостью μ_0 (рис. 52). Так как сторонние возбудители поля в D_0 отсутствуют, то

$$\text{rot } \mathbf{H}^0 = \sigma_0^* \mathbf{E}^0, \quad \text{rot } \mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0. \quad (37.10)$$

Пусть область D_0 соприкасается с областью D_1 , которая ограничена кусочно-гладкой поверхностью Γ_1 , имеющей общий участок Γ_{01} с поверхностью Γ_0 . Электропроводность среды в D_1 и магнитная проницаемость могут меняться любым образом.

Для продолжения поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 из D_0 в $D = D_0 \cup D_1$ достаточно найти в $\bar{D}_1 = D_1 \cup \Gamma_1$ непрерывно дифференцируемое поле $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$, которое удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{H}^{(1)} = \sigma_0^* \mathbf{E}^{(1)}, \quad \text{rot } \mathbf{E}^{(1)} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^{(1)} \quad (37.11)$$

и имеет на Γ_{01} тангенциальные компоненты, совпадающие с тангенциальными компонентами поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 .

Покажем, что при выполнении этих условий функции $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ позволяют построить аналитическое продолжение поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 в область $D = D_0 \cup D_1$.

Начнем с того, что применим к \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 и \mathbf{E}^1 , $\mathbf{H}^{(1)}$ модифицированные интегральные формулы Стрэттона — Чу. Согласно (32.46), (32.47) и (37.10), (37.11)

$$\frac{1}{\sigma_0^*} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds + \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds = \begin{cases} \mathbf{E}^0(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_0, \\ 0, & \mathbf{r}' \in D_1; \end{cases} \quad (37.12)$$

$$\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds + \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds = \begin{cases} \mathbf{H}^0(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_0, \\ 0, & \mathbf{r}' \in D_1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sigma_0^*} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds + \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D_0, \\ \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_1; \end{cases} \quad (37.13)$$

$$\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds + \operatorname{rot}' \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}' \in D_0, \\ \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_1, \end{cases}$$

где $G_0^h = G_0^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0^* |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$; $k_0^* = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0 + \omega^2\mu\epsilon}$.

Введем функции \mathbf{E} , \mathbf{H} , определяемые с помощью интегральных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = & \frac{1}{\sigma_0^*} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds \right] + \\ & + \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds \right]; \end{aligned} \quad (37.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds \right] + \\ & + \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds \right] \end{aligned}$$

Учитывая (37.12) и (37.13), получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{E}^0(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_0, \\ \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_1; \end{cases} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{H}^0(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_0, \\ \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in D_1. \end{cases} \quad (37.15)$$

В (37.15) интегралы по общему участку Γ_{01} благодаря совпадению тангенциальных компонент полей \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 и \mathbf{E}^1 , $\mathbf{H}^{(1)}$ взаимно уничтожаются, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = & \frac{1}{\sigma_0^*} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds \right] + \\ & + \operatorname{rot}' \left[\iint_{\Gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds + \iint_{\Gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds \right]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' \left[\iint_{\gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_0^h ds + \iint_{\gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}] G_0^h ds \right] + \\ + \operatorname{rot}' \left[\iint_{\gamma_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_0^h ds + \iint_{\gamma_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{(1)}] G_0^h ds \right], \quad (37.16)$$

где γ_0, γ_1 — части поверхностей Γ_0 и Γ_1 , остающиеся после исключения Γ_{01} .

Очевидно, что интегрирование в (37.16) ведется по замкнутой поверхности $\Gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, ограничивающей область $D = D_0 \cup D_1$, а функции \mathbf{E}, \mathbf{H} — модифицированные интегралы типа Стрэттона — Чу. Следовательно, в области D эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma_0^* \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}. \quad (37.17)$$

Из (37.15) и (37.17) следует, что поле \mathbf{E}, \mathbf{H} является аналитическим продолжением поля $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ в область $D = D_0 \cup D_1$.

37.5. Электромагнитное поле в римановом пространстве

Реальные электрические и магнитные поля описываются однозначными функциями. Полные аналитические функции электромагнитного поля могут содержать фиктивные электрические и магнитные поля и, как и в случае произвольного аналитического поля, быть многозначными. Для изучения таких многозначных функций необходимо пользоваться понятием риманова пространства (см. п. 25.3).

Для примера обратимся к известной задаче Зоммерфельда о дифракции плоской волны на проводящей полуплоскости. Сечение модели изображено на рис. 53. Безграничная однородная среда с электропроводностью σ содержит идеально проводящую полуплоскость (экран), на которую сверху падает плоская монохроматическая волна. Токами смещения пренебрегаем. Магнитная проницаемость повсеместно равна μ_0 . Электрическое поле параллельно краю полуплоскости. Оно выражается формулой [Бердичевский, Жданов, 1981]

$$\mathbf{E} = E_0 \left\{ \exp(-ik\rho \sin\varphi) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2k\rho} \cos\psi/2} \exp(i\eta^2) d\eta \right] + \right. \\ \left. + \exp(ik\rho \sin\varphi) \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2k\rho} \sin\psi/2} \exp(i\eta^2) d\eta \right\},$$

где ρ, φ — полярные координаты; $\psi = \pi/2 - \varphi$; $k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$.

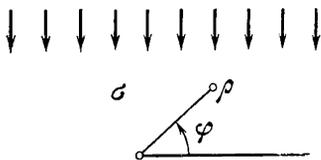


Рис. 53

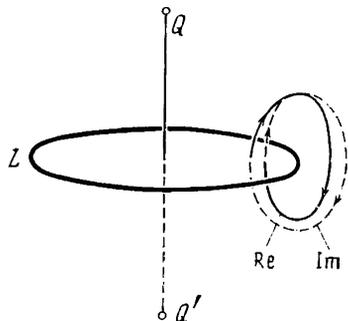


Рис. 54

Как видим, поле E имеет по φ период 4π . Следовательно, оно заполняет двулистное риманово пространство с линией ветвления на краю полуплоскости. Листы риманова пространства, отвечающие физическому и фиктивному пространствам, склеиваются на полуплоскости.

Пусть поле E определено в окрестности какой-либо точки, лежащей в стороне от проводящей полуплоскости. Его продолжение по всевозможным путям, не пересекающим полуплоскость, дает реальное электрическое поле на первом листе риманова пространства (первую ветвь полной аналитической функции). Пересекая полуплоскость, мы выходим на второй лист риманова пространства и получаем фиктивное электрическое поле (вторую ветвь полной аналитической функции). Полная аналитическая функция электрического поля двузначна.

Эта двумерная модель свидетельствует о том, что при продолжении электромагнитного поля через неоднородную среду его полные аналитические функции могут оказаться многозначными.

Переход к трехмерным моделям усложняет математический анализ, однако принцип остается тот же. Общее представление о свойствах полных аналитических функций трехмерного электромагнитного поля можно вывести из теории разветвленных решений Зоммерфельда [Франк, Мизес, 1935; Морс, Фешбах, 1958].

Рассмотрим, например, плоский идеально проводящий экран, ограниченный произвольным контуром L (рис. 54). Электромагнитное поле возбуждается точечным дипольным источником Q , расположенным над экраном. На поверхности экрана тангенциальные компоненты электрического поля равны нулю, а тангенциальные компоненты магнитного поля терпят разрыв, равный поверхностной плотности тока. Задача может быть решена с помощью метода изображений. Реальное физическое пространство дополняется фиктивным математическим пространством, в которое симметрично по отношению к экрану помещается точечный источник Q' соответствующей полярности. Таким образом, имеем два экземпляра трехмерного пространства, которые образуют *двойное риманово пространство*. Реальное и фиктивное пространства разрезаются по экрану и склеиваются так, чтобы каждая сторона разреза в одном простран-

стве была соединена с противоположной стороной разреза в другом пространстве. Электромагнитные поля в различных экземплярах риманова пространства не совпадают. Аналитическое продолжение электромагнитного поля по всевозможным путям, не пересекающим экран, дает первые ветви полных аналитических функций. Эти ветви относятся к реальному физическому пространству и имеют особую точку в Q . Пересекая экран, мы игнорируем разрыв магнитного поля и попадаем в фиктивное пространство, содержащее вторые ветви полных аналитических функций с особой точкой в Q' . Эта особая точка является зеркальным изображением особой точки Q реального поля. При двойном пересечении экрана мы пронизываем оба экземпляра риманова пространства и возвращаемся в реальное физическое пространство. Таким образом, полные аналитические функции в модели Зоммерфельда двужначны, а контур L экрана есть линия ветвления поля. Изображая полные аналитические функции поля в двойном римановом пространстве, мы восстанавливаем их однозначность.

Если модель содержит несколько плоских экранов, то пересечение каждого из них может породить новое фиктивное пространство. Количество линий ветвления и ветвей полных аналитических функций электромагнитного поля растет. Таким образом, мы можем построить риманово пространство, состоящее из двух, трех экземпляров и более.

38. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРЬ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Важное значение в теории аналитического продолжения электромагнитных полей имеет вопрос о возможности продолжения интегралов типа Стрэттона — Чу через поверхность интегрирования.

38.1. Аналитическое продолжение интеграла типа Стрэттона — Чу через поверхность интегрирования

Поставленная задача решается, так же как и в случае продолжения трехмерных аналогов интеграла типа Коши (см. параграф 26), на основе теоремы Коши — Ковалевской.

Рассмотрим, следуя параграфу 35 (формулы (35.3а), (35.3б)), интегралы типа Стрэттона — Чу $C^E(r'; e, h)$ и $C^H(r'; e, h)$ по произвольной замкнутой кусочно-гладкой поверхности S . Плотности интегралов e и h , как обычно, связаны между собой соотношениями (35.2). Выделим некоторый аналитический кусок Γ поверхности S и будем предполагать, что компоненты $e(r)$ и $h(r)$ описываются на Γ аналитическими функциями. Зафиксируем некоторую точку $r_0 \in \Gamma$. Тогда, согласно теореме Коши — Ковалевской [Сретенский, 1946], в окрестности $\varepsilon(r_0)$ точки r_0 существует аналитическое век-

торное поле $\mathbf{E}^\Gamma(\mathbf{r})$, которое удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^\Gamma = 0, \quad \Delta \mathbf{E}^\Gamma + k^* \mathbf{E}^\Gamma = 0 \quad (38.1)$$

и краевым условиями

$$\mathbf{E}^\Gamma|_\Gamma = \mathbf{e}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{E}^\Gamma}{\partial n} \right|_\Gamma = \operatorname{grad}_\Gamma e_n - \mathbf{n} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{e}_\tau - i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}]. \quad (38.2)$$

Введем в $\varepsilon(\mathbf{r}_0)$ функцию

$$\mathbf{H}^\Gamma = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}^\Gamma \quad (38.3)$$

Так как, по определению, $\operatorname{div} \mathbf{E}^\Gamma = 0$, то

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^\Gamma = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^\Gamma = \frac{1}{i\omega\mu} [\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}^\Gamma - \Delta \mathbf{E}^\Gamma] = \sigma^* \mathbf{E}^\Gamma. \quad (38.4)$$

Определим значения \mathbf{H}^Γ на поверхности Γ . Вектор \mathbf{H}^Γ можно разложить на тангенциальную \mathbf{H}_τ^Γ и нормальную H_n^Γ компоненты. Фиксируя направление нормали, находим с учетом (38.2), (38.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\tau^\Gamma &= [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^\Gamma] \times \mathbf{n} = \frac{1}{i\omega\mu} [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}^\Gamma] \times \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} [\operatorname{grad} E_n^\Gamma - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{E}^\Gamma] \times \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \left[\operatorname{grad}_\Gamma E_n^\Gamma + \mathbf{n} \frac{\partial E_n^\Gamma}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{E}^\Gamma}{\partial n} \right] \times \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} \left[\operatorname{grad}_\Gamma E_n^\Gamma - \mathbf{n} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{E}_\tau^\Gamma - \frac{\partial \mathbf{E}^\Gamma}{\partial n} \right] \times \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu} [\operatorname{grad}_\Gamma e_n - \mathbf{n} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{e}_\tau - \operatorname{grad}_\Gamma e_n + \\ &\quad + \mathbf{n} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{e}_\tau + i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{h}]] \times \mathbf{n} = [\mathbf{n} \times \mathbf{h}] \times \mathbf{n} = \mathbf{h}_\tau; \\ H_n^\Gamma &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^\Gamma = - \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{div}_\Gamma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^\Gamma] = - \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{div}_\Gamma [\mathbf{n} \times \mathbf{e}] = h_n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{H}^\Gamma|_\Gamma = \mathbf{h}|_\Gamma. \quad (38.5)$$

Из (38.2) — (38.5) видно, что функции \mathbf{E}^Γ , \mathbf{H}^Γ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^\Gamma = \sigma^* \mathbf{E}^\Gamma, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^\Gamma = i\omega\mu \mathbf{H}^\Gamma \quad (38.6)$$

и краевым условиям на поверхности Γ :

$$\mathbf{E}^\Gamma|_\Gamma = \mathbf{e} \text{ и } \mathbf{H}^\Gamma|_\Gamma = \mathbf{h}. \quad (38.7)$$

Воспользуемся теперь электромагнитными аналогами формул Сохоцкого — Племеля. Согласно (33.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\mathbf{E}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) &= \mathbf{C}^{\mathbf{E}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) - \mathbf{e}(\mathbf{r}_0), \\ \mathbf{C}^{\mathbf{H}^-}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) &= \mathbf{C}^{\mathbf{H}^+}(\mathbf{r}_0; \mathbf{e}, \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (38.8)$$

Последние соотношения с учетом (38.7) можно переписать так:

$$C^{E^-}(r_0; e, h) = C^{E^+}(r_0; e, h) - E^\Gamma(r_0), \quad (38.9)$$

$$C^{H^-}(r_0; e, h) = C^{H^+}(r_0; e, h) - H^\Gamma(r_0).$$

Обозначим через D — область, ограниченную S , и через D^+ — общую часть окрестности $\varepsilon(r_0)$ и D , $D^+ = \varepsilon(r_0) \cap D$.

Очевидно, что правая часть (38.9) представляет собой граничные значения на Γ электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям (38.6) всюду в области D^+ , примыкающей к Γ . Левая часть описывает граничные значения на Γ электромагнитных полей, удовлетворяющих уравнениям (38.6) всюду вне D . Следовательно, по принципу непрерывности для электромагнитного поля (п. 37.4) правая часть представляет собой аналитическое продолжение левой через поверхность Γ .

Аналогично доказывається возможность аналитического продолжения интегралов типа Стрэттона — Чу через аналитический кусок поверхности Γ изнутри наружу. Формулы (38.9), так же как и формулы (26.20) в случае лапласова поля, показывают, что продолженные через поверхность Γ значения интегралов типа Стрэттона — Чу $C^{E, H^{\text{cont}}}(r; e, h)$ отличаются от самих интегралов $C^{E, H}(r; e, h)$ на величины, равные функциям $[-E^\Gamma(r)]$, $[-H^\Gamma(r)]$:

$$C^{E^{\text{cont}}}(r; e, h) - C^E(r; e, h) = -E^\Gamma(r), \quad (38.10)$$

$$C^{H^{\text{cont}}}(r; e, h) - C^H(r; e, h) = -H^\Gamma(r).$$

Следовательно, соответствующие важные выводы, полученные в п. 26.3 для лапласова поля, обобщаются и на электромагнитные поля. А именно: 1) особые точки $C^{E, H^{\text{cont}}}(r; e, h)$ совпадают с особыми точками функций E^Γ и H^Γ соответственно; 2) линии смыкания различных аналитических кусков поверхности S являются линиями ветвления для полных аналитических функций интегралов типа Стрэттона — Чу.

Эти свойства играют фундаментальную роль в теории аналитического продолжения электромагнитного поля и его особых точек.

38.2. Аналитическое продолжение электромагнитного поля внутри однородной области, ограниченной аналитическими и кусочно-аналитическими поверхностями

Рассмотрим типичную для геоэлектрики модель, в которой однородная Земля с нормальной комплексной электропроводностью $\sigma_n^* = \text{const}$ содержит глубинную неоднородность D с постоянной комплексной электропроводностью $\sigma_d^* \neq \sigma_n^*$ (рис. 55). Земля ограничена поверхностью Σ (замкнутой или бесконечно-протяженной), а глубинная неоднородность — поверхностью S (замкнутой, аналитической или кусочно-аналитической). Поле в модели возбуждается сторонними токами, распределенными вне Земли (в атмосфере).

Рассмотрим задачу об аналитическом продолжении электромагнитного поля с поверхности Земли Σ в проводящую Землю. Методы такого продолжения мы изучим в следующем параграфе, а сейчас нас будет интересовать вопрос, можем ли мы продолжить электромагнитное поле внутрь неоднородности и где находятся особые точки такого продолжения? Мы легко ответим на этот вопрос, если воспользуемся интегральной формулой Стрэттона — Чу и выразим электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в области Ω_- , заключенной между Σ и S , через его компоненты на поверхностях Σ и S .

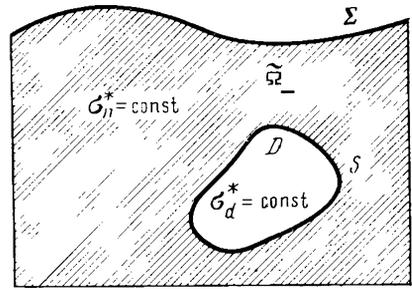


Рис. 55

В самом деле, согласно (33.6)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{E(\Sigma)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathbf{C}^{E(S)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad (38.11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{C}^{H(\Sigma)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathbf{C}^{H(S)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

где индексы Σ и S в скобках у символов интегралов типа Стрэттона — Чу отмечают, по какой поверхности вычисляется соответствующий интеграл. Очевидно, что интегралы $\mathbf{C}^{E(\Sigma)}$ и $\mathbf{C}^{H(\Sigma)}$ аналитичны всюду в области внутри Земли, поэтому при поисках особых точек полей $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ нас будут интересовать только интегралы по поверхности S . Эти интегралы присутствуют в формулах Стрэттона — Чу (38.11), если $\sigma_a^* \neq \sigma_n^*$, следовательно, они определяют вклад неоднородности D в наблюдаемое поле. Их можно связать с фиктивными поверхностными токами, текущими по S . В соответствии с (32.39), (32.40)

$$\mathbf{C}^{E(S)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}) = - \iint_S \left\{ \frac{q_s^e}{\varepsilon^*} \text{grad } G^h - \mathbf{j}_S^m \times \text{grad } G^h + i\omega\mu \mathbf{j}_S^e G^h \right\} ds; \quad (38.12)$$

$$\mathbf{C}^{H(S)}(\mathbf{r}'; \mathbf{E}, \mathbf{H}) = - \iint_S \left\{ \frac{q_s^m}{\mu} \text{grad } G^h + \mathbf{j}_S^e \times \text{grad } G^h - \sigma^* \mathbf{j}_S^m G^h \right\} ds,$$

где

$$\mathbf{j}_S^e = -[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_S, \quad \mathbf{j}_S^m = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_S, \quad (38.13)$$

$$q_s^e = -\varepsilon^*(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})_S, \quad q_s^m = -\mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})_S.$$

Таким образом, действие реальных возбудителей поля, распределенных в неоднородности D и на поверхности S , заменено дейст-

вием фиктивных (эквивалентных) возбудителей, распределенных только на S . Именно эти фиктивные возбудители и определяют особенности поля, продолженного внутрь D .

Теперь мы можем воспользоваться результатами предыдущего пункта, согласно которым интегралы типа Стрэттона—Чу (38.12) могут быть аналитически продолжены через всякий аналитический кусок Γ поверхности S . Особые точки продолженного таким образом поля совпадают с особыми точками функций \mathbf{E}^Γ , \mathbf{H}^Γ , связанных с поверхностями возбудителями следующими соотношениями:

$$E_n^\Gamma|_S = -\frac{q_S^e}{\epsilon^*}, \quad H_n^\Gamma|_S = -\frac{q_S^m}{\mu}, \quad (38.14)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau^\Gamma]_S = \mathbf{j}_S^m, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau^\Gamma]_S = -\mathbf{j}_S^e.$$

Если вся поверхность S — аналитическая, то особые точки продолженного поля \mathbf{E}^Γ , \mathbf{H}^Γ обязательно лежат внутри D . Это утверждение легко доказать от противного. Если функции \mathbf{E}^Γ , \mathbf{H}^Γ не имеют в D особых точек, т. е. во всей этой области они удовлетворяют уравнениям (38.6), то в формулах (38.11) согласно (33.6) отсутствуют интегралы по поверхности S , что равносильно отсутствию неоднородности.

В соответствии с (38.14) структура аналитически продолженного поля \mathbf{E}^Γ , \mathbf{H}^Γ , а следовательно, и положение его особых точек зависят от распределения фиктивных поверхностных токов на S , т. е. не только от формы неоднородности, но и от конфигурации внешнего поля и рельефа земной поверхности.

Рассмотрим в виде примера (простейшего) известную модель электродинамики, в которой однородный шар радиусом a с электропроводностью σ_a , погруженный в безграничную непроводящую среду, возбуждается однородным магнитным полем \mathbf{H}^n [Бердичевский, Жданов, 1981]. В сферической системе координат, ось которой направлена по первичному магнитному полю, при $r \geq a$ имеем

$$H_r = H^n \left(1 + \frac{a^3 D}{r^3} \right) \cos \theta, \quad H_\theta = -H^n \left(1 - \frac{a^3 D}{2r^3} \right) \sin \theta,$$

где

$$D = \frac{3J_{3/2}(k_d a) - k_d a J_{1/2}(k_d a)}{k_d a J_{1/2}(k_d a)};$$

$J_{1/2}$, $J_{3/2}$ — функции Бесселя полуцелого порядка.

Распространяя эти формулы на область $r < a$, получаем аналитическое продолжение магнитного поля \mathbf{H} внутрь шара. Особая точка аналитического продолжения лежит в центре шара (полюс третьего порядка).

Аналогично доказывается возможность продолжения поля \mathbf{E} , \mathbf{H} внутрь неоднородности D , ограниченной кусочно-аналитической поверхностью S . Пересекая различные аналитические куски поверх-

ности S , мы в соответствии с теоремой Коши — Ковалевской получаем различные функции E^Γ , H^Γ . При таком аналитическом продолжении поле E^Γ , H^Γ внутри неоднородности D многозначно. Линии соединения различных аналитических кусков поверхности S являются линиями ветвления поля E^Γ , H^Γ . Каждому аналитическому куску Γ поверхности S может отвечать своя ветвь поля E^Γ , H^Γ и свой экземпляр риманова пространства. Так как фиктивные экземпляры риманова пространства безграничны, то особые точки поля E^Γ , H^Γ могут оказаться вынесенными за пределы неоднородности D . С примером такой ситуации мы познакомились в задаче Зоммерфельда о дифракции электромагнитного поля на плоском экране (см. п. 37.5).

Развитые представления дают основу для геоэлектрической интерпретации аналитически продолженных полей. Примеры такой интерпретации приведены в монографии М. Н. Бердичевского и М. С. Жданова [1981].

39. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

39.1. Формы аналитического продолжения электромагнитного поля в задачах геоэлектрики

Геофизик, изучающий электромагнитные аномалии, пользуется аналитическим продолжением для того, чтобы приподняться над Землей и освободиться от мелких деталей, связанных с приповерхностными неоднородностями, или проникнуть внутрь Земли и, приблизившись к глубинной неоднородности, обнаружить эффекты, неразличимые с земной поверхности. Все эти задачи можно разделить на два класса: 1) продолжение нормального поля внутрь Земли и аномального поля в воздух; 2) продолжение аномального поля внутрь Земли и нормального поля в воздух.

Задачи первого класса отличаются тем, что поле продолжается в область, где отсутствуют его возбудители, а следовательно, и особые точки. Это простейшая форма аналитического продолжения. Оператор такого продолжения строится непосредственно с помощью интеграла Стрэттона — Чу.

Рассмотрим модель, в которой замкнутая земная поверхность S отделяет Землю (область Ω_-) от атмосферы (области Ω_+). Атмосфера однородна с известной комплексной электропроводностью σ_0^* . Она содержит область $Q_0 \subset \Omega_+$, в которой распределен сторонний ток. Комплексная электропроводность Земли меняется по произвольному закону $\sigma^*(\mathbf{r}) = \sigma_n^* + \Delta\sigma^*(\mathbf{r})$, где нормальная электропроводность σ_n^* есть константа. Она предполагается известной. Магнитная проницаемость повсеместно равна μ_0 .

Пусть на земной поверхности определено нормальное поле E^n , H^n . Продолжим это поле внутрь Земли. Согласно (33.2), (33.3),

(33.6), (33.16) и (33.17) при $\mathbf{r}' \in \Omega_-$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^n(\mathbf{r}') &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^n) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^n] \times \text{grad } G_n^h + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^n] G_n^h\} ds = \\ &= \frac{1}{\sigma_n^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^n] G_n^h ds + \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^n] G_n^h ds; \end{aligned} \quad (39.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^n(\mathbf{r}') &= \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^n) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^n] \times \text{grad } G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^n] G_n^h\} ds = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^n] G_n^h ds + \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^n] G_n^h ds, \end{aligned}$$

где единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен из Земли в воздух, а

$$G_n^h = G_n^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(i k_n^* |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}; \quad k_n^* = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_n^*}$$

Аналогичный оператор может быть построен для продолжения аномального поля \mathbf{E}^a , \mathbf{H}^a в воздух. Учитывая, что интегралы Стрэттона — Чу по сфере бесконечно большого радиуса равны нулю, получаем при $\mathbf{r}' \in \Omega_+$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a(\mathbf{r}') &= - \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^a) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a] \times \text{grad } G_0^h + \\ &+ i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^a] G_0^h\} ds = - \frac{1}{\sigma_0^*} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^a] G_0^h ds - \\ &- \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a] G_0^h ds; \end{aligned} \quad (39.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^a(\mathbf{r}') &= - \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^a) \text{grad } G_0^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^a] \times \text{grad } G_0^h + \sigma_0^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a] G_0^h\} ds = \\ &= - \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot}' \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a] G_0^h ds - \text{rot}' \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^a] G_0^h ds, \end{aligned}$$

где единичный вектор нормали \mathbf{n} по-прежнему направлен из Земли в воздух, а

$$G_0^h = G_0^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(i k_0^* |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}; \quad k_0^* = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0^*}$$

Операторы (39.1) и (39.2) могут быть применены в модели с бесконечно протяженной поверхностью S . Если электропроводность воздуха σ_0 принята равной нулю и токами смещения в воздухе можно пренебречь, то в операторе (39.1) исчезает член, содержащий нормальную компоненту поля \mathbf{E}^n , а оператор (39.2) имеет смысл только для магнитного поля.

В задачах второго класса поле продолжается в сторону его возбудителей, т. е. в область, о которой заведомо известно, что она содержит особые точки (линии, поверхности) поля. Эта форма аналитического продолжения уже не допускает применения операторов (39.1) и (39.2). В таких задачах оператор продолжения можно построить с помощью тейлоровских разложений, однако практическая громоздкость подобного подхода очевидна. Здесь аналитическое продолжение электромагнитного поля требует применения особых математических приемов, аналогичных соответствующим приемам продолжения лапласовых полей (см. параграф 29). Сейчас мы покажем, как это делается.

39.2. Постановка задачи

Задача формулируется следующим образом. Однородная Земля с известной нормальной комплексной электропроводностью $\sigma_n^* = \text{const}$ и магнитной проницаемостью μ_0 содержит глубинную неоднородность D с неизвестной постоянной или переменной электропроводностью $\sigma_a^* \neq \sigma_n^*$. На земной поверхности Σ определено электромагнитное поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ (полное или аномальное). Его надо продолжить внутрь Земли. По определению аналитического продолжения мы должны найти поле \mathbf{E}, \mathbf{H} , которое внутри некоторой области $\tilde{\Omega}_-$ Земли, примыкающей к земной поверхности, удовлетворяет уравнениям $\text{rot } \mathbf{H} = \sigma_n^* \mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$, а на земной поверхности совпадает с $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$.

Так как уравнения Максвелла при известных значениях σ_n^*, μ_0 позволяют по полю $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ вычислить его нормальные производные $\partial \mathbf{E}^0 / \partial n, \partial \mathbf{H}^0 / \partial n$, то речь, в сущности, идет о решении краевой задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Приступая к аналитическому продолжению поля $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$, мы ничего (или почти ничего) не знаем о неоднородности D , т. е. о распределении особых точек поля \mathbf{E}, \mathbf{H} . Таким образом, мы продолжаем поле в какую-то область $\tilde{\Omega}_-$, нижняя граница которой γ неизвестна.

Для решения задачи вводится условная граница γ , отделяющая область $\tilde{\Omega}_-$ от области, которая может содержать особые точки (линии, поверхности) поля. В качестве γ выбирается координатная поверхность из пространства ортогональных координат, допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца. К таким координатам, например, относятся прямоугольные, сферические, цилиндрические, конические, сфероидальные, эллипсоидальные координаты. Мы ограничимся построением операторов продолжения, в которых используются прямоугольные координаты.

39.3. Продолжение поля в слой

Модель среды изображена на рис. 56. Земля ограничена квазиплоской поверхностью Σ , колеблющейся около плоскости $z=0$. Нормальная комплексная электропроводность $\sigma_n^* = \text{const}$ предполагается известной. Неоднородность D имеет произвольную форму. Ее

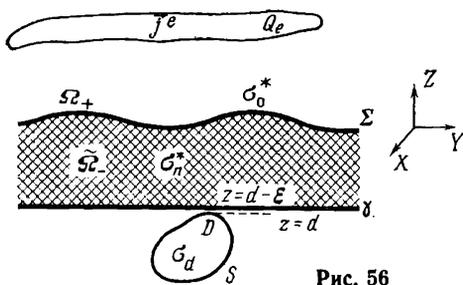


Рис. 56

граница S нигде не соприкасается с Σ . Модель возбуждается сторонним током \mathbf{j}^e , локализованным в области Q_e атмосферы (проводящей или непроводящей). На земной поверхности определено поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , которое надо продолжить в некоторую область $\tilde{\Omega}_-$ Земли.

В качестве нижней границы γ области $\tilde{\Omega}_-$ возьмем плоскость $z = d - \epsilon$, где d — минимальная глубина до неоднородности D , а ϵ — сколь угодно малая положительная величина. Очевидно, что эта плоскость лежит выше неоднородности D .

Рассмотрим горизонтальный слой $\tilde{\Omega}_-$, ограниченный земной поверхностью Σ и плоскостью γ . Выразим электромагнитное поле в $\tilde{\Omega}_-$ через его значения на Σ и γ . Согласно (32.36а), (32.36б) при $\mathbf{r}' \in \tilde{\Omega}_-$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = & \iint_{\Sigma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \text{grad } G_n^h + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_n^h \} ds + \\ & + \iint_{\gamma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \text{grad } G_n^h + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G_n^h \} ds; \end{aligned} \quad (39.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & \iint_{\Sigma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad } G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_n^h \} ds + \\ & + \iint_{\gamma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \text{grad } G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_n^h \} ds, \end{aligned}$$

где $G_n^h = G_n^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(i k_n^* |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$; $k_n^* = \sqrt{i\omega\mu_0 \sigma_n^*}$; $\text{Re } k_n^* > 0$.

Мы построим оператор продолжения поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 в область $\tilde{\Omega}_-$, если преобразуем интегралы по плоскости γ в интегралы по земной поверхности Σ . Путь к такому преобразованию лежит через спектральное разложение функции Грина. Функция G_n^h в интегралах по плоскости γ зависит от положения точек $\mathbf{r}' \in \tilde{\Omega}_-$ и $\mathbf{r} \in \gamma$. Аппликаты z' и z этих точек удовлетворяют условию $z' > z$, при котором

$$G_n^h = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r})}{\eta_n} dk_x dk_y, \quad (39.4)$$

где гармоники f , g описывают квазиплоские волны

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}') &= -\exp [i(k_x x' + k_y y')] \exp(-\eta_n z') |_{z' > z}, \\ g(\mathbf{r}') &= \exp [-i(k_x x + k_y y)] \exp(\eta_n z) |_{z' > z}, \end{aligned} \quad (39.5)$$

$$\eta_n = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_n^{*2}}, \quad \text{Re } \eta_n > 0.$$

Подставим разложение функции Грина по квазиплоским волнам (39.4) во вторые интегралы формулы (39.3). Благодаря абсолютной и равномерной сходимости этих интегралов

$$\begin{aligned} \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} G_n^h + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] G_n^h\} ds = \\ = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} g + \\ + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] g\} ds; \end{aligned} \quad (39.6)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] G_n^h\} ds = \\ = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} g + \\ + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] g\} ds, \end{aligned}$$

где аргументы в гармониках f, g опущены.

Теперь воспользуемся формулами (32.31), (32.32) и запишем их для случая, когда сторонние токи и заряды внутри области интегрирования D равны нулю:

$$\begin{aligned} \iiint_D \{E(\Delta P + k^* P)\} dv = \\ = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} P + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] P\} ds; \end{aligned} \quad (39.7)$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \{H(\Delta P + k^* P)\} dv = \\ = \iint_S \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} P + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} P + \sigma^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] P\} ds. \end{aligned}$$

Применяя формулы (39.7) к слою $\tilde{\Omega}_-$ при $P = g$, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\tilde{\Omega}_-} E(\Delta g + k^* g) dv = - \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \operatorname{grad} g + \\ + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g\} ds - \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} g + \\ + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] g\} ds; \end{aligned} \quad (39.8)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\tilde{\Omega}_-} H(\Delta g + k^* g) dv = - \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \operatorname{grad} g + \\ + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] g\} ds - \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} g + \\ + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] g\} ds. \end{aligned}$$

Так как гармоника g , определяемая согласно (39.5), удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то левые части формул (39.7) равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \operatorname{grad} g + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] g\} ds = \\ & = - \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \operatorname{grad} g + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g\} ds; \end{aligned} \quad (39.9)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\gamma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \operatorname{grad} g + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] g\} ds = \\ & = - \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \operatorname{grad} g + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \bar{g}\} ds. \end{aligned}$$

Нам удалось преобразовать интегралы по плоскости γ в интегралы по земной поверхности Σ . Подставляя (39.9) в (39.6), а (39.6) в (39.3) и ориентируя единичный вектор нормали \mathbf{n} так, чтобы он был направлен из Земли в воздух, получаем *аналитическое продолжение поля $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ в горизонтальный слой $\tilde{\Omega}_-$* :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = & \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \operatorname{grad} G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \operatorname{grad} G_n^h + \\ & + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_n^h\} ds - \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x dk_y \times \\ & \times \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \operatorname{grad} \bar{g} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \operatorname{grad} g + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g\} ds; \end{aligned} \quad (39.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \operatorname{grad} G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \operatorname{grad} G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_n^h\} ds - \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{r_n} dk_x dk_y \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \operatorname{grad} g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \operatorname{grad} g + \\ & + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \bar{g}\} ds. \end{aligned}$$

На практике чаще всего применяют модели с плоской земной поверхностью $z=0$. В таких моделях земная поверхность является координатной и можно разложить функцию Грина не только во вторых, но и в первых интегралах формул (39.10). Так как в этих интегралах аппликаты точек $\mathbf{r}' \in \tilde{\Omega}_-$ и $\mathbf{r} \in \Sigma$ удовлетворяют условию $z' < z$, то разложение функции Грина принимает вид

$$G_n^h = \frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(\mathbf{r}') g^*(\mathbf{r})}{\eta_n} dk_x dk_y, \quad (39.11)$$

где

$$f^*(\mathbf{r}') = -\exp[-i(k_x x' + k_y y')] \exp(\eta_n z') \Big|_{z' < z}; \quad (39.12)$$

$$g^*(\mathbf{r}) = \exp[i(k_x x + k_y y)] \exp(-\eta_n z) \Big|_{z' < z}.$$

Подставим разложение (39.11) в первые интегралы формул (39.10) и, пренебрегая электропроводностью атмосферы, примем $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0|_{\Sigma} = 0$. Тогда при $\mathbf{r}' \in \tilde{\Omega}_-$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = & \frac{1}{8\pi^2} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \text{grad } g^* + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \text{grad } g^* + \right. \\ & + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g^* \} ds - \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \text{grad } g + \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \text{grad } g + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g \} ds \right]; \end{aligned} \quad (39.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & \frac{1}{8\pi^2} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \text{grad } g^* + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad } g^* + \right. \\ & + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] g^* \} ds - \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x dk_y \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \text{grad } g + \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad } g + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] g \} ds \right], \end{aligned}$$

откуда после простых (но довольно громоздких) преобразований получаем

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}') = & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[e_x^0 \text{ch } \eta_n z' + i\omega\mu_0 h_y^0 \frac{\text{sh } \eta_n z'}{\eta_n} \right] \times \\ & \times \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y; \\ E_y(\mathbf{r}') = & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[e_y^0 \text{ch } \eta_n z' - i\omega\mu_0 h_x^0 \frac{\text{sh } \eta_n z'}{\eta_n} \right] \times \\ & \times \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y; \\ E_z(\mathbf{r}') = & \frac{i}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [k_x e_x^0 + k_y e_y^0] \frac{\text{sh } \eta_n z'}{\eta_n} \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y; \end{aligned} \quad (39.14)$$

$$\begin{aligned}
 H_x(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[h_x^0 \operatorname{ch} \eta_n z' + (\sigma_n^* e_y^0 - i k_x h_z^0) \frac{\operatorname{sh} \eta_n z'}{\eta_n} \right] \times \\
 &\quad \times \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y; \\
 H_y(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[h_y^0 \operatorname{ch} \eta_n z' - (\sigma_n^* e_x^0 + i k_y h_z^0) \frac{\operatorname{sh} \eta_n z'}{\eta_n} \right] \times \\
 &\quad \times \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y; \\
 H_z(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[h_z^0 \operatorname{ch} \eta_n z' + i(k_x h_x^0 + k_y h_y^0) \frac{\operatorname{sh} \eta_n z'}{\eta_n} \right] \times \\
 &\quad \times \exp[-i(k_x x' + k_y y')] dk_x dk_y,
 \end{aligned}$$

где \mathbf{e}^0 , \mathbf{h}^0 — спектры поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^0 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^0 \exp[i(k_x x + k_y y)] dx dy; \\
 \mathbf{h}^0 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^0 \exp[i(k_x x + k_y y)] dx dy.
 \end{aligned} \tag{39.15}$$

39.4. Продолжение двумерного электромагнитного поля

Аналогично строится двумерный оператор продолжения. Исходными являются двумерные формулы Стрэттона — Чу (32.49а), (32.49б). Разложение двумерной функции Грина по квазиплоским волнам при $\partial/\partial y = 0$ имеет вид

$$G_n^h = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r})}{\eta_n} dk_x, \tag{39.16}$$

где

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}') &= -\exp(ik_x x') \exp(-\eta_n z')|_{z' > z}; \\
 g(\mathbf{r}) &= \exp(-ik_x x) \exp(\eta_n z)|_{z' > z}; \quad \eta_n = \sqrt{k_x^2 - k_n^2}; \quad \operatorname{Re} \eta_n > 0.
 \end{aligned}$$

После соответствующих преобразований получаем аналитическое продолжение поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 в горизонтальную полосу $\tilde{\Omega}_-$. В случае E -поляризации

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}') &= \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{E}^0 \frac{\partial G_n^h}{\partial n} + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] G_n^h \right\} ds - \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{E}^0 \frac{\partial g}{\partial n} + i\omega\mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] g \right\} ds;
 \end{aligned} \tag{39.17a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}') = & \int_{\Sigma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \text{grad } G_n^h + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad } G_n^h + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] G_n^h \} ds - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\eta_n} dk_x \int_S \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \text{grad } g + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad } g + \\ & + \sigma_n^* [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] g \} ds, \end{aligned} \quad (39.176)$$

где единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен из Земли в воздух, а

$$G_n^h = G_n^h(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) = \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k_n^* |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)$$

(здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка).

В модели с плоской земной поверхностью

$$\begin{aligned} E_y(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e_y^0 \text{ch } \eta_n z' - i\omega\mu_0 h_x^0 \frac{\text{sh } \eta_n z'}{\eta_n} \right] \exp(-ik_x x') dk_x; \\ H_x(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_x^0 \text{ch } \eta_n z' + \eta_n h_z^0 \frac{\text{sh } \eta_n z'}{ik_x} \right] \exp(-ik_x x') dk_x; \quad (39.18) \\ H_z(\mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_z^0 \text{ch } \eta_n z' + ik_x h_x^0 \frac{\text{sh } \eta_n z'}{\eta_n} \right] \exp(-ik_x x') dk_x, \end{aligned}$$

что непосредственно вытекает из (39.14).

Отметим в заключение этого параграфа, что задача аналитического продолжения электромагнитного поля в нижнее полупространство, так же как и в случае лапласова поля, является некорректной и при ее численном решении требуется регуляризация. Однако этот вопрос уже выходит за рамки нашей книги. Читатель, интересующийся прикладными аспектами проблемы, может обратиться к монографии М. Н. Бердичевского и М. С. Жданова [1981]. Там же подробно изложены методы продолжения в более сложные области, чем горизонтальный слой.

Глава десятая

МИГРАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

40. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ МИГРАЦИИ

В предыдущей главе книги мы рассмотрели теорию аналитического продолжения электромагнитного поля в проводящей среде. При этом мы ограничились анализом только монохроматического поля. Однако, как показано в нашей работе [Жданов, 1981], аналогичная методика может быть развита и для неустановившихся элек-

ромагнитных полей. Вместе с тем при продолжении неустановившихся полей можно использовать несколько отличный от обычного аналитического продолжения прием, который получил название *миграции электромагнитного поля* [Жданов, Френкель, 1982, 1983а, 1983б; Zhdanov, Frenkel, 1982]. Этот прием, как мы увидим ниже, во многом аналогичен методу интерпретации сейсмических данных, известному под названием сейсмоголографии или сейсмической миграции [Петрашень, Нахамкин, 1973; Тимошин, 1978; Berkhout, 1980], который, в свою очередь, переносит на случай сейсмических (волновых) полей идеи оптической или радиоголографии [Оптическая голография, 1982].

Оптическая голография, как известно, позволяет по голограмме, на которой зафиксирована не только амплитудная, но и фазовая структуры электромагнитного поля, восстановить объемное изображение объекта. Для этого достаточно лишь осветить голограмму когерентным пучком света. В сейсмике вместо световых волн на поверхности Земли — огромной пространственной голограмме — зафиксированы амплитуды и фазы волновых сейсмических полей. Процедура освещения голограммы когерентным пучком света заменяется тем, что точки земной поверхности заставляют колебаться в режиме обращенного времени $\tau = T - t$ (где t — обычное время, а T — интервал регистрации сигнала). Тем самым в Земле создается волновое поле, распространяющееся в обращенном времени и фокусирующееся в точках дифракции и мнимых источниках отраженных волн. Выполняя указанную операцию численно на ЭВМ и рисуя в пространстве амплитуды восстановленных волн в момент их прихода в данную точку среды, мы получаем сейсмическое изображение внутреннего строения Земли.

Аналогичный подход в принципе применим и к интерпретации данных электромагнитных исследований. Мы можем рассматривать, например, электромагнитное поле, создаваемое мощным искусственным или естественным источником и зарегистрированное на земной поверхности, как огромную пространственную голограмму. Задача заключается в том, чтобы по этой «голограмме» восстановить «геоэлектрическое изображение» среды. Для этого точно так, как это делается в сейсмоголографии, достаточно разместить в точках наблюдения фиктивные сторонние токи и заряды, которые бы менялись в обращенном времени по закону, определяемому измеренным полем в этих точках (т. е. были бы связаны с измеренными полями соотношениями типа (33.31)). Тогда электромагнитное поле, создаваемое этими источниками, так же как это имеет место при восстановлении изображения в обычной голографии, должно нам «высветить» глубинное строение Земли. При этом важно подчеркнуть, что при математической формулировке описанной выше процедуры мы приходим как раз к интегралам типа Стрэттона — Чу (записанным, однако, для обращенного времени).

Таковы общие соображения, лежащие в основе метода миграции электромагнитного поля. Перейдем теперь к систематическому изложению теории миграции.

40.1. Продолжение неустановившегося электромагнитного поля в обращенном времени

Сформулируем следующую задачу. На поверхности Земли Σ в интервале времен от 0 до T задано электромагнитное поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$, возбуждаемое нестационарным источником \mathbf{J}^0 , который либо находится на внешней стороне поверхности Σ , либо приподнят над Землей и включается в момент $t=0$. Земля характеризуется постоянной электропроводностью σ , за исключением некоторой глубинной области D (конечной или бесконечно протяженной), где электропроводность σ_d может меняться по произвольному закону. Магнитная проницаемость повсеместно равна проницаемости вакуума μ_0 . Токами смещения пренебрегаем, т. е. рассматриваем квазистационарную модель поля.

Проблема заключается в нахождении области с аномальной электропроводностью по измеренному на поверхности Земли полю $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t); \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, t)$. Для решения этой задачи сконструируем следующую трансформацию поля. Перейдем от обычного времени t к обращенному времени $\tau = T - t$ и зададим вспомогательные поля $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau), \mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$ на поверхности Земли Σ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{E}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau), & F_n(\mathbf{r}, \tau) &= E_n^0(\mathbf{r}, T - \tau), \\ \mathbf{R}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{H}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau), & R_n(\mathbf{r}, \tau) &= -H_n^0(\mathbf{r}, T - \tau). \end{aligned} \quad (40.1)$$

Здесь индекс tg означает тангенциальную компоненту поля.

Как видно, при таком определении функции \mathbf{F}, \mathbf{R} удовлетворяют условию (33.24) (при замене в последнем времени t на обращенное время τ)

$$F_n = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{R}_{tg}], \quad \frac{\partial R_n}{\partial \tau} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}_{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}_{tg}]. \quad (40.2)$$

Следовательно, эти функции можно использовать как плотности интегралов типа Стрэттона — Чу, записанных для обращенного времени τ :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau') = \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{R}] \mu_0 \frac{\partial G^d}{\partial \tau} \right\} ds d\tau; \quad (40.3a)$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau') = \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{R}] \times \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \sigma G^d \right\} ds d\tau. \quad (40.3b)$$

В соответствии с основными свойствами интегралов типа Стрэттона — Чу поля $\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*$ вне Σ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \sigma \mathbf{E}^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -\mu_0 \partial \mathbf{H}^* / \partial \tau' \quad (40.4)$$

Поле $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau'), \mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau')$ будем называть «обращенным» продолжением электромагнитного поля $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, t)$ или просто

«обращенным» полем. Обращенному полю \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* можно придать простой физический смысл. В самом деле, в соответствии с (33.31) определим фиктивные электрические и магнитные заряды и токи, отвечающие функциям \mathbf{F} , \mathbf{R} и полю \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 :

$$\mathbf{J}^{*E}(\mathbf{r}, \tau) = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau), \quad \mathbf{J}^{*H}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau), \quad (40.5)$$

$$q_S^{*E}(\mathbf{r}, \tau) = -\varepsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)), \quad q_S^{*H}(\mathbf{r}, \tau) = \mu_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau)).$$

Следовательно, выражения для \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* можно записать так:

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau') = - \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{q_S^{*E} \nabla G^d}{\varepsilon} - \mathbf{J}^{*H} \times \nabla G^d + \mu_0 \mathbf{J}^{*E} \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} ds d\tau; \quad (40.6a)$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau') = - \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{-q_S^{*H} \nabla G^d}{\mu_0} + \mathbf{J}^{*E} \times \nabla G^d - \sigma \mathbf{J}^{*H} G^d \right\} ds d\tau. \quad (40.6b)$$

Таким образом, обращенное поле является электромагнитным полем, возбуждаемым в однородной проводящей Земле системой фиктивных токов и зарядов, определенных по наблюдаемым полям \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , но в обращенном времени (т. е. выключаемых в конечный момент регистрации поля $t=T$, работающих в обращенном времени τ и выключаемых в момент $t=0$). Подставляя (40.5) в (40.6), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau') = & \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)) \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)] \times \nabla G^d + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau)] \mu_0 \frac{\partial G^d}{\partial \tau} \right\} ds d\tau; \end{aligned} \quad (40.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau') = & \int_0^{\tau'} \iint_{\Sigma} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau)) \nabla G^d + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau)] \times \nabla G^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)] \sigma G^d \right\} ds d\tau. \end{aligned}$$

Заменим переменную τ в выражениях (40.7) на $T-t$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', T - t') = & \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \nabla \tilde{G}^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \nabla \tilde{G}^d + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \mu_0 \frac{\partial \tilde{G}^d}{\partial t} \right\} ds dt; \end{aligned} \quad (40.8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^*(\mathbf{r}', T - t') = & \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla \tilde{G}^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \nabla \tilde{G}^d + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \sigma \tilde{G}^d \right\} ds dt, \end{aligned} \quad (40.8b)$$

где $\tilde{G}^d = \tilde{G}^d(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t)$ — функция, сопряженная с фундаментальной функцией Грина для уравнения диффузии.

Функции G^d и \tilde{G}^d связаны следующим соотношением:

$$\tilde{G}^d(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t) = G^d(\mathbf{r}', -t' | \mathbf{r}, -t) = G^d(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t'). \quad (40.9)$$

Следует подчеркнуть, что трансформация поля, описываемая формулами (40.8а), (40.8б), является устойчивой процедурой в силу ограниченности в пространстве L_2 операторов, входящих в правую часть этих выражений.

40.2. Понятие миграционного поля

Указанный в предыдущем пункте способ введения вспомогательных полей \mathbf{F} и \mathbf{R} на поверхности Земли Γ_0 не является единственным. В самом деле, определим \mathbf{F} и \mathbf{R} следующим образом:

$$\mathbf{F}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{E}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau), \quad \mathbf{R}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{H}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau), \quad (40.10)$$

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{c} \mathbf{E}_n^0(\mathbf{r}, T - \tau), \quad \mathbf{R}_n(\mathbf{r}, \tau) = -\mathbf{H}_n^0(\mathbf{r}, T - \tau),$$

где $c = \text{const} > 0$

Непосредственная проверка показывает, что поля \mathbf{F} и \mathbf{R} , определенные (40.10), будут удовлетворять условиям (40.2) при замене σ на $c\sigma$, т. е. для того чтобы с помощью этих функций определить интегралы типа Стрэттона — Чу, необходимо ввести в рассмотрение полупространство с некоторой фиктивной электропроводностью

$$\sigma^m = c\sigma. \quad (40.11)$$

При таком введении полей \mathbf{F} и \mathbf{R} формулы (40.8) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^m(\mathbf{r}', T - t') = & \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0)}{c} \nabla \tilde{G}^m + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \nabla \tilde{G}^m + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \mu_0 \frac{\partial \tilde{G}^m}{\partial t} \right\} ds dt; \end{aligned} \quad (40.12a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^m(\mathbf{r}', T - t') = & \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla \tilde{G}^m + \right. \\ & \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \nabla \tilde{G}^m + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \sigma^m \tilde{G}^m \right\} ds dt, \end{aligned} \quad (40.12б)$$

где

$$\tilde{G}^m = \frac{-(\mu_0 \sigma^m)^{1/2}}{8\pi^{3/2} (t - t')^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma^m |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4(t - t')}\right) \chi(t - t').$$

Трансформацию наблюдаемого на Σ поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , выполняемую по формулам (40.12а), (40.12б), будем называть *миграцией электромагнитного поля*, а само поле \mathbf{E}^m , \mathbf{H}^m — *миграционным электромагнитным полем*.

Очевидно, что обращенное поле является частным случаем поля, получаемого в результате миграции (при $c=1$, $\sigma^m=\sigma$), поэтому свойства полей \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* и \mathbf{E}^m , \mathbf{H}^m во многом аналогичны. Однако, как будет показано ниже, поле \mathbf{E}^m , \mathbf{H}^m обладает свойствами, более удобными для проведения интерпретации электромагнитных данных, нежели обычное обращенное поле \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* .

В заключение данного пункта отметим, что мы вводим понятие миграции электромагнитного поля по аналогии с сейсмической миграцией [Berkhout, 1980], с тем чтобы подчеркнуть принципиальное сходство этих методов. По существу, процедура миграции, как мы увидим ниже, позволяет сфокусировать электромагнитное поле на геоэлектрической неоднородности.

40.3. Псевдомиграционное поле

Назовем «псевдомиграционным» полем поле \mathbf{E}^P , \mathbf{H}^P , получаемое в результате формальной замены в формулах (33.25а), (33.25б) фундаментальной функции Грина G^d на функцию, сопряженную с функцией Грина для уравнения диффузии \tilde{G}^d (с соответствующим изменением пределов интегрирования по времени t , а также с учетом равенства наблюдаемых полей нулю при $\tau > T$):

$$\mathbf{E}^P(\mathbf{r}', T-t') = \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \nabla \tilde{G}^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \nabla \tilde{G}^d + \right. \\ \left. + \mu_0 [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \frac{\partial \tilde{G}^d}{\partial t} \right\} ds dt; \quad (40.13a)$$

$$\mathbf{H}^P(\mathbf{r}', T-t') = \int_{t'}^T \iint_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla \tilde{G}^d + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \nabla \tilde{G}^d + \right. \\ \left. + \sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \tilde{G}^d \right\} ds dt. \quad (40.13б)$$

Очевидно, что поля \mathbf{E}^P , \mathbf{H}^P , определенные соотношениями (40.13а), (40.13б), совместно не удовлетворяют уравнениям Максвелла (поэтому их следует рассматривать независимо), хотя каждое в отдельности удовлетворяет уравнению диффузии по времени $\tau = T-t$, например

$$\Delta \mathbf{H}^P - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}^P}{\partial \tau} = 0.$$

Псевдомиграционное поле \mathbf{E}^P , \mathbf{H}^P является результатом формальной (без соответствующего согласования с граничными условиями на Σ) трансформации наблюдаемого на Σ поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , и тем не менее это поле (точнее, магнитная компонента псевдомиграционного поля \mathbf{H}^P) обладает замечательными свойствами, весьма удобными для практических исследований. В следующем параграфе будет показано, что поле \mathbf{H}^P позволяет точно локализовать в пространстве аномалиеобразующие объекты, следовательно, оно может

также быть использовано для оценки точности локализации источников аномального поля при решении обратных задач электромагнитной индукции в неоднородных средах.

Заметим, что выражения для полей \mathbf{E}^* и \mathbf{E}^P совпадают, а выражения для полей \mathbf{H}^* и \mathbf{H}^P различаются лишь знаками при нормальной компоненте магнитного поля H_n^0 . Ясно, что в определенных ситуациях возможно близкое или даже одинаковое поведение псевдомиграционного и обращенного полей (например, при H -поляризации первичного поля). Таким образом, изучение свойств псевдомиграционного и обращенного полей, несмотря на различную физическую природу их возбуждения, можно вести параллельно.

41. СВОЙСТВА МИГРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

41.1. Уравнение миграционного поля в прямом времени

Для того чтобы более наглядно представить себе свойства миграционного поля \mathbf{E}^m , \mathbf{H}^m , перейдем вновь от обращенного времени τ к обычному прямому времени t и положим для простоты $c = 1$:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}^m(\mathbf{r}', T - t'); \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{H}^m(\mathbf{r}', T - t').$$

Поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ в прямом времени удовлетворяют уравнениям $\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \sigma^m \tilde{\mathbf{E}}$, $\text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t'}$ и, следовательно, удовлетворяют также уравнениям

$$\Delta(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}) + \mu_0 \sigma^m \frac{\partial(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})}{\partial t'} = 0. \quad (41.1)$$

Если обычное уравнение диффузии описывает развитие процесса распространения электромагнитного поля при возрастающем времени от источника к наблюдателю, то уравнения (41.1) описывают этот же процесс в обратном порядке — от конечного распределения поля \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 на поверхности Земли к его начальному распределению в источниках. Следовательно, предложенная нами трансформация поля (40.12) описывает преобразование расходящихся в реальной среде дифрагированных на геоэлектрических неоднородностях электромагнитных полей в поля, сходящиеся в соответствующие точки, линии и поверхности дифракции. При этом в момент $\tau' = T$ (или $t' = 0$), так же как это имеет место в сейсмографии, поля $\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, T) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', 0)$ и $\mathbf{H}^m(\mathbf{r}, T) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', 0)$ образуют изображение мнимых возбудителей поля, связанных с геоэлектрическими неоднородностями.

Описанный процесс эквивалентен, по существу, трансформации поля, осуществляемой в обычной оптической голографии. В самом деле, если перейти в формулах (40.12а), (40.12б) к временным спектрам, то мы получим справа формулы, аналогичные обычным формулам Френеля (только записанные для диффузионного про-

цесса), и переход к обращенному времени сведется к смене знака фазы электромагнитного поля и соответственно замене суперпозиции расходящихся волн суперпозицией сходящихся волн.

Проиллюстрируем это положение на некоторых теоретических и модельных примерах, которые позволят исследовать разрешающую способность метода и определить на его основе некоторые принципы интерпретации неустановившихся электромагнитных полей.

41.2. Одномерная, двумерная и трехмерная миграция полей электромагнитных источников

Рассмотрим последовательно одно-, двух- и трехмерные ситуации, в которых электромагнитное поле возбуждается соответственно бесконечной горизонтальной токовой плоскостью, бесконечно длинным кабелем и горизонтальным электрическим диполем. Указанные источники погружены в бесконечное однородное проводящее пространство с электропроводностью σ . Токовая плоскость параллельна координатной плоскости XOY и проходит через точку z_0 , бесконечно длинный кабель и диполь параллельны оси Y , кабель проходит через точку z_0 , а диполь зафиксирован в пространстве в точке (x_0, y_0, z_0) , причем $z_0 > 0$ (для упрощения анализа в этой главе ось Z направлена вниз).

Ток в источниках меняется по закону

$$I = j\delta(t), \quad (41.2)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; j — некоторая постоянная.

Обозначим через \mathbf{E}^o , \mathbf{H}^o электромагнитное поле, зарегистрированное в интервале времени $(0, T)$ на горизонтальной поверхности Σ , совпадающей с плоскостью XOY , и исследуем свойства поля \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* , полученного в результате обращения продолжения поля \mathbf{E}^o , \mathbf{H}^o в нижнее полупространство.

В одномерном случае формулы (40.8) преобразуются к виду

$$H_x^* = \int_{t'}^T (H_x^o \tilde{G}_{,z}^d - E_y^o \tilde{G}^d \sigma) dt, \quad (41.3)$$

$$E_y^* = \int_{t'}^T (H_x^o \tilde{G}_{,t}^d \mu_0 + E_y^o \tilde{G}_{,z}^d) dt.$$

В двумерном случае эти же компоненты обращенного поля имеют следующий вид:

$$H_x^* = \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^o \tilde{G}_{,z}^d - H_z^o \tilde{G}_{,x}^d - E_y^o \tilde{G}^d \sigma) dx dt, \quad (41.4)$$

$$E_y^* = \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^o \tilde{G}_{,t}^d \mu_0 + E_y^o \tilde{G}_{,z}^d) dx dt.$$

И, наконец, в трехмерном случае

$$H_x^* = \int_{t'=-\infty}^T \iint (H_x^0 \tilde{G}_{,z}^d - H_z^0 \tilde{G}_{,x}^d - E_{y^{(3)}}^0 \tilde{G}^d \sigma) dx dy dt, \quad (41.5)$$

$$E_y^* = \int_{t'=-\infty}^T \iint (H_x^0 \tilde{G}_{,t}^d \mu_0 + E_{y^{(3)}}^0 \tilde{G}_{,z}^d) dx dy dt.$$

В формулах (41.3) — (41.5)

$$\tilde{G}_{,\alpha}^d = \frac{\partial \tilde{G}^d}{\partial \alpha}, \quad \alpha = x, y, z, t; \quad H_x^0 = -\frac{j}{4\pi} |G_{,z}; \quad H_z^0 = \frac{j}{4\pi} G_{,x}; \quad (41.6)$$

$$E_y^0 = -\mu_0 \frac{j}{4\pi} G_{,t}; \quad E_{y^{(3)}}^0 = \frac{j}{4\pi} \left(\frac{1}{\sigma} G_{,yy} - \mu_0 G_{,t} \right),$$

где $\tilde{C}^d = \tilde{C}^d(r', t' | r, t)$ — функции, сопряженные с фундаментальными функциями Грина соответственно для одно-, двух- и трехмерного уравнения диффузии [Морс и Фешбах, 1958], а $G = G^d(r, t | r_0, 0)$.

41.3. Экстремумы миграционных полей

Найдем положение экстремумов миграционного поля в одномерном, двумерном и трехмерном случаях для перечисленных выше моделей источников. Подставив (41.6) в (41.3), можно показать, что для H_x^* в точке $z' = z_0$ в момент $\tau' = T$ ($t' = 0$) выполняются необходимые и достаточные условия локального экстремума (причем это свойство справедливо и для магнитной компоненты псевдомиграционного поля H_x^P , поскольку $H_x^* = H_x^P$):

$$\left. \frac{\partial H_x^*}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \equiv 0; \quad \left. \frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \neq 0.$$

Действительно, следуя (40.9) и (41.6), можно записать

$$\left. \frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \sim z_0^{-4} \neq 0,$$

$$\left. \frac{\partial H_x^*}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=0 \\ t'=0}} \sim \int_0^T G_{,z}^d (G_{,zz}^d - \mu_0 \sigma G_{,t}^d) dt \equiv 0 \quad (41.7)$$

(здесь и далее символ « \sim » означает, что искомые выражения вычислены с точностью до постоянных коэффициентов).

Таким образом, магнитная компонента обращенного поля имеет локальный экстремум в точке, через которую проходит токовая плоскость. При этом фокусировка обращенного электромагнитного

поля происходит в момент $\tau' = T$. В этот момент нам удается определить положение возбудителей поля.

Рассмотрим двумерную ситуацию. В этом случае можно показать, что экстремальные точки обращенного поля (u компонент H_x^* , E_y^*) следует искать в полупространстве $z > 0$ на вертикальной оси, проходящей через кабель. Это свойство справедливо также в трехмерном случае и, кроме того, для аналогичных компонент псевдомиграционного и миграционного полей, что заметно упрощает изучение экстремальных свойств этих полей.

Итак, пусть $x' = x_0$ (причем, не ограничивая общности, можно положить $x_0 = 0$) и $t' = 0$, тогда выражения (41.4) запишутся так:

$$H_x^* \sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(z_0^2 - z_0 z' - \frac{4t}{\mu_0 \sigma} \right) t^{-4} \exp \left(-\frac{\mu_0 \sigma}{4t} (2x^2 + z_0^2 + z'^2) \right) dx dt \sim \\ \sim (z_0^2 + z'^2)^{-3/2} (2z'^2 + 3z'z_0 - z_0^2); \quad (41.8a)^1$$

$$E_y^* \sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ z' + z_0 - \frac{\mu_0 \sigma}{4t} [(x^2 + z_0^2) z' + (x^2 + z^2) z_0] \right\} t^{-4} \times \\ \times \exp \left(-\frac{\mu_0 \sigma}{4t} (2x^2 + z_0^2 + z'^2) \right) dx dt \sim \\ \sim (z_0^2 + z'^2)^{-7/2} (3z'^3 - 7z'^2 z_0 - 7z' z_0^2 + 3z_0^3). \quad (41.8б)$$

Необходимые условия локального экстремума для функций H_x^* и E_y^* приводят соответственно к алгебраическим уравнениям третьего и четвертого порядков

$$2\alpha^3 + 4\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0, \quad (41.9a)$$

$$12\alpha^4 - 35\alpha^3 - 51\alpha^2 + 35\alpha + 7 = 0, \quad (41.9б)$$

где $\alpha = z'/z_0$.

Нас интересуют лишь положительные корни уравнений (41.9a), (41.9б). Первое из этих уравнений имеет один положительный корень, $\alpha_{x1} \approx 0,8$, а второе — два, $\alpha_{y1} \approx 0,7$, $\alpha_{y2} \approx 3,8$.

Отметим, что

$$\frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \Bigg|_{\substack{z' = \alpha_{x1} z_0 \\ t' = 0}} \neq 0; \quad \frac{\partial^2 E_y^*}{\partial z'^2} \Bigg|_{z' = \begin{cases} \alpha_{y1} z_0 \\ \alpha_{y2} z_0 \end{cases}} \neq 0.$$

Следовательно, в точках α_{x1} , α_{y1} и α_{y2} для компонент обращенного поля H_x^* , E_y^* выполняются как необходимые, так и достаточные условия локального экстремума. Запишем координаты этих точек через глубину залегания кабеля z_0 :

$$z_{x1}^3 \approx 0,8z_0, \quad z_{y1}^3 \approx 0,7z_0, \quad z_{y2}^3 \approx 3,8z_0. \quad (41.10)$$

¹ Соотношения (41.8a), (41.8б) справедливы при $T \rightarrow \infty$.

Условия (41.10) показывают, что положение кабеля в пространстве однозначно определяется положением локальных экстремумов обращенного поля в момент $\tau' = T$. Изменение масштаба по оси Z при продолжении поля в обращенном времени в соответствии с (41.40) позволит точно локализовать источники аномального поля. Однако электрическая компонента E_y^* имеет «ложный» экстремум $z_{y2}^3 \approx 3,8z_0$, наличие которого может осложнить интерпретацию в случае, например, небольших значений z . Исключить из рассмотрения этот экстремум обращенного поля можно при проведении совместной интерпретации электрической и магнитной компонент H_x^* и E_y^* .

Более точное выделение особенностей обращенного продолжения, соответствующих реальным источникам аномального поля, может быть произведено, если в качестве средства интерпретации использовать процедуру миграции электромагнитного поля. В этом случае обращенное продолжение осуществляется в среду с некоторой фиктивной электропроводностью $\sigma^m = c\sigma$. Оценим величину положительной константы c исходя из условия, что экстремум магнитной компоненты миграционного поля H_x^m совпадает с положением источника (кабеля).

Выполняя вычисления, аналогичные (41.8), получаем следующие выражения для H_x^m и E_y^m (при $T \rightarrow \infty$):

$$H_x^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-3/2} (2cz'^2 + 3z_0z' - z_0^2); \quad (41.11a)$$

$$E_y^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-7/2} [(z'^3(c^2 + 2c^3) - z'^2z_0(3c + 4c^2) - z'_0z_0^2(4c + 3c^2) + z_0^3(c + 2)]. \quad (41.11b)$$

Очевидно, что при $c=1$ (41.11a), (41.11b) совпадают с (41.8a), (41.8б). Далее,

$$\left. \frac{\partial H_x^m}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \sim z_0^{-4} (1+c)^{-3/2} (c-0,5). \quad (41.12)$$

Из (41.12) находим единственное (точное) значение для константы $c=0,5$.

Справедливо и обратное утверждение: если $\sigma^m = 0,5\sigma$, то единственной точкой, в которой выполняются необходимые и достаточные условия локального экстремума для компоненты миграционного поля, является точка $z' = z_0$. Более того, значение $c=0,5$ является весьма удачным и для E_y^m . В этом случае отклонение z_{y1}^3 от z_0 не превышает $0,07z_0$, а $z_{y2}^3 = 8z_0$. Расчет константы c , выполненный специально для E_y^m , показал, что для точного совпадения z_{y1}^3 с положением кабеля следует брать $c \approx 0,55$.

Таким образом, значение $c=0,5$ можно считать оптимальным для процедуры миграции двумерного поля.

Обратимся к исследованию миграции трехмерного поля. Напомним, что аномальное поле возбуждается горизонтальным электрическим диполем, параллельным оси Y . Рассчитаем компоненты миграционного поля H_x^m и E_y^m на вертикальной полуоси, проходящей через центр диполя при $t' = 0$ ($T \rightarrow \infty$):

$$H_x^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-3} (cz'^2 + 2z_0z' - z_0^2); \quad (41.13a)$$

$$E_y^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-4} [z'^3(2c^3 + c^2) - z'^2z_0(5c^2 + 3c) - z'z_0^2(4c^2 + 5c) + z_0^3(c + 3)]. \quad (41.13b)$$

Далее, по уже известной схеме от уравнений (41.13a), (41.13b) переходим к алгебраическим уравнениям

$$2c^2\alpha^3 + 5c\alpha^2 - 4c\alpha - 1 = 0; \quad (41.14a)$$

$$5\alpha^4(2c^3 + c^2) - 6\alpha^3(5c^2 + 3c) - 2\alpha^2(17c^2 + 19c) + 6\alpha(3c + 5) + (4c + 5) = 0. \quad (41.14b)$$

Анализ решений этих уравнений с учетом (41.13a), (41.13b) вновь приводит нас к полученному ранее значению $c = 0,5$, которое является точным решением (41.14a) (при $\alpha = 1$) и весьма близким к точному решению (41.14b). Как видно, имеет место полная аналогия с двумерным случаем, причем она не ограничивается лишь свойствами миграционного поля и распространяется на свойства псевдомиграционного поля. Действительно, следуя (41.5), (41.6) и (40.9), можем записать

$$H_x^P \sim \int_0^T \iint_{-\infty}^{\infty} (G_{,x_0}^d G_{,x}^d - G_{,z_0}^d G_{,z}^d - G_{,yy_0}^d G^d + \mu_0 \sigma G_{,t_0}^d G^d) dx dy dt,$$

где индекс «0» у функций Грина обозначает поле диполя,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_x^P}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} &\sim \int_0^T \iint_{-\infty}^{\infty} (G_{,x_0}^d G_{,xz}^d - G_{,z_0}^d G_{,zz}^d - G_{,yy}^d G_{,z}^d + \mu_0 \sigma G_{,t_0}^d G_{,z}^d) dx dy dt = \\ &= \int_0^T \iint_{-\infty}^{\infty} G_{,z}^d (G_{,xx}^d + G_{,yy}^d + G_{,zz}^d - \mu_0 \sigma G_{,t}^d) dx dy dt \equiv 0. \end{aligned} \quad (41.15)$$

Можно показать, что

$$\left. \frac{\partial^2 H_x^P}{\partial z'^2} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \neq 0$$

и, кроме того, точка $g_0(x_0, y_0, z_0)$ является единственной экстремальной точкой H_x^P в нижнем полупространстве.

Очевидно, что доказательство (41.15) в двумерном случае проводится аналогично.

Отмеченное свойство псевдомиграционного поля H_x^P примечательно тем, что оно не зависит от интегрирования по времени и по координатной оси, параллельной оси диполя или кабеля (в данном случае ось Y), которое выполняется при вычислении H_x^P . Из этого следует, например, что для локализации реального трехмерного объекта достаточно зарегистрировать поле на некотором профиле, расположенном перпендикулярно оси горизонтального электрического диполя, генерирующего первичное поле, причем лишь для одного момента времени. В этом случае мы можем также говорить о некотором псевдомиграционном поле, для определения которого достаточно вычислить лишь одну квадратуру.

Следует подчеркнуть, что полученные выше свойства электромагнитной миграции естественным образом (с помощью метода отражений) переносятся и на случай, когда возбудители поля погружены в проводящее однородное полупространство, что соответствует реальным геоэлектрическим ситуациям.

41.4. Миграция модельных электромагнитных полей

Покажем, как проявляются найденные теоретические закономерности при численных экспериментах. Исследуем аномальные поля, создаваемые: 1) бесконечно длинным кабелем или горизонтальным электрическим диполем, погруженными в Землю, ток в которых меняется по закону (41.2) (или системой бесконечно длинных кабелей, расположенных на одинаковой или разных глубинах); 2) проводящими телами простой геометрической формы, погруженными в однородное полупространство с меньшей проводимостью σ (при этом источник первичного поля располагается на поверхности Земли и работает в импульсном режиме; в целях повышения глубинности исследований используется режим импульса включения).

Вычисления проводились по программе, реализующей процедуру миграции, а также расчет псевдомиграционного поля в двумерном и трехмерном случаях. При построении карт изолиний обращенного поля масштаб по оси Z был изменен в соответствии с (41.10). Заметим, что при этом пространственная структура миграционного (при $\sigma^m=0,5\sigma$) и псевдомиграционного полей качественно не отличается от структуры обращенного поля.

Рассмотрим первую серию моделей с элементарными источниками аномального поля.

На рис. 57 показаны карты изолиний псевдомиграционного поля H_x^P двух кабелей, расположенных на одной глубине (рис. 57, а) и на разных глубинах (рис. 57, б). Карты построены для момента $t' = 0$ ($\tau' = T$). Отчетливо видно, что положение источников точно фиксируется по экстремальным точкам H_x^P .

Хорошее согласие теории с практическими расчетами было продемонстрировано также и в трехмерной ситуации. На рис. 58 приведены карты изолиний H_x^m ($c=0,5$), построенные для момента $t' = 0$ в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: а) в плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр

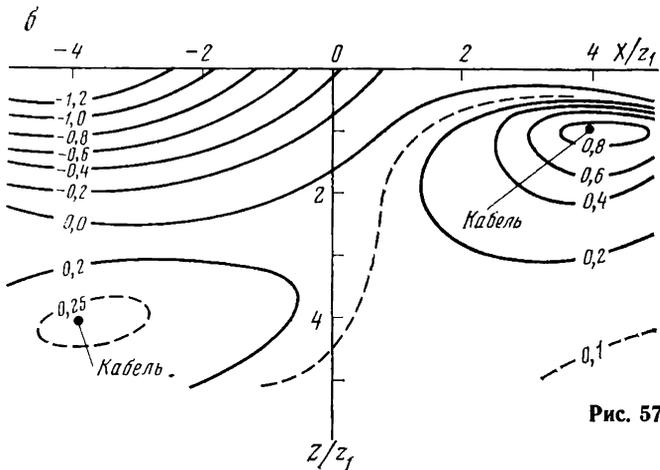
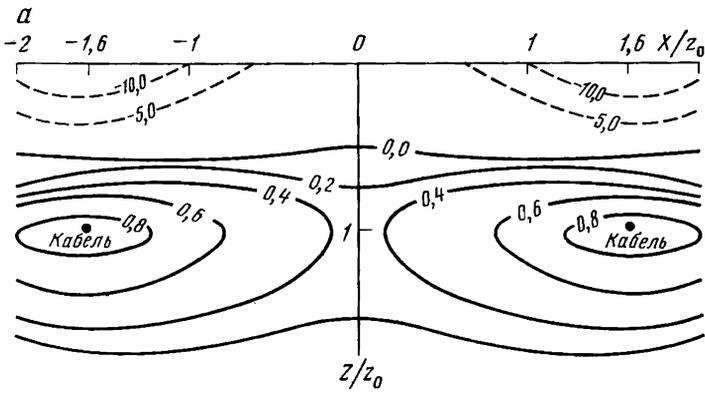


Рис. 57

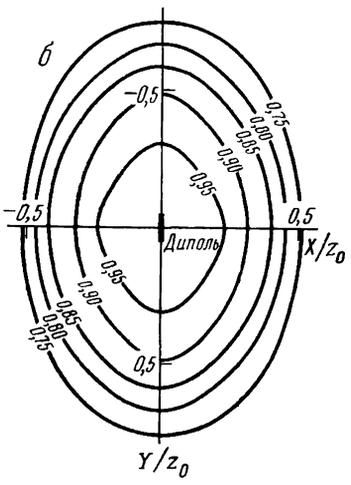
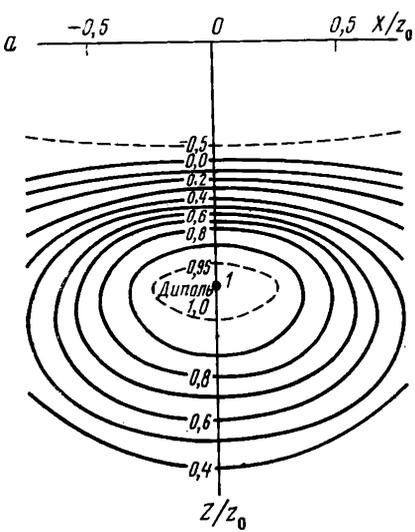


Рис. 58

(рис. 58, а); б) в горизонтальной плоскости, в которой расположен диполь (рис. 58, б). Как видно из этих рисунков, положение источника (диполя) в пространстве трех измерений уверенно определяется по экстремальным точкам миграционного поля. Восстановление миграционного поля в более поздние моменты времени, т. е. при $t' > 0$, приводит к смещению вверх экстремальных точек, и в пределе при $t' \rightarrow T$ они стремятся к поверхности наблюдения. Такое поведение миграционного поля может быть качественно объяснено диффузией электромагнитного поля в проводящей среде. При увеличении t' «включаются» источники аномального поля (работающие в обращенном времени), расположенные ближе к поверхности наблюдения, положение которых и фиксируется при электромагнитной миграции. Таким образом можно просканировать весь геоэлектрический разрез (снизу — вверх), при этом особенно отчетливо проявляются области с избыточной электропроводностью.

Опишем теперь вторую серию моделей, в которых исходное аномальное поле на поверхности горизонтально-неоднородной Земли рассчитывалось конечно-разностным методом [Zhdanov et al., 1982]. Для моделирования были выбраны простые геоэлектрические ситуации (рис. 59), а внешнее поле задавалось плоской волной, амплитуда которой менялась по закону импульса включения. Это позволило достаточно быстро вычислять по сеточной программе электромагнитные поля на ряде периодов. Поскольку спектр поля сосредоточен в узком частотном диапазоне и является гладкой функцией частоты, фурье-преобразование спектра поля выполнялось по несложной вычислительной схеме метода Филона.

На моделях сред, содержащих локальные аномалиеобразующие объекты, были опробованы различные способы миграции электромагнитного поля, учитывающие специфику конкретной модели и свойства миграционного поля.

В модели 1 геоэлектрическая неоднородность представлена тонкой, хорошо проводящей горизонтальной полосой (рис. 59, а). В нулевой момент времени ($t' = 0$) при электромагнитной миграции проявляются источники аномального поля, сконцентрированные вдоль полосы в горизонтальной плоскости, и по изолиниям миграционного поля² удается определить положение и форму аномалиеобразующего объекта (рис. 60). Заметим, что при увеличении t' экстремальные точки E_y^m весьма медленно смещаются вверх. Следовательно, растекание избыточных токов, локализованных в полосе, во вмещающую среду происходит медленно и с малой интенсивностью. Это свидетельствует о высокой проводимости локальной не-

² Здесь и далее приводятся карты изолиний электрической компоненты миграционного поля E_y^m , причем константа миграции $c = 0.5$. На основании опыта практических расчетов мы пришли к выводу, что эта компонента миграционного поля в случае E -поляризации позволяет получить большую информацию об аномальном объекте по сравнению с магнитными составляющими H_x^m и H_z^m .

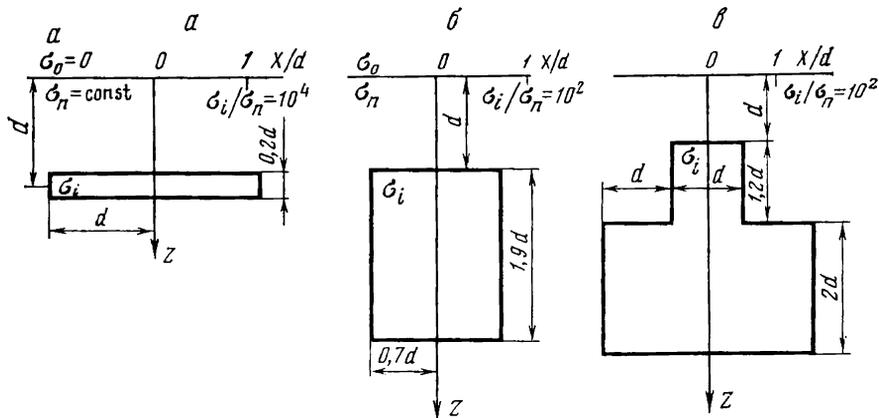


Рис. 59

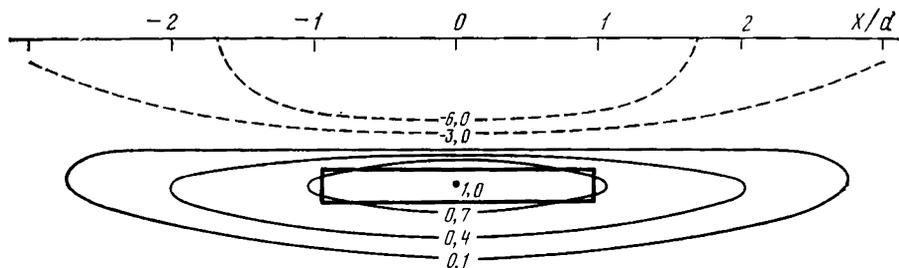


Рис. 60

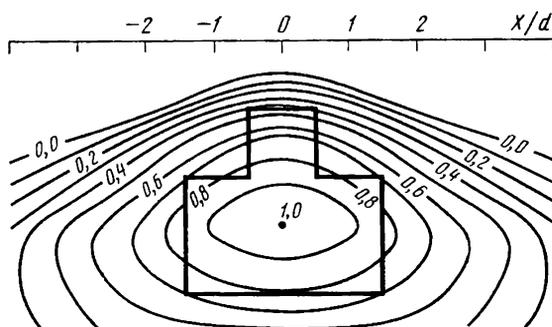


Рис. 61

однородности, значительно превышающей проводимость вмещающей среды. В эксперименте $\sigma_n = 10^{-2}$, $\sigma_i = 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

В моделях 2 и 3 неоднородности образованы прямоугольной вставкой (рис. 59, б) и вставкой более сложной формы (рис. 59, в). Миграция электромагнитного поля, выполняемая по формулам (40.12), позволяет выявить в каждый момент времени области гео-

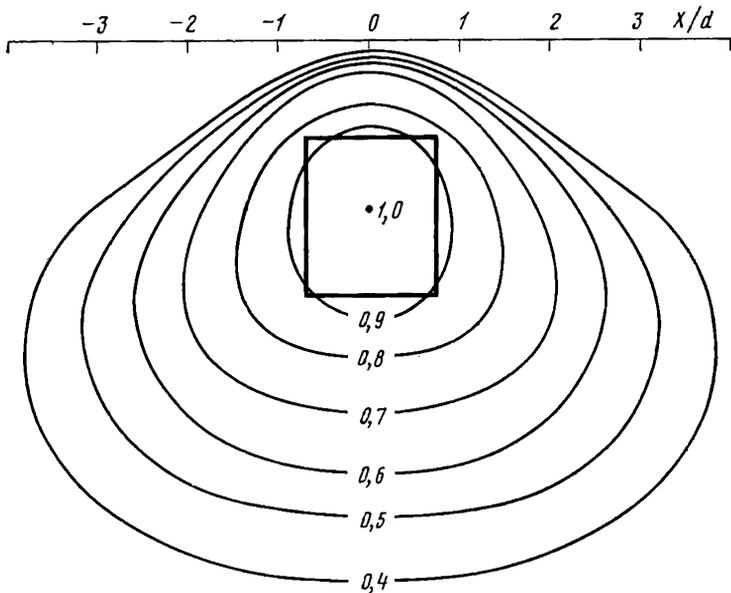


Рис. 62

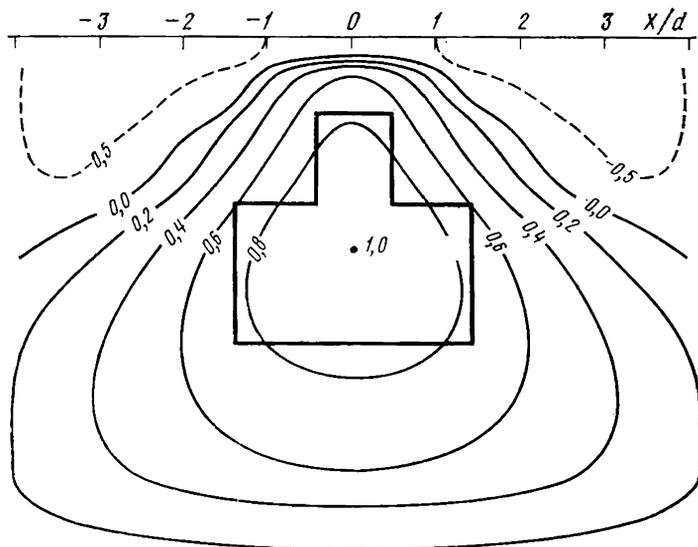


Рис. 63

электрического разреза с наибольшими избыточными токами. Поэтому восстановление пространственного распределения миграционного поля выполнялось послойно: поле на каждом уровне восстанавливалось в момент включения избыточных токов (источников поля в слое), отвечающих этому уровню. Время включения опреде-

лялось по выражению для глубины скин-слоя квазистационарного поля [Макагонов, 1977]

$$d(t) = a\sqrt{2\pi t/\mu_0\sigma}, \quad (41.16)$$

где a — некоторая константа, не зависящая от t . Результат такого восстановления для модели 3 представлен на рис. 61. На рисунке отчетливо обозначен локальный экстремум, который можно связать с максимальной интенсивностью индукционных токов. Очевидно, что восстановление общего пространственного распределения миграционного поля в момент времени, отвечающий положению этого экстремума, наиболее информативно. Действительно, как видно из рис. 62 и 63, изолинии E_y^m достаточно четко отражают положение и форму геоэлектрических неоднородностей. Картина миграционного поля, построенная в другие моменты времени, не является такой выразительной и может привести к ошибке в определении местоположения и формы аномалиеобразующего тела.

Способ послыоного восстановления миграционного поля может быть модифицирован следующим образом. Поскольку интенсивность вторичных источников поля уменьшается с глубиной, то для выравнивания вклада источников, расположенных на разных уровнях, и соответственно для разрешения этих источников при миграции электромагнитного поля целесообразно пронормировать значения миграционного поля на каждом уровне на его максимальное значение на этом уровне. Такой алгоритм в определенных ситуациях может давать большую детализацию при восстановлении структуры геоэлектрического разреза.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что миграция электромагнитного поля может использоваться как весьма эффективный способ решения обратной геоэлектрической задачи, позволяющий восстановить геоэлектрическое изображение среды.

Приложение

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ИХ СВОЙСТВА

1. Уравнения поля

Аппарат функций Грина является важным средством анализа электромагнитных полей. Электромагнитные функции Грина, которые можно рассматривать как отклик поля на возбуждение точечным источником, дают возможность описать электрическое или магнитное поле, наблюдаемое в некоторой точке пространства, в виде интегралов по объему, занимаемому источниками электрического и магнитного типов, или интегралов по некоторой замкнутой поверхности, ограничивающей область, не содержащую источников. Возможность получения таких представлений обусловлена справедливостью принципа суперпозиции для линейных полей. Таким образом, в наиболее общем виде электрическое и магнитное поля в некоторой точке \mathbf{r}' (вне области источников) можно представить так [Фелсен, Маркувиц, 1978, т. 1]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \iiint_V \{ \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}^e(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}^m(\mathbf{r}) \} dv, \quad (\text{П.1})^*$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = - \iiint_V \{ \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}^e(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \mathbf{j}^m(\mathbf{r}) \} dv,$$

где \mathbf{j}^e и \mathbf{j}^m — объемные плотности электрических и магнитных токов, а $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$ ($i, j=1, 2$) — тензорные электромагнитные функции Грина; \mathbf{r} и \mathbf{r}' — координаты точек источника и наблюдения; V — область, занятая источниками.

Из (П.1) видно, что $\hat{\mathcal{G}}_{11}$, $\hat{\mathcal{G}}_{12}$ и $\hat{\mathcal{G}}_{21}$, $\hat{\mathcal{G}}_{22}$ имеют смысл соответственно электрических и магнитных полей, возбуждаемых в точке \mathbf{r}' электрическим и магнитным диполями, расположенными в точке \mathbf{r} .

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют введенные согласно (П.1) электромагнитные функции $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$.

Уравнения поля имеют в данном случае вид

$$\nabla' \times \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \quad \nabla' \times \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H} - \mathbf{j}^m. \quad (\text{П.2})$$

Подставляя (П.1) в (П.2) и учитывая, что оператор ∇' действует только на координаты вектора \mathbf{r}' , записываем

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{21}] \mathbf{j}^e + [\nabla' \times \hat{\mathcal{G}}_{22}] \mathbf{j}^m \} dv = \\ = \sigma^* \iiint_V \{ \hat{\mathcal{G}}_{11} \mathbf{j}^e + \hat{\mathcal{G}}_{12} \mathbf{j}^m \} dv - \mathbf{j}^e, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

* Знак «минус» у интегралов связан с удобством выбора тензорных электромагнитных функций Грина.

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{11}] j^e + [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{12}] j^m \} dv = \\ = i\omega\mu \iiint_V \{ \hat{\mathcal{E}}_{21} j^e + \hat{\mathcal{E}}_{22} j^m \} dv + j^m, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{21}] j^e + [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{22}] j^m - \\ - \sigma^* \hat{\mathcal{E}}_{11} j^e - \sigma^* \hat{\mathcal{E}}_{12} j^m + \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} dv = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{11}] j^e + [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{12}] j^m - \\ - i\omega\mu \hat{\mathcal{E}}_{21} j^e - i\omega\mu \hat{\mathcal{E}}_{22} j^m - j^m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} dv = 0, \end{aligned}$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — функция Дирака, обладающая, как известно, следующим свойством:

$$\iiint_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv = \mathbf{A}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in V. \quad (\text{П.5})$$

Так как (П.4) должно быть справедливо при любых j^e и j^m , положим в (П.4) поочередно $j^e = 0$ и $j^m = 0$. В результате получим уравнения, которым должны удовлетворять электромагнитные тензорные функции Грина

$$\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{11} = i\omega\mu \hat{\mathcal{E}}_{21}, \quad \nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{21} = \sigma^* \hat{\mathcal{E}}_{11} - \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (\text{П.6})$$

$$\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{12} = i\omega\mu \hat{\mathcal{E}}_{22} + \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{22} = \sigma^* \hat{\mathcal{E}}_{12}, \quad (\text{П.7})$$

где $\hat{\Gamma}$ — идемпотент. Из (П.6) и (П.7) следует, что $\hat{\mathcal{E}}_{11}$ и $\hat{\mathcal{E}}_{12}$ удовлетворяют также уравнениям

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{11}] - k^2 \hat{\mathcal{E}}_{11} = -i\omega\mu \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{П.8})$$

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{12}] - k^2 \hat{\mathcal{E}}_{12} = i\omega\mu \nabla' \times \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

а функции $\hat{\mathcal{E}}_{21}$ и $\hat{\mathcal{E}}_{22}$ — уравнениям

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{21}] - k^2 \hat{\mathcal{E}}_{21} - \nabla' \sigma^* \times \left[\frac{1}{\sigma^*} \nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{21} \right] = -\nabla' \times \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{П.9})$$

$$\nabla' \times [\nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{22}] - k^2 \hat{\mathcal{E}}_{22} - \nabla' \sigma^* \times \left[\frac{1}{\sigma^*} \nabla' \times \hat{\mathcal{E}}_{22} \right] = \sigma^* \hat{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

2. Лемма Лоренца для неоднородной среды

Электромагнитные тензорные функции Грина $\hat{\mathcal{E}}_{ij}$ ($i, j=1, 2$) для изотропного пространства, введенные согласно (П.1), удовлетворяют, как известно [Фелсен, Маркувич, 1978, т. 1], соотношениям взаимности, которые в свою очередь отражают свойства симметрии электромагнитного поля в рассматриваемой неоднородной среде. Для вывода этих соотношений естественно воспользоваться леммой Лоренца, которую мы сформулируем для случая электромагнитных полей,

возбуждаемых источниками электрического (j^e), и магнитного (j^m) типов в неоднородной изотропной среде с комплексной электропроводностью $\sigma^*(r)$ и магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$. Как и ранее, будем предполагать, что зависимость полей от времени характеризуется множителем $\exp(-i\omega t)^2$.

Пусть в некоторой области V среды с параметрами $\sigma^*(r)$ и μ существуют два множества источников (j_a^e, j_a^m и j_b^e, j_b^m), которые возбуждают электромагнитные поля, имеющие одинаковую частоту ω . Обозначим поле, вызванное лишь источниками типа a , через E^a, H^a , а поле, вызванное лишь источниками типа b , — через E^b, H^b . Соответствующие уравнения имеют вид

$$\nabla \times H^a = \sigma^*(r) E^a + j_a^e, \quad (\text{П.10})$$

$$\nabla \times E^a = i\omega\mu H^a - j_a^m, \quad (\text{П.11})$$

$$\nabla \times H^b = \sigma^*(r) E^b + j_b^e, \quad (\text{П.12})$$

$$\nabla \times E^b = i\omega\mu H^b - j_b^m, \quad (\text{П.13})$$

Умножая (П.10) скалярно на E^b , а (П.13) скалярно на H^a и складывая полученные уравнения, имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [H^a \times E^b] &= \sigma^*(r) (E^a, E^b) + \\ &+ (j_a^e, E^b) - i\omega\mu (H^a, H^b) + (j_b^m, H^a). \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Меняя в (П.14) местами индексы a и b , получаем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [H^b \times E^a] &= \sigma^*(r) (E^b, E^a) + (j_b^e, E^a) - \\ &- i\omega\mu (H^b, H^a) + (j_a^m, H^b). \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Вычитая (П.14) из (П.15) записываем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{[E^b \times H^a] - [E^a \times H^b]\} &= (E^a, j_b^e) + \\ &+ (H^b, j_a^m) - (E^b, j_a^e) - (H^a, j_b^m). \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Интегрируя (П.16) по всей области V и применяя теорему Остроградского — Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S \{[E^b \times H^a] - [E^a \times H^b]\} ds \\ = \iiint_V \{(E^a, j_b^e) + (H^b, j_a^m) - (E^b, j_a^e) - (H^a, j_b^m)\} dv, \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

где S — поверхность, ограничивающая область V , а вектор нормали к поверхности направлен вовне области V .

Устремим теперь диаметр рассматриваемой области к бесконечности. Тогда, учитывая условия излучения для полей E^a, H^a, E^b и H^b , мы можем записать

$$\iiint_{V_\infty} \{(E^a, j_b^e) + (H^b, j_a^m) - (E^b, j_a^e) - (H^a, j_b^m)\} dv = 0, \quad (\text{П.18})$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Соотношение (П.18) является математическим выражением принципа взаимности для рассматриваемого случая.

² Отметим, что лемма Лоренца справедлива и в более общем случае нестационарных электромагнитных полей в анизотропных неоднородных средах [Фелсен, Маркувиц, 1978, т. 1].

3. Соотношения взаимности

Воспользуемся теперь леммой Лоренца в форме (П. 18) для вывода соотношений взаимности для электромагнитных тензорных функций Грина в неоднородной среде.

$$а) \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}), \quad (\text{П. 19})$$

где «волной» обозначена операция транспонирования.

Расположим последовательно в точках с радиус-векторами \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' электрические диполи с моментами \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно:

$$\mathbf{j}_a^e = \mathbf{a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{j}_b^e = \mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}''), \quad (\text{П. 20})$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — произвольные постоянные векторы; δ — функция Дирака; \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, и положим, что источников магнитного типа нет:

$$\mathbf{j}_a^m = 0, \quad \mathbf{j}_b^m = 0. \quad (\text{П. 21})$$

Тогда в соответствии с (П. 1) мы можем записать

$$\mathbf{E}^a = -\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \quad \mathbf{E}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}. \quad (\text{П. 22})$$

Подставим (П. 20) — (П. 22) в (П. 18):

$$\begin{aligned} \iint_{V_\infty} \{ -(\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')) + \\ + (\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}, \mathbf{a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \} dv = 0, \end{aligned} \quad (\text{П. 23})$$

где интегрирование проводится по координате точки наблюдения.

С учетом свойства δ -функции записываем $(\mathbf{b}, \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}'') \mathbf{b})$. Отсюда непосредственно следует $\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}'')$, а в прежних обозначениях $\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}' | \mathbf{r})$; что и требовалось доказать (здесь «волной», как и ранее, обозначена операция транспонирования).

$$б) \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}). \quad (\text{П. 24})$$

Расположим последовательно в точках с радиус-векторами \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' магнитные диполи с моментами \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно:

$$\mathbf{j}_a^m = \mathbf{a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{j}_b^m = \mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}''). \quad (\text{П. 25})$$

Будем считать, что источников электрического типа в обоих случаях нет:

$$\mathbf{j}_a^e = 0, \quad \mathbf{j}_b^e = 0. \quad (\text{П. 26})$$

Тогда в соответствии с (П. 1) имеем

$$\mathbf{H}^a = -\hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}. \quad (\text{П. 27})$$

Подставляя (П. 25) — (П. 27) в (П. 18), записываем

$$\begin{aligned} \iint_{V_\infty} \{ -(\hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}, \mathbf{a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \\ + (\hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \mathbf{b} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')) \} dv = 0. \end{aligned} \quad (\text{П. 28})$$

Из (П. 28) следует

$$(\mathbf{b}, \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}'') \mathbf{b})$$

или в других обозначениях

$$\hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}), \quad (\text{П.29})$$

что и требовалось доказать.

$$\text{в) } \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -\tilde{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}).$$

Поместим в точку с радиус-вектором \mathbf{r}' электрический диполь с моментом \mathbf{a} , а затем в точку с радиус-вектором \mathbf{r}'' — магнитный диполь с моментом \mathbf{b} . В предположении, что в рассматриваемой области других источников нет, имеем

$$\mathbf{j}_a^e = \mathbf{a}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{j}_a^m = 0; \quad (\text{П.30})$$

$$\mathbf{j}_b^e = 0, \quad \mathbf{j}_b^m = \mathbf{b}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}''). \quad (\text{П.31})$$

Тогда в соответствии с (П. 1)

$$\mathbf{H}^a = -\hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \quad \mathbf{E}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}. \quad (\text{П.32})$$

Подставляя (П. 30)—(П. 32) в (П. 18), записываем

$$\iiint_{V_\infty} \{ -(\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'') \mathbf{b}, \mathbf{a}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - (\hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \mathbf{a}, \mathbf{b}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')) \} dv = 0.$$

Отсюда получаем $(\mathbf{a}, \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}'') \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}') \mathbf{a})$, или в других обозначениях $\tilde{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}'') = -\tilde{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}'' | \mathbf{r}')$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что электромагнитные тензорные функции Грина для неоднородной среды удовлетворяют следующим соотношениям взаимности:

$$\hat{\mathcal{G}}_{ij}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = (-1)^{i+j} \tilde{\mathcal{G}}_{ji}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \quad (i, j = 1, 2). \quad (\text{П.33})$$

Отметим, что в случае однородной среды соотношения (П. 33) дополняются еще двумя:

$$\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'), \quad \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -\hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r} | \mathbf{r}'). \quad (\text{П.35})$$

4. Интегральные представления электрического и магнитного полей

Выведем формулы для электрического и магнитного полей в области без источников, аналогичные формулам Стрэттона — Чу для однородной среды. Воспользуемся с этой целью леммой Лоренца в форме (П. 17), а также правилами действия с тензорными функциями, приведенными в п. 5.

Рассмотрим два электромагнитных поля \mathbf{E}^a , \mathbf{H}^a и \mathbf{E}^b , \mathbf{H}^b , создаваемых произвольными источниками, расположенными вне конечной области V пространства, и следующими двумя системами источников, сосредоточенными внутри V :

$$\mathbf{j}_a^e = 0, \quad \mathbf{j}_a^m = 0, \quad \mathbf{j}_b^e = \mathbf{a}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{j}_b^m = 0. \quad (\text{П.36})$$

Поля \mathbf{E}^a , \mathbf{H}^a и \mathbf{E}^b , \mathbf{H}^b удовлетворяют внутри V соответственно следующим уравнениям:

$$\nabla' \times \mathbf{H}^a = \sigma^* \mathbf{E}^a, \quad \nabla' \times \mathbf{E}^a = i\omega \mu \mathbf{H}^a, \quad (\text{П. 37})$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}^b = \sigma^* \mathbf{E}^b + \mathbf{a}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \nabla' \times \mathbf{E}^b = i\omega \mu \mathbf{H}^b. \quad (\text{П. 38})$$

Заметим, что в соответствии с (П. 1)

$$\mathbf{E}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{11} \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{21} \mathbf{a}. \quad (\text{П.39})$$

Согласно (П. 17) имеем

$$\iint_S \{[\mathbf{E}^a \times \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a}] - [\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{H}^a]\} d\mathbf{s}' = \iiint_V (\mathbf{E}^a, \mathbf{a} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) d\mathbf{v}' \quad (\text{П. 40})$$

или, без индекса a :

$$\iint_S \{[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \hat{\mathcal{G}}_{21}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} + \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]\} d\mathbf{s}' = (\mathbf{a}, \mathbf{E}(\mathbf{r})),$$

Меняя местами \mathbf{r} и \mathbf{r}' и учитывая соотношения взаимности, записываем

$$\iint_S \{a \hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] - a \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} d\mathbf{s} = (\mathbf{a}, \mathbf{E}(\mathbf{r}')),$$

Отсюда с учетом произвольности вектора \mathbf{a} следует

$$\iint_S \{\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] - \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} d\mathbf{s} = \mathbf{E}(\mathbf{r}').$$

Обозначая $-\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_S^e$, $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{j}_S^m$ и учитывая, что правая часть (П. 40) равна нулю при $\mathbf{r} \in V'$, записываем окончательно

$$-\iint_S \{\hat{\mathcal{G}}_{11}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{j}_S^e(\mathbf{r}) + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{j}_S^m(\mathbf{r})\} d\mathbf{s} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V. \end{cases} \quad (\text{П. 41})$$

Аналогично, выбрав в качестве источников внутри V $\mathbf{j}_a^e = 0$, $\mathbf{j}_a^m = 0$, $\mathbf{j}_b^e = 0$, $\mathbf{j}_b^m = \mathbf{a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и учитывая, что в этом случае $\mathbf{E}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{12}\mathbf{a}$, $\mathbf{H}^b = -\hat{\mathcal{G}}_{22}\mathbf{a}$, последовательно записываем

$$\begin{aligned} & \iint_S -\{[\mathbf{E}^a \times \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a}] + [\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} \times \mathbf{H}^b]\} d\mathbf{s}' = \iiint_V (\mathbf{H}^a, \mathbf{a} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) d\mathbf{v}'; \\ & -\iint_S \{[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})\mathbf{a} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]\} d\mathbf{s}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}'); \\ & \iint_S \{-a \hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + a \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} d\mathbf{s} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}'); \\ & \iint_S \{\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] - \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\} d\mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{r}'); \\ & -\iint_S \{\hat{\mathcal{G}}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{j}_S^e + \hat{\mathcal{G}}_{22}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \mathbf{j}_S^m\} d\mathbf{s} = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}'), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V, \end{cases} \quad (\text{П. 42}) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5. Некоторые формулы и правила действий с диадными тензорными функциями

Определим сначала «внешнее» (диадное) произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (или диаду) формулой

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{a}\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{П. 43})$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Отметим, что для тензоров, записанных в виде (П. 43), справедливы следующие правила действий [Тай, 1971, с. 46—48]:

$$c \cdot \hat{A} = (c \cdot a) b = b (c \cdot a) = b (a \cdot c), \quad (\text{П.44})$$

$$\hat{A} \cdot c = a (b \cdot c) = (b \cdot c) a = (c \cdot b) a, \quad (\text{П.45})$$

$$\tilde{\hat{A}} = ba, \quad (\text{П.46})$$

где, как и ранее, волной обозначена операция транспонирования,

$$\hat{A} \cdot c = c \cdot \tilde{\hat{A}}, \quad (\text{П.47}) \quad \hat{A} \times c = a [b \times c], \quad (\text{П.48}) \quad c \times \hat{A} = [c \times a] b. \quad (\text{П.49})$$

Пусть d_i — орты декартовой системы координат. Тогда, очевидно, любой тензор

$$\hat{G}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{П.50})$$

можно записать в виде

$$\hat{G} = \sum_{i=1}^3 G_i d_i, \quad (\text{П.51})$$

где G_i — столбцы в представлении (П. 50). Тогда, по определению,

$$\text{div } \hat{G} = \nabla \cdot \hat{G} = \sum_{i=1}^3 (\nabla \cdot G_i) d_i, \quad (\text{П.52})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \hat{G} &= \nabla \times \hat{G} = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times G_i] d_i = \\ &= d_1 \left(\frac{\partial \tilde{G}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial z} \right) + d_2 \left(\frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{G}_3}{\partial x} \right) + d_3 \left(\frac{\partial \tilde{G}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.53})$$

где \tilde{G}_i — вектор-строки в представлении (П. 50).

Из (П. 46), (П. 51) и (П.53) следует также

$$\tilde{\nabla} \times \hat{G} = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times G_i] d_i = \sum_{i=1}^3 d_i [\nabla \times G_i], \quad (\text{П.54})$$

$$\nabla \times \tilde{\hat{G}} = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \tilde{G}_i] d_i, \quad (\text{П.55})$$

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\hat{G}} = \sum_{i=1}^3 d_i [\nabla \times G_i]. \quad (\text{П.56})$$

Докажем, наконец, следующую формулу для диадных функций, зависящих от двух переменных r и r' :

$$\nabla \times (\hat{G}(r | r') \cdot a(r')) = [\nabla \times \hat{G}(r | r')] \cdot a(r'), \quad (\text{П.57})$$

учитывая, что оператор ∇ действует только на координаты вектора \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{a}) &= \nabla \times \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{G}_i d_i \cdot \mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times (\mathbf{G}_i d_i) \mathbf{a}] = \sum_{i=1}^3 \{ \nabla \times \{ \mathbf{G}_i (d_i \cdot \mathbf{a}) \} \} = \\
 &= \sum_{i=1}^3 [\nabla \times (\mathbf{G}_i a_i)] = \sum_{i=1}^3 \{ \nabla a_i \times \mathbf{G}_i + a_i \nabla \times \mathbf{G}_i \} = \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_i [\nabla \times \mathbf{G}_i] = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \mathbf{G}_i] (d_i \cdot \mathbf{a}) = \\
 &= \sum_{i=1}^3 ([\nabla \times \mathbf{G}_i] d_i) \cdot \mathbf{a} = [\nabla \times \hat{\mathbf{G}}] \cdot \mathbf{a}, \text{ что и требовалось доказать.}
 \end{aligned}$$

В заключение напомним, что в соответствии с (П. 50) и (П. 51) идем-фактор \hat{I} (единичный тензор) записывается так:

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^3 d_i d_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

- Бердичевский М. Н., Жданов М. С.* Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: Недра, 1981. 327 с.
- Бицадзе А. В.* Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, № 17, с. 525—538.
- Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972. 263 с.
- Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
- Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 649 с.
- Голыздра Г. Я.* Особые точки аналитического продолжения гравитационного поля и их связь с формой возмущающих масс.— В кн.: Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. Новосибирск: Наука, 1966, с. 273—388.
- Дмитриев В. И., Фарзан Р. Х.* Метод расчета аномального электромагнитного поля от локальной неоднородности.— В кн.: Математические модели в электромагнитной разведке в геофизике. Будапешт: Изд-во Будапешт. ун-та, 1980, с. 13—29.
- Дмитриев В. И., Жданов М. С.* Методы решения обратных задач геофизики.— В кн.: Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. М.: Недра, 1982, с. 89—105.
- Жданов М. С.* О связи особых точек гравитационного и магнитного потенциалов с формой контактной поверхности.— Геология и геофизика, 1970, № 6, с. 119—122.
- Жданов М. С.* Развитие теории аналитического продолжения в криволинейных областях (двумерные потенциальные поля).— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1971, № 5, с. 114—121.
- Жданов М. С.* К проблеме аналитического продолжения двумерных потенциальных полей.— Геология и геофизика, 1973а, № 8, с. 93—97.
- Жданов М. С.* О свойствах гравитационного потенциала трехмерного однородного тела.— Геология и геофизика, 1973б, № 12, с. 96—101.
- Жданов М. С.* Разделение переменных электромагнитных полей Земли.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973в, № 6, с. 43—54.
- Жданов М. С.* Некоторые вопросы теории интерпретации гравитационных аномалий, зависящих от трех пространственных координат.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1974, № 9, с. 32—46.
- Жданов М. С.* Гравитационное поле трехмерной слоистой среды.— Геология и геофизика, 1975а, № 6, с. 112—120.
- Жданов М. С.* Вопросы теории интерпретации глубинных электромагнитных аномалий на основе методов аналитического продолжения.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975б, № 9, с. 59—73.
- Жданов М. С.* Конспект выборочных лекций по спецкурсу гравиразведки и магниторазведки. М.: МИНХ и ГП им. Губкина, 1976а. 74 с.
- Жданов М. С.* Методы преобразования и интерпретации аномалий гравитационных, магнитных и переменных электромагнитных полей Земли: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1976б. 337 с.
- Жданов М. С.* Применение аналогов интеграла типа Коши в теории интерпретации геопотенциальных полей: Препр. ИЗМИРАН № 26 (255). М., 1979. 30 с.
- Жданов М. С.* Продолжение нестационарных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1981, № 12, с. 60—69.
- Жданов М. С., Френкель М. А.* О применении обращенного продолжения нестационарных электромагнитных полей при решении обратных геоэлектрических

- задач.— В кн.: Математические методы в геоэлектрике. М.: ИЗМИРАН, 1982, с. 111—120.
- Жданов М. С., Френкель М. А.* Метод электромагнитной миграции: Препр. ИЗМИРАН № 8 (419). М., 1983а. 33 с.
- Жданов М. С., Френкель М. А.* Метод электромагнитной миграции при решении обратных задач в геоэлектрике.— ДАН СССР, 1983б, т. 271, № 3, с. 589—594.
- Заморев А. А.* Исследование двумерной обратной задачи теории потенциала.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4/5, с. 487—500.
- Заморев А. А.* Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1942, № 1/2, с. 48—54.
- Захаров Е. В., Ильин И. В.* Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде.— Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1970, № 8, с. 62—71.
- Захаров Е. В., Пименов Ю. В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
- Колбенгайер Г.* Решение пространственной прямой гравиметрической задачи при помощи интегралов типа Бицадзе.— *Contribs Geophys. Inst. Slovak Acad. Sci.*, 1976, vol. 6, N 1, p. 9—17.
- Колбенгайер Г.* О аналитическом продолжении внешнего гравитационного поля трехмерного тела во внутрь его.— In: *Geophysikalische Interpretationen — methoden.* Br.: Veda — Verfl. Slowak. Akad. Wiss., 1978, S. 89—100.
- Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
- Макагонов П. П.* Скин-эффект при ступенчатом изменении магнитного поля.— Изв. вузов. Геология и разведка, 1977, № 7, с. 134—137.
- Морс Ф. М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иност. лит., 1958. 930 с.
- Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 4-е изд. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
- Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1962. 509 с.
- Недьялков И. П.* Разделение потенциальных полей.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1965, № 12, с. 31—44.
- Оптическая голография. В-2-х т./Под ред. Г. Колфилда. М.: Мир, 1982. 733 с.
- Петрашень Г. И., Нахамкин С. А.* Продолжение волновых полей в задачах сейсмо-разведки. Л.: Наука, 1973. 170 с.
- Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
- Ситарова А.* Аналитическое продолжение гравитационного поля внутрь масс тяготения через произвольную поверхность второго порядка.— Тр. Геофиз. ин-та Словацкой акад. наук, 1977, т. 8, с. 93—103.
- Сретенский Л. Н.* Теория ньютонового потенциала. М.: ОГИЗ, 1946. 318 с.
- Страхов В. Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. I.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969а, № 8, с. 30—53.
- Страхов В. Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве. II.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969б, № 9, с. 64—96.
- Страхов В. Н.* К теории плоской обратной задачи магнитного потенциала при переменной намагниченности.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970а, № 3, с. 44—58.
- Страхов В. Н.* О состоянии и проблемах математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970б, № 5, с. 112—119.
- Страхов В. Н.* Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970в, № 9, с. 31—41.
- Страхов В. Н.* Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970г, № 12, с. 32—44.
- Страхов В. Н.* Об аналитическом продолжении двумерных потенциальных полей в произвольные области нижней полуплоскости, примыкающие к оси OX .— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970д, № 6, с. 35—52.

- Страхов В. Н.** Сеточные методы аналитического продолжения потенциальных полей с использованием конформных решеток.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1971а, № 10, с. 44—59.
- Страхов В. Н.** К теории аналитического продолжения двумерных потенциальных полей методом конформных решеток.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1971б, № 11, с. 34—39.
- Страхов В. Н.** О состоянии и проблемах геологической интерпретации данных гравитационных и магнитных наблюдений.— В кн.: Разведочная геофизика СССР на рубеже 70-х годов. М.: Недра, 1974, с. 113—121.
- Стрэттон Дж.** Теория электромагнетизма. М.: Гостоптехиздат, 1948. 539 с.
- Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.** Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. 207 с.
- Тимошин Ю. В.** Импульсная сейсмическая голография. М.: Недра, 1978. 286 с.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
- Фелсен Л., Маркувиц Н.** Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 547 с.
- Франк Ф., Мизес Р.** Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1937. 998 с.
- Фукс Б. А., Шабат Б. В.** Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. 3-е изд. М.: Наука, 1964. 387 с.
- Хенл Х., Мауэ П., Вестфаль К.** Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
- Цирульский А. В.** О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 7, с. 1072—1075.
- Цирульский А. В., Сиротин М. И.** К вопросу об аналитическом продолжении логарифмического потенциала.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1964, № 1, с. 105—109.
- Цирульский А. В.** О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1964, № 11, с. 1646—1693.
- Цирульский А. В.** О единственности решения обратной задачи теории потенциала.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969, № 6, с. 60—65.
- Bateman H.** Some integral equation of potential theory.— J. Appl. Phys., 1946, vol. 17, N 2, p. 91—108.
- Berkhout A. T.** Seismic migration. Amsterdam etc.: Elsevier, 1980. 339 p.
- Chapman S., Bartels J.** Geomagnetism. Oxford: Univ. press, 1940, vol. 2, sect. 22. 10, p. 544—1049.
- Harrington R. F.** Time harmonic electromagnetic fields. N. Y.: McGraw-Hill, 1961. 480 p.
- Hartman O.** Behandlung lokaler erdmagnetischer Felder als Randwertaufgabe der Potentialtheorie.— Abh. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1963, H. 9, S. 3—50.
- Kertz W.** Modelle für erdmagnetisch induzierte elektrische Ströme im Untergrund.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1954, Abt. IIa, S. 101.
- Siebert M., Kertz W.** Zur Zerlegung eines lokalen erdmagnetischen Feldes in äueren und inneren Anteil.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1957, Abt. IIa, S. 87—112.
- Siebert M.** Die Zerlegung eines lokalen erdmagnetischen Feldes in äueren und inneren Anteil mit Hilfe des zweidimensionalen Fourierrtheorems.— Abh. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1958, H. 4, S. 33.
- Siebert M.** Die Zerlegung eines zweidimensionalen Magnetfeldes in äueren und inneren Anteil mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.— Ztschr. Geophys., 1962, Bd. 28, S. 231—236.
- Siebert M.** Ein Verfahren zur unmittelbaren Bestimmung der vertikalen Leitfähigkeitsverteilung im Rahmen der erdmagnetischen Tiefensondierung.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1964, N 2, S. 25—35.
- Tai C. T.** Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. Scrahton (Pa): Intext, 1971. 246 p.
- Vargova E.** Solution of the direct inhomogeneous magnetic problem by means of analytical four-vectors.— Contribs Geophys. Inst. Slovak Acad. Sci., 1977, vol. 8, p. 63—67.

- Vesttne E. H., Davids N.* Analysis and interpretation of geomagnetic anomalies.—*Terr. Mag.*, 1945, vol. 50, p. 21.
- Wavre R.* Sur le probleme inverse de la theorie de potential et les Function harmoniques multifformes.—*Comment. math. helv.*, 1934, vol. 6, p. 317—327.
- Weaver J. T.* On the separation of local geomagnetic fields into external and internal parts.—*Ztschr. Geophys.*, 1964, Bd. 30, S. 29—36.
- Weidelt P.* Electromagnetic induction in three-dimensional structures.—*J. Geophys.*, 1975, vol. 41, N 1, p. 85—109.
- Zhdanov M. S.* Cauchy integral analogues for the separation and continuation of electromagnetic fields within conducting matter.—*Geophys. Surv.*, 1980a, vol. 4, p. 115—136.
- Zhdanov M. S.* Use of Cauchy integral analogs in the geopotential field theory.—*Ann. géophys.*, 1980b, t. 36, N 4, p. 447—458.
- Zhdanov M. S., Frenkel M. A.* The solution of the inverse problems on the basis of the analytical continuation of transient EM-field in the reverse time.—*In: 6th Workshop on EM-induction in the Earth and Moon. Victoria (Canada): Univ. Victoria, 1982, p. 10.*
- Zhdanov M. S., Golubev N. G., Spichak V. V., Varentsov Iv. M.* The construction of effective methods for electromagnetic modelling.—*Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 1982, vol. 68, p. 589—607.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

3

Раздел первый

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ В ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Глава 1. Интеграл типа Коши	6
1. Определение интеграла типа Коши .	6
2. Основные свойства интеграла типа Коши	11
3. Интегральные преобразования Коши и Гильберта	22
Глава 2. Представления плоских геопотенциальных полей в виде интеграла типа Коши	29
4. Плоские потенциальные поля и их уравнения .	29
5. Логарифмические потенциалы и интеграл типа Коши	34
6. Комплексные напряженность и потенциал плоского поля	40
7. Непосредственное решение уравнения комплексной напряженности поля	45
8. Представление гравитационного поля в виде интеграла типа Коши	49
9. Представление постоянного магнитного поля в виде интеграла типа Коши	59
Глава 3. Методы разделения плоских полей .	63
10. Разделение геопотенциальных полей на внешнюю и внутреннюю части на основе спектральных разложений	63
11. Метод Кертца — Зиберта	67
Глава 4. Аналитическое продолжение плоского поля	73
12. Основные принципы аналитического продолжения	73
13. Аналитическое продолжение интеграла типа Коши через линию интегрирования	82
14. Аналитическое продолжение плоского магнитного поля внутрь области, занятой намагниченными массами	88
15. Аналитическое продолжение плоского гравитационного поля внутрь области, занятой гравитирующими массами	94
16. Интегральные методы аналитического продолжения плоских полей	100

Раздел второй

АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНОГО ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Глава 5. Трехмерные аналоги интеграла типа Коши	118
17. Трехмерный аналог интегральной формулы Коши	118
18. Определение и свойства трехмерного аналога интеграла типа Коши	128
	325

	19. Интегральные преобразования лапласовых векторных полей	136
	20. Матричная форма записи аналогов интеграла типа Коши	144
Глава 6.	Применение аналогов интеграла типа Коши в теории трехмерного геопотенциального поля	148
	21. Ньютонов потенциал и трехмерный аналог интеграла типа Коши	148
	22. Представление гравитационного поля в виде аналога интеграла типа Коши	154
	23. Представление постоянного магнитного поля в виде аналога интеграла типа Коши	169
	24. Обобщенный метод Кертца — Зиберта разделения трехмерных геопотенциальных полей	175
Глава 7.	Аналитическое продолжение трехмерного геопотенциального поля	179
	25. Основные принципы аналитического продолжения лапласова поля	179
	26. Аналитическое продолжение трехмерного аналога интеграла типа Коши через поверхность интегрирования	187
	27. Аналитическое продолжение трехмерного гравитационного поля внутрь однородного материального тела	192
	28. Продолжение гравитационного и магнитного полей внутрь области с произвольным аналитическим распределением источников поля	201
	29. Интегральные методы аналитического продолжения трехмерных лапласовых полей	205

Раздел третий

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА СТРЭТТОНА — ЧУ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 8.	Интегралы типа Стрэттона — Чу	211
	30. Уравнения электромагнитного поля	211
	31. Интегрирование уравнений произвольного векторного поля	219
	32. Интегральные формулы Стрэттона — Чу	222
	33. Интегралы типа Стрэттона — Чу	236
	34. Обобщение формул Стрэттона — Чу на неоднородные среды	246
	35. Интегральные преобразования электромагнитных полей	257
	36. Методы разделения электромагнитных полей Земли	266
Глава 9.	Аналитическое продолжение электромагнитного поля	278
	37. Общие принципы аналитического продолжения электромагнитного поля	273
	38. Аналитическое продолжение электромагнитного поля внутрь геоэлектрических неоднородностей	282
	39. Методы аналитического продолжения электромагнитного поля	287
Глава 10.	Миграция электромагнитного поля	295
	40. Определение понятия миграции	295
	41. Свойства миграционных полей	301
Приложение.	Электромагнитные функции Грина для неоднородных сред и их свойства	313
Литература		321