KURT ARNOLD

METHODEN
DER SATELLITENGEODÄSIE

AKADEMIE–VERLAG · BERLIN · 1970

КУРТ АРНОЛЬД

МЕТОДЫ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИИ

Перевод с немецкого
И. И. Краснорылова и *К. Д. Сергазиной*

Под редакцией *А. Н. Кузнецова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА» · Москва · 1973

УДК 528 : 629.195 (808.03)

Арнольд К. Методы спутниковой геодезии. Перевод с немецкого под редакцией доктора техн. наук профессора Кузнецова А. Н. М., «Недра», 1973. 224 с.

Монография К. Арнольда посвящена самому молодому разделу геодезической науки — спутниковой геодезии.

Автор рассматривает основные проблемы спутниковой геодезии, используя результаты, полученные из наблюдений спутников учеными разных стран.

В книге содержатся необходимые сведения из небесной механики, рассматриваются методы наблюдений и данные о применяющейся для этих целей аппаратуре, излагаются координатная проблема, вопросы составления эфемерид и вычисления орбит.

Основное внимание автор сосредоточивает на геометрическом и динамическом методах спутниковой геодезии, позволяющих решать многие вопросы, связанные с изучением формы и размеров Земли и параметров ее гравитационного поля. Делается попытка интерпретировать результаты спутниковой геодезии.

Книга представит несомненный интерес для геодезистов, гравиметристов, астрономов, инженерно-технических работников и может быть использована в качестве учебного пособия студентами и аспирантами соответствующих специальностей.

Таблиц 16, иллюстраций 51, список литературы — 159 названий.

$А \frac{0271-198}{043(01)-73}$ 131—73

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы на основе использования наблюдений спутников для целей геодезии появилась быстро развивающаяся область науки — спутниковая геодезия. Благодаря новым возможностям теперь могут быть решены задачи, которые было трудно или даже невозможно решить прежними методами геодезии. В книге освещены главным образом основные методы, применяющиеся в спутниковой геодезии. Отдельные числовые результаты, которые были получены в последнее время этими методами, изложены более кратко.

Из-за большого числа введенных сокращенных обозначений нельзя было избежать отдельных случаев, когда для двух различных понятий применялся одинаковый символ. Однако эти понятия настолько далеки друг от друга, что едва ли могут возникнуть недоразумения.

Я благодарю своих коллег доктора Д. Шоепса и доктора Л. Штанге за просмотр рукописи и полезные замечания.

Потсдам, декабрь 1968 **Автор**

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРЕВОДУ

После запуска 4 октября 1957 г. первого в мире советского искусственного спутника Земли широкое развитие получили наряду с классическими методами решения геодезических задач новые методы. В основе этих методов лежит использование наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) и других космических объектов.

Применение спутникового геометрического метода позволило за короткий срок создать геодезические построения с расстояниями между пунктами в несколько тысяч километров и установить связь между разными геодезическими системами.

Спутниковый динамический метод позволяет определять параметры, характеризующие внешнее гравитационное поле Земли, и создавать геодезические построения в единой системе координат с началом в центре масс Земли. В дальнейшем по мере улучшения теорий движения и повышения точности наблюдений ИСЗ значение динамического метода будет увеличиваться.

Следует отметить большую перспективность методов спутниковой геодезии в будущем для решения следующих геодезических задач.

Повышение точности лазерных наблюдений создаст предпосылки для использования наблюдений спутников с целью изучения дрейфа континентов и движения земных полюсов. Особенно полезными могут оказаться при этом стационарные ИСЗ, оснащенные уголковыми отражателями. Для решения этой задачи можно использовать также отражатели, установленные на Луне.

Применение спутникового динамического метода позволит исследовать возможные изменения гравитационного поля Земли во времени, а также определить фигуру геоида в океанах, причем для успешного решения последней задачи потребуются высотомеры, обеспечивающие высокую точность.

Обобщением и развитием задач и методов спутниковой геодезии является использование искусственных спутников Луны и планет для изучения этих объектов геодезическими методами: создание опорных сетей, определение параметров гравитационных полей и формы, составление топографических и специальных карт.

Монография К. Арнольда «Методы спутниковой геодезии» была издана в ГДР в 1970 г. В книге (главы 2—4) приведены сведения из теории движения ИСЗ. Достаточно подробно рассмотрены факторы, вызывающие возмущения в движении искусственных спутников. Теория возмущений излагается в основном с использованием разработок Каулы, Козаи и Мерсона. Приведены сведения о возмущениях в движении реальных спутников.

Аппаратуре и методам наблюдений ИСЗ посвящена в книге гл. 5. Здесь же приведены данные о спутниках, применявшихся для решения геодезических задач, а также формулы для расчета яркости пассивных искусственных спутников. Эти формулы могут быть использованы при проектировании искусственных спутников.

Подобный подход, при котором теоретические исследования сочетаются с конкретными практическими рекомендациями, имеет место и в следующих главах. Так, например, в гл. 6, посвященной координатной проблеме, системам измерения времени и редукционным вычислениям, даны практические рекомендации по обработке фотографических наблюдений, расчету эфемерид и условий видимости ИСЗ.

Центральное место в монографии занимают главы 8 и 9.

В гл. 8 подробно характеризуется геометрический метод, а в гл. 9 — динамический. Приводятся результаты, полученные этими методами в разных странах, а также при проведении международных экспериментов.

В настоящее время ясно, что наиболее ценные выводы при изучении фигуры и гравитационного поля Земли могут быть получены в результате совместного использования наземных определений (астрономических, геодезических и гравиметрических) и спутниковых данных. Этому вопросу автор уделяет значительное внимание в главах 9 и 10.

Развитие спутниковой геодезии связано с получением научной информации, которая может быть использована при решении задач геодезии, теории фигуры Земли, физики Земли, физики атмосферы и других разделов науки. В этой связи особый интерес представляет гл. 11 монографии, в которой автором сделана попытка интерпретировать полученные в спутниковой геодезии результаты, оценить их значение для смежных отраслей знаний.

Приведенная в книге библиография не отличается полнотой, поэтому можно рекомендовать использовать библиографию (около 800 наименований) к обзорной статье Л. П. Пеллинена «Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов». «Итоги науки», «Исследование космического пространства 1970». М. 1972.

Есть все основания полагать, что книга К. Арнольда окажется полезной для геодезистов, астрономов, гравиметристов и других инженерно-технических работников, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

И. Красноpылов

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A, B, C — главные моменты инерции Земли
A — площадь среднего поперечного сечения спутника
A — азимут, отсчитанный от направления на север
C_D — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления
C_{lm} — коэффициенты сферических функций
D — ослабление света атмосферой в зените
E — эксцентрическая аномалия
G — среднее значение силы тяжести на поверхности Земли
H — шкала высот
I — наклон лунной орбиты к эклиптике
$J_s(x)$ — функции Бесселя
I_0 — солнечная постоянная
J_l — коэффициент зональной сферической функции порядка l
K — коэффициент (светового давления)
L — аргумент широты
M — масса Земли
M — средняя аномалия
N — ондуляции геоида
Q — исходный пункт на поверхности Земли
R — расстояние станции наблюдений от центра масс Земли
R_E — большая полуось общего земного эллипсоида
$\bar{R}_E$ — малая полуось общего земного эллипсоида
R_S — радиус спутника
S — положение спутника
S_{lm} — коэффициенты сферических функций
T — возмущающий потенциал
T — период обращения спутника
U — нормальный потенциал
V — гравитационный потенциал
$\bar{V}$ — главный член разложения V в случае шаровой симметрии
W — потенциал силы тяжести
X, Y, Z — координаты станции в системе, связанной с телом Земли. Ось Z направлена к среднему полюсу. Плоскость XZ — плоскость гринвичского меридиана
X', Y', Z' — земная система координат. Плоскость $X'Y'$ — плоскость горизонта станции наблюдений. Ось X' направлена на восток, ось Y' — на север, ось Z' — в зенит.
Z — зенитное расстояние
a — большая полуось орбиты спутника
$a_☾$ — большая полуось орбиты Луны
b — малая полуось орбиты спутника

c — скорость света
c^* — коэффициент поглощения
e — эксцентриситет орбитального эллипса
f — фокусное расстояние
f — сжатие Земли
f — частота
$\bar{f} = \sin^2 i$
f^* — сжатие земного экватора
Δg — аномалия силы тяжести
$[\Delta g]_q$ — среднее значение аномалии силы тяжести для площади F_q
Δg_F — аномалия в свободном воздухе
$\mathbf{g}$ — единичный вектор между соседними станциями
h — высота над уровнем моря; высота
i — наклон орбиты
$i_{☾}$ — наклон лунной орбиты к земному экватору
$j — j = \sqrt{-1}$
$\varkappa$ — гравитационная постоянная
m — масса спутника
$m_{☾}$ — масса Луны
m — яркость (звездная величина)
n — среднее движение спутника
$\bar{n}$ — среднее значение среднего движения спутника
$\mathbf{n}$ — перпендикулярный вектор
$n_{☾}$ — среднее движение Луны
$n_{\odot}$ — среднее движение Солнца
p — фокальный параметр
p — фазовый угол спутника
p — вес при уравнивании
p_1, p_2, p_3 — постоянные интегрирования
q_1, q_2, q_3 — постоянные интегрирования
r — расстояние спутника от центра масс Земли
r^* — астрономическая рефракция
$\mathbf{r}_{☾}$ — геоцентрический радиус-вектор Луны
s — расстояние между станцией наблюдений и спутником
t — время
t — ускорение под действием светового давления Солнца
s_1, s_2, s_3 — геоцентрические координаты Солнца
$\bar{v}$ — орбитальная скорость спутника
v — случайная ошибка
v_l, v_q — ошибки вдоль и поперек следа спутника
$x, y, z; x_S, y_S, z_S$ — координаты спутника в пространственной астрономической системе координат
$x^\circ, y^\circ, z^\circ$ — пространственные координаты спутника в системе, отнесенной к эпохе 1950
x', y', z' — пространственные координаты спутника в истинной астрономической системе на начальный момент ($t = T'$)
x'', y'', z'' — пространственные координаты спутника в истинной астрономической системе для текущего момента времени $t = T''$
x''', y''', z''' — пространственные координаты спутника; ось z''' — перпендикулярна к плоскости орбиты спутника, ось x''' — направлена в восходящий узел орбиты
x'''', y'''', z'''' — пространственные координаты спутника; ось z'''' — перпендикулярна к плоскости орбиты спутника, ось x'''' — направлена в перигей орбиты
$x_{☾}, y_{☾}, z_{☾}$ — геоцентрические координаты Луны
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты снимка
$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ — тангенциальные координаты

$\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{z}^*$ — координатная система в плоскости снимка ($\bar{y}^*$ — горизонтальная ось)
Γ — коэффициент
θ — звездное время
Ω — восходящий узел
α — прямое восхождение
γ — нормальная сила тяжести
γ_E — нормальная сила тяжести на экваторе
$\gamma^c_{lm}, \gamma^s_{lm}, \gamma_q$ — коэффициенты
δ — склонение
ζ — высота геоида над референц-эллипсоидом
ϑ — плотность
λ — географическая долгота к востоку от Гринвича
$\bar{\lambda}$ — разность фаз Солнца (суточный эффект)
σ — поверхность шара единичного радиуса
φ' — географическая широта
φ — геоцентрическая широта
φ^* — $\sin \varphi^* = e$
ω_E — угловая скорость вращения Земли
ω — аргумент перигея
ψ — сферическое расстояние между пунктами S и Q
ξ, η — составляющие уклонений отвеса
$\underline{\xi}, \bar{\eta}$ — координаты спутника в плоскости орбиты
$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ — коэффициенты
τ — R_E/r.
$\varkappa$ — коэффициент поглощения атмосферы
ε — наклон эклиптики

1. ВВЕДЕНИЕ

Если наблюдения искусственных спутников Земли приобрели для геодезии особое значение в последние годы, то наблюдения планет, их спутников и Луны в геодезии не являются новыми.

Уже много лет назад определяли разности географических долгот из наблюдений затмений четырех ярких спутников Юпитера при вступлении их в тень Юпитера. Момент времени затмения спутника Юпитера определяли из двух далеко отстоящих друг от друга пунктов наблюдений. Так же как при определении в этих двух пунктах соответствующего местного времени из наблюдений звезд, получают из наблюдений спутников Юпитера разность местных времен обоих пунктов, соответствующую разности долгот между ними. Для оценки точности этих определений долготы следует отметить, что полный оборот Земли вокруг своей оси происходит за 86 400 сек. При окружности Земли 40 000 км одна секунда соответствует приблизительно 460 м. Итак, если ошибка в моменте наблюдений составляет одну секунду, то этим вызывается смещение пункта на экваторе примерно на полкилометра в восточном или западном направлениях. В более высоких широтах эту ошибку из-за сближения меридианов нужно умножать на косинус широты и она становится меньше.

Наблюдения покрытий звезд Луной, проведенные за последние десятилетия с помощью современных средств, в принципе похожи на методы спутниковой геодезии. Если при этом наблюдать исчезновение звезды за лунным диском, то можно определить положение пункта наблюдений, если известны координаты центра и диаметр Луны. Так как топография Луны известна сравнительно мало и поэтому представляет собой значительный источник ошибок, рекомендуют для уменьшения влияния этих ошибок выбирать две станции наблюдений так, чтобы при наблюдениях с них звезда скрывалась за одной и той же точкой лунного края. Если положение одной станции известно, а другой нет, то получают, таким образом, положение второй станции относительно первой. Если оба пункта наблюдений удалены друг от друга только на несколько сотен километров, то методом, при котором звезда исчезает всегда в одном месте за лунным диском, можно достичь точности до ± 20 м на поверхности Земли. Если же хотят преодолеть большие расстояния в несколько тысяч километров, то достигаемая точность падает в лучшем случае приблизительно до ± 120 м, потому что тогда действует дополнительный источник ошибок, обусловленный либрацией Луны. Помочь здесь может только дальнейшее улучшение знаний топографии Луны (Хирозе [8]).

Из подобных наблюдений О'Киф и Андерсон [12] смогли получить значение для большой полуоси общего земного эллипсоида $R_E = 6\,378\,448$ м.

Для геодезических целей можно использовать также наблюдения серпа Солнца при солнечном затмении. В последние десятилетия были организованы многочисленные экспедиции по наблюдению солнечных затмений. Следует упомянуть об экспедициях Банахевича в 1927 г., Бонсдорфа в 1945 г., Хирвонена и Куккамяки в 1947 г. [10] и японской экспедиции по наблюдению солнечного затмения Дамбара в 1948 г. [6]. Точность определения местоположения при этом составляла от 120 до 300 м. Лучшие результаты из наблюдений солнечных затмений можно будет получить лишь после дальнейших исследований топографии Луны.

Методы наблюдений были подробно описаны Берротом и Хофманном [3], Меллером [11].

Гельмерту [7] удалось при изучении орбитального движения Луны также получить значение для большой полуоси общего земного эллипсоида. Этот метод заключается в следующем. Из приблизительно кругового движения Луны вокруг Земли можно вывести величину центробежной силы, действующей на Луну. Она должна быть равна силе притяжения, с которой Земля действует на Луну. Таким образом можно узнать гравитационную силу Земли в районе орбиты Луны. Зная, что притяжение Земли во внешнем пространстве уменьшается обратно пропорционально квадрату удаления от центра Земли, можно определить из орбитального движения Луны по ее расстоянию от Земли и вращательному движению Земли силу тяжести на поверхности последней. Если найденную, таким образом, величину силы тяжести на земной поверхности сопоставить с величиной, найденной из наземных наблюдений с помощью маятников и гравиметров, то получим искомое соотношение. Наряду с большой полуосью общего земного эллипсоида R_E получают также параллакс Луны, среднее ускорение силы тяжести на поверхности Земли и угловую скорость Луны. Таким образом, можно определить R_E из других трех параметров. Гельмерт по двум различным вариантам нашел $R_E = 6\,378\,830$ м и $R_E = 6\,381\,460$ м; в результате дальнейших исследований Гельмерта $R_E = 6\,378\,743$ м, а Иордана-Эггерта 6 378 343 м.

Из движения Луны по своей орбите вокруг Земли пытались получить сжатие Земли, которое вызывает главным образом периодические возмущения в долготе и широте Луны, как указывал уже Лаплас. Амплитуда возмущений в обоих случаях приблизительно равна $8''$. Возмущение в долготе пропорционально синусу долготы восходящего узла лунной орбиты, а возмущение в широте — синусу долготы

Луны. Амплитуда линейно зависит от второй зональной гармоники поля силы тяжести Земли, по которой можно вычислить сжатие общего земного эллипсоида. В 1802 г. Лаплас определил из возмущений долготы и широты Луны значения сжатия Земли, равные соответственно $f = 1 : 305{,}05$ и $f = 1 : 304{,}6$. В 1884 г. Гельмерт путем уравнивания нашел лучшее в то время значение $f = 1 : 297{,}8 \pm \pm 2{,}2$, т. е. величину, которая ближе к современным результатам, хотя и ее средняя ошибка была еще очень велика.

Описанные выше методы не удовлетворяют всем современным требованиям, хотя они очень важны и ценны. Методы же спутниковой геодезии позволяют получать не только более точные результаты, но и открывают пути для дальнейших новых исследований. Преимущество заключается прежде всего в том, что искусственные спутники Земли намного ближе к наблюдателю, чем, например, Луна. При среднем удалении Луны порядка 384 400 км ошибка наблюдений в 0,01″ вызывает линейное смещение пункта на Земле в 20 м. При наблюдении искусственных спутников Земли имеется преимущество, объект удален приблизительно только на 1000 км, и ошибка наблюдений в 1″ вызывает смещение пункта только на 5 м.

При наблюдении Луны, как отмечалось ранее, возникают трудности, связанные с учетом ее топографии. Искусственные спутники Земли могут рассматриваться при геодезических наблюдениях как точкообразные небесные тела, за исключением больших спутников-баллонов диаметром от 30 до 40 м, при наблюдении которых для приведения к геометрическому центру необходимо вводить поправку за фазу. Эту поправку можно получить с необходимой точностью. Кроме того, параметры орбит искусственных спутников могут быть заданы такими, чтобы при решении научных задач достигалась наибольшая польза. Для геодезии особенно важно иметь орбиты с разным углом наклона к экватору и разными радиусом и эксцентриситетом, так как только в этом случае можно разделить искомые параметры в определяемой математической системе. Наконец, искусственные спутники можно снабдить техническими устройствами, которые значительно повышают их значение для науки. К ним относятся, например, лампы для излучения сигналов-вспышек, трипельпризмы — как рефлекторы для измерения расстояния с помощью лазера и передатчики для отслеживания орбиты с помощью радиоустройств.

Близкие искусственные спутники при движении по орбите испытывают намного бо́льшие возмущения от гравитационного поля Земли, чем Луна. Например, при определении сжатия большое значение имеют возмущения орбиты, вызванные второй зональной гармоникой. Эти возмущения уменьшаются в $\frac{1}{r^{3,5}}$ раз, где r — расстояние от центра Земли. Для орбиты спутника, проходящей приблизительно в 1000 км над поверхностью Земли, вековые возмущения, вызванные этой зональной гармоникой, приблизительно в 1 000 000 раз больше, чем на лунной орбите. Эта вторая зональная гармоника поля силы тяжести Земли вызывает большие возмущения линий ацсид и узлов орбиты спутника, эти возмущения линейно зависят от времени и могут достигать у спутников, применяемых в геодезии, за один день приблизительно от 4 до 6°, или от 14 000 до 22 000″. Эти возмущения можно определить с точностью до нескольких секунд и поэтому с небольшой относительной ошибкой. Напротив, амплитуды возмущений в долготе и широте Луны, составляющие приблизительно 8″, известны лишь с точностью до нескольких знаков. Если Гельмерт [7] для величины $1 : f$ достиг ошибки $\pm 2{,}2$, то Бухар [5] смог определить из немногих визуальных наблюдений средней точности второго советского спутника в 1958 г. $1 : f$ с ошибкой $\pm 0{,}18$, а сейчас эту величину знают со средней квадратической ошибкой приблизительно в $\pm 0{,}005$.

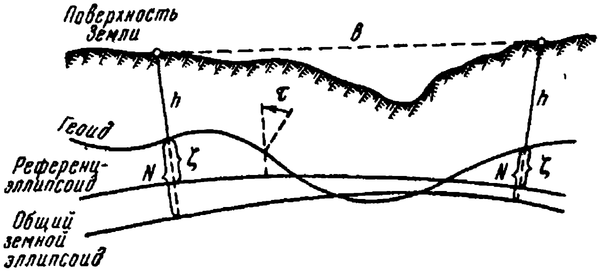


Рис. 1. τ — уклонение отвесной линии

При определении параметров гравитационного поля Земли наблюдают прежде всего спутники на высотах между 500 и 1500 км.

Следует отметить, что методы, основанные на наблюдениях искусственных спутников Земли, позволяют достичь не только более высокой точности, но и методически они дают бо́льшие возможности, чем классические геодезические.

Триангуляции, проложенные при геодезических работах, могут покрыть только континенты. Если их скомбинировать с астрономическими определениями уклонений отвеса и провести астрономическое нивелирование, то это даст возможность определить пространственное трехмерное положение тригонометрических пунктов, например, относительно поверхности относимости, в качестве которой выбирают соответствующий референц-эллипсоид (его можно выбрать произвольно внутри определенных границ). Высоты пунктов над референц-эллипсоидом, высоты геоида ζ (рис. 1) получаются как вертикальные координаты из астрономического нивелирования. Горизонтальные координаты определяют в основном из триангуляции, причем базисы и другие наблюдения редуцируются на референц-эллипсоид методом проектирования. Азимутальное ориентирование этой системы, ограниченной континентом, представляет принципиальные трудности. А именно, если хотят редуцировать на референц-эллипсоид исходный азимут, то для этого нужно знать для исходного пункта составляющую уклонения отвеса в плоскости первого вертикала в соответствующем уравнении Лапласа. Но астрономические наблюдения позволяют определить только относительные уклонения отвеса; необходимые здесь абсолютные уклонения отвеса в исходном пункте можно определить только гравиметрическим методом по формуле Венинг-Мейнеса. Хейсканен — Венинг-Мейнес, Арнольд [1]

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} &= -\frac{1}{2\pi\rho''}\iint \left(\Delta g_F + KG\left(\Delta g_F\right)\right) V_M(\psi) \begin{Bmatrix}\cos A \\ \sin A\end{Bmatrix} d\psi\, dA \\ KG\left(\Delta g_F\right) &= -\frac{\Delta h}{2\pi}\iint \frac{\Delta g_F - \Delta g_{F_0}}{r^3}\cdot d\sigma \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где ψ — сферическое расстояние от исходного пункта; Δh — превышение пункта с координатами ψ, A, для которого должны быть вычислены ξ и η по отношению к исходному.

Из-за многочисленных гравиметрически неизученных областей Земли эти величины абсолютных уклонений отвеса можно вычислить лишь в очень редких случаях с точностью до $\pm 1''$, так как в формуле (1) нужно интегрировать по всей земной поверхности. Во многих случаях ошибки уклонений отвеса, полученных гравиметрическим путем, составляют $\pm 3''$. Это приводит к соответствующей ошибке ориентирования сети или, другими словами, к сдвигу сети в восточном или западном направлении, который может достичь приблизительно 100 м.

Нужно учитывать и то, что в триангуляции соединены друг с другом многочисленные треугольники с длинами сторон только от 10 до 20 км. Ошибки наблюдений растут от одного треугольника к другому. Это касается не только случайных, но и систематических ошибок, влияние которых на расстояниях больших 1000 км нельзя оценить надежно. Перекрывающая редкая система, которую позволяют образовать спутники, может служить для больших сетей треугольников хорошим контролем. При таких методах геодезического определения пунктов из спутниковых наблюдений должны быть приблизительно равны расстояния между соседними станциями наблюдений на Земле и высоты спутников, чтобы получался благоприятный угол засечки.

Гравиметры и маятниковые приборы, несомненно, являются хорошими средствами при определении силы тяжести на поверхности Земли, но ими можно измерять только в отдельных пунктах континентов. Подобным образом в океанах можно выполнить измерения с помощью маятниковых приборов и морских гравиметров в отдельных пунктах или по профилям. При измерениях силы тяжести в открытых океанах и особенно в морях южного полушария при отсутствии радионавигации можно получить результат с ошибками от ± 5 до ± 7 мгл. Причиной этого в основном является неудовлетворительная точность навигации. Лишь по большому числу гравиметрических пунктов, покрывающих бóльшую часть земной поверхности, можно получить общие формы уровенной поверхности потенциала Земли. Если измерения выполнены на всей земной поверхности, можно определить уклонения отвеса по формуле Вениcг-Мейнеса и ондуляции геоида N по формуле Стокса

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{R_E}{4\pi G}\iint \Delta g_F S_T(\psi)\,d\sigma \\ S_T(\psi) &= \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\psi + 1 - 6\sin\frac{1}{2}\psi - 5\cos\psi - \\ &\quad - 3\cos\psi\ln\left[\sin\frac{1}{2}\psi\left(1+\sin\frac{1}{2}\psi\right)\right] \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где S_T (ψ) — функция Стокса.

Если задачей геодезии является определение абсолютных положений пунктов на поверхности относительно центра масс Земли, и если ставится цель определить эквипотенциальную поверхность поля силы тяжести Земли и ее ортогональные сечения, то эти проблемы нельзя решить классическими методами прямым способом. Это можно показать, руководствуясь краевой задачей физической геодезии. Для этого вводят три системы наблюдаемых величин: разности потенциалов $W - W_0$, полученные из гравиметрически редуцированного на уровень моря нивелирования, нормальную производную потенциала или ускорение силы тяжести на поверхности Земли и прямолинейные пространственные взаимные расстояния опорных пунктов на поверхности Земли или сферические расстояния между ними. Если ввести эти данные в формулу Грина теории потенциала, то можно показать, что с их помощью однозначно определяется геометрия земной поверхности так же, как потенциал поля во внешнем пространстве. Эту проблему можно решить только приближенно, в частности, для решения задачи необходимы такие данные, которые распределены по всей земной поверхности. Если в этой краевой задаче вводят совместно геометрические и динамические данные, то при практических работах рекомендуется рассматривать отдельно геометрическую и динамическую часть методом приближений. При этом в геометрической задаче (триангуляции) должны быть известны динамические величины, т. е. ондуляции геоида, только приближенно, а в динамической задаче при определении уклонений отвеса и определении геоида по аномалиям силы тяжести необходимо знать (в основном только приближенно) плановое положение гравиметрических пунктов.

Применяя спутниковые методы, можно уже из дюжины станций, распределенных по всей Земле, построить глобальную систему с абсолютными координатами, отнесенными к центру масс Земли и определить общие формы геоида на всей земной поверхности. В эту редкую пространственную систему с длинами сторон в несколько тысяч километров позже можно вставить триангуляции исходя из принципа от «общего к частному», который много раз оправдывал себя в геодезии. Эти методы дают абсолютные значения, потому что орбиты искусственных спутников Земли в соответствии с первым законом Кеплера являются эллипсами, у которых один из фокусов — центр масс Земли. Используя классические методы, можно получить форму уровенных поверхностей в абсолютной системе координат только тогда, когда известны динамические и геометрические величины по всей поверхности Земли. Преимущество методов спутниковой геодезии заключается в том, что результаты наблюдений спутников и все полученные отсюда параметры даны в абсолютной системе звездных координат. Эту систему можно легко перевести с помощью известных матриц вращения в абсолютную и связанную с Землей систему, в которой плоскость XY совпадает с экватором, а осью Z является ось вращения Земли.

1.1. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold, K.: Strenge Theorie der absoluten Lotabweichungen als Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere. Veröff. Geodät. Inst. Potsdam, Nr. 13 (1959).

2. Arnold, K.: Eine einfache Ableitung des gravimetrischen Zusatzgliedes. Gerl. Beitr. Geophysik, 74 (1965) H. 3.

3. Berroth, A., Hofmann W.: Kosmische Geodäsie. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1960.
(Русский перевод: А. Беррот, В. Хофманн. Космическая геодезия. М. «Недра», 1966)

4. Buchar, E.: Determination of some Parameters of the Gravity Field of the Earth from the Rotation of the Nodal Line of Artificial Satellites. Bull. Géodésique, Paris, No. 65 (1962).

5. Buchar, E.: The Motion of the Orbital Node of Sputnik 2 (1957β) and the Oblateness of the Earth. Studia Geophysica et Geodetica, Prag, 2 (1958).

6. Dambara, T.: The Locality of the Geodetic Coordinate Derived from the Obscurity of the Solar Eclipse. Bull. of the Geographical Survey Institute Tokyo, 6 (1961).

7. Helmert, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II Teil. B. G. Teubner Verlagsges. Leipzig, 1962.

8. Hirose, H.: On the Effect of Lunar Profiles to the Geodetic Occultation Observations. IUGG Generalversammlung, 1963.

9. Hirvonen R. A.: The Motions of Moon and Sun at the Solar Eclipse of 1947, May 20 th. Veröff. d. Finn. Geodät. Inst. Helsinki Nr. 40 (1951).

10. Kukkamäki, T. J., Hirvonen, R. A.: The Finnish Solar Eclipse Expeditions to the Gold Coast and Brazil, 1947. Veröff d. Finn. Geodät. Inst., Helsinki, Nr. 44 (1954).

11. Mueller, I. I.: Introduction to Satellite Geodesy. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1964.
(Русский перевод: И. Меллер. Введение в спутниковую геодезию. М. «Мир», 1967,).

12. O'Keefe, J. A. Anderson, J. P.: The Earth's Equatorial Radius and the Distance of the Moon. Bull. Géodésique, Paris, No. 29 (1953).

2. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

2.1. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ И ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Основные законы движения искусственных спутников вокруг Земли следуют из задачи двух тел. Рассматривая движение спутника вокруг центрального тела, имеют в виду, что по сравнению с центральным телом спутник имеет несравненно меньшую массу и оказывает пренебрегаемое гравитационное воздействие на центральное тело. Если центральное тело имеет форму шара с симметричным распределением плотностей, то можно считать, что его масса сконцентрирована в одной центральной точке.

Из решения задачи двух тел следуют три закона Кеплера. Первые два Кеплер опубликовал в 1609 г., а третий — в 1619 г. Для движения спутников вокруг Земли они формулируются следующим образом.

1. *Орбита спутника — эллипс, в одном из фокусов которого находится центральное тело.*

2. *Радиус-вектор спутника (линия соединяющая центральное тело со спутником) описывает за равные промежутки времени равные площади (закон площадей).*

3. *Квадраты периодов обращения двух спутников относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

Эти кеплеровские законы будут здесь рассмотрены кратко, более обстоятельное представление может быть получено из руководств по небесной механике.

Уравнения движения получаются на основе закона всемирного тяготения Ньютона. Если ввести прямоугольную систему координат x, y, z (инерциальную) с началом в центре масс центрального тела, то эти уравнения в разложении на компоненты будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} = -kM\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -kM\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -kM\frac{z}{r^3} \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Итак, имеем одновременно три дифференциальных уравнения второго порядка. Интегрирование каждого отдельного уравнения приводит к двум постоянным интегрирования (в общем получается 6 постоянных интегрирования).

Если умножить первое уравнение (3) на y, а второе — на x и вычесть из первого уравнения второе и поступить аналогично с другими, то получится

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0.$$

Соответствующие уравнения следуют для других пар компонентов y, z и x, z.

Интегрирование приводит к

$$x\dot{y} - y\dot{x} = q_1, \quad y\dot{z} - z\dot{y} = q_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = q_3,$$

причем q_1, q_2, q_3 — постоянные. Умножив этот ряд на x, y, z получим

$$q_1 z + q_2 x + q_3 y = 0. \quad (4)$$

Это уравнение плоскости, проходящей через начало координатной системы. Спутник движется в этой плоскости, которая проходит через центр масс центрального тела.

Три параметра q_1, q_2, q_3 доставляют две из 6 постоянных интегрирования и определяют положение орбитальной плоскости в пространстве. В небесной механике для определения пространственного положения плоскости орбиты используют долготу восходящего узла Ω и угол наклона i плоскости орбиты относительно экватора (xy — плоскость) (рис. 2).

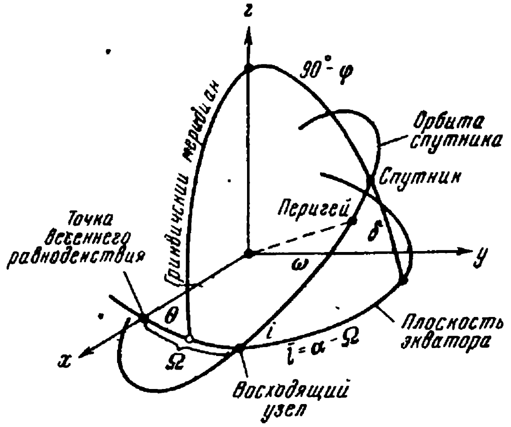


Рис. 2. Элементы орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ)

При дальнейшем рассмотрении устанавливается геометрия орбитальной кривой в этой плоскости, причем теперь нужно ввести плоскую координатную систему с координатами ξ, η.

Уравнения движения в этой системе будут

$$\ddot{\xi} = kM\frac{\xi}{r^3}, \quad \ddot{\eta} = kM\frac{\eta}{r^3}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad (5)$$

это дает

$$\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi} = 0$$

и путем интегрирования

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = p_1.$$

Если ввести полярные координаты

$$\xi = r\cos\chi, \quad \eta = r\sin\chi,$$

то следует

$$r^2\dot{\chi} = p_1. \quad (6)$$

Если dF является площадью, описанной радиусом-вектором r за бесконечно малый интервал времени dt, то получим

$$\frac{dF}{dt}=\frac{1}{2}r^2\chi^{\cdot}=\frac{1}{2}p_1,$$

таким образом,

$$F=\frac{1}{2}p_1\cdot t+p_2. \tag{7}$$

Как следует из уравнения (7), радиус-вектор спутника описывает за равные промежутки времени равные площади (второй закон Кеплера).

Из уравнений (5) следует после умножения на $2\xi^{\cdot}$ или $2\eta^{\cdot}$

$$\frac{d}{dt}\{\xi^{\cdot 2}+\mu^{\cdot 2}\}=-2\frac{kM}{r^3}(\xi\xi^{\cdot}+\eta\eta^{\cdot})=-2\frac{kM}{r^2}r^{\cdot}=2kM\left(\frac{1}{r}\right)^{\cdot},$$

а после интегрирования

$$\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2}=2\frac{kM}{r}+p_3. \tag{8}$$

Эта зависимость представляет квадрат орбитальной скорости спутника как функцию от его геоцентрического радиуса-вектора.

В полярных координатах из этого следует

$$r^{\cdot 2}+r^2\chi^{\cdot 2}=2\frac{kM}{r}+p_3. \tag{9}$$

Выражение

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\chi-\bar{\omega})}, \tag{10}$$

где p, e и ω — постоянные, является решением этого дифференциального уравнения (9). С помощью геометрической интерпретации трех постоянных интегрирования p, e, $\bar{\omega}$ убеждаемся, что при $\chi=\bar{\omega}$ радиус-вектор достигает минимума. Спутник находится тогда в перигее, его удаление от восходящего узла есть аргумент перигея ω. Сферическое расстояние спутника от перигея есть истинная аномалия v, $v=\chi-\bar{\omega}$. Если $v=90°$, то радиус-вектор $r=p$ (p — фокальный параметр)

$$p=a(1-e^2),$$

где a — большая полуось эллипса.

Таким образом, получаем следующее уравнение радиуса-вектора:

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}=\frac{p}{1+e\cos[L-\omega]}, \tag{11}$$

где L — аргумент широты; ω — аргумент перигея; r — радиус-вектор, описывающий эллипс вокруг центра тяжести центрального тела; e — эксцентриситет этого эллипса.

Итак, известны пять постоянных интегрирования Ω, i, ω, e, a; шестой является постоянная p_2 в уравнении (7). Она выражается отрезком времени t, в течение которого радиус-вектор r описывает площадь F. Вместо p_2 в качестве эквивалентного параметра чаще принимают момент t_0, в который спутник проходит через перигей.

Между элементами орбиты и постоянными интегрирования существуют следующие соотношения:

$$p=\frac{p_1^2}{kM},\quad e^2=1+\frac{p_1^2 p_3}{k^2M^2},\quad p_1=\sqrt{kMp},$$

$$p_3=-\frac{kM}{a}. \tag{12}$$

Если эти соотношения подставить в уравнение (8), то получим интеграл энергии

$$\bar{v}^2=r^{\cdot 2}+r^2v^{\cdot 2}=kM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), \tag{13}$$

где $\bar{v}$ — линейная скорость спутника.

Для второго закона Кеплера с учетом уравнения (6), подставляя вместо $\chi^{\cdot}$ производную истинной аномалии v, получим

$$r^2v^{\cdot}=\sqrt{kMa\,(1-e^2)}. \tag{14}$$

Иногда при расчетах ω заменяют долготой перигея $\Omega+\omega$ (см. рис. 2).

С помощью уравнения (7) легко приходим к третьему закону Кеплера. Действительно, если $(t_2-t_1)=T$ — период обращения спутника, то соответствующее ему значение $2\cdot(F_2-F_1)$ — удвоенная площадь орбитального эллипса, равная $2\pi ab$. Если заменить p_1, используя (12), то с учетом $b^2=a^2(1-e^2)$ получим

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{kM}}\,a^{3/2}. \tag{15}$$

Если период заменить средним движением

$$n=\frac{2\pi}{T}, \tag{16}$$

то получим

$$n^2a^3=kM. \tag{17}$$

В то время как шесть элементов орбиты в задаче двух тел постоянны, истинная аномалия v в соответствии с уравнением (14) изменяется со временем. Однако не рекомендуется определять истинную аномалию v как функцию времени путем интегрирования уравнения (14). Напротив, получают значение радиуса-вектора r в качестве функции времени, заменяя в уравнении (13) $v^{\cdot}$ с помощью (14), а также исключая гравитационный параметр kM на основании третьего закона Кеплера (17)

$$n\,dt=\frac{r}{a}\frac{dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

Замена

$$r=a\,(1-e\cos E) \tag{18}$$

дает

$$n \cdot dt = (1 - e\cos E)\,dE \tag{19}$$

и интеграл

$$n(t - t_0) = M = E - e\sin E, \tag{20}$$

где E — эксцентрическая и M средняя аномалии (рис. 3).

Часто в спутниковой геодезии время выражают через среднюю аномалию M, а радиус вычисляют как ее функцию, так как n постоянная величина, а средняя аномалия изменяется линейно со временем. Эксцентрическая аномалия E в основном имеет характер вспомогательной переменной.

Уравнение (20) называется уравнением Кеплера. С его помощью можно представить E как функцию от M в виде разложения в ряд по степеням e. На вычислительных машинах это уравнение решают методом приближений.

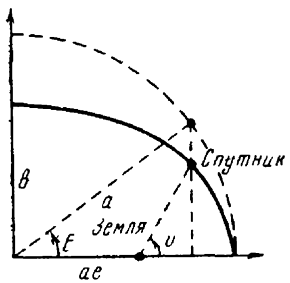


Рис. 3. E — эксцентрическая аномалия, v — истинная аномалия

Итак, для заданного момента t с помощью (20) вычисляем значение M, а затем E, чтобы найти далее радиус-вектор r из уравнения (18). В общем нельзя обойтись без истинной аномалии v, так как эта величина определяет направление радиуса-вектора r в пространстве, как это следует ниже из уравнения (24). Таким образом, для получения истинной аномалии часто определяют значение E по M из уравнения Кеплера, после чего или

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{21}$$

или

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}.$$

Радиус-вектор получают затем из уравнения (11).

Если xy — плоскость экватора (см. рис. 2) и z — ось вращения Земли, то при прохождении восходящего узла спутник переходит из южного полушария в северное, причем при движении его по своей орбите истинная аномалия v увеличивается.

Из уравнения (13) можно вычислить скорость, с которой близкий спутник движется по своей орбите. Для круговой орбиты при $r = a = R_E \cong 6\,370\,000$ м и $kM = 3{,}986 \cdot 10^{14}$ м³/сек², получим так называемую первую космическую скорость

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{kM}{R_E}} = 7{,}9 \text{ км/сек}. \tag{22}$$

Чтобы космическому аппарату в непосредственной близости от Земли придать такую скорость $\bar{v}_2$, что его кинетической энергии хватит для преодоления земного тяготения, и он сможет достичь планет Венеры или Марса, необходима, разумеется, значительная энергия.

Если $\frac{kM}{r}$ — потенциал Земли во внешнем пространстве, то для соблюдения энергетического баланса космического аппарата, имеющего достаточно кинетической энергии, чтобы как раз преодолеть земное притяжение, необходимо

$$\frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{kM}{r} = 0;$$

причем если $r \to \infty$, то должно $\bar{v} \to 0$. Отсюда вторая космическая скорость или скорость освобождения будет

$$\bar{v}^2 = \sqrt{2\frac{kM}{R_E}} = \bar{v}_1\sqrt{2} = 11{,}2 \text{ км/сек}. \tag{23}$$

2.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ СПУТНИКА, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

В прямоугольной геоцентрической системе координат, в которой одна координатная плоскость совпадает с плоскостью орбиты и ось x''' которой есть радиус-вектор перигея, движение спутника описывается следующими уравнениями:

$$x'''' = r\cos v, \quad y'''' = r\sin v, \quad z'''' = 0.$$

Вращая эту систему вокруг оси z''' на величину аргумента перигея ω по ходу часовой стрелки так, чтобы ось x''' перемещалась по направлению к восходящему узлу, получим для координат в этой новой системе (x''', y''', z''')

$$x''' = r\cos(\omega + v), \quad y''' = r\sin(\omega + v), \quad z''' = 0.$$

Вращая эту систему вокруг оси x''' по ходу часовой стрелки на величину угла наклона i, а затем вращая полученную таким образом систему по ходу часовой стрелки еще вокруг оси z на величину долготы восходящего узла, так что система x''', y''', z''' преобразуется в систему x, y, z (см. рис. 2), получим координаты спутника в инерциальной системе x, y, z.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i \\ \cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i \\ \sin(v+\omega)\sin i \end{pmatrix}. \tag{24}$$

$$v + \omega = L.$$

Переход от системы x''', y''', z''' к системе x, y, z можно представить также следующими матричными преобразованиями.

Если повернем систему вокруг оси z против хода часовой стрелки на угол α (если смотреть с положительного направления оси z на пересечение осей), то координаты x, y, z преобразуются так (рис. 4, *а*)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Соответствующее вращение против хода часовой стрелки вокруг оси y описывается следующим преобразованием (рис. 4, *б*)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_y(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{26}$$

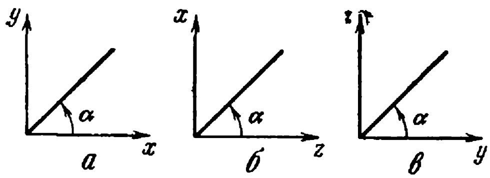


Рис. 4. Повороты системы координат с помощью матриц вращения R_z (α), R_y (α), R_x (α)

Вращая систему против хода часовой стрелки вокруг оси x, преобразуем координаты следующим образом (рис. 4, *в*):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_x(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Преобразование координат x''', y''', z''' в координаты x, y, z получается в виде произведений матриц

$$\boldsymbol{R}_z(-\Omega)\, \boldsymbol{R}_x(-i)\, \boldsymbol{R}_z(-\omega) \begin{pmatrix} x'''' \\ y'''' \\ z'''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Если применить простое тригонометрическое преобразование, то уравнениям (24) можно придать вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(L+\Omega) + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin L\sin\Omega \\ \sin(L+\Omega) - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin L\cos\Omega \\ \sin i\sin L \end{pmatrix}. \tag{28}$$

2.3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ СПУТНИКА, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Шесть упомянутых выше элементов орбиты чаще всего рекомендуются для описания орбит спутников, так как они постоянные, если пренебречь возмущениями орбиты. Меняются только истинная аномалия v или M и E.

Кроме того, в случае искусственных спутников Земли интересна другая система параметров, которая определяется положением и скоростью спутника в момент отделения ракеты-носителя (начальный момент. — Перев.).

Если известны радиус-вектор положения

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

и вектор скорости

$$\boldsymbol{r}^{\cdot}=\begin{pmatrix} x^{\cdot} \\ y^{\cdot} \\ z^{\cdot} \end{pmatrix}$$

в момент отделения ракеты-носителя, то орбиту спутника в пространстве однозначно определяют с помощью этих шести параметров. По ним можно однозначно получить соответствующие элементы орбиты следующим путем.

Единичный вектор, перпендикулярный к плоскости орбиты, определяют по $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^{\cdot}$ следующим векторным произведением:

$$\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^{\cdot}}{|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^{\cdot}|}.$$

Этот же вектор получают по элементам орбиты

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} \sin i & \sin\Omega \\ -\sin i & \cos\Omega \\ \cos i & \end{pmatrix}.$$

Из решения обоих уравнений получают угол наклона i и долготу восходящего узла Ω.

Если выразить в уравнении (13) $\overline{v}^2$ через $\boldsymbol{r}^{\cdot 2}$, то

$$\overline{v}^2=\boldsymbol{r}^{\cdot 2}=kM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Если известно kM и в начальный момент $\boldsymbol{r}^{\cdot 2}$ и r, то получим большую полуось a.

Второй закон Кеплера в векторной форме можно записать так

$$|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^{\cdot}|^2=kMa\,(1-e^2).$$

С помощью этого уравнения, зная $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}^{\cdot}$, kM и a, находят эксцентриситет e.

Истинную аномалию v получают по r, p, e из уравнения (11) для радиуса-вектора.

Другое уравнение для v получим, если преобразуем (11) к виду

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

и потом v продифференцируем по времени. Если при этом подставить вместо v выражение, полученное на основании второго закона Кеплера (14), то

$$e\sin v = \sqrt{\frac{p}{kM}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}^{\cdot}}{r}.$$

По $\cos v$ и $\sin v$ однозначно определяют истинную аномалию.

Аргумент широты L получается как скалярное произведение вектора $\boldsymbol{r}$ и радиуса-вектора восходящего узла $\boldsymbol{n}$.

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix}, \quad \cos L = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}.$$

По составляющей z уравнения (24) находят выражение для L

$$\sin L = \frac{z}{r\sin i}.$$

Аргумент перигея ω получают как разность

$$\omega = L - v.$$

Шестой элемент орбиты, время прохождения через перигей, получаем следующим образом. Из уравнения (21), пользуясь v и e, определяем эксцентрическую аномалию E, далее располагая e, E и моментом t, к которому относятся векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^{\cdot}$, из уравнения Кеплера (20) находим искомый момент прохождения через перигей t_0.

2.4. РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Наконец, следует указать для задачи двух тел еще некоторые важные разложения в ряды.

Если истинную аномалию v выразить через эксцентрическую аномалию E, то получается (Брауэр, Клеменс [1])

$$v = E + 2\left(\beta\sin E + \frac{1}{2}\beta^2\sin 2E + \frac{1}{3}\beta^3\sin 3E + \ldots\right),$$

$$\beta = \frac{1}{e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \ldots$$

и наоборот

$$E=v-2\left(\beta\sin v-\frac{1}{2}\beta^2\sin 2v+\frac{1}{3}\beta^3\sin 3v-\ldots\right).$$

Истинную и эксцентрическую аномалии v и E выражают через среднюю аномалию M следующим образом:

$$v=M+\left(2e-\frac{1}{4}e^3+\ldots\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2+-\ldots\right)\sin 2M+$$
$$+\left(\frac{13}{12}e^3+-\ldots\right)\sin 3M,$$
$$E=M+\left(e-\frac{1}{8}e^3+-\ldots\right)\sin M+\left(\frac{1}{2}e^2-+\ldots\right)\cdot\sin 2M+$$
$$+\left(\frac{3}{8}e^3-+\ldots\right)\sin 3M.$$

Для отношения радиуса-вектора r к большой полуоси a имеем

$$\frac{r}{a}=1+\frac{1}{2}e^2+\left(-e+\frac{3}{8}e^3-+\ldots\right)\cos M+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}e^2+-\ldots\right)\cos 2M+\left(-\frac{3}{8}e^3+-\ldots\right)\cos 3M+\ldots.$$

В дальнейшем при вычислении возмущений приходится интегрировать выражения вида

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\bar{q}}\exp jhv,$$

в которые время входит как переменная интегрирования, $j=\sqrt{-1}$.

При этом целесообразно представить это выражение в виде разложения в ряд Фурье по средней аномалии M. Здесь применяют формулу Ганзена (Тиссеран [6], Кэли [2], Гровс [3, 4])

$$\frac{r}{a}^{\bar{q}}\exp jhv=\sum_u X_u^{\bar{q}h}(e)\exp juM, \tag{29}$$

которая получается следующим образом.

Если

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\bar{q}}\sin hv=B_1\sin M+B_2\sin 2M+\ldots,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\bar{q}}\cos hv=\frac{1}{2}C_0+C_1\cos M+C_2\cos 2M+\ldots,$$

то

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\bar{q}}\exp jhv=\frac{1}{2}C_0+\frac{1}{2}C_1(\Lambda+\Lambda^{-1})+\ldots+\frac{1}{2}B_1\cdot(\Lambda-\Lambda^{-1})+\ldots$$
$$\Lambda=\exp jM.$$

Если

$$\frac{1}{2} C_0 = X_0^{\bar{q}, h};$$

$$\frac{1}{2}(C_1 + B_1) = X_1^{\bar{q}, h}; \quad \frac{1}{2}(C_1 - B_1) = X_{-1}^{\bar{q}, h};$$

$$\frac{1}{2}(C_2 + B_2) = X_2^{\bar{q}, h}; \quad \frac{1}{2}(C_2 - B_2) = X_{-2}^{\bar{q}, h};$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$C_0 = 2X_0^{\bar{q}, h};$$

$$C_1 = X_1^{\bar{q}, h} + X_{-1}^{\bar{q}, h};$$

$$B_1 = X_1^{\bar{q}, h} - X_{-1}^{\bar{q}, h};$$

$$\ldots$$

то получим уравнение (29).

Коэффициенты Ганзена вычисляются следующим образом:

$$X_u^{\bar{q}, h}(e) = (1 + \beta^2)^{-\bar{q}-1} \sum_s j_s(ue)\, X_{us}^{\bar{q}, h}(e).$$

$$X_{us}^{\bar{q}, h}(e) = (-\beta)^{-h+u-s} \binom{\bar{q} - h + 1}{-h + u - s} F\,(-\bar{q} + u - s - 1,\ -\bar{q} - h - 1,$$

$$-h + u - s + 1,\ \beta^2),$$

$$u - s \geqq h;$$

$$X_{us}^{-\bar{q}, h}(e) = (-\beta)^{h-u+s} \binom{\bar{q} + h + 1}{h - u + s} \times$$

$$\times F\,(-\bar{q} - u + s - 1,\ -\bar{q} + h - 1,\ h - u + s + 1,\ \beta^2),$$

$$u - s \leqq h.$$

Здесь $J_s(x)$ — функция Бесселя порядка s и $F\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x)$ гипергеометрический ряд

$$F\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ x) = 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1 \cdot \alpha_3} x + \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)\,\alpha_2(\alpha_2 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \alpha_3(\alpha_3 + 1)} x^2 + \ldots .$$

В своей теории возмущений Каула сделал подстановку

$$G_{lpq}(e) = X_{(l-2p+q)}^{-(l+1),\,(l-2p)}. \tag{30}$$

В табл. 1 даны некоторые из коэффициентов $X_u^{\bar{q}h}$. Они взяты из таблицы Кэли [2].

Таблица 1

Коэффициенты Ганзена

$\bar q$ h u	$X_u^{\bar q, h}$	$\bar q$ h u	$X_u^{\bar q, h}$
-3 0 -2	$\frac{9}{4}e^2+\dots$	-4 1 -1	$\frac{11}{8}e^2+\dots$
-1	$\frac{3}{2}e+\frac{27}{16}e^3+\dots$	0	$e+\frac{5}{2}e^3+\dots$
0	$1+\frac{3}{2}e^2+\dots$	1	$1+2e^2+\dots$
1	$\frac{3}{2}e+\frac{27}{16}e^3+\dots$	2	$3e+\frac{11}{4}e^3+\dots$
2	$\frac{9}{4}e^2+\dots$	3	$\frac{53}{8}e^2+\dots$
-3 2 0	0	-4 3 1	$\frac{1}{8}e^2+\dots$
1	$-\frac{1}{2}e+\frac{1}{16}e^3+\dots$	2	$-e+\frac{5}{4}e^3+\dots$
2	$1-\frac{5}{2}e^2+\dots$	3	$1-6e^2+\dots$
3	$\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3+\dots$	4	$5e-22e^3+\dots$
4	$\frac{17}{2}e^2+\dots$	5	$\frac{127}{8}e^2+\dots$

2.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brouwer, D., Clemence, G. M.: Methods of Celestial Mechanics. Academic Press, New York, London 1961.

(Русский перевод: Д. Брауэр, Дж. Клеменс. Методы небесной механики. М., «Мир», 1964).

2. Cayley, A.: Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion. Mem. of the Royal Astron. Soc., London, 29 (1861).

3. Groves, G. V.: Motion of a Satellite in the Earth's Gravitational Field. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 254 (1960) 48.

4. Groves, G. V.: Dynamics of Rockets and Satellites. North — Holland Publishing Company, Amsterdam 1965.

5. Moulton F. R.: Einführung in die Himmelsmechanik. Leipzig, Berlin 1927.

(Русский перевод: Ф. Мультон: Введение в небесную механику. М. — Л., ОНТИ, 1935).

6. Tisserand F.: Traité de Mècanique Céleste 1. Gauthier — Villars et Fils, Paris 1889.

7. Zhongolovich, I. D., Amelin, V. M.: Tables and Nomograms for the Processing of Observations made on Artificial Earth Satellites. Pergamon Press 1961.

(На русском языке: Жонголович И. Д. и Амелин В. М. Сборник таблиц и номограмм для обработки наблюдений искусственных спутников Земли. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1960).

3. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ ОТ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

3.1 ВОЗМУЩАЮЩИЕ УСКОРЕНИЯ

Для движения спутника вокруг центрального тела со сферической симметрией справедливы уравнения движения (3). Однако лишь с большим приближением можно считать, что Земля обладает этим свойством, т. е. является телом со сферической симметрией. Очевидны отклонения Земли от шара с симметричным распределением плотности, вызванные нерегулярной топографией земной поверхности.

По закону тяготения неправильности в распределении масс в теле Земли вызывают дополнительно действующие силы, которые влияют на спутник и существенно изменяют его орбиту, особенно, если спутник движется только в нескольких тысячах километров над Землей.

Гравитационный потенциал Земли выражается во внешнем пространстве дифференциальным уравнением Лапласа, которое можно представить с помощью сферических функций следующим образом:

$$V = \frac{kM}{r}\left[1 + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{R_E}{r}\right)^l \sum_{m=0}^{l} \overline{P}_{lm}(\sin\varphi)\{\overline{C}_{lm}\cos m\lambda + \overline{S}_{lm}\sin m\lambda\}\right]. \quad (31)$$

где $\overline{P}_{lm}$ — присоединенные сферические функции, нормированные посредством уравнения

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\overline{P}_{lm}(\sin\varphi)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}\right]^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = 4\pi. \quad (32)$$

Потенциал силы тяжести W можно получить, прибавляя к V потенциал центробежной силы, обусловленной вращением Земли.

В уравнениях (3) был учтен только основной член упомянутого разложения, а именно

$$\overline{V} = \frac{kM}{r}$$

с компонентами ускорения

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{V} = -\frac{kM}{r^3}x, \quad \frac{\partial}{\partial y}\overline{V} = -\frac{kM}{r^3}y, \quad \frac{\partial}{\partial z}\overline{V} = -\frac{kM}{r^3}z.$$

При более строгом способе рассмотрения нужно ввести в правой части уравнений (3) производные от всего выражения V по координатам x, y, z.

При этом относительно координаты x получим следующее уравнение движения:

$$x^{\cdot\cdot} = -kM\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial x}(V - \bar{V}). \tag{33}$$

Аналогичные выражения действительны для составляющих по y и z.

Таким образом, на спутник действуют еще дополнительные ускорения

$$\frac{\partial}{\partial x}(V - \bar{V}), \quad \frac{\partial}{\partial y}(V - \bar{V}), \quad \frac{\partial}{\partial z}(V - \bar{V}),$$

поэтому он не имеет больше неизменно расположенной в пространстве эллиптической орбиты, как в задаче двух тел, а все время выводится из этой орбиты. Следует определить возмущения орбиты, вызванные дополнительными ускорениями. Так, с одной стороны, при известном гравитационном поле получают точную орбиту спутника, а с другой стороны, если ведутся наблюдения за спутником, получают из наблюдаемых возмущений орбиты постоянные Стокса $\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$ уравнения (31) и, таким образом, — важное для геодезии гравитационное поле Земли V.

Возмущенное орбитальное движение можно описать шестью элементами орбиты, только они теперь уже не постоянны, как это было в задаче двух тел, а изменяются со временем.

Для каждого момента времени определяют орбитальный эллипс, который лучше всего соответствует орбите спутника и имеет с ней в данное время три общие бесконечно мало удаленные друг от друга точки (6 параметров): *оскулирующий эллипс.*

Оскулирующий эллипс можно описать также другим способом. Из-за возмущающих ускорений вектор положения $\boldsymbol{r}$ и вектор скорости $\boldsymbol{r}^{\cdot}$ спутника отличаются от значений, которые они имели бы в случае невозмущенного движения. Но возмущенные векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}^{\cdot}$, по данным гл. 2, позволяют однозначно определить оскулирующий эллипс.

Если принять, что при прохождении спутником определенной точки орбиты вдруг исчезнут возмущающие ускорения, то от этой точки спутник будет двигаться дальше по орбите, совпадающей с оскулирующим эллипсом для данного момента.

3.2. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Из уравнения (33) получаются для движения спутников три дифференциальных уравнения второго порядка. Их следует преобразовать в шесть уравнений первого порядка. Подстановкой

$$x_1 = x^{\cdot}$$

получают оба уравнения первого порядка для составляющей x

$$x^{\cdot}-x_1=0;\ x_1^{\cdot}+kM\frac{x}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}(V-\overline{V}) \tag{34}$$

и аналогичные системы уравнений для составляющих y и z. Если бы не было возмущающих сил, то вместо уравнения (34) получили бы

$$x^{\cdot}-x_1=0;\ x_1^{\cdot}+kM\frac{x}{r^3}=0, \tag{35}$$

и решением этой системы была бы кеплеровская орбита с шестью постоянными элементами орбиты $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6$.

$$x=f(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6, t),\ x_1=f_1(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6, t). \tag{36}$$

Но, согласно сказанному выше, в возмущенной задаче элементы орбиты, полученные по уравнениям (34), будут изменяться со временем

$$\varkappa_i=\varkappa_i(t).$$

Производные от x и x_1 по времени

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial x}{\partial\varkappa_i}\cdot\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t},$$

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial x_1}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial x_1}{\partial\varkappa_i}\cdot\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t}.$$

Эти соотношения подставим в (34) и получим

$$\frac{\partial x}{\partial t}-x_1+\sum_i\frac{\partial x}{\partial\varkappa_i}\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}+kM\frac{x}{r^3}+\sum_i\frac{\partial x_1}{\partial\varkappa_i}\cdot\frac{\partial\varkappa_i}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(V-\overline{V}).$$

Аналогичные уравнения получаем для составляющих y и z. Итак, $\frac{\partial x}{\partial t}$ и $\frac{\partial x_1}{\partial t}$ равны полным производным для случая постоянных элементов орбиты. Поэтому, согласно (35),

$$\frac{\partial x}{\partial t}-x_1=0;\quad \frac{\partial x_1}{\partial t}+kM\frac{x}{r^3}=0.$$

Так получаем уравнения

$$\sum_i\frac{\partial x}{\partial\varkappa_i}\cdot\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t}=0,\quad \sum_i\frac{\partial x_1}{\partial\varkappa_i}\cdot\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(V-\overline{V}). \tag{37}$$

С соответствующими уравнениями для составляющих y и z получаем 6 уравнений, линейных относительно шести искомых производных от элементов орбиты $\frac{\partial\varkappa_i}{\partial t}$ и позволяющих определить их значения. Выражения $\frac{\partial x}{\partial \varkappa_i}$, $\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \varkappa_i}$ в (37) известны из задачи двух тел как функции элементов орбиты, так что в уравнении (37) производные от элементов орбиты выражены через производные возмущающего потенциала по координатам x, y, z. И, наконец, целесообразно заменить производные от $(V - \overline{V})$ по трем пространственным координатам x, y, z через производные этого возмущающего потенциала по шести элементам орбиты a, e, ω, i, Ω, M.

Решение линейных уравнений (37) дает искомые производные по времени от элементов орбиты (уравнения Лагранжа)

$$\dot{\varkappa}_i = g(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_6, t), \quad i = 1, 2, \ldots, 6. \tag{38}$$

Здесь нельзя дать подробный вывод уравнений (38), с ним можно познакомиться в руководствах по небесной механике.

Подставим для краткости вместо возмущающего потенциала $(V - \overline{V})$

$$R = V - \overline{V} \tag{39}$$

и введем производные потенциала R по шести элементам орбиты, тогда уравнения Лагранжа получат следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
a^{\cdot} &= \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial M}\\
e^{\cdot} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega}\\
\omega^{\cdot} &= \frac{-\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial \Omega}\\
\Omega^{\cdot} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}\\
M^{\cdot} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial a}
\end{aligned}\right\} . \tag{40}$$

Последнее уравнение системы (40) для M содержит в противоположность другим уравнениям член, в котором явно нет производной от возмущающего потенциала R. Это — первый член уравнения, равный среднему движению n для мгновенного оскулирующего эллипса. По третьему закону Кеплера n зависит от большой полуоси a

$$n = n(a) = \sqrt{\frac{kM}{a^3}}. \tag{41}$$

При числовых расчетах возмущений в случае использования уравнений (40) необходимо выполнить интегрирование по времени

$$\delta a = \int_{t_0}^{t} a^{\cdot}\,dt, \quad \delta e = \int_{t_0}^{t} e^{\cdot}\,dt, \ \ldots, \tag{42}$$

при этом возмущения всегда вычисляют от заданного момента времени t_0. Элементы орбиты в этот момент, а именно a_0, e_0, . . ., M_0, определяют, используя наблюдения спутников. Итак, для n имеем

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{kM}{(a_0+\delta a)^3}} = n_0 - \frac{3}{2}\frac{n}{a}\,\delta a \\ n &= n_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial n}{\partial t}\,dt = n_0 - \frac{3}{2}\frac{n}{a}\int_{t_0}^{t} a^{\cdot}\,dt \end{aligned}\right\}, \tag{43}$$

где

$$n_0 = \sqrt{\frac{kM}{a_0^3}}.$$

В последнем уравнении (40) заменим n, используя (43). Для вычисления возмущений первого порядка все уравнения (40) нужно интегрировать один раз, только для определения средней аномалии M при интегрировании среднего движения n в последнем уравнении необходимо двойное интегрирование

$$\int_{t_0}^{t} n\,dt = n_0(t-t_0) - \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{a}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} a^{\cdot}\,dt. \tag{44}$$

3.3. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В ФОРМЕ ГАУССА

Уравнения Лагранжа (40) необходимо применять прежде всего тогда, когда возмущающий потенциал выражен через элементы орбиты. Особенно рекомендуют представлять эти формулы в виде разложений по тригонометрическим функциям средней аномалии M, так как M в таком случае с достаточной степенью точности изменяется линейно со временем и можно легко выполнять аналитическое интегрирование по времени.

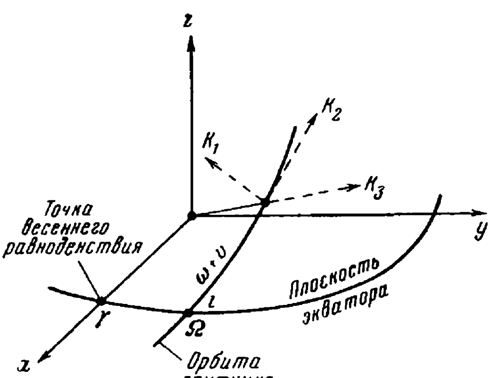


Рис. 5. Компоненты возмущающего ускорения ИСЗ

Однако есть случаи, когда рекомендуют представлять производные от шести элементов орбиты по времени не выражениями $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$, . . ., а тремя ортогональными компонентами возмущающего ускорения.

Пусть K_1 — возмущающее ускорение в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты спутника, положительное в направлении к северному полюсу. Составляющая K_2 в плоскости орбиты спутника перпендикулярна к радиусу-вектору, она образует с вектором скорости спутника острый угол. Составляющая K_3 направлена вдоль радиуса-вектора (рис. 5).

$$\operatorname{grad} R = \nabla R = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

Так получают уравнения для вычисления возмущений в форме Гаусса.

$$\left.\begin{aligned}
a^{\cdot} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin v\cdot K_3 + \frac{p}{r}\cdot K_2\right)\\
e^{\cdot} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\sin vK_3 + (\cos E + \cos v)\,K_2\right)\\
\omega^{\cdot} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-\cos vK_3 + \left(\frac{r}{p}+1\right)\sin vK_2\right] - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\\
i^{\cdot} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{r}{a}\cos(\omega+v)\,K_1\\
\Omega^{\cdot} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{\sin(\omega+v)}{\sin i}\cdot K_1\\
M^{\cdot} &= n - \frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e}\cos v\right)\cdot K_3 -\\
&\quad - \frac{1-e^2}{nae}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\cdot K_2
\end{aligned}\right\}. \tag{45}$$

3.4. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОРБИТ С МАЛЫМИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАМИ

Уравнения для вычислений возмущений (40) и (45) имеют тот недостаток, что в некоторых из них в знаменателе появляется эксцентриситет e, величина которого при орбитах спутников, близких к круговым, очень мала, иногда $e \cong 0{,}01$. Таким образом, получают в уравнениях для вычисления возмущений большие коэффициенты, что неблагоприятно сказывается при решении. Причина этого явления заключается в том, что для орбиты с малым e перигей не может быть определен уверенно. Под влиянием этого обстоятельства пропадает однозначность при определении пространственных координат спутника. Так, например, возмущения в ω и M имеют особенность, а при вычислении координат спутника с использованием уравнения (24) нужна сумма $\omega + M$ или $\omega + v$.

Поэтому полезно иметь другую систему элементов орбиты, свободную от этих особенностей. Г. А. Чеботарев использовал в качестве элементов орбиты параметры

$$a,\ h,\ l^*,\ \Omega,\ i,\ \lambda^*$$

с подстановками

$$h = e\sin\omega,$$

$$l^* = e\cos\omega,$$

$$\lambda^* = M + \omega$$

и нашел следующую форму уравнений Лагранжа для оскулирующих элементов

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial\lambda^*}\\
\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial l^*} - \frac{h}{2na^2}\,\frac{\partial R}{\partial\lambda^*} - \frac{l^*\operatorname{ctg} i}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{dl^*}{dt} &= -\frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{l^*}{2na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial\lambda^*} + \frac{h\operatorname{ctg} i}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2}\left(l^*\,\frac{\partial R}{\partial h} - h\,\frac{\partial R}{\partial\lambda^*} + \frac{\partial R}{\partial\gamma^*}\right) - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2}\,\frac{\partial R}{\partial\Omega}\\
\frac{d\lambda^*}{dt} &= -\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2na^2}\left(h\,\frac{\partial R}{\partial h} + l^*\,\frac{\partial R}{\partial l^*}\right) - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}
\end{aligned}\right\}. \quad (46)$$

Для вычисления по этим шести параметрам положения спутника с использованием уравнения (24) или (28), необходимо по h и l^* определить еще e и ω и по $\lambda^* = M + \omega$ — аргумент широты L. Г. А. Чеботарев дает разложения в ряды, с помощью которых L и радиус-вектор r представляют как функцию непосредственно a, h, l^*, λ^*.

3.5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Поскольку уравнения Лагранжа вычисления возмущений являются уравнениями первого порядка, их решение получить достаточно просто, если принять во внимание возможность представления их правых частей в виде разложений по степеням M; целесообразно также исходить непосредственно из уравнений движения (33) и получать без дальнейших преобразований координаты z, y, x путем двойного интегрирования этих уравнений. Прикладная математика рекомендует многочисленные методы интегрирования, пригодные для электронных вычислительных машин.

Можно, например, вычислить равноотстоящие значения для правой части уравнения (33) по приближенным элементам орбиты. С помощью этих равноотстоящих значений, применяя формулы интерполирования с разностями высших порядков, можно составить аналитическое выражение для правой части уравнений (33), т. е. для $\ddot{x}$, которое затем нужно дважды интегрировать. При определенных условиях дальнейшие приближения ускоряют решение.

Р. Андерли провел в большом масштабе численное интегрирование этим способом при определении гравитационного поля из допплеровских наблюдений. Для определения положения спутников применяют метод интегрирования Коуэлла, часто используемый астрономами, при этом решение доводят до разностей 10 порядка.

Метод Коуэлла требует сравнительно мало числовых расчетов, потому что с его помощью вычисляют непосредственно положение спутника без определения его скорости.

Аналогичные возможности для численного интегрирования уравненений (33) дает метод Рунге-Кутта.

Для интегрирования уравнений (45) также рекомендован численный метод. Эти уравнения можно интегрировать, например, по методу Симпсона с интервалами интегрирования от 30 до 60 сек

$$\int f\,dx = \frac{1}{3}\,\Delta x\,(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n),$$

где n должно быть нечетным числом.

Иногда эти численные методы интегрирования важны как возможность независимого контроля орбит спутников, полученных путем аналитического интегрирования уравнений Лагранжа по шести элементам орбиты.

Можно утверждать, что численное интегрирование требует в общем больше машинного времени, чем аналитическое интегрирование уравнений (40), представляемых при этом в виде тригонометрических функций, зависящих от средней аномалии. Литературу по численному интегрированию уравнений движения можно найти у Куликова [9], Брауэра и Клеменса [3], Шнайдера [13, 14], Коллатца [4], Арнольда [2].

3.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

Если обратиться к аналитическому интегрированию уравнений движения (40), то необходимо представить возмущающий потенциал R как функцию от шести элементов орбиты, чтобы выполнить соответствующее дифференцирование по этим элементам орбиты и затем проинтегрировать по времени.

Гровс [5] в своих исследованиях исходит из следующего представления возмущающего потенциала в пространственных полярных координатах r, φ, λ:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} R_{lm} \\ R_{lm} &= A_{lm}\left(\frac{R_E}{r}\right)^{l+1} T_{lm}(\sin\varphi)\cos m\,(\lambda - \lambda_m) \end{aligned}\right\}, \tag{47}$$

где A_{lm}, λ_m — параметры гравитационного поля. T_{lm} — производная порядка m от сферической функции Лежандра порядка l

$$T_{lm}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi\,\frac{\partial m}{\partial \sin^m\varphi}\,P_l(\sin\varphi). \tag{48}$$

Используя рис. 2, легко получить соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\varphi=\sin i\sin(\omega+v)\\
&\cos\varphi\sin\bar{l}=\cos i\sin(\omega+v)\\
&\cos\varphi\cos\bar{l}=\cos(\omega+v)\\
&\lambda=\Omega+\bar{l}-\theta\\
&\bar{l}=\alpha-\Omega
\end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

где θ — гринвичское звездное время; α — прямое восхождение.

Если подставим

$$\lambda-\lambda_m=\bar{l}-\bar{l}_m, \tag{50}$$

то

$$\bar{l}_m=\theta_1 t+\theta_0+\lambda_m-\Omega, \tag{51}$$

если

$$\theta=\theta_1 t+\theta_0.$$

Если подставить (48) в (47), то можно для возникающих произведений $\cos^m\varphi\cos m(\lambda-\lambda_m)$ с помощью общей формулы

$$\exp jm\psi=(\cos\psi+j\sin\psi)^m$$

с учетом (49) и (50) получить

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^m\varphi\exp jm(\lambda-\lambda_m)=\exp\left(-jm\bar{l}_m\right)[\cos(\omega+v)+\\
&\qquad\qquad+j\cos i\sin(\omega+v)]^m,\\
&j=\sqrt{-1}.
\end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Для представления функции $T_{lm}(\sin\varphi)$ через i, ω, v можно заменить производные от сферических функций, применяя теорему сложения сферических функций

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{l}u_k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}T_{lk}(x_1)T_{lk}(x_2)\cos k\gamma,$$

$$x=x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}\cos\gamma,$$

$$u_k=1,\ \text{если}\ k=0,$$

$$u_k=2,\ \text{если}\ k=1,\ldots,l.$$

После дифференцирования m раз по $\cos\gamma$ и с подстановками

$$x_1=0,\quad x_2=\cos i,\quad \gamma=\frac{\pi}{2}-(\omega+v)$$

получим

$$\sin^m iP_l^{(m)}(\sin\varphi)=\sum_{k=0}^{l}u_k\frac{(l-k)!}{(l+k)!}T_{lk}(0)T_{lk}(\cos i)\times$$

$$\times\frac{d^m\cos k\gamma}{(d\cos\gamma)^m}, \tag{53}$$

где m означает дифференцирование m раз по $\sin\varphi$.

После преобразований и после введения выражения (29) Гровс [5] получил, наконец, возмущающий потенциал R как функцию от шести элементов орбиты

$$R_{lm}=A_{lm}\left(\frac{R_E}{a}\right)^{(l+1)}\sum_{k=0}^{l}\sum_{p=0}^{k}\sum_{u}V_{lk}^{m}(i)\,W_{u}^{lk-2p}(e)\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}C_{kp}^{m}(i)\cos\\ C_{kp}^{m'}(i)\sin\end{matrix}\left[uM+(k-2p)\,\omega'-m\bar{l}_m\right]+\right.$$

$$\left.+\begin{matrix}D_{kp}^{m}(i)\cos\\ D_{kp}^{m'}(i)\sin\end{matrix}\left[uM+(k-2p)\,\omega'+m\bar{l}_m\right]\right\}. \tag{54}$$

V_{lk}^{m} — выражение для присоединенных сферических функций, на которых здесь не будем останавливаться более подробно. W_u^{lk-2p} получают с помощью функций X_u^{qh} (29). C_{kp}^{m}, $C_{kp}^{m'}$, D_{kp}^{m}, $D_{kp}^{m'}$ Гровс представляет в виде полиномов по $\sin {}^1/_2 i$, $\cos {}^1/_2 i$. $\omega'=\omega-\frac{\pi}{2}$.

Орбиты, рассматриваемые в спутниковой геодезии, охватывают промежуток времени максимум в несколько месяцев, так что в большинстве случаев для них в возмущающем потенциале R можно считать постоянными с достаточным приближением три элемента орбиты i, a, e, и только параметры M, ω', $\bar{l}_m$, появляющиеся под знаком синуса и косинуса или эквивалентные им элементы орбиты M, Ω, ω и звездное время θ являются переменными, зависящими от времени. Величина θ строго, а M, Ω, ω с достаточным приближением линейно изменяются со временем.

По уравнению (54) можно получить производные от элементов орбиты и подставить их в уравнения Лагранжа (40).

Если известны параметры гравитационного поля A_{lm} и λ_m, то выражение (54) пригодно для вычисления возмущений орбиты, вызванных гравитационным полем Земли.

Но в геодезии возникает обратная задача: определить из наблюдаемых возмущений орбиты параметры гравитационного поля Земли. При уравнивании наблюдений надо представить их в линейной зависимости от параметров гравитационного поля, но этого нельзя достичь непосредственно из уравнений (54), так как λ_m является аргументом тригонометрической функции и неизвестна àpriori во всей области изменений от 0 до 360°.

Каула [7] ввел для (47) следующее выражение:

$$R_{lm}=kM\frac{R_E^l}{r^{l+1}}P_{lm}(\sin\varphi)\,(C_{lm}\cos m\lambda+S_{lm}\sin m\lambda); \tag{55}$$

k — гравитационная постоянная, P_{lm} — присоединенная сферическая функция, нормированная по

$$\int\limits_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} [P_{lm}(\sin\varphi)]^2 \cos\varphi\, d\varphi = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!},\ m \neq 0,$$

$$P_{lm}(\sin\varphi) = \frac{\cos^m\varphi}{2^l l!}\cdot\frac{d^{l+m}}{d(\sin\varphi)^{l+m}}(\sin^2\varphi - 1)^l.$$

Это выражение линейно относительно неизвестных, характеризующих гравитационное поле C_{lm} и S_{lm}, и удается выразить параметры λ, φ и r через шесть элементов орбиты. Из рис. 2 следует

$$m\lambda = [m(\alpha - \Omega) + m(\Omega - \theta)],$$

при этом α — прямое восхождение, а θ — гринвичское звездное время, итак,

$$\cos m\lambda = \cos m(\alpha - \Omega)\cos m(\Omega - \theta) - \sin m(\alpha - \Omega)\sin m(\Omega - \theta)$$

и аналогичное выражение получаем для $\sin m\lambda$.

Из рис. 2 далее следует

$$\cos(\alpha - \Omega) = \frac{\cos(\omega + v)}{\cos\varphi},$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = \frac{\sin(\omega + v)\cos i}{\cos\varphi},$$

$$\sin\varphi = \sin i \sin(\omega + v).$$

Для присоединенной сферической функции $P_{lm}(\sin\varphi)$ справедливо следующее представление по степеням $\sin\varphi$, $\cos\varphi$

$$P_{lm}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \sum_t \Gamma_{lmt} \sin^{l-m-2t}\varphi,$$

причем выражения Γ_{lmt} — известные коэффициенты. С помощью приведенных выше разложений и преобразований следующей формы

$$\cos mx = R_e \exp(mjx) = R_e \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} j^s \cos^{m-s} x \sin^s x,$$

$$\sin^a x \cos^b x = \frac{(-1)^a j^a}{2^{a+b}} \sum_{c=0}^{a}\sum_{d=0}^{b} \binom{a}{c}\binom{b}{d}(-1)^c \times$$

$$\times [\cos(a + b - 2c - 2d)x + j\sin(a + b - 2c - 2d)x]$$

(R_l обозначает действительную часть), используя соотношения (29) и (30), можно привести (55) к следующему виду

$$R_{lm} = kM \frac{R_E^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^{l} F_{lmp}(i) \sum_q G_{lpq}(e)\, S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \theta), \qquad (56)$$

где

$$F_{lmp}(i) = \sum_t \frac{(2l-2t)!}{t!\,(l-t)!\,(l-m-2t)!\,2^{2l-2t}} \sin^{l-m-2t} i \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k^*},$$

k^* — целая часть от $^1/_2(l-m)$,

$$S_{lmpq} = \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{bmatrix}_{l-m\ \text{нечетное}}^{l-m\ \text{четное}} \cos[(l-2p)\omega +$$

$$+ (l-2p+q) M + m(\Omega - \theta)] +$$

$$+ \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix}_{l-m\ \text{нечетное}}^{l-m\ \text{четное}} \sin[(l-2p)\omega + (l-2p+q) M + m(\Omega-\theta)].$$

Уравнение (30) дает функции $G_{lpg}(e)$.

R_{lm} отвечает требуемым свойствам, выражение (56) линейно по отношению к неизвестным параметрам гравитационного поля C_{lm} и S_{lm}, а шесть элементов орбиты являются независимыми величинами. Это значительно облегчает получение производных от R_{lm}, по шести параметрам для уравнений Лагранжа (40). Функции $\frac{1}{a^{l+1}}$ $F_{lmp}(i)$, $G_{lpq}(e)$ и их производные по a, i, e при вычислении R_{lm}, $l > 2$, можно считать в большинстве случаев постоянными внутри интервала интегрирования от 1 до 2 месяцев.

Исключение составляет лишь главный член при вычислениях возмущений, вызванных сферической функцией второго порядка $C_{2.0}$ (второй зональной гармоникой. — Перев.), так как этот член превышает другие члены примерно в тысячу раз. Он вызывает большие возмущения и теорию его влияния необходимо разработать, соблюдая значительно более высокую относительную точность, чем для возмущений от других сферических функций. При вычислении возмущений, вызванных $C_{2.0}$ все элементы орбиты следует рассматривать как изменяющиеся со временем; об условиях, которые приводят к возмущениям второго порядка под действием фактора $C_{2\,0}^2$, будет сказано ниже.

3.7. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Изменения возмущений со временем выражены в уравнении (56) функцией $S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \theta)$.

Прежде всего со временем изменяется средняя аномалия M, за время оборота, т. е. примерно за 2 ч, она изменяется на 360°.

Линейно изменяется также звездное время θ.

Аналогично нельзя считать постоянными аргумент перигея ω и долготу восходящего узла Ω, под влиянием упомянутого уже главного члена в вычислениях возмущений $C_{2.0}$ они будут изменять свою величину линейно со временем, чем нельзя пренебречь. При этом линия апсид и линия узлов за одни сутки под действием этого возмущения поворачиваются на величину от 2 до 4°, так что они могут совершить полный оборот за время около 100 дней.

При интегрировании уравнений Лагранжа (40) можно с достаточным приближением использовать следующие линейные преобразования:

$$\omega = \omega^{\cdot} t + \omega_0, \quad M = n \cdot t + M_0,$$
$$\Omega = \Omega^{\cdot} t + \Omega_0, \quad \theta = \theta^{\cdot} t + \theta_0.$$

Если для сокращения принять

$$\varkappa = (l - 2p)\,\omega + (l - 2p + q)\,M + m\,(\Omega - \theta),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \omega} S_{lmpq} = \frac{\partial}{\partial \varkappa} S_{lmpq} \cdot (l - 2p). \tag{57}$$

Аналогичные выражения следуют для производных по M и Ω.

Если проинтегрировать эти частные производные по времени, чтобы найти с помощью уравнений (40) по производным от возмущений в элементах орбиты сами возмущения, то получим, например,

$$\int \frac{\partial}{\partial \omega} S_{lmpq}\, dt = \frac{l - 2p}{(l - 2p)\,\omega^{\cdot} + (l - 2p + q)\,n + m\,(\Omega^{\cdot} - \theta^{\cdot})} S_{lmpq}. \tag{58}$$

Возмущения в элементах орбиты получают таким же точно образом, как функцию S_{lmpq}.

3.8. ВЕКОВЫЕ, ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Возмущения орбит спутников оказалось целесообразным разделить соответственно их периодам на три группы: *вековые*, *долгопериодические* и *короткопериодические*.

Вековые возмущения первого порядка в элементах орбиты увеличиваются линейно со временем, поэтому в течение нескольких недель они могут достичь значительной величины. Они вызывают самые большие возмущения в элементах орбит и появляются, если в выражении для S_{lmpq} (56) имеем

$$l - 2p = 0; \quad l - 2p + q = 0; \quad m = 0. \tag{59}$$

Из условия $m = 0$ следует, что только зональные гармоники $C_{l.0}$ могут вызывать вековые возмущения. Тессеральные гармоники

$$C_{lm}; \quad S_{lm} \quad m = 1, 2, \ldots\, l - 1,$$

секториальные гармоники

$$C_{ll},\quad S_{ll}$$

не могут вызывать никаких вековых возмущений, поэтому их влияние на возмущения орбиты меньше, чем влияние зональных гармоник.

Оба важнейших вековых возмущения орбиты уже упоминались, а именно, вращения линий узлов и апсид, вызванные второй зональной гармоникой, т. е. изменения ω и Ω. Если в (56) $l = 2$, $m = 0$, $p = 1$, $q = 0$, то из уравнений возмущений получим следующие изменения ω, Ω, M:

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega &= C_{2\cdot 0}\frac{3nR_E^2}{4(1-e^2)^2 a^2}(1-5\cos^2 i)\cdot t \\ \delta\Omega &= C_{2\cdot 0}\frac{3nR_E^2}{2(1-e^2)^2 a^2}\cos i\cdot t \\ \delta M &= C_{2\cdot 0}\frac{3nR_E^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2}(1-3\cos^2 i)\cdot t \end{aligned}\right\}, \tag{60}$$

где n — среднее движение спутника

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

$\frac{t}{T}$ — число оборотов спутника, T — период обращения спутника.

Долгопериодические возмущения по сравнению с вековыми часто имеют период от 100 до 200 суток. Эти возмущения вызывают движение линии апсид и они появляются, если в (56)

$$l-2p \neq 0,\quad l-2p+q=0,\quad m=0. \tag{61}$$

Изменение долготы узла нельзя отделить от изменения звездного времени. Так как звездное время имеет короткий период в одни сутки и появляется в (56) только в разности $\Omega - \theta$, то вращение линии узлов не будет вызывать никаких долгопериодических возмущений. Так как в (61) $m = 0$, то при долгопериодических возмущениях принимают во внимание только зональные гармоники. Для вековых и долгопериодических возмущений, вызываемых в элементах орбиты в течение одного оборота спутника зональными гармониками до шестого порядка, Мерсон вывел подробные формулы.

Представим долгопериодическое возмущение в случае эксцентриситета

$$\Delta e_* = \int\limits_{L=0}^{2\pi} e\cdot\frac{dt}{dL}\,dL \tag{62}$$

и аналогичными выражениями для других элементов орбиты i, Ω, ω, M, p; запишем для потенциала

$$V = \frac{kM}{r}\left[1-\sum_{l=2}^{\infty} J_l\left(\frac{R_E}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi)\right],\quad J_l = -C_{l\cdot 0}, \tag{63}$$

если при этом учесть, что $\bar{f} = \sin^2 i$, $p = a(1 - e^2)$, то по Мерсону [10] получим следующие соотношения:

$$\Delta e_* = 2\pi \sum_l J_l \left(\frac{R_E}{p}\right)^l e_l, \tag{64}$$

$$e_2 = 0,$$

$$e_3 = -\frac{3}{2}(1-e^2)\sin i \cos\omega \left(1 - \frac{5}{4}\bar{f}\right),$$

$$e_4 = -\frac{45}{16}(1-e^2)\left(1 - \frac{7}{6}\bar{f}\right)\bar{f} e \sin 2\omega,$$

$$e_5 = \frac{15}{4}(1-e^2)\sin i\left[\left(1 - \frac{7}{2}\bar{f} + \frac{21}{8}\bar{f}^2\right)\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right)\cos\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{8}\left(1 - \frac{9}{8}\bar{f}\right)\bar{f}e^2\cos 3\omega\right],$$

$$e_6 = \frac{525}{32}(1-e^2)\bar{f}\left[\left(1 - 3\bar{f} + \frac{33}{16}\bar{f}^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)e\sin 2\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{16}\left(1 - \frac{11}{10}\bar{f}\right)\bar{f}e^3\sin 4\omega\right],$$

$$\Delta i_* = 2\pi \sum_l J_l \left(\frac{R_E}{p}\right)^l i_l, \tag{65}$$

$$i_2 = 0,$$

$$i_3 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{5}{4}\bar{f}\right) e \cos\omega \cos i,$$

$$i_4 = \frac{45}{32}\left(1 - \frac{7}{6}\bar{f}\right)e^2 \sin 2\omega \sin 2i,$$

$$i_5 = -\frac{15}{4} e \cos i\left[\left(1 - \frac{7}{2}\bar{f} + \frac{21}{8}\bar{f}^2\right)\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right)\cos\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{8}\left(1 - \frac{9}{8}\bar{f}\right)\bar{f}e^2\cos 3\omega\right],$$

$$i_6 = -\frac{525}{64} e \sin 2i\left[\left(1 - 3\bar{f} + \frac{33}{16}\bar{f}^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)e\sin 2\omega + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{16}\left(1 - \frac{11}{10}\bar{f}\right)\bar{f}e^3\sin 4\omega\right],$$

$$\Delta\Omega_* = 2\pi \sum_l J_l \left(\frac{R_E}{p}\right)^l \Omega_l, \tag{66}$$

$$\Omega_2 = -\frac{3}{2}\cos i,$$

$$\Omega_3 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{15}{4}\bar{f}\right) e \sin\omega \operatorname{ctg} i,$$

$$\Omega_4 = \frac{15}{4}\cos i\left[\left(1-\frac{7}{4}\bar{f}\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)-\frac{3}{4}\left(1-\frac{7}{3}\bar{f}\right)e^2\cos 2\omega\right],$$

$$\Omega_5 = -\frac{15}{4}\operatorname{ctg} i\left[\left(1-\frac{21}{2}\bar{f}+\frac{105}{8}\bar{f}^2\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)e\sin\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{8}\left(1-\frac{15}{8}\bar{f}\right)\bar{f}e^3\sin 3\omega\right],$$

$$\Omega_6 = -\frac{105}{16}\cos i\left[\left(1-\frac{9}{2}\bar{f}+\frac{33}{8}\bar{f}^2\right)\left(1+5e^2+\frac{15}{8}e^4\right)-\right.$$

$$-\frac{5}{2}\left(1-6\bar{f}+\frac{99}{16}\bar{f}^2\right)\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)e^2\cos 2\omega-$$

$$\left.-\frac{15}{32}\left(1-\frac{33}{20}\bar{f}\right)\bar{f}e^4\cos 4\omega\right],$$

$$\Delta\omega_* = 2\pi\sum_l J_l\left(\frac{R_E}{p}\right)^l\omega_l, \tag{67}$$

$$\omega_2 = 3\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right),$$

$$\omega_3 = \frac{3}{2}e^{-1}\sin\omega\sin i\left[\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)+\left(\frac{35}{4}\cos^2 i-\operatorname{cosec}^2 i\right)e^2\right],$$

$$\omega_4 = -\frac{15}{32}\left[(16-62\bar{f}+49\bar{f}^2)+(6\bar{f}-7\bar{f}^2)\cos 2\omega+\right.$$

$$\left.+\left(18-63\bar{f}+\frac{189}{4}\bar{f}^2\right)e^2+\left(-6+35\bar{f}-\frac{63}{2}\bar{f}^2\right)e^2\cos 2\omega\right],$$

$$\omega_5 = \frac{105}{16}e^{-1}\sin\omega\operatorname{cosec} i\left[\left(-\frac{4}{7}+2\bar{f}-\frac{3}{2}\bar{f}^2\right)\bar{f}+\right.$$

$$+\left(\frac{4}{7}-\frac{87}{7}\bar{f}+\frac{67}{2}\bar{f}^2-\frac{357}{16}\bar{f}^3\right)e^2+\left(-1+\frac{9}{8}\bar{f}\right)\bar{f}^2e^2\cos 2\omega+$$

$$\left.+\left(\frac{3}{7}-7\bar{f}+\frac{267}{16}\bar{f}^2-\frac{165}{16}\bar{f}^3\right)e^4+\left(1-\frac{39}{8}\bar{f}+\frac{33}{8}\bar{f}^2\right)\bar{f}e^4\cos 2\omega\right],$$

$$\omega_6 = \frac{525}{64}\left[\frac{8}{5}\left(1+8\bar{f}+\frac{129}{8}\bar{f}^2-\frac{297}{32}\bar{f}^3\right)+\right.$$

$$+\left(2-6\bar{f}+\frac{33}{8}\bar{f}^2\right)\bar{f}\cos 2\omega+6\left(1-\frac{43}{6}\bar{f}+\frac{109}{8}\bar{f}^2-\frac{121}{16}\bar{f}^3\right)e^2+$$

$$+\left(-2+25\bar{f}-\frac{459}{8}\bar{f}^2+\frac{561}{16}\bar{f}^3\right)e^2\cos 2\omega+$$

$$+\frac{3}{8}\left(1-\frac{11}{10}\bar{f}\right)\bar{f}^2e^2\cos 4\omega+\left(2-\frac{27}{2}\bar{f}+\frac{99}{4}\bar{f}^2-\frac{429}{32}\bar{f}^3\right)e^4+$$

$$+\left(-1+\frac{21}{2}\bar{f}-\frac{363}{16}\bar{f}^2+\frac{429}{32}\bar{f}^3\right)e^4\cos 2\omega+$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(-1+\frac{22}{5}\bar{f}-\frac{143}{40}\bar{f}^2\right)\bar{f}e^4\cos 4\omega\right],$$

$$\Delta M_* = 2\pi \sum_l J_l \left(\frac{R_E}{p}\right)^l M_l, \tag{68}$$

$$M_2 = \frac{3}{2}(1-e^2)^{1/2}\left(1-\frac{3}{2}\bar{f}\right),$$

$$M_3 = -\frac{3}{2}(1-e^2)^{3/2}(1-4e^2)\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)e^{-1}\sin\omega\sin i,$$

$$M_4 = \frac{45}{16}(1-e^2)^{1/2}\left[\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\left(1-\frac{7}{6}\bar{f}\right)\bar{f}\cos 2\omega + \right.$$
$$\left. + \left(-1+5\bar{f}-\frac{35}{8}\bar{f}^2\right)e^2\right],$$

$$M_5 = \frac{15}{4}(1-e^2)^{1/2}e^{-1}\sin i\left[\left(1-\frac{7}{2}\bar{f}+\frac{21}{8}\bar{f}^2\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{7}{4}e^2-\frac{9}{2}e^4\right)\sin\omega+\frac{7}{8}\left(1-\frac{9}{8}\bar{f}\right)(1-2e^2)\bar{f}e^2\sin 3\omega\right],$$

$$M_6 = -\frac{35}{16}(1-e^2)^{1/2}\left[\left(1-\frac{21}{2}\bar{f}+\frac{189}{8}\bar{f}^2-\frac{231}{16}\bar{f}^3\right)\times\right.$$
$$\times\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{15}{8}e^4\right)+\frac{15}{2}\left(1-3\bar{f}+\frac{33}{16}\bar{f}^2\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{3}{2}e^2-\frac{7}{4}e^4\right)\bar{f}\cos 2\omega+\frac{45}{32}\left(1-\frac{11}{10}\bar{f}\right)$$
$$\left.\times\left(1-\frac{7}{4}e^2\right)\bar{f}^2e^2\cos 4\omega\right],$$

$$\Delta p_* = 2\pi \sum_l J_l \left(\frac{R_E}{p}\right)^l p_l, \tag{69}$$

$$p_2 = 0,$$

$$p_3 = 3p\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)e\cos\omega\sin i,$$

$$p_4 = \frac{45}{8}p\left(1-\frac{7}{6}\bar{f}\right)\bar{f}e^2\sin 2\omega,$$

$$p_5 = -\frac{15}{2}pe\sin i\left[\left(1-\frac{7}{2}\bar{f}+\frac{21}{8}\bar{f}^2\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\cos\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{8}\left(1-\frac{9}{8}\bar{f}\right)\bar{f}e^2\cos 3\omega\right],$$

$$p_6 = -\frac{525}{16}pe\bar{f}\left[\left(1-3\bar{f}+\frac{33}{16}\bar{f}^2\right)\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)e\sin 2\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{16}\left(1-\frac{11}{10}\bar{f}\right)\bar{f}e^3\sin 4\omega\right].$$

Члены в выражениях (64)—(69), зависящие не от ω, а от a, i, e, вызывают вековые возмущения. Члены, содержащие синусы или косинусы по аргументам ω, 2ω, 3ω, 4ω, . . ., вызывают долгопериодические возмущения.

Важно установить, что в e, i, a не появляется никаких вековых возмущений.

Интегрирование выражений (64)—(69) дает вековые и долгопериодические возмущения Δe, ... для больших промежутков времени, если при этом ввести в качестве единицы времени период обращения спутника. Интегрирование производят по формулам следующего вида:

$$\int \cos u\omega \cdot dt = \frac{\sin u\omega}{u\omega^{\cdot}} + \text{const}, \tag{70}$$

$$\Delta e = \int\limits_{t_0}^{t} \Delta e_* (\omega) \cdot dt = \frac{1}{\omega^{\cdot}} \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \Delta e_* (\omega)\, d\omega. \tag{71}$$

Например, вековое и долгопериодическое возмущения в долготе восходящего узла Ω, вызываемые зональной гармоникой четвертого порядка, по (71) будут

$$J_4 \left(\frac{R_E}{p}\right)^4 n \left[\frac{15}{4} \cos i \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right)\left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) t - \right.$$
$$\left. - \frac{45}{32\omega^{\cdot}} \cos i \left(1 - \frac{7}{3} \sin^2 i\right) e^2 \sin 2\omega\right]. \tag{72}$$

Если n имеет размерность (сутки)$^{-1}$ = d^{-1}, то t здесь измерено в сутках, а $\omega^{\cdot}$ означает суточное изменение ω, полученное путем дифференцирования первого уравнения из (60). $\omega^{\cdot}$ появляется в уравнении (70) в знаменателе. Оно равно

$$\omega^{\cdot} = 3 J_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right).$$

Если $i = 63° \, 26'$ (критический наклон), то $\omega^{\cdot} = 0$ и возмущения на основании (70) имеют особенность $\omega = \text{const}$. Это устранимая особенность, она исключается, если интегрировать в (64)—(69) не аналитическим, а численным методом или вообще избрать другой путь интегрирования.

Полная величина возмущений орбиты, вызванных гравитационным полем Земли, получится, если в уравнения Лагранжа (40) подставить возмущающий потенциал (56) и затем интегрировать по времени аналитическим или численным методом. Если исключить из этой полной величины вековые и долгопериодические возмущения, то останутся возмущения короткопериодические.

Короткопериодические возмущения появляются, если в уравнении (56)

$$l - 2p + q \neq 0$$

или

$$m \neq 0,$$

или

$$l-2p+q \neq 0 \text{ и } m \neq 0.$$

Эти короткопериодические возмущения, вызванные полем силы тяжести Земли, имеют периоды

$$T, \ \frac{1}{2}T, \ \frac{1}{3}T, \ \frac{1}{4}T, \ldots$$

и

$$d, \ \frac{1}{2}d, \ \frac{1}{3}d, \ \frac{1}{4}d, \ldots,$$

где T — период обращения спутника, а d — продолжительность суток (точнее период $\theta - \Omega$).

Амплитуды короткопериодических возмущений редко превышают 70—100 м.

Они значительно меньше, чем вековые и долгопериодические возмущения, и поэтому определить их намного труднее. Так как при короткопериодических возмущениях появляется условие $m \neq 0$, то путем анализа этих возмущений получают возможность определения тессеральных и секториальных гармоник. Мы остановимся подробно на этой проблеме при обсуждении динамической спутниковой геодезии.

Здесь нельзя подробно представить аналитические выражения для короткопериодических возмущений, так как они слишком сложны для этого.

При практических вычислениях их получают из уравнений (56) и (40) на электронных вычислительных машинах.

Для отдельных волн в короткопериодических возмущениях спутника «Авангард 1» ($a = 8{,}7$ Мм; $e = 0{,}19$; $i = 34°$) Каула [6] вычислил табл. 2. Она содержит полученные статистически вероятные значения для коэффициентов C_{lm} и S_{lm} соответствующей сферической функции.

Таблица 2

Амплитуды некоторых короткопериодических возмущений в орбите спутника «Авангард-1»

l	m	p	q	$\Delta\Omega\,(m)$	$\Delta\omega\,(m)$	$\Delta M_1\,(m)$	$\Delta i\,(m)$	$\Delta a\,(m)$	$\Delta e\,(m)$
2	2	1	0	−115	+30	−65	+77	0	0
3	0	1; 2	0	+2	−10	−9	−3	−4	0
3	1	1	1	−4	+335	−212	+2	0	−54
4	1	2	0	−105	+289	−5	+37	0	0
4	2	2	0	−25	+92	−5	−41	0	0
6	1	3	0	+74	−58	0	−3	0	0

3.9. ВОЗМУЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

При интегрировании по периоду обращения спутника для определения вековых и долгопериодических возмущений из уравнений (64)—(69) в интегралах были приняты приблизительно постоянными элементы орбиты e, i, a. Это оправдано для сравнительно низких гармоник J_3, J_4, ... Но возмущения, вызванные J_2, значительно больше и существенно влияют на элементы орбиты, получающиеся на основании интегральной формы (62). Итак, при более строгом способе рассмотрения элементы орбиты при интегрировании нужно считать переменными. Из (62) получаем

$$\int_0^{2\pi}\left(e^{\cdot}\,\frac{dt}{dL}\right)_{a=a_0,\,e=e_0,\,\ldots} dL+\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left\{e^{\cdot}\,\frac{dt}{dL}\right\}\cdot(a-a_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial e}\left\{e^{\cdot}\,\frac{\partial}{\partial L}\right\}(e-e_0)+\ldots\right]dL=\Delta e_{*}+\Delta e_{**}.$$

Причем $e^{\cdot}\frac{\partial t}{\partial L}=e^{\cdot}\frac{dt}{d(\omega+\upsilon)}$ линейно зависит от J_2, такое соотношение действительно и для производной от этой величины по элементам орбиты a, e, ... С другой стороны $(a-a_0)$, $(e-e_0)$ тоже линейно зависят от J_2. Второй интеграл Δe_{**} в правой части последнего уравнения содержит J_2^2. Итак, мы имеем возмущения второго порядка. Так как члены с величинами $J_2\cdot J_3, J_2\cdot J_4, \ldots; J_3^2, J_4^2, J_3\cdot J_4,\ldots$ слишком малы, в большинстве случаев ими пренебрегают.

Возмущения второго порядка Δe_{**}, Δi_{**}, ... для одного оборота спутника даны Мерсоном [10] в следующем виде:

$$\Delta e_{**}=2\pi J_2^2\left(\frac{R_E}{p}\right)^4 e_{22}, \tag{73}$$

$$e_{22}=-3\sin\omega\left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)(1+e\cos\omega)^2-\right.$$

$$\left.-\bar{f}(1-e^2)\left\{\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)-\left(\frac{7}{8}-\frac{15}{16}\bar{f}\right)\right\}e\cos\omega\right],$$

$$\Delta i_{**}=2\pi J_2^2\left(\frac{R_E}{p}\right)^4 i_{22},$$

$$i_{22}=-\frac{3}{2}\sin 2i\left[\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)e\sin\omega+\left(-\frac{7}{16}+\frac{15}{32}\bar{f}\right)e^2\sin 2\omega\right],$$

$$\Delta\Omega_{**}=2\pi J_2^2\left(\frac{R_E}{p}\right)^4\Omega_{22},$$

$$\Omega_{22}=\frac{3}{2}\cos i\left[\left(\frac{3}{4}-5\bar{f}\right)+(4-10\bar{f})\,e\cos\omega+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{4}-\frac{5}{16}\bar{f}\right)e^2+\left(-\frac{7}{8}+\frac{15}{8}\bar{f}\right)e^2\cos 2\omega\right],$$

$$\Delta\omega_{**} = 2\pi J_2^2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^4 \omega_{22},$$

$$\omega_{22} = \frac{9}{4}\left[\left(-2+\frac{23}{6}\bar{f}-\frac{5}{3}\bar{f}^2\right)e^{-1}\cos\omega+\left(\frac{95}{12}\bar{f}-\frac{445}{48}\bar{f}^2\right)+\right.$$

$$+\left(-2+\frac{23}{12}\bar{f}+\frac{5}{8}\bar{f}^2\right)\cos 2\omega+\left(-\frac{25}{6}+\frac{461}{24}\bar{f}-\frac{50}{3}\bar{f}^2\right)e\cos\omega+$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\bar{f}\right)e\cdot\cos 3\omega+\ldots\right],$$

$$\Delta M_{**} = 2\pi J_2^2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^4 M_{22},$$

$$M_{22} = \frac{9}{2}(1-e^2)^{-1/2}\left[\left(1-\frac{23}{12}\bar{f}+\frac{5}{6}\bar{f}^2\right)e^{-1}\cos\omega+\right.$$

$$+\left(\frac{25}{12}\bar{f}-\frac{131}{48}\bar{f}^2\right)+\left(1-\frac{23}{24}\bar{f}-\frac{5}{16}\bar{f}^2\right)\cos 2\omega+$$

$$+\left(-\frac{7}{4}+\frac{355}{58}\bar{f}-\frac{20}{3}\bar{f}^2\right)e\cos\omega+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{16}\bar{f}\right)e\cos 3\omega+\ldots\right],$$

$$\Delta p_{**} = 2\pi J_2^2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^4 p_{22},$$

$$p_{22} = -6pef\left[\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)\sin\omega-\left(\frac{7}{16}-\frac{15}{32}\bar{f}\right)e\sin 2\omega\right].$$

Чтобы вычислить полные возмущения за один оборот спутника, возмущения Δe_{**}, Δi_{**}, ... надо сложить с возмущениями Δe_*, Δi_*,.... Конечно, возмущения второго порядка очень малы.

3.10. КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ВТОРОЙ ЗОНАЛЬНОЙ ГАРМОНИКИ

Прежде всего следует подробно остановиться на зависимости большой полуоси орбиты спутника a от периода обращения спутника. Если T_ω — аномалистический период, т. е. время между двумя последовательными прохождениями спутника через перемещающийся со временем перигей, и если

$$\bar{n} = \frac{2\pi}{T_\omega},$$

то, пренебрегая членами высших порядков, получаем

$$a = \left(\frac{kM}{\bar{n}^2}\right)^{1/3}\left[1+\frac{1}{2}J_2\frac{R_E^2}{p^2}\sqrt{1-e^2}\left(-1+\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right], \qquad (74)$$

где $\bar{a}$ и $\bar{n}$ — средние значения, свободные от короткопериодических возмущений, не относящиеся к определенному оскулирующему эллипсу.

Следует отметить часто используемые выражения для короткопериодических возмущений, вызванных второй зональной гармоникой, в аргументе широты L, в радиусе-векторе r, в долготе восходящего узла Ω и в наклоне i, выведенные Козаи

$$\left.\begin{aligned}
&\delta L_{KG2}=\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^2}{p^2}\Big[\frac{1}{2}\Big\{\Big(-1+\frac{7}{6}\sin^2 i\Big)\sin(2\omega+2v)+\\
&+e\Big[\Big(-1+\frac{5}{3}\sin^2 i\Big)\sin(2\omega+v)+\\
&\qquad+\frac{1}{3}(-1+\sin^2 i)\sin(2\omega+3v)\Big]\Big\}-\\
&-\Big\{\frac{1}{3}\Big(-1+\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)\Big[\Big(+1-\sqrt{1-e^2}\Big)\sin v\cos v+\\
&+e\Big(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\Big)^2\sin v\Big]+(v-M+e\sin v)\times\\
&\times\Big(-2+\frac{5}{2}\sin^2 i\Big)\Big\}\Big],\\
&\delta r_{KG2}=\frac{1}{2}\frac{R_E^2}{p}J_2\Big[\Big(-1+\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)\Big(1-\frac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}}+\\
&+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos v\Big)+\frac{1}{2}\cos(2\omega+2v)\sin^2 i\Big],\\
&\delta\Omega_{KG2}=\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^2}{p^2}\cos i\Big[-(v-M+e\sin v)+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\Big\{\sin(2\omega+2v)+e\Big[\sin(2\omega+v)+\\
&\qquad\quad+\frac{1}{3}\sin(2\omega+3v)\Big]\Big\}\Big],\\
&\delta i_{KG2}=\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{p^2}\sin i\cos i\Big[\cos(2\omega+2v)+\\
&+e\Big\{\cos(2\omega+v)+\frac{1}{3}\cos(2\omega+3v)\Big\}\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

С помощью этих четырех уравнений и уравнения (24) можно вычислить влияние на положение спутника короткопериодических возмущений, вызванных второй зональной гармоникой.

3.11. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ ОТ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В приведенных выше выражениях потенциал Земли был представлен разложением по сферическим функциям. Однако возмущения орбиты можно выразить как функции от аномалий силы тяжести на поверхности Земли. Тогда можно уже известные из наземных измерений аномалии силы тяжести ввести в качестве заданных величин. В другом случае их нужно рассматривать как неизвестные значения, подлежащие определению из наблюдений спутников.

Ондуляции геоида N и с ними возмущающий потенциал $T = GN$ на поверхности Земли вычисляют по формуле (2) Стокса. Для возмущающего потенциала во внешнем пространстве в зависимости от наземных аномалий силы тяжести (аномалии в свободном воздухе Δg_F) действует аналогичное выражение

$$T = \frac{r}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \Delta g_F \Phi_1 (S, Q)\, d\sigma, \tag{76}$$

где σ означает земной шар, введенный здесь как шар единичного радиуса. Функция Φ_1 зависит как от положения спутника S в пространстве, так и от переменного при интегрировании положения пункта Q. Это — функция Стокса, обобщенная для внешнего пространства. Используя сферические функции, получим

$$\Phi_1 (S, Q) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l-1} \tau^{l+2} P_l (\cos \psi). \tag{77}$$

Можно дать также замкнутое выражение

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1 (S, Q) = \\ &= \tau^2 \left[\frac{2}{D} + 1 - 3D - \tau \cos\psi \left(5 + 3 \ln \frac{1 + D - \tau\cos\psi}{2} \right) \right] \\ &\tau = \frac{R_E}{r}, \quad D^2 = 1 - 2\tau\cos\psi + \tau^2 \\ &\cos\psi = \sin\varphi_S \sin\varphi_Q + \cos\varphi_S \cos\varphi_Q \cos(\lambda_Q - \lambda_S) \end{aligned}\right\}, \tag{78}$$

где $r \cdot D$ — расстояние по прямой между точками S и Q; ψ — сферическое расстояние между ними.

Можно задать T в виде разложения по сферическим функциям, продифференцировать полученное таким образом выражение по элементам орбиты и подставить в уравнения Лагранжа (40). Разложим Φ_1 из (77) по сферическим функциям и представим эти функции по теореме сложения через долготы и широты подспутниковой точки S и пункта Q

$$\begin{aligned} P_l (\cos\psi) &= P_l (\sin\varphi_S) P_l (\sin\varphi_Q) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm} (\sin\varphi_S) P_{lm} (\sin\varphi_Q) \cos m (\lambda_S - \lambda_Q). \end{aligned} \tag{79}$$

Подставим полученную, таким образом, формулу для Φ_1 в (76), заменив в ней интеграл суммированием по всей земной поверхности, тогда получим для T выражение такой же формы, как выражение (55) для R_{lm}, так что можно применять теорию возмущений Каулы.

В таком случае в качестве неизвестных вместо стоксовых постоянных C_{lm} и S_{lm} появляются средние значения аномалий силы тяжести для принятых элементарных площадок $\Delta\sigma$ поверхности Земли.

Если хотят провести численное интегрирование уравнений (45), то необходимо вычислить составляющие K_1, K_2, K_3 градиента возмущающего потенциала T. Если B — составляющая градиента в направлении север — юг (положительна к северу), а L — в направлении восток — запад (положительна к востоку), то имеем

$$\left.\begin{aligned} B &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \Delta g \Phi_2(S,\ Q)\,d\sigma \\ L &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \Delta g \Phi_3(S,\ Q)\,d\sigma \\ \begin{matrix}\Phi_2\\ \Phi_3\end{matrix}\Bigg\} &= -\tau^3\begin{Bmatrix}\Psi_2\\ \Psi_3\end{Bmatrix}\Bigg[\frac{2}{D^3}+\frac{6}{D}+3\,\frac{D-1+\tau\cos\psi}{D\sin^2\psi}- \\ &\quad -8-3\ln\frac{D+1-\tau\cos\psi}{2}\Bigg] \\ \Phi_4 &= \tau^2\left[\frac{1-\tau^2}{D^3}-1-3\tau\cos\psi\right] \\ \Psi_2 &= \sin\psi\cos A=\sin\varphi_Q\cos\varphi_S-\cos\varphi_Q\sin\varphi_S\cos\left(\lambda_Q-\lambda_S\right) \\ \Psi_3 &= \sin\psi\sin A=\cos\varphi_Q\sin\left(\lambda_Q-\lambda_S\right) \\ \operatorname{ctg}\varkappa &= \cos(\omega+v)\operatorname{tg} i \end{aligned}\right\}. \qquad (80)$$

Отсюда получаются следующие составляющие для градиентов возмущающего потенциала:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= B\sin\varkappa-L\cos\varkappa \\ K_2 &= B\cos\varkappa+L\sin\varkappa \\ K_3 &= -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \Delta g\left(2\Phi_1+\Phi_4\right)d\sigma \end{aligned}\right\}. \qquad (81)$$

Аномалии силы тяжести Δg в (80) и (81) не идентичны аномалиям в свободном воздухе Δg_F уравнений (2) и (76), которые выводятся в физической геодезии по значениям силы тяжести, наблюдаемым на поверхности Земли, и значениям нормальной силы тяжести. Значения Δg в уравнениях (80) и (81) в известной степени являются аномалиями относительно формулы силы тяжести для новой модели Земли, которую определяют с помощью сферической функции нулевого порядка $\frac{kM}{r}$ и второй зональной гармоники J_2 реальной Земли. В спутниковой геодезии исследуют упомянутый потенциал реальной Земли, а не потенциал стандартного уровенного эллипсоида. Эти значения Δg находятся в следующем соотношении с аномалиями в свободном воздухе Δg_F:

$$\Delta g=\Delta g_F-9{,}4P_2(\sin\varphi)+7{,}1P_4(\sin\varphi)\ [\text{мгл}] \qquad (81,a)$$

в том случае, если значения Δg_F определяются по формуле силы тяжести Кассиниса, и

$$\Delta g=\Delta g_F-1{,}0P_2(\sin\varphi)+8{,}1P_4(\sin\varphi)\ [\text{мгл}] \qquad (81,б)$$

при применении формулы силы тяжести Гельмерта.

Интегралы для B, L, K_3 можно с достаточным приближением заменить суммами

$$\text{const} \sum_q [\Delta g]_q \Phi(S, Q_q) \Delta\sigma_q, \tag{82}$$

которые связаны линейной зависимостью с аномалиями силы тяжести $[\Delta g]_q$, относящимися к сферическим площадкам $\Delta\sigma$ земной поверхности. Под $\Delta\sigma$ следует понимать сферические площадки, равные $5 \times 5°$, $10 \times 10°$, $15 \times 15°$ или $20 \times 20°$.

Если значения $[\Delta g]_q$ определены из наземных измерений, их можно вводить как известные величины. Если же они не определялись, то их относят к неизвестным задачи.

Интегрирование уравнений (45) по времени происходит по одному из многочисленных методов численного интегрирования, рекомендуемых прикладной математикой. Интервалы интегрирования по времени будут составлять примерно от 30 до 60 сек.

Здесь рекомендуется интегрирование по методу Симпсона

$$\delta a = \int \dot{a}\, dt = \frac{1}{3} \Delta t \, (\dot{a}_1 + 4\dot{a}_2 + 2\dot{a}_3 + 4\dot{a}_4 + \ldots + 4\dot{a}_{n-1} + \dot{a}_n). \tag{83}$$

3.12. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold K.: Die Bahnen der künstlichen Erdsatelliten in ihrer Abhängigkeit von den Schwereanomalien. Veröff. d. Geodät. Inst. Potsdam, Nr. 27 (1965).

2. Arnold K. Analytische Integration der durch die Schwereanomalien hervorgerufenen Satellitenbahnstörungen. Gerl. Beitr. Geophysik, 76 (1967) H. 4.

3. Brouwer D., Clemence G. M.: Methods of Celestial Mechanics. Academic Press, New York, London 1961.

(Русский перевод: Д. Брауэр, Дж. Клеменс. Методы небесной механики, М., «Мир», 1964).

4. Collatz L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer Verlag. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.

5. Groves G.: V. Motion of a Satellite in the Earth's Gravitational Field. Proc. Roy. Soc., Ser. A. 254 (1960) 48.

6. Kaula W. M.: Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites. Geophys. J. 5. (1961).

7. Kaula W. M.: Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Company 1966.

(Русский перевод: У. Каула. Спутниковая геодезия. Теоретические основы. М., «Мир», 1970).

8. Koch K. R: Die Bestimmung der Bahnstörungen künstlicher Erdsatelliten mit Hilfe von Schwereanomalien. Schweiz Z. f. Vermessung; Photogrammetrie u. Kulturtechnik Nr. 3 (1967).

9. Kulikov D. K.: Intergration of equations of celestial mechanics by Cowell's method with variable intervals. In Roy, M. ed: Dynamics of Satellites. Springer — Verlag 1963.

10. Merson R. H.: The Motion of a Satellite in an Axi — symmetric Gravitational Field. Geopghys J. 4 (1961).

11. Moulton F. R.: Einführung in die Himmelsmechanik. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1927.

(Русский перевод: Ф. Мультон. «Введение в небесную механику». ОНТИ. М — Л., 1935).

12. R o y M.: ed. Dynamics of Satellites. Springer — Verlag 1963.

13. S c h n e i d e r M.: Beiträge zur Bahnmechanik künstlicher Erdsatelliten. Dtsch. Geodät. Komm. München Reihe A. H. 51 (1966).

14. S c h n e i d e r M.: Die Bewegung künstlicher Erdsatelliten in Schwerefeld einer Erde mit drei verschiedenen Trägheitsmomenten. Dtsch. Geodät. Komm. München, Reihe C. H. 93 (1966).

15. S m a r t W. M.: Celestial Mechanics. Longmans, Green and Co. London, New York, Toronto 1953.

(Русский перевод: У. Смарт. «Небесная механика». М., «Мир», 1965).

16. V e i s G.: The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Proceedings of the first International Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy. North — Holland Publishing Company 1963.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ, ВЫЗВАННЫЕ ПРИТЯЖЕНИЕМ СОЛНЦА И ЛУНЫ, СОПРОТИВЛЕНИЕМ АТМОСФЕРЫ И СВЕТОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Для спутниковой геодезии было бы выгодно, если бы отклонения орбит спутников от кеплеровских эллипсов вызывались бы только полем силы тяжести Земли; в таком случае полученные из наблюдений оскулирующие элементы орбиты можно было бы анализировать непосредственно для геодезических целей. Но возмущения в орбитах спутников вызываются и другими влияниями, а именно: гравитационным действием Солнца и Луны, сопротивлением атмосферы и световым давлением, которое Солнце оказывает на спутники. Названы лишь важнейшие возмущающие влияния. Приливы и отливы твердой Земли также оказывают значительное влияние на орбиты спутников.

4.1. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ, ВЫЗВАННЫЕ ПРИТЯЖЕНИЕМ СОЛНЦА И ЛУНЫ

Прежде всего остановимся на возмущающем влиянии Луны. Под влиянием притяжения Луны появляются вековые и периодические возмущения. Периодические возмущения Луны могут изменять орбиты спутников примерно на 100 м, величину, которая значительно превышает точность наблюдений, составляющую около $\pm 10 - \pm 20$ м. Возмущения, вызванные Луной, имеют много разных периодов. Периоды с наибольшими амплитудами достигают двух недель, это, как правило, меньше, чем отрезки времени, в течение которых рассматриваются орбиты в спутниковой геодезии, составляющие несколько недель или месяцев. Возмущения, вызванные Луной, могут быть представлены

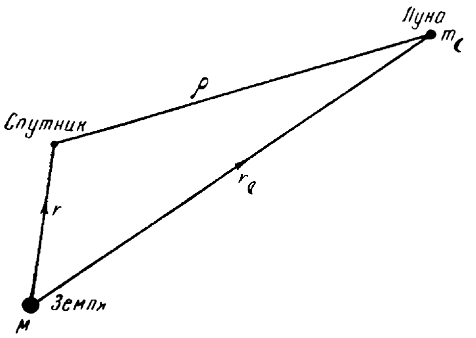


Рис. 6. Положение спутника относительно Земли и Луны

не только постоянными или линейно изменяющимися со временем дополнительными членами в элементах орбиты, которые должны быть определены эмпирически. На рис. 6 показано геометрическое положение спутника относительно Земли и Луны, массы которых M и $m_☾$ при этих рассуждениях можно считать сконцентрированными в центрах этих тел.

Массу спутника можно считать настолько малой, что она не оказывает никакого гравитационного действия на Землю и Луну.

Геоцентрические векторы положения спутника и Луны будут

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_☾ \\ y_☾ \\ z_☾ \end{pmatrix},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_☾^2 = x_☾^2 + y_☾^2 + z_☾^2,$$

$$\rho^2 = (x - x_☾)^2 + (y - y_☾)^2 + (z - z_☾)^2.$$

Если принять за начало координат центр масс Земли, то на Землю оказывает действие гравитационная сила Луны

$$\frac{km_☾}{r_☾^3} x_☾,$$

а на спутник гравитационные силы Земли и Луны

$$-\frac{kM}{r^3} x - \frac{km_☾}{\rho^3} (x - x_☾).$$

Для составляющих y и z справедливы аналогичные уравнения.

Итак, на Землю действует сила, направленная к Луне, а на спутник — силы, направленные к Земле и Луне. Силы, действующие на Луну, не представляют здесь интереса, так как наша задача — описать лишь движение спутника относительно Земли. Ускорение спутника при его движении вокруг Земли определяется разностью сил, действующих на спутник и Землю,

$$\ddot{x} = -\frac{kM}{r^3} x - \frac{km_☾}{r_☾^3} x_☾ - \frac{km_☾}{\rho_☾^3} (x - x_☾). \tag{84}$$

Дано уравнение только для составляющей x.

Второй и третий члены в правой части этого уравнения определяют возмущения, вызванные Луной. Их можно выразить градиентом, используя производные потенциала $V_☾$ по координатам спутника x, y, z

$$V_☾ = km_☾ \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx_☾ + yy_☾ + zz_☾}{r_☾^3} \right], \quad \operatorname{grad} V_☾ = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_☾}{\partial x} \\ \frac{\partial V_☾}{\partial y} \\ \frac{\partial V_☾}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (85)$$

Производная от $V_☾$ по x равна второму и третьему члену правой части уравнения (84)

$$\ddot{x} = -\frac{kM}{r^3} x + \frac{\partial V_☾}{\partial x}. \qquad (86)$$

Аналогичные уравнения справедливы для составляющих по y и z.

Нужно разложить этот возмущающий потенциал $V_☾$ по шести элементам орбиты, образовать производные по этим параметрам и подставить в уравнения Лагранжа [40], чтобы путем аналитического интегрирования получить возмущения в элементах орбиты, вызванные гравитационным действием Луны.

Козаи [17] с этой целью выразил в уравнении (85) координаты спутника, пользуясь (28), через элементы орбиты L, Ω, i. Подобным образом были представлены координаты Луны через элементы ее орбиты и подставлены в уравнение для потенциала (85).

Таким путем Козаи нашел для возмущающего потенциала Луны $V_☾$ следующее разложение по элементам орбит Луны и спутника:

$$V_☾ = n_☾^2 m_☾ a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a_☾}{r_☾}\right)^3 \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i_☾\right) + \right.$$

$$+ \frac{3}{16} \sin 2i \sin 2i_☾ \cos(\Omega - \Omega_☾) + \ldots +$$

$$\left. + \frac{3}{4} \sin i \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 i_☾ \sin^2 \frac{i_☾}{2} \cos(2\zeta_☾ - 3\Omega_☾ - 2L + \Omega) \right]. \qquad (87)$$

Всего в квадратных скобках стоят 23 тригонометрических выражения. Буквой $n_☾$ обозначено среднее движение Луны, $\zeta_☾ = v_☾ + \omega_☾ + \Omega_☾$ — истинная долгота Луны.

Рекомендуется заменить $i_☾$ и $\Omega_☾$ аналогичными величинами, отнесенными к эклиптике. Если I — наклон орбиты Луны относительно эклиптики ($I \cong 5°, 15$) и N — долгота восходящего узла орбиты Луны, отсчитанная по эклиптике, а ε почти постоянный наклон экватора к эклиптике ($\varepsilon \cong 23° 27'$), то

$$\sin i_☾ \sin \Omega_☾ = \sin I \sin N,$$

$$\sin i_☾ \cos \Omega_☾ = \sin \varepsilon \cos I + \cos \varepsilon \sin I \cos N.$$

Наконец, $\frac{r}{a}$ и $\frac{a_☾}{r_☾}$ в (87) выражают через эксцентриситет орбиты и среднюю аномалию, после чего уравнение (87) подставляют в уравнения возмущений. Поскольку разложения содержат очень много членов, привести их здесь полностью невозможно.

Вековые возмущения, вызванные гравитационной силой Луны и Солнца, появляются в аргументе перигея ω и в долготе восходящего узла Ω.

Козаи [17] нашел следующие выражения для вековых возмущений орбиты, вызванных притяжением Луны:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{3}{4}\frac{n_☾^2}{n}m_☾\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i+\frac{1}{2}e^2\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_☾\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{3}{4}\frac{n_☾^2}{n}m_☾\frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_☾\right)$$

При этом

$$\sin^2 i_☾=\frac{1}{2}\sin^2 I\,(1+\cos^2\varepsilon)+\sin^2\varepsilon\cos^2 I+$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\sin 2I\cos N-\frac{1}{2}\sin^2 I\sin^2\varepsilon\cos 2N,$$

$m_☾$ — масса Луны в единицах массы Земли.

Для вычисления положения Луны используют среднюю долготу Луны и среднюю долготу ее перигея и отсчитанную по эклиптике долготу восходящего узла ее орбиты N. Эти значения можно взять из приложения к «Astronomical Ephemeris», например $N = 259{,}18° - 0{,}05295°\, d$, где d — число суток от юлианской даты 2 415 020,0.

Вековые изменения орбиты, вызванные гравитационным действием Солнца, получим, если подставим вместо $m_☾$, $n_☾$, $i_☾$ соответствующие величины, относящиеся к Солнцу и его движению по орбите ($m_☾ \to 1$, $I \to 0$).

Козаи [17] нашел в движении спутника 1958 β_2 следующие вековые возмущения за сутки.

Таблица 3

Возмущения	$\frac{d\omega}{dt}$	$\frac{d\Omega}{dt}$
Наблюдаемые вековые возмущения	$4{,}40462° \pm 10$	$-3{,}01507° \pm 4$
Вычисленная вековая часть возмущений от Луны	$0{,}00039°$	$-0{,}00028°$
Вычисленная вековая часть возмущений от Солнца	$0{,}00018°$	$-0{,}00013°$

В большинстве случаев можно довольствоваться приближенным определением гравитационного влияния Луны на орбиты спутников с остаточной ошибкой в 10%. Поэтому можно не учитывать многие члены в выражении (87) Козаи. Главные члены имеют периоды примерно в 14 дней.

Для возмущающего действия притяжения Солнца на спутник справедливы подобные математические разложения. В то время, как возмущения, обусловленные гравитационным полем Земли, вызывают в элементах орбиты спутника периодические изменения, причем периоды некоторых из них составляют только доли оборота спутника, самые короткие периоды главных членов в возмущениях, вызванных Солнцем и Луной, равны нескольким суткам. При численном интегрировании в случае возмущений от гравитационного поля Земли интервал интегрирования едва ли может составлять больше 1 мин, в то время как в случае возмущений, вызванных гравитационным действием Солнца и Луны, можно обходиться значительно большими интервалами интегрирования.

По этой причине вычисления возмущений для определения гравитационного эффекта Солнца и Луны можно проводить не аналитически, а численно.

Подробные формулы для возмущений, вызванных гравитационным действием Луны и Солнца, можно найти у Гапошкина [4].

Наконец, следует подчеркнуть, что все параметры, появляющиеся в этой теории возмущений, известны с точностью, вполне достаточной для наших целей, в противоположность возмущающим силам, вызванным действием атмосферы.

4.2. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ НА ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ

Для определения тормозящего действия атмосферы необходимы точные данные об изменении плотности вдоль орбиты, по которой движется спутник, а также необходимо знать векторы скорости воздуха в этой области. Но эти данные зависят от многих геофизических и астрофизических параметров. Плотность изменяется с высотой над земной поверхностью, ночью плотность меньше, чем днем на такой же высоте. Далее, плотность зависит от солнечной активности. Обнаружена хорошая корреляция между интенсивностью солнечного излучения на волнах 10,7 и 20 см, с одной стороны, и изменением плотности атмосферы, с другой стороны. Геомагнитный индекс также коррелирует с плотностью.

Нет возможности изложить здесь подробно сведения о плотности атмосферы и вытекающие отсюда следствия для возмущений орбиты спутника, так как это является самостоятельной научной отраслью. Здесь приведены только самые важные факты и соотношения, необходимые для учета влияния тормозящего действия атмосферы на орбиты спутников в такой мере, в какой это необходимо для спутниковой геодезии.

Из рис. 7 и 8 можно получить представление об изменении плотности, суточном эффекте и зависимости плотности от солнечной активности. При увеличении высоты от 500 до 800 км плотность уменьшается примерно на 1/100 ее величины, которую она имела на высоте 500 км. Подобным образом на больших высотах будут уменьшаться возмущения орбиты, линейно зависящие от плотности атмосферы. Из рис. 8 видно, что на высоте около 730 км плотность может изменяться вследствие изменения солнечной активности примерно в 10 раз. Деятельность Солнца может за короткий период увеличить в десять раз возмущения орбиты, вызванные сопротивлением атмосферы. Суточный эффект действует прежде всего на больших высотах, т. е. на высотах более 350 км, в то время как на высотах до 200 км он почти исчезает. Суточный эффект можно объяснить волнообразными

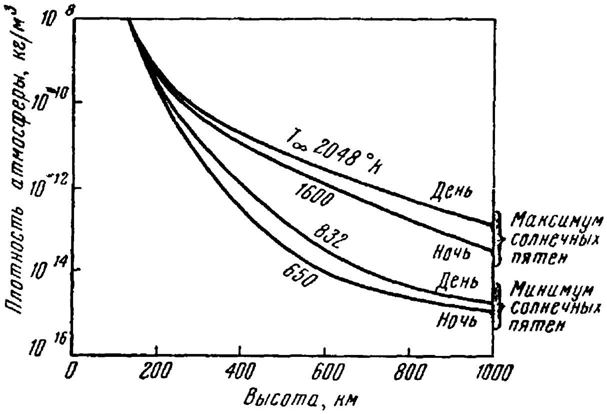


Рис. 7. Изменение плотности в верхней атмосфере при максимуме и минимуме солнечных пятен с учетом суточного эффекта. Профиль соответствует модели атмосферы (Яккиа, 1965) в случае, когда максимальная дневная температура выше минимальной ночной на 28%

деформациями земной атмосферы, имеющими экстремальные значения в точках, в которых Солнце находится в зените (максимум) или в надире (минимум), при этом может быть обнаружено смещение фазы от 20 до 30°, вызванное вращением Земли. Значительное влияние на орбиты спутников оказывают также колебания солнечного излучения, достигающего Земли, с периодом 27 суток, вызванные вращением Солнца. Они коррелируют с солнечным излучением на волне 10,7 см.

Известно, что из-за действия на спутник сопротивления атмосферы возникает в направлении его движения ускорение, которое равно

$$-\frac{1}{2}\vartheta\varkappa\bar{v}^2, \qquad (88)$$

где v — плотность воздуха,

$$\varkappa = C_D\frac{A}{m}, \qquad (89)$$

где C_D — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления (в среднем $C_D = 2,2$); A — площадь среднего поперечного сечения спутника, m — его масса и $\bar{v}$ — его линейная орбитальная скорость.

Так как сопротивление атмосферы действует в направлении, противоположном движению по орбите, то прежде всего под его влиянием будет испытывать возмущения средняя аномалия M. Спутник

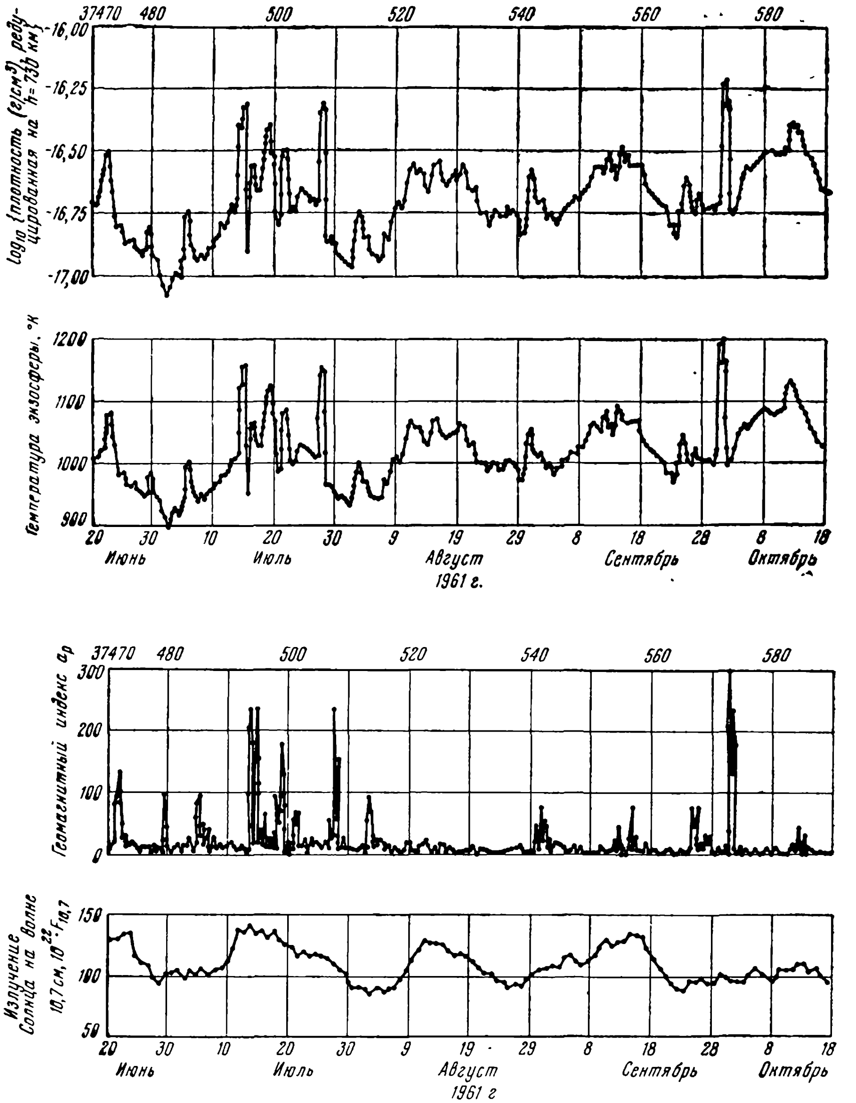


Рис. 8. Плотность и температура атмосферы по возмущениям орбиты спутника «Эксплорер-9» (1961 δ 1), геомагнитный индекс a_p и солнечное излучение на волне 10,7 см. Возмущения орбиты получены из точных фотографических наблюдений камерами «Бейкер-Нанн». Единица по оси абсцисс — модифицированный юлианский день (*J. D.* — 2400000,5)

«Эксплорер 9», испытывавший сравнительно сильные возмущения, имел 29 марта 1964 г. ($= T_0$) следующую среднюю аномалию M (M в оборотах, t в сутках)

$$M = 0{,}82465 + 14{,}536862\,(t - T_0) + 2{,}153 \cdot 10^{-2}\,(t - T_0)^2.$$

Средняя величина среднего движения $\bar{n}$ изменялась за сутки примерно на 0,3%, что за один оборот давало необычайно большую величину — около 10 км.

Неожиданным является то, что член $c\,(t - T_0)^2$ выражает ускорение в движении спутника, а не замедление, как этого следовало ожидать. Причину нужно искать в энергетическом балансе спутника. Вследствие сопротивления атмосферы расходуется кинетическая энергия спутника. Согласно уравнению (13) полная энергия спутника равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$\frac{1}{2}\,m\bar{v}^2 - kM\,\frac{m}{r} = -\,\frac{1}{2}\,kM\,\frac{m}{a}.$$

Если эта энергия уменьшается, то должно уменьшаться также a, но тогда среднее движение спутника n по третьему закону Кеплера становится больше.

Для средней аномалии первого геодезического спутника «Анна 1 В» имели на 3 ноября 1964 г. ($= T_0$) выражение

$$M = 0{,}15845 + 13{,}344946\,(t - T_0) + 3{,}0 \cdot 10^{-8}\,(t - T_0)^2.$$

Относительное изменение $M^{\cdot}$ составляло примерно $5 \cdot 10^{-9}$ в сутки, т. е. несколько сантиметров за оборот.

При исследованиях, не требующих наивысшей точности, или при использовании спутников, орбиты которых мало возмущены, т. е. таких, которые движутся на больших высотах, имеют малое поперечное сечение A и большую массу m, для учета влияния сопротивления воздуха обходятся часто тем, что при определении орбиты представляют среднюю аномалию квадратичным полиномом

$$M = M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + \ldots, \tag{90}$$

коэффициенты которого M_0, M_1, M_2 определяются эмпирически из уравнивания результатов наблюдений спутника. Возмущение в большой полуоси a в соответствии с третьим законом Кеплера равно

$$-\,\frac{4}{3}\,\frac{a}{n}\,M_2 t + \ldots\ldots$$

Возмущения в других элементах орбиты, вызванные сопротивлением воздуха, довольно малы. Если не предъявлять особых требований, то в большинстве случаев их можно учитывать с достаточной точностью с помощью приближенных формул.

Пригодный в большинстве случаев путь определения возмущений, вызванных сопротивлением атмосферы, в элементах a, e, ω, Ω состоит в следующем.

Для средней аномалии выполняют разложение в степенной ряд по формуле (90), причем предполагают, что здесь исключены вековые возмущения от гравитационного действия Солнца и Луны и от влияния светового давления Солнца. Коэффициенты этого редуцированного таким образом степенного ряда получают из наблюдений спутников. Коэффициент M_2 в уравнении (90) с этими предпосылками представляет собой только влияние сопротивления атмосферы, на него не влияют зональные гармоники.

Путем дифференцирования (90) получают среднее значение среднего движения

$$\bar{n} = M^{\cdot} = M_1 + 2M_2 t + \ldots. \tag{91}$$

Изменение среднего движения от эпохи $t = 0$

$$\Delta\bar{n} = \bar{n} - \bar{n}_0 = 2M_2 t + \ldots. \tag{92}$$

По третьему закону Кеплера, используя n, получают большую полуось a

$$\Delta a = a - a_0 = -\frac{4}{3}\frac{a}{n}\cdot M_2 t + \ldots. \tag{93}$$

Особо следует отметить, что в большой полуоси a и в $\bar{n}$ не наблюдают вековых и долгопериодических влияний, вызванных полем силы тяжести, если не принимать во внимание резонансов, вызванных тессеральными и секториальными гармониками высших порядков, которые будут рассмотрены далее. В этом состоит преимущество практического определения влияния сопротивления воздуха с использованием $\Delta\bar{n}$ и Δa по формулам (90)—(93). По Δa и $\Delta\bar{n}$ получают соответствующее возмущение в эксцентриситете e, вызванное тормозящим действием атмосферы

$$\Delta e = (1 - e)\cdot\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3}(1 - e)\cdot\frac{\Delta\bar{n}}{n}. \tag{94}$$

Теория, согласно которой выведено уравнение (94), основана на том, что средняя высота перигея изменяется очень мало по сравнению с изменением полуоси a и эксцентриситета. Радиус-вектор перигея $a\,(1 - e)$ считают постоянным, а радиус-вектор апогея $a\,(1 + e)$ переменным из-за влияния сопротивления атмосферы. Эта предпосылка верна с достаточным приближением.

Изменения a и e, вычисленные соответственно по формулам (93), (94), вызванные сопротивлением атмосферы, распространяются согласно уравнению (60) также на вращение линий узлов и апсид. Таким образом, вычисляют влияние тормозящего действия атмосферы на вращение линий апсид и узлов по формулам

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{1}{3}\frac{\omega^{\cdot}}{n}\left\{\frac{7 - e}{1 + e}\right\}\Delta M, \\ \Delta\Omega &= \frac{1}{3}\frac{\Omega^{\cdot}}{n}\left\{\frac{7 - e}{1 + e}\right\}\Delta M, \end{aligned} \tag{95}$$

где

$$\Delta M = M_2 t^2.$$

Вековые изменения $\omega^{\cdot}$, $\Omega^{\cdot}$ получают по формулам (60).

Эту теорию можно еще уточнить, учитывая изменение радиуса-вектора перигея и добавляя в наклон орбиты i возмущение, вызванное вращением атмосферы.

При определении тессеральных и секториальных гармоник поля силы тяжести Земли орбитальным методом стараются путем введения поправок устранить все возмущающие влияния тормозящего действия атмосферы, в том числе и периодические, чтобы не искажать результат. Поэтому необходимо разработать для атмосферных возмущений подробную теорию.

Необходимо разложить вектор скорости спутника на составляющие в направлении радиуса-вектора (K_3) и тангенциальную — (K_2), отсюда вывести соответствующие составляющие K_3 и K_2 вектора ускорения (88) и выразить их через элементы орбиты. Находим обе составляющие вектора скорости

$$(K_2) = \sqrt{\frac{kM}{p}}\,(1 + e\cos v), \quad (K_3) = e\sqrt{\frac{kM}{p}}\sin v$$

и составляющие возмущающего ускорения, действующего на спутник, без учета возмущения, вызванного вращением земной атмосферы,

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= -\frac{1}{2}\vartheta\varkappa\frac{kM}{p}\,(1 + 2e\cos v + e^2)^{\frac{1}{2}}\,(1 + e\cos v) \\ K_3 &= -\frac{1}{2}\vartheta\varkappa\frac{kM}{p}\,(1 + 2e\cos v + e^2)^{\frac{1}{2}}\,e\sin v \end{aligned}\right\}. \qquad (96)$$

Так как в более низких слоях атмосфера вращается вокруг оси вращения Земли, возникает также возмущающее ускорение K_1, перпендикулярное к плоскости орбиты.

Зависимость плотности ϑ от высоты h выражают следующим экспоненциальным уравнением:

$$\vartheta = \vartheta_0 \exp\left[-\frac{h - h_0}{H}\right]. \qquad (97)$$

Величины с нулевым индексом относятся к некоторой фиксированной высоте h_0. Шкалу высот H, которую в общем для орбиты спутника считают постоянной, при более строгом подходе следует рассматривать как переменную. На высоте 200 км $H \cong 30—40$ км, на высоте 700 км $H \cong 90—160$ км в зависимости от положения Солнца (суточный эффект).

С помощью уравнений (97), (96), (45) путем интегрирования получают возмущения орбиты, вызванные атмосферой для одного оборота спутника

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= -2\pi a^2 \vartheta_p \varkappa F_p \exp(-ae/H)\,[I_0 + 2eI_1] \\ \delta e &= -2\pi a \vartheta_p \varkappa F_p \exp(-ae/H)\left[I_1 + \frac{1}{2}e(I_0 + I_2)\right] \\ \delta\omega &= -\cos i \times \delta\Omega \\ \delta i &= -\frac{1}{2}\pi a \vartheta_p \varkappa \sqrt{F_p}\cdot\beta\cdot T_d \exp(-ae/H)\sin i \times \\ &\times [I_0 + \cos 2\omega I_2 - 4e\cos^2\omega\, I_1] \\ \delta\Omega &= -\frac{1}{2}\pi a \vartheta_p \varkappa \sqrt{F_p}\cdot\beta\cdot T_d \exp(-ae/H)\sin 2\omega\,(I_2 - 2eI_1). \end{aligned}\right\} \quad (98)$$

С помощью δa по третьему закону Кеплера вычисляют возмущение в n, ϑ_p — плотность на высоте перигея $h_p = a(1-e) - R_E$. Если ω_E — угловая скорость Земли, то $\sigma = \beta\omega_E$ — угловая скорость атмосферы. Итак, в уравнениях (98) по сравнению с уравнениями (96) учитывается, что на высоте примерно в 250 км атмосфера имеет другую угловую скорость, чем Земля. Для высот около 200—300 км получают величину $\beta = 1{,}27 \pm 0{,}18$, которой соответствует западный или восточный ветер со скоростью около 100 м/сек в средних широтах. В уравнениях (98)

$$F_p = \left[1 - \sigma\cos i\,\frac{a(1-e)}{\sqrt{\frac{kM}{p}(1+e)}}\right]^2,$$

T_d — период обращения спутника, выраженный в сутках, $I_n(x)$ — функция Бесселя n-ого порядка, равная

$$I_n(x) = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2\pi}\exp(x\cos E)\cos nE\,dE.$$

В уравнении (97) пренебрегли сжатием атмосферы Земли.

Аэродинамический коэффициент лобового сопротивления C_D определяется недостаточно уверенно. Коэффициент зависит от формы спутника. В случае сферической формы спутника его можно определить надежно, асферические же спутники часто совершают колебательные движения, если они не стабилизированы. В таком случае коэффициент C_D определить труднее. Но в общем C_D лежит между 2,1 и 2,3; таким образом, 2,2 — надежная средняя величина. Для «Спутника 3» (третий советский спутник. — Перев.) было получено $C_D = 2{,}15$.

Если хотят при определении возмущений орбиты как можно полнее использовать сведения об изменении плотности атмосферы, поскольку это необходимо для целей спутниковой геодезии, и в особенности, если хотят учесть в качестве дальнейших параметров суточный эффект и интенсивность излучения Солнца на волне **10,7 см**, то пользуются теорией Яккиа [7—10].

Плотность вычисляют по формуле

$$\vartheta(h) = \vartheta_0\left(1 + \alpha\cos^{n'}\frac{\psi'}{2}\right), \tag{99}$$

где $\vartheta(h)$ — плотность на высоте h над поверхностью Земли, α и n' — некоторые параметры, ψ' — угол между осью аномалии плотности, вызванной суточным эффектом, и радиусом-вектором спутника. Из соотношения

$$\lg\vartheta_0 = \bar{a} + \bar{b}h + \bar{c}\exp(-0{,}01h) \tag{100}$$

находят ϑ_0, где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — коэффициенты, определяемые эмпирически, Сегнал [26].

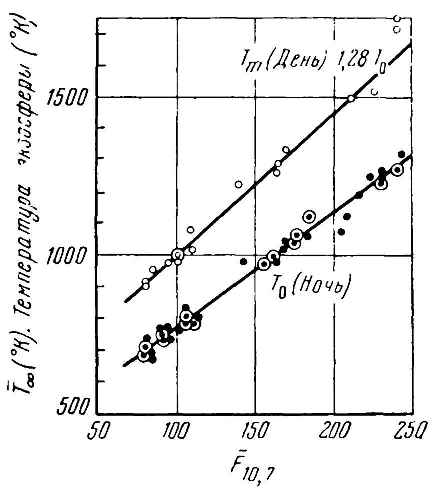


Рис. 9. Температура экзосферы днем и ночью в зависимости от интенсивности солнечного излучения на волне 10,7 см. Даны средние значения температуры и интенсивности излучения, в которых исключается влияние вращения Солнца, вызывающее вариации с периодом в 27 суток. Значения температуры даются в зависимости от изменения плотности в определенной модели атмосферы. Изменения плотности получены из возмущений в орбитах спутников (Яккиа, 1965)

Коэффициенты α, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и показатель степени n' определяются для соответствующего дня и спутника следующим образом.

На рис. 9 приведен график ночной температуры экзосферы T_0 в зависимости от наблюдаемой интенсивности солнечного излучения на волне 10,7 см. По T_0 получают используемые далее значения $T_{1/2} = 1{,}14\ T_0$ и $T_M = 1{,}28\ T_0$. Для этих трех температур и высоты перигея спутника выбирают из таблиц, составленных Яккиа [8], соответствующие плотности воздуха ϑ_0, $\vartheta_{1/2}$, ϑ_M. В результате получают коэффициент α и показатель степени n' из (99) по формулам

$$\alpha = \frac{\vartheta_M - \vartheta_0}{\vartheta_0}, \quad n' = 6{,}644\,[\lg(\vartheta_M - \vartheta_0) - \lg(\vartheta_{1/2} - \vartheta_0)].$$

Из таблиц Яккиа по значениям температуры T_0 для трех разных точек, расположенных над перигеем, выбирают соответствующие значения плотности и получают три уравнения вида (100) для определения коэффициентов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Итак, функция плотности (99) известна.

С помощью этой функции плотности по уравнениям (88), (89), (96) вычисляют действующие на спутник возмущающие ускорения. Составляющие вектора K_1, K_2, K_3 рекомендуется представлять не через истинную аномалию v, а через эксцентрическую — E для того, чтобы подставить их потом в уравнения возмущений (45). Затем получают выражение для возмущения в большой полуоси a в виде

$$a = K_a \cdot F_a(E) \cdot \vartheta \cdot E^{\bullet}.$$

Вместо $F_a(E)$ и ϑ подставляют разложения в степенные ряды по эксцентриситету e орбиты спутника, тогда

$$\cos\psi' = \frac{a}{r}\left(D_1 \cos E - D_1 e + D_2 \sqrt{1-e^2} \sin E\right),$$

$$D_1 = D_1(i,\ \omega,\ \Omega,\ \varepsilon,\ \bar{L},\ \bar{\lambda}),$$

$$D_2 = D_2(i,\ \omega,\ \Omega,\ \varepsilon,\ \bar{L},\ \bar{\lambda}),$$

где i, ω, Ω — элементы орбиты спутника, ε — наклон эклиптики, $\bar{L}$ — долгота Солнца и $\bar{\lambda}$ — разность между прямыми восхождениями Солнца ($\alpha_{\odot}$) и оси аномалии, вызванной суточным эффектом (α_B), $\alpha_{\odot} + \bar{\lambda} = \alpha_B$ ($\bar{\lambda} \cong 30°$). Для обоих направлений предполагается равенство склонений $\delta_{\odot} = \delta_B$.

Следует подчеркнуть, что с помощью этой теории надеются с удовлетворительной точностью определить короткопериодические возмущения, вызванные атмосферой, и, учитывая их, уменьшить остаточную ошибку орбитального метода. Как известно, в орбитальном методе остаточные ошибки наблюдений, получающиеся после уравнивания, значительно больше, чем внутренняя точность наблюдений.

Модель атмосферы, определяемая с помощью уравнений (99) и (100), разумеется, только лишь некоторое приближение к истинной структуре плотности атмосферы.

В результате уточнений получена модель, более близкая к истинной атмосфере. Необходимо исследовать, какое значение могут иметь эти уточнения для спутниковой геодезии, особенно для орбитального метода; Фридман [3], Яккиа и Слоуи [11], Яккиа [9, 10].

4.3. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ ОТ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ СОЛНЦА

Следующий возмущающий эффект внеземного происхождения вызывается световым давлением, которое солнечный свет оказывает на спутник. Полученное вследствие этого ускорение для сферического спутника в векторной форме равно

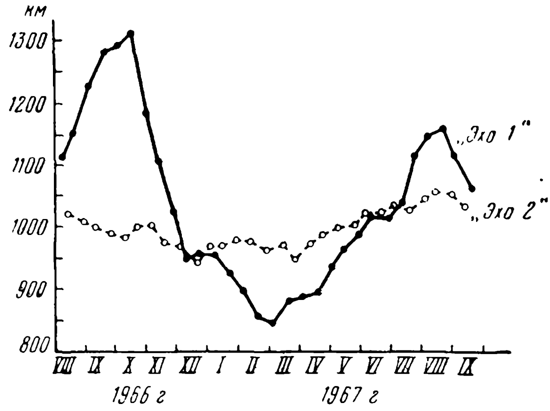
$$t = K\frac{A}{m}\cdot\frac{1}{c}I_0\left(\frac{a_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^2\left[\left(1-\frac{v_n}{c}\right)n_\varepsilon - \frac{1}{c}v_s\right], \tag{101}$$

где K — коэффициент, заключенный между 0 и 2, зависит от отражающего свойства спутника. A и m имеют такое же значение, как в уравнении (89), c — скорость света, I_0 — солнечная постоянная

($I_0 \cong 2{,}00 \pm 2\%$ кал·см$^{-2}$·мин$^{-1}$), a_ε — большая полуось орбитального эллипса, который Земля описывает вокруг Солнца, и r_ε — расстояние Земли от Солнца.

Второй и третий члены в квадратных скобках — эффект Пойнтинга-Робертсона, v_s — скорость спутника относительно Солнца, n_ε — гелиоцентрический единичный вектор Земли, $v_n = v_s \cdot n_\varepsilon$ — составляющая скорости спутника в направлении Солнце — Земля. Второй член в квадратных скобках в (101) через v_n в некоторой степени подвержен влиянию эффекта Допплера; если спутник движется в направлении к Солнцу (от него), то световое давление усиливается (уменьшается). Третий член в квадратных скобках выражает ускорение в направлении орбитального движения спутника.

Рис. 10. Вариации высоты перигея спутников-баллонов «Эхо 1» и «Эхо 2»



Его появление объясняется физическими процессами при отражении достигшей спутника лучевой энергии.

Если ограничиваются в квадратных скобках уравнения (101) вектором n_ε, то его выражают вначале через элементы орбиты видимого движения Солнца вокруг Земли. Затем образуют составляющие возмущающего ускорения — K_1, K_2, K_3 и подставляют их в уравнения (45), чтобы получить путем интегрирования возмущения элементов орбиты спутника. Но интегрировать при этом можно только в той части орбиты, в которой спутник освещается Солнцем. Так как часть орбиты спутника, находящуюся в тени Земли, нужно исключить, в большинстве случаев не рекомендуется проводить интегрирование аналитическим путем: более пригодно численное интегрирование. Так как возмущения орбиты спутника, вызванные давлением солнечной радиации, имеют долгопериодический характер, то при численном интегрировании обходятся преимущественно сравнительно большим шагом интегрирования.

Представляет интерес сопоставление возмущений, вызванных световым давлением, и сопротивлением атмосферы. На больших высотах (более 1000 километров) над Землей первое влияние доминирует над вторым, но в более низких слоях большее влияние оказывает торможение атмосферы. При максимуме солнечных пятен оба возмущения одинаковы на высоте около 900 км, при минимуме солнечных пятен — на высоте около 500 км.

Значительные возмущения вызывает световое давление прежде всего в орбитах спутников-баллонов («Эхо 1», «Эхо 2», «Пагеос»), которые имеют незначительный вес и большой диаметр 30 или 40 м. Изменения высоты перигея у «Эхо 1» и «Эхо 2» на рис. 10 можно объяснить прежде всего световым давлением.

Солнечное излучение, достигающее Земли, отражается частично от земной поверхности и облаков и затем частично опять попадает на спутник и вызывает дополнительное сравнительно малое возмущающее ускорение, которое учитывалось в некоторых случаях. Возмущение, вызванное этим косвенным солнечным излучением, составляет около 10—15% от влияния непосредственного излучения Солнца. Не будем здесь останавливаться на этом подробнее.

4.4. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ, ВЫЗВАННЫЕ ЗЕМНЫМИ ПРИЛИВАМИ

Гравитационные силы Солнца и Луны действуют на спутник не только непосредственно, как уже описано выше, они действуют также на тело Земли, которое упруго деформируется под этим воздействием. Деформации достигают на земной поверхности около 20—30 см по вертикальной составляющей, они вызывают у потенциального поля Земли изменяющийся со временем дополнительный потенциал, также влияющий на орбиту спутника. Козаи и другие разработали теорию этих возмущений. Одна из волн, содержащихся в этих возмущениях, действует на наклон i как возмущение с периодом вращения линии узлов

$$0^\circ,80 \cdot 10^{-3} k_2 \cos\left(\Omega - \omega_E \Delta t\right),$$

где k_2 — число Лява для упругой Земли, ω_E — средняя угловая скорость Земли и Δt — временнóе смещение фазы прилива. С помощью спутников «Авангард 2», «Авангард 3», ракеты «Эхо 1» Козаи [22] нашел соответственно

$$k_2 = 0,45 \pm 0,09,$$

$$k_2 = 0,47 \pm 0,12,$$

$$k_2 = 0,35 \pm 0,06,$$

в среднем $k_2 = 0,39 \pm 0,05$.

Р. Р. Ньютон получил

$$k_2 = 0,31 \pm 0,03$$

и

$$k_2 = 0,33 \pm 0,04$$

из орбит спутников 1963 38 В * и 1963 49 С.

---

* Американский спутник Транзит-5В (запущен 28/IX 1963 г.).— Прим. перев.

Из более новых и очень основательных исследований Ньютон [23] получил значение

$$k_2 = 0{,}336 \pm 0{,}028.$$

Из анализа спутниковых наблюдений он смог сделать заключение о замедлении вращения Земли. Учитывая вызванное Солнцем и Луной смещение фазы приливных волн в теле Земли (и в атмосфере), он нашел, что замедление вращения Земли за год составляет величину, заключенную между $\frac{\dot{\omega}_E}{\omega_E} = -16{,}8 \cdot 10^{-11}$ и $-21{,}4 \cdot 10^{-11}$.

В общем, возмущающее влияние приливов в твердой Земле составляет только около 15% (коэффициент в поправочном члене $k_2 (R_E/a)^5$) от непосредственного влияния, которое оказывают гравитационные поля Солнца и Луны на орбиту спутника с высотой около 1000 км.

4.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cook G. E.: Luni — Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite. Geophys. J. 6 (1962).

2. Cook G. E. King — Hele D. G.: The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag. Phil. Trans. of the Roy. Soc. Ser. A. 259 (1965).

3. Friedman M. P.: A three — dimensional model of the upper atmosphere. SAO Special Report, Cambridge, Mass., No. 250 (1967).

4. Gaposchkin E. M.: Differential Orbit Improvement (DOI—3).SAO Special Report, Cambridge, Mass. No. 161 (1964).

5. Groves G. V.: Dynamics of Rockets and Satellites. North — Holland Publishing Company, Amsterdam 1965.

6. Hulst van de H. C? Jager de C. Mooie A. F. Space Research II, North — Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.

7. Jacchia L. G.: A Variable Atmospheric — Density Model from Satellite Accelerations. J. Geophys. Res. 65 (1960) No. 9.

8. Jacchia L. G.: Static Diffusion Models of the Upper Atmosphere with Empirical Temperature Profiles. SAO Special Report, Cambridge, Mass. No. 170 (1964).

9. Jacchia L. G.: Properties of the Upper Atmosphere Determined from Satellite Orbits. Phil. Trans. of the Roy. Soc. Ser. A, 262 (1967) No. 1124.

10. Jacchia L. G.: Recent results in the atmospheric region above 200 km and comparisons with CIRA 1965. SAO Special Report, Cambridge, Mass. Nr. 245 (1967).

11. Jacchia L. G.: Slowey J. W. Diurnal and seasonal — latitudinal variations in the upper atmosphere SAO Special Report, Cambridge, Mass. Nr. 242 (1967).

12. Kallmann Bijl, H.: Space Research I. North — Holland Publishing Complany, Amsterdam, 1960.

13. Kaula W. M.: Tesseral Harmonics of the Gravitational Field and Geodetic Datum Shifts Derived from Camera Observations of Satellites. J. Geophys. Res. 68 (1963) No. 2.

14. Kaula W. M.: Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Company 1966.

(Русский перевод: У. Каула. Спутниковая геодезия. Теоретические основы». М., «Мир», 1970).

15. King — Hele D. G.: Methods of determining air density from Satellite orbits. Ann. Géophys, Paris, 22 (1966).

16. Kozai Y.: The Earth's Gravitational Potential Derived from the Motion of Satellite 1958 Beta Two. SAO Special Report No. 22 (1959).

17. K o z a i Y.: On the Effects of the Sun and the Moon upon the Motion of a Close Earth Satellite. SAO Special Report No. 22 (1959).
18. K o z a i Y.: Effects of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite. SAO Special Report No. 56 (1961).
19. K o z a i Y.: Effects of the Tidal Deformation of the Earth on the Motion of Close Earth Satellites. Tokyo Astronom. Obs. Repr. No. 281 (1965).
20. K o z a i Y.: Lunisolar Perturbations with short Periods. SAO Special Report No. 235 (1966).
21. K o z a i Y.: The Earth Gravitational Potential derived from Satellite Motion. Space Sci. Rev. 5 (1966).
22. K o z a i Y. Determination of Love's Number from Satellite Observations. Phil. Trans. of the Roy. Soc. Ser. A, 262 (1967) No. 1124.
23. N e w t o n R. R. A. satellite determination of tidal parameters and Earth deceleration Geophys. J. 14 (1968) No. 5.
24. R o y M.: Dynamics of Satellites. Springer Verlag 1963.
25. Sehnal L. The Dynamical Effects of the Solar Radiation Pressure in the Motion of Artificial Satellites. Bull. Astronom Inst. of Czechoslovakia, 14 (1963).
26. S e h n a l L.: Mills S. B. The Short — Period Drag Perturbations of the Orbits of Artificial Satellites. SAO Special Report No. 223 (1966).
27. Z a d u n a i s k y P. E.: Shapiro I. I. Harrison M. J. Experimental and Theoretical Results on the Orbit of Echo. I. SAO Special Report. No. 61 (1961).

5. МЕТОДЫ НАБЛЮДЕНИЙ

5.1. ФОТОГРАФИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ СПУТНИКОВ

Визуальные методы наблюдений спутников для геодезических целей не достаточно точны. Особое значение имеют фотографические наблюдения спутников. Они позволяют определить с более высокой точностью ($\pm 0{,}5$—$\pm 2''$) направление единичного топоцентрического вектора от станции наблюдений до мгновенного положения спутника, если применяется хорошая камера и если время фиксируется с точностью порядка одной миллисекунды.

В спутниковой геодезии применяются в основном два типа камер, которые различаются не столько оптикой камеры, сколько ее монтировкой, а именно тем ее свойством, в соответствии с которым она может или не может отслеживать движение спутника.

К первому типу относятся камеры, которые во время наблюдений неподвижны или могут отслеживать только суточное движение неподвижных звезд. Ко второму — более сложные устройства, в которых камера отслеживает относительно быстрое движение спутника. С помощью таких камер можно фотографировать слабо светящиеся спутники.

Основную трудность при наблюдении спутников методами фотографической астрометрии составляет быстрое движение спутника относительно наблюдателя (топоцентрическая скорость достигает $1°$/сек). При фотографических наблюдениях спутников получают по одиночному снимку положение спутника в общем случае несколько точнее чем $\pm 1''$, далее, имея на фотопластинке многочисленные разрывы следа спутника, можно осреднить результаты и, таким образом, достичь точности около $0{,}5''$. В астрономии, напротив, может быть достигнута, безусловно, точность $\pm 0{,}1''$, а если будут приложены достаточно большие усилия, то даже $\pm 0{,}05''$.

Спутниковыми камерами, которые при наблюдениях установлены неподвижно, или камерами, которыми отслеживается только движение звезд, нельзя фотографировать небольшие и слабо светящиеся спутники. Наиболее подходят для фотографирования такими камерами яркие спутники-баллоны, как «Эхо 1», «Эхо 2» и «Пагеос».

Только немногие очень светосильные камеры, которыми не отслеживается движение спутников, могут фотографировать спутники от ярких до почти седьмой звездной величины при угловой скорости движения спутника около 1°/сек (топоцентрическая скорость). В большинстве случаев при наблюдениях неподвижные камеры достаточны только для фотографирования спутников 3-ей или 4-ой звездной величины. Если, напротив, камера отслеживает движение спутника, то может получиться объект до 12 звездной величины.

При фотографических наблюдениях спутник получается на фотопластинке или фотопленке на фоне звезд (рис. 11, 12, 13).

Если камера неподвижна, то звезды будут получаться в виде коротких следов, спутник, напротив, как длинный непрерывный след, который прерывается затвором на короткое время, например одну секунду. Часто можно также различить разрывы в следах звезд, вызванные работой затвора (рис. 11).

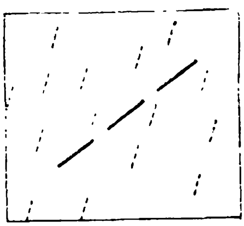


Рис. 11. Фотографические наблюдения спутников. Азимутальная монтировка камеры

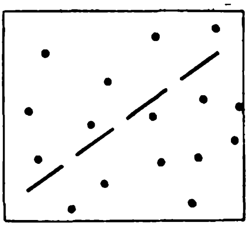


Рис. 12. Фотографические наблюдения спутников. Параллактическая монтировка камеры

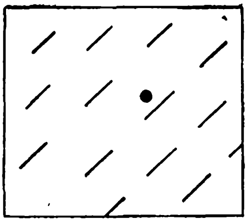


Рис. 13. Фотографические наблюдения спутников. Камера отслеживает движение спутника

Если, напротив, камера отслеживает движение звезд, то они будут получаться как точки, а спутник будет опознаваться по его прерывистому следу (рис. 12).

Если же камера отслеживает движение спутника, то спутник получается как точка, а звезды, напротив, как короткие штрихи (рис. 13).

Из камер, которыми не отслеживается движение спутников, рассматривается здесь пять типов.

Камера PC-1000. Эта камера имеет азимутальную монтировку, она может вращаться вокруг вертикальной оси по азимуту и вокруг горизонтальной оси по высоте; движение звезд ею не может отслеживаться. Ее фокусное расстояние 1016 мм, отверстие объектива 203 мм. Используются стеклянные пластинки размером 190 × 215 × × 6 мм. Поле зрения составляет 10 × 10° и относительное отверстие 1 : 5. Камера создана для очень точного фотографирования, чтобы достичь точности порядка 0,4″.

Камера BC-4. В этой установке монтируется модифицированная аэрофотосъемочная камера Wild RC-5 на подставке теодолита Wild T-4. Фокусное расстояние составляет только 305 мм (в новом варианте 450 мм), а отверстие объектива 117 мм. Применяемая стеклянная пластинка имеет формат 215 × 190 × 6 мм. Камера имеет большое поле зрения 33 × 33° (24 × 24° при большем фокусном расстоянии). Дисковый затвор прерывает след спутника. Достигают этой камерой точности до 2″. Благодаря большому полю зрения может быть прерван след спутника в 100—300 местах, а в результате достигается значительное повышение точности. Полагают, что таким образом можно достичь точности ±0,5″. Эта камера имеет также азимутальную монтировку.

Камера НАФА 3с/25. Этот инструмент также создан на базе аэрофотосъемочной камеры. Фокусное расстояние составляет 250 мм, отверстие объектива 100 мм. Поле зрения весьма большое 30 × 50°. Камера имеет затвор типа жалюзи, используется фотографическая пленка. Достигают этой камерой точности около ±5″ в положении и ±0,005 сек во времени. НАФА 3с/25 также имеет азимутальную монтировку.

Спутниковая камера PSK. Эта камера, созданная в Геодезическом институте в Потсдаме, смонтирована на параллактической установке фирмы Цейсса и имеет зеркально-линзовую оптическую систему. Фокусное расстояние составляет 1000 мм, отверстие объектива 200 мм, эффективное относительное отверстие только 1 : 5,6. Применяются пластинки форматом 64 × 90 мм. Поле зрения составляет 3,5 × 4,7°. Диапазон действия этой спутниковой камеры характеризуется видимой скоростью спутников 0,3°/сек при яркости $3{,}6^m$. Если видимая скорость (топоцентрическая) 1°/сек, то получают спутники, яркость которых $2{,}3^m$. Кассета содержит три пластинки, которые, благодаря вращению кассеты, могут поворачиваться друг за другом в поле зрения камеры. Разрывы следов получаются благодаря вращающемуся сектору, который движется в нескольких миллиметрах перед фотографическим слоем, приводимый в движение синхронным мотором. Преимущество параллактической монтировки заключается в том, что получаются также очень слабые звезды.

Камера Хьюита. Хьюит описывает установленную в Англии камеру, которой нельзя отслеживать движение спутников и звезд, но которой, несмотря на это, удается фотографировать спутники до $+7{,}5^m$ звездной величины, если их угловая скорость не превосходит 1°/сек. Относительное отверстие камеры составляет 1 : 1,15, фокусное расстояние 61 см. Телескоп представляет систему Шмидта с выровненным полем. Достигнута точность ±1,1″ по положению и ±0,0005 сек по времени.

Камера Бейкера-Нанна. Здесь описываются два инструмента второго рода, которыми можно отслеживать движение спутника.

Среди камер, которыми можно отслеживать движение спутника, прежде всего назовем камеру Бейкера-Нанна (рис. 14). В ней применена специальная система Шмидта, зеркало которой имеет фокусное расстояние 50 см, поле зрения камеры 30 × 5°. Относительное отверстие составляет 1 : 1. Камера имеет трехосную монтировку, основная ось — вертикальная. Эта монтировка позволяет сопровождать такие спутники, угловая скорость которых не более 2°/сек.

Камера имеет близкую к сферической фокальную поверхность (радиус-500 мм), на которую натягивается фотографическая пленка. След спутника прерывается в камере типовым затвором, который состоит из вращающихся элементов. Затвор (бочкообразный) можно сравнить с вращающимся вокруг своей продольной оси бочонком, который состоит только из двух клепок. Оба эти металлических листа вследствие вращения будут проходить непосредственно перед фотографической пленкой.

Камерой Бейкера-Нанна фотографируют спутники до 12^m звездной величины и получают точность $\pm 2''$ (определение направлений) и 0,001 сек (определение моментов).

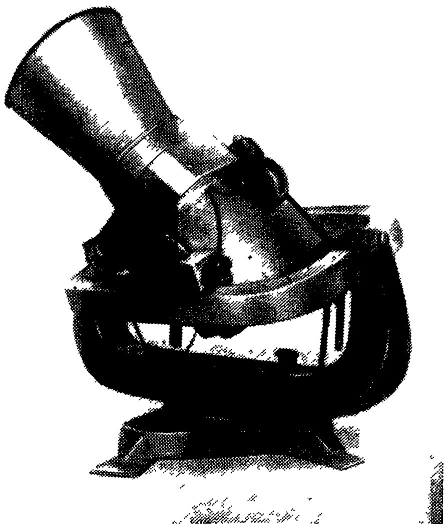


Рис. 14. Камера «Бейкер-Нанн». Камеры «Бейкер-Нанн» установлены на 15 станциях по всей Земле

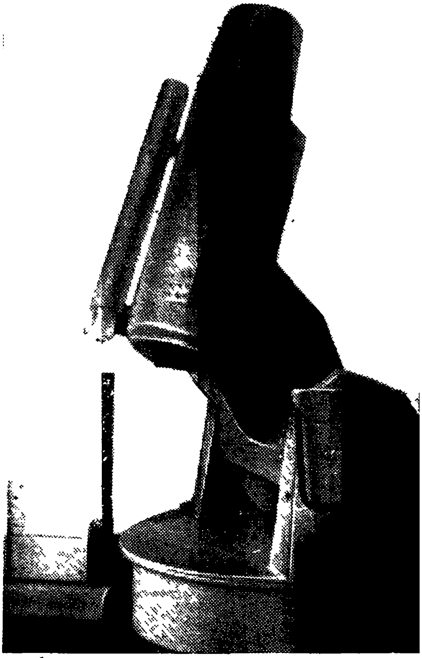


Рис. 15. Спутниковая камера SBG фирмы Карл Цейсс (Йена). Станция: Башня Гельмерта Геодезического института в Потсдаме

Камера SBG Zeiss. Фирмой Цейсса (Йена) в последнее время создана камера, которой также можно отслеживать движение спутника (рис. 15). Она имеет четыре оси, из которых первая — вертикальная, вторая — горизонтальная, третья — устанавливается перпендикулярно к плоскости орбиты спутника. Наличие четвертой оси позволяет отслеживать движение спутника по малому кругу. Оптика системы Шмидта включает зеркало и пластинку, корректирующую поле изображения, фокусное расстояние объектива 760 мм, относительное отверстие 1 : 1,8. Фотографическая пластинка имеет формат

90 × 120 мм. Поле зрения составляет 5 × 8°. Камера не снабжена обычным затвором для прерывания следа спутника. Движение спутника отслеживает телескоп. Фотографическая пластинка может получать добавочное движение для фотографирования звезд, благодаря которому компенсируется движения спутника.

Полагают, что этой камерой можно достичь точности от 1 до 2″ и 1—2 мсек.

Один экземпляр этого прибора установлен в башне Гельмерта Геодезического института в Потсдаме, второй — в Ондржейове возле Праги.

В Советском Союзе * и во Франции применяют также спутниковые камеры, которыми можно отслеживать движение спутника. Французская камера носит название «Антарес» ($f = 900$ мм, отверстие 300 мм, поле зрения 11 × 11°, монтировка четырехосная).

Следует заметить, что фокусное расстояние камер для фотографических наблюдений не должно быть слишком коротким, если нужно получить точные результаты. Монтировка должна быть солидной, чтобы при работе затвора не возникали вибрации. Оптика должна быть безупречной, опасность прогиба тубуса камеры должна быть предотвращена. Для определения времени при прецизионных наблюдениях должны использоваться кварцевые часы. Если след спутника прерывается вращающимся сектором размером около 10 или 20°, то рекомендуется делать посредине его прорезь. Тогда в середине разрыва следа получается точкообразное почернение фотографической пластинки, на которое при измерениях на компараторе можно точно навести крест нитей. В противном случае, при обычном прерывании следа возникают трудности при измерении в направлении движения спутника, потому что разрывы становятся совсем нечеткими из-за быстрого движения спутника по его орбите, и результаты измерений в направлении перпендикулярном к следу спутника могут получаться с большим весом, чем в тангенциальном направлении (3 : 2).

Ошибка наблюдений в 1″ при удалении спутника на 1000 км вызывает ошибку в положении пункта 5 м, ошибка в 1 мсек дает около 8 м.

5.2. ДОППЛЕРОВСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В последние годы большое значение для геодезии приобрели наблюдения спутников с помощью радиотехнических средств (допплеровские наблюдения или измерения расстояний до спутников с помощью системы Секор).

---

* К числу высокоточных спутниковых камер, созданных в СССР, относятся АФУ-75, ФАС, ВАУ. Их описание приводится в статье А. Г. Масевич и А. М. Лозинского «Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли», опубликованной в сборнике «Научные информации» М., 1970, № 18. — Прим. перев.

По сравнению с оптическими радиотехнические методы почти не зависят от погоды и времени суток. Предполагается лишь, что на спутнике помещен передатчик и что спутник находится над горизонтом станции наблюдения. Так можно наблюдать почти все прохождения спутника и получать очень большой материал наблюдений, используемый прежде всего для определения короткопериодических возмущений орбиты и детальной структуры поля силы тяжести Земли. Фотографические методы требуют сравнительно продолжительных ручных измерительных работ на координатно-измерительных приборах, а результаты радиотехнических методов могут быть преобразованы в цифровую форму, так что проведение наблюдений и их редукцию можно сравнительно легко автоматизировать. Преимуществом фотографических наблюдений является то, что они дают пространственные направления в абсолютной системе координат звезд, в то время как допплеровские наблюдения и измерения расстояний до спутника с помощью системы Секор или лазеров не относятся к пространственной астрономической системе координат.

При допплеровских наблюдениях передатчик спутника излучает определенные частоты f; так, в случае первого геодезического спутника «Анна-1В» излучались частоты 54, 162, 216, 324 Мгц. Излучаемую частоту сравнивают на наземной станции с надежно известной эталонной частотой f_0. По изменяющейся со временем разности обеих частот на основании эффекта Допплера можно установить связь с орбитальным движением спутника. Если c — скорость света, а s — расстояние до спутника, то сдвиг частоты, вызванный эффектом Допплера, составляет

$$\Delta f = f_1 - f = -\frac{f}{c} s^{\cdot}, \tag{102}$$

где f_1 — наблюдаемая частота, $s^{\cdot}$ производная по времени.

При практическом определении изменения наблюдаемой частоты со временем считают число положительных нулевых прохождений фазы сигнала в течение определенного интервала времени. Наблюдают, таким образом, следующую интегральную величину:

$$B^* = \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - f_1)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - f - \Delta f)\,dt =$$

$$= (f_0 - f)(t_2 - t_1) + \frac{f}{c}(s_2 - s_1). \tag{102, a}$$

Если известны f_0 и f, а B^* и $(t_2 - t_1)$ определены из наблюдений, то с помощью этого уравнения можно определить изменение расстояния до спутника $(s_2 - s_1)$.

Полученную длину отрезка $s_2 - s_1$ можно использовать для определения масштаба орбиты спутника.

Различают кратковременные наблюдения $t_2 - t_1 \leqslant 0{,}5$ сек и продолжительные наблюдения $t_2 - t_1 = 1$ мин.

Из уравнения (102, a) следует, что при допплеровских наблюдениях измеряют сдвиг частоты и время. Для достижения высокой точности на наземной станции и на борту спутника применяются только прецизионные пьезокварцы. Ошибка частоты при времени измерений в 1 сек не должна превышать $5 \cdot 10^{-11}$, суточный дрейф должен быть не более $2 \cdot 10^{-10}$/сут. Дрейф частоты f_0 на наземной станции можно определить путем сравнения с нормальными частотами, дрейф частоты f на борту спутника должен быть введен в уравнение в качестве неизвестного. Если нестабильность частоты соответствует указанным значениям, то можно этим путем вычислить местоположение с погрешностью 1 м. Если погрешность в определении времени (внешняя точность) из-за ошибок приема сигналов времени составляет примерно 0,5 мсек, то вследствие вращения Земли это приводит при фотографических наблюдениях в случае определения местоположения к ошибке примерно в 4 м; этот источник ошибок может быть значительно ослаблен применением транспортабельных атомных часов.

При прохождении атмосферы радиоволны подвергаются рефракционным влияниям двух различных видов: рефракция неионизированных слоев нижней атмосферы, особенно тропосферы, и рефракция ионосферы.

Для определения рефракции в тропосфере вводят модель атмосферы, содержащую в качестве параметров температуру и влажность воздуха у поверхности Земли. При устойчивой погоде с помощью этой модели атмосферы можно исключать примерно 90% рефракционных влияний, вызванных тропосферой. Остаточные рефракционные влияния при редуцировании прохождения спутника изменяют вычисленное положение пункта наблюдений меньше чем на 5 м, если спутник находится, по крайней мере, в 10° над горизонтом. Остаточное влияние рефракции при малых зенитных расстояниях соответственно меньше.

Влияние рефракции ионосферы определяют совсем иначе. Если учесть влияние ионосферы на распространение радиоволн, то из (102) получим

$$\Delta f = -\frac{f}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int n^* ds, \quad n^* = \sqrt{1 - \frac{4\pi N e^2}{\varepsilon_0 m f^2}},$$

где N — число электронов в кубическом сантиметре, e — заряд и m — масса электрона, ε_0 — диэлектрическая постоянная. С учетом влияния ионосферы уравнение (102) получает следующий вид:

$$\Delta f = -\frac{f}{c} \dot{s} + \frac{\alpha_1}{f} + \frac{\alpha_3}{f^3} + \ldots \qquad (103)$$

Параметры α_i зависят от структуры ионосферы, а также от времени, но не от частоты. Варьируют f, применяя на борту спутника несколько частот, так что можно исключить неизвестные параметры α_i. Член рефракции с α_1 — самый большой, он может вызывать ошибку положения на поверхности Земли более 100 м и его всегда нужно учитывать. Другие члены с α_2, α_3, . . ., значительно меньше, и ими часто можно пренебречь.

Для определения параметров α_i геодезические спутники излучают несколько частот, которые получаются путем умножения основной частоты кварца («Геос-А» 162, 324 и 972 Мгц, спутники «Транзит» 150 и 400 Мгц). Для наблюдений при этом используют направленные антенны, следящие за движением спутника.

Внутренняя точность допплеровских наблюдений, исключая ошибки учета рефракции, составляет в среднем при 15 наблюдениях для определения положения на Земле около ± 10 м.

При орбитальном методе (гл. 9) появляются, кроме ошибок учета рефракции, еще остаточные ошибки параметров гравитационного поля, так что можно будет определять абсолютные геодезические координаты с ошибками от ± 20 до ± 30 м.

Из квазисинхронных допплеровских наблюдений с двух станций можно вычислить разность координат обеих станций с наивысшей точностью. При этом вначале определяют абсолютные координаты обеих станций из квазисинхронных наблюдений орбитальным методом (гл. 9) и образуют затем разности координат. В разностях исключаются ошибки в элементах орбиты. При высоте спутника 3000—4000 км получают, таким образом, разности координат с точностью около ± 15— $\pm$ 20 м.

5.3. ИЗМЕРЕНИЯ СИСТЕМОЙ СЕКОР

Для измерения расстояния между наземной станцией и спутником при помощи радиометода была разработана система Секор. Каждая наземная станция этой системы снабжена приемо-передатчиком, кварцевыми часами и имеет возможность регистрировать показания приборов на магнитную ленту. Спутник должен быть снабжен приемо-передатчиком. Станция излучает несущую частоту 421 Мгц, которая принимается и ретранслируется аппаратурой спутника на частотах 449 и 224,5 Мгц. Для измерения расстояний методом фазового сдвига несущая частота дополняется частотами 585, 533; 36,596; 2,287 и 0,286 кгц.

Первая частота соответствует длине волны 512 м и используется для точных измерений. Другие частоты дают расстояние с точностью, им эквивалентной. Для грубой оценки расстояния с точностью примерно до одного километра используют радарную систему, работающую по времени прохождения импульсов, которые излучаются на несущей частоте (20 импульсов в секунду). Следовательно, речь идет об устройстве, очень схожем с наземными микроволновыми дальномерами (теллурометры). Достоинство измерения расстояний с помощью системы Секор, так же как и допплеровских наблюдений, заключается в том, что можно интегрировать свыше нескольких сотен наблюдений, которые выполняются в течение нескольких минут.

Так же как в допплеровском методе, при использовании системы Секор нужно исключить влияние ионосферы. Сдвиг фазы при прохождении пути до спутника и обратно равен

$$2\frac{f}{c}s,$$

а при учете влияния ионосферы

$$2\frac{f}{c}\int n^* ds = 2\frac{f}{c}s + \frac{\beta}{f} + \ldots$$

Установлено, что влияние ионизации атмосферы на сдвиг фазы, выраженное параметром β, в методе Секор можно исключить, применяя несколько частот. Поэтому в системе Секор спутник излучает к Земле две частоты (449 и 224,5 Мгц).

Влияние тропосферы на измерения в методе Секор можно с достаточной точностью определить, как и при допплеровских наблюдениях, исходя из модели атмосферы.

Установлено, что с помощью системы Секор расстояние до спутника можно определить с ошибкой около 1 : 300 000, а положение пункта на Земле — около ± 3 м. Найдет ли в будущем метод Секор очень широкое применение, пока еще остается не ясным. Его можно было бы применять как независимый при всех методах наблюдений спутников.

5.4. ЛАЗЕРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В последние годы многообещающим стал метод наблюдения спутников с помощью лазера. Световой импульс, полученный с помощью лазера, посылают к спутнику (поверхность которого оборудована уголковыми отражателями), после чего импульс отражается от спутника к той же наземной станции. Умножив время Δt прохождения импульса на скорость света, получают удвоенное расстояние до спутника

$$s = \frac{1}{2} c \cdot \Delta t.$$

Первый спутник, оборудованный уголковыми отражателями, был выведен на орбиту 10 октября 1964 г. 18 октября 1964 г. Снайдер и его сотрудники [11] сообщили об успешном приеме отраженного лазерного импульса. Во Франции 24 января 1965 г. Бива с сотрудниками [1] впервые смогли зарегистрировать возвращение лазерного импульса с помощью фотоэлектрии. Уильямс с сотрудниками [15] первыми сфотографировали отраженный от спутника лазерный импульс 21 января 1965 г.

Группа Бива в обсерватории Верхний Прованс применяла рубиновый лазер, излучавший к спутнику 15 импульсов в минуту (0,3 дж). Продолжительность каждого импульса составляла от 20 до 30 $\times$ $\times$ 10^{-9} сек. Угол расхождения лазерного луча был равен примерно 4′. Необходимо было при этом очень тщательно отслеживать движение спутника, что осуществлялось посредством визуальных наблюдений в зрительную трубу. Попадая на спутник, луч отражался уголковыми отражателями в обратном направлении. Зрительная труба, смонтированная параллельно лазеру, принимала отраженные к Земле импульсы и направляла их на вторичный электронный умножитель (рис. 16). В обсерватории Верхний Прованс при первых экспериментах с помощью лазера определили расстояние до спутника с точностью до нескольких метров. В 1967 г. уже достигли точности ± 2 м. Такой ошибкой характеризуется внутренняя сходимость результатов. Влияние атмосферы требует более тщательного рассмотрения, однако можно ожидать, что реальная точность будет не хуже, чем ± 3 м. В будущем надеются увеличить точность до ± 1 м. В настоящее время применяются лазерные импульсы продолжительностью 15 мсек и мощностью 500 Мвт.

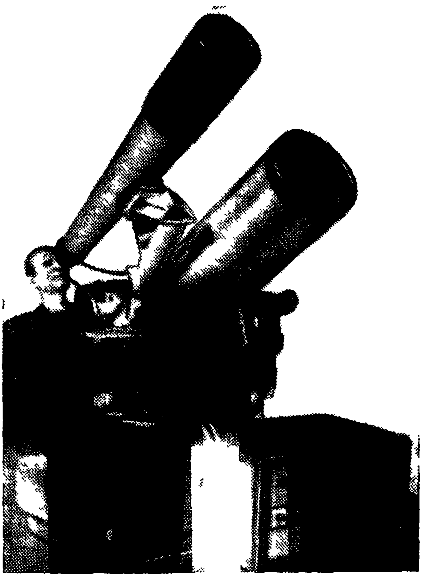


Рис. 16. Установка для лазерных наблюдений спутников

В других вариантах наблюдений с помощью лазера получают не расстояние по времени прохождения лазерного импульса, а фотографируют отраженный лазерный импульс на фоне звезд. При фотографических наблюдениях с помощью лазера применяют лазерные импульсы продолжительностью $2{,}7 \times \times 10^{-3}$ сек. Пучок лазерных лучей имеет здесь угол расхождения 15′. Уильямс с сотрудниками использовали при этом камеру PC-1000.

Комбинируя оба варианта, измерение расстояний и измерение направлений, полностью определяют топоцентрический вектор положения спутника.

По сравнению с фотографическим методом наблюдений лазерный метод позволяет наблюдать спутник и тогда, когда он не освещен Солнцем, а находится в тени Земли. С другой стороны, в распоряжении имеются только лишь несколько спутников с уголковыми отражателями («Геос-А», «Геос-В», французский спутник «Диадема», два спутника «Эксплорер»).

5.5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СПУТНИКИ

Возможность наблюдения спутников в значительной мере определяется их параметрами. Кратко опишем спутники, наиболее важные для геодезии.

Для геодезических целей могут использоваться разные спутники. Но для определения гравитационного поля Земли необходимо хорошо знать влияние сопротивления атмосферы и влияние светового давления Солнца, при этом высота спутника должна быть не слишком большой, по возможности меньше 1500 км, так как иначе возмущающее влияние гравитационного поля будет слишком малым. Большинство таких спутников можно наблюдать только с помощью камер, следящих за движением спутника.

Для определения положения геодезических пунктов на Земле, т. е. для геометрической спутниковой геодезии, отпадают эти ограничения, действительные для орбитального метода. Сопротивление атмосферы и световое давление Солнца в задачах геометрической спутниковой геодезии не играют никакой роли, так как здесь необходима только визирная цель, которую можно хорошо видеть на Земле со многих пунктов, не зная при этом точно ее положения. В задачах геометрической спутниковой геодезии одновременно действуют многочисленные станции, выполняющие синхронные наблюдения. Они не могут быть все снабжены камерами, которые следят за орбитальным движением спутника, так как это потребовало бы слишком больших затрат. Поэтому для геометрической спутниковой геодезии рекомендуется проводить прежде всего синхронные наблюдения ярких спутников-баллонов.

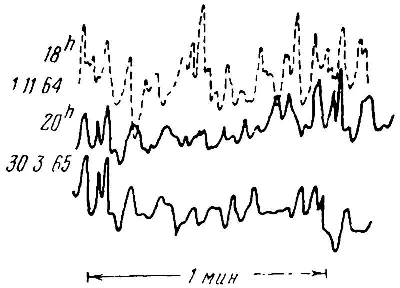


Рис. 17. Изменение яркости спутника баллона «Эхо 1» (по Ф. Линку). Ордината дает интенсивность (Space Research VI)

В последние годы на орбиту были выведены специальные геодезические спутники, которые являются особенно подходящими для решения различных геодезических задач.

Спутник «Эхо 1». Очень яркий спутник-баллон «Эхо 1» обращался вокруг Земли с 12 августа 1960 г. Оболочка этого баллона состояла из тонкого пластического материала, на внешнюю сторону которого был нанесен тонкий слой алюминия. Диаметр спутника около 30 м, яркость $+1 - 0^m$, наклон орбиты 47°, высота над Землей в 1966—1967 гг. изменялась примерно от 900 до 1300 км (см.рис. 10). Благодаря зеркальной поверхности яркий солнечный свет почти полностью отражался к Земле. В то время как первоначально диаметр был близок к расчетному значению, позднее путем фотометрии «Эхо 1» были установлены короткопериодические изменения его яркости, которые можно было объяснить сильным отклонением от сферической формы (рис. 17). Не в последнюю очередь причину этого надо искать в попадании микрометеоритов в оболочку баллона. «Эхо 1» прекратил существование 24 мая 1968 г.

Спутник «Эхо 2». За спутником-баллоном «Эхо 1» 25 января 1964 г. последовал «Эхо 2». Он имел полярную орбиту с $i = 82°$, его высота составляла около 1100 км, эксцентриситет был очень мал, в 1967 г. он был заключен между $e = 0{,}001$ и $e = 0{,}019$, яркость заключена между звездными величинами -1^m и $+1^m$, диаметр составлял 41 м.

Оболочка «Эхо 2» из мейлара имела толщину всего лишь 0,0087 мм, а алюминиевое покрытие — толщину 0,0045 мм.

Спутник «Пагеос». Дальнейшие возможности открывает спутник-баллон «Пагеос» (пассивный геодезический искусственный спутник Земли), так как он имеет более высокую орбиту, чем «Эхо 1» и «Эхо 2», и его можно видеть в точках, расположенных далеко друг от друга (см. рис. 21). «Пагеос» был выведен на орбиту летом 1966 г. Его оболочка толщиной лишь 0,01 мм покрыта снаружи алюминием, диаметр его примерно 30 м, после наполнения газом он должен отражать около 85% падающего видимого света, его яркость колеблется между звездными величинами 2 и 5^m. Он также имеет полярную орбиту $i = 85°$. Первоначально эксцентриситет его орбиты был небольшим ($e = 0{,}05$), но к 1968 г. он увеличился до $e = 0{,}2$. Высота апогея составляла в 1968 г. около 6000 км, перигея около 2200 км, так что его можно было наблюдать одновременно с двух станций, расстояние между которыми составляло 6000 км.

Наблюдения таких спутников-баллонов предъявляют сравнительно мало требований к инструменту, так как эти визирные цели очень яркие. Их можно наблюдать сравнительно простыми камерами, которые не отслеживают движение спутника. Так как орбиты этих спутников-баллонов сильно возмущены из-за сопротивления атмосферы и светового давления Солнца, они не могут дать никакой информации о поле силы тяжести Земли.

Спутники «Анна 1В», «Геос А», «Геос В». Преимущество геодезических спутников с лампами-вспышками «Анна 1В», «Геос А» и «ГеосВ» заключается в том, что их можно использовать как для определения геодезического положения пунктов, так и для исследования поля силы тяжести Земли, т. е. для геометрической и динамической спутниковой геодезии. Но их оборудование намного сложнее, чем оборудование спутников-баллонов. Эти три спутника отличаются прежде всего возможностью посылать на Землю сильные световые вспышки, которые излучаются газоразрядными лампами и имеют продолжительность порядка 1 мсек.

Первый спутник с лампами-вспышками «Анна 1В» был запущен 31 октября 1962 г. ($i = 50°$, $e = 0{,}008$, высота=1100 км). Он больше не посылает вспышек. Его ориентирование относительно направления на Землю происходило с помощью устройства, управляемого силовым вектором магнитного поля Земли. Яркость составляла от 7 до 9^m.

Особое значение имеют спутники с лампами-вспышками серии «Геос».

«Геос А» был выведен на орбиту 6 ноября 1965 г. Излучение его ламп образует конус отверстием примерно 110°, который всегда направлен к земной поверхности. Ориентирование по направлению к Земле происходит с помощью стабилизатора. действие которого основано на использовании вертикального градиента силы тяжести. Стабилизатор состоит из стержня, выведенного из спутника. На конце стержня находится груз. Вспышки излучаются сериями по 7 в каждой; между двумя, следующими друг за другом вспышками, проходит, смотря по обстоятельствам, до 4 сек, интенсивность вспышек примерно 1500 св. сек, их продолжительность 1 мсек. Для успешных наблюдений вспышек «Геос А» используют обычно камеру с отверстием не менее 20 см. Для наблюдений вспышек не требуются камеры, следящие за движением спутника. Эффективность камеры можно существенно повысить, используя высокочувствительную фотографическую эмульсию. Энергия (для ламп-вспышек, — Перев.) поступает от солнечных батарей. Моменты времени излучения вспышек получают с точностью до ± 1 мсек по имеющимся на спутнике часам, которые контролируются с Земли посредством радиосвязи. «Геос А» снабжен также уголковыми отражателями для лазерных наблюдений. Предусмотрены также все устройства, необходимые для измерения расстояний методом «Секор». Для точных допплеровских наблюдений служат частоты 162, 324 и 972 Мгц. Наклон орбиты «Геос А» $i = 59°$, высота перигея примерно 1100 км, высота апогея около 2200 км. «Геос А» прекратил излучение световых вспышек.

«Геос В» был запущен 11 января 1968 г. Он снабжен бо́льшими уголковыми отражателями, чем «Геос А». Орбита «Геос В» имеет следующие параметры: $i = 106°$; $e = 0{,}03$; апогей 1600 км; перигей 1100 км. Прочее оборудование такое же, как у «Геос А».

Если необходимо провести только допплеровские или лазерные наблюдения можно пользоваться также двумя спутниками типа «Эксплорер» *. Первый стартовал в 1964 г. ($i = 80°$, $h = 1000$ км), второй последовал за ним год спустя ($i = 41°$, $h = 1200$ км).

Французские спутники «Диадема» также пригодны для допплеровских и лазерных наблюдений. Причем лазерные наблюдения возможны только для спутников D2 и D3.

При фотографических наблюдениях спутников с лампами-вспышками надо учитывать некоторые особенности. Если камера имеет азимутальную монтировку, то она не отслеживает суточного движения звезд, и тогда звезды изображаются как короткие дуги, которые можно измерять по их крайним точкам и от которых сравнительно легко отличить точкообразные равноотстоящие световые вспышки. Если камера имеет параллактическую монтировку, т. е. отслеживает движение звезд, то звезды тоже получаются в виде точек, и очень трудно отыскать спутниковые вспышки. Поэтому рекомендуется после экспозиции поворачивать камеру вокруг оси склонений на несколько дуговых минут, и затем производить второй снимок. При этом звезды будут получаться в виде пары близких точек, среди которых легче выделить спутниковые вспышки. Рекомендуется измерять изображения световых вспышек и звезд двум лицам независимо друг от друга.

Точность, с которой может быть определено направление на спутник из наблюдений световой вспышки, не в последнюю очередь зависит от неспокойствия изображений (мерцания) звезд и световых

---

* Имеются в виду американские искусственные спутники «Эксплорер-22» (10/X 1964 г.) и «Эксплорер-27» (29/IV 1965 г.). — Прим. перев.

вспышек. Атмосфера Земли содержит незначительные турбулентные элементы диаметром примерно 10 см, в которых имеется незначительная разность температуры и давления по сравнению с их окружением, что приводит к периодическим явлениям рефракции. При этом свет от ламп-вспышек испытывает не только периодические изменения яркости, но и прежде всего нерегулярные изменения направления примерно от 1 до 5″. Период мерцания вообще составляет лишь доли секунды. Благодаря использованию серии из 7 вспышек, как это имеет место для спутников типа «Геос», значительно уменьшается отрицательное влияние мерцания.

5.6. ЯРКОСТЬ СПУТНИКОВ

Необходимо дать еще несколько формул, которые позволяют судить о яркости спутника и мощности камеры. Между освещенностью E [лм м$^{-2}$] или [люкс], обусловленной излучением звезды, и ее величиной (яркостью) m существует соотношение

$$m = -14{,}13 - 2{,}50 \lg E.$$

Если $m_\odot$ = —26,8 — яркость (визуальная) Солнца в зените, a_0 — коэффициент отражения при диффузном отражении (альбедо), R_s — радиус спутника, s — расстояние от наблюдателя, $h \cong s \cdot \cos Z$ — высота спутника, p — фазовый угол спутника (угол между векторами положения Солнца и станции наблюдений, проведенными от спутника), Z — зенитное расстояние спутника и D характеризует поглощение света атмосферой в зените, то для яркости спутника при диффузном отражении имеем

$$m = m_\odot - 2{,}5 \lg \frac{2}{3} a_0 - 5 \lg \frac{R_s}{h} + 5 \lg \sec Z + \\ + D (\sec Z - 1) - 2{,}5 \lg \frac{\sin p + (\pi - p) \cos p}{\pi}.$$

Если первые три члена, зависящие от параметров спутника, обозначить m_1, четвертый и пятый члены, зависящие от зенитного расстояния, через m_2, а шестой и последний члены, определяемые фазовым углом p, через m_3, то получаем

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Значения для m_1, m_2 и m_3 можно взять из табл. 4.

Линк [5] также составил таблицы, позволяющие определить яркость неба в зависимости от углового положения Солнца под горизонтом и в зависимости от яркости и положения Луны.

Яркие спутники в большинстве случаев наблюдают, если Солнце находится под горизонтом на высоте —12°, а слабые — около —18°, так как иначе контраст яркостей слишком незначителен. Но если очень яркие спутники «Эхо 1», «Эхо 2» и «Пагеос» наблюдать светосильной камерой, то Солнце может находиться под горизонтом на высоте только 9—10°.

Таблица 4

Яркость спутника в зависимости от его радиуса R_s, высоты h, зенитного расстояния Z и фазового угла p. Диффузное отражение. Альбедо = 0,6.

$\frac{R_s}{h}$	m_1	m_2	m_3	Z, p
10^{-5}	−0,8	0,0	0,0	0
$8 \cdot 10^{-6}$	−0,3	0,1	0,0	15
$6 \cdot 10^{-6}$	+0,3	0,4	0,1	30
$5 \cdot 10^{-6}$	+0,8	0,8	0,3	45
$4 \cdot 10^{-6}$	+1,2	1,8	0,5	60
$3 \cdot 10^{-6}$	+1,8	3,6	0 8	75
$2 \cdot 10^{-6}$	+2,7		1,2	90
10^{-6}	+4,2		1,8	105
$8 \cdot 10^{-7}$	+4,7		2,4	120
$6 \cdot 10^{-7}$	+5,3		3,3	135
$5 \cdot 10^{-7}$	+5,8		4,6	150
$4 \cdot 10^{-7}$	+6,2			
$3 \cdot 10^{-7}$	+6,8			
$2 \cdot 10^{-7}$	+7,7			
10^{-7}	+9,2			

Эти формулы Линка для яркости спутника действительны для диффузного отражения.

При зеркальном отражении от шара, по Девису, Уиплу и Циркеру, для освещенности E, создаваемой спутником, действительна формула

$$E = \frac{1}{4} a \left(\frac{R_s}{s}\right)^2 E_0,$$

где a — коэффициент отражения и E_0 — интенсивность солнечного излучения, попадающего на спутник.

Если перейти от освещенности E к яркости m, то из последнего уравнения для случая зеркального отражения ($a = 1$) получим

$$m = -25{,}3 - 5 \lg \frac{R_s}{s}.$$

Для спутника-баллона с параметрами $R_s = 15$ м, $s = 1500$ км получаем $m = -0{,}3$. Шар радиусом 15 см при таком же расстоянии имеет яркость $m =$.

Для круглого плоского зеркала с радиусом R_s и коэффициентом отражения $\bar{a}$ Уиппл нашел

$$E = 1{,}154 \cdot 10^4 \bar{a} \left(\frac{R_s}{s}\right)^2 E_0.$$

В большинстве случаев у спутников зеркальное отражение преобладает над диффузным.

Интенсивность излучения немного уменьшается из-за умножения на коэффициент поглощения атмосферы $\varkappa$

$$\varkappa = e^{-c^* \sec Z}.$$

c^* может быть выражено по Каула через длину волны λ и зависит, как было указано выше, от коэффициента поглощения D,

$$c^* = 0{,}009 \frac{1}{\lambda^4} + 0{,}223.$$

Вычисленную, таким образом, яркость спутника можно использовать при фотографических наблюдениях тем увереннее, чем больше действующее отверстие и чем меньше фокусное расстояние камеры, и чем меньше собственное движение спутника.

Если камера отслеживает движение спутника или наблюдают световые вспышки геодезических спутников, то для освещенности в плоскости изображения действительна формула

$$k\left(\frac{D^*}{d}\right)^2 E\,[\text{люкс}],$$

где E — освещенность, создаваемая спутником, D^* — отверстие объектива, d — диаметр кружка рассеивания в плоскости изображения (в общем, $d = 20-30$ мк) и k — коэффициент проницаемости оптики. Если еще умножить на продолжительность экспозиции τ, то получим важную величину, а именно необходимое для потемнения фотографического слоя количество света B

$$B = k\left(\frac{D^*}{d}\right)^2 E \cdot \tau.$$

Итак, эффективность камеры зависит в этих условиях прежде всего от квадрата действующего отверстия объектива D^{*2}.

Если камера не отслеживает движение спутника, то кружок рассеивания спутникового изображения движется по пластинке соответственно его угловой скорости ω относительно оси камеры. Если f — фокусное расстояние, то эффективное время выдержки в этом случае будет $\tau = \frac{d}{f\omega}$ или лучше $\tau = \frac{\pi}{4}\,\frac{d}{f\omega}$, причем во втором уравнении принимают за τ время прохождения спутника от края до середины следа. Эффективное количество света будет

$$B = k\frac{D^{*2}}{df\omega}E \quad \text{или} \quad B = \frac{\pi}{4}k\,\frac{D^{*2}}{df\omega}E.$$

Если камера не отслеживает движение спутника, то ее эффективность зависит от

$$\frac{D^{*2}}{f},$$

так как другие величины k, E, d, ω известны заранее и почти не меняются.

5.7 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bivas R., Blamont J., Courtois N., Lago B., Lefebvre M.: Satellite Orbit Determination by Laser Tracking. CNRS, Paris, 1965.

2. Graaff de W., Jager de, C. COSPAR Information Bull. No. 25 (1965).

3. Lehr C. G.: Satellite tracking with a Laser. SAO, Special Report, Cambridge, Mass. No. 215 (1966).

4. Lehr C. G., Maestre L. A., Anderson P. H.: Measurements of Satellite Range with a Ruby Laser. SAO Special Report. No. 211 (1966).

5. Link F.: Conditions de visibilité du satellite artificiel. Studia Geoph. et Geod. Prag. I (1957).

6. Muller P.: La Camera de Poursuite Antares. COSPAR — Tagung London, 1967.

7. Plotkin H. H., Johnson T. S., Spadin P., Moye J.: Reflection of Ruby Laser Radiation from Explorer 22. Proc. IEEE 53 (1965).

8. Réseau géodèsique européen par observation de Satellites. Symposium de Paris 14—16 Décembre 1964. Centre National d'Etudes Spatiales, Institut Géographique National, 1964.

9. Rolff J.: The Optical Beacon of the GEOS—A Satellite. Bull. Centr. Bur. for Satellite Geodesy, SAO. No. I (1966).

10. Rolff J.: Some Characteristics of the GEOS—2 Satellite. Bull. Centr. Bur. for Sat. Geodesy, SAO, No. 3 (1968).

11. Snyder G. L., Hurst S. R., Grafinger A. B., Halsey H. W.: Satellite Laser Ranging Experiment Proc. IEEE 53 (1965).

12. Steinbach M.: Einige optische Systeme für die Beobachtung künstlicher Erdsatelliten. Jenaer Rdsch. 6 (1963).

13. Veis G.: The use of artificial satellites for Geodesy, Vol. II. Athens 1967.

4. Wallenhauer A.: Doppler-Messungen an künstlichen Erdsatelliten und ihre Anwendung in der Geodäsie. Vermessungstechn. Rdsch. Bonn H. 9 (1968).

15. Williams O. W., Iliff R. L., Tavenner M. S.: Lasers and Satellites: A Geodetic Application. Bull Géod., Paris, No. 80 (1966).

6. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ, МЕТОДЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИД

6.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

По фотографиям спутника на фоне звезд путем соответствующей обработки вычисляют топоцентрический единичный вектор направления на спутник в пространственной звездной системе. Координаты звезд, их прямые восхождения α и склонения δ берут из звездных каталогов. В настоящее время по рекомендациям международных научных организаций предпочитают для целей спутниковой геодезии звездные каталоги, составленные в системе фундаментального каталога FK-4. Видимые и средние места около 1500 звезд публикуются ежегодно в «Apparent Places of Fundamental Stars». Целям спутниковой геодезии хорошо отвечает появившийся в 1966 г. звездный каталог Смитсонианской астрофизической обсерватории. Он содержит средние места и собственные движения 258 997 звезд (6 звезд на площадку 1×1^0) в системе FK-4 относительно экватора и равноденствия эпохи 1950,0 со средней точностью $\pm 0{,}2''$. Также может быть рекомендован новый каталог AGK3, изданный Международным Астрономическим союзом.

При отождествлении звезд весьма полезен небесный атлас Бечваржа.

Если положения звезд относят не к координатной системе эпохи 1950,0, а к экватору и равноденствию момента наблюдений, вводя в средние места поправки за прецессию и нутацию, то получают истинные координаты звезд. Учитывая еще годичную и суточную аберрацию, приходят к видимым местам, в которые следует ввести поправку за рефракцию, чтобы получить наблюдаемые координаты.

Вместе с тем уравнения движения спутников (3) и (40) и три закона Кеплера действительны только в инерциальной системе координат, которая неподвижна в пространстве и не вращается. Такой инерциальной системой x^0, y^0, z^0 является, например, система, отнесенная к экватору и равноденствию эпохи 1950,0, в то время как система, к которой относятся истинные места в момент наблюдения, принимает участие в прецессионном и нутационном движениях и не является инерциальной.

В системе x^0, y^0, z^0 плоскость x^0, y^0 будет совпадать с плоскостью экватора эпохи 1950,0, а ось x^0 будет направлена в точку весеннего равноденствия той же эпохи. Ось z^0 перпендикулярна к плоскости

x^0y^0. В этой системе можно задать положения звезд и орбиты спутников.

Положения станций наблюдений, а следовательно, и результаты наблюдений спутников относятся к мгновенному экватору Земли, положение которого отличается от положения экватора эпохи 1950,0 на величину, определяемую прецессией (50″ в год) и нутацией (максимум 9″). В случае необходимости надо учитывать также движение полюса (0,4″). Таким образом, координаты станций наблюдений и результаты наблюдений надо было бы преобразовать в систему x^0, y^0, z^0. Такой теоретически возможный метод в исполнении не практичен и поэтому не применяется.

Если X, Y, Z — система, связанная с телом Земли, плоскость X, Y которой совпадает со средним экватором Земли, ось X — находится в плоскости (среднего) гринвичского меридиана и ось Z — направлена к среднему полюсу Земли, то координаты X, Y, Z и x^0, y^0, z^0 и координаты x'', y'', z'' мгновенной астрономической системы, отнесенной к мгновенному экватору, с осью x'', направленной в мгновенную точку весеннего равноденствия, связывают следующие уравнения преобразования:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}_z(\theta)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}''\boldsymbol{P}''\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}, \tag{104}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & -\eta \\ -\xi & +\eta & 1 \end{pmatrix}, \tag{106}$$

$$\boldsymbol{N}'' = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\nu & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \tag{107}$$

$$\boldsymbol{P}'' = \begin{pmatrix} -\sin\varkappa\sin\omega + \cos\varkappa\cos\omega\cos\nu; & \ldots \\ \sin\varkappa\cos\omega + \cos\varkappa\sin\omega\cos\nu; & \ldots \\ \cos\varkappa\sin\nu; \ \ldots & \end{pmatrix.}$$

$$\begin{matrix} \ldots -\cos\varkappa\sin\omega - \sin\varkappa\cos\omega\cos\nu; & -\cos\omega\sin\nu \\ \ldots \ \cos\varkappa\cos\omega - \sin\varkappa\sin\omega\cos\nu; & -\sin\omega\sin\nu \\ \ldots -\sin\varkappa\sin\nu; & \cos\nu \end{matrix}\Bigg), \tag{108}$$

$$\boldsymbol{M}'' = \boldsymbol{N}''\boldsymbol{P}'' \cong \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ -m_{12} & 1 & m_{23} \\ -m_{13} & -m_{23} & 1 \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Элементы m_{12}, m_{13}, m_{23} получаются в большинстве случаев с достаточным приближением путем сложения соответствующих элементов двух матриц N'', P''.

Величины ξ, η в (106) — координаты мгновенного полюса относительно среднего в радианах.

Элементы нутации в (107) будут

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\mu = &-76{,}7\cdot 10^{-6}\sin(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t)\\
&+0{,}9\cdot 10^{-6}\sin 2(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t)\\
&-5{,}7\cdot 10^{-6}\sin 2(280{,}0812^\circ + 0{,}9856473^\circ t)\\
&-0{,}9\cdot 10^{-6}\sin 2(64{,}3824^\circ + 13{,}176396^\circ t),\\
\Delta\nu = &-33{,}3\cdot 10^{-6}\sin(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t)\\
&+0{,}4\cdot 10^{-6}\sin 2(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t)\\
&-2{,}5\cdot 10^{-6}\sin 2(280{,}0812^\circ + 0{,}9856473^\circ t)\\
&-0{,}4\cdot 10^{-6}\sin 2(64{,}3824^\circ + 13{,}176396^\circ t)\\
\Delta\varepsilon = &+44{,}7\cdot 10^{-6}\cos(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t),\\
&-0{,}4\cdot 10^{-6}\cos 2(12{,}1128^\circ - 0{,}0529539^\circ t)\\
&+2{,}7\cdot 10^{-6}\cos 2(28{,}0812^\circ + 0{,}9856473^\circ t)\\
&+0{,}4\cdot 10^{-6}\cos 2(64{,}3824^\circ + 13{,}176396^\circ t).
\end{aligned}\right\}\qquad(110)$$

Элементы матрицы прецессии равны

$$\varkappa = 0{,}063107''t,\quad \omega = 0{,}063107''t,\quad \nu = 0{,}054875''t,\qquad(111)$$

где t — число суток с 1950,0.

Угол θ в матрице вращения (105) — истинное звездное время.

В последующих уравнениях (114), (115) используется матрица [уравнение (116)]

$$Q = R_z(-\theta)\,SR_z(\theta)\cdot M''(M')^{-1}.\qquad(112)$$

Чтобы избежать применения матриц нутации и прецессии N, P, вычисляют по средним прямому восхождению и склонению α°, δ° для эпохи 1950,0 истинные прямое восхождение и склонение α'', δ'' для даты наблюдения, т. е. переходит от системы x°, y°, z° к системе x'', y'', z'' по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'' &= \alpha^\circ + (\varkappa + \omega) + \Delta\mu + (\nu + \Delta\nu)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta - \Delta\varepsilon\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\\
\delta'' &= \delta^\circ + (\nu + \Delta\nu)\cos\alpha + \Delta\varepsilon\sin\alpha
\end{aligned}\right\}.\qquad(113)$$

Чтобы избежать трудностей, возникающих при редуцировании всех данных в инерциальную систему x°, y°, z°, можно рекомендовать следующий путь.

Инерциальную систему, например x°, y°, z°, не вводят, а все данные редуцируют к мгновенной астрономической системе, отнесенной к мгновенному экватору и мгновенной точке весеннего равноденствия, т. е. к системе x'', y'', z''. Разумеется, тогда больше не действуют уравнения движения Ньютона, и орбита спутника не является больше кеплеровским эллипсом, так что надо к элементам орбиты прибавлять изменяющиеся со временем дополнительные члены. Если вычислить наблюдаемые топоцентрические единичные векторы в мгновенной системе x'', y'', z'', используя видимые прямое восхождение и склонение спутника для даты наблюдений и шесть элементов орбиты a'', e'', ω'', i'', Ω'', M'' в этой мгновенной астрономической системе координат x'', y'', z'', то действующие для инерциальной системы теории возмущений сохранят свое значение неизменным при последовательном введении во все выражения элементов орбиты, относящихся к системе координат x'', y'', z'', и при учете в аргументе перигея, в наклоне, в долготе восходящего узла и в средней аномалии следующих дополнительных членов:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\omega'' &= \sum_1^3 \delta_i\omega\\
\delta_1\omega &= \frac{3}{4} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 (5\sin 2i - 2\operatorname{ctg} i)\cdot \Gamma_{q\cdot 1}(T', T'')\\
\delta_2\omega &= \frac{1}{\sin i}(\overline{m}_{31}\cos\Omega + \overline{m}_{32}\sin\Omega)\\
\delta_3\omega &= -\frac{15}{4} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \sin 2i\cdot \Gamma_{m\cdot 1}(T', T'')\\
\Delta i'' &= \sum_1^3 \delta_i i\\
\delta_1 i &= -\frac{3}{2} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \cos i\cdot \Gamma_{q\cdot 2}(T', T'')\\
\delta_2 i &= -\overline{m}_{31}\sin\Omega + \overline{m}_{32}\cos\Omega\\
\delta_3 i &= 0\\
\Delta\Omega'' &= \sum_1^3 \delta_i\Omega\\
\delta_1\Omega &= \frac{3}{2} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \frac{\cos 2i}{\sin i}\cdot \Gamma_{q\cdot 1}(T', T'')\\
\delta_2\Omega &= \overline{m}_{21} - \operatorname{ctg} i\,(\overline{m}_{31}\cos\Omega + \overline{m}_{32}\sin\Omega)\\
\delta_3\Omega &= \frac{3}{2} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \sin i\cdot \Gamma_{m\cdot 1}(T', T'')\\
\Delta M'' &= \sum_1^3 \delta_i M\\
\delta_1 M &= \frac{9}{4} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \sin 2i\cdot \Gamma_{q\cdot 1}(T', T'')\\
\delta_2 M &= 0\\
\delta_3 M &= -\frac{9}{4} J_2 n\left[\frac{R_E}{a}\right]^2 \sin 2i\cdot \Gamma_{m\cdot 1}(T', T'').
\end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{q\cdot 1} &= \int\limits_{T'}^{T''} \left(\bar{q}_{3\cdot 1}\sin\Omega - \bar{q}_{3\cdot 2}\cos\Omega\right) dt \\ \Gamma_{q\cdot 2} &= \int\limits_{T'}^{T''} \left(\bar{q}_{3\cdot 1}\cos\Omega + \bar{q}_{3\cdot 2}\sin\Omega\right) dt \end{aligned}\right\}, \tag{115}$$

где $\Gamma_{m\cdot 1}$ получается аналогично $\Gamma_{q\cdot 1}$, если в (115) функции $\bar{q}_{ik}$ заменить через $\bar{m}_{ik}$. q_{ik} следуют из уравнения (112).

Пусть T' — момент, в который спутник проходит начальную точку определяемой части орбиты, для которой необходимо решить уравнения (114), а T'' — момент, относящийся к текущей точке.

Если Q', M' (Q'', M'') матрицы (109), (112) относятся к моменту $T'(T'')$, то элементы матриц $\bar{q}_{ik}$, $\bar{m}_{ik}$ будут

$$Q = (\bar{q}_{ik}); \quad M''(M')^{-1} = (\bar{m}_{ik}). \tag{116}$$

Учитывая выражения (114), имеем строгую математическую зависимость для изменения орбиты спутника в мгновенной астрономической системе. Для самых разных целей ее можно анализировать таким же образом, как элементы орбиты в инерциальной системе.

Смитсонианская астрофизическая обсерватория публикует результаты наблюдений спутников в системе x°, y°, z°, т. е. относительно среднего экватора и среднего равноденствия эпохи 1950,0. Напротив, угол наклона и аргумент перигея из элементов орбиты, публикуемых Смитсонианской астрофизической обсерваторией, относятся к истинному экватору даты (система x'', y'', z''). Долготу восходящего узла считают от точки пересечения орбиты спутника с истинным экватором вначале вдоль истинного экватора до точки его пересечения со средним экватором для 1950,0, а затем вдоль этого последнего до среднего равноденствия для 1950,0. Для преобразования опубликованных САО значений долготы восходящего узла в систему x°, y°, z° к долготе восходящего узла относительно истинного равноденствия даты надо прибавить величину $3{,}508^\circ\cdot 10^{-5}\cdot t$, где t число суток от 1950,0, и нутацию $\rho^\circ\Delta\mu$ в соответствии с уравнением (110). Полученный из наблюдений вектор должен быть преобразован с помощью уравнений (104) из системы x°, y°, z° в систему x'', y'', z'', если хотят ее использовать. Разложение потенциала поля силы тяжести Земли, заданное в системе X, Y, Z, можно в соответствии со (104), (105) преобразовать в систему x'', y'', z'', используя матрицу вращения $R(\theta)$ и учитывая движение полюса.

В матрице вращения $R_Z(\theta)$ в уравнении (105) появляется истинное звездное время θ. Оно определяет положение Земли при ее вращении. Так как Земля вращается с запада на восток со скоростью на экваторе около 460 м/сек, то ошибка времени в 1 мсек приводит к ошибке положения пункта 0,5 м. Спутник перемещается по своей орбите за 1 мсек примерно на 8 м. Звездное время можно взять из ежегодников. При практических расчетах на электронной вычислительной машине рекомендуется вычислять истинное звездное время θ по полученному из наблюдений среднему времени или по атомному времени с помощью аналитического выражения. Оно имеет вид

$$\theta = 100{,}075542^\circ + 360{,}985647348^\circ t + 0{,}2900^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \rho^0 \Delta\mu, \qquad (117)$$

где t — число средних суток с 1950,0, а $\Delta\mu$ получается по (110). t здесь берется в системе UT-1. Если UT — всемирное время, определенное по вращению Земли, то UT-1 получают, учитывая влияние движения полюса. Но UT-1 не является инерциальным временем. Нужно еще учесть влияние геофизических процессов, частично зависящих от времени года, в результате этого получим UT-2. В (117) t должно быть взято в системе UT-1. В последнее время в спутниковой геодезии пользуются атомным временем А-1.

Для системы А-1, уравнение (117) сохранит свою силу, если только заменить t на t_A, где t_A — число суток с 1950,0 в атомном времени, и если далее прибавить

$$\Delta\theta = 1{,}002738 \cdot [(UT \# 1) - (A \# 1)] \text{ сек},$$

$$\Delta\theta^\circ = 0^\circ{,}004177\, [(UT \# 1) - (A \# 1)] \text{ сек}.$$

Выражения в квадратных скобках систематически публикуются службами времени.

6.2. МЕТОДЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ, ЗВЕЗДНЫЕ КООРДИНАТЫ

При фотографических наблюдениях спутников для определения топоцентрического единичного вектора спутника на фотографическом снимке сначала отождествляют изображения звезд с помощью звездного атласа, берут из звездного каталога их средние координаты для эпохи 1950,0 и вычисляют по полученному таким образом прямому восхождению α° и склонению δ° единичный вектор направления на звезду в системе x°, y°, z°

$$x^\circ = \cos\delta^\circ \cos\alpha^\circ, \quad y^\circ = \cos\delta^\circ \sin\alpha^\circ, \quad z^\circ = \sin\delta^\circ. \qquad (117, \text{a})$$

Для учета прецессии и нутации умножают на матрицу M'' (точность ее около 0,2″) по (104) или, используя (113), получают истинные координаты в системе x'', y'', z'' и, далее, прямое восхождение α'' и склонение δ''. Для приведения на видимое место следует учесть еще годичную ($\Delta\alpha_1$, $\Delta\delta_1$) и суточную ($\Delta\alpha_2$, $\Delta\delta_2$) аберрацию

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= Cc + Dd = -\frac{1}{\cos\delta}(20{,}47''\sin\alpha\sin\lambda_\odot + \\ &\quad + 18{,}87\cos\alpha\cos\lambda_\odot), \\ \Delta\delta_1 &= Cc' + Dd' = -[20{,}47''\sin\delta\cos\alpha\sin\lambda_\odot + \\ &\quad + 18{,}87''\cos\lambda_\odot \cdot (0{,}4336661\cos\delta - \sin\delta\sin\alpha)] \end{aligned}\right\}. \qquad (118)$$

Величины C, D, c, d, c', d' взяты из редукционных формул Бесселя. $\lambda_{\odot}$ — геоцентрическая долгота Солнца в радианах

$$\lambda_{\odot} = 2\pi\left(\frac{t}{365{,}242} - 0{,}219\right), \tag{118, a}$$

где $t = JD - 2\,433\,282{,}925$; JD = юлианский день.

Суточная аберрация значительно меньше, в большинстве случаев ею можно пренебречь

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_2 &= 0{,}32'' \cos\varphi \sec\delta \cos(\theta - \alpha) \\ \Delta\delta_2 &= 0{,}32'' \cos\varphi \sin\delta \sin(\theta - \alpha) \end{aligned}\right\}, \tag{119}$$

где θ — звездное время.

В большинстве случаев в пределах поля снимка годичную и суточную аберрации с достаточной точностью можно считать постоянными.

Редуцирование звезд на видимые места за влияние прецессии, нутации и годичной аберрации можно выполнить посредством редукционных формул Бесселя, объяснение которых дается в «Astronomical Ephemeries», однако тогда надо на каждый день брать из ежегодника числовые значения редукционных величин и закладывать их в вычислительные машины, в то время как в формулах (104), (118), (119) в качестве аргумента используется в основном только время; поэтому при расчетах в спутниковой геодезии лучше использовать формулы (118).

6.3. ВЛИЯНИЕ РЕФРАКЦИИ НА ЗВЕЗДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Следует учитывать еще астрономическую рефракцию r^*. Она уменьшает зенитное расстояние на величину

$$r^* = (k_1 \operatorname{tg} Z + k_2 \operatorname{tg}^3 Z) \cdot C_B \cdot C_T, \tag{120}$$

где $k_1 = 60{,}18''$ и $k_2 = -0{,}068''$. C_B и C_T учитывают влияние давления и температуры воздуха. Их влияние на r^* можно выбрать из таблиц рефракции.

Изменение прямого восхождения и склонения из-за рефракции будет

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_3 &= \frac{\cos\varphi' \sin(\theta - \alpha)}{\cos\delta \sin Z} r^* \\ \Delta\delta_3 &= \frac{1}{\sin Z}[\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos(\theta - \alpha)]\, r^* \end{aligned}\right\}. \tag{121}$$

Зенитное расстояние Z и азимут A (отсчитанный от направления на север по ходу часовой стрелки) звезды можно вычислить по звезд-

ному времени θ, географической широте станции наблюдения φ' и координатам звезды α, δ по формулам

$$\left.\begin{aligned}\cos Z &= \sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta\cos(\theta-\alpha)\\ \sin A &= -\operatorname{cosec} Z\cos\delta\sin(\theta-\alpha)\\ \cos A &= \operatorname{cosec} Z\,[\cos\varphi'\sin\delta - \sin\varphi'\cos\delta\cos(\theta-\alpha)]\end{aligned}\right\}. \tag{122}$$

Рефракция влияет в полной мере на прямые восхождения и склонения звезд, полученных на соответствующем снимке, но она не влияет в такой же мере на определяемое положение спутника, потому что спутник получается на фоне звезд с помощью аффинных или перспективных формул преобразования, что будет показано позже (126), (127), (128), (143), (144). При этом влияют только разности рефракции внутри поля опорных звезд, получившихся на снимке.

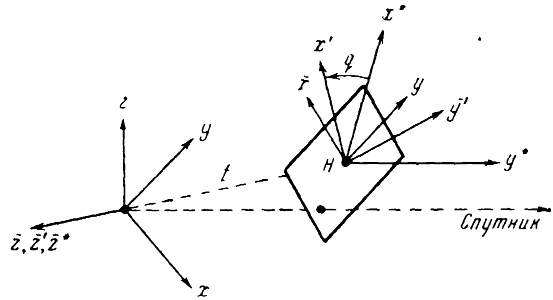


Рис. 18. Тангенциальные и измеренные координаты снимка

Вместо того чтобы учитывать рефракцию в прямом восхождении и склонении, можно вводить эту поправку в плоские координаты изображения спутника на снимке. Пусть в плоскости снимка задана прямоугольная система координат $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$, ориентированная по отвесной линии (рис. 18), ось $\bar{y}^*$ которой горизонтальная (положительная в направлении к востоку) и ось $\bar{x}^*$ — проходит в плоскости, параллельной вертикальному кругу (положительна к зениту), тогда координаты $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$ изменяются в соответствии с формулами (123), если зенитные расстояния уменьшаются из-за рефракции на угол r^*

$$\left.\begin{aligned}\Delta(\bar{x}^*) &= \frac{f\operatorname{tg}Z-\bar{x}^*}{f}\cdot\frac{\bar{x}^{*2}+\bar{y}^{*2}+f^2}{f+\bar{x}^*\operatorname{tg}Z}\operatorname{ctg}Z\cdot r^*\frac{1}{\rho''}\\ \Delta(\bar{y}^*) &= -\frac{\bar{y}^*}{f}\cdot\frac{\bar{x}^{*2}+\bar{y}^{*2}+f^2}{f+\bar{x}^*\operatorname{tg}Z}\operatorname{ctg}Z\cdot r^*\frac{1}{\rho''}\end{aligned}\right\}, \tag{123}$$

где f — фокусное расстояние камеры, Z в формуле (123) — зенитное расстояние оптической оси камеры.

Только редуцированные по формулам (118), (119), (121) прямые восхождения и склонения звезд

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha'' + \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 \\ \delta &= \delta'' + \Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 + \Delta\delta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (123, a)$$

могут сопоставляться с координатами звезд на снимке.

6.4. ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ*

Сначала преобразуем координаты α, δ в тангенциальные координаты $\bar{x}'$, $\bar{y}'$. Тангенциальные координаты получатся, если вокруг станции наблюдений опишем сферу радиуса f, затем проведем через точку пересечения оптической оси камеры со сферой (точка касания) плоскость, касательную к сфере, и через точку касания проведем ось $\bar{x}'$ в направлении возрастания склонения и ось $\bar{y}'$ в направлении увеличения прямого восхождения

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}' = f\,\mathrm{tg}\,(q - \bar{D}); \quad \bar{y}' = f\,\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha - \bar{A})\cos q}{\cos(q - \bar{D})} \\ &\mathrm{ctg}\,q = \mathrm{ctg}\,\delta \cos(\alpha - \bar{A}) \end{aligned}\right\}, \qquad (124)$$

где $\bar{A}$ и $\bar{D}$ — прямое восхождение и склонение главной точки снимка H (точка касания).

$\bar{A}$ и $\bar{D}$ получают путем небольших дополнительных расчетов, используя звезды, получившиеся вблизи главной точки снимка H. Для этого сравнивают координаты этих звезд α, δ с координатами их изображений на снимке $\bar{x}$, $\bar{y}$ и определяют путем линейной интерполяции значения α, δ $(=\bar{A}, \bar{D})$, соответствующие $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$.

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты в системе снимка, полученные при измерениях на компараторе. Их нельзя путать с тангенциальными координатами, от которых они отличаются прежде всего поворотом осей (см. рис. 18).

Переход от системы $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$, $\bar{z}^*$ к системе $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$ происходит путем вращения вокруг оси $\bar{z}^*$ (это также и ось z') на угол q по ходу часовой стрелки (рис. 18)

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = R_z(q) \begin{pmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{y}^* \\ \bar{z}^* \end{pmatrix}, \qquad (124, a)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin q &= \frac{\sin A}{\cos \bar{D}} \cos\varphi' \\ \cos h \sin A &= -\cos\bar{D}\sin(\theta - \bar{A}) \\ \cos h \cos A &= \cos\varphi' \sin\bar{D} - \sin\varphi' \cos\bar{D}\cos(\theta - \bar{A}) \\ \sin h &= \sin\varphi' \sin\bar{D} + \cos\varphi' \cos\bar{D}\cos(\theta - \bar{A}) \end{aligned}\right\}. \qquad (124, б)$$

* Эти координаты называют также идеальными или стандартными. — Прим. перев.

Здесь h — высота, A — азимут оси камеры, θ — звездное время в момент фотографирования, φ' — географическая широта станции.

Значения $\bar{A}$ и $\bar{D}$ не должны определяться с такой же точностью, с которой известны звездные координаты. Для этих значений допустима сравнительно невысокая точность в случае камер с малым полем зрения. Напротив, у камер с большим полем зрения, около $30 \times 30°$ (ВС-4) величины $\bar{A}$ и $\bar{D}$ должны определяться довольно-таки надежно, как видно из следующей таблицы, в которой дано искажение наблюдаемой связки лучей в зависимости от ошибок значений $\bar{A}$ и $\bar{D}$ в соответствии с уравнением (124).

	$\Delta\bar{A}$, $\Delta\bar{D}$	10″	20″	40″	60″
Поле пластинки	1×1°	0,001″	0,002″	0,003″	0,005″
	2×2	0,003	0,006	0,012	0,018
	5×5	0,02	0,04	0,08	0,11
	10×10	0,08	0,15	0,30	0,46

6.5. ДИСТОРСИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Координаты снимка $\bar{x}$, $\bar{y}$ необходимо еще исправить за дисторсию оптической системы, вследствие которой точка, изображающая звезду, смещается в радиальном направлении на величину

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \bar{r}^{2i-1}, \quad \bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2. \tag{125}$$

Величины h_i можно определить à priori из лабораторных исследований или ввести в уравнения в качестве неизвестных.

У камер с отверстием только в несколько градусов (около 5°) для учета дисторсии обходятся в большинстве случаев первым членом разложения (125). Например, для камеры НАФА $h_1 = -2{,}5 \cdot 10^{-6}$ мм$^{-2}$, если измеряют на поле снимка, размеры которого не более $7 \times 7°$.

6.6. УРАВНЕНИЯ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Если использовать звездные координаты α, δ (123, a) и вычислить соответствующие им тангенциальные координаты $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, то последние можно сравнить с координатами снимка $\bar{x}$, $\bar{y}$, исправленными за дисторсию по правилам аффинного преобразования, т. е. с учетом поступательного движения, вращения и изменения масштаба.

Можно вычислить по видимым звездным координатам тангенциальные координаты $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ без учета поправки за рефракцию, но тогда надо исключить влияние рефракции из координат снимка $\bar{x}$, $\bar{y}$ (123).

Формулы аффинного преобразования имеют вид

$$v_x = a\bar{x}' + b\bar{y}' + c - l_x, \quad v_y = d\bar{x}' + e\bar{y}' + f - l_y, \tag{126}$$

$$\left.\begin{aligned} -l_x &= -(\bar{x}' - \bar{x}) + h_1(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\,\bar{x} \\ -l_y &= -(\bar{y}' - \bar{y}) + h_1(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\,\bar{y} \end{aligned}\right\}, \tag{127}$$

где коэффициент дисторсии h_1 считают заданной величиной.

Шесть величин a, b, c, d, e, f (постоянные пластинки) являются неизвестными задачи, которые надо определить из уравнивания, используя (126), (127). При наличии шести неизвестных теоретически достаточно трех опорных звезд. Но рекомендуется использовать по крайней мере шесть звезд, для того чтобы иметь избыточные измерения.

У камеры с параллактической монтировкой можно добиться, чтобы ось $\bar{y}'$ была параллельна оси $\bar{y}$ (тогда угол наклона мал). В противном случае можно определить приближенное значение угла наклона с помощью фотограмметрических преобразований (141), (142). В соответствии с наклоном координатной системы снимка или тангенциальными координатами, полученными с его приближенным значением, в правой части уравнений (126) в коэффициентах при постоянных снимка a, b, d, e можно заменить значение $\bar{x}'$ на $\bar{x}$ и $\bar{y}'$ на $\bar{y}$.

Можно улучшить координаты снимка x, y введением поправок за дисторсию $h_1(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\,\bar{x}$, $h_1(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\,\bar{y}$, если h_1 известно.

При этом получают $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ и уравнение преобразования будет

$$v_x = a\bar{x}_k + b\bar{y}_k + c - \bar{x}',$$

аналогичное уравнение имеем для $\bar{y}_k$. Здесь угол наклона любой, а постоянные пластинки не являются малыми величинами.

Для обоих компонентов поступательного движения, для поворота и изменения масштаба необходимо всего четыре неизвестных параметра. Но, несмотря на это, рекомендуют определять все шесть неизвестных как независящие друг от друга величины, чтобы избежать ошибок, вызванных другими причинами (остаточные ошибки дифференциальной рефракции, деформации пленки и другие).

Шесть неизвестных a, b, c, d, e, f в уравнении (126) определяют путем уравнивания. При этом по большим остаточным уклонениям v_x, v_y, полученным при уравнивании, могут быть вскрыты и устранены грубые ошибки, допущенные при отождествлении звезд.

6.7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА

После того, как установлены математические зависимости между системами $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, и тем самым между координатами звезд и спутника $\bar{x}$, $\bar{y}$ и α, δ, разрывы следа спутника, т. е. его координаты на снимке $\bar{x}^s$, $\bar{y}^s$, можно преобразовать в систему $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ для получения далее прямого восхождения α^s и склонения δ^s. Если после уравнивания подставить в (126), (127) координаты изображения спутника $\bar{x}^s$, $\bar{y}^s$, а поправки к координатам спутника считать равными нулю ($v_x = v_y = 0$), то найдем отсюда тангенциальные координаты спутника $\bar{x}'^s$, $\bar{y}'^s$.

В результате преобразования уравнений (124) получим

$$\left.\begin{aligned} q &= \bar{D} + \operatorname{arctg}\frac{\bar{x}'^s}{f} \\ \operatorname{tg}(\alpha_0^s - \bar{A}) &= \frac{\bar{y}'^s}{f}\cos(q - \bar{D})\sec q \\ \operatorname{tg}\delta_0^s &= \operatorname{tg} q\cos(\alpha_0^s - \bar{A}) \end{aligned}\right\}. \qquad (128)$$

Далее определяют значения прямого восхождения и склонения спутника α_0^s, δ_0^s, которые еще исправляются поправками за аберрацию и рефракцию (параллактическая рефракция). Для сферических спутников-баллонов учитывается еще редукция к геометрическому центру визирной цели (поправка за фазу).

Поправки в положение спутника рассмотрим в трех последующих параграфах.

Прежде чем координаты изображения спутника $\bar{x}^s$, $\bar{y}^s$ или $\bar{x}'^s$, $\bar{y}'^s$, полученные из измерений на пластинке, применять далее в (126), (127) и (128), Риннер и Вольф рекомендуют подвергнуть их выравниванию, так чтобы после исправления поправками за аберрацию, рефракцию и фазу они представляли в плоскости изображения параболу или соответствующую кривую высшего порядка.

Сначала по (128) вычисляют α_0^s, δ_0^s, затем вводят названные три поправки, а по полученным из (132, *а*) значениям α^s, δ^s аналогично (117, *а*) вычисляют топоцентрические единичные векторы спутника, которые при продолжении определяют эллиптическую орбиту спутника в пространстве без поперечной ошибки («пространственное выравнивание»).

6.8. АБЕРРАЦИЯ

Поправку за аберрацию можно учитывать двумя разными способами. Можно момент наблюдений оставлять неизменным и редуцировать прямое восхождение и склонение или можно исправлять момент наблюдений.

Луч света, достигший камеры в момент t_2, покидает спутник на $\frac{s}{c}$ секунд раньше в момент t_1, если s — расстояние до спутника, а c — скорость света. Следовательно, к наблюдаемому прямому восхождению и склонению, если они должны относиться к моменту t_2, надо прибавить значения

$$\Delta\alpha_1^s = \alpha^{\cdot 0}\cdot\frac{s}{c} \text{ и } \Delta\delta_1^s = \delta^{\cdot 0}\cdot\frac{s}{c}. \qquad (129)$$

Производные по времени от α и δ можно определить путем получения прерывистого следа и обработки рядов соответствующих значений α, δ, t. Можно не определять значений $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ и исправлять только момент наблюдений. В этом случае из момента, в который свет, идущий от спутника, достигает станции, вычитают время прохождения света $\frac{s}{c}$. Эта величина может достигать примерно 2—10 мсек.

$$t_1 = t_2 - \frac{s}{c}.$$

6.9. ПАРАЛЛАКТИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ (СПУТНИКОВАЯ РЕФРАКЦИЯ)

Пусть введенные в (124) координаты звезд α, δ были исправлены с помощью (121) за влияние астрономической рефракции, т. е. получены по (123, *а*), а затем, пользуясь (126), (127), (128), вычислили значения координат спутника α_0^s, δ_0^s. Тогда эти значения прямого восхождения и склонения необходимо освободить от влияния рефракции, если хотим получить пространственные полярные координаты для вычисления единичного вектора, направленного к спутнику, в соответствии с формулами (117, *а*).

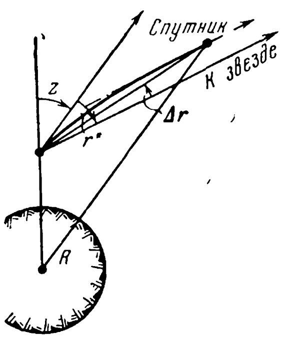


Рис. 19. Астрономическая рефракция r^* и параллактическая рефракция Δr

Редукция за рефракцию у спутника немного иная, чем у звезды, потому что световой луч здесь проходит на всю атмосферу, а только путь от спутника до станции (рис. 19). Поэтому рефракция уменьшает зенитное расстояние спутника только на величину

$$r^s = r^* - \Delta r. \tag{130}$$

Астрономическую рефракцию r^* можно определить из уравнения (120). Параллактическая рефракция Δr редко достигает 2″ и по Вейсу получается почти всегда достаточно точно по формуле

$$\Delta r = k_3 \frac{1}{s} \operatorname{tg} Z \sec Z \, [1 + k_4 (2 \sec^2 Z + \operatorname{tg}^2 Z)] \, (1 - e^{-0{,}1385 h}), \tag{131}$$

где s — расстояние до спутника, $k_3 = 435{,}0$ [″км$^{-1}$] и $k_4 = -0{,}00113$ [км$^{-1}$]. В формуле (131): e — основание натуральных логарифмов, s — вычисляется по элементам орбиты спутника и координатам станции или высоте спутника h над станцией наблюдения и зенитному расстоянию по формуле

$$s = 6370 \left[\sqrt{2\bar{h} + \bar{h}^2 + \cos^2 Z} - \cos Z \right],$$

$$\bar{h} = \frac{h}{6370}.$$

Если высота спутника не менее 1000 км и зенитные расстояния не больше 45°, то в большинстве случаев с достаточным приближением действует формула

$$\Delta r \cong \rho'' \frac{2{,}33}{h} \operatorname{tg} Z. \qquad (131, a)$$

В формулах (131) h измерено в километрах, а в (131, a) — в метрах. Заменив в (121) значение r^* значением $-r^s$, получим величины поправок в прямое восхождение $\Delta\alpha_2^s$ и склонение $\Delta\delta_2^s$, благодаря которым положение спутника освобождается от влияния рефракции. Если эти поправки хотят отнести не к значениям координат спутника α и δ, а к его тангенциальным координатам $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, то можно использовать формулы (123), если при этом, конечно, заменить r^* на $-r^s$.

6.10. ПОПРАВКА ЗА ФАЗУ СПУТНИКА

Точка, которая изображает на фотопластинке положение спутника, получается от той части его поверхности, которая отражает солнечный свет, а не от геометрического центра спутника. Так как диаметр спутника-баллона «Эхо 1» около 30 м, то эксцентриситет визирной цели может достигать несколько метров. При точных наблюдениях необходимо учитывать фазу спутника, имея в виду, что спутники-баллоны спустя некоторое время своего существования уже не строго сферичны, как это известно из фотометрических наблюдений (см. рис. 17).

Если наблюдаемый топоцентрический вектор положения спутника a определен в мгновенной астрономической системе координат x'', y'', z'' (104), то радиус-вектор Солнца в этой системе будет

$$r_\odot = \begin{Bmatrix} \cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot \\ \cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot \\ \sin\delta_\odot \end{Bmatrix}.$$

Координаты Солнца $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$ можно взять из ежегодника.

Тогда полученный из наблюдений вектор, направленный к центру спутника, будет

$$\bar{a} = \frac{a + \dfrac{R_s}{s} \cdot \dfrac{a - r_\odot}{|a - r_\odot|}}{\left| a + \dfrac{R_s}{s} \cdot \dfrac{a - r_\odot}{|a - r_\odot|} \right|}, \qquad (132)$$

где R_s — радиус спутника, s — расстояние до него от станции наблюдения. Если преобразование от вектора a к вектору $\bar{a}$ хотят произвести не по уравнению (132), а через малые изменения прямого восхождения и склонения, то совершается этот переход путем исправления прямого восхождения и склонения спутника поправками

$\Delta\alpha_3^s$ и $\Delta\delta_3^s$. Если разность между нормированными векторами $\bar{a}$ и a равна

$$\bar{a} - a = \begin{pmatrix} \delta x_a \\ \delta y_a \\ \delta z_a \end{pmatrix},$$

то

$$\Delta\alpha_3^s = -\frac{1}{\cos\delta\sin\alpha}\,[\delta x_a + \operatorname{tg}\delta\cos\alpha\,\delta z_a] = \frac{1}{\cos\delta\cos\alpha}\,[\delta y_a + \operatorname{tg}\delta\sin\alpha\,\delta z_a],$$

$$\Delta\delta_3^s = \frac{1}{\cos\delta}\,\delta z_a.$$

Для редуцированных координат спутника имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha^s &= \alpha_0^s + \Delta\alpha_1^s + \Delta\alpha_2^s + \Delta\alpha_3^s \\ \delta^s &= \delta_0^s + \Delta\delta_1^s + \Delta\delta_2^s + \Delta\delta_3^s \end{aligned}\right\}. \qquad (132, a)$$

6.11. ФОРМУЛЫ ПЕРСПЕКТИВНОГО (ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОГО) ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

У камер с малым полем зрения примерно до $10 \times 10°$ обходятся почти всегда формулами аффинного преобразования (126). У камер с очень большим полем зрения рекомендуется расширить уравнения отображения (126) введением квадратичных членов

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a\bar{x}' + b\bar{y}' + a_{11}\bar{x}'^2 + a_{22}\bar{y}'^2 + a_{12}\bar{x}'\bar{y}' + c - l_x \\ v_y &= d\bar{x}' + e\bar{y}' + d_{11}\bar{x}'^2 + d_{22}\bar{y}'^2 + d_{12}\bar{x}'\bar{y}' + f - l_y \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

Тогда необходимо представить дисторсию многочленом (125), а не только через h_1. При большом поле необходимо очень точно определить прямое восхождение и склонение $\bar{A}$ и $\bar{D}$ точки касания (главной точки снимка). Возникает желание определить поправки для значений $\bar{A}$ и $\bar{D}$ сразу же по ходу уравнивания. В принципе это возможно в рамках анализа уравнений (133) после некоторых дополнительных рассуждений.

Возражением против такого схематического превращения уравнений (126) в уравнения (133) является то, что перспективные соотношения соблюдаются не в полной мере. Для того чтобы проследить эту мысль, перейдем к обработке снимков на основании фотограмметрических принципов.

Если идти этим путем, то вначале по редуцированным (123, a) прямому восхождению α и склонению звезды δ вычисляем ее пространственный топоцентрический единичный вектор

$$a = \begin{pmatrix} x'' = \cos\delta\cos\alpha \\ y'' = \cos\delta\sin\alpha \\ z'' = \sin\delta \end{pmatrix} \qquad (134)$$

С другой стороны, положение звезды определено в системе координат снимка

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ -f \end{pmatrix}, \tag{135}$$

причем f — фокусное расстояние камеры (см. рис. 18). Координаты системы x'', y'', z'' уравнения (134) можно преобразовать путем умножения на матрицу и на скалярный коэффициент k, $k^2 = m^2 + n^2 + q^2$, в координаты другой системы

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ q \end{pmatrix},$$

которая идентична системе координат снимка $\bar{x}$, $\bar{y}$, если не учитывать дисторсию оптики, случайные ошибки и другие малые поправки

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ q \end{pmatrix} \cong kL \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{136}$$

Матрица $L = L(\bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\theta})$ означает поворот системы x'', y'', z'' вокруг оси y'' в направлении по ходу часовой стрелки на угол $\bar{\theta}$, далее следует соответствующий поворот вокруг новой оси x'' на угол $\bar{\varphi}$, за которым, наконец, следует поворот вокруг новой оси z'' на угол $\bar{\psi}$ (направо). С введенными ранее матрицами вращения (25), (26), (27)

$$L = R_z(-\bar{\psi})\, R_x(-\bar{\varphi})\, R_y(-\bar{\theta}). \tag{137}$$

Элементы этой матрицы равны

$$l_{11} = \cos\bar{\psi}\cos\bar{\theta} - \sin\bar{\psi}\sin\bar{\varphi}\sin\bar{\theta},$$

$$l_{12} = -\sin\bar{\psi}\cos\bar{\varphi},$$

$$l_{13} = \cos\bar{\psi}\sin\bar{\theta} + \sin\bar{\psi}\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\theta},$$

$$l_{21} = \sin\bar{\psi}\cos\bar{\theta} + \cos\bar{\psi}\sin\bar{\varphi}\sin\bar{\theta},$$

$$l_{22} = \cos\bar{\psi}\cos\bar{\varphi},$$

$$l_{23} = \sin\bar{\psi}\sin\bar{\theta} - \cos\bar{\psi}\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\theta},$$

$$l_{31} = -\sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi},$$

$$l_{32} = \sin\bar{\varphi},$$

$$l_{33} = \cos\bar{\varphi}\cos\bar{\theta}.$$

Параметры $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$ относятся к неизвестным задачи, и в начале вычислений необходимо знать их приближенные значения $\bar{\psi}_0$, $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\theta}_0$, $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\theta}_0$ получают из условия, что координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ главной точки снимка H равны нулю. На основании (136) приближенные координаты главной точки снимка, выраженные через элементы матрицы вращения L ($m = n = 0$, $k = -q = f$), будут

$$\left.\begin{aligned} x''_H &= \sin\bar{\theta}_0 \cos\bar{\varphi}_0 \\ y''_H &= -\sin\bar{\varphi}_0 \\ z''_H &= -\cos\bar{\theta}_0 \cos\bar{\varphi}_0 \end{aligned}\right\}. \tag{138}$$

Приближенные координаты H можно определить в системе x'', y'', z'' по прямому восхождению и склонению этой точки $\bar{A}$ и $\bar{D}$ после того, как определим оба эти значения с соответствующими оговорками согласно уравнениям (124) (см. рис. 18)

$$\left.\begin{aligned} x''_H &= \cos\bar{D}\cos\bar{A} \\ y''_H &= \cos\bar{D}\sin\bar{A} \\ z''_H &= \sin\bar{D} \end{aligned}\right\}. \tag{139}$$

Если известны высота h и азимут оси камеры A и звездное время фотографирования θ, то можно $\bar{A}$ и $\bar{D}$ вычислить по формулам (124, *б*) и выражению

$$\sin\bar{D} = \sin\varphi' \sin h + \cos\varphi' \cos h \cos A.$$

Сравнивая (138) и (139), получаем $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\theta}_0$ как функции $\bar{A}$ и $\bar{D}$

$$\left.\begin{aligned} \sin\bar{\varphi}_0 &= -\cos\bar{D}\sin\bar{A} \\ \cos\bar{\varphi}_0 &= \frac{-\sin\bar{D}}{\cos\bar{\theta}_0} \\ \operatorname{tg}\bar{\theta}_0 &= -\operatorname{ctg}\bar{D}\cos\bar{A} \end{aligned}\right\}. \tag{140}$$

Следует определить еще приближенное значение угла наклона $\bar{\psi} \cong \bar{\psi}_0$.

Путем умножения на матрицу $L_1 = L$ ($\bar{\psi} = \bar{0}$, $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\theta}_0$) координаты x'', y'', z'' преобразуем в m_1, n_1, q_1. Если возьмем звезду, находящуюся не слишком близко к главной точке снимка H, то получим для нее в плоскости снимка две пары координат

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

эти системы повернуты относительно друг друга на угол $\bar{\psi}$.

Имеет место соотношение (рис. 20)

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \cos\bar{\psi}_0 & -\sin\bar{\psi}_0 \\ +\sin\bar{\psi}_0 & \cos\bar{\psi}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \tag{141}$$

и для приближенного значения наклона $\bar{\psi}_0$ получаем следующее уравнение

$$\operatorname{tg}\bar{\psi}_0 = -\frac{\bar{x}n_1 - \bar{y}m_1}{\bar{x}m_1 + \bar{y}n_1}. \tag{142}$$

Так получается необходимое приближенное выражение для матрицы вращение L, т. е.

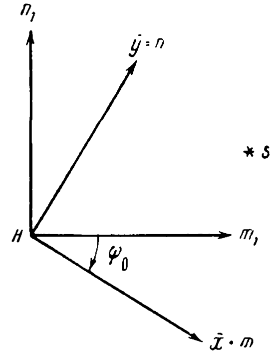


Рис. 20. К преобразованию системы координат m_1, n_1 в систему $\bar{x}$, $\bar{y}$.

$$L_0 = L(\bar{\psi}_0,\ \bar{\varphi}=0,\ \bar{\theta}=0)\cdot L(\bar{\psi}=0,\ \bar{\varphi}_0,\ \bar{\theta}_0) =$$
$$= R_z(-\bar{\psi}_0)\,R_x(-\bar{\varphi}_0)\,R_y(-\bar{\theta}_0).$$

После получения приближенного значения матрицы L уравнения (135) и (136) можно объединить и получить

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ -f \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} m \\ n \\ q \end{pmatrix} \cong kL_0 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Если в координаты снимка $\bar{x}$, $\bar{y}$ введем поправку за дисторсию оптики, разделим первое и второе уравнения на третье и введем далее малые изменения координат главной точки снимка ($\Delta\bar{x}_н$, $\Delta\bar{y}_н$), то получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\bar{x} - \Delta\bar{x}_H)\left(1 + \sum_i h_i\bar{r}^{2i}\right) + f\frac{m}{q} \equiv F \\ \varepsilon_y &= (\bar{y} - \Delta\bar{y}_H)\left(1 + \sum_i h_i\bar{r}^{2i}\right) + f\frac{n}{q} \equiv G \end{aligned}\right\}, \tag{143}$$

где ε_x, ε_y — случайные ошибки.

Наконец, нужно учесть, что значения m, n, q в (143) вычисляют с помощью матрицы L_0 с приближенными величинами $\bar{\psi}_0$, $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\theta}_0$ параметров $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$, так что необходимо перейти к точным значениям $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$. Далее надо учесть, что f известно с ошибкой и что необходимо определить также поправки для значений h_i. Если F_0, G_0 — приближенные значения параметров, определяемых уравнениями (143), то имеем

$$\varepsilon_x = F_0 + \frac{\partial F}{\partial\bar{x}_H}\Delta\bar{x}_H + \frac{\partial F}{\partial\bar{y}_H}\Delta\bar{y}_H + \frac{\partial F}{\partial f}\Delta f +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}}\Delta\bar{\psi} + \frac{\partial F}{\partial\bar{\varphi}}\Delta\bar{\varphi} + \frac{\partial F}{\partial\bar{\theta}}\Delta\bar{\theta} + \frac{\partial F}{\partial h_1}\Delta h_1 + \frac{\partial F}{\partial h_2}\Delta h_2 + \ldots \tag{144}$$

Если заменить x на $\bar{y}$ и F на G, то получим аналогичное выражение для составляющей $\bar{y}$. Коэффициенты уравнения (144) вычисляются отдельно по следующим формулам (где для упрощения написания взяты вместо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{r}$ просто x, y, r):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_H} &= -\left(1+\sum_i h_i r^{2i}\right) - 2x^2 \sum_i i h_i r^{2(i-1)} \\
\frac{\partial F}{\partial y_H} &= -2xy \sum_i i h_i r^{2(i-1)} \\
\frac{\partial F}{\partial f} &= +\frac{m}{q} \\
\frac{\partial F}{\partial h_1} &= xr^2 \\
\frac{\partial F}{\partial h_2} &= xr^4 \\
&\ldots
\end{aligned}\right\} . \qquad (145)$$

Аналогичные выражения получаются для производных от G, если заменить в (145) F на G, x на y, y на x, m на n.

Здесь не даются производные по параметрам $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$; их можно получить на электронной вычислительной машине по соответствующим частным производным выражений $\frac{m}{q}$ и $\frac{n}{q}$.

Подробные формулы даны у Курье, Декера [2], Шмидта [13].

Не рекомендуется вводить при уравнивании для первого коэффициента дисторсии $h_1 = 0$; лучше использовать приближенное значение этой величины, потому что иначе, как доказывает Курье, при $|2h_1 f^2| \geq 1$ не сходятся приближения проводящегося позднее уравнивания. У английской камеры Шмидта, например, $f = 0{,}6$ м, $h_1 = -2$ м$^{-2}$, что дает $|2h_1 f^2| \cong 1{,}4$.

Уравнивание с использованием (144) отвечает всем требованиям также и при больших углах изображения.

Фотограмметрический метод позволяет определять коэффициент рефракции k_1 уравнения (120) в процессе уравнивания.

В направлении $\bar{x}$ искажение масштаба может быть иное, чем в направлении $\bar{y}$, поэтому следует включить еще одно аффинное преобразование, допуская для компонента $\bar{x}$ другое значение для f, чем для компонента $\bar{y}$ (f_x, f_y).

Таким же образом в качестве неизвестных при уравнивании можно ввести поправки компаратора, при помощи которого измеряются снимки, особенно за неперпендикулярность его осей, если эти поправки не были определены заранее из специальных исследований компаратора и не были введены в координаты снимка à priori.

Если обратиться к последствиям, с которыми связан переход от системы (126) к системе (144) для камеры, поле зрения которой меньше, чем $10 \times 10°$, то оказывается, что это приводит к трудностям, так как неизвестные в этом случае нельзя разделить.

Все упомянутые вычисления нужно проводить, конечно, на электронной вычислительной машине. Чтобы объективно определить, насколько удовлетворяют результаты уравнивания с использованием (126) или (144), рекомендуется ошибки, оставшиеся после уравнивания на вычислительных машинах, из звездной системы координат перевести в систему координат на плоскости снимка (v_x, v_y). Иногда необходимо дополнительное приближение.

6.12. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ВИДИМОСТИ СПУТНИКА ПРИ ОДНОВРЕМЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ С ДВУХ СТАНЦИЙ

Выполнение программы наблюдений одного или нескольких спутников со станции или нескольких станций требует тщательной подготовки, которая должна проходить в течение нескольких месяцев, особенно, при совместных международных работах.

При синхронных наблюдениях спутников-баллонов с нескольких станций сначала надо выбрать подходящий спутник. Если станции наблюдений удалены друг от друга не более чем на 1000—1500 км, то сравнительно низкие спутники «Эхо 1» и «Эхо 2» использовать целесообразнее, чем «Пагеос», потому что тогда угол засечки векторов, получающихся при наблюдениях, более благоприятный, не слишком острый. «Пагеос» позволяет преодолеть большие расстояния до 6000 километров.

Из рис. 21 видно, как при синхронных наблюдениях изменяется зенитное расстояние спутников «Эхо 1», «Эхо 2», «Пагеос» в зависимости от взаимного удаления двух станций, если спутник находится посредине между этими станциями. Вычисление диаграммы рис. 21 выполнено по формуле

$$\operatorname{ctg} Z = \frac{1}{\sin\psi}\left[\cos\psi - \frac{R_E}{R_E + h}\right],$$

где ψ — сферическое расстояние между станцией наблюдения и подспутниковой точкой.

6.13. СИНХРОННОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

Если в методах космической триангуляции, о которых будем говорить ниже, спутник должен наблюдаться одновременно с нескольких станций (рис. 21), то рекомендуется, чтобы все станции использовали по возможности одинаковые сигналы времени, лучше всего секундные сигналы точного времени. Тогда не будет зависимости от разностей между отдельными системами сигналов времени и надо будет учитывать лишь время распространения радиоволн на пути от передающей станции до станции наблюдения.

Во время наблюдений след спутника на фотографической пластинке прерывается затвором через равные интервалы, например через 1 сек, и центры этих разрывов являются точками наблюдений.

Однако практически едва ли возможно обеспечить на всех участвующих в наблюдениях станциях синхронизацию затворов с точностью до 1 мсек, так что на разных станциях время наблюдения отличается на доли секунды. Итак, всегда имеем лишь квазисинхронные наблюдения, которые только внутри максимум полсекунды происходят одновременно, если след спутника прерывается каждую секунду. С помощью линейной или квадратичной интерполяции времени и координат изображения спутника $\bar{x}$, $\bar{y}$ или его прямого восхождения α и склонения δ между двумя разрывами следа можно обеспечить синхронность наблюдений до 1 мсек.

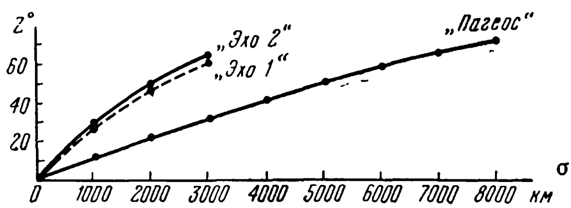


Рис. 21. К синхронным наблюдениям спутников, которые находились посредине между двумя станциями наблюдений:

Z — зенитные расстояния спутников, σ — расстояние между станциями. Высоты спутников: «Эхо 1» 1200 км, «Эхо 2» 1100 км, «Пагеос» 4200 км

Относящиеся к разрывам следа на снимке значения координат спутника $\bar{x}$, $\bar{y}$ или α, δ

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n,$$

$$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \ldots,\ \bar{x}_n,$$

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3,\ \ldots,\ \bar{y}_n,$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots,\ \delta_n,$$

можно разложить в степенной ряд по аргументу времени, принимая за начальный момент t_0

$$\bar{x} = \bar{x}^0 + \xi_1 (t - t_0) + \xi_2 (t - t_0)^2 + \ldots .$$

Коэффициенты этого степенного ряда получают из уравнивания.

Подобные выражения справедливы также для $\bar{y}$, α, δ.

Если по разложениям в степенные ряды для всех станций, участвующих в синхронных наблюдениях, вычислить для одного и того же момента t координаты спутника, то таким путем достигнем синхронности.

В процессе уравнивания при определении коэффициентов этого степенного ряда осредняются колебания изображения спутника на снимке (мерцание), что приводит к повышению точности.

6.14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФЕМЕРИД, УСЛОВИЯ ВИДИМОСТИ СПУТНИКА НА СТАНЦИИ

Чтобы отыскать спутник на небе, наблюдатель должен располагать приближенными эфемеридами, содержащими топоцентрические зенитное расстояние Z и азимут A, относящиеся к моменту времени t. Некоторые эфемеридные центры вычисляют также расстояние до спутника s. В большинстве случаев достаточно вычислить Z и A с точностью до $\pm 1°$, а t — с точностью до 0,5 мин.

С приближенными элементами орбиты в форме

$$\left.\begin{aligned} a &= \text{const} \\ i &= \text{const} \\ e &= \text{const} \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1 (t - t_0) \\ \Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 (t - t_0) \\ M &= M_0 + M_1 (t - t_0) + M_2 (t - t_0)^2 \\ \theta &= \theta_0 + \theta_1 (t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

вычисляют по (24) положение x, y, z спутника на заданный момент t. Если X, Y, Z — геоцентрические координаты станции в системе, жестко связанной с Землей, и $\boldsymbol{R}_z(\theta)$ — матрица вращения для преобразования из астрономической системы x, y, z в систему X, Y, Z, то с помощью уравнения

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = s \cdot \boldsymbol{a} \tag{147}$$

определяют вектор $s \cdot \boldsymbol{a}$ направления на спутник в системе, жестко связанной с Землей, из которого путем нормирования получают наблюденный вектор $\boldsymbol{a}$. Зенитное расстояние Z находят из следующего скалярного произведения, в котором направление к зениту заменяют приближенно направлением геоцентрического радиуса-вектора

$$\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{R_E} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \cos Z,$$

X, Y, Z в левой части — геоцентрические координаты станции наблюдения в системе, жестко связанной с Землей. В правой части стоит косинус зенитного расстояния.

Вектор $\boldsymbol{a}$ системы X, Y, Z, жестко связанной с Землей и отнесенной к экватору, можно преобразовать в прямоугольную систему, участвующую во вращении Земли, основная плоскость которой — горизонт (плоскость $X'Y'$) станции наблюдения с географической широтой φ_0' и долготой λ_0; ось Z' направлена к зениту.

Для перехода от системы X, Y, Z к системе X', Y', Z' выполним поворот вокруг оси Z против хода часовой стрелки на угол λ_0, что достигается умножением на $\boldsymbol{R}_z(\lambda_0)$, и поворот полученной таким образом системы вокруг новой оси Y против хода часовой стрелки на угол $90° - \varphi_0'$. Это означает умножение на $\boldsymbol{R}_y(90° - \varphi_0')$. Наконец, умножим еще и на $\boldsymbol{R}_z(90°)$, так чтобы ось X' указывала на восток, а ось Y' — на север

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(90°)\, \boldsymbol{R}_y(90° - \varphi_0')\, \boldsymbol{R}_z(\lambda_0) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Если координаты вектора $\boldsymbol{a}$, полученные с помощью уравнения (147), преобразовать с помощью (148) в горизонтальную систему, то получим в качестве координат $\boldsymbol{a}$ значения X_a', Y_a', Z_a'. На этом основании для определения азимута A и зенитного расстояния Z имеем

$$X_a' = \sin Z \sin A;\quad Y_a' = \sin Z \cos A,\quad Z_a' = \cos Z, \tag{149}$$

где азимут A отсчитывается от направления на север по ходу часовой стрелки. Итак,

$$\bar{a} \cdot \frac{1}{\rho_E} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \cos Z = Z_a',\quad \operatorname{tg} A = \frac{X_a'}{Y_a'}. \tag{150}$$

Расстояние до спутника s — абсолютная величина правой части векторного уравнения (147).

Но не каждое положение спутника доступно для наблюдения, поэтому при вычислении эфемерид необходимо соблюдать три условия, характеризующие положение спутника.

1. Зенитное расстояние спутника из-за трудности учета влияния рефракции при больших зенитных расстояниях должно быть не больше, чем

$$\Gamma_1 = 60 \text{ или } 70°,\quad Z \leqq \Gamma_1. \tag{151}$$

2. Солнце должно находиться под горизонтом на угловом расстоянии не меньшем, чем величина Γ_2. Часто принимают

$$\Gamma_2 = 12°, \tag{152}$$

для светосильных камер и для ярких спутников достаточно, чтобы $\Gamma_2 = 10°$.

Если камера имеет параллактическую монтировку, обладает светосильной оптикой и если наблюдают спутник-баллон, то можно принять $\Gamma_2 = 9°$.

3. Наконец, спутник не должен находиться в тени Земли.

Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор спутника, $\boldsymbol{r}_\odot$ — единичный вектор направления к Солнцу и R_E — радиус Земли, то при вступлении спутника в тень Земли (рис. 22)

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_\odot = -\sqrt{r^2 - R_E^2}.$$

При этих условиях Каула [5] вводит систему, относящуюся к эклиптике. Пусть положение спутника задано в астрономической системе x, y, z, причем ось x направлена в точку весеннего равноденствия, повернем эту систему вокруг оси x против хода часовой стрелки на угол ε (ε — наклон эклиптики), далее повернем систему вокруг новой оси z против хода часовой стрелки на угол, равный эклиптической долготе Солнца $(\omega_\odot + v_\odot) = \lambda_\odot$, так что ось x будет направлена, наконец, к Солнцу и плоскость xy совпадет с плоскостью эклиптики. Новыми координатами спутника будут s_1, s_2, s_3

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\lambda_\odot)\,\boldsymbol{R}_x(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (153)$$

$\lambda_\odot$ получают по (118, a).

Ось s_1 направлена к Солнцу, ось s_3 — к полюсу эклиптики, ось s_2 лежит в плоскости эклиптики перпендикулярно к оси s_1.

Если подставить в правую часть (153) координаты спутника x, y, z, то получим координаты спутника s_1, s_2, s_3 и с ними по (154) параметр h^*

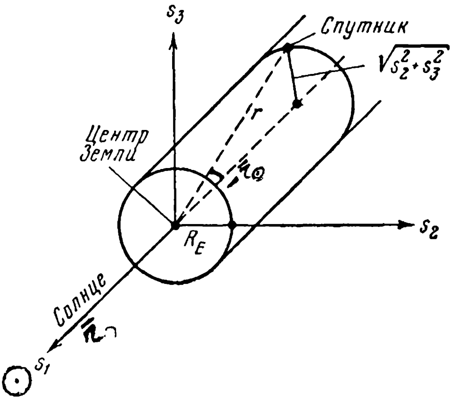


Рис. 22. К определению части орбиты спутника, находящейся в тени Земли

$$R_E - \sqrt{s_2^2 + s_3^2} = h^*. \quad (154)$$

Имеем следующую зависимость:

$$h^* \begin{cases} < 0 \text{ — вне тени,} \\ > 0 \text{ — в тени.} \end{cases} \quad (155)$$

Кроме того, спутник находится на теневой стороне Земли, если

$$s_1 < 0. \quad (156)$$

Уравнения (154), (155) определяют условия нахождения спутника в тени Земли или вне ее. Непосредственное определение времени вступления в тень Земли затруднительно, потому что надо решать уравнение четвертой степени. Лучше решать уравнение (154) для $h^* = 0$ методом приближений.

Уравнение (153) дает также возможность определить зенитное расстояние Солнца, необходимое для соблюдения условия (152). При помощи уравнений (104), (148), (153) можно определить положение отвесной линии в точке наблюдений в системе (s_1, s_2, s_3). Угол между отвесной линией и осью s_1 — зенитное расстояние Солнца.

Если

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

отвесная линия в горизонтальной системе, то ее компоненты в системе, связанной с Солнцем, выражаются следующим далее уравнением, причем для вычисления эфемерид принимают $\varphi_0 \cong \varphi_0'$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\lambda_\odot)\, \boldsymbol{R}_x(\varepsilon) \boldsymbol{R}_z(-\theta)\, \boldsymbol{R}_z(-\lambda_0)\, \boldsymbol{R}_y(-90^\circ + \varphi_0)\, \boldsymbol{R}_z(-90^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$s_1 = \cos Z_\odot$$

и с учетом (152)

$$s_1 = \cos Z_\odot < \cos(90^\circ + \Gamma_2) = -\sin \Gamma_2. \qquad (157)$$

Зенитное расстояние Солнца получается по формуле

$$\cos Z_\odot = \sin \delta_\odot \sin \varphi_0 + \cos \delta_\odot \cos \varphi_0 \cos t_\odot, = (\bar{r}_s \cdot \bar{r}_\odot)$$

где $t_\odot$ — часовой угол Солнца. $t_\odot = S_t - \alpha_\odot$

Для вычисления эфемерид существует несколько способов в зависимости от намеченной программы наблюдений и имеющихся вычислительных средств.

Нецелесообразно вычислять для промежутка времени в один год каждые две минуты зенитные расстояния Z и азимуты A спутников по (150) и получать из вычислений на машине только такие значения Z, A, для которых выполнены три условия (151), (152), (155), (156), потому что такой путь весьма не экономичен.

Рекомендуется точнее ограничить части орбиты спутника, пригодные для наблюдений на данной станции, чтобы избежать ненужных вычислений.

Для этого определим вначале момент t', в который вследствие вращения Земли станция наблюдений Q (φ_0, λ_0) придет в плоскость орбиты спутника. На основании рис. 23 получаем уравнения

$$\Omega + l = \theta + \lambda_0,$$

$$\sin l = \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{ctg} i$$

и, используя (146), находим t' из соотношения

$$(\theta_1 - \Omega_1)(t' - t_0) = l - \lambda_0 - \theta_0 + \Omega_0. \qquad (158)$$

Формула (158) получена в предположении, что $i \geqq \varphi_0$, в другом случае можно взять для вычислений меньшее значение относительной широты.

Разумеется, спутник будет проходить через зенит станции Q не точно в момент t'. В этот момент он будет находиться где-то на орбите, максимум на расстоянии, для прохождения которого при движении от пункта наблюдений требуется $\frac{1}{2}T$ времени, где T — период обращения спутника. Таким образом, важная для наблюдении часть орбиты спутника ограничивается уже дугой П, которую спутник проходит за время T. Для наблюдений имеют также значение смежные с П отрезки орбиты соответствующей временной протяженности T. Интервал для положения спутника в пределах дуги П можно ограничить еще на несколько минут, если следовать рассуждениям Пахельского [9].

Если в (146) начальный момент t_0 — время прохождения через перигей и N — ближайшее меньшее целое число

$$\frac{t'-t_0}{T},$$

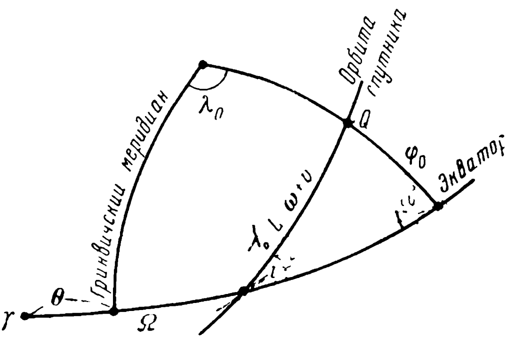


Рис. 23. К определению условий видимости ИСЗ

то в момент

$$t'' = t_0 + NT$$

с допускаемым здесь приближением спутник снова будет проходить через перигей.

Необходимо определить время $t = t'''$ прохождения через круг широты $\varphi = \varphi_0$ станции наблюдений. Синус аргумента широты L задается при этом формулой

$$\sin L = \frac{\sin\varphi_0}{\sin i}.$$

Истинная аномалия v при прохождении спутника через параллель с широтой $\varphi = \varphi_0$ определяется с достаточным приближением уравнением

$$v = L - \omega = L - \omega_0 - \omega_1(t'' - t_0). \tag{158, a}$$

С помощью (21) можно определить, используя v, эксцентрическую аномалию E, а по уравнению Кеплера (20) — среднюю аномалию M. Далее находим $\Delta t''$

$$-t'' = \Delta t'' = \frac{M}{n}$$

и момент

$$t''' = t'' + \Delta t'' \tag{159}$$

прохождения спутника через круг широты $\varphi = \varphi_0$.

В случае необходимости в (158, *а*) можно заменить значения t'' через t''' и определить путем приближений более точное значение t'''.

Если ввести в уравнение (146) $t = t'''$, то для этого момента с учетом (24), с координатами станции наблюдения X, Y, Z в предположении, что выполняются условия (151), (152), (155), (156), получим искомые эфемеридные значения Z, A, s по (147), (150). Если эти условия не выполняются, то можно продвигаться в обоих направлениях на постоянные интервалы, например в 2 мин, пока не дойдем до точки, которая удовлетворяет трем указанным условиям. При этом можно получить время входа в тень Земли или выхода из нее.

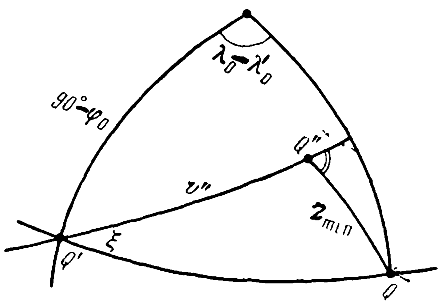


Рис. 24. Прохождение спутника через круг широты станции наблюдений (Q'). Кульминация спутника (Q'').

Некоторые эфемеридные службы вычисляют Z, A и t для момента, в который спутник проходит на минимальном для данной станции наблюдений зенитном расстоянии, т. е. для кульминационного положения спутника.

Эти вычисления производят следующим образом.

В точке Q' в момент $t = t'''$ спутник проходит через круг широты станции наблюдений Q (рис. 24).

Если в уравнении (158) $t' \to t'''$, то в правой части этого уравнения получим значение $l - \lambda_0' - \theta_0 + \Omega_0$ и отсюда долготу λ_0' точки Q'. В прямоугольном сферическом треугольнике $QQ'Q''$ на рис. 24 известна дуга QQ', а угол ξ можно вычислить, используя угол наклона i и широту φ_0. Следовательно, этот треугольник можно решить и получить расстояние точки кульминации Q'' от точки Q', т. е. v''. Имея v'', получают разность моментов, которую нужно прибавить к t''', чтобы получить искомое время прохождения спутника через точку Q''. Определяют также Z и A для этого момента времени. Рекомендуется вычислять и публиковать также Z и A спутника за две минуты раньше или позднее прохождения спутника над пунктом, потому что наблюдатель получает тогда лучшее представление об изменении орбиты на небе.

Если необходимо для всего года иметь данные о том, в какие промежутки времени виден определенный спутник на данной станции, чтобы проводить дальнейшую подготовку к наблюдениям, то рекомендуется строить соответствующие графики (рис. 25).

На миллиметровую бумагу наносят оси координат. Абсцисса (ось t) имеет протяженность около 12 месяцев. По ординате (ось τ) откладывается местное время, рекомендуется одновременно с этим давать часовую шкалу во всемирном времени. Сначала для всего года изображают в виде кривых моменты восхода и захода Солнца. Часовой угол Солнца вычисляют по следующей формуле:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi_0 \sin \delta_\odot}{\cos \varphi_0 \cos \delta_\odot}, \tag{160}$$

где h — высота φ_0 — географическая широта станции наблюдений; $\delta_\odot$ — склонение Солнца; t — часовой угол Солнца.

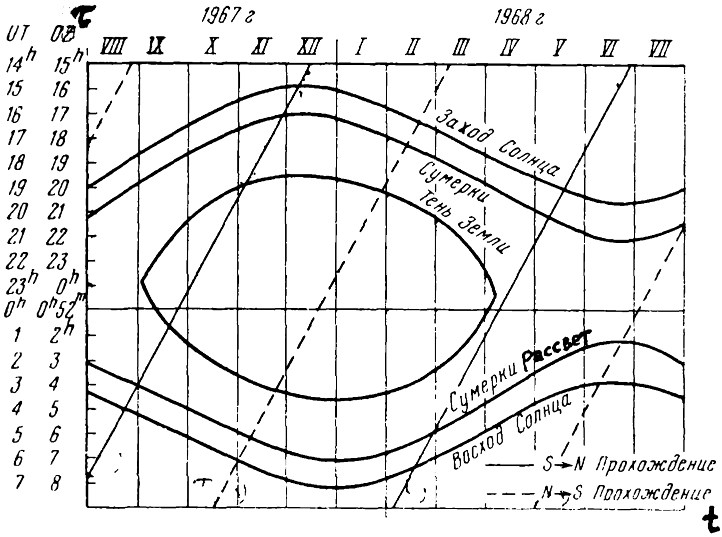


Рис. 25. Видимость спутника «Эхо 2» в Потсдаме с августа 1967 г. по июль 1968 г.

Принимая $h = -51'$ ($35'$ — рефракция в горизонте, $16'$ — радиус Солнца), получим среднее местное время восхода t_A или захода t_U Солнца по формулам

$$t_A = 12^h - t - E, \quad t_U = 12^h + t - E, \tag{161}$$

где E — уравнение времени. Необходимые данные для вычисления E, $\delta_\odot$ можно взять из астрономического ежегодника.

Время сумерек или рассвета, после которых (или до которого) можно наблюдать спутник, вычисляется подобным же образом, если ввести $h = -10$, $-12°$ или $-9°$ в зависимости от светосилы камеры и яркости спутника. Это время разное для гражданских (6°) и астрономических (от 16 до 18°) сумерек.

Таким образом, по рассчитанным точкам можно изобразить кривые моментов восхода и захода Солнца, сумерек и рассвета.

Затем на диаграмму наносят кривую, проходящую между линиями рассвета и сумерек, и изображают приближенно вступление спутника в тень. Эту кривую вычисляют следующим образом. Допустим, что спутник проходит точно через зенит станции наблюдений и одновременно вступает при этом в тень, и вычислим угол $\varkappa$, на котором Солнце находится под горизонтом,

$$\cos \varkappa = \frac{R_E}{r},$$

где r — радиус-вектор спутника. Если положим

$$h_{\odot} = -(\varkappa + 51')$$

и определим соответствующий часовой угол Солнца t, заменив в (160) h на $h_{\odot}$, то найдем, наконец, по формулам (161) искомые моменты местного времени вступления в тень Земли или выхода из нее. Таким образом, по точкам можно построить и эту кривую.

Для определения семейства прямых (рис. 25) вычислим с помощью (158) для какого-нибудь дня момент, в который станция наблюдений вледствие вращения Земли находилась в плоскости орбиты спутника, без учета положения Солнца, т. е. условий (152) и (155), (156).

Этот приближенно определенный момент нанесем на график (см. рис. 25). Если аналогично вычислить время прохождения спутника над этой станцией для других месяцев, то окажется, что эти точки принадлежат семейству прямых, проходящих параллельно друг другу. Можно избежать этих дальнейших вычислений для определения положений точек семейства прямых, определив угол наклона ν, который образуют эти прямые с осью t.

Предположим, что плоскость орбиты спутника неподвижна в пространстве, станция в момент t_1 лежит в этой плоскости и при этом Солнце находится в меридиане станции. По истечении солнечных суток станция и Солнце будут иметь такое же положение относительно друг друга, спутник же на орбите, напротив, будет отставать на $\Delta t_1 = +3$ мин 57 сек (солнечные сутки минус звездные сутки) в направлении к западу из-за движения Солнца по эклиптике с запада на восток. Кроме того, орбита спутника за одни сутки сместится еще на запад вследствие возмущения восходящего узла орбиты, обусловленного сжатием Земли. Уменьшение долготы линии узлов за сутки достигает следующего значения, выраженного в минутах времени

$$\Delta t_2 = +\frac{3}{2} \cdot \frac{1440}{2\pi} J_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 n \cos i,$$

где n — среднее движение спутника (в сут$^{-1}$). Итак, если положение станции изменяется относительно орбиты спутника за сутки на $\Delta t_1 + \Delta t_2$, то период видимости спутника будет

$$T_s = \frac{1440}{\Delta t_1 + \Delta t_2},$$

где Δt_i выражается в мин/сут и T_s в сутках. Значения $\Delta t_1 + \Delta t_2$ можно найти в эфемеридах Смитсонианской астрофизической обсерватории.

Углу наклона ν изображенного на диаграмме семейства прямых соответствует отрезок времени вдоль оси t, равный периоду T_s, если изменение в направлении оси τ составляет при этом 24 ч.

Если таким образом нанести на диаграмму семейство прямых, которые в некоторой степени представляют собой изображение орбиты спутника в плоскости τt, то на данной станции спутник виден всегда в промежутки времени, в которые эти прямые проходят между кривой сумерек и кривой тени и между кривой рассвета и кривой тени.

Такой диаграммой рекомендуется в первом приближении представлять видимость спутника для всего года, чтобы соответственно этому можно было проводить дальнейшую работу. За несколько недель до начала периода наблюдений, определенного по диаграмме, по уточненным элементам орбиты вычисляют с помощью электронных вычислительных машин эфемериды спутника, а именно значения Z, A, s для промежутка времени наблюдений, используя уравнения (146)—(159) и методы, о которых говорилось выше.

6.15. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold K. Schoeps D.: Die Bestimmung des Azimutes Potsdam — Bukarest aus Beobachtungen des Satelliten Echo I. Veröff. d. Geodät. Inst. Potsdam, Nr. 29 (1965).

2. Deker H.: Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodäsie. Dtsch. Geodät. Komm; München, Reihe C, Nr. III (1967).

3. Graaff de W., Jager de C.: The Optical Tracking of Satellites. COSPAR Information Bull. Paris, No. 25 (1965).

4. Groves G. V.: Dynamics of Rockets and Satellites. North — Holland Publishing Company Amsterdam, 1965.

5. Kaula W. M.: Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Company, 1966.

(Русский перевод: У. Каула. Спутниковая геодезия. Теоретические основы. М., «Мир», 1970).

6. König A.: Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen, in: Handbuch der Astrophysik Bd. I, Springer-Verlag, Berlin. 1933.

7. Laurila S. H., Heiskanen W. A.: Symposium on Geodesy in the Space Age. The Ohio State University, Columbus, Ohio, Publ. Nr. 15 (1961).

8. Lundquist C. A. Veis G.: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, Vol. I. SAO Special Report No. 200 (1966).

9. Pachelski W Computation of Ephemerides of the Artificial Earth Satellite by Means of the Electronic Digital Computer «Ural-2» Obserwacje Sztucznych Satelitow Ziemi Nr. 2; Polska Akademia Nauk, Warszawa 1963.

10. Réseau géodésique européen par observation de Satellites. Symposium de Paris. Centre National d'Etudes Spatiales, Institut Géographique National, 1964.

11. Rolff J.: The Optical Beacon of the GeOS-A Satellite. Bull. Centr. Bur. for Satellite Geodesy, SAO, N. I (1966).

12. SAO Star Catalog.: Positions and Proper Motions of 258,997 Stars for the Epoch and Equinox of 1950,0. Smithsonian Institution, Washington, 1966.

13. Schmidt H.: Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie. Bildmessung u. Luftbildwesen, H. 4 (1958).

14. Steinbach M: Einige optische Systeme für die Beobachtung künstlicher Erdsatelliten. Jenaer Rdsch., 6 (1963).

15. Veis G.: Geodetic Uses of Artificial Satellites. Smithsonian Contributions to Astrophysics, 3 (1960) No. 9.

16. Veis G.: Precise Aspects of Terrestrial and Celestial Reference Frames. SAO Special Report No. 123 (1963).

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Элементы орбит спутников используются в геодезии для различных целей и с разной точностью. Для вычисления эфемерид достаточна весьма умеренная точность (ошибка в элементах орбиты от 0,01 до 0,1°). Наивысшая точность требуется, если необходимо определить орбитальным методом по оскулирующим элементам орбиты параметры гравитационного поля Земли.

При любых методах определения элементов орбиты исходят всегда из того, что à priori уже имеются более или менее точные значения элементов орбиты. Их можно улучшить путем уравнивания спутниковых наблюдений в зависимости от качества и количества наблюдений, введенных в это уравнивание.

Грубые приближенные значения элементов орбиты имеются в нашем распоряжении уже при старте спутника. Например, Астрономический совет Академии Наук СССР задает и распространяет приближенные элементы орбиты с точностью до 0,01° в так называемом SATOR — коде (табл. 5). В этих сведениях содержатся также данные о вращении линии узлов и апсид спутника.

Смитсонианская астрофизическая обсерватория также публикует приближенные элементы орбиты.

Итак, приближенные элементы орбиты для спутников всегда имеются. В связи с этим нет необходимости касаться подробно обсуждаемой в астрономии задачи определения шести неизвестных элементов орбиты по шести наблюдаемым параметрам или трем наблюдаемым векторам направлений, будь то метод Лапласа, метод Гаусса или другой метод, разработанный для вычисления орбит планет.

Таблица 5

SATOR — Telegramm
(nach COSPAR, Inform. Bull Nr. 24),

60 091	81 900	58 55Z	47 20
00 064	21 830	17 128	14 64
10 051	00 027	00 932	46 824
34 048			

SATOR — телеграмма состоит из 13 пятизначных групп чисел.

1 группа: обозначение спутника;

2 и 3 группы: дата наблюдений: $0^h58{,}55^m$ 19 августа, система времени UT (обозначена знаком Z);

4 группа: $i = 47{,}20°$;

5 группа: $\Omega - \theta = 0{,}64°$ географическая долгота восходящего узла, отсчитанная от Гринвича к западу;

6 группа: $\Delta t_1 + \Delta t_2 = -18{,}30^m$ (Δt_2 введено раньше), первая цифра означает $1 = +, 2 = -$;

7 группа: $\omega = 171{,}28°$;

8 группа: вращение линии апсид за один оборот $+0{,}464°$ ($1 = +, 2 = -$);

9 группа: аномалистический период 110,051 мин;

10 группа: изменение аномалистического периода за один оборот: 0,00027 мин;

11 группа: $e = 0{,}00932$;

12 группа: 4682,4 геоцентрический радиус-вектор перигея в уставных милях (1,6 км) или в километрах;

13 группа: $\Omega = 340{,}48°$ — долгота восходящего узла, отсчитанная от точки весеннего равноденствия.

7.2. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ПРИ ИЗМЕРЕНИИ НАПРАВЛЕНИЙ НА СПУТНИК

Основное соотношение между наблюдаемым топоцентрическим единичным вектором спутника $\boldsymbol{a}$, мгновенным положением спутника x'' и положением станции наблюдений $\boldsymbol{u}$ образуется с помощью (104)

$$\boldsymbol{a} = \frac{x'' - R_z(-\theta)\, S^{-1}\boldsymbol{u}}{|x'' - R_z(-\theta)\, S^{-1}\boldsymbol{u}|} \tag{162}$$

или в пространственных полярных координатах

$$\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} \cos\delta & \cos\alpha \\ \cos\delta & \sin\alpha \\ \sin\delta & \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}. \tag{163}$$

В качестве пространственной системы координат здесь введена мгновенная астрономическая система x'', y'', z''. Плоскость x'', y'' — плоскость мгновенного экватора, ось x'' направлена в мгновенную точку весеннего равноденствия.

α и δ в уравнении (163) — топоцентрические прямое восхождение и склонение спутника в момент наблюдений, их получают, приравнивая правые части (162) и (163).

Для упрощения написания в этой главе опустим индекс $''$, характеризующий специальную систему координат.

Координаты станции наблюдения в системе, жестко связанной с Землей и относящиеся к среднему полюсу, выразим в следующей форме:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\lambda \\ \cos\varphi & \sin\lambda \\ \sin\varphi & \end{pmatrix}, \tag{164}$$

где R — расстояние станции наблюдений от центра масс Земли; φ — геоцентрическая широта, λ — географическая долгота.

Матрица вращения с помощью формулы (25) выражается как функция гринвичского звездного времени

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{165}$$

Координаты спутника получаем по элементам орбиты с помощью уравнения (24)

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos(v+\omega)\cos\Omega-\sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i\\ \cos(v+\omega)\sin\Omega+\sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i\\ \sin(v+\omega)\sin i\end{pmatrix}, \tag{166}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

$$n(t-t_0)=M=E-e\sin E.$$

На основании этих формул с использованием соотношений (162), (163) получаемые из наблюдений величины α и δ, являющиеся случайными переменными, выражаем как функции неизвестных задачи, а именно, шести оскулирующих элементов орбиты a, e, ω, i, Ω, M и координат станции X, Y, Z.

Наблюдаемые прямое восхождение и склонение α, δ получают, используя (162), (163):

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{y_a}{x_a},$$

$$\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}}. \tag{167}$$

Оба уравнения (167) действительны также для ненормированного вектора $\boldsymbol{a}$.

Шесть элементов орбиты не постоянны, а изменяются со временем. Если объединить все значительные возмущения, которые изменяют элементы орбиты, то для долготы восходящего узла получим

$$\Omega=\Omega_0+\Delta\Omega''+\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}}+\delta\Omega_{\mathrm{LGZ}}+\delta\Omega_{\mathrm{KG2}}+\delta\Omega_{\mathrm{PA}}+$$
$$+\delta\Omega_{\mathrm{SA}}+\delta\Omega_{\mathrm{RS}}+\delta\Omega_{\mathrm{MS}}+\delta\Omega_{\mathrm{GR}}+\Omega_1(t-t_0)+\Omega_2(t-t_0)^2+\ldots \tag{168}$$

Отдельные члены уравнения (168) имеют следующее значение: Ω_0 — постоянная; $\Delta\Omega''$ — выражение, задаваемое третьим из уравнений (114).

Вводя его, учитывают, что система x'', y'', z'' не является инерциальной. Если используется инерциальная система, то этот член не вводится.

$\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}}$ — вековые возмущения, вызванные зональными гармониками. Их получают путем интегрирования по времени уравнений Мерсона (66), не содержащих в правых частях ω, т. е. путем умножения на соответствующие отрезки времени (сравните с уравнениями (70)—(72)). В случае необходимости здесь учитывают также вековые возмущения второго порядка (J_2^2) (73). Можно обратиться также к разложениям (56), подставив в них

$$l-2p=0;\ l-2p+q=0;\ m=0.$$

$\delta\Omega_{\mathrm{LGZ}}$ — долгопериодические возмущения, вызванные зональными сферическими функциями. Они получатся, если из формул Мерсона (66) взять члены, зависящие от аргумента перигея ω и проинтегрировать по времени в соответствии с (70) — (72). В случае необходимости можно привлечь аналогичные члены из возмущений второго порядка (J_2^2) на основании (73). Если $T\omega$ — период оборота линии апсид, то долгопериодические возмущения имеют периоды $T\omega, \frac{1}{2}T\omega, \frac{1}{3}T\omega, \ldots$. Если обратиться к разложениям (56), то нужно подставить

$$l-2p+q=0;\ m=0.$$

С учетом уравнения (71) имеем

$$\begin{gathered}\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}}+\delta\Omega_{\mathrm{LGZ}}=\Delta\Omega,\\ \delta e_{\mathrm{SGZ}}+\delta e_{\mathrm{LGZ}}=\Delta e.\\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\end{gathered}$$

$\delta\Omega_{\mathrm{KG}2}$ — короткопериодические возмущения, вызванные второй зональной гармоникой. Их находим по формулам Козаи (75). $\delta\Omega_{\mathrm{PA}}$ — периодические возмущения, обусловленные сопротивлением атмосферы. Короткопериодические члены были исследованы теоретически Сегналом и Миллсом [5]. $\delta\Omega_{\mathrm{SA}}$ — вековое возмущение, вызванное сопротивлением атмосферы. Если не требуется самая высокая точность, то чаще всего бывает достаточно разложить это выражение в степенной ряд по времени

$$\delta\Omega_{\mathrm{SA}}\cong\sum_i \varkappa_i t^i.$$

Под действием $\delta\Omega_{\mathrm{SA}}$ прежде всего возмущается средняя аномалия M. В выражении для M из δM_{SA} надо учитывать два или три члена $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$.

Напротив, если стремятся к высшей точности, что необходимо при определении параметров гравитационного поля орбитальным методом (гл. 9) и если речь не идет о специальном геодезическом спутнике, движение которого очень мало возмущается из-за сопротивления атмосферы, то разложением в ряд по возрастающим степеням времени t для представления влияния сопротивления атмосферы обойтись нельзя. Тогда рекомендуется объединять вековое $\delta\Omega_{SA}$ и периодическое $\delta\Omega_{PA}$ возмущения, которые вызваны сопротивлением атмосферы, и определять $\delta\Omega_{SA} + \delta\Omega_{PA}$, заменив плотность выражением (99) с данными Яккиа и в соответствии с этим вычисляя возмущения по (96) и (45) путем численного или аналитического интегрирования. $\delta\Omega_{RS}$ — влияние светового давления Солнца, вычисляемое по формуле (101). $\delta\Omega_{MS}$ — возмущения, вызванные гравитационным влиянием Солнца и Луны, которые вычисляются по формулам (86) и (87). $\delta\Omega_{GR}$ — остаточное влияние гравитационного поля Земли.

Если $\delta\Omega_{G}$ — полное возмущение, вызванное гравитационным полем, включающее вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения, то имеем

$$\delta\Omega_{GR} = \delta\Omega_{G} - \delta\Omega_{SGZ} - \delta\Omega_{LGZ} - \delta\Omega_{KG2}.$$

$\delta\Omega_{GR}$ содержит прежде всего короткопериодические возмущения, вызванные зональными, тессеральными и секториальными гармониками. Их влияние на положение спутника едва ли более 150 м. Если с достаточной точностью известны поправочные члены в правой части уравнения (168), то разложение в степенной ряд по времени теоретически необязательно. Однако трудно определить некоторые поправочные члены, например сопротивление атмосферы с точностью до нескольких метров. Поэтому степенной ряд может содержать вековые и долгопериодические остаточные ошибки поправочных членов. Неизвестные $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ в случае необходимости можно определить из уравнивания.

В некоторых случаях достаточно знать элементы орбиты с точностью только до нескольких сотен метров. Преимущество при этом состоит в том, что можно пренебречь короткопериодическими и долгопериодическими членами и другими относительно малыми величинами. Таким образом можно получить средние элементы орбиты. При вычислении средних элементов орбиты выполняют уравнивание, используя для долготы восходящего узла формулу

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 \cdot \cos i \cdot (t - t_0) + \\ + \sum_{\omega=1} \Omega_\omega (t - t_0)^\omega + \delta\Omega_{KG2} \qquad (169)$$

Для других элементов орбиты справедливы аналогичные выражения. Неизвестными в уравнении (169) являются значения Ω_0, Ω_1, Ω_2 ... Второй член в правой части уравнения (169) — вековое возмущение от второй зональной гармоники. Рекомендуется учитывать в (169) короткопериодическое возмущение второго порядка $\delta\Omega_{KG2}$, вызванное второй зональной гармоникой, так как это возмущение сравнительно велико.

Если определенные таким образом средние элементы орбиты должны быть заданы в таблице, то рекомендуется приводить не долготу восходящего узла Ω, полученную по (169), а величину $\Omega - \delta\Omega_{KS2}$, изменяющуюся более равномерно. Короткопериодическое возмущение $\delta\Omega_{KS2}$ можно вычислить по рассмотренным выше формулам Козаи.

Если требуется более высокая точность, то рекомендуется еще расширить выражение (169), учитывая à priori все вековые и долгопериодические возмущения, вызванные уже известными зональными гармониками $J_2, J_3, \ldots, J_{14}$

$$\Omega' = \Omega'_0 + \delta\Omega_{SGZ} + \delta\Omega_{LGZ} + \delta\Omega_{KG2} + \sum_{\omega=1} \Omega'_\omega (t - t_0)^\omega, \qquad (170)$$

где $\Omega'_0, \Omega'_1, \Omega'_2, \ldots$ — неизвестные. Только в выражении для средней аномалии M имеются некоторые особенности.

Если имеем

$$M = M_0 + M_1 (t - t_0) + M_2 (t - t_0)^2 + \ldots,$$

то

$$\dot{M} = M_1 + 2M_2 (t - t_0) + \ldots = \bar{n},$$

где $\bar{n}$ — среднее движение спутника (определяющее аномалитический период), по которому, используя (74), можно вычислить приближенное значение для большой полуоси a. Для вычисления средней аномалии пригодно также выражение (44).

При вычислении приближенных элементов орбиты по (169) или (170) можно ограничиться только пятью элементами e, ω, i, Ω, M и определить большую полуось a по $\dot{M}$. При этом выражают M как функцию времени, получают по этой величине n и по (74) определяют значение a.

Модифицированный третий закон Кеплера (74) действует также при более строгом способе рассмотрения, если вместо $\bar{n}$ и a подставить такие значения $\bar{n}^*$, a^*, в которых исключены короткопериодические возмущения в результате осреднения в пределах нескольких оборотов

$$a^* = \left(\frac{kM}{\bar{n}^{*2}}\right)^{1/3} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \frac{R_E^2}{p^2} \sqrt{1 - e^2} \left(-1 + \frac{3}{2} \sin^2 i\right)\right]. \qquad (171)$$

Эти средние элементы орбиты a^*, $\bar{n}^*$ могут быть определены точнее, чем соответствующие оскулирующие элементы.

Наконец, полученные по (168) или (169), или (170) элементы орбиты надо подставить в уравнение (166) для вычисления положения спутника, а последнее подставить в выражение (162) для определения наблюдаемого вектора $\boldsymbol{a}$.

Для последующего уравнивания необходимо уравнение (162) линеаризировать путем разложения в ряд Тейлора относительно параметров α, δ; X, Y, Z; a, e, ω, i, Ω, M. Рекомендуется вычислять соответствующие частные производные не путем аналитического дифференцирования, а численным методом с помощью электронной вычислительной машины. При этом исходят из уравнений (167). С их помощью α и δ выражают через координаты станции наблюдений и элементы орбиты. Таким образом, уравнения (167) решаются с приближенными значениями неизвестных X, Y, Z и элементов орбиты, причем неизвестные коэффициенты в разложениях для элементов орбиты (168) или (169), или (170) принимаются первоначально равными нулю. Затем изменяют последовательно X, Y, Z на значения порядка величин их ошибок и также поступают с неизвестными в разложениях (168) или (169), или (170). Далее вычисляют соответствующие частные дифференциалов, приравнивают их частным производным и получают коэффициенты

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X},\ \frac{\partial\alpha}{\partial Y},\ \frac{\partial\alpha}{\partial Z};\ \frac{\partial\alpha}{\partial a_\omega},\ \frac{\partial\alpha}{\partial e_\omega},\ \frac{\partial\alpha}{\partial \omega_\omega},\ \frac{\partial\alpha}{\partial i_\omega},\ \frac{\partial\alpha}{\partial \Omega_\omega},\ \frac{\partial\alpha}{\partial M_\omega}. \tag{172}$$

При этом считают, что для элементов орбиты a, e, ω, i, Ω, M имеют место разложения подобные уравнению (169) для долготы восходящего узла. Если исходят из разложений (168) или (170), то при вычислении частных производных поступают аналогично.

С коэффициентами (172) получают уравнения ошибок

$$v_\alpha = \left(\operatorname{arctg}\frac{y_a}{x_a} - \alpha\right)_0 + \frac{\partial\alpha}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial\alpha}{\partial Y}\Delta Y + \frac{\partial\alpha}{\partial Z}\Delta Z + \\ + \sum_\omega \frac{\partial\alpha}{\partial a_\omega} a_\omega + \sum_\omega \frac{\partial\alpha}{\partial e_\omega} e_\omega + \ldots \tag{173}$$

и аналогичное выражение для v_δ. При практическом использовании целесообразно умножить уравнение (173) на $\cos\delta$.

Свободный член и коэффициенты в правой части уравнения (173) соответствуют выведенным à priori приближенным значениям неизвестных. Уравнивание по способу наименьших квадратов дает неизвестные уравнения (173). Часто рекомендуется повторить уравнивание с улучшенными приближенными значениями.

Аналитические выражения зависимости прямого восхождения и склонения от малых изменений в координатах спутника x, y, z и в элементах его орбиты получены Сочилиной.

$$s\begin{pmatrix}\cos\delta\cdot\Delta\alpha \\ \Delta\delta\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix} = G\begin{Bmatrix}\Delta\Omega \\ \Delta i \\ \Delta M \\ \Delta\omega \\ \Delta\varphi^* \\ \Delta n\end{Bmatrix},$$

s — расстояние от станции до спутника.

$$F=\begin{pmatrix} -\sin(\alpha-\Omega), & \cos(\alpha-\Omega), & 0 \\ -\cos(\alpha-\Omega)\sin\delta, & -\sin(\alpha-\Omega)\sin\delta, & \cos\delta \end{pmatrix},$$

$$G=\begin{Vmatrix} -y, & 0, & \frac{\dot{x}}{n}, & -r\sin L, & A_x, & \frac{\dot{x}}{n}(t-t_0)-\frac{2}{3n}x \\ x, & -z, & \frac{\dot{y}}{n}, & r\cos i\cos L, & A_y, & \frac{\dot{y}}{n}(t-t_0)-\frac{2}{3n}y \\ 0, & y, & \frac{\dot{z}}{n}, & r\sin i\cos L, & A_z, & \frac{\dot{z}}{n}(t-t_0)-\frac{2}{3n}z \end{Vmatrix}.$$

В этих формулах

$$x=r\cdot\cos L,$$

$$y=r\cdot\cos i\sin L,$$

$$z=r\cdot\sin i\sin L,$$

и

$$\frac{\dot{x}}{n}=-\frac{a}{\cos\varphi^*}[\sin L+\sin\varphi^*\sin\omega],$$

$$\frac{\dot{y}}{n}=\frac{a\cos i}{\cos\varphi^*}[\cos L+\sin\varphi^*\cos\omega],$$

$$\frac{\dot{z}}{n}=\frac{a\sin i}{\cos\varphi^*}[\cos L+\sin\varphi^*\cos\omega],$$

и далее

$$A_x=-a[\sin L\sin E+\cos\varphi^*\cos\omega],$$

$$A_y=a\cos i[\cos L\sin E-\cos\varphi^*\sin\omega],$$

$$A_z=a\sin i[\cos L\sin E-\cos\varphi^*\sin\omega].$$

Топоцентрические прямые восхождения и склонения спутника вычисляют по следующим формулам:

$$x-X'=s\cdot\cos(\alpha-\Omega)\cos\delta,$$

$$y-Y'=s\cdot\sin(\alpha-\Omega)\cos\delta,$$

$$z-Z'=s\cdot\sin\delta.$$

Координаты станции наблюдений вычисляют по формулам

$$X'=R\cos\varphi\cos(\theta_\lambda-\Omega),$$

$$Y'=R\cos\varphi\sin(\theta_\lambda-\Omega),$$

$$Z'=R\sin\varphi.$$

φ^* — угол эксцентриситета, $e=\sin\varphi^*$, n — среднее движение, L — аргумент широты и $\theta_\lambda=\theta+\lambda$ — местное звездное время.

При малых эксцентриситетах e рекомендуется вводить вместо M, ω, e следующие параметры: $M+\omega$, $e\cdot\sin\omega$, $e\cdot\cos\omega$.

Сочилина получила с помощью этих формул для спутника 1958 δ_1 выражения для элементов его орбиты в виде следующих многочленов:

$$\Omega=(173{,}421^\circ\pm0{,}030^\circ)-(2{,}6964^\circ\pm0{,}0015^\circ)(t-t_0)-$$
$$-0{,}1461^\circ\cdot10^{-2}(t-t_0)^2-0{,}467^\circ\cdot10^{-5}(t-t_0)^3,$$
$$i=(65{,}144^\circ\pm0{,}002^\circ)-0{,}125^\circ\cdot10^{-2}(t-t_0),$$
$$\omega=(30{,}346^\circ\pm0{,}082^\circ)-0{,}3868^\circ(t-t_0)-0{,}168^\circ\cdot10^{-3}(t-t_0)^2,$$
$$\varphi^*=(5{,}450^\circ\pm0{,}039^\circ)-0{,}01507^\circ(t-t_0)-0{,}1029^\circ\cdot10^{-3}(t-t_0)^2,$$
$$n=5044{,}18\pm0{,}01^\circ$$

для $t=t_0$.
Начальный момент t_0 — 1958; июль 31,0. Остаточные уклонения достигают примерно 1—3′.

7.3. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ПРИ ИЗМЕРЕНИИ РАССТОЯНИЙ И ДОППЛЕРОВСКИХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Выше было описано, каким образом можно определить из наблюдений направления на спутник, зная элементы его орбиты.

Здесь следует рассмотреть также уравнения ошибок, которые необходимо ввести в уравнивание, если расстояние до спутника измеряют посредством лазера или методом Секор и если выполнены допплеровские наблюдения.

При измерении расстояния до спутника применяют формулу

$$s=\sqrt{(x_s''-x_Q'')^2+(y_s''-y_Q'')^2+(z_s''-z_Q'')^2}. \tag{174}$$

Координаты спутника x_s'', y_s'', z_s'' в мгновенной астрономической системе вычисляют по формуле (166) по оскулирующим элементам орбиты.

Пространственные координаты станции наблюдений x_Q'', y_Q'', z_Q'' получают по (104) из жестко связанных с Землей, отнесенных к среднему полюсу координат X, Y, Z

$$\begin{pmatrix}x_Q''\\y_Q''\\z_Q''\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}_z(-\theta)\,S^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}. \tag{175}$$

Вытекающее из (174) уравнение ошибок будет

$$v_s=\left[\sqrt{(x_s''-x_Q'')^2+(y_s''-y_Q'')^2+(z_s''-z_Q'')^2}-s\right]_0+$$
$$+\frac{\partial s}{\partial X}\Delta X+\frac{\partial s}{\partial Y}\Delta Y+\frac{\partial s}{\partial Z}\Delta Z+\sum_\omega\frac{\partial s}{\partial a_\omega}a_\omega+\sum_\omega\frac{\partial s}{\partial e_\omega}e_\omega+\ldots, \quad (176$$

если вновь исходить из элементов орбиты согласно выражению (169). Производные по параметрам X, Y, Z, a, e, . . ., появляющиеся в уравнении (176), целесообразно вычислять на электронной вычислительной машине численным методом как отношения малых разностей.

При допплеровских наблюдениях по уравнению (102) определяют скорость спутника. Ее можно представить на основании (174) отношением дифференциалов

$$s^{\cdot} = \frac{ds}{dt} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Если определяют s для разных соседних моментов времени, то изменяются между теми моментами не только координаты спутника вследствие изменений a, e, ω, i, Ω, M, но изменяются также координаты станции наблюдений x''_Q, y''_Q, z''_Q, полученные по (175), потому что меняется звездное время θ.Производные от полученных из наблюдений величин $s^{\cdot}$ по неизвестным X, Y, Z, a_ω, e_ω, . . ., используемые в уравнении ошибок допплеровских наблюдений, можно вычислить как отношения дифференциалов, как это делалось при измерении направлений и расстояний:

$$v_{\Delta f} = \left(-\frac{f}{c}s^{\cdot} - \Delta f\right)_0 - \frac{f}{c}\left[\frac{\partial s^{\cdot}}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial s^{\cdot}}{\partial Y}\Delta Y + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial s^{\cdot}}{\partial Z}\Delta Z + \sum_{\omega}\frac{\partial s^{\cdot}}{\partial a_\omega}a_\omega + \sum_{\omega}\frac{\partial s^{\cdot}}{\partial e_\omega}e_\omega\right] + \ldots \qquad (177)$$

7.4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaposchkin E. M.: Differential Orbit Improvement (DOI-3). SAO, Special Report No. 161 (1964).

2 Merson R. H. : The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field. Geophys. J. 4 (1961).

3. Merson R. H.: The Dynamic Model of Prop, a Computer Program for the Refinement of the Orbital Parameters of an Earth Satellite. Royal Aircraft Establishment, Technical Report No. 66 255 (1966).

4. Roy M.: Dynamics of Satellites. Springer-Verlag, 1963.

5. Sehnal L. Mills S. B.: The Short-Period Drag Perturbation of he Orbits of Artificial Satellites. SAO, Special Report No. 223 (1966).

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СПУТНИКОВАЯ ГЕОДЕЗИЯ (ЗВЕЗДНАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПО ВЯЙСЯЛЯ, КОСМИЧЕСКАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ)

8.1. СИНХРОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ С ДВУХ СТАНЦИЙ

8.1.1. Основные математические соотношения, уравнения ошибок, уравнивание

Синхронные наблюдения спутников оказались весьма подходящими для геодезии при преодолении расстояний в несколько тысяч километров. В этом случае не влияют погрешности элементов орбиты, полученных из наблюдений. Особенно хорошо зарекомендовали себя фотографические наблюдения спутников-баллонов и световых вспышек, излучаемых геодезическими спутниками. Несмотря на то, что наблюдения выполнялись сравнительно несложными камерами, удавалось достичь точности от 1 : 100 000 до 1 : 500 000.

Двадцать лет назад Вяйсяля * показал, как можно определить вектор направления между двумя станциями P_1 и P_2, если одновременно наблюдать с этих станций два космических объекта.

Если в момент t_1 вектор $\boldsymbol{a}_1$, полученный из наблюдений, направлен от станции P_1 к спутнику S_1 и вектор $\boldsymbol{b}_1$ — от станции P_2 к такому же положению спутника, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ определяют плоскость, которая содержит единичный вектор $\boldsymbol{g}$, связывающий станции P_1 и P_2. Множество таких плоскостей образует пучок плоскостей с вектором $\boldsymbol{g}$ в качестве основания. Таким образом определяют вектор $\boldsymbol{g}$.

Первоначально Вяйсяля разработал свой метод для наблюдения световых вспышек, излучаемых ракетами или устройством, которое поднимается на воздушном шаре и может достигать больших высот (20 км).

Вяйсяля [15] применил этот метод впервые в 1959 г. при наблюдении вспышек, которые излучались с воздушных шаров, предназначенных для подъема радиозондов на заданную высоту. В этой первоначальной форме метод не имел успеха в первую очередь из-за метеорологических трудностей (ветер на высоте). Эта идея Вяйсяля нашла применение в спутниковой геодезии. Его метод очень интенсивно применяется в последнее время при наблюдениях спутников для геодезических целей.

---

* I. Väisälä. An astronomical method of triangulation. — Sitzungsber. Finnischen Akad. Wiss., 1947. — Прим. перев.

Если

$$a_1 = \frac{\overrightarrow{P_1S_1}}{|\overrightarrow{P_1S_1}|}, \quad b_1 = \frac{\overrightarrow{P_2S_1}}{|\overrightarrow{P_2S_1}|}, \tag{178}$$

то векторное произведение

$$n_1 = \frac{a_1 \times b_1}{|a_1 \times b_1|} \tag{179}$$

есть единичный вектор, перпендикулярный к плоскости P_1SP_2 (рис. 26). Если далее

$$g = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \tag{180}$$

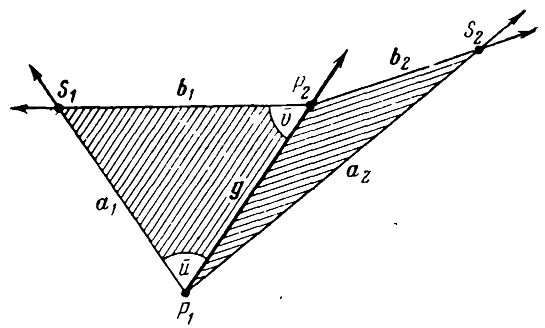


Рис. 26. К синхронным наблюдениям с двух станций методом Вяйсяля

искомый единичный вектор направления между станциями, то он может быть получен из векторного произведения нормалей n_1 и n_2 к двум плоскостям

$$g = \frac{n_1 \times n_2}{|n_1 \times n_2|}. \tag{181}$$

При этом не следует ограничиваться только двумя парами синхронных наблюдений, а нужно взять ряд других пар, чтобы путем уравнивания найти более точный результат.

Для получения возникающего при решении этой задачи уравнения ошибок исходят из соотношения

$$s_a a - s_b b - g \cdot g = 0.$$

s_a, s_b — расстояния до спутника от точки P_1 или P_2, g — длина отрезка P_1P_2. Дифференцируя это уравнение по неизвестным s_a, s_b, $g \cdot g$ и по векторам a, b, получаемым из наблюдений, и умножая затем скалярно на полученный по результатам наблюдений вектор n, получим уравнение ошибок

$$s_a n \cdot \Delta a - s_b n \, \Delta b - g \cdot n \, \Delta g - g_m n \cdot g_m = 0, \tag{182}$$

где $g_m \cdot g_m$ — вектор, связывающий приближенные положения P_1 и P_2.

Уравнение (182) можно вывести по Риннеру и Мильберту из произведения

$$|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}|=0$$

путем дифференцирования. Получают при этом

$$|\Delta\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}|+|\boldsymbol{a},\ \Delta\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{g}|+|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \Delta\boldsymbol{g}|=0.$$

В уравнении (182) изменения получаемых из наблюдений векторов $\Delta\boldsymbol{a}$ и $\Delta\boldsymbol{b}$ должны быть выражены с помощью частных производных независимых друг от друга наблюдаемых значений прямого восхождения и склонения α_a, δ_a, α_b, δ_b. Если выразить все векторы в жестко связанной с Землей системе X, Y, Z, то получим, не принимая во внимание движения полюса,

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\cos\delta_a\cos(\alpha_a-\theta_a)\\ \cos\delta_a\sin(\alpha_a-\theta_a)\\ \sin\delta_a\end{pmatrix}$$

и аналогичное уравнение — для $\boldsymbol{b}$. Вектор между станциями наблюдений P_1, P_2 будет равен

$$g\boldsymbol{g}=g\begin{Bmatrix}\cos\varphi_g\cos\lambda_g\\ \cos\varphi_g\sin\lambda_g\\ \sin\varphi_g\end{Bmatrix}=g\begin{pmatrix}X_g\\ Y_g\\ Z_g\end{pmatrix}. \tag{183}$$

Таким образом получим уточненное уравнение для синхронных наблюдений, выполненных с двух станций

$$c_{\delta a}v_{\delta a}+c_{\alpha a}v_{\alpha a}+c_{\delta b}v_{\delta b}+c_{\alpha b}v_{\alpha b}+$$

$$+\begin{Bmatrix}+c_\varphi\,\Delta\varphi_g+c_\lambda\,\Delta\lambda_g & (184)\\ +c_x\,\Delta X_g+c_y\,\Delta Y_g+c_z\,\Delta Z_g & (185)\end{Bmatrix}-g_m n g_m=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&c_{\delta a}=s_a n\frac{\partial a}{\partial\delta_a},\quad c_{\alpha a}=s_a n\frac{\partial a}{\partial\alpha_a},\\ &c_{\delta b}=-s_b n\frac{\partial b}{\partial\delta_b},\quad c_{\alpha b}=-s_b n\frac{\partial b}{\partial\alpha_b},\\ &c_\varphi=-g_m n\frac{\partial g_m}{\partial\varphi_g},\quad c_\lambda=-g_m n\frac{\partial g_m}{\partial\lambda_g},\\ &c_x=-g_m X_n,\quad c_y=-g_m Y_n,\quad c_z=-g_m Z_n.\end{aligned}\right\} \tag{186}$$

Индекс n при X_n, Y_n, Z_n означает здесь, что прямоугольные координаты единичного вектора n взяты в системе, жестко связанной с Землей. Индекс m указывает, что речь идет о приближенном значении. X_n, . . ., X_g — компоненты единичных векторов.

Частные производные (186) нетрудно получить по заданным ранее векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{g}$.

Если вектор $\boldsymbol{g}$ нужно выразить через его полярные координаты φ_g, λ_g, можно применить уравнение ошибок (184). Если хотят ввести с помощью (185) прямоугольные координаты X_g, Y_g, Z_g вектора g, то следует учитывать, что g — единичный вектор. Тогда появляется еще условие

$$X_g \Delta X_g + Y_g \Delta Y_g + Z_g \Delta Z_g = 0. \tag{187}$$

Конечно, нельзя, основываясь только на одновременных наблюдениях направлений, определить расстояние g между обеими станциями P_1 и P_2. В этом случае можно определить лишь направление вектора g в пространстве. При этом имеется в виду, что есть все данные для того, чтобы составить уравнения ошибок (184), (185) и ввести их в уравнивание.

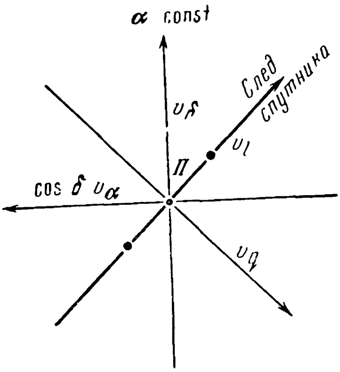


Рис. 27. Проекция следа спутника и ее составляющие в картинной плоскости

При строгом уравнивании было установлено, что случайные величины $v_{\delta\alpha}$, $v_{\alpha\alpha}$ коррелированы друг с другом, как и соответствующие поправки вектора b, особенно, если измерялись на компараторе не световые вспышки спутника, а разрывы следа. В направлении, перпендикулярном к следу спутника, точность получается более высокая, чем в направлении движения спутника. Большая ось эллипса ошибок направлена вдоль следа спутника, а малая ось — перпендикулярно к нему, соотношение осей примерно 1 : 2 или 2 : 3.

Если спроектировать дифференциалы прямого восхождения и склонения на плоскость изображения, то вводимые в уравнивание уточненные значения прямого восхождения и склонения будут относиться к двум ортогональным направлениям в этой плоскости. Одно из них образует угол П со следом спутника.

Случайные ошибки измерений вдоль следа спутника (v_l) и перпендикулярно к нему (v_q) с позиций математической статистики независимы друг от друга. Поэтому в уравнивание их нужно вводить как независимые переменные.

Если П — позиционный угол, образованный на небе следом спутника с кругом склонений ($\alpha = \text{const}$), то (при небольшом поле зрения) имеем соотношения (рис. 27)

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= -\frac{1}{f\cos\delta}(v_l \sin \Pi + v_q \cos \Pi) \\ v_\delta &= \frac{1}{f}(v_l \cos \Pi - v_q \sin \Pi) \end{aligned}\right\}, \tag{188}$$

$$\left.\begin{aligned} v_l &= -f\cos\delta \sin \Pi \cdot v_\alpha + f \cos \Pi v_\delta \\ v_q &= -f\cos\delta\cos \Pi \cdot v_\alpha - f \sin \Pi v_\delta \end{aligned}\right\}, \tag{189}$$

где f — фокусное расстояние.

Если, используя (188), ввести в уточненные уравнения ошибок (184), (185) независимые переменные v_l и v_q, это будет удовлетворять требованиям строгого уравнивания.

Во многих случаях можно пренебречь особенностями уравнивания, связанными с этими поправками, и исходить непосредственно из уравнений (184), (185). Если $\cos\delta \cdot v_\alpha$ и v_δ имеют примерно равные стандарты, то четыре случайные переменные, содержащиеся в первых четырех членах уравнений (184), (185), можно свести к одной эквивалентной случайной переменной v. Тогда из (184), (185) получим уравнение

$$v + c_\varphi \Delta\varphi_g + c_\lambda \Delta\lambda_g - g_m n g_m = 0 \tag{190}$$

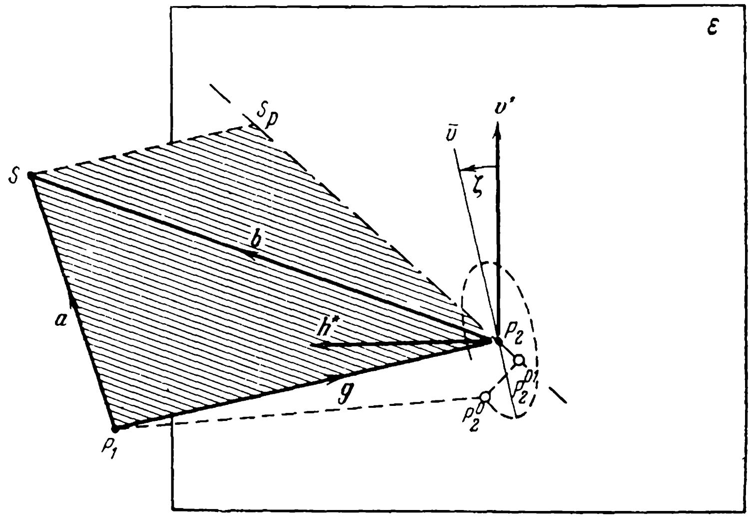


Рис. 28. Вертикальная проекция плоскости P_1SP_2 на плоскость ε, проходящая через пункт P_2 и перпендикулярная к вектору g, соединяющему станции P_1 и P_2

или

$$v + c_x \Delta X_g + c_y \Delta Y_g + c_z \Delta Z_g - g_m n g_m = 0 \tag{191}$$

с весом

$$p = \frac{\sin^2(\bar{u}+\bar{v})}{\sin^2\bar{u}+\sin^2\bar{v}} = \frac{s_m^2}{s_a^2+s_b^2}, \tag{192}$$

где $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — углы, которые показаны на рис. 26. Здесь тоже должно соблюдаться условие (187).

Применяя графический метод, можно видеть, каким образом отдельная плоскость, образованная парой синхронных наблюдений, позволяет определить вектор g (рис. 28).

Если спроектировать плоскость P_1SP_2 на перпендикулярную вектору g плоскость ε, проходящую через точку P_2, то на пересечении обеих плоскостей S_p получим геометрическое место точек, определяющих положение пункта P_2 в плоскости ε. Если P_2° — приближенное положение точки P_2, то отрезок $P_2^\circ P_2^{\circ\prime}$ — свободный член уравнений ошибок (184), (185), (190), (191). По множеству следов S_p в плоскости ε можно определить положение точки P_2 относительно P_2°. Как показывает опыт, перпендикуляры к плоскостям P_1SP_2 будут проходить в большинстве случаев примерно горизонтально, т. е. эти плоскости будут близки к вертикальным плоскостям. Тогда следы S_p в плоскости ε проходят примерно перпендикулярно к вектору g и не трудно установить, что азимут g получается точнее, чем его зенитное расстояние. Если в плоскости ε построить эллипс ошибок, характеризующий положение пункта P_2, то, как показывает опыт, большая полуось будет имеет в большинстве случаев зенитное расстояние от 10 до 30° и зачастую в два или три раза длиннее, чем малая полуось.

Из уравнивания получаем поправки параметров φ_g и λ_g вектора g. Теперь возникает задача преобразовать величины φ_g, λ_g, относящиеся к экваториальной системе, в горизонтальные и вертикальные компоненты Δv^*, Δh^* (см. рис. 28).

Если A — определенный в точке P_1 азимут вектора g и если горизонтальную систему X', Y', Z' (148) повернуть вокруг оси Z' на угол $(90° - A)$ против часовой стрелки, так чтобы ось X' была направлена в точку P_2, то для координат в этой новой системе g, h^*, v^* имеем

$$\begin{pmatrix} g \\ h^* \\ v^* \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(180° - A)\,\boldsymbol{R}_y(90° - \varphi_0')\,\boldsymbol{R}_z(\lambda_0)\begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^*\begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{pmatrix}. \quad (193)$$

где φ_0', λ_0 — географические координаты пункта P_1; X_g, Y_g, Z_g — компоненты вектора g в соответствии с уравнением (183).

С помощью уравнений (183), (193) можно легко установить, определяя частные производные, какое влияние оказывают изменения параметров φ_g и λ_g вектора g на его горизонтальные и вертикальные компоненты h^* и v^*. Точно так же можно определить при помощи (193) соответствующие компоненты ошибок и заменить $\Delta\varphi_g$, $\Delta\lambda_g$ дифференциалами от h^*, v^*.

8.1.2. Теория ошибок

Для оценки точности вектора направления g, который можно получить рассмотренным способом из синхронных наблюдений с двух станций, необходимо вычислить значение веса p по формуле (192) в зависимости от высоты спутника и его положения относительно пунктов P_1 и P_2 (рис. 29).

По схематическим моделям определяют средние ошибки горизонтального и вертикального компонентов, σ_{h^*}, σ_{v^*}, вектора g в зависимости от точности отдельного наблюденного направления σ, высоты спутника h, длины отрезка $\overline{P_1P_2} = g$ и числа синхронных пар наблюдений n^* (число положений спутника). При условии симметричного расположения векторов a и b в пространстве Ламбек получил приближенно

$$\sigma^2_{h^*} = \sigma^2_{v^*} = \frac{\sigma^2}{(0{,}19g/h - 0{,}08)\, n^*}.$$

Среди полученных из наблюдений плоскостей P_1SP_2 имеем плоскость с наибольшим (наименьшим) зенитным расстоянием линии падения (высота перпендикулярной плоскости) $Z = Z_{\max}$ ($Z_{\min}$). Спутники следует наблюдать по обеим сторонам вектора g таким образом, чтобы зенитные расстояния получающихся плоскостей располагались симметрично между $Z_{\max}$ и $Z_{\min}$. Если $Z_{\max}$ принимает значения 80, 70, 60, 50, 45°, то $Z_{\min}$ должно равняться соответственно 22, 26, 32, 40, 45°, если $\sigma_{v^*} = \sigma_{h^*}$.

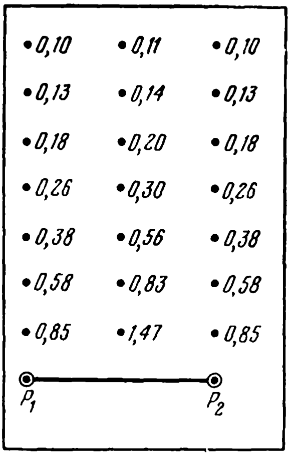


Рис. 29. Пространственное распределение весов в методе Вяйсяля в зависимости от положения спутника относительно обеих станций P_1 и P_2

На практике трудно выполнить это условие. Видимость спутника зависит от многих факторов, так что спутники следует наблюдать так, как это удается. Не следует исключать наблюдения, которые не располагаются в пространстве симметрично, так как это может ухудшить точность результатов.

Риннер [13] приходит к подобным результатам

$$\sigma^2_{h^*} = \sigma^2_{v^*} = \frac{2}{n^*}\sigma^2,$$

полагая, что в отдельных случаях два получающихся при синхронных наблюдениях луча пересекаются под прямым углом.

Нетрудно установить, что особенно выгодны такие наблюдения, при которых спутник находится посередине между обеими станциями на сравнительно небольшой высоте.

Специальный случай, $\sigma_{h^*} \gg \sigma_{v^*}$. Вообще выгодно располагать наблюдаемые плоскости P_1SP_2 так, чтобы горизонтальный компонент вектора g получался примерно с такой же точностью, как и вертикальный. В специальном случае можно значительно повысить точность азимута g, если выбрать орбиту спутника, занимающую совершенно определенное положение относительно обеих станций наблюдения. Для этого следует привести сначала более общие рассуждения.

Определение одного пространственного положения спутника путем измерения разрывов его следа на фотографической пластинке или путем измерения изображений, получившихся в результате излучения им световых вспышек, едва ли может быть точнее, чем ± 1 — $\pm 2''$. Эту границу ставит мерцание (неспокойствие изображения), а также во многих случаях ошибки измерения времени.

С другой стороны, в фотографической астрометрии возможно привязывать к группе звезд с известными небесными положениями другие звезды с точностью порядка $\pm 0{,}1''$. При этом не возникают большие принципиальные трудности. Принципиально возможно даже еще повысить точность и достичь при достаточно высоких затратах точности порядка $\pm 0{,}05''$. В астрометрии камера может очень точно и относительно долго отслеживать движение звезд, так что они получаются в виде точек. При продолжительном экспонировании вследствие осреднения уменьшается эффект мерцания (неспокойствие изображения). Кроме того, в астрометрии можно сделать последовательно много повторных снимков, что приведет к дальнейшему увеличению точности.

При фотографировании спутников нет тех преимуществ, которые имеются в астрометрии. Поэтому при наблюдениях спутников трудно получить точность $\pm 0{,}2''$ или $1:10^6$, так как спутники быстро движутся относительно звезд. Однако можно получить точкообразные изображения спутника, если наблюдать световые вспышки «Геоса» или прерывать спутниковый след с помощью вращающегося секториального затвора, снабженного посредине щелевой диафрагмой. Во всех этих случаях необходимо получить среднее из большого числа вспышек, чтобы уменьшить влияние мерцания (неспокойствие изображения) до величины, меньшей $\pm 1''$. Кроме того, в направлении движения спутника действует ошибка фиксирования времени, 1 мсек соответствует примерно $1''$. Повышение точности определения направлений, так чтобы ошибка была менее $\pm 1''$, требует повышения внешней точности фиксирования времени (точнее 1 мсек). Для достижения этой цели требуются лучшие затворы и значительные затраты. Источником ошибок может быть также ненадежное знание скорости распространения радиоволн, на которых ведется передача сигналов времени.

Кроме того, для безупречной обработки снимков необходимо, по крайней мере, шесть звезд, положение которых известно точнее, чем $\pm 0{,}5''$. Однако нельзя обойтись только фундаментальными звездами, потому что они распределены неравномерно. Необходимо использовать более слабые звезды, положения которых определены менее точно, чем фундаментальных.

Трудности в получении достаточно точных координат звезд в последнее время позволило преодолеть издание нового Смитсонианского звездного каталога (1966) и нового каталога AGK3. Каталог AGK3 содержит координаты с ошибкой примерно $\pm 0{,}13''$ и собственные движения звезд с ошибкой примерно $\pm 0{,}007''$/г.

Надо представить еще один вариант звездной триангуляции, при котором в значительной мере можно ослабить влияние колебаний изображения, неточности в определении времени и ошибок при измерении следа спутника в направлении его движения.

В этом специальном случае метода Вяйсяля существенным условием является то, что подспутниковая кривая образует небольшой угол, не более чем $\chi = 20°$ или $\chi = 30°$, с линией, соединяющей станции наблюдений, в результате этого спутник при прохождении через обе станции довольно близко подходит к зениту. Спутник должен двигаться по возможности в вертикальной плоскости, проходящей через обе станции наблюдений. Благодаря такому геометрическому расположению наблюдений достигается уменьшение пропорционально $\sin \chi$ влияния на горизонтальный компонент определяемого вектора g ошибки

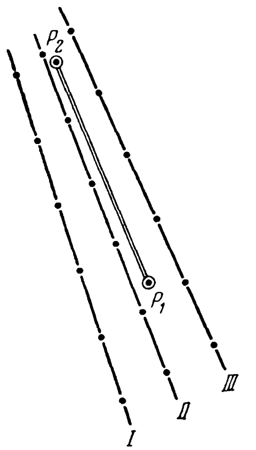


Рис. 30. Две станции наблюдений, находящиеся почти на одном меридиане, с тремя подспутниковыми кривыми спутника-баллона «Эхо 2»

I		II		III	
k_l	k_q	k_l	k_q	k_l	k_q
0,19	0,99	0,04	1,02	0,09	1,00
0,14	0,99	0,03	0,98	0,05	1,00
0,10	0,99	0,07	1,02	0,01	0,99
0,24	0,96	0,04	0,99	0,08	0,99
0,33	0,93	0,01	0,99	0,01	1,00
0,14	1,03	0,08	1,00	0,04	1,00

Рис. 31. Коэффициенты k_l и k_q

определения времени и ошибки измерения на компараторе параллельно следу спутника.

Точность азимута вектора g определяется прежде всего точностью измерений перпендикулярно следу спутника. Поэтому рекомендуется ориентировать снимок на компараторе так, чтобы след спутника проходил параллельно биссектору креста сетки нитей. Этот биссектор можно затем очень точно навести на след спутника, и не только на два соседних разрыва следа, а примерно на 10 равноотстоящих точек, расположенных между соответствующими разрывами. Если осредним все эти измерения, то в случае необходимости получим с небольшими поправками координаты изображения центра этого следа. Компонент, перпендикулярный к следу спутника, получится значительно точнее, чем тангенциальный. В значительной мере будет ослаблено также влияние колебаний изображения. Если вычислить точность по измерениям в 10 точках с коэффициентом $0{,}3 \cong 1\sqrt{10}$, то можно надеяться, что уже по одному следу направление получится с ошибкой $\pm 0{,}5''$. Если использовать среднее из всех следов на снимке и иметь в распоряжении от 10 до 20 одновременных снимков, то можно получить азимут между станциями P_1, P_2 с точностью до 0,2″.

Речь идет о способе, с помощью которого можно очень точно выполнить абсолютное азимутальное ориентирование триангуляции в пространстве; в то время как результаты классических методов из-за неточных сведений об уклонениях отвесных линий позволяют осуществить лишь относительное ориентирование триангуляций.

Чтобы наглядно представить действие ошибок вдоль и поперек следа спутника v_l, v_q в этом специальном методе следует рассмотреть еще два рисунка.

На рис. 30 виден пучок трех подспутниковых кривых спутника-баллона «Эхо 2», имеющего полярную орбиту. Там изображены также две станции наблюдения P_1, P_2, лежащие почти на одном меридиане и удаленные друг от друга примерно на 1300 км.

Таблица на рис. 31 содержит соответствующие коэффициенты k_l, k_q, на которые следует умножать продольные и поперечные ошибки при определении азимута. Можно легко убедиться, что продольные ошибки оказывают очень малое влияние.

8.1.3. Практическое применение метода Вяйсяля

Метод Вяйсяля с синхронными наблюдениями на двух станциях сравнительно прост для выполнения наблюдений и аналитической обработки, поэтому он широко применяется.

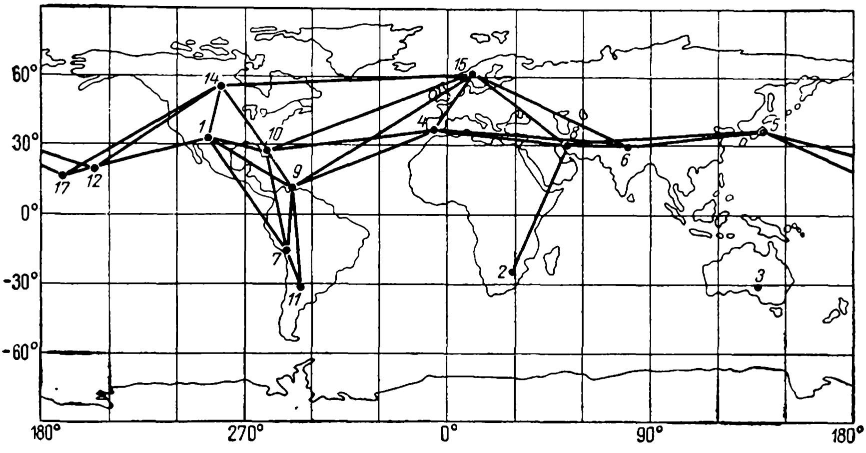


Рис. 32. Географическое положение станций с камерами «Бейкер-Нанна» и сеть направлений, пространственные векторы которых были определены из наблюдений спутников

Так были соединены друг с другом распределенные США по всему миру 15 станций, располагающих камерами Бейкера-Нанна. На рис. 32 показана сеть этих станций с полученными из наблюдений единичными векторами g между ними. Шесть соседних наблюдений в случае необходимости объединялись и из них образовывали среднее для получения результатов с точностью $\pm 1 - \pm 2''$. Из таких наблюдений было получено 1660 синхронных пар.

При длине стороны g от 1500 до 7500 км в первую очередь выполнялись наблюдения высоколетящих спутников («Мидас 4», 630 301, 630 304). Для отдельных пространственных направлений g между станциями была получена относительная точность от 1 : 100 000 до 1 : 300 000.

Кроме того, в районе Мексиканского залива определили векторы направлений между шестью станциями из наблюдений активного спутника (дающего световые вспышки. — Прим. перевод.). Наблюдения оказались довольно точными, потому что применяли камеру с большим фокусным расстоянием (PC 1000) и, благодаря применению вспышек, синхронность была обеспечена очень надежно, так что ошибки определения времени не могли оказать заметного влияния. Ошибки направлений, связывающих станции, оказались порядка $\pm 0{,}7''$, горизонтальный компонент был в среднем немного точнее $\pm 0{,}5''$.

Мильберт из наблюдений спутника «Эхо 1» камерой НАФА определил взаимные направления в сети, образованной станциями Бухарест, Николаев, Познань и Рига.

В Геодезическом институте в Потсдаме из четырех общих пар снимков определили вектор направления Потсдам — Бухарест. Каждое изображение имело несколько разрывов следа. Выравнивание дало для горизонтального компонента среднюю ошибку $\pm 1{,}6''$. Ей соответствует на расстоянии в 1300 км поперечная ошибка примерно 10 м или относительная ошибка 1 : 300 000. В Бухаресте применяли камеру НАФА, в Потсдаме — оригинальную камеру такой же оптической мощности.

Поповичи [11] разработал для оценки таких синхронных наблюдений особый метод, при котором вводится круг одновременности. Применяя свой метод, он определил направления в треугольнике Познань, Рига, Бухарест и другие направления, полученные из наблюдений «Эхо 1».

Если α_1, δ_1 и α_2, δ_2 прямые восхождения и склонения спутника, полученные из наблюдений на обеих станциях P_1 и P_2, и если α_g, δ_g — аналогичные значения для искомого вектора направления между станциями P_1 и P_2, то соотношение, выведенное с использованием круга одновременности, будет иметь вид

$$\operatorname{tg}\delta_1 \sin(\alpha_g - \alpha_2) + \operatorname{tg}\delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_g) + \operatorname{tg}\delta_g \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0.$$

8.1.4. Пространственное уравнивание сети единичных векторов между станциями

Если по методу Вяйсяля, как описано выше, определить три пространственных вектора g_1, g_2, g_3, соединенных в один треугольник, то появится дополнительное условие, так как все три вектора должны лежать в одной плоскости. Это условие заключается в том, что параллелепипед, образованный тремя этими векторами, вырождается в плоскость

$$D=\begin{vmatrix} X_{g_1} & Y_{g_1} & Z_{g_1} \\ X_{g_2} & Y_{g_2} & Z_{g_2} \\ X_{g_3} & Y_{g_3} & Z_{g_3} \end{vmatrix}=0. \tag{194}$$

Это условие должно быть учтено при уравнивании.

Причем сначала путем уравнивания определяют отдельные векторы g_1, g_2, g_3 и их средние ошибки, используя соотношения (184), (185) или (190), (191), чтобы далее, учитывая условие (194), произвести уравнивание треугольника P_1, P_2, P_3 сети.

При этом сначала предполагают, что полученные из наблюдений плоскости $P_i S_{iqk} P_g$ ($k = 1, 2, \ldots, n_{iq}$) независимы друг от друга, т. е. отсутствуют наблюдения, полученные на всех трех станциях одновременно и, следовательно, наблюдения, которые применяли для определения одного из векторов g_i, не используются также для определения других векторов.

Векторы g_1, g_2, g_3, полученные путем уравнивания на основании уравнений ошибок (184), (185) или (190), (191), не коррелированы друг с другом и, следовательно, могут быть введены в уравнивание сети как независимые величины. Три компонента X_{gi}, Y_{gi}, Z_{qi}, вектора g_i, напротив, коррелированы между собой в результате выполненного раньше уравнивания. Это обстоятельство необходимо учитывать.

Уравнивание сети можно проводить в основном тремя различными путями.

1. В первом способе исходят из того, что элементы детерминанта (194) являются случайными переменными, которые коррелируют друг с другом по строкам, но не коррелируют между строками. Если уравнение (194) линеаризировать с помощью поправок этих случайных переменных, то

$$v_{X_{g_1}}\Delta_{11}+v_{Y_{g_1}}\Delta_{12}+\ldots+v_{Z_{g_3}}\Delta_{33}+D_0=0 \tag{195}$$

Здесь следует еще учитывать условие (187).

D_0 — детерминант, определяемый с помощью (194) по компонентам трех векторов g_1, g_2, g_3. Эти векторы получаются по (185), (191) из проведенного ранее уравнивания одновременных наблюдений с двух соседних станций, Δ_{ik} — соответствующие детерминанты низшего порядка.

К уравнениям (195) можно применить теорию уравнивания зависимых наблюдений. Эти методы уравнивания очень редко запрограммированы для вычислительной машины.

2. Если идти вторым путем, то поправки

$$v_{X_{g_i}},\quad v_{Y_{g_i}},\quad v_{Z_{g_i}}$$

следует заменить не зависящими друг от друга переменными. В качестве таковых можно взять ошибки в направлении большой и малой полуосей эллипса ошибок в плоскости ε (см. рис. 28).

При этом используют зенитное расстояние ζ большой полуоси эллипса ошибок.

Рекомендуется, таким образом, в случае уравнивания сети сразу же подставлять в качестве неизвестных в уравнения (184), (185) или (190), (191) горизонтальный и вертикальный компоненты вектора g в плоскости ε в соответствии с выражением (193) и рис. 28. Уравнение с такими неизвестными получим, например, путем преобразования уравнения (193). Если $\bar{q}^*_{ik}$ — элементы матрицы $(Q^*)^{-1}$, то

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{pmatrix} &= (Q^*)^{-1} \begin{pmatrix} g \\ h^* \\ v^* \end{pmatrix} \\
\Delta X_g &= \bar{q}^*_{12} h^* + \bar{q}^*_{13} v^* \\
\Delta Y_g &= \bar{q}^*_{22} h^* + \bar{q}^*_{23} v^* \\
\Delta Z_g &= \bar{q}^*_{32} h^* + \bar{q}^*_{33} v^* \\
g &\equiv 1 \\
\Delta g &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{196}$$

Если подставим (196) в (185) или (191), то неизвестными уравнения ошибок будут горизонтальный и вертикальный компоненты h^* и v^*.

Эти компоненты можно определить путем уравнивания наблюдений на двух соседних станциях. Дополнительно при уравнивании получаем распределение ошибок в плоскости ε, а также зенитное расстояние ζ большой полуоси эллипса ошибок.

Если повернуть систему g, h^*, v^* вокруг оси g на угол ζ по ходу часовой стрелки, так чтобы получить систему g, $\bar{h}$, $\bar{v}$ (рис. 28), то ошибки в направлении осей $\bar{h}$ и $\bar{v}$ не будут коррелированы друг с другом, если они имеют разные средние квадратические значения,

$$\begin{pmatrix} g \\ \bar{h} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_x(-\zeta) \begin{pmatrix} g \\ h^* \\ v^* \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^* \begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{pmatrix}. \tag{197}$$

Поэтому компоненты X_g, Y_g, Z_g или компоненты h^*, v^* вектора g, полученного после уравнивания, заменим $\bar{h}$, $\bar{v}$ и эту подстановку введем в (195) для того, чтобы выразить это уравнение через некоррелированные друг с другом переменные $\bar{h}$, $\bar{v}$.

$$\begin{pmatrix} \Delta X_g \\ \Delta Y_g \\ \Delta Z_g \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{h} \\ \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Если $\bar{p}^*_{ik}$ — элементы матрицы $(P^*)^{-1}$, то получим

$$\bar{h}_1 \sum_i \bar{p}^*_{i2}\Delta_{1i} + \bar{v}_1 \sum_i \bar{p}^*_{i3}\Delta_{1i} + \ldots + \bar{v}_3 \sum_i \bar{p}^*_{i3}\Delta_{3i} - D_0 = 0. \qquad (198)$$

Таким образом, уравнение (195) будет представлено через некоррелированные переменные $\bar{h}$, $\bar{v}$. Веса $\bar{h}_i$, $\bar{v}_i$ обратно пропорциональны квадратам малой или большой полуосей эллипсов ошибок.

Каждый треугольник дает условное уравнение вида (198).

3. В третьем способе уравнивания сети приближенное значение длины одной из сторон треугольника, например g_1, принимают в качестве постоянного, что не означает ограничения, так как масштаб еще не установлен. Это достигается благодаря соблюдению условия (187). Кроме того, для пунктов треугольника P_2 и P_3 введем пространственные приближенные координаты X^*, Y^*, Z^* относительно пункта P_1

$$X^*_i = X_i - X_1,$$
$$Y^*_i = Y_i - Y_1,$$
$$Z^*_i = Z_i - Z_1,$$
$$i = 2,\ 3.$$

Для той части уравнений (185) или (191), которая содержит неизвестные, действительно следующее выражение:

$$-X_n \Delta X^*_2 - Y_n \Delta Y^*_2 - Z_n \Delta Z^*_2 \qquad (199)$$

(X^*, Y^*, Z^* не относятся к единичному вектору), если рассматривать, например, вектор g_1, направленный от пункта P_1 к пункту P_2. Для других векторов g_2 и g_3 получаем подобные выражения. Для вектора g_2 имеют место поправки координат обоих пунктов P_2 и P_3, для вектора g_3 — поправки только координат пункта P_3.

Если для вектора g_1 составить уравнения ошибок в форме (185) или (191), затем заменить в этих уравнениях линейные выражения с неизвестными с помощью (199) и перейти от уравнений ошибок к соответствующим нормальным уравнениям, то первая строка нормальных уравнений будет иметь вид

$$[X_n X_n]\,\Delta X^*_2 + [X_n Y_n]\,\Delta Y^*_2 + [X_n Z_n]\,\Delta Z^*_2 + \ldots$$

Аналогично поступаем при вычислении векторов g_2 и g_3.

Затем складываем три частные матрицы нормальных уравнений и соответствующие свободные члены и получаем матрицу 6×6 для вычисления координат пунктов P_2 и P_3 относительно пункта P_1.

Так как $g_1 = \text{const}$, то в соответствии с уравнением

$$X^*_2\,\Delta X^*_2 + Y^*_2\,\Delta Y^*_2 + Z^*_2\,\Delta Z^*_2 = 0$$

следует исключить из уравнивания одну из трех координат пункта P_2. Итак, имеем при окончательном уравнивании только 5 неизвестных.

Этот способ применяется, если хотят уравнять не отдельные векторы сами по себе, а ставят целью получить только результат уравнивания сети.

Последний способ весьма гибок и его применение не ограничивается сетями, состоящими только из треугольников.

При этом методе для определения соответствующих векторов направлений из одновременных наблюдений на двух станциях, из которых затем можно составить пространственную сеть векторов, используются исключительно наблюдения направлений. Масштаб следует вывести из измерения расстояний методом, который будет описан ниже. При уравнивании сети по (190), (191) надо разделить веса, вычисленные по (192), на соответствующие значения g_m^2.

8.2. СИНХРОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ С ТРЕХ И БОЛЕЕ СТАНЦИЙ

8.2.1. Основные положения

При синхронных наблюдениях с трех или более станций можно в основном применять такие же способы обработки, как в случае синхронных наблюдений только с двух станций.

На рис. 33 можно определить, например, вектор направления P_1P_2, используя плоскости $P_1S_1P_2$, $P_1S_2P_2$, $P_1S_3P_2$, методом, описанным выше, так как имеем синхронные наблюдения только с двух станций. Напротив, если проводили синхронные наблюдения с трех станций при положениях спутника S_4, S_5, S_6, то появляется возможность использовать для вычисления единичного вектора направления P_1P_2 также плоскости $P_1S_4P_2$, $P_1S_5P_2$ и $P_1S_6P_2$.

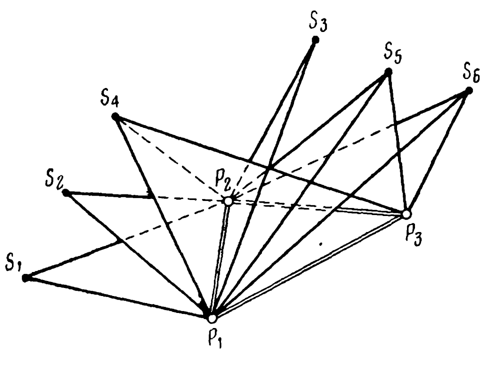


Рис. 33. Элементарная фигура космической триангуляции

Если затем вычислять единичный вектор направления между станциями P_1 и P_3, то можно было бы обойтись методом, действующим при синхронных наблюдениях с двух станций, используя плоскости $P_1S_4P_3$, $P_1S_5P_3$, $P_1S_6P_3$ и рассматривая эти плоскости как независимые от плоскостей $P_1S_4P_2$, $P_1S_5P_2$, $P_1S_6P_2$.

При этом пренебрегаем условием, что после уравнивания тройки векторов P_1S_4, P_2S_4, P_3S_4; P_1S_5, P_2S_5, P_3S_5,... должны пересекаться в одной точке, а именно в точке S_4 или S_5. Кроме того, обе плоскости $P_1S_4P_2$ и $P_1S_4P_3$ зависимы друг от друга, так как они содержат общий вектор наблюдений, направленный от станции P_1 к спутнику S_4.

Если пренебречь этими условиями, то понизится точность результатов, полученных после уравнивания; этого надо избегать.

Уравнивание синхронных наблюдений, выполненных с трех или более станций, целесообразно проводить, следуя другим принципам, чем уравнивание синхронных наблюдений только с двух станций.

При синхронных наблюдениях с трех, четырех или пяти станций рассматривают трехгранные, четырехгранные или пятигранные пирамиды, в вершинах которых находится спутник, а при синхронных наблюдениях с двух станций рассматривают плоскости и пучки плоскостей.

При определении положения пунктов из синхронных наблюдений с трех или более станций действуют другие законы накопления ошибок наблюдений, влияющих на координаты искомых пунктов, чем при синхронных наблюдениях с двух станций. Поэтому оба способа следует рассматривать отдельно.

Используя систему, изображенную на рис. 33, введем сначала пространственные приближенные координаты станций P_1, P_2, P_3, чтобы затем произвести уравнивание совместных наблюдений (уравнивание координат). Для определения масштаба введем приближенное значение, например, для отрезка P_1P_2. Сначала метод Вяйсяля посредством трех плоскостей $P_1S_iP_2$ ($i = 1, 2, 3$) дает три уравнения для единичного вектора между станциями P_1 и P_2.

Определив длину и направление вектора P_1P_2, установим положение пункта P_2 относительно пункта P_1.

Из синхронных наблюдений спутника S_4 можно определить его положение в пространстве посредством прямой пространственной засечки, если на пунктах с известными координатами P_1 и P_2 определить из наблюдений векторы, направленные к спутнику S_4.

При этом уже появляется избыточное измерение, потому что два вектора не могут быть перекошены один относительно другого. Каждый вектор характеризуется двумя наблюдаемыми параметрами (α, δ); всего имеем четыре определенных из наблюдений величины для определения трех пространственных координат S_4. Если затем провести из S_4 единичный вектор направления P_3S_4, наблюдаемого из пункта P_3, то получим геометрическое место точек для пространственного положения пункта P_3. Если аналогичным образом поступим с двумя другими пирамидами, имеющими вершинами S_5 и S_6, то пункт P_3 окажется в точке пересечения трех единичных векторов S_4P_3, S_5P_3, S_6P_3.

На практике определение положения пункта P_2 относительно пункта P_1 не отделяют от определения положения пункта P_3 относительно обоих пунктов P_1 и P_2. Используя уравнения ошибок космической триангуляции, из уравнивания одним приемом определяем положения пунктов P_2 и P_3 относительно пункта P_1, располагая векторами направлений к положениям спутника S_1, $S_2, \ldots$, S_6. При этом сторону $\overline{P_1P_2}$ вводим как известную.

8.2.2. Уравнения ошибок космической триангуляции

Для составления уравнений ошибок должны быть даны координаты станций наблюдения на поверхности Земли

$$\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} = r_Q \begin{pmatrix} \cos\varphi_Q & \cos\lambda_Q \\ \cos\varphi_Q & \sin\lambda_Q \\ \sin\varphi_Q & \end{pmatrix},$$

координаты положений спутника

$$\begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} = r_S \begin{pmatrix} \cos\varphi_S & \cos\lambda_S \\ \cos\varphi_S & \sin\lambda_S \\ \sin\varphi_S & \end{pmatrix}$$

и координаты вектора наблюдений

$$a = \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_a & \cos\lambda_a \\ \cos\varphi_a & \sin\lambda_a \\ \sin\varphi_a & \end{pmatrix}$$

в системе X, Y, Z, жестко связанной с Землей (движение полюсов не учитывается).

Вектор наблюдений a, т. е. третий вектор, получим путем вычитания первого вектора из второго и полученную таким образом разность векторов нормируем, пренебрегая при этом случайными ошибками наблюдений.

Если заданы положение спутника и положение станции наблюдения в системе прямоугольных координат, жестко связанных с Землей, то уравнения ошибок будут

$$s \cdot v_{\varphi a} = \sin\varphi_a \cos\lambda_a \, \Delta X_Q + \sin\varphi_a \sin\lambda_a \, \Delta Y_Q - \cos\varphi_a \, \Delta Z_Q -$$

$$- \sin\varphi_a \cos\lambda_a \, \Delta X_S - \sin\varphi_a \sin\lambda_a \, \Delta Y_S + \cos\varphi_a \, \Delta Z_S - l_\varphi, \quad (200)$$

$$s \cdot \cos\varphi_a \cdot v_{\lambda a} = \sin\lambda_a \, \Delta X_Q - \cos\lambda_a \, \Delta Y_Q - \sin\lambda_a \, \Delta X_S + \cos\lambda_a \, \Delta Y_S - l_\lambda, \quad (201)$$

где s — расстояние до спутника,

$$l_\varphi = s\,(\varphi_a - \varphi_a^\circ),$$

$$l_\lambda = s \cos\varphi_a \,(\lambda_a - \lambda_a^\circ).$$

φ_a°, λ_a° — определяем с использованием приближенных координат положения спутника и станции наблюдения; φ_a, λ_a — значения, полученные из наблюдений.

Здесь положение станции наблюдения спутников изменяется по всем трем координатам. Вводя геоцентрический радиус-вектор станции наблюдения r_Q как известный à priori, придем к другому варианту уравнений (200), (201). В формуле

$$r_Q = r_{Q1} + r_{Q2} + r_{Q3}$$

r_{Q1} — геоцентрический радиус-вектор референц-эллипсоида в соответствующем пункте, r_{Q2} — высота геоида, которую определяют из астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования, т. е. геометрическими методами, r_{Q3} — высота над уровнем моря.

В качестве r_{Q1} можно ввести также радиус-вектор общего земного эллипсоида, определенного с высокой степенью точности из наблюдений спутников ($f = 1 : 298{,}255$; $R_E = 6\,378\,142$ м). В этом случае r_{Q2} равно ондуляциям геоида, определяемым по аномалиям силы тяжести посредством формулы Стокса.

В настоящее время большая полуось общего земного эллипсоида известна с точностью порядка ± 6 м, а разность большой и малой полуосей ± 3 м. Разности высот геоида в хорошо определенных геодезических системах при расстояниях от 1000 до 2000 км известны с точностью порядка ± 2 м, в то время как на таких же расстояниях разности ондуляций геоида можно определить только с ошибкой порядка ± 5 — ± 10 м.

Следовательно, в космической триангуляции, покрывающей континент протяженностью около 2000 км, могут быть введены разности геоцентрических радиусов-векторов станций наблюдений; при этом эти разности интересны как определенные à priori величины, полученные с достаточной степенью точности с использованием математически точно известного референц-эллипсоида и соответствующих высот геоида.

Напротив, ондуляции геоида для этой цели нельзя получить с необходимой точностью.

Уравнения ошибок для этого второго варианта будут

$$\begin{aligned} s \cdot v_{\varphi a} = & -\sin\varphi_a \cos\lambda_a \, \Delta X_S - \sin\varphi_a \sin\lambda_a \, \Delta Y_S + \cos\varphi_a \, \Delta Z_S - \\ & - r_Q \left[\sin\varphi_Q \sin\varphi_a \cos\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) + \cos\varphi_Q \cos\varphi_a\right] \Delta\varphi_Q + \\ & + r_Q \cos\varphi_Q \sin\varphi_a \sin\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) \Delta\lambda_Q - l\varphi, \end{aligned} \tag{202}$$

$$\begin{aligned} s \cdot \cos\varphi_a v_{\lambda a} = & -\sin\lambda_a \, \Delta X_S + \cos\lambda_a \, \Delta Y_S - r_Q \sin\varphi_Q \sin\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) \Delta\varphi_Q - \\ & - r_Q \cos\varphi_Q \cos\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) \Delta\lambda_Q - l_\lambda. \end{aligned} \tag{203}$$

8.2.3. Теория ошибок

В космической триангуляции действуют другие законы распределения ошибок, чем в методе Вяйсяля. В методе Вяйсяля было выгодно, чтобы спутник, насколько это могла позволить рефракция, находился посередине между обеими станциями, так что при прямой засечке спутника оба определяемых луча образовывали бы друг с другом большой угол при пересечении в точке расположения спутника. В космической триангуляции угол пересечения направлений к спутнику также не должен быть слишком малым. Но если в методе Вяйсяля очень благоприятными могут быть углы пересечения почти в 180°, то в космической триангуляции угол пересечения не может приближаться к значениям 180 и 0°. В космической триангуляции углы пересечения должны заключаться между 40 и 140°, наиболее выгодное значение угла 90°.

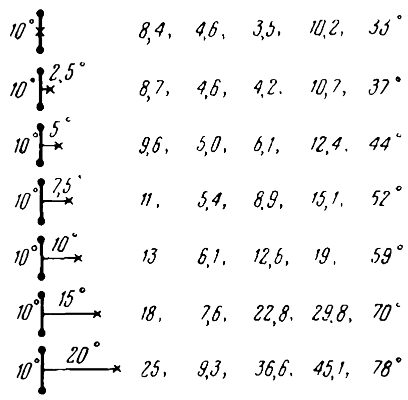


Рис. 34. К точности определения положения пункта с помощью пространственной засечки

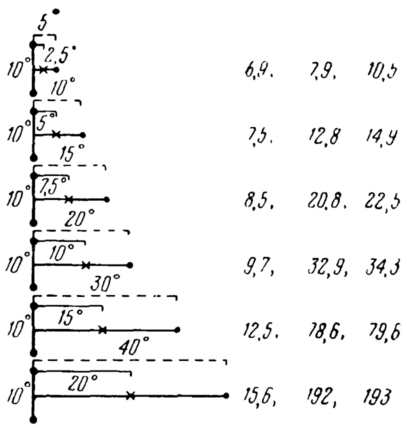


Рис. 35. К точности определения положения пункта из элементарной фигуры космической триангуляции

Направление, связывающее вновь определяемый пункт со спутником, в космической триангуляции не должно образовывать острый угол с плоскостью горизонта в новом пункте, т. е. его зенитное расстояние не должно быть слишком большим, если r_Q задается для нового пункта уравнениями (202), (203).

Если положение нового пункта определяется на поверхности Земли с помощью уравнений (200), (201), то наблюдаемые в этом пункте направления должны, как отмечалось выше, пересекаться с другими направлениями под углами 40—140°.

Можно сделать вывод, что при синхронных наблюдениях с трех или более станций высота спутника должна быть равна примерно расстояниям между станциями наблюдений, а подспутниковая точка должна находиться посередине между станциями, с которых проводятся синхронные наблюдения; зенитные расстояния спутника не должны значительно превышать 40—50°.

К этим выводам можно прийти в результате рассмотрения ошибок, значения которых приведены на рис. 34 и 35.

В основу положены синхронные наблюдения спутника с двух твердых пунктов (см. рис. 34), находящихся на расстоянии в 10° ($\sim$ 1000 км). Предполагается, что спутник находится над Землей на высоте 1000 км, подспутниковая кривая примерно совпадает с перпендикуляром, проведенным через среднюю точку отрезка, соединяющего два исходных пункта. Расстояние подспутниковой точки от линии, соединяющей два исходных пункта, составляет последовательно 0; 2,5; 5; 7,5; 10; 15; 20°. При расчетах ошибку измерения направления к спутнику принимали равной $\pm 1''$.

На рис. 34 (за пределами чертежа) даны для некоторых случаев величины средних квадратических ошибок в метрах. Первое число — средняя квадратическая ошибка положения спутника в радиальном направлении m_r, второе — компонент ошибки в направлении, параллельном линии, соединяющей два исходных пункта, m_q, третье — перпендикулярный к предыдущему компонент m_l, четвертое — средняя квадратическая ошибка положения пункта М, равная

$$M^2 = m_r^2 + m_q^2 + m_l^2,$$

и, наконец, пятое число — зенитное расстояние спутника при наблюдениях.

На рис. 35 даны результаты исследований точности определения планового положения пункта по результатам синхронных наблюдений. Определяемый пункт должен быть расположен в два раза дальше от линии, соединяющей исходные пункты, чем подспутниковая точка. Следовательно, речь идет о простом примере из космической триангуляции. Геоцентрический радиус-вектор определяемого пункта должен быть известен, поэтому определяются лишь плановые координаты этого нового пункта.

На рис. 35 схематически представлены результаты исследований построений, а также средние квадратические ошибки в метрах. Первое число — средняя квадратическая ошибка положения определяемого пункта в направлении, параллельном линии, соединяющей два исходных пункта, m_q, второе — компонент ошибки, в направлении перпендикулярном к предыдущему, m_l, и, наконец, третье — средняя квадратическая ошибка положения пункта $m_q^2 + m_l^2$.

8.2.4. Особый случай космической триангуляции

При определении положения спутника в пространстве с помощью пространственной прямой засечки с двух исходных пунктов имеем избыточное измерение, так как четырем элементам, полученным из наблюдений, соответствуют только три неизвестных. Если отбросить один из наблюденных элементов, то с помощью оставшихся трех полученных из наблюдений величин можно всегда однозначно определить положение спутника.

Например, на одной из двух станций точно определили вектор направления через α, δ и соответствующий момент, а на другой станции определили только α и δ, а соответствующий момент зафиксировали очень неточно, с ошибкой порядка 1 или 0,1 сек. Но и в этом случае можно определить положение спутника в пространстве.

Наблюдаемый на первой станции единичный вектор a_1 можно рассматривать как геометрическое место точек, характеризующих положение спутника. На другой станции получаем на снимке два разрыва следа, однако момент фотографирования известен сравнительно неточно. Можно определить наблюдаемые векторы, относящиеся к обоим разрывам следа, и определить пространственное положение плоскости, проходящей через оба этих вектора. В точке пересечения этой плоскости с вектором a_1, полученным из наблюдений на первой станции, находится спутник.

Практическое применение этого метода ограничивается только исключительными случаями.

8.2.5. Исключение координат спутника

При уравнивании с использованием уравнений ошибок (200), (201), (202), (203) получаем нормальные уравнения, содержащие в качестве неизвестных также положения спутника. Эти положения спутника не должны определяться в рамках данной задачи. Их следовало исключить еще раньше, особенно для большинства случаев, когда речь идет о спутниках-баллонах с сильно возмущенной орбитой которые служат лишь светящимися визирными целями, а их орбита не анализируется.

Если Δu_S — поправка вектора, характеризующего положение спутника, Δu_Q — поправка вектора, характеризующего положение станции наблюдения в системе (X, Y, Z), жестко связанной с Землей, и если не учитывать свободные члены, то коэффициенты в нормальных уравнениях будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{matrix} A\cdot\Delta u_S + C\cdot\Delta u_Q \\ C\cdot\Delta u_S + B\cdot\Delta u_Q \end{matrix}\right\}. \qquad (204)$$

Если умножить первую строку на CA^{-1} и прибавить второе уравнение, то получим

$$[B - CA^{-1}C]\,\Delta u_Q, \qquad (205)$$

таким образом, положение спутника исключено. Если на практике имеем несколько положений спутника, то все они могут быть исключены последовательно этим методом.

8.2.6. Комбинированные системы с синхронными наблюдениями с двух, трех и более станций

На практике в системах геометрической спутниковой геодезии не ограничиваются синхронными наблюдениями только с двух или трех станций. Берут все благоприятно расположенные синхронные наблюдения независимо от того, на скольких станциях они были произведены, чтобы получить как можно более точный результат. Так что в одной сети вместе будут появляться синхронные наблюдения как с двух, так с трех и более станций. Поэтому уравнения ошибок разного вида (184), (185), (187), (190), (191), (200), (201), (202), (203) могут появиться вместе в одной системе.

Число синхронных наблюдений с двух станций может преобладать над числом синхронных наблюдений с трех и более станций, особенно в Европе, так как облачное небо сильно затрудняет синхронные наблюдения с нескольких станций.

Для случая синхронных наблюдений с двух станций можно, конечно, использовать уравнения (200), (201) или (202), (203), а не только уравнения (184), (185), (190), (191), где уже исключено положение спутника; так, исключение положения спутника по (204), (205) нетрудно выполнить с помощью электронной вычислительной машины.

При использовании всех синхронных наблюдений не имеет значения, получены ли они с двух, трех или более станций, если применять общие уравнения космической триангуляции (200), (201) или (202), (203). Преимущество такого подхода заключается в том, что для любых наблюдений в программу вычислений на электронных вычислительных машинах можно включить уравнения ошибок подобной структуры. Этого преимущества нельзя недооценивать.

Синхронность наблюдений на участвующих станциях можно обеспечить благодаря простому техническому приему, например, наблюдая на всех станциях определенный спутник от десятой до двадцатой секунды каждой минуты или только каждой четной минуты. След спутника прерывается затвором в целые секунды.

8.2.7. Практическое применение

Метод синхронных наблюдений с двух или более станций (космическая триангуляция) применялся уже многократно. Французские ученые методом космической триангуляции связали две станции, расположенные в Алжире, Хаммагир ($\varphi = 31°$, $\lambda = 3°$ W) и Дуаржа ($\varphi = 32°$, $\lambda = 6°$ E), с находящимися во Франции станциями Лакано (близ Бордо), Агде ($\varphi = 43°$, $\lambda = 3°$ E) и Олетта (на Корсике), наблюдая спутник «Эхо 1». Около 60 положений спутника было определено фотографическим методом. Число полученных на отдельных станциях наблюдений составило в Хаммагире — 15, Дуарже — 40, Лакано — 25, Агде — 35 и Олетта — 40. Были получены синхронные наблюдения не только с двух станций, но и многочисленные синхронные наблюдения с трех и четырех станций. Точность результатов составила около 1 : 150 000.

Несколько лет назад в социалистических странах в качестве опыта из наблюдений спутника «Эхо 1» камерами НАФА построили две сети методом космической триангуляции. Одна система расположена в Европе и включает станции Рига, Рязань, Харьков, Николаев, Бухарест, Львов, Познань, Прага и Потсдам. Вторая советская система расположена на Дальнем Востоке и включает станции на

Камчатке и Сахалине. Она состоит из четырех пунктов: Благовещенск, Южно-Сахалинск, Петропавловск-Камчатский и Раздольное.

В США, используя наблюдения световых вспышек спутника «Анна», связали друг с другом несколько станций.

Все эти эксперименты показали, что, применяя хорошую камеру, можно достичь точности 1 : 100 000 и большей. Будущее покажет, может ли быть достигнута точность 1 : 1 000 000.

8.3. ОБРАБОТКА В СЛУЧАЕ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЙ ДО СПУТНИКА. ТРИЛАТЕРАЦИЯ, ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАСЕЧКА

8.3.1. Уравнения ошибок

В описанных выше методах геометрического определения пунктов с помощью спутников использовались исключительно наблюдения направлений. Для определения масштаба и для дальнейшего увеличения надежности сетей целесообразно использовать измерения расстояний до спутника.

Измерение расстояний до спутника можно проводить с помощью лазера и системы Секор.

Если для станций наблюдения и для спутника ввести пространственные прямоугольные координаты в системе, жестко связанной с Землей, то уравнения ошибок при измерении расстояний между этими точками будут иметь вид

$$\begin{gathered}
v_s = -\cos\varphi_a \cos\lambda_a\, \Delta X_Q - \cos\varphi_a \sin\lambda_a\, \Delta Y_Q - \sin\varphi_a\, \Delta Z_Q + \\
+ \cos\varphi_a \cos\lambda_a\, \Delta X_S + \cos\varphi_a \sin\lambda_a\, \Delta Y_S + \sin\varphi_a\, \Delta Z_S - l_s, \\
l_s = s - s^0, \qquad (206)
\end{gathered}$$

где s — расстояние, полученное из наблюдений, s^0 — расстояние, вычисленное с приближенными координатами.

Если же взять для станции наблюдения пространственные полярные координаты, а длину геоцентрического радиуса-вектора станции r_Q считать заданной, то уравнения ошибок будут иметь следующую форму:

$$\begin{gathered}
v_s = \cos\varphi_a \cos\lambda_a\, \Delta X_S + \cos\varphi_a \sin\lambda_a\, \Delta Y_S + \sin\varphi_a\, \Delta Z_S + \\
+ r_Q \left[\cos\varphi_a \sin\varphi_Q \cos\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) - \sin\varphi_a \cos\varphi_Q\right] \Delta\varphi_Q - \\
- r_Q \cos\varphi_a \cos\varphi_Q \sin\left(\lambda_a - \lambda_Q\right) \Delta\lambda_Q - l_s. \qquad (207)
\end{gathered}$$

8.3.2. Пространственная засечка

По одному измеренному расстоянию до спутника нельзя определить его положение, не говоря уже о положении нового пункта на поверхности Земли. Если использовать только измерения расстояний, то необходимо иметь хотя бы три целесообразно расположенные станции с известными координатами, с которых производятся измерения расстояний.

Измерение расстояния дает сферу вокруг пункта наблюдений, которая является геометрическим местом положения спутника. Точка пересечения трех таких сфер определяет положение спутника в пространстве. Необходимо определить три целесообразно расположенные положения спутника в пространстве и наблюдать спутник в этих трех положениях одновременно и с нового пункта, для того чтобы только из измерений расстояний определить пространственное положение последнего (рис. 36).

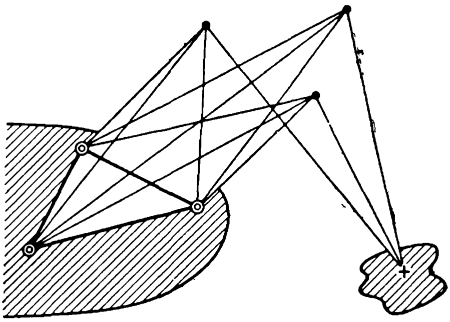


Рис. 36. Элементарная фигура в случае определения положения геодезического пункта + с помощью измерения расстояний до спутника (пространственная засечка)

Взаимные расстояния между тремя исходными пунктами должны быть несколько больше, чем высота спутника, так как иначе появятся неблагоприятные углы засечки между получаемыми сферами и будут действовать неблагоприятные законы накопления ошибок.

Определяемый пункт не должен быть слишком удален от исходных, так как в таком случае также действуют неблагоприятные законы накопления ошибок. Расстояние определяемого пункта от исходных должно быть такого же порядка, как расстояние между исходными пунктами.

Для определения положения пунктов только путем измерения расстояний рекомендуется метод Секор. Лазерные измерения расстояний затруднительны из-за облачности, поэтому их рекомендуется применять при отдельных измерениях расстояний для определения масштаба сетей.

Метод Секор в разных формах применялся в США и были получены довольно хорошие результаты. Например, имелись три твердых пункта, удаленных друг от друга примерно на 1000—1500 км (Лас-Крусес, Колорадо-Спрингс, Остин). Определили положение четвертой станции (Stillwater), удаленной от исходных пунктов примерно на 1000 км. Полученный результат отличался от данных триангуляции только на 6 м.

Позднее метод Секор применили вновь на западе Тихого океана в районе Японских островов и определили координаты одного острова с точностью порядка ± 2 — ± 3 м; с такой же точностью была получена высота. Эти результаты получили из 19 независимых групп наблюдений, две из которых пришлось отбросить. Каждая отдельная группа состояла из большого числа наблюдений:

от 12 до 218. При одном решении использовали 1000 наблюдений.

При измерении расстояний методом Секор должны быть учтены поправки за рефракцию при прохождении радиоволн через тропосферу и ионосферу.

В третьем эксперименте методом Секор определили положение нового пункта, сравнительно далеко расположенного (1500 км) от исходных. Поскольку при этих определениях геометрия фигуры была неблагоприятной, определяли положения спутника методом Секор в районе исходных пунктов, чтобы потом, используя элементы орбиты, определить его положение в районе нового пункта и далее этим методом определить координаты нового пункта. Использование приближенно известных элементов орбиты не позволило достичь наивысшей точности, расхождение с данными, полученными из триангуляции, составило 55 м.

8.3.3. Комбинация измерений расстояний и направлений

Очень важно отдельные измерения расстояний с помощью лазера или методом Секор включать в системы космической триангуляции или построения методом Вяйсяля для определения их масштаба.

Только в немногих случаях измерения расстояний и направлений на одной и той же или разных станциях будут проводиться строго одновременно. Чаще всего будут проводиться квазисинхронные наблюдения, при которых асинхронность наблюдений составляет величину от долей до нескольких секунд. Эти квазисинхронные наблюдения можно преобразовать в синхронные путем линейной или квадратичной интерполяции.

Масштаб сети будет определен, если наряду с измерением расстояния до спутника выполнить измерения направлений с двух других станций. Благодаря измерениям направлений положение спутника будет определено относительно системы станций наблюдения. Измерение расстояния до спутника с третьей станции дает избыточное измерение, наличие которого позволяет вывести масштаб всей системы.

8.3.4. Определение масштаба путем синхронных измерений расстояний с четырех станций

Если имеется аппаратура для измерения расстояний, то масштаб сети можно получить, производя синхронные измерения расстояний с четырех станций.

Если X_Q, Y_Q, Z_Q — координаты станций наблюдения и X_S, Y_S, Z_S — координаты спутника в системе, жестко связанной с Землей, а λ — масштабный коэффициент сети станций, то расстояние до спутника будет равно

$$s^2 = (\lambda X_Q - X_S)^2 + (\lambda Y_Q - Y_S)^2 + (\lambda Z_Q - Z_S)^2.$$

Это уравнение имеет четыре неизвестных: масштабный коэффициент и три координаты спутника. Таким образом, определить масштабный коэффициент λ можно из синхронных наблюдений с четырех станций. Геометрию определяемой фигуры выбирают так, чтобы определить λ как можно точнее. Как установил Риннер, при наличии четырех станций наблюдений, с которых можно проводить измерения расстояний, три из них лучше всего располагать в вершинах равностороннего треугольника, а четвертую — в его центре. Если подспутниковая точка в момент наблюдений оказывается вблизи центра треугольника, то в этом случае масштабный коэффициент λ получается точнее всего.

8.3.5. Определение масштаба с помощью светодальномерной полигонометрии

В принципе, масштаб системы космической триангуляции можно определять классическим методом путем измерения расстояний на поверхности Земли. В этом случае две соседние станции наблюдений за спутником следует связать друг с другом триангуляцией или вытянутым полигонометрическом ходом, где стороны измеряются геодиметрами или теллурометрами. Кроме того, между этими станциями выполняется астрономическое или астрономо-гравиметрическое нивелирование для определения высоты геоида ζ (см. рис. 1) относительно референц-эллипсоида. Результаты наблюдений в триангуляции, выполненных на поверхности Земли, в том числе и имеющиеся в ней базисы, можно спроектировать затем на референц-эллипсоид вдоль нормали к этой поверхности на величину $h+\zeta$ (метод проектирования) и провести после этого уравнивание.

Таким образом, на референц-эллипсоиде получим длину дуги между обеими станциями, зная которую можно найти длину соединяющей их хорды, наряду с высотой над уровнем моря h и высотой геоида ζ в обоих конечных пунктах.

Если сумма высоты над уровнем моря h и высоты геоида ζ известна с ошибкой $\Delta h + \Delta\zeta = \pm 3$ м, то ошибка хорды протяженностью b ($b = 2000$ км) между обеими станциями наблюдений равна

$$\Delta b = (\Delta h + \Delta\zeta)\sin\frac{b}{R_E} = \pm 1 \text{ м},$$

т. е. относительная ошибка составляет 1 : 2 000 000.

Расстояние между обеими станциями наблюдений за спутником составляет, по меньшей мере, 1000—2000 км. Из опыта известно, что обычные триангуляции на такие расстояния проложить с точностью большей 1 : 200 000 трудно. Если требуется выполнить указанные работы с точностью, превышающей 1 : 200 000, то необходимо выполнить дополнительные многочисленные измерения базисов теллурометрами или геодиметрами. Точность масштаба 1 : 200 000 для расстояний, которые точно определяются в космической триангуляции, недостаточна, так как рассчитываем определить углы в этой сети с ошибками от 1 до 0,4″ (1 : 300 000—1 : 500 000). Здесь следует обратить внимание на то, что точность измерения расстояний в системе космической триангуляции уменьшается с удалением от линии базиса из-за накопления ошибок. Поэтому точность линий базиса должна быть выше, чем средняя точность системы космической триангуляции, которую стараются определить. Орбитальным методом, о котором будем говорить ниже, можно определить координаты станций наблюдений за спутниками при расстояниях от 3000 до 4000 км с ошибкой ±10 — ±15 м (1 : 300 000 — 1 : 400 000).

Для определения масштаба космической триангуляции наземным методом рекомендуется прокладывать в первую очередь длинные и вытянутые ходы полигонометрии с помощью геодиметра.

8.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ МИРОВАЯ СИСТЕМА

В настоящее время во многих странах на разных континентах применяют описанные выше метод космической триангуляции и метод Вяйсяля.

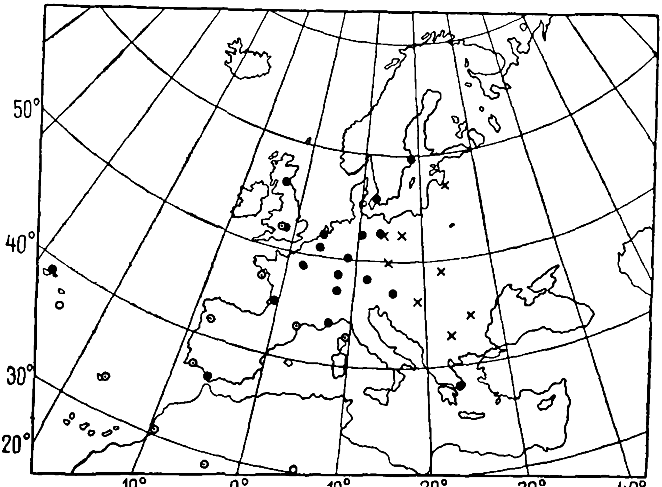


Рис. 37. Система космической триангуляции в Европе:

X — Восточно-Европейская система (по Л. Циховичу); ● — Западно-Европейская система; ⊙ — специальная французская система

В восточно-европейских странах несколько станций объединились для совместной работы; при этом синхронные наблюдения проводятся вместе с отдельными африканскими станциями (Бамако, Каир) (рис. 37).

Подобным образом сотрудничают западно-европейские страны, которые создали сеть из более чем 12 станций и провели также многочисленные наблюдения световых вспышек спутников «Геос А» и «Геос В».

Была установлена геодезическая связь между Англией и США. Азорские острова были связаны путем наблюдений спутника — баллона со станциями, расположенными во Франции и Северной Африке (рис. 37). Лазерные наблюдения французских спутников выполнялись с трех обсерваторий: обсерватория Сан-Мишель (Франция), Стефанион (Греция), Коломб-Бешар (Алжир). В Канаде спутники «Эхо-1» и «Эхо-2» наблюдали с восьми станций. В США развивается сеть, точность которой 1 : 300 000—1 : 500 000. Через Вест-Индию с помощью космической триангуляции связаны между собой Северная и Южная Америка. В Японии и Австралии также имеется несколько станций, с которых ведутся наблюдения спутников-баллонов.

Все эти важные отдельные работы позднее должны быть объединены в единую триангуляционную систему. Таким образом, может быть образована Мировая геодезическая система, над созданием которой работают в настоящее время. Она может состоять примерно из 60 станций, распределенных по всей Земле, которые должны быть связаны друг с другом спутниковыми наблюдениями методом космической триангуляции.

Первое теоретическое исследование о том, как, выполняя наблюдения спутников, можно создать методом космической триангуляции, т. е. чисто геометрически, систему из двенадцати симметрично распределенных на Земле станций, являющуюся однородной сетью, выполнил Жонголович.* По его проекту при наблюдении спутников с двенадцати станций должны быть независимо определены направления между соседними пунктами. При этом единичные векторы между соседними станциями следует получить из синхронных наблюдений спутника на высоте 12 000 км с двух соседних станций. Из уравнивания пространственной системы векторов направлений между станциями он получил для координат отдельных станций следующие средние квадратические ошибки (в метрах), принимая, что средняя квадратическая ошибка направления вектора между станциями составляет $\pm 1''$, пункт № 1 — исходный пункт, а стороны 1—2 и 11—12 являются базисами.

Станция	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_x	—	12	22	32	32	22	22	31	31	31	22	31
m_y	—	25	31	28	28	31	32	32	30	32	32	31
m_z	—	19	24	26	26	24	35	39	42	39	35	42

* Жонголович И. Д. «Проект единой мировой космической триангуляции» Studia geophys et geod. 9, 1965. — Прим. перев.

Так как координаты геодезической мировой системы стремятся получить с точностью ± 10 — ± 15 м, необходимо достичь точности определения направлений хотя бы $\pm 0{,}5''$.

Из-за неравномерного распределения континентов и океанов реальная Мировая геодезическая система будет значительно отклоняться от ее идеальной равномерной конфигурации. Это будет уменьшать точность определяемых координат.

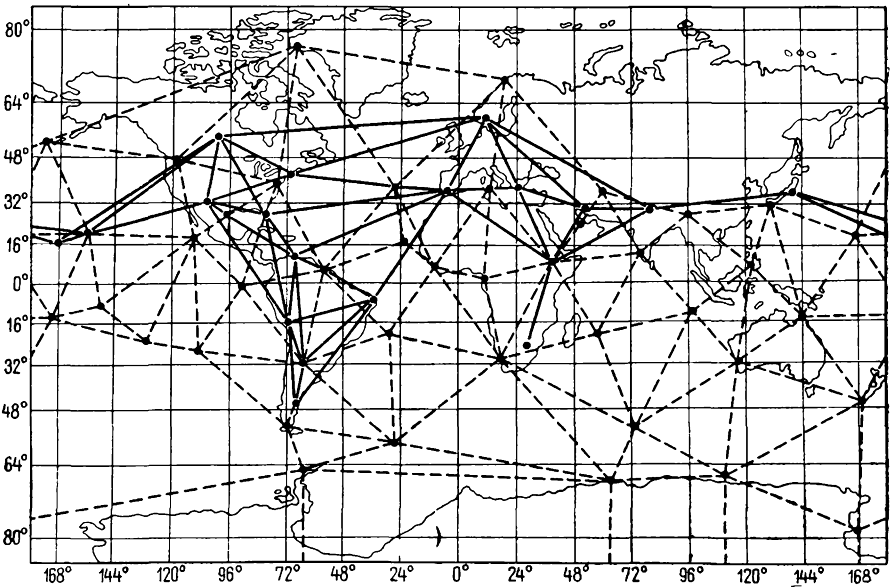


Рис. 38. Проект геодезической сети из наблюдений спутников по методу космической триангуляции, предложенный И. Меллером. Выбранные пункты сети служат только как обоснование плана:

——— станции с ВС-4; - - - станции с камерами Бейкер – Нанна.

Кроме того, появляются систематические ошибки, поэтому включенные в уравнивание направления между соседними станциями необходимо знать, по крайней мере, с ошибкой $\pm 0{,}3''$.

Шмидт теоретически исследовал ошибки более густой сети, состоящей из 36 станций. Для всех станций он нашел примерно одинаковую точность, что обусловлено симметрией сети. Ошибки планового положения пунктов в три раза меньше ошибок по высоте. Он полагает, что при точности наблюдений $\pm 0{,}4''$ можно достичь после уравнивания для плановых координат точности ± 8 — ± 10 м, для высот ± 16 — ± 30 м.

Если стремиться к оптимальной конфигурации Мировой геодезической системы, то высоту наблюдаемого спутника следует устанавливать в зависимости от взаимного расстояния станций наблюдения на Земле. Б. М. Кленицкий установил, что при длине сторон 1500—

2000 км оптимальная высота спутника 800—1000 км, при длине сторон 3000—4500 км — 2500 км, при расстоянии между станциями 7000 км оптимальная высота 10 000 км («Геодезия и картография», 1968, № 1).

В США была предложена сравнительно густая мировая система, состоящая примерно из 60 станций. Для построения этой системы наблюдали спутники «Эхо» и «Пагеос» (рис. 38).

В Мировой геодезической системе серьезные требования предъявляются к точности и однородности наблюдений. Сеть получится весьма жесткой, если использовать для измерений расстояний лазерные устройства или систему Секор.

Масштаб сети на рис. 38 определяется тремя очень длинными наземными базисными линиями, заключенными между соседними станциями. Эти базисные линии можно получить классическим методом из триангуляции и из вытянутых ходов светодальномерной полигонометрии с точностью 1 : 500 000 (см. 8.3.5). Точность можно повысить, если выполнять синхронные наблюдения направлений не с двух, а с трех или четырех станций.

Целесообразно также определять положения отдельных станций этой сети другим независимым методом. Для этого можно использовать орбитальный метод, описанный в динамической спутниковой геодезии. Так как масштаб построений, определенный орбитальным методом, получается на основании третьего закона Кеплера по периоду обращения спутника и массе Земли с высокой точностью, то сравнение результатов обоих методов дает возможность независимого контроля масштаба.

Если использовать в орбитальном методе допплеровские наблюдения, то масштаб можно определить также, используя (102, *а*), по разности двух расстояний до спутника ($s_2 - s_1$).

8.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aardom L. Girnius A, Veis G.: Determination of the Absolute Space Directions between Baker-Nunn Camera Stations. SAO Special Report No. 186 (1965).
2. Arnold K.: Zur Bestimmung geodätischer Azimute aus Simultanbeobachtungen von Satelliten. Gerl. Beitr. Geophysik, 74 (1965) H. 6.
3. Arnold K. Schoeps D.: Zur Genauigkeit von Verfahren der Satellitengeodäsie. Gerl. Beitr. Geophysik 73 (1964) H. 4.
4. Arnold K. Schoeps D.: Die Bestimmung des Azimuts Potsdam — Bukarest aus Beobachtungen des Satelliten Echo I. Veröff. d. Geod. Inst. Potsdam, Nr. 29 (1965).
5. Deker H.: Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodäsie. DGK, Rh. C/III München 1967.
6. Heiskanen W.: On the World Geodetic System. Veröff. d. Finn. Geodät. Inst., Helsinki, Nr. 39 (1951).
7. Lambeck K.: Optimum Station-Satellite Configurations for Simultaneous Observations to Satellites. SAO Special Report No. 231 (1966).
8. Lundquist C. A.: Veis G. Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth. Vol. 1, 2, 3, SAO Special Report No. 200 (1966).

9. NKGG d. DDR bei der Dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin, ed. Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten. Nr. 3 Berlin 1964.

10. Polnische Akad. d. Wissenschaften, ed. Beobachtungen Künstlicher Erdsatelliten. Nr. 2, Warschau 1963.

11. Popovici C. Dinescu A.: Direct Method for the Determinations of Space Directions and the Adjustment of a Satellite Triangulation Net. Space Research 7, Vol. 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967.

12. Réseau géodésique européen par observation de Satellites. Symposium de Paris, ed. Centre National d'Etudes Spatiales, Institut Géographique National 1964.

13. Rinner K.: Systematic Investigations of Geodetic Networks in Space. Annu. Tech. Rep., Graz, 1967.

14. Schoeps D.: Fehlertheoretische Untersuchungen zur kosmischen Triangulation. Arbeiten aus dem Geod. Inst. Potsdam Nr. 26 (1969).

15. Väisälä Y. Oterma L.: Anwendung der astronomischen Triangulationsmethode. Veröff. d. Finn. Geod. Inst., Helsinki, Nr. 53 (1960).

16. Veis, G.: Geodetic Uses of Artificial Satellites. Smithsonian Contributions to Astrophysics, Washington, 3 (1960) No. 9.

(Русский перевод: Г. Вейс. «Геодезическое использование искусственных спутников», М., «Недра», 1967.

9. ДИНАМИЧЕСКАЯ СПУТНИКОВАЯ ГЕОДЕЗИЯ* (ОРБИТАЛЬНЫЙ МЕТОД)

9.1. ВВЕДЕНИЕ

Методами геометрической спутниковой геодезии определяют только относительное положение станций. Сети геометрической спутниковой геодезии должны развиваться на поверхности Земли путем последовательных построений. Они не относятся к центру масс Земли. Полученные с помощью геометрических методов координаты следует рассматривать только как относительные величины, которые относятся к исходному пункту системы. Их нельзя считать абсолютными координатами, началом которых является центр масс Земли.

Динамическая спутниковая геодезия открывает много возможностей. Она позволяет определить координаты станций наблюдений как абсолютные величины, отнесенные к центру масс Земли, в системе X, Y, Z, а также определить параметры гравитационного поля Земли. Кроме того, она дает возможность получить точные элементы орбиты спутников.

Основное уравнение (162) можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{R}_z(-\theta)\, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{R}_z(-\theta)\, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}|}, \tag{208}$$

где $\boldsymbol{u}$ — три координаты станций наблюдений X, Y, Z в системе, жестко связанной с Землей (относительно среднего полюса);

x'' — положение спутника в пространстве, зависящее от оскулирующих элементов орбиты a, e, ω, i, Ω, M, причем для упрощения здесь опущен индекс S.

$$x = x''(a,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ M). \tag{209}$$

В (208) $\boldsymbol{S}$ — матрица движения полюса, $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, полученный из наблюдений.

В динамической спутниковой геодезии оскулирующие элементы орбиты раскладывают на постоянную часть, относящуюся к начальной точке орбиты (a_0, e_0, ω_0, i_0, Ω_0, M_0), и на изменяющуюся со временем часть, определяемую возмущениями, которые могут быть

---

* Понятия динамический метод и орбитальный метод автор использует как тождественные. — Прим. перев.

выражены через параметры гравитационного поля $C_{n.m}$, $S_{n.m}$, если не учитывать другие источники возмущений

$$a = a(a_0;\ C_{n\cdot m},\ S_{n\cdot m}),$$
$$e = e(e_0;\ C_{n\cdot m},\ S_{n\cdot m}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Затем для геоцентрического вектора положения спутника получаем выражение

$$x'' = x''(a_0,\ e_0,\ \omega_0,\ i_0,\ \Omega_0,\ M_0;\ C_{n\cdot m},\ S_{n\cdot m}). \qquad (209, a)$$

Из решения уравнений вида (208) в результате уравнивания можно определить все параметры, содержащиеся в x'' и u. Если составляющие u, т. е. координаты станций X, Y, Z — неизвестные величины, то из других наблюдений необходимо определить масштаб методом, который будет описан ниже.

По сравнению с задачами геометрической спутниковой геодезии эти задачи решаются труднее, потому что по (208) следует определять координаты станций наблюдения, элементы орбиты и параметры гравитационного поля только совместно, т. е. задача решается комплексно.

В связи с этим рассмотрим сначала специальные части проблемы, которые решить легче, потому что при этом влияние возмущений, обусловленных некоторыми неизвестными параметрами так мало́, что ими можно будет пренебречь.

9.2. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

Специальной проблемой является определение зональных гармоник J_n гравитационного поля Земли

$$V = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right], \qquad (210)$$

$$J_n = -\sqrt{2n+1}\,\bar{C}_{n\cdot 0}.$$

В этих формулах учитываются только вековые и долгопериодические члены в возмущениях орбиты спутника, которые вызываются гравитационным полем Земли при интегрировании в течение продолжительных промежутков времени (до трех месяцев). При этом не обязательна наивысшая точность наблюдений $\pm 2''$ и не нужны десять или более распределенных по всей Земле станций наблюдений. Кроме того, можно обойтись приближенными значениями координат станций, так что их не следует рассматривать как неизвестные, которые необходимо определить в процессе уравнивания. Также пренебрегают зависящими от долготы членами в выражении для потенциала гравитационного поля Земли; т. е. тессеральными и секториальными гармониками, потому что они вызывают в элементах орбиты только короткопериодические возмущения, меньшие 150 м, которые не могут накапливаться при интегрировании за продолжительные промежутки времени.

Отдельные тессеральные и секториальные гармоники вызывают долгопериодические возмущения с амплитудой более чем 100 м. Речь идет об эффекте резонанса. При определении зональных гармоник резонансами раньше пренебрегали, но в последнее время их обычно принимают во внимание.

Сначала элементы орбиты представим выражением вида (168). Вековые и долгопериодические возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}}\ldots$ и $\delta\Omega_{\mathrm{LGZ}}\ldots$, вызванные зональными гармониками, и короткопериодические возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{KG}\,2}\ldots$, вызванные зональными гармониками второго порядка, можно представить в линейном виде через J_n уравнения (210) (возмущения в долготе восходящего узла Ω приведены здесь символически, аналогично выразятся возмущения во всех шести элементах орбиты). В уравнениях (64)—(69) представлены члены, вызывающие вековые и долгопериодические возмущения шести элементов орбиты e, i, Ω, ω, M, p за один оборот спутника (аномалистический период). Интегрируя по времени, как в (71), легко получить возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}} + \delta\Omega_{\mathrm{LGZ}} = \Delta\Omega$, которые можно подставить в уравнение (168). Полученные, таким образом, выражения являются необходимыми для уравнивания при линейном представлении элементов орбиты как функций неизвестных задачи.

В случае необходимости можно присоединить также возмущения второго порядка, вызываемые второй зональной гармоникой, при которых стоит коэффициент J_2^2. J_2^2 всегда можно определить с достаточной точностью à priori по приближенному значению J_2, так что неизвестное J_2 появляется в задаче только как линейная величина.

Короткопериодические возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{KG}\,2}\ldots$, вызванные второй зональной гармоникой, получают с помощью уравнений (75).

При определении зональных гармоник значение J_2 в уравнении (75) можно заменить приближенным значением. Далее можно ввести величину $\delta\Omega_{\mathrm{KG}\,2}$, которая может быть предвычислена достаточно точно при условии, что J_2 безошибочно.

Гармоника J_2 оказывает решающее влияние на элементы орбиты, вызывая вековые возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{SGZ}}$, $\delta\omega_{\mathrm{SGZ}}$, δM_{SGZ}.

Подобным образом, с достаточной точностью необходимо предвычислить гравитационное действие $\delta M_{\mathrm{MS}}\ldots$ Солнца и Луны, так как эти выражения также содержат вековые возмущения в долготе восходящего узла и в аргументе перигея.

При определении только зональных гармоник не следует точно учитывать возмущающее влияние, вызванное притяжением Солнца и Луны, как это было сделано в гл. 4, когда было введено четырехчленное выражение (87) для возмущающего потенциала Луны. Здесь можно ограничиться вековыми возмущениями, вызванными притяжением Солнца и Луны.

По Козаи, вековое изменение долготы восходящего узла, вызванное притяжением Солнца и Луны, равно

$$\delta\Omega_{\mathrm{MS\ sakular}} = -\Psi \cos i \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) t,$$

где

$$\Psi = \frac{3}{4} \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left[n_{\odot}^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon\right) + \right.$$

$$\left. + n_{☾}^2 m_{☾} \left\{1 - \frac{3}{4} \sin^2 I \,(1 + \cos^2 \varepsilon) - \frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon \cos^2 I \right\}\right].$$

Здесь n, $n_{\odot}$, $n_{☾}$ — средние движения спутника, Солнца и Луны, $m_{☾}$ — масса Луны, отнесенная к массе Земли, ε — наклон эклиптики и $I \cong 5°$ — наклон лунной орбиты к эклиптике.

Если n имеет размерность $[°/d]$, то

$$\Psi = \frac{1{,}762}{n\sqrt{1-e^2}}.$$

Для векового движения аргумента перигея * аналогично получим

$$\delta\omega_{\mathrm{MS\ sakular}} = \frac{1}{2} \Psi \left(-1 + 5\cos^2 i + e^2\right) t.$$

Вековые возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{SA}}$ из-за сопротивления атмосферы при определении зональных гармоник следует учитывать довольно точно. В четвертой главе были выведены возмущения орбиты, вызываемые сопротивлением атмосферы. С помощью этой теории можно было бы определить вековые и короткопериодические возмущения $\delta\Omega_{\mathrm{SA}} + \delta\Omega_{\mathrm{PA}}$ в уравнении (168) при плотности атмосферы ϑ. При определении зональных гармоник короткопериодическими возмущениями, вызванными сопротивлением атмосферы, можно пренебречь

$$\delta\Omega_{\mathrm{PA}} \cong 0.$$

В большинстве случаев при определении зональных гармоник обходятся для представления вековых возмущений, обусловленных сопротивлением атмосферы, более простыми выражениями, которые представлены в гл. 4 уравнениями (90) — (95).

Наконец, элементы орбиты, введенные при вычислении зональных гармоник с помощью уравнения (168), должны быть редуцированы за влияние светового давления $\delta\Omega_{\mathrm{RS}}$ ... . Соответствующая формула (101) приводится в гл. 4. Эту формулу в данном случае можно упростить, так как следует принимать во внимание только вековые и догопериодические части возмущений.

При определении зональных гармоник пренебрегаем влиянием тессеральных и секториальных гармоник на элементы орбиты, например, $\delta\Omega_{\mathrm{GR}}$ в уравнении (168), так как их доля сравнительно мала и имеет короткопериодический характер. Поэтому зональные

* Другие элементы орбиты не имеют вековых возмущений, вызванных притяжением Солнца и Луны.

гармоники можно хорошо отделить от тессеральных и секториальных гармоник и определять независимо от них.

Исключение составляют только резонансные эффекты некоторых тессеральных и секториальных гармоник высшего порядка, о которых будем говорить дальше и которые могут вызывать также большие долгопериодические возмущения.

При определении зональных гармоник вначале пренебрегают резонансными явлениями, чтобы позднее выделить их влияние при определении тессеральных и секториальных гармоник и чтобы затем, в случае необходимости, ввести их в порядке приближения в новое определение зональных гармоник.

Вычисление J_n можно проводить двумя путями, которые мы здесь приводим.

Первый состоит в том, чтобы представить наблюдения как линейные функции соответствующей зональной гармоники. Этого можно достичь, следуя тем же принципам, как при определении элементов орбиты в гл. 7.

Для элементов орбиты, включая их вековые изменения, согласно сказанному выше, имеем

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega + \bar{\Omega}(t) + \sum_{n=2}^{n^*} \Omega_n^* J_n, \tag{211}$$

если это касается, например, долготы восходящего узла. Для других элементов орбиты действительны аналогичные уравнения, Ω_0 — известная постоянная, $\Delta\Omega$ — неизвестное постоянное дифференциальное изменение долготы восходящего узла, $\bar{\Omega}(t)$ — известная функция времени, которая обусловлена влиянием сопротивления атмосферы, световым давлением Солнца и притяжением Солнца и Луны.

Наблюдаемые прямое восхождение и склонение спутника или наблюдаемое расстояние до него s, или наблюдаемую производную от расстояния по времени (Допплер) $\dot{s}$ выражают через элементы орбиты, линеаризуют выражения с неизвестными $\Delta\Omega$, J_n ($n = 2, 3, \ldots, n^*$) и получают затем уравнения ошибок в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= -l_\alpha + \alpha_a \Delta a + \alpha_e \Delta_e + \ldots + \alpha_M \cdot \Delta M + \sum_{n=2}^{n^*} \Gamma'_n J_n \\ v_\delta &= -l_\delta + \delta_a \Delta a + \delta_e \Delta_e + \ldots + \delta_M \cdot \Delta M + \sum_{n=2}^{n^*} \Gamma''_n J_n \\ v_s &= -l_s + s_a \Delta a + s_e \Delta_e + \ldots + s_M \cdot \Delta M + \sum_{n=2}^{n^*} \Gamma'''_n J_n \end{aligned}\right\}. \tag{212}$$

Аналогичное уравнение можно было бы записать для допплеровских наблюдений.

Уравнивание, наряду с величинами Δa, Δe, ..., ΔM, которые можно вычислить для каждой дуги орбиты, дает искомые неизвестные J_n, которые содержатся в уравнениях для всех дуг орбиты.

Коэффициенты Γ'_n, Γ''_n, Γ'''_n уравнения (212) зависят от элементов орбиты

$$\Gamma'_n(a,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ M).$$

Чтобы хорошо разделить неизвестные J_n при решении нормальных уравнений, рекомендуется иметь не только несколько станций наблюдений, расположенных на разных географических широтах, но и использовать также несколько спутников с различными параметрами орбит. Кроме того, нельзя, чтобы дуги орбиты были слишком короткими, так как долгопериодические возмущения имеют период, равный времени обращения линии апсид, и этот период должен перекрываться дугами орбиты. Этот период у спутников «Авангард» составляет примерно 80 суток, у спутников, наклон орбиток которых близок к критическому значению $i = 65°$, —400 или 500 суток.

Определить J_n можно другим путем, подставляя при вычислении x'' в (208) для элементов орбиты не выражение вида (211), которое представляет собой разложение по J_n, а придавая выражению

$$\sum_{n=2}^{n^*} \Omega_n^* J_n$$

структуру, которая определяется зависимостью коэффициентов $\Omega_n{}^*$ от времени. Указанные коэффициенты состоят из членов, которые изменяются линейно со временем и содержат также косинусы и синусы от ω, 2ω, 3ω, ..., причем ω также изменяется со временем линейно.

Таким путем сначала вычисляют средние элементы орбиты спутника для сравнительно коротких дуг орбиты на отрезке времени примерно в 10 суток. Короткопериодические возмущения исключаются, согласно изложенному в гл. 7. Для средней точки данного отрезка дуги орбиты счетная машина выдает элементы орбиты ω, Ω, i, e, ... Этот прием повторяется с интервалом в вдвое суток. Таким образом, получаем список, содержащий средние элементы орбиты через равноотстоящие моменты времени, затем исключаем влияние сопротивления атмосферы, светового давления Солнца и притяжения Солнца и Луны.

Используя полученные, таким образом, элементы орбиты, по способу наименьших квадратов определяем аппроксимирующие выражения следующей формы:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \dot{\omega} t + A_\omega \cos\omega \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega} t + A_\Omega \cos\omega \\ i &= i_0 + A_i \sin\omega \\ e &= e_0 + A_e \sin\omega \end{aligned}\right\}, \qquad (213)$$

пренебрегая членами с высокими степенями e. Уравнения (213) можно расширить, включив члены с $\cos 2\omega$ и $\sin 2\omega$. Полученные, таким образом, коэффициенты уравнений (213) являются, согласно изложенному выше, линейными функциями неизвестных J_n, которые можно определить, зная эти коэффициенты.

Для спутников с очень малым эксцентриситетом ($e < 0{,}02$) Козаи заменил два элемента орбиты e и ω выражениями

$$e \sin\omega = e_0 \sin(\omega_0 + \omega^{\cdot} t) + A_e,$$

$$e \cos\omega = e_0 \cos(\omega_0 + \omega^{\cdot} t).$$

Четные зональные гармоники получаются по формулам (64)—(69) с помощью вековых изменений $\omega^{\cdot}$, $\Omega^{\cdot}$. Нечетные зональные гармоники получаем, используя коэффициенты A_ω, A_Ω, A_i, A_e

$$\omega^{\cdot} = \omega^{\cdot}(J_2, J_4, \ldots), \quad \Omega^{\cdot} = \Omega^{\cdot}(J_2, J_4, \ldots),$$

$$A_\omega = A_\omega(J_3, J_5, \ldots), \quad A_\Omega = A_\Omega(J_3, J_5 \ldots),$$

$$A_i = A_i(J_3, J_5, \ldots), \quad A_e = A_e(J_3, J_5, \ldots).$$

9.3. ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИК ПО КОЗАИ

Козаи определил [26] зональные гармоники от J_2 до J_{14} из фотографических наблюдений девяти спутников. Наклоны i их орбитальных плоскостей заключались между 28 и 95°, параметры орбит a

Таблица 6

Спутники		a	i	e	J_2^2 на $\omega^{\cdot}$
«Авангард-2»	59 α 1	1,30	32°,8	0,16	$2{,}04^{\circ} \cdot 10^{-3}$
«Авангард-3»	59 η 1	1,33	33,4	0,19	1,91
«Эхо-1» (ракета)	60 ι 2	1,25	47,2	0,01	2,02
«Эксплорер-11»	61 ν 1	1,18	28,8	0,09	2,77
«Транзит 4А»	61 0 1	1,15	66,8	0,01	−0,87
«Мидас-2»	61 αδ 1	1,57	95,9	0,01	−0,77
«Телстар-1»	62 αε 1	1,52	44,8	0,24	1,01
«Анна-1В»	62 βμ 1	1,18	50,1	0,01	2,48
«Реле-1»	62 βν 1	1,69	47,5	0,28	0,58

Спутники	☉+☾ на $\omega^{\cdot}$	J_2^2 на $\Omega^{\cdot}$	☉+☾ на $\Omega^{\cdot}$	A/M
«Авангард-2»	$0{,}55^{\circ} \cdot 10^{-3}$	$0{,}305^{\circ} \cdot 10^{-3}$	$-0{,}378 \cdot 10^{-3}$	0,21
«Авангард-3»	0,57	0,223	−0,395	0,27
«Эхо-1» (ракета)	0,26	−0,705	−0,272	0,21
«Эксплорер-11»	0,52	1,092	−0,327	0,15
«Транзит 4А»	−0,04	−1,875	−0,139	0,08
«Мидас-2»	−0,27	0,114	+0,058	0,06
«Телстар-1»	0,44	−0,286	−0,427	0,08
«Анна-1В»	0,19	−1,209	−0,235	0,07
«Реле-1»	0,45	−0,227	−0,497	0,08

и e были также различны, поэтому неизвестные J_n разделялись сравнительно хорошо.

В табл. 6 приведены использованные Козаи спутники. В этой таблице даны: значения a (в единицах земного радиуса), i, e, а также влияние вековых возмущений второго порядка (J_2^2) и вековых возмущений от Солнца и Луны на элементы орбиты ω и Ω (таблица содержит изменения этих элементов за сутки). Кроме того, там даются отношения A/M, необходимые для вычисления сопротивления атмосферы (система CGS) (площадь поперечного сечения/масса спутника).

Коэффициенты уравнений (213), например, для спутника 1962 $\alpha\varepsilon$ 7 октября 1962 г. оказались следующими:

$$n = 3285{,}400^\circ; \quad i_0 = 44{,}79953^\circ \pm 6; \quad e = 0{,}242241 \pm 1;$$

$$\dot\omega - 1{,}986171^\circ \pm 8; \quad \dot\Omega = -1{,}858849^\circ \pm 4;$$

$$A_e = 0{,}5461 \cdot 10^{-3} \pm 16;$$

$$A_i = -0{,}761^\circ \cdot 10^{-2} \pm 9; \quad A_\omega = 0{,}1117^\circ \pm 5; \quad A_\Omega = 0{,}0176^\circ \pm 3$$

По новым вычислениям Козаи [28] получил следующие значения

$$\left.\begin{aligned}
J_2 &= 1082{,}639 \cdot 10^{-6},\\
J_3 &= -2{,}565\ 10^{-6},\\
J_4 &= -1{,}608 \cdot 10^{-6},\\
J_5 &= -0{,}174 \cdot 10^{-6},\\
J_6 &= 0{,}542 \cdot 10^{-6},\\
J_7 &= -0{,}419 \cdot 10^{-6},\\
J_8 &= -0{,}128 \cdot 10^{-6},\\
J_9 &= -0{,}022 \cdot 10^{-6},\\
J_{10} &= -0{,}338 \cdot 10^{-6},\\
J_{11} &= 0{,}176 \cdot 10^{-6},\\
J_{12} &= 0{,}053 \cdot 10^{-6},\\
J_{13} &= -0{,}146 \cdot 10^{-6},\\
J_{14} &= -0{,}174 \cdot 10^{-6},\\
J_{15} &= -0{,}065 \cdot 10^{-6},\\
J_{16} &= 0{,}449 \cdot 10^{-6},\\
J_{17} &= -0{,}052 \cdot 10^{-6},\\
J_{18} &= -0{,}324 \cdot 10^{-6},\\
J_{19} &= -0{,}075 \cdot 10^{-6},\\
J_{20} &= 0{,}336 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}\right\} \qquad (213, a)$$

Эти числа характеризуют только часть поля силы тяжести Земли, зависящую от географической широты. Если подставить эти значения $J_2, \ldots, J_{14}$ в (210) и вычислить по (225, *а*) превышения геоида над общим земным эллипсоидом с сжатием $f = 1 : 298{,}252$ (f получается по J_2, что будет показано ниже), то получится кривая ондуляции геоида N, представленная на рис. 39 плавной линией.

Зональные гармоники определяли также Бухар, Жонголович и Кинг-Хили.

Об определении зональных гармоник из спутниковых наблюдений можно в заключение сказать следующее.

Большое значение имеет то, что зональные гармоники можно с сравнительно высокой точностью определять отдельно от тессеральных и секториальных гармоник. Третья зональная гармоника J_3 преобладает над другими гармониками более высокого порядка J_4, J_5, ... Точность определенных таким образом значений зональных гармоник очень высока, так что при определении тессеральных и секториальных гармоник их можно считать безошибочными величинами.

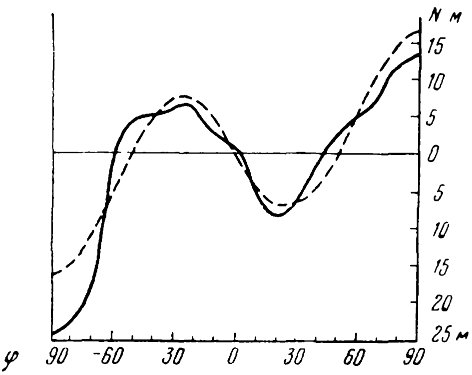


Рис. 39. Доля зональных сферических функций в ондуляциях геоида (по Козаи): – – – доля J_3, ——— все зональные гармоники

Конечно, ряд J_n, введенный в уравнение (211), нельзя расширять бесконечно. Например, если прервать ряд при $n = 14$ и положить $J_{15} = J_{16} = \ldots = 0$, то такая аппроксимация будет влиять прежде всего на последние члены ряда J_2, $J_3, \ldots, J_{14}$, при этом влияние гармоник $J_{15}, J_{16}, \ldots$ не будет отделено от $J_2, J_3, \ldots, J_{14}$.

9.4. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕССЕРАЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

Определение параметров гравитационного поля, зависящих от долготы, т. е. тессеральных и секториальных гармоник, значительно труднее, чем определение зональных гармоник, так как в этом случае появляются возмущения, периоды которых относительно коротки и составляют часто лишь доли оборота спутника, а амплитуды редко превышают 150 м. В этом случае следует пространственные координаты станций наблюдений вводить как неизвестные величины. Преимущество заключается в том, что эти координаты станции можно определить в абсолютной системе координат, относящейся к центру масс Земли. Это не менее важно, чем определение параметров гравитационного поля. Вместе с тем возникают значительные осложнения из-за того, что в динамической спутниковой геодезии неизвестные параметры гравитационного поля и неизвестные координаты станций входят в систему всегда вместе, так что их можно найти только путем решения этой общей системы.

Кроме того, в этом случае нужно выполнить редуцирование в соответствии с уравнением (168), учитывая все возмущения, действующие на орбиты спутников, величины которых превышают 10 м. Особенно точно следует определить возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы. Это относится также к влиянию светового давления Солнца и гравитационному действию Солнца и Луны. Для того чтобы уменьшить возмущения из-за сопротивления атмосферы и из-за светового давления Солнца и чтобы суметь лучше определить эти возмущения, в динамической спутниковой геодезии используют спутники со сравнительно малой поверхностью и большой массой, т. е. спутники со стабильной, мало возмущенной из-за сопротивления атмосферы орбитой. Спутники-баллоны для этого совершенно не пригодны.

Отношение — поперечное сечение/масса для некоторых спутников, часто применяющихся в динамической спутниковой геодезии, имеет следующие значения: «Телстар-1»: 0,0075 (м²/кг), «Транзит» 1963 — 49В : 0,0090 (м²/кг), см. также табл. 6.

Возмущения, обусловленные тессеральными и секториальными гармониками, т. е. выражения $\delta\Omega_{GR}$ ... и т. д. в уравнении (168), должны быть представлены в виде линейных разложений по неизвестным параметрам гравитационного поля C_{lm}, S_{lm} с помощью формул (47) и (56). Для этой цели следует разложить выражение (55) для возмущающего потенциала по элементам орбиты (56), подставить полученное выражение в уравнения Лагранжа (40), проинтегрировать по времени (58); в результате получим возмущения орбиты, вызванные тессеральными и секториальными гармониками.

Таким образом, по (168) получим долготу восходящего узла, а именно ее значение, соответствующее оскулирующей орбите. Аналогичные уравнения получаем для других пяти элементов орбиты. Используя оскулирующие элементы орбиты, определяем пространственное положение спутника x'' и подставляем это значение в уравнение (208).

Вектор u выражаем через координаты станции наблюдения. Величину x'' представляем в виде линейного разложения по неизвестным параметрам гравитационного поля C_{lm}, S_{lm} и по коэффициентам, которые постоянны в выражении для элементов орбиты (168) или изменяются со временем по линейному или квадратичному закону. В формуле (168) это коэффициенты Ω_0, Ω_1, Ω_2 для вычисления долготы восходящего узла. Для других элементов орбиты имеют место аналогичные выражения.

Итак, для каждой дуги орбиты имеем одни и те же неизвестные параметры гравитационного поля C_{lm}, S_{lm}. Кроме того, для каждой дуги имеем еще дополнительно $3 \cdot 6 = 18$ неизвестных коэффициентов в выражениях для элементов орбиты, которые следует также определять путем уравнивания и которые достигают при большом числе орбитальных дуг значительного количества. Однако эти коэффициенты не имеют значения непосредственно для определения параметров гравитационного поля, так что их исключают из рассмотрения как можно раньше.

Далее для пространственных координат станций наблюдений вводят их приближенные значения и выражение для u линеаризуют, вводя малые дифференциальные поправки.

Наблюдаемый вектор a вычисляют по наблюдаемым прямому восхождению и склонению α, δ, как это делалось при определении средних элементов орбиты с использованием уравнений (167), (172) (173).

Линеаризуя уравнение (208), получаем с помощью (168) уравнение ошибок динамической спутниковой геодезии, где коэффициенты $\varkappa$, γ, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ — частные производные, которые можно вычислить с помощью электронно-вычислительной машины как отношения дифференциалов:

$$v = -l + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{1j}\delta a_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{2j}\delta e_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{3j}\delta\omega_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{4j}\delta i_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{5j}\delta\Omega_j + \\ + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{6j}\delta M_j + \sum_{l}\sum_{m} (\gamma_{lm}^{c} C_{lm} + \gamma_{lm} S_{lm}) + \bar{\xi}\,\Delta X + \bar{\eta}\,\Delta Y + \bar{\zeta}\,\Delta Z. \quad (214)$$

В (214) v — случайная ошибка наблюдений. При измерениях направлений здесь появляются ошибки прямого восхождения v_α (или $\cos\delta \cdot v_\alpha$) и склонения v_δ.

При измерениях расстояний, как и в уравнении (176), появляется v_s.

При допплеровских наблюдениях появляется $v_{\Delta f}$, как уже было показано в уравнении (177).

Свободный член l уравнения (214) получается так же, как и в уравнениях (173), (176), как разность величины, вычисленной по приближенным значениям, и значения, полученного из наблюдений.

Дифференциальные изменения δa_j, δe_j, ..., $\delta\Omega_j$, ..., коэффициентов a_j, e_j, ... Ω_j, ... в разложении (168) для элементов орбиты меняются от орбиты к орбите. Координаты станции наблюдения изменятся, если введем наблюдения с другой станции. Неизвестные параметры гравитационного поля появляются одинаково во всех уравнениях ошибок.

В то время как при допплеровских наблюдениях и при измерениях расстояний до спутника получают из наблюдений только одну величину, при наблюдениях направлений появляются одновременно две случайные величины v_α и v_δ. Обе эти величины в большей или меньшей степени коррелированы друг с другом. На это обстоятельство было указано раньше, при описании синхронных наблюдений с двух станций (188), (189).

Если в динамической спутниковой геодезии хотят учесть эту корреляцию, чтобы применить более строгий способ уравнивания, то следует v_α и v_δ заменить с помощью (189) на v_l и v_q. Как показал опыт, такая подстановка в динамической спутниковой геодезии практически приносит мало пользы.

9.5. РЕЗОНАНСЫ

В рассматриваемом орбитальном методе динамической спутниковой геодезии нельзя недооценивать осложнения, вызываемого появлением малых знаменателей в выражениях, которые встречаются при аналитическом представлении коэффициентов γ_{lm}^c и γ_{lm}^s уравнения (214). Эти малые знаменатели могут появиться только при определенных условиях. Они зависят от периода обращения спутника, от скорости вращения Земли и от параметров l, m, коэффициентов C_{lm} и S_{lm}. Речь идет о резонансах.

Резонансный эффект встречается тогда, когда в знаменателе выражения (58) стоит малое числовое значение. Тогда в возмущениях орбиты появляются долгопериодические члены, вызванные совершенно определенными гармониками C_{lm} S_{lm} и достигающие сравнительно большой амплитуды, примерно 100 м, в то время как обычно, если знаменатель в (58) имеет достаточно большую величину, эти члены будут значительно меньше.

Поэтому при орбитальном методе для некоторых орбит спутников и для разных гармоник высшего порядка следует проверить знаменатель в выражении (58), причем нельзя пренебречь всеми возмущениями, вызванными этими гармониками, если резонансные эффекты достигают более 5 или 10 м.

В выражении для возмущений средней аномалии M в соответствии с уравнением (44) упомянутый малый знаменатель встречается в квадрате при двойном интегрировании. В этом случае возникает особенно сильный резонансный эффект.

9.6. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕССЕРАЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

После составления уравнений ошибок следует решить нормальные уравнения, применяя преобразования Гаусса. Уравнения ошибок имеют следующую структуру:

$$v = \bar{B}b + \bar{X}u + \bar{G}g - \bar{l}. \tag{215}$$

Тогда нормальные уравнения будут

$$B^*b + X^*u + G^*g - l^* = 0, \tag{216}$$

где b — вектор-столбец коэффициентов при постоянных или при изменяющихся со временем по линейному или квадратичному закону членах в выражениях для элементов орбиты (168) или при величинах

δa_j, δe_j, ..., δM_j в уравнении (214), $\boldsymbol{u}$ — вектор-столбец координат станции или их дифференциалов ΔX, ΔY, ΔZ в уравнении (214), $\boldsymbol{g}$ — вектор-столбец постоянных Стокса C_{lm}, S_{lm}, т. е. неизвестных коэффициентов разложения гравитационного поля по сферическим функциям.

В нормальных уравнениях исключим сначала вектор-столбец $\boldsymbol{b}$. В разных орбитальных дугах, введенных в уравнивание, представлены разные наблюдения, так что эти дуги статистически независимы друг от друга. Поэтому в каждой строке уравнения (216) появляются не все элементы вектора $\boldsymbol{b}$, а представлены лишь элементы (например, $3 \cdot 6 = 18$ по уравнению (214)), относящиеся к данной орбите спутника.

Если в уравнивание ввести 100 дуг, то вектор $\boldsymbol{b}$ будет содержать всего $100 \cdot 3 \cdot 6 = 1800$ элементов. При исключении $\boldsymbol{b}$ следует исключать не все 1800 неизвестных одним приемом, что неосуществимо практически. Матрица $\boldsymbol{B}^*$ будет иметь структуру квазидиагональной матрицы и может быть разделена на 100 независимых друг от друга отдельных систем по $3 \cdot 6 = 18$ элементов, каждая из которых относится к одной из 100 дуг орбиты.

Следовательно, постепенно, один за другим можно исключить 18 элементов вектора $\boldsymbol{b}$, получающихся для отдельных дуг, путем умножения на обратную матрицу, подобно тому, как это делалось в (204), (205).

В дальнейшем предполагается, что вектор $\boldsymbol{b}$ исключен. Таким образом, остаются лишь интересующие нас неизвестные $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{g}$.

Вариант a.

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{l} = 0. \qquad (217)$$

Если выполнили фотографические наблюдения спутника и вычислили по ним, например, 100 дуг, если в наблюдениях участвовали 12—15 станций, а гравитационное поле было представлено гармониками до восьмого порядка с одновременным учетом некоторых гармоник высшего порядка, вызывающих описанные выше резонансные эффекты, то обращаются к уравнению (217). Система (217), полученная в результате измерения только направлений, уже сама по себе способна дать определенные значения неизвестных $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{g}$.

Оценка рассеивания наблюдений à priori, т. е. определение внутренней точности наблюдений, важно для дальнейшего сравнения со значениями, полученными à posteriori.

Если использовать много спутников с разными орбитами, то при наблюдениях с двенадцати станций и при представлении поля силы тяжести гармониками до восьмого порядка система (217) будет содержать около 100 неизвестных. Ее можно решить, и результатом решения будут координаты станций $\boldsymbol{u}$ и параметры гравитационного поля $\boldsymbol{g}$. При этом получаем также средние квадратические ошибки этих значений.

Точность этого метода характеризуется средней квадратической ошибкой наблюдений, которая получается à posteriori. Если она окажется значительно больше, чем средняя квадратическая ошибка, полученная à priori, то математическая модель, которая использовалась в уравнении ошибок (215) с неизвестными b, u, g, будет неудовлетворительна. Ее надо будет улучшить, привлекая более высокие гармоники или точнее учитывая возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы, и влияние резонансных эффектов.

Вариант *б*. Если после уравнивания системы (217) произвести дополнительные наблюдения, то не нужно обрабатывать все заново. Если при первых вычислениях получили систему

$$X_1 u + G_1 g - l_1 = 0 \tag{218}$$

и если в последующие годы подобным образом получили по результатам наблюдений новую систему

$$X_2 u + G_2 g - l_2 = 0, \tag{219}$$

то при объединении наблюдений для расчетов, в результате сложения нормальных уравнений получаем следующую систему, которая является строгой:

$$(X_1 + X_2) u + (G_1 + G_2) g - (l_1 + l_2) = 0. \tag{220}$$

Если при первых вычислениях участвуют совершенно другие станции, чем во втором случае, то, исключая координаты станций при первых вычислениях, получаем систему уравнений следующего вида:

$$G_1^\circ g - l_1^\circ = 0. \tag{221}$$

Если во второй новой системе также исключить координаты станций, то аналогично получим

$$G_2^\circ g - l_2^\circ = 0. \tag{222}$$

Системы (221) и (222) можно объединить путем сложения. Сложение обеих систем уравнений приводит к строгому выражению

$$(G_1^\circ + G_2^\circ) g - (l_1^\circ + l_2^\circ) = 0. \tag{223}$$

Из решения уравнений (223) получим неизвестные параметры гравитационного поля. Дальнейшие вычисления дают координаты станций u для обеих частей системы.

Принципиально метод соединения двух систем, полученных с помощью динамической спутниковой геодезии, путем сложения нормальных уравнений в соответствии с уравнениями (218), (219), (220), можно еще обобщить.

Если станции системы в динамической спутниковой геодезии соединены друг с другом также сетью, полученной методами геометрической спутниковой геодезии, то обе системы можно объединить описанным выше способом, путем сложения нормальных уравнений. Это справедливо и тогда, когда часть станций «геометрической» сети лежит вне «динамической» сети.

При этом появляются осложнения, так как математическая модель динамической сети принципиально иная, чем математическая модель геометрической сети. Динамическая сеть характеризуется меньшей степенью приближения и большей остаточной ошибкой или ошибкой модели (примерно $\pm 5''$), потому что действуют остаточные ошибки параметров гравитационного поля.

Напротив, на геометрическую сеть не действуют ошибки параметров гравитационного поля. Ее остаточные ошибки или ошибки модели незначительно больше ошибок, характеризующих внутреннюю точность наблюдений (± 1 — $\pm 2''$).

Если объединить динамическую и геометрическую сети, то вес обеих систем следует очень тщательно определить по остаточным уклонениям, полученным после уравнивания отдельных систем. Это должно предшествовать успешному объединению обеих разнородных систем.

При определении параметров гравитационного поля орбитальным методом получаем уравнения вида (217). В этом случае дополнительные условия из других источников появляются не для координат станций $\boldsymbol{u}$, а для неизвестных параметров гравитационного поля $\boldsymbol{g}$. Так, например, можно потребовать, чтобы полученные из наблюдений спутника выражения для параметров гравитационного поля приводили к значениям аномалий силы тяжести на поверхности Земли, которые бы соответствовали аномалиям силы тяжести, полученным из наземных наблюдений.

Таким образом, для параметров гравитационного поля имеем некоторое количество дополнительных уравнений ошибок вида

$$\boldsymbol{v} = -\bar{\boldsymbol{l}}_2 + \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{g}. \tag{224}$$

Отсюда получаем нормальные уравнения

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{l}_2 = 0. \tag{225}$$

Эту систему можно объединить с системой вида (217) по правилу сложения нормальных уравнений, подобно тому, как это имело место для выражений (218) — (223).

При этом нет необходимости, чтобы $\boldsymbol{g}$ из уравнивания (224), (225) определялось однозначно, т. е. число неизвестных в (224) может быть больше, чем число уравнений ошибок.

Кроме того, если имеем независимые системы оптических, допплеровских и лазерных измерений и если введем также условия, полученные с использованием наземных определений аномалий силы тяжести, то все эти разнородные системы можно строго объединить друг с другом по правилу сложения нормальных уравнений или по правилу сложения редуцированных нормальных уравнений.

Однако следует подчеркнуть, что при разнородных наблюдениях рассеивание результатов наблюдений, вызванное внутренними ошибками наблюдений либо ошибками принятой математической модели, должно быть определено точно, если стремятся, чтобы объединение систем было выполнено успешно. В данном случае уравнивание следует проводить методом приближений с улучшением весов таким образом, чтобы сначала из раздельного уравнивания отдельных систем получить средние квадратические ошибки à posteriori. Эти средние квадратические ошибки à posteriori при объединении систем можно будет вводить в отдельные частные системы, как средние квадратические ошибки à priori. После уравнивания общей системы для отдельных частных систем получим новые остаточные ошибки, с которыми в данном случае следовало бы повторять уравнивание до тех пор, пока это основное уравнивание с достаточным приближением не будет приводить к стабильным результатам.

9.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБА

В динамическом методе спутниковой геодезии особое значение имеет определение масштаба. Только в некоторых исключительных случаях пространственные координаты отдельных станций наблюдения будут настолько точны, что их можно вводить как безошибочные, для того чтобы получить по ним масштаб системы. В большинстве случаев стараются определить эти координаты непосредственно орбитальным методом.

Иногда масштаб можно получить из системы космической триангуляции, масштаб которой определен по описанному в гл. 8 методу, если объединить обе системы путем сложения уравнений.

Особенно важно определение масштаба системы космическим методом, при котором используется знание скорости света. В этом случае отслеживают орбиты лунных зондов радиотехническим методом (допплеровским методом); отслеживая орбиты, можно с очень высокой точностью определить произведение k на массу Земли kM, включая массу атмосферы. Если исключить массу атмосферы, значение которой не превышает 10^{-6}, то получим для произведения массы Земли на гравитационную постоянную следующую величину:

$$kM = 398\,600{,}9 \pm 0{,}7 \text{ км}^3\,\text{сек}^{-2}.$$

Если обратиться к третьему закону Кеплера, уравнение (171), и ввести также среднюю величину среднего движения спутника $\bar{n}^*$, то из третьего закона Кеплера (если пренебречь короткопериодическими возмущениями) получится большая полуось эллиптической орбиты спутника a^*. Это — линейная величина, которая позволяет определить масштаб орбиты спутника и тем самым масштаб всей системы, включая систему координат станций.

Можно было бы разработать третий метод определения масштаба в динамической спутниковой геодезии, используя в орбитальном методе не только наблюдения направлений, но и допплеровские наблюдения по (102, a) или наблюдения расстояний до спутника с помощью лазера или системы Секор. Эти методы имеют ограниченное применение. Если выполнить отдельные измерения расстояний до спутника с точностью ± 1 — ± 3 м, то можно определить весьма точно возмущения орбиты спутника. Однако при получении масштаба надо учитывать, что математическая модель, по которой при орбитальном методе определяют положение спутника в пространстве, имеет вследствие пренебрежения гармониками высшего порядка сравнительно большие остаточные ошибки, примерно $\pm 5''$, что соответствует 20—30 м. Эти ошибки модели действуют в полной мере при сравнении измеренного расстояния с вычисленным для определения масштаба орбиты спутника. При определении масштаба орбиты спутника таким способом получаем довольно большую относительную ошибку порядка $2 \cdot 10^{-5}$. Такая точность масштаба слишком мала. Успех будет обеспечен, если в орбитальном методе использовать много таких измерений растояний.

При синхронных наблюдениях, напротив, отсутствует отрицательное влияние неучтенной части гравитационного поля. При синхронных наблюдениях математическая модель более благоприятна. Поэтому в системах орбитального метода можно получить масштаб с высокой точностью, если, например, на одной станции определять расстояние до спутника с помощью лазера, а с двух соседних станций одновременно наблюдать фотографическим методом направления на спутник. Из таких синхронных наблюдений можно получить масштаб треугольника, образованного тремя станциями, и тем самым всей глобальной системы станций наблюдений с относительной ошибкой, которая примерно совпадает с ошибкой измерений лазером (приблизительно $2 \cdot 10^{-6}$), что соответствует положениям об определении масштаба при космической триангуляции.

9.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОИДА И АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО РАЗЛОЖЕНИЯМ ПОТЕНЦИАЛА

Если из спутниковых наблюдений получено разложение потенциала по сферическим функциям (31), то для геодезии важно вычислить по нему ондуляции геоида N и аномалии силы тяжести (аномалии в свободном воздухе) Δg_F на поверхности Земли.

Ондуляции геоида N получают относительно поверхности эллипсоида со сжатием f, большая полуось которого определяется при условии, что сумма квадратов значений N — минимальна (общий земной эллипсоид).

Потенциал этого эллипсоида на внешнюю точку равен

$$U = \frac{kM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi) - J_4\left(\frac{R_F}{r}\right)^4 P_4(\sin\varphi) + \dots\right],$$

$$J_2 = \frac{2}{3} f\left(1 - \frac{1}{2} f\right) - \frac{1}{3} m\left(1 - \frac{3}{2} m - \frac{2}{7} f\right) + \dots,$$

$$J_4 = -\frac{4}{35} f(7f - 5m) + \dots,$$

$$m = \frac{\omega_E^2 \cdot R_E}{\gamma_E},$$

$$kM = R_E^2 \gamma_E \left[1 - f + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} mf + \ldots \right].$$

Ондуляции геоида определяют затем с помощью (31) по формуле

$$N = \frac{V - U}{G}, \qquad (225, a)$$

где G — среднее значение силы тяжести для всей Земли.

Аномалии в свободном воздухе Δg_F получаются из величин N по формуле Брунса

$$\Delta g_F = -\frac{\partial (V - U)}{\partial r} - \frac{2}{r}(V - U).$$

Таким образом, если вычтем из разложения потенциала V, полученного по спутниковым наблюдениям, «нормальный» потенциал U и разность разделим на G, то получим разложение ондуляций геоида N по сферическим функциям.

Если разложение N по сферическим функциям подставим в формулу Брунса, то получим разложение в ряд для Δg_F.

Если в формулах (226), (236) под $\overline{C}_{lm}$, $\overline{S}_{lm}$ подразумевать коэффициенты в разложении для $V - U$, то эти формулы явятся разложением по сферическим функциям аномалий в свободном воздухе Δg_F.

9.9. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Многие авторы неоднократно применяли орбитальный метод для определения параметров гравитационного поля и координат станций.

9.9.1. Оптические наблюдения

Определенные в 1966 г. Гапошкиным координаты 12 станций, оснащенных камерами Бейкера-Нанна, и геоид считаются лучшими результатами, полученными до сих пор из фотографических наблюдений. Гапошкин применял в основном метод, описанный в варианте *а* (217). При этом он использовал исходные данные, приведенные в табл. 7.

Полученный им геоид показан на рис. 40. Он определяется следующими гармониками (табл. 8).

Гапошкин определил гравитационное поле в виде разложения по сферическим функциям до восьмого порядка. Кроме того, были определены еще сорок гармоник от 9 до 15 порядка (всего 108 гармоник), которые были выведены вместе с координатами станций из наблюдений камерами Бейкера-Нанна. Зональные гармоники были взяты у Козаи как известные значения.

Таблица 7

Спутники	i	e	q, км перигей	Период обращения спутника в сутках	Среднее число наблюдений за сутки	Общее число оборотов спутников	Общее число наблюдений
5900101	33°	.165	557	12	10	37	4950
5900102	33	.183	557	15	7	2	226
5900701	33	.190	515	15	10	27	4011
6100401	39	.119	640	8	25	34	5496
6202901	45	.292	950	16	10	21	3161
6000902	47	.012	1500	14	10	59	8643
6206801	48	.284	1320	16	9	8	931
6302601	50	.061	419	8	7	7	543
6206001	50	.007	1076	11	10	22	2603
6101501	67	.008	870	15	5	24	1889
6101502	67	.008	870	15	5	19	1501
6400101	70	.002	930	10	5	8	709
6102801	95	.011	3500	30	20	19	9102

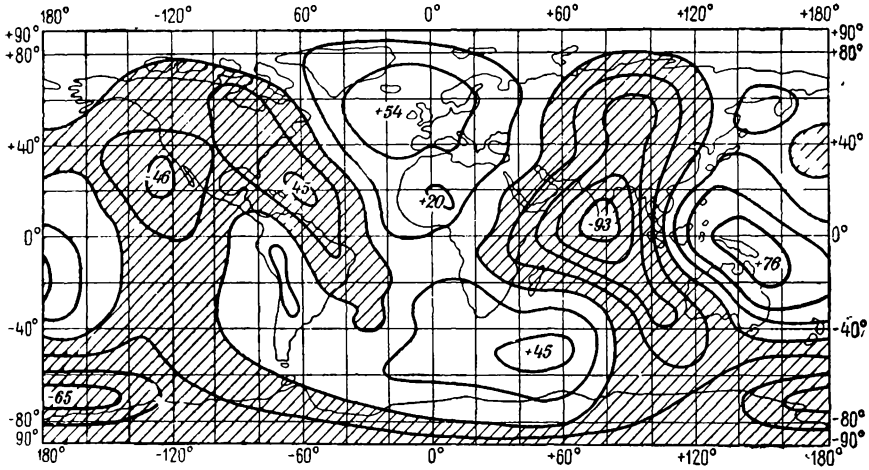


Рис. 40. Ондуляции геоида (в м) из фотографических спутниковых наблюдений по Гапошкину (1966). Смитсонианский институт «Стандартная Земля 1966» (f = 1 : 298, 255)

Результаты Гапошкина получили название «Стандартная Земля 1966».

Точность наблюдений á priori составляла примерно $\pm 2{,}5''$, после уравнивания $\pm 4{,}8''$. При дальнейшем уточнении математической модели можно надеяться на лучшие результаты. Координаты станции были получены с точностью порядка ± 10 м. Векторы направлений между станциями определялись независимо из синхронных

Таблица 8

Гармоники гравитационного поля Земли по Гапошкину
(«Стандартная Земля, 1966»)
Нормированы с помощью уравнений (31), (32)

l	m	$\bar{C}_{lm}\times 10^6$	$\bar{S}_{lm}\times 10^6$	l	m	$\bar{C}_{lm}\times 10^6$	$\bar{S}_{lm}\times 10^6$
2	2	2,379	−1,351	8	1	−0,075	0,065
3	1	1,936	0,266	8	2	0,026	0,039
3	2	0,734	−0 538	8	3	−0,037	0,004
3	3	0,561	1,620	8	4	−0,212	−0,012
4	1	−0,572	−0,469	8	5	−0,053	0,118
4	2	0,330	0,661	8	6	−0,017	0,318
4	3	0,851	−0,190	8	7	−0,0087	0,031
4	4	−0,053	0,230	8	8	−0,248	0,102
5	1	−0,079	−0,103	9	1	0,117	0,012
5	2	0,631	−0,232	9	2	−0,0040	0,035
5	3	−0,520	0,007	10	01	0,105	−0,126
5	4	−0,265	0,064	10	02	−0,105	−0,042
5	5	0,156	−0,592	10	03	−0,065	+0,030
6	1	−0,047	−0,027	10	04	−0,074	−0,111
6	2	0,069	−0,366	11	01	−0,053	+0,015
6	3	−0,054	0,031	12	01	−0,163	−0,071
6	4	−0,044	−0,518	12	02	−0,103	−0,0051
6	5	−0,313	−0,458	12	12	−0,031	0,0008
6	6	−0,040	−0,155	13	12	−0,059	0,050
7	1	0,197	0,156	13	13	−0,059	0,077
7	2	0,364	0,163	14	01	−0.015	0,0053
7	3	0,250	0,018	14	11	0,0002	−0,0001
7	4	−0,152	−0,102	14	12	0,094	−0,028
7	5	0,076	0,054	14	14	−0,014	−0,003
7	6	−0,209	0,063	15	09	−0,0009	−0,018
7	7	0,055	0,096	15	12	−0,0619	0,0578
				15	13	−0,058	−0,046
				15	14	0,0043	−0,0211

наблюдений. Невязки обоих методов составляли примерно $\pm 0{,}7''$, что соответствует ± 14 м на расстоянии 4000 км.

Трудно оценить точность полученного геоида. Ошибки ондуляций геоида, определенного из наблюдений спутников, могли бы в среднем составлять ± 7 м. Если по разложению потенциала вычислить аномалии силы тяжести на поверхности Земли и сравнить их с величинами аномалий, полученных из наземных измерений, то точность полученных из наблюдений спутника средних значений аномалий для площадок размером $20 \times 20°$ составит $\pm 6{,}6$ мгл.

9.9.2. Допплеровские наблюдения

Андерле, Гайер и Ньютон определили координаты станций и геоид из допплеровских наблюдений. Здесь также возникла система в соответствии с вариантом *а* (217).

Использованный Гайером и Ньютоном материал приведен в табл. 9. Полученный этими авторами геоид показан на рис. 41.

Геоид, полученный из допплеровских наблюдений Андерле [1], изображен на рис. 42.

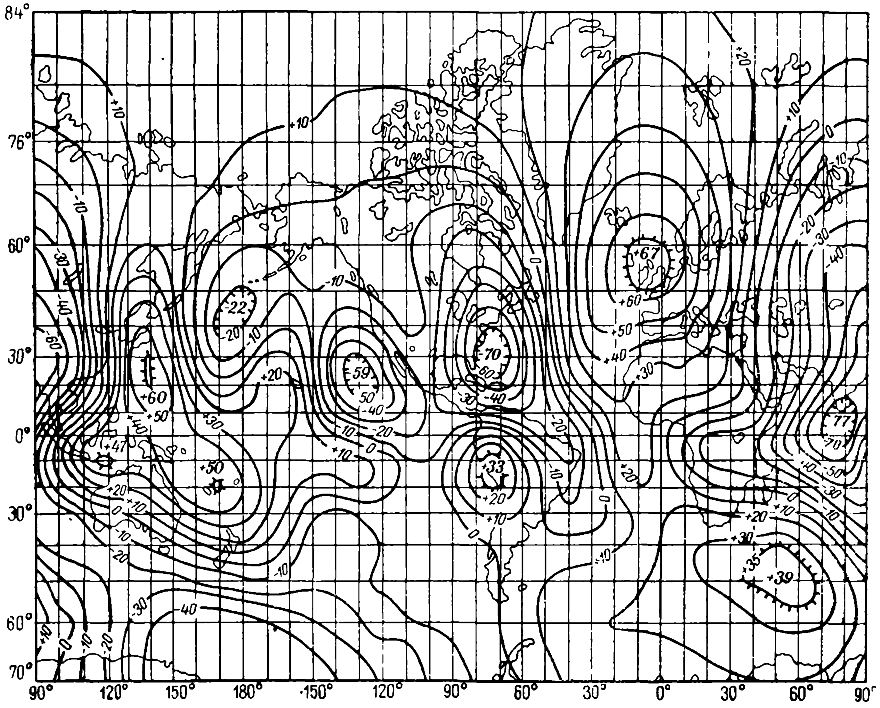


Рис. 41. Ондуляции геоида (в м) из допплеровских наблюдений по Гайеру и Ньютону (1965, $f = 1 : 298{,}255$)

Таблица 9

Спутники	1961 – $\alpha\eta$1	1962 – $\beta\mu$ 2	1961 – 01	1963 – 49 B	1963 – 38 C
a/R_E	1,16166	1,17715	1,14724	1,17145	1,17301
e	0,01034	0,00705	0,00797	0,00360	0,00411
i	32,4264°	50,1268°	66,8018°	89,9555°	89,9080°
Число прохождений при определении незональных гармоник	214	561	237	348	272
Число оборотов спутника при определении незональных гармоник	13	20	11	8	9
Число оборотов спутника при определении зональных гармоник	37	33	40	25	
Остаточные ошибки в метрах	72	66	89	79	79

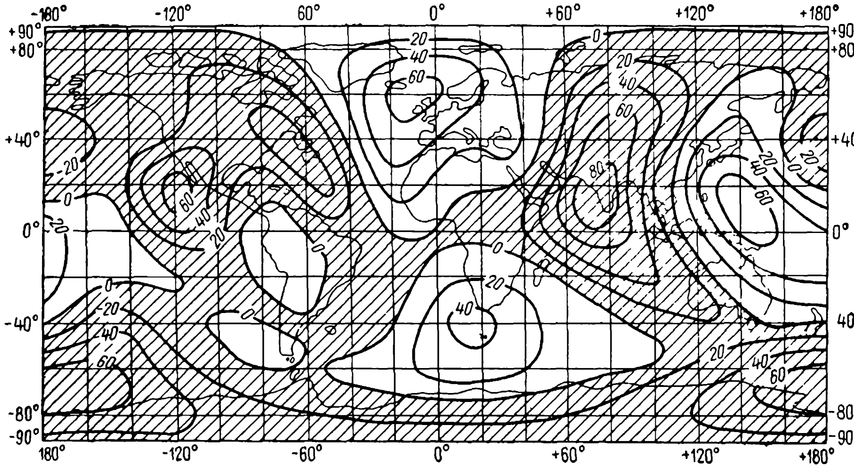


Рис. 42. Ондуляции геоида (в м) из допплеровских наблюдений по Андерли (1966, $f = 1 : 298{,}255$)

9.9.3. Совместное уравнивание спутниковых наблюдений и значений аномалии силы тяжести, полученных из наземных измерений

В 1966 г. Каула [18] опубликовал координаты станций и карту геоида, полученные из уравнивания наблюдений, выполненных камерами Бейкера-Нанна. При этом учитывались высоты геоида, определенные из астрономического нивелирования (рис. 43).

При уравнивании по (224), (225) возникает дополнительное условие, заключающееся в том, что полученные из разложения гравитационного поля средние значения аномалий в свободном воздухе для площадок размером $15 \times 15°$ или $20 \times 20°$ должны совпадать с соответствующими средними значениями аномалий силы тяжести $[\Delta g_F]_q$, полученными из наземных измерений. Если

$$F_q = \int_q\int \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$$

является такой площадкой, то имеет место условное уравнение

$$v = -\left[\Delta g_F\right]_q + V^*_{2\,2} + \sum_{l=3}^{p}\sum_{m=0}^{l} V^*_{lm}, \tag{226}$$

$$V^*_{lm} = (l-1)\frac{kM}{F_q R_E^2}\left[\overline{C}_{lm}\int_q\int \overline{P}_{lm}\cos m\lambda\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \overline{S}_{lm}\int_q\int \overline{P}_{lm}\sin m\lambda\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda\right].$$

$$l = 2, \quad m = 2 \quad l = 3, 4 \ldots, p \quad m = 0, 1, \ldots, l.$$

$\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$ — коэффициенты разложения по сферическим функциям потенциала $V - U$ (истинный потенциал минус нормальный потенциал).

В уравнении (226) v — случайная ошибка, которая слагается из ошибки аномалий силы тяжести, полученных из наземных измерений (аномалии в свободном воздухе) $[\Delta g_F]_q$ и «ошибки модели». Из совокупности уравнений ошибок типа (226) можно составить соответствующие уравнения вида (224), (225), даже если число уравнений (226) меньше, чем число коэффициентов $\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$. Применяя описанный выше прием сложения, после объединения с частной системой, полученной из спутниковых наблюдений, получим основную систему для уравнивания.

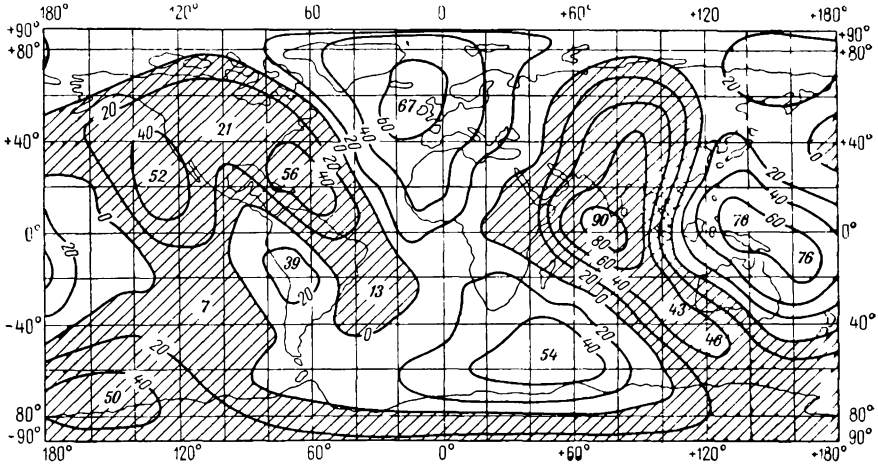


Рис. 43. Ондуляции геоида (в м) из фотографических спутниковых наблюдений и наземных данных по Каула (1966, $f = 1 : 298{,}255$)

В данном случае необходимо преобразовать с помощью уравнения (81, *а*) или (81, *б*) аномалии в свободном воздухе Δg_F в аномалии Δg, что необходимо для использования формул (81).

9.10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В предыдущих главах гравитационное поле Земли было представлено через разложение по сферическим функциям, при этом вновь определяли глобальное гравитационное поле методами спутниковой геодезии, не принимая во внимание, что уже примерно половина поверхности Земли покрыта гравиметрическими и маятниковыми пунктами.

Привлекая условие вида (226), можно, помимо этого, учитывать аномалии силы тяжести, полученные из наземных измерений.

Но можно и заранее представить гравитационное поле через аномалии силы тяжести и считать их неизвестными задачи. Математическое выражение для определения возмущений орбиты в зависимости от аномалий силы тяжести, полученных из наземных измерений, было дано уравнениями (76) — (81).

Следовательно, если при орбитальном методе гравитационное поле Земли представить через аномалии силы тяжести, полученные из наземных измерений, вводя средние значения аномалий для площадок размером $10 \times 10°$, $15 \times 15°$ или $20 \times 20°$, то придем к уравнениям ошибок, которые подобны выражениям (214). Но здесь неизвестные параметры гравитационного поля S_{lm}, C_{lm} заменены средними значениями аномалий силы тяжести $[\Delta g]_q$

$$v = -l + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{1_j} \delta a_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{2_j} \delta e_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{3_j} \delta \omega_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{4_j} \delta i_j + \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{5_j} \delta \Omega_j + $$

$$+ \sum_{j=0}^{3} \varkappa_{6_j} \delta M_j + \sum_{q} \gamma_q [\Delta g]_q + \bar{\xi}\, \Delta X + \bar{\eta}\, \Delta Y + \bar{\zeta}\, \Delta Z. \qquad (227)$$

Коэффициенты γ_q в (227) определяют влияние аномалий силы тяжести на наблюдаемую величину: на прямое восхождение α и склонение δ в случае оптических наблюдений, на расстояние s в случае лазерных наблюдений или измерений с помощью системы Секор или на смещение частоты Δf при допплеровских наблюдениях.

Коэффициенты γ_q получаются в результате использования возмущений, вычисленных по формулам (76) — (81). Пусть $[\Delta g]_q = 10$ мгл фиктивная относительная аномалия. Вычислим по (81) и (82) три компонента возмущающей силы K_1, K_2, K_3, а также путем численного интегрирования (45) возмущения в элементах орбиты, вызванные этой относительной аномалией. По этим возмущениям, вычисляя частные дифференциалов, по формулам (172), (173), (176), (177) находим влияние фиктивной аномалии в 10 мгл на результаты наблюдений. Так получается коэффициент γ_q.

Другими словами, используя формулы (76) — (81) и интегрируя (45) при помощи (83), путем численного интегрирования получаем γ_q.

Здесь можно использовать преимущества аналитического интегрирования; так как при численном интегрировании очень часто нужно вычислять возмущения a, e, . . ., примерно 150 раз за один оборот спутника.

При аналитическом интегрировании могут быть вычислены интегрированные возмущения (δa, δe, . . .) по изменениям элементов орбиты со временем непосредственно из уравнений Лагранжа аналитическим путем. В этом случае возмущения надо вычислять только для моментов наблюдений. Так, δa, δe, . . ., следует вычислять только внутри интервала примерно в несколько часов, при этом экономится время, необходимое для вычислений.

Для аналитического интегрирования в (76), (77) делаем подстановку в соответствии с теоремой сложения сферических функций

(79), заменяем интеграл (76) суммой и для T получаем формулу

$$T = \sum_q T_q,$$

$$T_q = \frac{r}{4\pi} [\Delta g]_q F_q \sum_{l=2} \frac{2l+1}{l-1} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{l+2} P_l (\cos\psi).$$

Подстановкой (79) представляем долю T_q отдельного элемента поверхности F_q в возмущающем потенциале T выражением вида (55), которое можно преобразовать в формулу (56) и представить как функцию от элементов орбиты. Дифференцируя по элементам орбиты, получим для T_q по формулам (40) и (57) выражение, зависимость которого от времени дается через тригонометрические функции, аргументы которых изменяются со временем линейно. Тогда можно легко интегрировать аналитически, используя формулу (58).

Итак, в случае представления гравитационного поля Земли средними аномалиями силы тяжести $[\Delta g]_q$ уравнения ошибок (227) имеют такую же структуру, как уравнения ошибок (214), относящиеся к представлению потенциала в виде разложения по сферическим функциям.

Если гравитационное поле представить аномалиями силы тяжести, то получаем возможность определить характеристики этого поля и координаты станций по вариантам a и b, (217) — (223). Можно при этом объединить несколько систем однородных наблюдений, применяя теорему сложения нормальных уравнений.

Если все гравитационное поле представить через неизвестные аномалии силы тяжести $[\Delta g]_q$, которые можно определить из уравнивания спутниковых наблюдений, то эти аномалии образуют ряд

$$[\Delta g]_q; \qquad q = 1, 2, \ldots, n^{**}. \tag{228}$$

Они покрывают всю поверхность Земли. Если ввести площадки размером $20 \times 20°$, то будем иметь около 100 неизвестных и это представление будет эквивалентно разложению по сферическим функциям примерно до девятого порядка.

Можно рекомендовать вводить á priori как безошибочные исходные величины все средние значения аномалий силы тяжести $[\Delta g]_q$, которые надежно определены из наземных измерений с ошибкой ± 1 или ± 2, или ± 3 мгл; так как в настоящее время едва ли можно точнее определить эти значения только из спутниковых наблюдений. До сих пор смогли определить средние значения аномалий из спутниковых наблюдений для площадок размером $20 \times 20°$ с точностью примерно $\pm 6{,}6$ мгл. В этом случае заданные аномалии силы тяжести следует представить рядом

$$[\Delta g]_q; \qquad q = 1, 2, \ldots, k; \qquad k < n^{**}. \tag{229}$$

Неизвестными задачи будут только значения

$$[\Delta g]_q; \qquad q = k+1, \quad k+2, \ldots, n^{**}. \tag{230}$$

Известную сумму

$$\sum_{q=1}^{k} \gamma_q [\Delta g]_q$$

подставляем в (227), прибавляя к свободному члену

$$-l \to -l + \sum_{q=1}^{k} \gamma_q [\Delta g]_q, \tag{231}$$

тогда линейным разложением для неизвестных будет выражение

$$\sum_{q=k+1}^{n^{**}} \gamma_q [\Delta g]_q. \tag{232}$$

Если все аномалии силы тяжести будем считать наблюденными величинами, случайные ошибки которых v_q, то рекомендуется в (227) распространить суммирование по всему интервалу $q = 1, 2, \ldots, n^{**}$. При этом условии все аномалии силы тяжести вводятся как неизвестные величины. К уравнениям ошибок (227), вытекающим из спутниковых наблюдений, следует добавить еще следующие уравнения ошибок, полученные по результатам наземных измерений:

$$v_q = -l_q + [\Delta g]_q; \quad q = 1, 2, \ldots, k, \tag{233}$$

где l_q — числовые значения аномалий силы тяжести, определенных из наземных измерений; $[\Delta g]_q$ — неизвестные, которые следует определить из уравнивания.

Соединение (227) и (233) можно произвести аналогично тому, как это было сделано в вариантах a и b, только надо следить за тем, чтобы наблюдения в обеих системах были однородные. Так как вводятся разные математические модели, веса в уравнениях (227) и (233) должны быть тщательно определены.

9.11. НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ОРБИТАЛЬНОМ МЕТОДЕ

Совместное определение координат станций и параметров гравитационного поля универсальным орбитальным методом, как это было описано выше, является весьма эффективным средством.

Преимущество метода заключается в том, что координаты станций можно определять на расстояниях в несколько тысяч километров, даже если невозможно наблюдать спутник синхронно с соседних станций. Координаты разных станций слабо коррелированы друг с другом (коэффициент корреляции = 0,07 при 12 станциях наблюдений), так что практически они не зависят друг от друга. Если на станции было получено мало наблюдений, то это не влияет отрицательно на наблюдения с других станций, в противоположность законам накопления ошибок, действующим при космической триангуляции.

Преимуществом орбитального метода является также то, что координаты пунктов могут быть определены в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли. Орбитальный метод спутниковой геодезии является практически почти единственным методом для получения абсолютных координат.

При этом имеется возможность определить не только координаты пунктов, но и параметры гравитационного поля Земли. Недостатком здесь является то, что обе частные системы, координаты и параметры гравитационного поля нельзя представить отдельно друг от друга.

Недостатком является и то, что остаточные ошибки поправок за сопротивление атмосферы и за световое давление Солнца полностью входят в результат, как и остаточные ошибки аналитического выражения для гравитационного потенциала. Так как время движения ИСЗ по используемым для орбитального метода дугам в большинстве случаев составляет от двух до трех недель, то вековые и долгопериодические члены этих поправок могут достигать значительных величин; их редко можно определить с удовлетворительной точностью. Поэтому трудно задать «математическую модель» для вычисления элементов орбиты с достаточной точностью, и остаточные ошибки à posteriori при орбитальном методе $\pm 5''$ значительно выше, чем ошибки à priori ($+2{,}5''$).

Доставляют также трудности резонансные эффекты. Орбитальный метод является универсальным, его эффективность можно увеличить путем вариаций геометрии многочисленных наблюдений и путем выбора многих пригодных спутников с разными элементами орбиты.

В универсальном орбитальном методе используют, по крайней мере, около десяти станций наблюдений, которые должны быть распределены по возможности равномерно на поверхности земного шара, если требуется определить параметры гравитационного поля Земли и координаты станций как независимые друг от друга величины.

Если станции наблюдений расположены на континенте площадью 2000 × 2000 км, 3000 × 3000 км или 4000 × 4000 км, то трудно определить абсолютные положения станций в пространстве и поле силы тяжести Земли. Если станции сосредоточены только на одном континенте, а не распределены по всей Земле, то элементы орбиты и координаты станций наблюдений получаются недостаточно точно, так как наблюдения не распределены равномерно вдоль орбит спутников.

Если станции расположены только на одном континенте, а поле силы тяжести уже известно из других источников, например из универсального орбитального метода, и если при таких условиях надо определить только абсолютные координаты расположенных на одном континенте станций, то имеем дело со специальным ограниченным случаем орбитального метода. Располагая результатами наблюдений и заданными параметрами гравитационного поля, можно определить элементы орбиты и далее получить по ним абсолютные координаты станций наблюдений. Если в упомянутом ограниченном случае ввести в качестве неизвестных только координаты станций, считая их независимыми друг от друга величинами, то при определении координат и в этом случае возникли бы трудности, так как станции наблюдений неравномерно распределены по всей Земле.

В этой задаче можно ввести дополнительные условия, полагая, что расположенные только на одном континенте станции наблюдений были заранее связаны друг с другом космической триангуляцией. В этом случае на станциях заранее уже были проведены синхронные наблюдения, абсолютное ориентирование сети в горизонтальном и вертикальном направлениях было выполнено по методу Вяйсяля, а масштаб сети определен из триангуляций или из наблюдений спутника лазерным методом или с помощью системы Секор, или из допплеровских наблюдений. Тогда уже известны пространственные относительные координаты этой континентальной системы и ее нужно только сместить в пространстве в трех ортогональных направлениях, чтобы относительные координаты стали абсолютными. Задача, таким образом, имеет еще три неизвестных, а именно постоянные для всех станций изменения координат X, Y, Z.

В этом варианте орбитального метода из несинхронных наблюдений спутников, располагая параметрами гравитационного поля Земли и относительными координатами континентальной системы станций наблюдений, следует определить только три неизвестных, необходимых для преобразования относительных координат в абсолютные. Задача упрощается, потому что надо определить только три неизвестных и можно ожидать, что таким путем из орбитального метода можно получить абсолютные координаты для континентальной системы, не прибегая к наблюдениям на станциях, расположенных по всей Земле. Конечно, в этом специальном случае орбитального метода необходимо иметь многочисленные наблюдения спутников с разными орбитами, с разными высотами над Землей, с разными наклонами орбит и эксцентриситетами.

Другой интересный вариант орбитального метода был предложен Жонголовичем.

Здесь исходят из того, что известны положения станций наблюдений в триангуляционной системе, которая имеет относительную ориентировку и, таким образом, не отнесена к центру масс Земли Путем синхронных наблюдений определяют положение спутника в этой системе. Для геоцентрических координат спутника действительно условие, получаемое из скалярного произведения,

$$x_s \sin\Omega \sin i - y_s \cos\Omega \sin i + z_s \cos i = 0.$$

Линеаризация приводит к выражению

$$a\,\Delta\Omega + b\,\Delta i + c\,\Delta x + d\,\Delta y + e\,\Delta z + f = 0.$$

Здесь $\Delta\Omega$ и Δi — постоянные изменения соответствующих элементов орбиты, а Δx, Δy, Δz определяют положение центра масс Земли в триангуляционной системе. Положение центра масс Земли можно определить из уравнивания.

Представляет интерес включение орбитального метода в космическую триангуляцию.

Обычно в космической триангуляции проводятся синхронные наблюдения или наблюдения, которые после интерполяции внутри полсекундного или меньшего интервала можно превратить в строго синхронные. Если при наблюдениях спутников преодолеваются очень большие расстояния, то иногда из-за условий видимости трудно получить синхронные наблюдения. При этих обстоятельствах часто можно получить только такие наблюдения, которые разделены промежутком времени в несколько минут. В космической триангуляции такие наблюдения можно применять при условии, что разности координат обоих наблюдаемых положений спутника можно определить по элементам орбиты с точностью до нескольких метров. Причем необходимо очень точно знать истинные элементы орбиты и особенно изменения истинных элементов орбиты со временем, т. е. надо знать как средние элементы орбиты, так и возмущения, вызванные световым давлением Солнца, сопротивлением атмосферы, короткопериодические возмущения, вызванные гравитационным полем Земли. Если знать аномалии силы тяжести, полученные из наземных измерений, в области обеих подспутниковых точек, то можно определить изменения элементов орбиты под действием гравитационного поля Земли по формулам (45), (80), (80), (81, *а*, *б*) путем численного интегрирования с интервалом 2 или 4 мин, внутри которого лежат рассматриваемые наблюдения.

9.12. ДУГИ ПРОТЯЖЕННОСТЬЮ 360°

Рассмотрим метод, в котором используются наблюдения последовательных прохождений спутника над одной станцией.

Сначала вычислим средние элементы орбиты по формулам вида (170), учитывая влияние притяжения Луны. Тогда остаточные отклонения будут составлять примерно $\pm 10 - \pm 20''$.

Если на станции наблюдали спутник при двух непосредственно следующих друг за другом прохождениях в моменты звездного времени θ_1 и θ_2 и если $\boldsymbol{x}_i$ — соответствующие положения спутника, s_i — соответствующие расстояния до спутника и $\boldsymbol{a}_i$ — наблюдаемые векторы, то

$$\boldsymbol{x}_2 - s_2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{R}_z(\theta_1 - \theta_2)(\boldsymbol{x}_1 - s_1\boldsymbol{a}_1) = 0. \tag{234}$$

Если умножить на нормальный вектор $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{n}_{12}$, то, принимая во внимание (104), получим

$$(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{n}_{12} = [\boldsymbol{R}_z(\theta_1 - \theta_2) - \boldsymbol{E}]\,\boldsymbol{R}_z(-\theta_1)\cdot\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_{12},$$

где u — положение (X, Y, Z) станции наблюдения Q в системе, жестко связанной с Землей (рис. 44). Матрица S движения полюса здесь не учитывалась.

Изменение положения спутника за время одного оборота выражается через аномалии силы тяжести следующим образом:

$$x_2 - x_1 = (x_2 - x_1)_0 + \sum_q w_q [\Delta g]_q,$$

$$w_q = \frac{\partial (x_2 - x_1)}{\partial [\Delta g]_q}. \qquad (234, a)$$

Разность координат $(x_2 - x_1)_0$ относится к средним элементам орбиты, разность координат $(x_2 - x_1)$ — к (истинным) оскулирующим элементам орбиты.

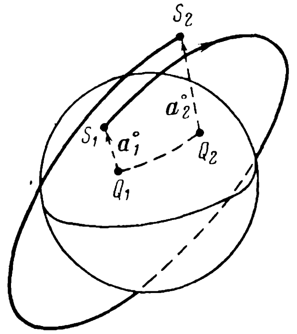


Рис. 44. К наблюдению последовательных прохождений спутника над одной и той же станцией Q

С помощью некоторых преобразований получаем следующее уравнение ошибок, в котором v — случайная ошибка, которая может быть ошибкой отдельного наблюдения прямого восхождения, $\cos\delta \cdot v_\alpha$ или склонения v_δ (Арнольд).

$$v = -\frac{1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \frac{n_{12}}{|n_{12}|} \sum_q w_q [\Delta g]_q - \frac{1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \frac{n_{12}}{|n_{12}|} [(x_2 - x_1)_0 -$$
$$- \{R_z(\theta_1 - \theta_2) - E\} R_z(-\theta_1) u]. \qquad (235)$$

Координаты спутника вычисляются в (235) по средним элементам орбиты. Если разность моментов $\Delta\tau$ между следующими друг за другом прохождениями спутника отличается от драконического периода не более чем на 5 минут, то разность $(x_2 - x_1)_0$ не зависит практически от ошибок в средних элементах орбиты. Влияние этих ошибок на свободный член уравнения (235) составляет менее 15% их значения. Если остаточная ошибка средних элементов орбиты составляет примерно $\pm 11''$, то максимально это изменяет свободный член уравнения (235) на величину $\pm 1{,}6''$. Если $\Delta\tau = 1$ мин, то свободный член изменится только на $\pm 0{,}3''$.

Для многих спутников период обращения составляет примерно 2 ч. Другими словами, $\theta_2 - \theta_1 \cong 30°$. По этой причине элементы матриц вращения $R_z(\theta_1 - \theta_2)$ отличаются от элементов единичной матрицы максимум на $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Поэтому ошибки координат станции входят в уравнение (235) с коэффициентами $^1/_2$. Составляющая Z не используется.

Следовательно, в уравнении (235) в качестве неизвестных величин, которые должны быть определены из уравнивания, имеются только параметры гравитационного поля. Неизвестные элементы орбиты b и координаты станции u автоматически исключаются самим методом, если средние элементы орбиты не имеют остаточных ошибок, бо́льших $\pm 20''$, и координаты станций X, Y известны с точностью ± 20 — ± 30 м.

Таким образом, при уравнивании встречаются только уравнения вида (221), (222), (224), (225), а не уравнения (215), (216).

Здесь также можно вводить в качестве исходных данных аномалии силы тяжести $[\Delta g]_q$, уже известные из наземных наблюдений, поэтому следует определять только неизвестную часть этих аномалий.

В уравнении (235) положения спутника $(x_1)_0$ и $(x_2)_0$, появляющиеся в выражении $(x_2 - x_1)_0$, вычисляются по средним элементам орбиты. Здесь, собственно, должна стоять разность истинных положений спутника, измененная на величину влияния аномалий силы тяжести. Вместо $(x_1)_0$ или $(x_2)_0$ должно быть

$$x_1 = x_1(a_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1, M_1),$$
$$x_2 = x_2(a_2 - \delta a, e_2 - \delta e, \ldots),$$

причем a_1, e_1, ... и a_2, e_2, ... — истинные элементы орбиты, а δa, δe, ... — изменения элементов орбиты в результате влияния аномалий силы тяжести за время между двумя прохождениями спутника.

Если $a_{i\cdot m}$, $e_{i\cdot m}$, $\omega_{i\cdot m}$ ... — средние элементы орбиты, то вектор ошибок равен

$$x_2(a_2 - \delta a, \ldots) - x_2(a_{2\cdot m}, \ldots) - x_1(a_1, \ldots) + x_1(a_{1\cdot m}, \ldots) = \Delta x.$$

Если

$$\Delta a = a_1 - a_{1\cdot m}$$

и если изменение истинных элементов орбиты выразить через изменение средних элементов, учитывая при этом влияние аномалий силы тяжести,

$$a_1 + a_{2\cdot m} - a_{1\cdot m} + \delta a = a_2,$$

то получим

$$a_2 - \delta a - a_{2\cdot m} = \Delta a,$$

а для вектора ошибок

$$\Delta x = \sum_u \left[\frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\right] \Delta u; \qquad u = a, e, \omega, i, \Omega, M.$$

Далее, для малых эксцентриситетов получаем

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = R_\nu (v_1 - v_2) \frac{\partial x_1}{\partial u}; \qquad u = a, e, \omega, i, \Omega, M,$$

причем матрица R_ν означает вращение орбиты спутника вокруг нормального вектора.

Для вектора ошибок в астрономической системе получаем формулу

$$\Delta \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(-\Omega_1)\,\boldsymbol{R}_x(-i_1)\,\boldsymbol{R}_z(-\omega_1 - v_1) \times$$

$$\times [\boldsymbol{R}_z(v_1 - v_2) - \boldsymbol{E}] \begin{pmatrix} K_{3.1} \\ K_{2.1} \\ K_{1.1} \end{pmatrix},$$

где $K_{1.1}$ — компонент ошибки вектора $\boldsymbol{x}_1$ в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты, положительный к северному полюсу; $K_{2.1}$ — компонент ошибки в плоскости орбиты, перпендикулярный к радиус-вектору и положительный в направлении движения спутника по орбите; $K_{3.1}$ — компонент ошибки в направлении радиуса-вектора, положительный наружу.

Если α_1, δ_1, ε_1 — топоцентрические прямое восхождение, склонение и расстояние спутника от станции $\boldsymbol{x}_1$, $\Delta\alpha_1$, $\Delta\delta_1$, $\Delta\varepsilon_1$ — соответствующие разности между величинами, полученными по истинным и средним элементам орбиты, то для вектора ошибок в астрономической системе имеем

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}_z(-\Omega_1)\,\boldsymbol{R}_x(-i_1)\,\boldsymbol{R}_z(-\omega_1 - v_1)\,[\boldsymbol{R}_z(v_1 - v_2) - \boldsymbol{E}] \times$$

$$\times \boldsymbol{R}_z(\omega_1 + v_1)\,\boldsymbol{R}_x(i_1)\,\boldsymbol{R}_z(\Omega_1)\,\boldsymbol{R}_z(-\alpha_1) \times$$

$$\times \boldsymbol{R}_y(-90^\circ + \delta_1)\,\boldsymbol{R}_z(-90^\circ)\,\varepsilon_1 \begin{pmatrix} \cos\delta_1\,\Delta\alpha_1 \\ \Delta\delta_1 \\ \Delta\varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (235) можно уточнить, если прибавить к $(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)_0$ еще вектор ошибок $\Delta\boldsymbol{x}$.

При практических расчетах компоненты $\Delta\alpha_1$, $\Delta\delta_1$ всегда можно получить из наблюдений первого прохождения спутника. При синхронных лазерных наблюдениях или измерениях с помощью системы Секор получим также $\Delta\varepsilon_1$, в противном случае следует подставить значение $\Delta\varepsilon_1 = 0$. Если $\Delta\varepsilon_1$ известно из наблюдений и учитывается вектор $\Delta\boldsymbol{x}$, то расхождение с драконическим периодом $\Delta\tau$ может быть более 5 мин.

Введение вектора $\Delta\boldsymbol{x}$ всегда улучшает уравнение (235), независимо от того, учитываем $\Delta\varepsilon_1$ или нет.

При дугах протяженностью 360° промежуток времени между наблюдениями равен периоду обращения спутника. Промежуток времени между двумя последовательными прохождениями с точностью ± 5 мин равен драконическому периоду, за это время Земля поворачивается примерно на 30°.

Аналогичным образом можно использовать дуги, временна́я протяженность которых составляет 24 ч. Тогда рассматриваем такие прохождения спутника, промежуток времени между которыми составляет $24^h \pm \varkappa \cdot T_\Omega$, причем $|\varkappa| < 1$ и T_Ω — драконический период. Такие результаты можно получить из наблюдений спутников, применяющихся в большинстве случаев в геодезии, после 12, 13 и 14 оборотов вокруг Земли. Время, прошедшее между двумя такими прохождениями, должно быть кратным драконическому периоду с точностью не хуже ± 5 мин. Угол, на который за это время повернулась Земля, будет отличаться от 360° не более чем

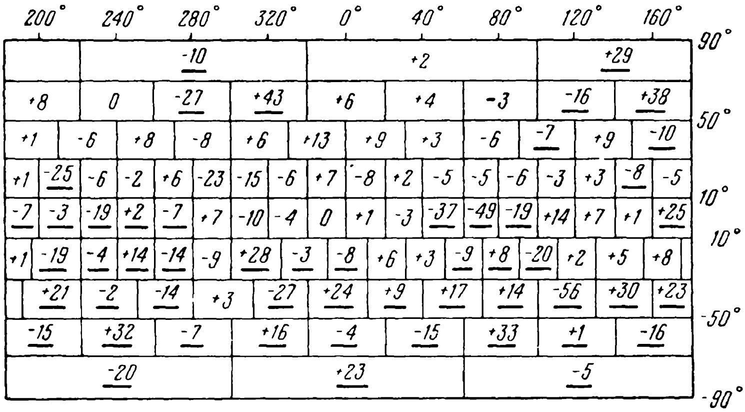


Рис. 45. Карта аномалий в свободном воздухе (в мгл). Неподчеркнутые числа — аномалии, полученные из наземных, а подчеркнутые — из спутниковых наблюдений (360° — дуги по К. Арнольду), определяют средние значения аномалий в свободном воздухе, полученные по формуле силы тяжести Кассиниса (1932, $f = 1 : 297$)

на 30°. Поэтому будет возможен анализ таких двадцати четырех часовых дуг в таком же смысле, как анализ дуг протяженностью 360°.

На рис. 45 приведен результат полученный таким образом. Всего определили 52 значения $[\Delta g]_q$ для площадок размером $20 \times 20°$ (подчеркнутые числа). Средняя квадратическая ошибка этих величин составляет для $-50° < \varphi < 50°$ около ± 5 мгл. Неподчеркнутые числа — аномалии силы тяжести, известные из наземных измерений. Среднее значение остаточной ошибки равно $\pm 5{,}3''$.

Всего было использовано около 2000 наблюдений. Были привлечены условные уравнения, с помощью которых аномалии силы тяжести выразили через сферические функции до восьмого порядка.

В табл. 10 указаны спутники, последовательные прохождения которых использовались при обработке, и параметры их орбит.

По аномалиям силы тяжести можно определить геоид с помощью формулы Стокса (2).

Таблица 10

Спутники	i	e	Высота перигея [Mm]	Число дуг протяженностью 360°. Двойные наблюдения
«Авангард-2»	33°	0,165	0,560	131
«Авангард-3»	33	0,189	0,520	106
«Телстар-1»	45	0,242	0,960	47
«Транзит-4А»	67	0,008	0,890	75
«Инджун»	67	0,008	0,890	50
«Анна-1В»	50	0.007	1,085	53

9.13. СУТОЧНЫЕ СПУТНИКИ

Рассмотренные резонансные эффекты зависят от периода обращения спутника и других параметров. Критерием появления резонансов является то, что абсолютное значение знаменателя в правой части уравнения (58) очень мало по сравнению с абсолютным значением числителя. Если этот знаменатель очень мал, то весьма велики амплитуды возмущений. Особенно велики резонансные эффекты для возмущений в направлении орбитального движения спутника, так как упомянутый знаменатель появляется при средних аномалиях в квадрате.

Большой интерес для использования этих резонансов при определении отдельных гармоник представляют суточные спутники. Эти спутники имеют круговую орбиту, эксцентриситет которой едва ли больше, чем $e = 0{,}001$. Период обращения спутника очень точно совпадает с периодом вращения Земли вокруг своей оси (23^h56^m), радиус орбиты такого спутника равен примерно 42 100 км (6,61 земных радиусов). Если наклон плоскости орбиты такого спутника очень мал, $i = 0°$, то практически спутник всегда будет оставаться над одной и той же точкой экватора, если пренебречь возмущениями орбиты, которые относительно малы для такого высокого спутника. Поэтому говорят о (гео)стационарных спутниках и о синхронной орбите. При бо́льшем наклоне плоскости орбиты спутник будет совершать колебательные движения в меридиональном направлении между широтами $\varphi = +i$ и $\varphi = -i$.

Такие спутники, наряду с их важным значением при использовании в качестве спутников связи, нашли свое применение и в геодезии.

Запуск первого спутника «Синком» не был успешным, и в 1963 г. на орбиту был выведен «Синком-2» ($i \cong 33°$, $e = 2 \cdot 10^{-4}$). Первоначально он находился на 55° западной долготы (область устья Амазонки).

За ним последовал в 1964 г. «Синком 3» ($i = 0{,}06°$). При старте ему была задана долгота $\lambda = 180°$.

В 1965 г. на орбиту был выведен спутник «Эрли Берд» ($i = 0{,}2°$) первоначально его долгота составляла 30° W.

Теория резонансных эффектов для стационарных спутников развивается следующим образом. Если в знаменателе (58) стоит $q = 0$, то амплитуды будут самые большие, так как $G_{lpq}(e)$ и, следовательн(, возмущения пропорциональны, в основном e^q, причем e — очень малый эксцентриситет (56), (30).

Тогда критическим значением знаменателя будет

$$(l-2p)(\omega^{\cdot}+n)+m(\Omega^{\cdot}-\theta^{\cdot}).$$

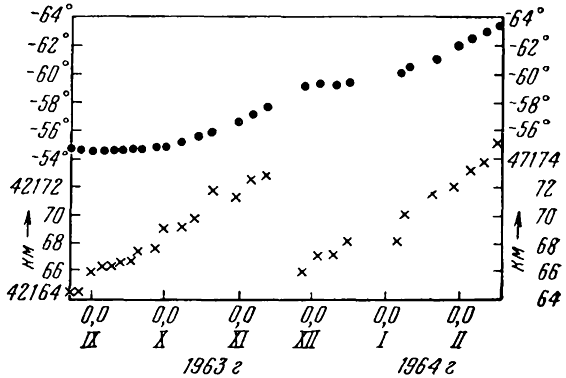


Рис. 46. Изменение со временем географической долготы восходящего узла (.) и большой полуоси (X) стационарного спутника «Синком-2»

Для суточного спутника n равно примерно $\theta^{\cdot}$, а значения $\omega^{\cdot}$ и $\Omega^{\cdot}$ очень малы, так как спутник имеет очень высокую орбиту. Если $(l - 2p) = m$, то знаменатель приближенно равен

$$(l-2p)(n-\theta^{\cdot}),$$

а для возмущения в средней аномалии M знаменатель равен

$$[(l-2p)(n-\theta^{\cdot})]^2,$$

$$n-\theta^{\cdot} \cong 0.$$

Следовательно, критический знаменатель очень мал и поэтому резонансные эффекты будут значительны.

В средней аномалии у синхронных спутников будут появляться особенно сильные возмущения, имеющие характер вековых ускорений и зависящие в течение ограниченного интервала от квадрата времени. Для других элементов орбиты эти возмущения изменяются со временем линейно.

На рис. 46 показаны (по Козаи) дрейфовые движения большой полуоси и изменения географической долготы спутника «Синком 2» для точек, в которых спутник пересекает экватор.

В табл. 11 даны ускорения в долготе, полученные из наблюдений трех упомянутых выше стационарных спутников (по Каула).

Таблица 11

Возмущения орбиты суточного спутника

Спутник	1963-31А					1964-47А	1965-28А
Название	«Синком 2»					«Синком 3»	«Эрли Берд»
Наклон	33°					0,1°	0,2°
Географическая долгота в начале периода наблюдений	305,1°	244,7°	174,0°	118,0°	81,0°	179,2°	330,7°
Географическая долгота в конце периода наблюдений	302,4	197,5	161,5	102,2	52,0	178,2	330,7
Наблюдаемое ускорение $\times 10^9$	$-1{,}962 \pm 28$	$1{,}888 \pm 74$	$0{,}435 \pm 44$	$-2{,}203 \pm 44$	$0{,}849 \pm 54$	$1{,}476 \pm 62$	$-1{,}291 \pm 9$

Единица ускорения — радиан/(планетарная единица времени)^2, планетарная единица времени = 806,8137 сек.

По возмущениям стационарного спутника Вагнер получил следующие гармоники:

$$\bar{C}_{2\cdot2} = 2{,}417 \times 10^{-6},$$

$$\bar{S}_{2\cdot2} = -1{,}438 \times 10^{-6},$$

$$\bar{C}_{3\cdot3} = 0{,}324 \times 10^{-6},$$

$$\bar{S}_{3\cdot3} = 1{,}183 \times 10^{-6},$$

$$\bar{C}_{3\cdot1} = -1{,}268 \times 10^{-6},$$

$$\bar{S}_{3\cdot1} = -0{,}269 \times 10^{-6}.$$

Два первых коэффициента имеют точность примерно 1%, они дают лучшие из полученных до сих пор значений для секториальных гармоник второго порядка Они также хорошо совпадают с результатами, полученными орбитальным методом. Третий и четвертый коэффициенты имеют меньшую точность, около 10%, а последние $\bar{C}_{3\cdot1}$ и $\bar{S}_{3\cdot1}$ весьма неточны и могут иметь ошибку до 70%. Следовательно, из анализа возмущений орбит стационарных спутников получаем хорошую возможность контроля гармоник $\bar{C}_{2\cdot2}$ и $\bar{S}_{2\cdot2}$. Недостатком этого метода является то, что при определении немногих искомых членов в разложении гравитационного поля надо предварительно исключить влияние многих других гармоник, известных только приближенно.

Трудности возникают и при разделении неизвестных.

Особый интерес для использования резонансных эффектов при определении некоторых тессеральных и секториальных гармоник представляют также спутники с периодом обращения в 12 ч. По возмущениям орбит двух советских двенадцатичасовых спутников «Космос-41» (1964—49D) и «Молния» (1965—30A) Вагнер получил таким путем надежные значения гармоник $\overline{C}_{2\cdot 2}$, $\overline{S}_{2\cdot 2}$, $\overline{C}_{3\cdot 2}$, $\overline{S}_{3\cdot 2}$, $\overline{C}_{4\cdot 4}$, $\overline{S}_{4\cdot 4}$.

9.14. СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ И НАЗЕМНЫХ ДАННЫХ

Мы уже рассмотрели вопрос о том, как независимые системы, полученные спутниковыми и наземными методами, можно объединить в одну систему (218)—(223), применяя теорему сложения при уравнивании. Рассмотрим теперь методы, которые другими путями могут привести к таким же результатам.

1. Рапп исходил из разложения аномалий в свободном воздухе Δg_F по сферическим функциям (226), которое можно записать в виде

$$\Delta g_F = G \sum_l (l-1) \sum_m (\overline{C}_{lm} \cos m\lambda + \overline{S}_{lm} \sin m\lambda)\, \overline{P}_{lm}(\cos\varphi), \qquad (236)$$

где G — среднее значение силы тяжести для Земли. Здесь значения силы тяжести Δg_F, полученные из наземных измерений, и коэффициенты сферических функций $\overline{C}_{lm}$, $\overline{S}_{lm}$ разложения потенциала $V-U$ (истинный потенциал минус нормальный) приближенно можно рассматривать как случайные переменные. Статистические свойства Δg_F получим из статистического анализа наземных измерений, статистические свойства коэффициентов сферических функций — из их ковариантной матрицы. В варианте б, (218)—(223), например (223) является уравнением параметров гравитационного поля. $(G_1^0 + G_2^0)^{-1}$ — ковариантная **матрица.**

Уравнение (236) можно записать в виде

$$A v_1 + B v_2 = w,$$

где v_1 или v_2 — случайные величины, полученные из обработки наземных или спутниковых наблюдений, которыми являются соответственно Δg_F или $\overline{C}_{lm}$, $\overline{S}_{lm}$. Уравнивание выполняется по принципу

$$v_1^T \cdot P_1 \cdot v_1 + v_2^T \cdot P_2 \cdot v_2 \rightarrow \text{minimum},$$

причем P_i — матрицы веса. Уравнивание дает искомые поправки v_2 для гармоник $\overline{C}_{lm}$, $\overline{S}_{lm}$.

Таким образом, Рапп пришел к разложению по сферическим функциям до 14 порядка.

2. Кёнлейн [24] разделил всю земную поверхность на две перекрывающиеся области B_1 и B_2. В области B_1 имелись аномалии силы тяжести, полученные из наземных измерений, а в области

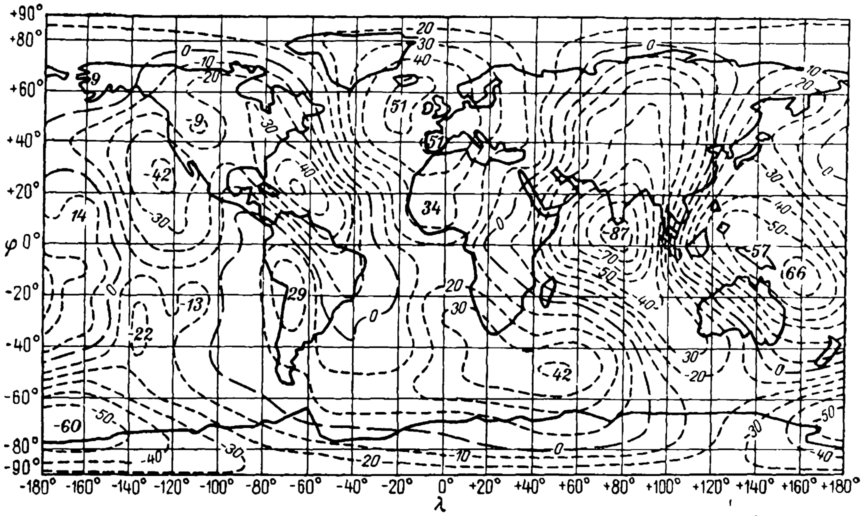


Рис. 47. Ондуляции геоида (в м) по наземным данным и наблюдениям спутников по Кенлейну (1967, $f = 1 : 298,255$)

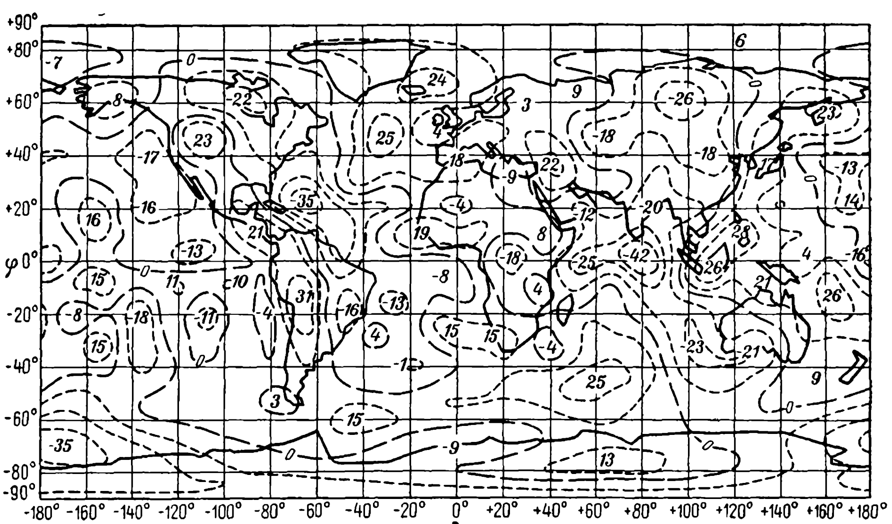


Рис. 48. Аномалии (в мгл) в свободном воздухе по наземным данным и по наблюдениям спутников по Кенлейну (1967, $f = 1 : 298,255$)

$B_1 + B_2$ он мог исходить из аномалий силы тяжести, вычисленных в «Стандартной Земле 1966». Из последних он использовал только аномалии силы тяжести в области B_2. После того как в области B_1 он получил аномалии из наземных измерений, а в области B_2 — аномалии из спутниковых наблюдений, у него оказался гравиметрический исходный материал, который покрывал всю Землю. С помощью этих данных оказалось возможным получить разложение гравитационного поля Земли по сферическим функциям до 15 порядка. Результаты, полученные Кёнлейном, а именно его геоид и его аномалии силы тяжести можно видеть на рисунках 47 и 48.

3. Наземные и спутниковые данные можно объединить еще следующим образом. Используя аномалии силы тяжести, полученные из наземных измерений, как известные, получаем разложение гравитационного поля по сферическим функциям, считая при этом неизвестные аномалии силы тяжести равными нулю. Если таким путем вычислять коэффициенты сферических функций путем уравнивания аномалий силы тяжести, полученных из наземных измерений, то придем к нормальным уравнениям, которые определяют эти сферические функции. Если, применяя теорему сложения, сложить эту систему уравнений с матрицей нормальных уравнений для сферических функций, полученных из наблюдений спутников орбитальным методом, то получим систему, которая позволяет определить параметры гравитационного поля в результате объединения наземных и спутниковых данных.

9.15. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderle R. J.: Geodetic Parameter Set NWL-5E-6 Based on Doppler Satellite Observations. In Veis ed. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Vol. 2, Athen 1967.

2. Arnold K.: Die Bahnen der künstlichen Erdsatelliten in ihrer Abhängigkeit von den Schwereanomalien. Veröff. Geod. Inst. Potsdam, Nr. 27 (1965).

3. Arnold K.: An Attempt to Determine the Unknown Parts of the Earth's Gravitation Field from Successive Satellite Passages. Space Research 7, Vol. 2, North-Holland Publishing Company, 1967.

4. Arnold K.: An Attempt to Determine the Unknown Parts of the Earth's Gravity Field by Successive Satellite Passages. Bull. Géodésique, Paris, No. 87 (1968).

5. Arnold K.: Analytische Integration der durch die Schwereanomalien hervorgerufenen Satellitenbahnstörungen. Gerl. Beitr. Geophysik, 76 (1967) H. 4.

6. Arnold K.: Eine Zusatzbedingung bei der Bestimmung des Potentialfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen. Gerl. Beitr. Geophysik, 76. (1967) H. I.

7. Arnold K.: The Use of Satellites for Geodetic Studies. Space Sci. Rev. 7 (1967) No. I

8. Bjerhammar A.: A New Approach to Satellite Geodesy. Research Institute for Geodetic Sciences, Alexandria, Virginia, U. S. A. IUGG Generalversammlung, 1967.

9. Bjerhammar A.: On a Coalescent World Geodetic System. Research Institute for Geodetic Sciences, Alexandria, Virginia, U. S. A. IUGG Generalversammlung, 1967.

10. Bulletin Astronomique. XXI^{e} Symposium de l'U. A. I. sur le Systéme de Constantes Astronomiques. Observatoire de Paris 1963.

11. F r i e d m a n M. P.: Three-Dimensional Model of the Upper Atmosphere. SAO Special Report 250 (1967).
12. G a p o s c h k i n E. M.: Differential Orbit Improvement (DOI-3). SAO Special Report 161 (1964).
13. G r o t e n E.: Die Genauigkeit der Bestimmung des Erdschwerepotentialls und daraus abgeleiteter Größen mittels Satellitenbeobachtungen, Teil I, Zonaler Anteil. Dtsch. Geodät. Komm., München, Reihe A. H. 56/I (1967).
14. G r o t e n E.: Die Genauigketi der Bestimmung des Erdschwerepotentials und daraus abgeleiteter Größen mittels Satellitenbeobachtungen, Teil II, Gesamtfeld. Dtsch. Geodät. Komm. München, Reihe A. H. 56/II (1967).
15. K a l l m a n n B i j l H. ed.: Space Research I. North — Holland Publishing Company, Amsterdam 1960.
16. K a u l a W. M.: Determination of the Earth's Gravitational Field, Rev. Geophys. I (1963) No. 4.
17. K a u l a W. M.: Tesseral Harmonics of the Gravitational Field and Geodetic Datum Shifts derived from Camera Observations of Satellites. J. Geophys. Res. 68 (1963) No. 2.
18. K a u l a W. M.: Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Publishing Company, 1966.
(Русский перевод: У. Каула. Спутниковая геодезия).
Теоретические основы, М., «Мир», 1970).
19. K i n g — H e l e D.: The Shape of the Earth. Sci. American, 217 (1967) No. 4.
20. K i n g — H e l e D. G. C o o k G. E.: The Even Zonal Harmonics of the Earth's Gravitational Potential. Geophys. J. 10 (1965).
21. K i n g — H e l e D. G. C o o k G. E. S c o t t D. W.: Even Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential. Planet. Space. Sci., Pergamon Press, 14 (1966).
22. K i n g — H e l e D. G. C o o k G. E. S c o t t D. W.: Odd Zonal Harmonics in the Geopotential, Determined from Fourteen Welldistributed Satellite Orbits. Planet. Space Sci. Pergamon Press 15, (1967).
23. K ö h n l e i n W.: Gravity Gradients on the Earth's Surface as Deduced from Satellite Orbits. SAO Special Report 249 (1967).
24. K ö h n l e i n W.: The Earth's Gravitational Field as Derived from a Combination of Satellite Data with Gravity Anomalies. IUGG Generalversammlung 1967.
25. K o z a i Y.: New Determination of Zonal Harmonics Coefficients of the Earth's Gravitational Potential. Tokyo Astronom. Obs. Repr. No. 265 (1964).
26. K o z a i Y.: Effects of the Tidal Deformation of the Earth on the Motion of Close Earth Satellites. Tokyo Astronom. Obs. Repr. No. 281 (1965).
27. K o z a i Y.: The Earth Gravitational Potential Derived from Satellite Motion. Space Sci. Rev. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht — Holland, 5 (1966).
28. K o z a i Y.: Determination of Love's Number from Satellite Observations. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 262 (1967) Nr. 1124.
29. L u n d q u i s t C. A , V e i s G.: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth. Vol. 1, 2, 3, SAO Special Report 200 (1966).
30. O e s t e r w i n t e r C.: Importance of Gravitational Harmonics of High Order for the Orbits of Earth Satellites. Space Res. 6 (1965).
31. V e i s G.: Precise Aspects of Terrestrial and Celestial Reference Frames. SAO Special Report No. 123 (1963).
32. V e i s G. The Determination of the Radius of the Earth and other Geodetic Parameters as Derived from Optical Satellite Data. IUGG Generalversammlung 1967.
33. Z h o n g o l o v i t c h I. D.: Zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes der Erde mit Hilfe von künstlichen Satelliten. Bulletin über die Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten, herausgegeben von der Bulg. Akad. D. Wiss., Nr. 7 (1968) Sofia.

10. СВЯЗЬ ТРИАНГУЛЯЦИЙ С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ ПОСТРОЕНИЯМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ СПУТНИКОВ

Станции наблюдений спутников следует привязывать к сети триангуляции, так как это открывает большие возможности для сравнения. Таким путем можно контролировать масштабы и внутреннюю точность обеих систем. Если спутниковая система покрывает большие пространства, то она может оказаться точнее, чем триангуляция в этих областях, так как триангуляция состоит из большого числа сравнительно маленьких треугольников, что приводит к накоплению случайных и систематических ошибок. Из триангуляций не рекомендуется выводить пространственные положения станций наблюдений за спутниками; эти положения следует определять, как правило, из самих спутниковых наблюдений.

Особенно важно при этом, что системы космической триангуляции при наблюдении направлений на спутник привязываются к системе неподвижных звезд и что направления в этих системах абсолютно ориентированы в пространстве. Конечно, триангуляции также ориентированы благодаря азимутальным астрономическим определениям, и мнение многих специалистов таково, что незнание составляющих уклонения отвесной линии в исходном пункте триангуляции вызывает только незначительное перемещение сети в пространстве (примерно на 50—100 м), в то время как ориентирование по направлению уже задано астрономическими наблюдениями на пунктах Лапласа. Однако эти вопросы являются спорными, ясность в них могли бы внести методы спутниковой геодезии.

Преимущество систем динамической спутниковой геодезии заключается в том, что координаты их пунктов определены относительно центра масс Земли, т. е. речь идет об абсолютных координатах. После сравнения координат общих пунктов системы динамической спутниковой геодезии и триангуляционной сети можно перенести последнюю в пространстве в трех ортогональных друг другу направлениях, так что начало координат этой триангуляционной системы совпадает с центром масс Земли.

В дальнейшем будем исходить из системы динамической спутниковой геодезии, к которой необходимо привязать триангуляционную сеть, используя данные, полученные в результате редуцирования сети триангуляции методом проектирования. В этом случае по результатам точного астрономического нивелирования известны высоты станций наблюдений над референц-эллипсоидом и пункты триангуляции спроектированы вдоль нормалей на поверхность этого эллипсоида. Таким образом, для всех станций наблюдений по данным триангуляции известны геодезические широта φ'_ε и долгота λ_ε и, кроме того, высота геодида ξ_ε над референц-эллипсоидом. При уравнивании триангуляции на референц-эллипсоиде получаем ковариантную матрицу для координат всех станций наблюдений Q_ε, причем в триангуляции вертикальные компоненты ζ_ε слабо коррелируют с горизонтальными φ'_ε, λ_ε.

Дальнейшие исследования следует проводить не в геодезической системе, отнесенной к поверхности референц-эллипсоида, а в пространственной системе координат X, Y, Z, жестко связанной с Землей. Для преобразования одной системы в другую применяется формула

$$\begin{pmatrix} X = (\rho_i + \zeta_{\varepsilon \cdot i} + h_i)\cos\varphi'_{\varepsilon \cdot i}\cos\lambda_{\varepsilon \cdot i} \\ Y = (\rho_i + \zeta_{\varepsilon \cdot i} + h_i)\cos\varphi'_{\varepsilon \cdot i}\sin\lambda_{\varepsilon \cdot i} \\ Z = [\rho_i(1-e_\varepsilon^2) + \zeta_{\varepsilon \cdot i} + h_i]\sin\varphi'_{\varepsilon \cdot i} \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_{T \cdot i}, \qquad (236,\ a)$$

где

$$\rho_i = \frac{a_\varepsilon}{\sqrt{1 - e_\varepsilon^2 \sin^2\varphi'_{\varepsilon \cdot i}}},$$

h_i — высота над уровнем моря. Индекс ε означает принадлежность к референц-эллипсоиду. Q_ε ковариантная матрица элементов вектора $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, выраженных через геодезические координаты, отнесенные к поверхности референц-эллипсоида

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix}, \qquad \delta q_i = \begin{pmatrix} -a_\varepsilon & \delta\varphi'_{\varepsilon \cdot i} & \\ a_\varepsilon & \cos\varphi'_{\varepsilon \cdot i} & \delta\lambda_{\varepsilon \cdot i} \\ \delta\zeta_{\varepsilon \cdot i} & & \end{pmatrix},$$

полученная в результате уравнивания триангуляции, при этом i — текущий номер и n — число пунктов сети.

Соответствующие нормальные уравнения будут

$$\boldsymbol{L}_\varepsilon \delta\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{l}_\varepsilon = 0,$$

$$\boldsymbol{L}_\varepsilon \boldsymbol{Q}_\varepsilon = \boldsymbol{E}.$$

Выполнив преобразования по (148)

$$\delta q_i = \boldsymbol{R}_y(90° - \varphi'_{\varepsilon \cdot i})\,\boldsymbol{R}_z(\lambda_{\varepsilon \cdot i})\,\delta\boldsymbol{u}_{T \cdot i},$$

от дифференциалов геодезических координат на эллипсоиде δq_i перейдем к дифференциалам координат X, Y, Z пунктов триангуляции

$\delta u_{T \cdot i}$ в системе, жестко связанной с Землей. Нормальные уравнения для координат пунктов триангуляции в системе X, Y, Z имеют вид

$$L_T \cdot \delta u_T - l_T = 0, \qquad u_T = \begin{pmatrix} u_{T \cdot 1} \\ u_{T \cdot 2} \\ \cdots \\ u_{T \cdot n} \end{pmatrix}. \tag{236, б}$$

Предположим, что одна из станций наблюдений является исходным пунктом триангуляции и что значения δu_T относятся к разностям координат относительно этого исходного пункта.

Из наблюдений спутников орбитальным методом получим координаты u_S, жестко связанные с Землей; для тех же самых пунктов в системе X, Y, Z имеем

$$L_S \delta u_S - l_S = 0. \tag{236, в}$$

В случае вектора δu_S речь идет о дифференциале разности координат, вычисленной относительно некоторого исходного пункта. u_S представляет собой векторы-столбцы

$$u_{S \cdot i} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix},$$

выражающие координаты отдельных станций.

Разности координат общих пунктов систем u_S и u_T обусловлены малыми перемещениями c_x, c_y, c_z, малыми поворотами ν_1, ν_2, ν_3 триангуляционной сети вокруг осей системы X, Y, Z, а также разницей масштабов триангуляции и спутниковых построений (μ)

$$u_{S \cdot i} = F u_{T \cdot i} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}, \qquad F = (1+\mu) R_z(\nu_3) R_y(\nu_2) R_x(\nu_1). \tag{237}$$

Если ввести случайные ошибки $v_{S \cdot i}$ и $v_{T \cdot i}$ величин $u_{S \cdot i}$ и $u_{T \cdot i}$, то уравнение ошибок будет

$$v_{S \cdot i} - v_{T \cdot i} = -(u_{S \cdot i} - u_{T \cdot i}) + H_i y, \tag{238}$$

где (транспонированный) вектор равен

$$y^T = (\mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, c_x, c_y, c_z) \tag{239}$$

и, используя (25), (26), (27), найдем

$$H_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & -w_i & v_i & 1 & 0 & 0 \\ v_i & w_i & 0 & -u_i & 0 & 1 & 0 \\ w_i & -v_i & u_i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{240}$$

Для получения вектора y следует выполнять уравнивание (238), используя коррелированные наблюдения.

Системы u_S и u_T не коррелированы друг с другом. Их ковариантные матрицы Q_S и Q_T. Ковариантную матрицу случайных величин в левой части (238) найдем по формуле

$$Q = Q_S m_{0 \cdot S}^2 + Q_T m_{0 \cdot T}^2,$$

где индекс i принимает номера всех пунктов. $m_{0 \cdot S}^2$ или $m_{0 \cdot T}^2$ — квадраты средних квадратических ошибок единицы веса спуниковой или триангуляционной сетей.

Если

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdots \\ H_n \end{pmatrix},$$

то в соответствии с выражением (238) для всей сети справедливо уравнение вида

$$v_S + v_T = -(u_S - u_T) + Hy, \qquad (241)$$

а y вычисляется из следующего уравнения:

$$y = \left(H^T Q^{-1} H\right)^{-1} H^T Q^{-1} (u_s - u_T). \qquad (242)$$

Системы u_S и u_T можно определить так, что одна из координатных плоскостей будет являться горизонтальной плоскостью исходного пункта, тогда непосредственно получим углы вращения триангуляционной сети по азимуту и высоте.

11. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИИ

После того, как в четвертой главе было показано, каким образом из возмущений орбит спутников можно определить изменение плотности атмосферы, число Лява k_2 для упругого состояния Земли и замедление вращения Земли, следует более подробно остановиться на геодезических и геофизических интерпретациях результатов спутниковой геодезии.

11.1. СЖАТИЕ ЗЕМЛИ, ЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ЭКВАТОРА И ГРУШЕВИДНАЯ ФОРМА ЗЕМЛИ

Координаты пунктов, полученные с помощью геометрического метода, представляют большую ценность для геодезии. То же самое можно сказать о координатах станций наблюдений, полученных орбитальным методом. Об использовании их для улучшения триангуляций говорилось в десятой главе.

Гармонические коэффициенты и аномалии силы тяжести, полученные орбитальным методом, позволяют определить геоид и потенциал во внешнем пространстве Земли. Некоторые результаты определений геоида и аномалий силы тяжести, полученные из наблюдений спутников, можно видеть на рис. 40—43, 45, 47, 48.

Определение геоида и аномалий силы тяжести уже само по себе является важной научной задачей.

Аномалии силы тяжести, полученные орбитальным методом, также очень важны для определения уклонений отвеса по формуле Венинг—Мейнеса (1). Для вычисления по этой формуле вообще используют результаты наземных съемок, если таковые имеются. Далее, для интегрирования по формуле Венинг-Мейнеса в неизученных еще гравиметрически наземными методами областях рекомендуется использовать аномалии силы тяжести, полученные из наблюдений спутников.

По параметрам, характеризующим гравитационное поле, можно сделать выводы об определенных свойствах формы уровенной поверхности, о геофизических свойствах земной коры и мантии Земли.

Прежде всего нужно рассмотреть *вторую зональную гармонику* J_2 в поле силы тяжести Земли (63), (213, *a*). Как известно из физической геодезии, между J_2 и сжатием общего земного эллипсоида f существует следующая зависимость:

$$\left.\begin{aligned} J_2 &= \frac{C-\frac{A+B}{2}}{MR_E^2} = \frac{2}{3}f\left(1-\frac{1}{2}f\right)-\frac{1}{3}m\left(1-\frac{3}{2}m-\frac{2}{7}f\right)\\ f &= \frac{R_E-\overline{R}_E}{R_E}\\ m &= \frac{\omega_E^2\cdot R_E}{\gamma_E} \end{aligned}\right\}, \quad (243)$$

где C — главный момент инерции Земли относительно оси ее вращения; A и B — два других главных момента инерции, которые относятся к двум взаимно перпендикулярным осям в плоскости экватора; M — масса Земли и m — отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе.

Самое точное значение сжатия, полученное таким путем, составляет

$$f = 1/298{,}255 \pm 0{,}005.$$

Значение f, определенное по J_2, свободно от какого-либо предположения о распределении масс в недрах Земли. Это самое точное значение для сжатия Земли, которое когда-либо было получено.

Ошибке величины f соответствует ошибка разности между большой и малой полуосями общего земного эллипсоида $\pm 0{,}3$ м.

Интересно рассмотреть *секториальную гармонику второго порядка* $J_{2\cdot 2}$. Из возмущений орбиты стационарного спутника получаем (235, *а*)

$$J_{2\cdot 2} = \frac{A-B}{4MR_E^2} = -1{,}816\cdot 10^{-6}.$$

Доля секториальной гармоники второго порядка в геопотенциале определена по формуле

$$-\frac{kM}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 J_{2\cdot 2}\cos 2(\lambda-\lambda^*)\,P_{2\cdot 2}(\sin\varphi),$$

$$P_{2\cdot 2}(\sin\varphi) = 3\cos^2\varphi.$$

Итак, $J_{2\cdot 2}$ — функция двух главных моментов инерции, оси которых находятся в плоскости экватора; λ^* — географическая долгота большой полуоси экваториального эллипса.

По $J_{2\cdot 2}$ можно определить сжатие экватора f^*

$$f^* = 1:91\,827;$$

$$\lambda^* = 15{,}4^\circ \pm 0{,}3^\circ W.$$

По $J_{2\cdot 2}$ и λ^* можно вычислить $\overline{C}_{2\cdot 2}$ и $\overline{S}_{2\cdot 2}$ (235, *а*). Большая полуось экваториального эллипса имеет географическую долготу примерно западного побережья Африки. Разность между обеими полуосями экватора составляет 69,5 ± 0,8 м.

Это первые надежные данные об отклонении экватора от круговой формы. Выводы по этому вопросу, сделанные ранее из триангуляций и измерений силы тяжести, имели весьма незначительную надежность.

В списке зональных гармоник (213, *а*) *гармоника третьего порядка*

$$J_3 = -2{,}565 \cdot 10^{-6}.$$

Эта гармоника вызывает в области северного полюса поднятие геоида примерно на +15 м, в средних северных широтах понижение приблизительно на —5 м, в средних южных широтах опять поднятие геоида около +5 м, на южном полюсе понижение порядка —15 м. Эта гармоника является причиной грушевидной формы Земли.

Относительно большое значение J_3 было большой неожиданностью, так как этот параметр в геометрической фигуре геоида вызывает асимметричную по отношению к экватору структуру. Вращающаяся жидкость, находящаяся строго в гидростатическом равновесии, таким свойством не обладает. Как известно, земная кора обладает значительной твердостью.

Грушевидную форму Земли можно было бы полностью или частично объяснить геофизическими свойствами земной коры, ведь топография тоже асимметрична по отношению к экватору, однако на северном полюсе океан, а на южном — континент, покрытый толстым слоем льда.

На рис. 39 наряду с кривой, выражающей общее влияние зональных гармоник (сплошная линия), представлена отдельно пунктирной кривой доля J_3. Отсюда видно ее доминирующее влияние среди зональных гармоник. При рассмотрении картографического изображения геоида на рисунках 40—43, 47 видно, что поднятия и понижения его с амплитудами до 80 м и более встречаются редко и доля J_3 с амплитудой порядка 15 м имеет большое значение.

11.2. СРАВНЕНИЕ ГЕОИДА, ОПРЕДЕЛЕННОГО ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ СПУТНИКОВ, С ИЗОСТАТИЧЕСКИМ ГЕОИДОМ

На рисунках 40—43, 47 изображены некоторые из геоидов, полученные по результатам наблюдений спутников. Рисунки свидетельствуют о больших волнах на поверхности этой фигуры. Интересно поднять вопрос, на каких же глубинах в Земле находятся неравномерности масс, которые вызывают эти ондуляции геоида. Нужно исследовать, находятся ли эти отклонения от гидростатического состояния в земной коре или же захватывают области, лежащие глубже, в верхней или нижней мантии Земли, или даже в земном ядре.

Из топографии прежде всего очевидно, что внутри земной коры появляются отклонения от гидростатического равновесия. Из сейсмических и гравиметрических наблюдений установлено, что структура коры при глобальном рассмотрении определяется с помощью гипотезы изостазии Эри. Поверхность Мохоровичича имеет переменную, соответствующую теории изостазии глубину. Изостазия оказывает выравнивающее действие.

Если предположить в идеальном случае, что структуру земной коры определяют строго с помощью гипотезы изостазии Эри, то топографические массы и массы изостатической компенсации вызовут определенные изостатические ондуляции геоида, которые точно вычисляются на основании топографии. Они образуют так называемый изостатический геоид (рис. 49).

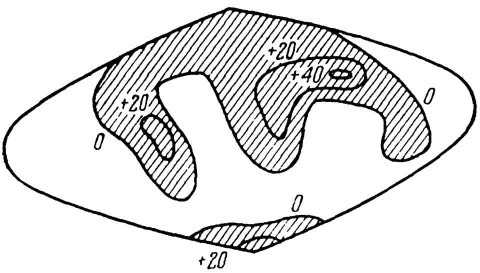


Рис. 49. Изостатический геоид по К. Юнгу. Ондуляции (в м) определены в системе Эри из разложений по сферическим функциям до седьмого порядка

Сравнение геоида на рис. 49 с геоидами, полученными из наблюдений спутников (рисунки 40—43, 47), показывает, что между фактическим и изостатическим геоидами мало сходства.

Поэтому только изостазия не может быть причиной наличия ондуляций геоида.

Напротив, можно утверждать, что обязательно должны появляться аномалии плотности, т. е. отклонения от состояния равновесия по Клеро и Дж. Дарвину в мантии Земли. Эти аномалии плотности в значительной мере и будут вызывать ондуляции геоида.

11.3. АНОМАЛИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В МАНТИИ ЗЕМЛИ

Различные геофизические наблюдения устанавливают наличие напряжений в недрах Земли, поэтому невозможно распределение плотностей как при гидростатическом равновесии в соответствии с математическими теориями Клеро и Дж. Дарвина.

Так, в настоящее время полагают, что причину землетрясений нужно искать в том, что возникающие в верхней мантии Земли напряжения высвобождаются по достижении критической величины. Установлено, что чаще всего землетрясения имеют свой очаг на глубине от 50 до 100 км. Отдельные глубинные землетрясения начинаются на глубине 700 км.

В вопросе о возникновении континентов и океанов наряду с другими теориями вернулись к теории континентального дрейфа, предложенной ранее Вегенером.

Тот факт, что край шельфа, проходящего на глубине около 500 м, на восточном побережье Северной, Центральной и Южной Америки очень хорошо совпадает с краем шельфа западного побережья Африки — один из важнейших аргументов в пользу предполагаемого дрейфа континентов.

Неожиданное открытие узкого горного хребта, простирающегося по дну Атлантического океана между Америкой и Африкой с севера на юг, считают дальнейшим обоснованием теории континентального дрейфа. Подобные горные хребты, расположенные на океанском дне, обнаружены и в других океанах.

При более точном исследовании этих расположенных на дне океана горных хребтов нашли, что вблизи их морское дно имеет возраст примерно от 1 до 20 миллионов лет, в то время как морское дно вблизи шельфа соседних континентов намного старше, имеет возраст около 150 миллионов лет. Магнитные исследования морского дна приводят к такому же выводу.

Эти наблюдения позволяют предположить, что в области молодых горных хребтов на дне океана материал выступает из глубины земной мантии отвесно, затем растекается горизонтально по верхней границе мантии в обе стороны горного хребта и при этом сдвигает перед собой континенты, которые, таким образом, должны удаляться друг от друга в течение 150—250 миллионов лет на 1—3 см в год. Предполагаемые при этом конвекционные течения в мантии Земли вызывают появление аномалий плотности в земных недрах и влияют на поле силы тяжести во внешнем пространстве.

Эти конвекционные течения могут возникать вследствие распределения тепла в недрах Земли. Конвекционные потоки физически возможны, если уменьшение температуры происходит в направлении от центра Земли к поверхности и связанный с этим поток тепла достигает определенного критического значения. Можно показать, что тепловой поток, возможный в недрах Земли вследствие теплопроводности, может достигать этого критического значения.

Вопрос о том, могут ли появляться конвекционные потоки во всей мантии Земли или только в верхней мантии, — спорный. В верхней мантии Земли, на глубине от 50 до 400 км, их существование более вероятно, чем в нижней мантии Земли.

С одной стороны, конвекционные потоки в недрах Земли возможны, если вязкость материала не слишком велика. Дискуссионным является вопрос о верхней границе кинематической вязкости нижней мантии Земли 10^{26} $см^2сек^{-1}$, где конвекционные потоки еще возможны. С другой стороны, вязкость должна быть значительной, если аномалии плотности, следующие из геодезических и других наблюдений, являются перманентным явлением.

Исходя из изостатического равновесия земной коры, для самых верхних слоев верхней мантии Земли установили кинематическую вязкость около $3 \cdot 10^{21}$ $см^2сек^{-1}$. Отсюда можно было бы сделать заключение о значительном увеличении кинематической вязкости в направлении к центру Земли.

Изостатическое равновесие, возникающее при таянии глетчеров ледникового периода, является свидетельством того, что в верхних слоях мантии Земли довольно легко могут возникнуть конвекционные потоки регионального распространения.

Предполагают, что раньше континенты плотно прилегали друг к другу, а затем разошлись. Это можно объяснить, не пытаясь сделать убедительной гипотезу конвекционных потоков. Здесь прежде всего надо назвать гипотезу о расширении Земли.

Из анализа различных геодезических и геологических явлений можно сделать вывод, что при возникновении Земли, около 3—4 миллиардов лет назад, радиус Земли был примерно в 0,55 раз меньше, чем сейчас, так что континенты покрывали всю поверхность Земли.

Происходящее расширение Земли привело к современному распределению континентов и океанов.

По Эджейду, радиус Земли увеличивался примерно на 0,6 мм в год.

По Дираку, в процессе эволюции гравитационная постоянная должна уменьшаться ежегодно примерно на $1:10^{10}$, причем возраст Земли принимают равным 10 миллиардам лет. Это приведет к увеличению радиуса Земли примерно на 0,05 мм в год.

Известно, что полученные из этих гипотез о расширении Земли скорости дрейфа континентов слишком малы по сравнению с перемещением на 1—3 см в год, вытекающим из других геофизических наблюдений.

В связи с обсуждением вопроса о том, могут ли аномалии поля силы тяжести быть интерпретированы через аномалии плотности в недрах Земли, нельзя забывать о вертикальном тепловом потоке в теле Земли. Это явление за последние годы вызвало большой интерес, так как термические аномалии приводят к аномалиям плотности, которые затем выражаются как аномалии поля силы тяжести Земли.

После того, как примерно на 20% земной поверхности были выполнены измерения теплового потока, неожиданно обнаружили, что среднее значение теплового потока для всей Земли, довольно постоянно. Он составляет примерно $1{,}5 \pm 10\%$ μкал $\cdot$ см$^{-2}$ $\cdot$ сек$^{-1}$ как в области океанов, так и в области континентов.

Так как радиоактивность коры считали главным источником тепла, то в океанах ожидали меньший тепловой поток, чем на континентах, учитывая, что в океанах кора тоньше, чем на континентах.

Так как тепловой поток в недрах Земли в основном независим от географического положения и является примерно постоянным, если рассматривать эту проблему глобально, то в океанах источники тепла следует искать в верхней мантии Земли. Там, по всей вероятности, нельзя провести четкую границу между земной корой и мантией Земли. Это представляет интерес с точки зрения гравиметрии, если учесть, что в общем на этой границе имеет место четкий скачок плотности примерно на 0,6 гсм$^{-3}$.

Конечно, тепловой поток тоже имеет аномалии по отношению к среднему значению, однако эти аномалии довольно малы.

Считая областями с аномальным тепловым потоком такие, в которых тепловой поток меньше, чем 0,8 μкал см$^{-2}$ сек$^{-1}$, или больше, чем 2,0 μкал $\cdot$ см$^{-2}$ $\cdot$ сек$^{-1}$, найдем лишь сравнительно небольшие такие области.

Было установлено, что щиты раннего кембрия имеют сравнительно слабый тепловой поток и большую скорость распространения сейсмических волн в верхней мантии Земли. Для них характерна относительно равномерная радиоактивность.

Напротив, активные в тектоническом отношении области имеют, как правило, сравнительно сильный тепловой поток и малую скорость распространения сейсмических волн в верхней мантии Земли. Их радиактивность неравномерна.

Все эти геофизические явления позволили заключить, что верхняя мантия Земли не может полностью находиться в состоянии гидростатического равновесия. Поэтому мы вправе ожидать аномалии плотности в недрах Земли, аномалии, которые зависят от географического положения и глубины, аномалии, действующие лишь в малых областях, и аномалии, охватывающие большие области.

Эти отклонения от нормальной фигуры Земли приводят неизбежно к аномалиям во внешнем поле силы тяжести Земли.

Аномалия в скорости распространения сейсмических волн будет сопровождаться аномалией плотности, которая неизбежно вызовет аномалию в поле силы тяжести Земли.

При восходящем конвекционном потоке увеличивается температура, вследствие термического расширения происходит уменьшение плотности, так что восходящие конвекционные потоки сопровождаются понижением геоида.

Для областей, в которых наблюдаются аномально мощные тепловые потоки, можно также ожидать понижения геоида; однако до сих пор оказывалось, что в областях с аномальным тепловым потоком отсутствует статистически значимая связь с соответствующими аномальными структурами в интенсивности силы тяжести. Корреляция теплового потока и силы тяжести по эмпирико-статистическому материалу находится под вопросом. Тесная корреляция между этими величинами, найденными из рассмотрения разложений по сферическим функциям низшего порядка, едва ли является надежной, так как для теплового потока в настоящее время нельзя определить с достаточной точностью коэффициенты сферических функций низшего порядка.

При исследованиях структуры верхней мантии надо привлекать и комплексно рассматривать все геофизические наблюдения в этой области Земли, включая данные о поле силы тяжести Земли.

Если эти геофизические исследования использовать для сравнения с полем силы тяжести Земли, то следует исходить не из истинного геоида, как это представлено на рисунках 40—43, 47, так как причина части ондуляций истинного геоида известна наверняка: изостатическая структура земной коры.

Надо исключить из ондуляций истинного геоида ондуляции изостатического геоида (см. рис. 49) и остаточные ондуляции использовать для интерпретации геофизических явлений, как это сделал Рункорн (рис. 50).

Остаточные ондуляции геоида согласно рис. 50 на континентах в основном отрицательные, а на океанах — положительные.

Из геофизических исследований сейсмичности, теплового потока, континентального дрейфа и конвекционных потоков следует, что аномалии плотности образуются в мантии Земли, это подтверждается анализом результатов спутниковой геодезии.

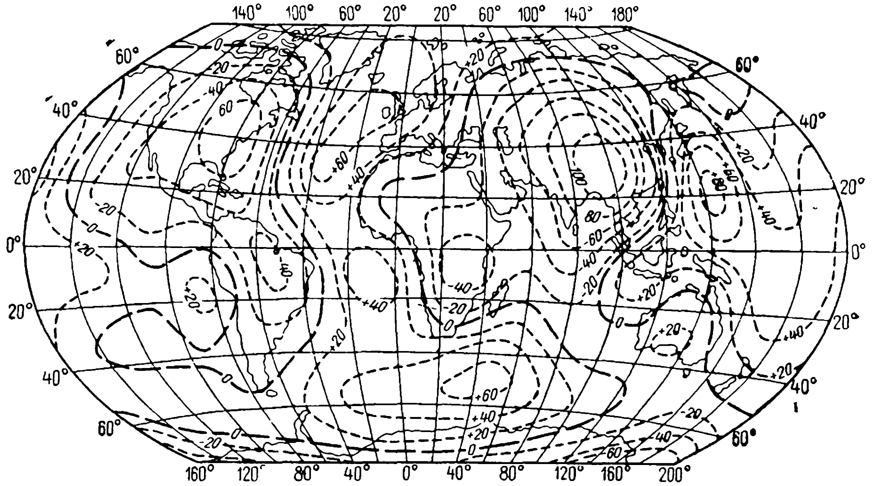


Рис. 50. Остаточные ондуляции (в м) по С. К. Рункорну. Эти ондуляции образованы путем вычитания от ондуляций геоида, полученных Гайером и Ньютоном (1965) из наблюдений спутников, ондуляций изостатического геоида при условии соблюдения изостатической компенсации.

Если разложить ондуляции изостатического геоида (см. рис. 49) по сферическим функциям и сравнить коэффициенты этого разложения с коэффициентами разложения по сферическим функциям гравитационного поля Земли (рис. 40—43, 47), полученными из наблюдений спутников, то найдем, что обе системы слабо коррелированы друг с другом. Эту слабую корреляцию нельзя усилить, изменяя глубину компенсации или плотность масс земной коры.

Можно заключить, что аномалии плотности, вызывающие аномалии силы тяжести, слабо коррелированы с топографией. Их можно истолковать либо как поверхностные образования на коре, которые не коррелированы с топографией, либо как аномалии плотности в мантии Земли, которые тоже не коррелированы с топографией.

Но и в случае поверхностных образований на коре мантия Земли не осталась бы в гидростатическом равновесии. Эти образования будут вызывать дополнительный потенциал, который деформирует уровенные поверхности и тем самым нарушает гидростатическое равновесие, в то время как согласно предпосылке, поверхности одинаковой плотности не должны изменяться.

Анализ результатов спутниковой геодезии подтверждает, что в мантии Земли должны появляться аномалии плотности, т. е. отклонение от распределения плотностей, которое следует из теорий Клеро и Дж. Дарвина для гидростатического состояния Земли.

По второй зональной гармонике, определенной из спутниковых наблюдений, и динамическому сжатию H, определенному из астрономических наблюдений, можно с уверенностью заключить, что в мантии Земли имеются отклонения плотности от состояния гидростатического равновесия по Клеро и Дж. Дарвину.

Из спутниковых наблюдений с высокой степенью точности определили

$$J_2 = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{MR_E^2} = 1082{,}639 \cdot 10^{-6}.$$

Отсюда вывели по (243) сжатие f ($f^{-1} = 298{,}255$).

До появления искусственных спутников Земли считали надежно определенной величину сжатия, которую вычисляли из прецессионных постоянных P и отношения массы Луны $m_{☾}$ к массе Солнца $m_{\odot}$

$$\mu = \frac{m_{☾}}{m_{\odot}}.$$

Зная величины P и μ, можно вычислить динамическое сжатие Земли H по формулам

$$P = \left(P_1 + P_2 \frac{\mu}{1+\mu}\right) H,$$

$$P = 5493{,}847'' - 0'',0036T,$$

$$P_1 = 530\,977{,}04'' (1 - 2{,}0839 \cdot 10^{-6} T),$$

$$P_2 = 94\,419\,319'' (1 - 1{,}69 \cdot 10^{-8} T),$$

где T — число тропических лет от 1900 · 0.

При условии гидростатического равновесия в недрах Земли с помощью H получим сжатие $f = f_1$ по следующей формуле:

$$H = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{C} = \frac{f_1 - \frac{1}{2} m}{1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}\frac{m}{f_1} - 1}}. \tag{244}$$

Так, Ситтер и Спенсер Джонс нашли

$$f_1^{-1} = 297{,}300 \pm 0{,}065.$$

Даже если средняя квадратическая ошибка этой величины характеризует внутреннюю точность метода, то расхождение между значениями f^{-1} и f_1^{-1} слишком велико, чтобы его можно было объяснить неточностью наблюдений.

Важно иметь в виду, что отношение

$$q=\frac{3}{2}\frac{C}{MR_E^2}=\frac{3}{2}\frac{J_2}{H}$$

можно вычислить теоретически по f и m с высокой точностью при условии гидростатического равновесия, примерно до 10^{-4}. При этом закон распределения плотности в недрах Земли не должен быть известен точнее, чем это дают сейсмические наблюдения. Если пренебречь уточнениям по Дж. Дарвину, то здесь надо применить следующую формулу

$$q=\frac{3}{2}\frac{C}{MR_E^2}=1-\frac{2}{5}\left\{\frac{5}{2}\frac{m}{f}\left(1-\frac{3}{2}m\right)-1\right\}^{1/2}. \qquad (244,\ a)$$

При этом можно рассуждать следующим образом. Если исходить из полученного по наблюдениям спутников значения, независимого от гипотезы,

$$J_2=\frac{C-\frac{A+B}{2}}{MR_E^2},$$

разделить это значение на $\frac{2}{3}q$, то получим для состояния гидростатического равновесия динамическое сжатие по значениям f, J_2 и q

$$H=\frac{C-\frac{A+B}{2}}{C}.$$

Зная H, можно вычислить по (244) значение сжатия f_2, которое согласовано со значением J_2, полученным из наблюдений спутников, для состояния гидростатического равновесия

$$f_2=1:299{,}6.$$

Полученные значения сжатия расходятся. Отсюда следует, что нельзя исходить из предпосылки о состоянии гидростатического равновесия.

Чтобы прийти к численной оценке аномалий плотности в мантии Земли, исходят в дальнейшем из значения q.

Из астрономических наблюдений, используя прецессионные постоянные, получают очень точно

$$H=0{,}00327260\pm6{,}9\cdot10^{-7},$$

а J_2 надежно определяют из наблюдений спутников; далее получают q как отношение обоих эмпирически полученных, независимо от гипотезы о внутреннем строении, значений

$$q = 0{,}49642 \pm 1{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

Была введена модель Земли с действительными значениями f, q, M, R_E. Этой модели Земли соответствует истинное значение C.

На основании сказанного эта модель Земли не может находиться в состоянии гидростатического равновесия. Для состояния гидростатического равновесия, используя f, по (244, a) получаем

$$q = 0{,}4983.$$

Расхождение двух значений q равно

$$dq = -0{,}0019 \pm 0{,}00014,$$

что является ощутимой величиной.

Для идеальной, находящейся в состоянии гидростатического равновесия Земли с сжатием f должны изменяться q и dq и тем самым должно нарушаться гидростатическое равновесие, чтобы обеспечивалось распределение плотности, соответствующее принятой модели Земли. При таких изменениях плотности не должен изменяться потенциал в точках на поверхности Земли и во внешнем пространстве, а также масса M.

Используя dq, вычисляем соответствующее изменение осевого момента инерции C

$$\frac{dq}{q} = \frac{dC}{C} = -0{,}0038 \pm 0{,}00028.$$

Если обозначим расхождение между распределением плотности в реальной моделе Земли и распределением плотности для состояния гидростатического равновесия, т. е. аномалию плотности, через θ то имеют место следующие условные уравнения:

$$\iiint_v \theta\, dv = 0, \quad \iiint_v \theta \left[\frac{1}{E}\right]_\sigma dv = 0, \quad \iiint_v \theta p^2\, dv = dC. \qquad (245)$$

где p — расстояние от оси вращения Земли; $\left[\frac{1}{E}\right]_\sigma$ — величина, обратная расстоянию элемента объема dv от исходного пункта, расположенного на поверхности σ.

Если бы аномалии плотности θ имелись только в земной коре, то гипотезу можно было бы объяснить только поверхностными образованиями мощностью около 12 км, что невозможно геофизически.

Аномалии плотности должны обязательно иметься и в мантии Земли.

Порядок разности давлений, возникающих в мантии Земли, оценивается из исследований максимальной величиной 10^8 дин/см^2 = = 100 бар (Джеффрис 40 бар, Капуто 30 бар).

Отклонения от состояния гидростатического равновесия часто объясняют «ископаемым» сжатием в недрах Земли. Земля в ранние геологические эпохи вращалась быстрее и достигла теперешней скорости вследствие тормозящего действия приливов и отливов.

Уменьшение скорости вращения Земли могло быть также следствием расширения Земли, как это трактуется некоторыми авторами на основе теории Дирака об уменьшении со временем гравитационных постоянных и на основе других теорий. Если проследить за гипотезой о расширении Земли, то с точки зрения геофизики трудно представить, что «ископаемое» сжатие в верхней мантии Земли могло сохраняться более чем 100 000 лет, в то время как согласно гипотезе об изостатическом равновесии на время релаксации блоков верхнего слоя верхней мантии Земли отводится только 7000 лет. «Ископаемое» сжатие могло появляться раньше и в более глубоких недрах Земли, потому что там кинематическая вязкость больше.

Поэтому предполагают, что при отклонениях от состояния гидростатического равновесия речь идет о явлении, возникновение которого относится к ледниковому периоду.

Тогда полярные области были покрыты мощными слоями льда, которые давили на лежащие под ними слои и, конечно, влияли на структуру земной коры и верхней мантии Земли. Надо исследовать, достаточно ли было давления полярных шапок, чтобы объяснить вытекающие из спутниковых наблюдений отклонения от состояния гидростатического равновесия, продолжающиеся еще и в настоящее время.

Полученный из наблюдений спутников вывод (245) об аномалиях в мантии Земли имеет значение, по крайней мере, для работ по Проекту Верхняя мантия.

Некоторые авторы считают, что ондуляции в граничном слое между ядром и мантией Земли тоже могут являться причиной аномалий силы тяжести, определяемых из наблюдений спутников, так как скачок плотности достигает там значительной величины, около $\vartheta_k = 4$ г $\cdot$ см$^{-3}$.

Представляя вертикальную деформацию границы ядра в виде разложения по сферическим функциям $t_n \cdot P_n$ $(\sin \varphi)$, полагая, что G — среднее значение силы тяжести на поверхности Земли, $\vartheta_m = 5{,}5$ г $\cdot$ см$^{-3}$ — средняя плотность всей Земли и r_k — радиус ядра Земли, можно установить, что поверхностные образования на границе ядра вызывают на поверхности Земли (радиус R_E) следующий возмущающий потенциал:

$$G \frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\vartheta_k}{\vartheta_m} t_n \left[\frac{r_k}{R_E}\right]^{n+2} P_n(\sin \varphi).$$

Если исходить из того, что параметр этого возмущающего потенциала t_n должен быть установлен таким, чтобы коэффициент J_n при зональной сферической функции n-ого порядка в разложении гравитационного поля Земли получался равным $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ (такое значение вполне приемлемо), то мощность поверхностных образований t_n на границе ядра принимает следующие значения в зависимости от порядка сферической функции n.

n	t_n, км
2	0,02
4	0,1
6	0,5
8	2,
10	9,
12	36,
14	140,

Как видно из таблицы, при сферических функциях высшего порядка t_n достигает значений, которые нельзя объяснить с точки зрения геофизики.

Сферические функции низшего порядка в разложении поля силы тяжести Земли могут быть вызваны отчасти аномалиями плотности в более глубоких слоях мантии Земли и аномалиями на границе ядра.

Сферические функции высшего порядка едва ли могут быть вызваны аномалиями плотности в более глубоких слоях. Они имеют свой источник в верхних слоях мантии Земли и в земной коре.

11.4. БОЛЬШАЯ ПОЛУОСЬ ОБЩЕГО ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

В гл. 9 было показано, как можно, зная массу Земли и период обращения спутника, по третьему закону Кеплера (171) получить большую полуось орбиты и, таким образом, масштаб в орбитальном методе. Из уравнивания, наряду с параметрами гравитационного поля, получались также пространственные координаты станций наблюдений. Станции наблюдений Q находятся на поверхности Земли. Их геоцентрические радиусы — значения R_Q. Если спроектировать эти пункты по нормалям на общий земной эллипсоид, то на этой поверхности будет столько точек Q', сколько имеется станций наблюдений (рис. 51). Тогда геоцентрические радиусы будут $R_{Q'} = R_Q - h - N$.

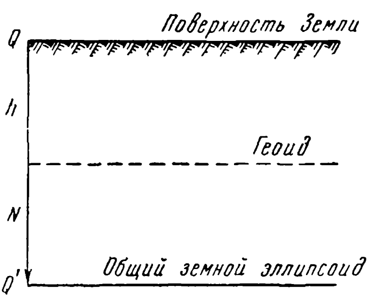


Рис. 51. Проекция (точка Q') пункта Q физической поверхности на общий земной эллипсоид

Эти точки, расположенные на общем земном эллипсоиде, позволяют определить его большую полуось R_E, после того, как по J_2 очень точно определено сжатие эллипсоида, которое может рассматриваться как исходная величина.

Для точек Q', полученных проектированием на общий земной эллипсоид, имеем прямоугольные координаты

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho + \delta R_E)\cos\varphi'\cos\lambda \\ (\rho + \delta R_E)\cos\varphi'\sin\lambda \\ [\rho(1 - e_E^2) + \delta R_E]\sin\varphi' \end{pmatrix}, \qquad \rho = R_E^{\circ}\frac{1}{\sqrt{1 - e_E^2\sin^2\varphi'}}.$$

Введем земной эллипсоид, центр которого совпадает с центром масс Земли, и который имеет такой же эксцентриситет e_E, и сжатие f, как и общий земной эллипсоид

$$f^{-1}=298{,}255; \qquad e_E^2=2f-f^2.$$

Его большая полуось R_E^0. Надо найти поправку $\delta R_E = R_E - R_E^{0}$, чтобы перейти к общему земному эллипсоиду. δR_E — неизвестное задачи. Для каждого отдельного пункта надо определить радиальные отклонения от эллипсоида с большой полуосью R_E^0 по следующим формулам:

$$R_{\text{набл}} - R_{\text{выч}} = R_{Q'} - R_{\text{выч}} =$$

$$= R_{Q'} - R_E^0\left(1-\frac{1}{2}e_E^2\sin^2\varphi' + \frac{1}{2}e_E^4\sin^2\varphi' - \frac{5}{8}e_E^4\sin^4\varphi' + \ldots\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi' \cong \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cdot\frac{1}{1-e_E^2}.$$

Потребуем, чтобы при определении R_E сумма квадратов радиальных остаточных отклонений равнялась бы минимуму. Уравнение ошибок будет

$$v = R_{\text{выч}} - R_{\text{набл}} + \delta R_E,$$

причем δR_E — определяемая из уравнивания поправка приближенного значения большой полуоси введенного à priori общего земного эллипсоида.

Если положения 12 станций заданы с достаточной точностью порядка 10—20 м, то ошибка этого метода по внутренней сходимости едва ли может превысить ± 5 — ± 10 м.

Проблемой является только проектирование станций наблюдений на общий земной эллипсоид в точки Q' вдоль нормали на величину высоты над уровнем моря h и на локальные ондуляции геоида N (см. рис. 51).

Высоту над уровнем моря h можно определить из нивелирования с ошибкой всегда меньше метра.

Определение локального значения ондуляции геоида N сложнее.

Для N можно взять значение, которое получается из наблюдений спутников как превышение геоида над эллипсоидом. Но это региональное среднее значение, которое может отличаться от используемого здесь локального значения на 10—20 м. Поэтому лучше для зоны радиусом около 1000 км вокруг станции определять локальные деформации геоида геометрически из астрономического нивелирования по методу площадей или гравиметрически по формуле Стокса в том случае, если из наземных измерений имеются подробные данные о поле силы тяжести для близких и далеких зон. Таким образом, получим значения N, которые близки локальным значениям, Эту часть поверхности геоида, содержащую детальные структуры, можно связать с геоидом, полученным из наблюдений спутников, по методу наименьших квадратов.

Представленный метод является сейчас самым точным для определения большой полуоси общего земного эллипсоида. Лучшее значение, полученное таким образом,

$$R_E = 6\,378\,142 \pm 6 \text{ м}.$$

Имеется еще другой метод определения R_E, в котором также используются наблюдения искусственных небесных тел. Но тогда привлекают и наземные измерения силы тяжести.

При этом используют уравнение из физической геодезии

$$kM = R_E^2 \gamma_E \left(1 - f + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} mf + \ldots\right), \qquad (246)$$

где f и m — известные значения (243), γ_E — нормальная сила тяжести на экваторе, которую можно получить, вычитая из сферической функции нулевого порядка в разложении поля силы тяжести Земли постоянную Потсдамской системы, равную примерно 14 мгл.

Так как произведение kM определено очень точно из наблюдений лунных зондов

$$kM = 3{,}986009 \pm 0{,}7 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2}$$

и имеются надежные значения γ_E, f и m, можно из уравнения (246) вычислить R_E. Так получили

$$R_E = 6\,378\,138 \text{ м},$$

хорошо согласованное со значением, полученным по координатам станций. Величина γ_E может быть ошибочной примерно на 3 мгл и поэтому является одним из самых главных источников ошибок последнего метода.

Зависимость между собой трех параметров f, γ_E, R_E из уравнения (246) выражается следующей таблицей, полученной Р. Раппом.

$1/f$ \ γ_E	978026 мгл	027	028	029	030
298,24	R_E = 6378165,6 м	162,4	159,1	155,9	152,7
298,25	R_E = 6378165,2 »	162,0	158,8	155,5	152,3
298,26	R_E = 6378164,9 »	161,7	158,4	155,2	151,9

Если сферическая функция нулевого порядка в разложении поля силы тяжести Земли изменяется на δg_0, а сжатие — на δf, то сила тяжести на экваторе изменится в соответствии с уравнением

$$\delta\gamma_E = \delta g_0 + \frac{1}{3} \gamma \delta f.$$

Определение величины R_E из наблюдений спутников с точностью около 1 : 1 000 000, безусловно, является большим достижением

11.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold K.: Die Präzessionsbewegung der Erde und der Bahnen der künstlichen Erdsatelliten, die Abplattung der Erde und die Dichteverteilung im Erdinnern. Gerl. Beitr. Geophysik, 69 (1960) H. 4.

2. Gaskell T. F.: The Earth's Mantle. London, New York. Acad Press 1967.

3. Kaula W. M.: Determination of the Earth's Gravitational Field. Rev. Geophysics 1 (1963) No. 4.

4. Lundquist C. A. Veis G.: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth. Vol. 3, SAO Special Report 200 (1966).

5. Sitter de W.: On the mean radius of the earth, the intensity of gravity, and the moon's parallax. Proceedings of the Koninklijke Akad, van Wetenschapen te Amsterdam, 1915.

6. Sitter de W.: On isostasy, the moments of inertia and the compression of the earth. Proceedings of the Koninklijke Akad. van Wetenschapen te Amsterdam, 1915.

7. Sitter de W.: On the Flattening and the Constitution of the Earth. Bull. Astronom. Inst. Netherlands, Band 11 (1924) Nr. 55.

8. Spencer Jones H.: Dimensions and Rotations. In.: The Earth as a Planet: The Solar System. Vol. 11, ed Kuiper, Chicago 1954.

9. Veis G.: The Determination of the Radius of the Earth and other Geodetic Parameters as Derived from Optical Satellite Data. IUGG Generalversammlung, 1967.

10. Wagner C. A.: Longitude Variations of the Earth's Gravity Field as Sensed by the Drift of Three Synchronous Satellites. J. Geophys. Res. 71 (1966) No. 6.

11. Wang Chi — Yuen Some Geophysical Implications from Gravity and Heat Flow Data. J. Geophys. Res. 70 (1965) No. 22

12. Wang Chi — Yuen: Earth's Zonal Deformations. J. Geophys. Res. 71 (1966) No. 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ