

Б22.7(083)  
Б-20

# БАЛАНС МЕТАЛЛОВ

РАСЧЕТЫ  
НА ЭВМ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ



622.7	49032
Б-20	
Таблицы металлов	
Расчеты на ЭВМ.	
1991	0=70к

Книга должна быть возвращена не  
позже указанного здесь срока

Количество предыдущих выдач _____
22 05 15 - 1968

2005 .

622.7(083)  
Б - 20

# БАЛАНС МЕТАЛЛОВ РАСЧЕТЫ НА ЭВМ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА	1
Изд. № _____	
Инд. № 49032	



МОСКВА "НЕДРА" 1991

ББК 33.4

Б 20

УДК 622.7.001.26/036

Авторы: *В.И. Браун, В.Г. Дюмин, В.С. Процудо, И.М. Милин*

**Баланс металлов. Расчеты на ЭВМ: Справочное пособие/В.И. Браун, В.Г. Дюмин, В.С. Процудо, И.М. Милин. — М.: Недра, 1991. — 192 с., ил.**

ISBN 5-247-01425-1

Изложены современные методы расчета технологического и товарного баланса на обогатительных фабриках, а также методы корректировки контролируемых параметров с учетом погрешности их измерения. Дан анализ особенностей составления товарного баланса и оценки достоверности и точности сведения его на обогатительной фабрике. Рассмотрены основные элементы программно-алгоритмического обеспечения и организация расчетов на ЭВМ. Приведены примеры расчета из практики работы обогатительных фабрик, отражающие многообразие ситуаций, в которых возникает необходимость решения балансовых задач.

Для специалистов в области обогащения полезных ископаемых и автоматизации технологических процессов.

Б 2504000000 — 052 174—91  
043 (01) — 91

ББК 33.4

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Браун Владимир Иосифович  
Дюмин Виктор Георгиевич  
Процудо Владимир Станиславович  
Милин Исаак Моисеевич

**БАЛАНС МЕТАЛЛОВ. РАСЧЕТЫ НА ЭВМ**

Заведующий редакцией *О.И. Паркани*, редактор издательства *М.В. Чуваева*, технические редакторы *Ю.В. Втехина, Н.С. Анашкина*, корректор *Е.М. Федорова*, операторы *И.В. Севалкина, Н.В. Штанько*

ИБ № 8124

Подписано в печать с репродуцированного оригинал-макета. 05.02.91. Формат 60x88<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. офсетная № 2. Гарнитура Универс. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 12,13. Уч.-изд. л. 12,45. Тираж 1480, экз. Зак. № 627 /2221-9. Цена 70 коп.

Набор выполнен на наборно-пишущей машине

Ордена "Знак Почета" издательство "Недра".  
125047 Москва, Тверская застава, 3.

Московская типография № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата" Госкомитета СССР по печати.  
109033, Москва, Володавская ул., 40

ISBN 5-247-01425-1

© Коллектив авторов, 1991

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

При решении задач интенсификации народного хозяйства, создания базы, стимулирующей развитие машиностроения, приборостроения, электроники, а также обеспечения эффективного развития сельскохозяйственного производства существенная роль отводится отраслям промышленности сырьевого комплекса. Перед этими отраслями, работающими в условиях увеличения объемов производства и обеднения месторождений полезных ископаемых, встают новые проблемы, обусловленные необходимостью комплексной переработки минерального сырья, ухудшением его технологических свойств, повышением экологических требований к организации технологии и производства, необходимостью создания по возможности безотходной и безлюдной технологии.

Решение этих проблем возможно на основе: существенного повышения уровня исследовательских работ по созданию новой и совершенствованию существующей технологии; разработки высокоэффективного крупноразмерного технологического оборудования; использования прогрессивных конструктивно-компоновочных решений при проектировании производственных объектов; внедрения автоматизированных систем управления агрегатами, процессами и производством в целом. При этом необходимо обеспечить достоверную и объективную оценку принимаемых решений и достигнутых результатов.

Несмотря на разнообразие исходного сырья, используемого в черной и цветной металлургии, производстве минеральных удобрений, угольной и других отраслях промышленности, различную структуру и аппаратурное оформление схем его первичной переработки и обогащения, основой технологии является широкий класс процессов, базирующихся на разделении компонент по тем или иным признакам. При этом выбор признаков обусловлен различием свойств полезных минералов и пустой породы в исходном продукте. Многообразие возможных различий предопределило разнообразие методов разделения, используемых в практике обогащения: гравитационные, флотационные, магнитные, радиометрические, рентгено-радиометрические и др. Однако для всех этих методов характерно получение в результате разделения продуктов, в одних из которых (хвостах) концентрируется пустая порода, а в других (концентратах) — полезные компоненты.

Вполне естественно, что при разработке и реализации процессов разделения возникла необходимость количественно оценить их эффективность. Такой оценкой прежде всего могут быть характеристики выходных продуктов, отражающие массовую долю (содержание) в них

полезных компонентов и примесей. Именно эти параметры позволяют получить ответ на вопросы: произошло ли разделение, насколько полученные продукты удовлетворяют требованиям, выдвигаемым со стороны технологических процессов дальнейшей переработки (металлургических, гидрометаллургических, химических и т.д.).

Важнейшее значение имеет масса полученных в результате разделения продуктов, которая характеризует производительность создаваемого процесса, во многом предопределяет выбор технологического оборудования и капитальные затраты. И наконец, можно выделить характеристики, позволяющие оценить эффективность использования исходного сырья, т.е. определить, какая часть из общего количества полезного компонента перешла в концентраты, что потеряно в хвостах и т.д.

Анализ показывает, что основную информационную нагрузку несут характеристики, отражающие содержание полезных компонентов и примесей в выходных продуктах, поскольку остальные могут быть определены на их основе расчетным путем. Это предопределило развитие, в первую очередь, методов и средств анализа элементного состава руды и продуктов обогащения. Классические методы химического анализа, разработка достаточно точных методов экспрессного анализа, широкое внедрение в практику разнообразных методов и технических средств инструментального анализа позволяют считать, что проблема контроля элементного состава руд и продуктов обогащения в настоящее время в основном решена.

Круг задач, связанных с определением расчетным путем других характеристик разделительных процессов, принято относить к проблеме расчета технологических балансов. Среди многочисленных практических инженерных задач, в которых приходится сталкиваться с этой проблемой, можно назвать исследование руд на обогатимость, сравнение нескольких вариантов технологических схем и выбор наилучшей, испытания и выявление эффективности нового оборудования, расчет качественно-количественных схем и выбор оборудования при проектировании обогатительных фабрик, технологическую оценку результатов работы обогатительной фабрики или ее части (пердела, секции) за заданный промежуток времени. В последнее время к ним добавились задачи построения математических моделей, управления и оптимизации.

Под расчетом технологического баланса будем понимать последовательность вычислительных операций с целью определения выходов продуктов, масс металлов в них и извлечений по измеренным массам входных продуктов и массовым долям компонентов в продуктах.

Название "технологический баланс" обусловлено тем, что при расчете выходов за основу принимаются уравнения материального баланса, являющиеся математическим выражением закона сохранения вещества. Одно из уравнений отражает равенство масс твердого на входе и выходе объекта, другие — равенство масс компонентов или частиц определенного класса крупности. Совокупность этих соотношений образует систему линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются

искомые выходы, а коэффициентами — измеренные массовые доли компонентов или частиц определенного класса крупности. В дальнейшем будем рассматривать лишь случай использования данных определения массовых долей компонентов (металлов). Очевидно, что решения по данным о гранулометрическом составе могут быть получены аналогичным образом. Следует лишь иметь в виду, что технологические схемы или их участки, для которых составляются уравнения материального баланса с использованием данных о гранулометрическом составе, естественно, не должны содержать агрегатов, изменяющих крупность (дробилки, мельницы и т.п.).

В связи с этим одной из поставленных в данной книге задач является выработка единого методического подхода к составлению и решению систем уравнений баланса для технологических схем различной структуры и сложности.

Особенностью балансовых уравнений, используемых при определении выходов, является то, что, как уже указывалось выше, коэффициенты представляют собой результаты измерений. Очевидно, что никакое измерение, в том числе и измерение массовой доли металла, не может быть выполнено абсолютно точно. В зависимости от метода измерений, применяемой аппаратуры и внешних условий погрешности могут быть различны, но неминуемо будут. А это означает, что рассчитанные на основе данных измерений выходы, извлечения, массы металла также будут определены с погрешностями.

Определение этих погрешностей потребует выполнения дополнительных вычислительных процедур, тем не менее, оно представляется обязательным, так как позволит более объективно оценить полученные результаты, технологическую ситуацию, схему и оборудование, воспрепятствовать принятию неверного решения при управлении. Следует учесть, что возможности современных ЭВМ, которые становятся привычным инструментом исследователя, проектировщика и эксплуатационного персонала обогатительных фабрик, позволяют достаточно легко преодолеть вычислительные сложности, обеспечивая необходимую оперативность расчета.

В общем случае результаты измерения характеризуются как систематическими, так и случайными погрешностями. Имея в виду, что систематические погрешности, как правило, удается исключить при разработке методик измерения или перевести их в разряд случайных, будем считать погрешности, характеризующие принятый метод измерения, случайными.

Если многократно измерять массовую долю металла в одной и той же пробе одним и тем же методом с одинаковой степенью тщательности, то вполне естественны следующие предположения:

отклонения результатов измерений от истинного значения могут составить непрерывный ряд значений;

отклонения, равные по абсолютной величине, но разные по знаку, встречаются одинаковое число раз;

чем больше отклонение, тем реже оно встречается.

В этих условиях результаты измерений представляют собой случайные величины, распределенные по закону, близкому к нормальному, а случайная погрешность может быть оценена средним квадратическим отклонением. Следовательно, первой особенностью уравнений баланса является то, что коэффициенты при неизвестных представляют собой случайные нормально распределенные величины с известной дисперсией. Следует заметить, что в общем случае погрешность измерения включает в себя не только собственно погрешность измерительного прибора или метода, но и погрешности отбора и подготовки проб к анализу.

Вторая особенность касается взаимосвязи между коэффициентами уравнений баланса. Следует отличать изменения во времени содержания металлов в продуктах обогащения, свойственные технологическому процессу, от колебаний этих величин, связанных с погрешностями измерений. В первом случае корреляция между переменными возможна. Известно, например, что для полиметаллических руд характерна корреляционная связь между содержаниями различных элементов, определяемая особенностями формирования месторождения и минеральным составом.

В качестве другого примера можно указать на такой известный факт, как увеличение при прочих равных условиях содержания металла в хвостах с возрастанием содержания металла в руде. Если же рассматривать содержания металлов как результаты измерения, а именно такой подход правомерен при решении задач технологического баланса, то вряд ли следует ожидать наличия корреляционных связей. Трудно предположить, что при проведении многократных измерений отклонения в большую сторону при измерении одного из продуктов будут, как правило, сопровождаться отклонениями в определенную сторону для другого продукта. Таким образом, естественно считать, что случайные величины — коэффициенты уравнений баланса — не коррелированы между собой.

Тот факт, что в настоящее время все большее внимание уделяется вопросу комплексного использования сырья, требует измерения содержаний возможно большего числа компонентов в рудах и продуктах обогащения. Решению этой задачи способствует широкое распространение на обогатительных фабриках многоканальных анализаторов различной модификации. Дополнительная информация, получаемая от этих приборов, позволяя, используя новые методы расчета баланса, добиться повышения точности вычислений. Они предполагают эффективное использование всей совокупности исходных данных, хотя в вычислительном плане более сложны. Наличие в достаточной степени разветвленной сети вычислительных центров, использование ЭВМ на обогатительных фабриках в составе создаваемых на них АСУТП позволяют широко применять новые разработки как при исследованиях, так и в производственных условиях. В книге при рассмотрении новых методов расчета технологического баланса будут подробно проанализированы особенности



составления уравнений баланса для технологических схем различной структуры, методы решения задачи в условиях избыточной информации, предусматривающие корректировку измеренных данных и оценку точности решения.

Одной из частных, но весьма важных задач, основанных на соотношениях баланса, является так называемая задача составления и расчета товарного баланса, решаемая для оценки работы обогатительной фабрики за отчетный период.

Отличия ее от задачи расчета технологического баланса состоят в следующем. Во-первых, в товарном балансе известны как массы, так и содержания компонентов во всех продуктах. Во-вторых, товарный баланс составляется за месяц, в то время как исходные данные поступают посменно. В-третьих, в товарном балансе равенства между массами металла, поступившего в обогащение и в конечных продуктах обогащения может и не быть, поскольку на производстве возможны неучтенные иногда весьма значительные потери полезных компонентов.

Эти особенности требуют специфических методов решения, которые характерны лишь для данной задачи.

Уточним исходные положения, на которых основано решение задач расчета баланса.

Как отмечалось выше, цель обогатительного процесса состоит в направленном выделении из исходного сырья продуктов заданного компонентного состава. Поэтому для его оценки прежде всего необходимо иметь сведения о распределении определенных компонентов как в исходном сырье — питании, так и в конечных продуктах обогащения — концентратах и хвостах. Связь между соотношениями компонентов устанавливается на основе закона сохранения вещества. Из него, в частности, следует, что изменение массы твердого в емкостях технологического оборудования за данный период времени равно разности между массой твердого, поступившей в процесс обогащения и вышедшей из него за этот период. Такая же зависимость справедлива и для любого компонента, содержащегося в исходном продукте обогащения.

Если за данный промежуток времени массы твердого и компонентов в емкостях технологического оборудования не изменились, то соотношения материального баланса могут быть записаны в хорошо известной инженерам-обогатителям форме. Для простейшей технологической операции (рис. 1) она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \beta_{i1} Q_1 + \beta_{i2} Q_2 = \beta_{i3} Q_3 & (i = \overline{1, m}) \\ Q_1 + Q_2 = Q_3, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\beta_{ij}$  — содержание  $i$ -го компонента в  $j$ -м продукте;  $Q_j$  — масса  $j$ -го продукта;  $m$  — число контролируемых компонентов.

В этой системе алгебраических уравнений каждая переменная в принципе может быть определена. Однако в большинстве случаев, встречающихся на практике, известными величинами являются содержания



Рис. 1. Схема простейшей технологической операции:  
1 — концентрат, 2 — хвосты, 3 — исходное питание

компонентов. Кроме того, по крайней мере одну из масс продуктов можно считать известной (если это не так, то можно перейти к относительным массам — выходам, принимая, например, массу исходного питания за единицу). В этих условиях система уравнений (1) является линейной относительно неизвестных масс продуктов и в зависимости от соотношения числа уравнений и неизвестных относится к системе одного из трех типов: неопределенного, определенного и переопределенного.

В последнее время значительное внимание уделяется вопросу комплексного использования сырья. Это обстоятельство требует измерения содержаний большего числа компонентов в рудах и продуктах обогащения, что обуславливает переопределенность системы балансовых уравнений. Однако, не умея решать переопределенные системы, которые при наличии погрешности измерений почти наверное несовместимы, обычно отбрасывали часть исходной информации, сводя исходную балансовую систему к определенной.

Недостатки такого подхода очевидны: во-первых, выбор компонентов для формирования определенной подсистемы субъективен; во-вторых, полученное при этом решение будет удовлетворять балансовым соотношениям только для тех компонентов, данные о которых были использованы при расчете; в-третьих, не используется часть ценных и дорогостоящих данных.

Интуитивно ясно, что под решением системы (1) следует понимать такой набор значений неизвестных величин, который был бы в каком-то смысле близким к истинному. Вследствие погрешностей измерений истинные значения содержаний и масс продуктов неизвестны, поэтому близость искомых величин к истинным следует определять на основе заданных критериев, учитывающих существо проблемы.

Наиболее ранние попытки решения задачи в этом направлении сводились к поиску решения, минимизирующего сумму квадратов невязок по всем балансовым уравнениям. Очевидно, что при таком подходе невязки баланса остаются, затрудняя интерпретацию полученных результатов.

Более обоснованным можно считать метод, предложенный Л. Ю. Гальчинским, В. А. Лобковским и Н. Н. Соломко (1976 г.). Суть его состоит в том, что одновременно с поиском решения системы балансовых уравнений корректируются и коэффициенты системы таким образом, чтобы вновь полученная система уравнений была совместна. Математическое решение сводится к минимизации целевой функции

$$\Phi = \sum_i \sum_j [\delta \beta_{ij}]^2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} (\beta_{i1} + \delta\beta_{i1}) Q_1 + (\beta_{i2} + \delta\beta_{i2}) Q_2 = \beta_{i3} Q_3 & (i = \overline{1, m}) \\ Q_1 + Q_2 = Q_3, \end{cases}$$

где  $\delta\beta_{ij}$  — корректировка величины  $\beta_{ij}$ .

Данный подход к решению систем балансовых уравнений использует высказанную ранее и весьма плодотворную идею корректировки измененных данных, однако имеет и существенный недостаток — не учитывается уровень погрешности измерений. Действительно, на полученное решение одинаково влияют результаты измерений, полученные как с высокой, так и с низкой степенью точности. Поэтому при наличии в исходной информации данных, полученных с относительно большими погрешностями, решение может существенно отличаться от истинного.

Наибольшее распространение среди методов решения балансовых систем, учитывающих точностные характеристики измерений, получили обобщенный метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия.

Первый из них заключается в поиске решения, минимизирующего функцию

$$\Phi = \sum_i \sum_j \frac{[\delta\beta_{ij}]^2}{W_{ij}}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} (\beta_{i1} + \delta\beta_{i1}) Q_1 + (\beta_{i2} + \delta\beta_{i2}) Q_2 = (\beta_{i3} + \delta\beta_{i3}) Q_3 & (i = \overline{1, m}) \\ Q_1 + Q_2 = Q_3. \end{cases} \quad (2)$$

Принцип выбора весовых множителей  $W_{ij}$  состоит в следующем — чем точнее измерение величины  $\beta_{ij}$ , тем меньше значение  $W_{ij}$ . Подобный выбор весовых множителей при определении минимального значения функции  $\Phi$  обеспечивает относительную малость корректировок для сравнительно точно измеренных параметров. При этом на достоверность конечного результата, значительное влияние оказывает правильность оценки точности измерений, т.е. выбор весовых множителей  $W_{ij}$ .

При решении балансовых систем по критерию максимального правдоподобия (КМП) в качестве целевой функции, подлежащей минимизации при ограничениях (2), выбирается

$$\Phi = \sum_i \sum_j \frac{[\delta\beta_{ij}]^2}{\sigma^2(\beta_{ij})},$$

где  $\sigma^2(\beta_{ij})$  — дисперсия погрешности измерения величины  $\beta_{ij}$ .

В ряде исследований были предприняты попытки использовать совокупность решений всех определенных подсистем для поиска окончательного решения и последующей корректировки коэффициентов системы балансовых уравнений. Так, например, С.А. Самбурский (1971 г.) рассмотрел случай расчета баланса для простейшей разделительной схемы с одним входом и двумя выходами при наличии переопределенной системы уравнений. Образуя несколько определенных подсистем, каждая из которых состоит из балансового уравнения массы твердого и балансового уравнения одного из компонентов, определяют их решения. Окончательное решение выбирают как линейную комбинацию частных решений с весовыми коэффициентами, минимизирующими дисперсии искомых масс продуктов. Относительно этого метода расчета следует заметить, что предложенная идея сравнительно легко реализуется для простейшей разделительной операции, где решения каждой из определенных подсистем являются независимыми, однако в общем случае поиск весовых коэффициентов — задача достаточно сложная.

При решении некоторых задач возникает необходимость вычисления технологических показателей за длительный промежуток времени. Решение таких вопросов с позиций метода корректировок измеренных данных по критерию максимального правдоподобия описано В.И. Брауном и А.Н. Земцовым (1974 г.) и дополнено формулами определения погрешностей выходов и извлечений.

Современные обогатительные предприятия имеют, как правило, многостадийные схемы обогащения, состоящие из большого числа операций. Для оценки процесса обогащения в этом случае недостаточно контроля только входных и выходных продуктов обогатительного производства. Требуется более детальное рассмотрение потоков фабрики с учетом отдельных секций, переделов, циклов и т.п., т.е. решается задача расчета баланса разветвленных схем обогащения. Система балансовых уравнений в этом случае объединяет балансовые системы всех операций, детализированных в рассматриваемой разветвленной схеме.

Однако такие системы имеют ряд особенностей, которые необходимо учитывать при выборе метода решения и его реализации. Во-первых, эти системы могут быть весьма большой размерности, а во-вторых, относятся к так называемому классу разреженных систем, каждое уравнение которых содержит лишь малое по сравнению со всей системой число неизвестных.

Первая особенность обуславливает выбор таких методов решения, которые обеспечивали бы требуемую оперативность решения конкретных задач расчета баланса. Учет второй особенности при реализации того или иного метода позволит повысить его эффективность.

Решение задачи расчета технологического баланса по критерию максимального правдоподобия для сложных схем обогащения предложено В.И. Брауном (1976 г.). Он ввел понятие технологической матрицы, с помощью которой описывается топология схемы обогащения. Введение такой матрицы позволяет инвариантно относительно схемы обогащения

записать систему балансовых уравнений и, используя подобное представление, разработать единую процедуру расчета баланса для любых схем. При этом предполагается, что во всех продуктах контролируется одинаковое число компонентов. Аналогичные схемы решения задачи расчета баланса были предложены Г. Каттингом и Д. Ватсоном (1971 г.), а также Д. Ходьюном и М. Эвереллом (1980 г.) [12]. В принципиальных моментах они совпадают с описанной.

Некоторое усиление этих результатов, связанное с требованиями к контролю масс продуктов, было предложено в работе [9]. Предполагалось, что могут быть измерены не только массы входных продуктов схемы обогащения, но и любых других. В этом случае целевая функция имеет следующий вид:

$$\Phi = \sum_i \sum_j \frac{[\delta\beta_{ij}]^2}{\sigma^2(\beta_{ij})} + \sum_j \frac{[\delta a_j]^2}{\sigma^2(a_j)}, \quad (3)$$

где  $\delta a_j$  и  $\sigma^2(a_j)$  — соответственно, корректировка и дисперсия массы  $j$ -го продукта.

Следует отметить, что при расчете баланса кроме технологии схемы обогащения необходимо учитывать погрешности измерений исходных данных, которые, естественно, переносятся на рассчитанные массы продуктов, скорректированные содержания, извлечения. Поэтому важным элементом методики расчета баланса по КМП является оценка точности результатов. Этот вопрос был подробно исследован в работах сотрудников Механобра. Установлено, что решение, полученное по КМП, обладает большей точностью в сравнении с решением по методу наименьших квадратов. Выявлено важное свойство решений — повышение точности при увеличении объема исходной информации, например, при возрастании числа балансовых уравнений.

В ряде работ, посвященных расчету баланса при решении по КМП, учитывают корреляцию между результатами измерений. Целевая функция в этом случае представляет собой квадратичную форму от корректировок измеренных параметров, а матрица квадратичной формы — ковариационную матрицу погрешностей измерений. Техника решения задачи остается при этом неизменной.

Для расчета качественно-количественных схем применяют методы, основанные на рассмотрении установившегося процесса обогащения как марковской цепи с конечным числом состояний. Действительно, если рассмотреть извлечения полезного компонента в конечные продукты технологической операции, то выраженные в долях единицы они будут удовлетворять условиям

$$\sum_j \epsilon_j = 1, \quad \epsilon_j > 0 \quad (4)$$

и могут интерпретироваться как вероятности попадания частицы рассматриваемого компонента из данной операции (состояния) в другие

[5]. Такой подход заслуживает внимания при решении балансовых задач на стадии проектирования, однако его нельзя использовать для оценки реального процесса, поскольку вследствие погрешностей измерений соотношения (4) не выполняются.

Оригинальный метод расчета баланса был предложен О.Н. Тихоновым (1978 г.). Суть его состоит в следующем. Если три ранее рассмотренных метода изучалось распределение твердого и контролируемых компонентов в продуктах схемы обогащения на основе измерений содержаний компонентов в продуктах, то в предлагаемой методике искомое распределение устанавливается на основе изучения распределений в продуктах узких фракций минеральных частиц, т.е. таких частиц, у которых физические свойства, на которых основан процесс обогащения, практически одинаковы. Для расчета баланса в этом случае требуется иметь данные о массе каждой фракции и содержаниях компонентов в них только в питании схемы обогащения, а также частные извлечения узких фракций в каждой операции или содержания компонентов в продуктах схемы [4].

Л.П. Шупов и В.Г. Ройзен рассматривали однокомпонентную схему, представляющую собой разветвленную сеть потоков. Хотя для каждой операции имеются балансовые уравнения массы продуктов и массы компонента, обычный пооперационный расчет схемы может оказаться невозможным при наличии в ней оборотных продуктов. Ясно, что принципиально расчет такой схемы сводится к отысканию решения определенной системы линейных алгебраических уравнений, которая очевидно существует и единственно. Но если такая система содержит большое число уравнений (100 и более), то ее решение громоздко и представляет определенную проблему даже при использовании средних ЭВМ. Поэтому предлагается итерационный метод пооперационного расчета подобной разветвленной схемы. В дальнейшем подобный принцип был применен к решению переопределенных систем балансовых уравнений [11].

Подробный обзор методов расчета товарного и технологического балансов, охватывающий период до конца 70-х годов, можно найти в работе [1].

Реализация балансовых расчетов на современном уровне требует использования вычислительной техники. Это вызвано и сложностью вычислительных процедур расчета баланса, и требованиями к оперативности получения результатов, особенно в тех случаях, когда расчет баланса используется для целей управления технологическим процессом.

Опыт внедрения современных методов расчета баланса на производстве показывает, что для их широкого использования необходима разработка соответствующего программного обеспечения, ориентированного на ЭВМ малой мощности.

## СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Векторы.** Упорядоченный набор  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  из  $n$  чисел называется  $n$ -мерным вектором  $X$ . Величина  $x_i$  называется  $i$ -й координатой вектора  $X$ .

Два вектора  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  и  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  называются равными, если попарно равны их соответствующие координаты, т.е.

$$x_i = y_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Сумма векторов  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  и  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  определяется как вектор  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ , координаты которого равны сумме соответствующих координат векторов  $X$  и  $Y$ :

$$z_i = x_i + y_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Произведение вектора  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  на число  $\alpha$  определяется как вектор  $\alpha X$ , равный

$$\alpha X = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n].$$

Разность двух векторов  $X$  и  $Y$  определяется по формуле

$$Z = X - Y = X + (-1)Y.$$

Скалярным произведением двух векторов  $X$  и  $Y$  называется величина, равная сумме произведений соответствующих координат векторов

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Матрицы.** Таблица  $m \times n$  чисел, образованная из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется прямоугольной матрицей размерами  $m \times n$  и обозначается

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа  $a_{ij}$ , составляющие матрицу, называются ее элементами. Первый индекс элемента указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Если число строк равно числу столбцов ( $m = n$ ), то матрица называется квадратной, а число  $n$  — ее порядком.

Величины  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы порядка  $n$  составляют главную диагональ матрицы  $A$ . Если все элементы матрицы  $A$ , расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то матрица называется диагональной и обозначается следующим образом:

$$A = \text{diag} [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] = \text{diag } a,$$

где вектор  $a = [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$ .

Если у диагональной матрицы порядка  $n$  все диагональные элементы равны 1, то она называется единичной матрицей и обозначается  $E_n$ .

Матрицы размерами  $1 \times n$  и  $n \times 1$  называются, соответственно, вектор-строкой и вектор-столбцом. Они естественным образом отождествляются с вектором,  $i$ -ая координата которого равна элементу  $i$ -го столбца вектор-строки или  $i$ -й строки вектор-столбца.

Суммой двух прямоугольных матриц  $A = [a_{ij}]$  и  $B = [b_{ij}]$  одинаковых размеров называется матрица  $C = [c_{ij}]$  того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов данных матриц

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Операция сложения матриц коммутативна, т.е.

$$A + B = B + A$$

и ассоциативна

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Произведением прямоугольной матрицы на число  $\alpha$  называется матрица  $C = [c_{ij}]$  того же размера, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = \alpha a_{ij};$$

Справедливы следующие свойства, которым удовлетворяют операции сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Разность двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера определяется формулой

$$C = A - B = A + (-1)B.$$

Произведением двух прямоугольных матриц  $A = [a_{ik}]$  и  $B = [b_{kj}]$  размерами  $m \times l$  и  $l \times n$ , соответственно, называется матрица  $C = [c_{ij}]$  размерами  $m \times n$ , элементы которой определены соотношением

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}.$$

Справедливы следующие свойства, которым удовлетворяют операции сложения и умножения матриц:

$$A(BC) = (AB)C;$$

$$A(B + C) = AB + AC;$$

$$(B + C)A = BA + CA.$$

Транспонированной матрицей по отношению к данной матрице  $A$ , называется матрица  $A^T$ , получающаяся из данной, после замены строк одноименными столбцами, т.е. элементы которой  $a'_{ij}$  равны

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

Число строк транспонированной матрицы равно числу столбцов, а число столбцов числу строк исходной. Транспонированную матрицу по отношению к  $A$  принято обозначать  $A^T$ . Справедливы следующие соотношения:

$$(A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T;$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$



Квадратная матрица называется симметричной или симметрической, если выполнено условие

$$A = A^T,$$

из которого следует, что элементы матрицы  $A$  симметричны относительно диагонали, т.е.

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Обратной к квадратной матрице  $A$  называется матрица, обозначаемая через  $A^{-1}$ , для которой справедливо

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда отличен от нуля ее определитель  $\det A$ .

Определителем или детерминантом квадратной матрицы  $A = [a_{ij}]$  порядка  $n$  называется число, определяемое следующей формулой:

$$\det A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}A_{1n},$$

где  $A_{ij}$  — определитель матрицы порядка  $n-1$ , полученной из исходной вычеркиванием первой строки и  $j$ -го столбца. Матрица порядка 1 состоит из одного числа и ее детерминант по определению полагается равным этому числу.

Справедливы равенства:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad (i = \overline{1, n});$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad (j = \overline{1, n}),$$

где  $A_{ij}$  — определитель матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Пусть  $\alpha = \{\alpha_i\}$  и  $\beta = \{\beta_j\}$  — наборы номеров (возможно и пустые) строк и столбцов матрицы  $A = [a_{ij}]$ . Подматрицей  $A[\alpha|\beta]$  матрицы  $A$  называется матрица, полученная из матрицы  $A$  путем вычеркивания строк с номерами  $\alpha_i$  и столбцов с номерами  $\beta_j$ .

Определитель любой квадратной подматрицы матрицы  $A$  называется минором.

Порядок наибольшего, отличного от нуля минора матрицы  $A$  называется рангом матрицы  $A$ ; и обозначается  $\text{rang } A$ .

Для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размерами  $m \times k$  и  $k \times n$  выполняется неравенство Сильвестра:  $\text{rang } A + \text{rang } B - k \leq \text{rang } AB \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$  из которого следует, что для неособенной квадратной матрицы  $A$

$$\text{rang } A = \text{rang } A^{-1};$$

$$\text{rang } AB = \text{rang } BA.$$

Под блочным или клеточным разбиением матрицы  $A$  размерами  $m \times n$  понимается выделение в ней подматриц следующим образом. Пусть  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_p$ ,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$ . Определим подматрицы  $A_{ij}$  ( $i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q}$ ) — блоки (клетки) матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1q}}^{n_1} \\ \overbrace{A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2q}}^{n_2} \\ \dots \\ \overbrace{A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pq}}^{n_q} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \dots \\ \} m_p \end{array} \right\} m_q$$

Если две матрицы  $A$  и  $B$  разбиты на блоки

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1q}}^{n_1} \\ \overbrace{A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2q}}^{n_2} \\ \dots \\ \overbrace{A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pq}}^{n_q} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \dots \\ \} m_p \end{array} \right\} m_q, \quad B = \begin{bmatrix} \overbrace{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1l}}^{r_1} \\ \overbrace{B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2l}}^{r_2} \\ \dots \\ \overbrace{B_{q1}, B_{q2}, \dots, B_{ql}}^{r_l} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \\ \dots \\ \} n_l \end{array} \right\} n_q$$

то произведения  $C = AB$  имеет блочную структуру:

$$C = \begin{bmatrix} \overbrace{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1l}}^{r_1} \\ \overbrace{C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2l}}^{r_2} \\ \dots \\ \overbrace{C_{p1}, C_{p2}, \dots, C_{pl}}^{r_l} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \dots \\ \} m_p \end{array} \right\} m_q$$

где блоки  $C_{ij}$  определяются по формуле

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^q A_{ik} B_{kj}$$

Системы линейных алгебраических уравнений. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где  $a_{ij}, b_j$  — известные, а  $x_i$  — неизвестные величины, называется системой линейных алгебраических уравнений. Она может быть записана в векторно-матричном виде

$$Ax = b,$$

где матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

а векторы неизвестных и свободных членов

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда

$$\text{rang } A = \text{rang } [A, b].$$

Если  $m = n$  и  $\det A \neq 0$ , то решение системы находится по формуле

$$x = A^{-1}b.$$

Квадратичные формы. Функция  $n$  переменных вида

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

называется квадратичной формой. Всякая квадратичная форма может быть представлена в симметрическом виде

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i x_j,$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Симметрическая матрица  $A = [a_{ij}]$ , составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется матрицей квадратичной формы.

С помощью векторно-матричных операций квадратичная форма может быть представлена следующим образом:

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Ax, x)$$

$$\text{или } Q(x) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax,$$

где  $x$  — вектор-столбец, элементами которого являются переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Если квадратичная форма  $Q(x) > 0$  или  $Q(x) \geq 0$  для любого вектора  $x$  отличного от нуля, то  $Q(x)$  называют **положительно (неотрицательно) определенной** квадратичной формой, а соответствующую ей матрицу  $A$  — **положительно (неотрицательно) определенной**.

Диагональные элементы положительно (неотрицательно) определенной матрицы положительны (неотрицательны).

Соотношение  $A > B$  ( $A \geq B$ ) для двух симметрических матриц означает, что матрица  $A - B$  положительно (неотрицательно) определена. Если  $A > B > 0$  ( $A \geq B > 0$ ), то  $A^{-1} < B^{-1}$  ( $A^{-1} \leq B^{-1}$ ). Здесь  $0$  обозначает матрицу, у которой все элементы равны нулю.

Квадратичной функцией  $n$  переменных называется функция вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) - 2 \sum_{j=1}^n b_j x_j + c,$$

где  $Q$  — квадратичная форма,  $b_j$  и  $c$  — некоторые постоянные.

Если  $Q$  — положительно определенная квадратичная форма, то квадратичная функция  $f$  имеет единственный глобальный минимум, который определяется из решения системы уравнений

$$Ax = b,$$

где  $A$  — матрица квадратичной формы,  $x$  — вектор, координаты которого суть переменные  $x_j$ , а координатами вектора  $b$  являются коэффициенты  $b_j$ .

Дифференцирование функций многих переменных. Пусть задана функция  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Частной производной функции  $f$  по переменной  $x_j$  в точке  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$  называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j + \Delta x_j, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\Delta x_j}.$$

Если задано отображение

$$f(x) = [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

где  $f_j$  — функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то производной матрицей или матрицей Якоби называется матрица вида

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

где  $\partial f_j / \partial x_j$  — частная производная скалярной функции  $f_j$  по переменной  $x_j$ .

Если  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то матрица Якоби представляет собой вектор градиент функции  $f$ , который обозначается  $\text{grad } f$  или  $\nabla f$ .

Функция  $f$  имеет в точке  $x_0$  экстремум (максимум или минимум), если в окрестности этой точки выполняется одно из двух неравенств:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{максимум}),$$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{минимум}).$$

Необходимое условие экстремума заключается в равенстве нулю производной в этой точке, а для функций многих переменных — в равенстве нулю вектора градиента.

**Случайные величины.** Случайной называют величину, которая в результате испытаний может принимать одно из заранее неизвестных значений.

Функцией распределения  $F$  случайной величины  $X$  называется функция, значение которой в точке  $a$  равно вероятности события, состоящего в том, что  $X$  меньше  $a$ .

Если функция распределения представима в интегральной форме

$$F(a) = \int_{-\infty}^a p(t) dt,$$

то функция  $p(t)$  называется плотностью распределения случайной величины  $X$ .

Математическим ожиданием или средним значением  $E(X)$  случайной величины  $X$  называется число, определяемое формулой

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x).$$

Дисперсией  $D(X)$  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от среднего значения:

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 dF(x).$$

Корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением  $\sigma(X)$  случайной величины  $X$ :

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Если функция распределения выражается в интегральной форме через плотность, то формулы вычисления математического ожидания и дисперсии можно записать так:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx.$$

Случайная величина, плотность распределения которой равна

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}},$$

называется нормально распределенной, а соответствующее распределение нормальным. Параметры распределения  $a$  и  $\sigma$  имеют следующий вероятностный смысл:  $a$  — математическое ожидание, а  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Ковариация  $\text{cov}(X, Y)$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$  определяется формулой

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)).$$

Две случайные величины называются независимыми, если вероятности появления возможных значений одной случайной величины не зависят от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  справедливо равенство  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

Функции случайных величин. Если заданы функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; аргументы которой — случайные величины, то и сама функция  $f$  является случайной величиной.

Ковариация двух функций  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  случайных независимых аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при достаточно малых значениях дисперсий  $D(x_i)$  может быть вычислена по приближенной формуле

$$\text{cov}(f, g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma^2(x_i),$$

где частные производные  $\partial f / \partial x_i$  и  $\partial g / \partial x_i$  вычислены в точках математического ожидания величин  $x_i$ . В частности, из этой формулы следует, что дисперсия функции многих независимых случайных величин

$$D(f) = \text{cov}(f, f) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i).$$

Пусть задан случайный вектор  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ , координаты которого случайные величины, являющиеся функциями  $z_i = z_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  независимых случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ковариационной (дисперсионной) матрицей случайного вектора называется матрица  $C = [c_{ij}]$ , элементы которой равны

$$c_{ij} = \text{cov}(z_i, z_j).$$

При малых значениях дисперсий  $D(x_i)$  ковариационная матрица приближенно равна

$$C = \frac{\partial Z}{\partial x} \sigma \left[ \frac{\partial Z}{\partial x} \right]^T,$$

где  $\frac{\partial Z}{\partial x}$  — матрица Якоби отображения  $Z$ , а

$$\sigma = \text{diag} [\sigma^2(x_1), \sigma^2(x_2), \dots, \sigma^2(x_n)].$$

### 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Для современных обогатительных фабрик характерны развитые технологические схемы, позволяющие извлекать большинство полезных компонентов. Эти схемы состоят из ряда последовательно и параллельно соединенных технологических операций и предусматривают циркуляцию потоков. Конфигурация таких схем определяется особенностями перерабатываемого сырья, технологией его обогащения, проектно-компоновочными решениями. Для выработки единого методического подхода к расчету технологического баланса целесообразно определенным образом обобщить все разнообразие структур технологических схем применительно к рассматриваемой задаче. При этом следует уточнить ряд понятий.

Под разделительной операцией будем понимать технологическую операцию, часть технологической схемы или технологическую схему в целом, для которых могут быть выделены один или несколько входных продуктов, поступающих на переработку, и группа (не менее двух) выходных продуктов, являющихся результатом разделения.

Под расчетом технологического баланса разделительной операции будем понимать последовательность вычислительных операций, обеспечивающую определение масс продуктов, металлов и извлечений по измеренным массам входных продуктов и содержаниям компонентов в продуктах. Для некоторых задач, где достаточно определить выходы продуктов (значения масс в относительных единицах) и извлечения, измерение массы не является обязательным.

Рассмотрим схему разделительной операции, представленную на рис. 1.1.

Имеется один входной продукт и  $n$  выходных продуктов, в каждом из которых измеряется содержание  $m$  металлов; кроме того измеряется масса входного продукта  $Q$ . Содержание металлов во входном продукте характеризуется вектором  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Выходные продукты имеют массы  $\gamma_j$  ( $j = 1, n$ ), а содержания металлов в каждом из них характеризуются вектором  $\underline{\beta}_j = (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{mj})$ . Необходимо по измеренным значениям  $a_i$  и  $\beta_{ij}$  ( $i = 1, m; j = 1, n$ ) определить значения  $\gamma_j$ . Зная массы каждого из продуктов и содержания в них металлов, легко определить массы металлов и извлечения.

Очевидно, что для рассматриваемой разделительной операции могут быть составлены  $m$  уравнений баланса, отражающих равенство массы

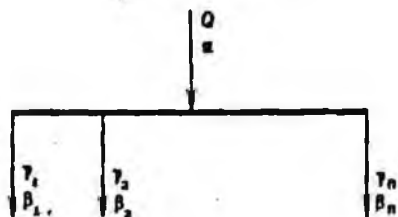


Рис. 1.1. Схема разделительной операции с одним входом

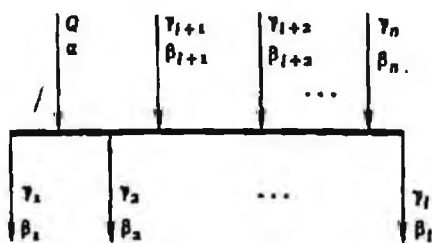


Рис. 1.2. Схема разделительной операции с несколькими входами

каждого из металлов во входном продукте сумме масс этого металла в выходных продуктах. Кроме того, существует равенство массы входного продукта и суммы масс выходных продуктов. Таким образом, общее число уравнений материального баланса равно  $m + 1$ .

На практике может встретиться более общий случай, представленный схемой на рис. 1.2, где число входных продуктов равно  $n - l + 1$ , причем масса  $Q$  одного из них измеряется, а число выходных продуктов равно  $l$ . Такие схемы характерны для участков технологического процесса, на вход которых поступают неконтролируемые по массе продукты с других технологических операций, в частности, циркулирующие потоки. В каждом из продуктов измеряются содержания  $m$  металлов. Число неизвестных выходов по-прежнему равно  $n$ . Как и в рассмотренном выше случае, общее число уравнений материального баланса остается равным  $m + 1$ .

И наконец, возможны разделительные операции, на вход которых поступает несколько ( $s$ ) контролируемых по массе продуктов, а схема контроля содержаний металлов остается прежней. Такая ситуация, в частности, возможна при расчете технологического баланса флотационной секции, на вход которой поступают продукты с нескольких измельчительных агрегатов. Нетрудно видеть, что в результате простых преобразований

$$Q = \sum_{k=1}^s Q_k; \quad (1.1)$$

$$a_i = \sum_{k=1}^s Q_k a_{ik} / \sum_{k=1}^s Q_k, \quad (1.2)$$

этот случай может быть сведен к одной из рассмотренных выше схем.

Таким образом, для разделительной операции, имеющей  $n$  неизвестных выходов, в каждом из которых контролируются  $m$  компонентов, может быть составлена система из  $m + 1$  уравнений материального баланса, имеющая следующий вид:



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \dots + \beta_{1n}\gamma_n = a_1 Q \\
 \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \dots + \beta_{2n}\gamma_n = a_2 Q \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \beta_{m1}\gamma_1 + \beta_{m2}\gamma_2 + \dots + \beta_{mn}\gamma_n = a_m Q \\
 \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = Q.
 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Отметим, что для разделительной операции, изображенной на рис. 1.2, подобная запись системы предполагает, что все  $\beta_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1 + 1, n}$ ) отрицательны.

В матричной форме система (1.3) может быть записана следующим образом:

$$[\beta_{ij}]\gamma = aQ, \quad (1.4)$$

где  $[\beta_{ij}] =$ 

$\beta_{11}$	$\dots$	$\beta_{1n}$
$\beta_{21}$	$\dots$	$\beta_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\beta_{m1}$	$\dots$	$\beta_{mn}$
1	$\dots$	1

 $;$ 
 $a =$ 

$a_1$
$a_2$
$\vdots$
$a_m$
1

 $;$ 
 $\gamma =$ 

$\gamma_1$
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$
$\gamma_n$

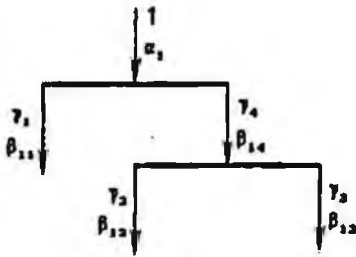
В зависимости от соотношения числа контролируемых металлов  $m$  и числа неизвестных выходов  $n$  система (1.3) будет представлять собой неопределенную (при  $m + 1 < n$ ), определенную (при  $m + 1 = n$ ) и переопределенную (при  $m + 1 > n$ ) систему уравнений.

Проанализируем, насколько реально появление того или иного случая.

Определенная система уравнений баланса наиболее часто встречается на практике. По крайней мере к такой системе традиционно стремятся свести задачу. Такая система при практически всегда выполняемых условиях имеет единственное решение. Традиционная методика расчета технологического баланса будет подробно проанализирована в дальнейшем.

Неопределенная система уравнений материального баланса может встретиться, например, в случае, когда технологической схемой предусмотрено получение нескольких концентратов (богатого и бедного) одного из металлов, а содержание дополнительного металла не контролируется. Другой пример: на вход разделительной операции, имеющей два выхода, кроме продукта с измеряемой массой поступает еще один, выход которого неизвестен; во всех продуктах контролируют содержание только одного металла. Системы уравнений материального баланса в обоих случаях будут неопределенными.

Рис. 1.3. Технологическая схема процесса, состоящего из двух разделительных операций



Известно, что неопределенная система уравнений, в которой число неизвестных превышает число уравнений, имеет бесчисленное множество решений, т.е. существует бесчисленное множество наборов  $\gamma$ , превращающих исходные уравнения в тождества. При этом нет оснований отдать предпочтение какому-либо из решений.

Как же поступить в этом случае? Во-первых, следует рассмотреть возможность увеличения числа контролируемых элементов с тем, чтобы хотя бы выполнить равенство  $m + 1 = n$ . При этом еще раз можно отметить преимущества многоканальных анализаторов. Во-вторых, можно ввести дополнительные точки контроля содержаний металлов в промежуточных продуктах. Хотя в этом случае и увеличивается число неизвестных выходов, соотношение между  $m$  и  $n$  изменяется в желательном направлении.

Пример. Пусть имеется технологическая схема процесса (рис. 1.3), в которой осуществляется контроль содержаний одного металла в питании ( $a_1$ ) и выходных продуктах ( $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$ ). Выход исходного продукта нормирован единицей. Система уравнений баланса для такой схемы имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 = a_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Она состоит из двух уравнений с тремя неизвестными, является неопределенной и имеет бесчисленное множество решений.

Если проконтролировать дополнительно в каждом из продуктов содержание еще одного металла  $a_2, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}$ , то получим систему

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 = a_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \beta_{23}\gamma_3 = a_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

которая содержит три уравнения с тремя неизвестными, является определенной и имеет одно решение.

Другой путь заключается в выборе дополнительной точки контроля содержания металла  $\beta_{14}$ . Тогда для рассматриваемой схемы может быть составлена следующая система уравнений баланса:

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 & = \alpha_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 & = 1 \\ \beta_{11}\gamma_1 & + \beta_{14}\gamma_4 = \alpha_1 \\ \gamma_1 & + \gamma_4 = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Полученная система состоит из четырех уравнений с четырьмя неизвестными, и ее решение позволяет определить искомые выходы.

Случай переопределенной системы встречается на практике достаточно часто. На обогатительных фабриках, получающих коллективный концентрат, например медно-никелевый, имеются два выходных продукта — концентрат и хвосты, и, по крайней мере, два полезных продукта контролируются (рис. 1.4). Подобная же ситуация характерна и для промежуточных операций полиметаллических фабрик.

Схеме, представленной на рис. 1.4, соответствует система уравнений баланса

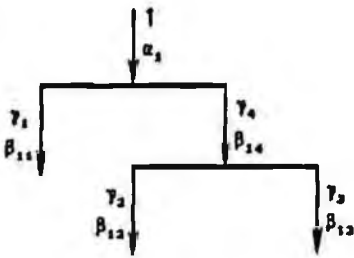
$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 = \alpha_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 = \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

которая включает в себя три уравнения с двумя неизвестными, является переопределенной и в общем случае несовместной. Последнее означает, что вследствие ошибок измерения значения выходов, найденные в результате решения системы любых двух уравнений из системы (1.8), не будут удовлетворять третьему уравнению, т.е. не будут превращать его в тождество. Не умея решать переопределенные системы уравнений и сталкиваясь с противоречиями, которые будут подробно рассмотрены ниже, обычно отбрасывают часть исходной информации и сводят задачу к традиционному случаю — решению определенной системы.



Рис. 1.4. Схема разделительной операции, описываемая переопределенной системой уравнений баланса

Рис. 1.3. Технологическая схема процесса, состоящего из двух разделительных операций



Известно, что неопределенная система уравнений, в которой число неизвестных превышает число уравнений, имеет бесчисленное множество решений, т.е. существует бесчисленное множество наборов  $\gamma$ , превращающих исходные уравнения в тождества. При этом нет оснований отдать предпочтение какому-либо из решений.

Как же поступить в этом случае? Во-первых, следует рассмотреть возможность увеличения числа контролируемых элементов с тем, чтобы хотя бы выполнить равенство  $m + 1 = n$ . При этом еще раз можно отметить преимущества многоканальных анализаторов. Во-вторых, можно ввести дополнительные точки контроля содержаний металлов в промежуточных продуктах. Хотя в этом случае и увеличивается число неизвестных выходов, соотношение между  $m$  и  $n$  изменяется в желательном направлении.

Пример. Пусть имеется технологическая схема процесса (рис. 1.3), в которой осуществляется контроль содержаний одного металла в питании ( $\alpha_1$ ) и выходных продуктах ( $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$ ). Выход исходного продукта нормирован единицей. Система уравнений баланса для такой схемы имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 = \alpha_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Она состоит из двух уравнений с тремя неизвестными, является неопределенной и имеет бесчисленное множество решений.

Если проконтролировать дополнительно в каждом из продуктов содержание еще одного металла  $\alpha_2, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}$ , то получим систему

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 = \alpha_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \beta_{23}\gamma_3 = \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

которая содержит три уравнения с тремя неизвестными, является определенной и имеет одно решение.

Другой путь заключается в выборе дополнительной точки контроля содержания металла  $\beta_{14}$ . Тогда для рассматриваемой схемы может быть составлена следующая система уравнений баланса:

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 & = a_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 & = 1 \\ \beta_{11}\gamma_1 & + \beta_{14}\gamma_4 = a_1 \\ \gamma_1 & + \gamma_4 = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Полученная система состоит из четырех уравнений с четырьмя неизвестными, и ее решение позволяет определить искомые выходы.

Случай переопределенной системы встречается на практике достаточно часто. На обогатительных фабриках, получающих коллективный концентрат, например медно-никелевый, имеются два выходных продукта — концентрат и хвосты, и, по крайней мере, два полезных продукта контролируются (рис. 1.4). Подобная же ситуация характерна и для промежуточных операций полиметаллических фабрик.

Схеме, представленной на рис. 1.4, соответствует система уравнений баланса

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 = a_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 = a_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

которая включает в себя три уравнения с двумя неизвестными, является переопределенной и в общем случае несовместной. Последнее означает, что вследствие ошибок измерения значения выходов, найденные в результате решения системы любых двух уравнений из системы (1.8), не будут удовлетворять третьему уравнению, т.е. не будут превращать его в тождество. Не умея решать переопределенные системы уравнений и сталкиваясь с противоречиями, которые будут подробно рассмотрены ниже, обычно отбрасывают часть исходной информации и сводят задачу к традиционному случаю — решению определенной системы.



Рис. 1.4. Схема разделительной операции, описываемая переопределенной системой уравнений баланса

## 1.2. ТРАДИЦИОННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Под традиционной методикой расчета технологического баланса будем понимать определение масс продуктов (выходов), масс металлов в них и извлечений для разделительной операции путем решения определенной линейной системы алгебраических уравнений баланса, коэффициентами которых являются измеренные содержания металлов.

### Расчет простейшей разделительной операции

**Определение выходов, извлечений.** Разделительную операцию будем называть простейшей, если на ее вход поступает один продукт массой  $Q$  с содержанием металла  $\alpha$ , который делится на два выходных: концентрат массой  $\gamma_1$  с содержанием металла  $\beta$  и хвосты массой  $\gamma_2$  с содержанием металла  $\vartheta$ . В отличие от вышеизложенного для содержаний металлов в продуктах использованы обозначения  $\alpha$ ;  $\beta$ ,  $\vartheta$ , традиционно принятые в технологии обогащения.

На практике простейшая разделительная операция встречается достаточно часто. В виде такой операции можно представить технологическую схему обогащения монометаллической руды, участок технологической схемы, предусматривающий получение коллективного концентрата и хвостов или разделение коллективного концентрата на два продукта. Простейшая разделительная операция осуществляется и при испытаниях оборудования, например флотационных машин, для технологической оценки эффективности его работы.

Схеме простейшей разделительной операции, представленной на рис. 1.5, соответствует система уравнений

$$\begin{cases} \beta\gamma_1 + \vartheta\gamma_2 = \alpha Q \\ \gamma_1 + \gamma_2 = Q. \end{cases} \quad (1.9)$$

Решая эту систему относительно масс выходных продуктов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , получаем широко известные в обогащении руд выражения:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} Q, \quad (1.10)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \vartheta} Q. \quad (1.11)$$

Тогда масса металла в концентрате и хвостах определится соответственно как

Рис. 1.5. Схеме простейшей разделительной операции



$$M_1 = \beta \gamma_1 = \beta \frac{a - \vartheta}{\beta - \vartheta} Q; \quad (1.12)$$

$$M_2 = \vartheta \gamma_2 = \vartheta \frac{\beta - a}{\beta - \vartheta} Q. \quad (1.13)$$

В ряде задач, где можно ограничиться определением выходов, т.е. относительных масс продуктов, масса входного продукта нормируется единицей, а для вычисления выходов имеем следующие выражения:

$$\gamma_1 = \frac{a - \vartheta}{\beta - \vartheta}; \quad (1.14)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta - a}{\beta - \vartheta} \quad (1.15)$$

Необходимой технологической оценкой эффективности разделения является извлечение металлов, т.е. доля полезного продукта, содержащегося в исходном питании, перешедшая в выходной продукт. Выражения для определения извлечений в концентрат  $\epsilon_1$  и хвосты  $\epsilon_2$  имеют вид

$$\epsilon_1 = \frac{\beta \gamma_1}{aQ} = \frac{\beta}{a} \frac{a - \vartheta}{\beta - \vartheta}; \quad (1.16)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\vartheta \gamma_2}{aQ} = \frac{\vartheta}{a} \frac{\beta - a}{\beta - \vartheta}. \quad (1.17)$$

Очевидно, что процедура вычисления выходов и извлечений для простейшей разделительной операции не представляет каких-либо вычислительных трудностей и может быть реализована и без применения ЭВМ.

Важнейшим вопросом является оценка точности полученных результатов.

**Оценка точности расчетов.** Вопрос о точности возникает в связи с тем, что используемые при расчетах значения содержаний металлов в продуктах обогащения являются результатами измерений, а любому измерению присущи обязательные ошибки, которые в конечном счете определяют погрешность вычисленных выходов и извлечений.

При оценке точности вычисления выходов и извлечений следует по-

лучить ответ на два основных вопроса: во-первых, является ли полученная оценка несмещенной, т.е. не содержат ли полученные результаты систематической погрешности, и во-вторых, как оценить случайную составляющую погрешности?

Пусть известны истинные значения содержаний металлов в исходном питании и продуктах обогащения. Тогда, учитывая, что уравнения баланса отражают реально существующие физические законы, можно утверждать, что вычисленные на их основе значения выходов и извлечений являются истинными.

Предположим, что измерены содержания металлов, которые вследствие погрешностей измерения будут отличаться от истинных значений. Вычисленные на их основе выходы и извлечения в общем случае также будут отличаться от истинных. Представим себе, что такая процедура повторяется многократно. При этом погрешности измерения содержаний таковы, что их математические ожидания (средние значения) равны нулю, т.е. математические ожидания измеренных содержаний равны их истинным значениям. Кроме того, для каждого из измеренных содержаний существует показатель точности — среднее квадратическое отклонение. В результате вычислений получен набор выходов и извлечений, представляющих собой реализации соответствующих случайных величин.

Возвращаясь к вопросу о точности, определим, насколько математические ожидания рассчитанных выходов и извлечений отличаются от их истинных значений и каковы средние квадратические отклонения этих случайных величин. Если математические ожидания вычисленных выходов и извлечений не отличаются от истинных значений, то такая оценка является несмещенной, в противном случае принятая вычислительная процедура сопровождается систематической погрешностью.

Рассмотрим в общем виде математическую постановку и решение задачи.

Пусть  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  — вектор попарно независимых случайных величин  $\beta_j$ ,  $\bar{\beta} = M(\beta)$  — математическое ожидание  $\beta$ ,  $\sigma(\beta_j)$  — среднее квадратическое отклонение  $\beta_j$ , а  $f(\beta)$  — произвольная скалярная функция вектора  $\beta$ . Необходимо определить математическое ожидание  $f(\beta)$ .

Разложим функцию  $f(\beta)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\bar{\beta}$ , ограничившись тремя первыми членами:

$$f(\beta) = f(\bar{\beta}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \beta_i} (\beta_i - \bar{\beta}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j} (\beta_i - \bar{\beta}_i) (\beta_j - \bar{\beta}_j), \quad (1.18)$$

где частные производные от  $f(\beta)$  взяты в точке  $\bar{\beta}$ .

Определим математическое ожидание функции  $f(\beta)$ :



$$M[f(\beta)] = f(\bar{\beta}) + M\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \beta_i} (\beta_i - \bar{\beta}_i)\right] + \frac{1}{2} M\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j} (\beta_i - \bar{\beta}_i) (\beta_j - \bar{\beta}_j)\right]. \quad (1.19)$$

Первое слагаемое не содержит оператора математического ожидания, поскольку  $f(\bar{\beta})$  не является случайной функцией.

Для определения значения второго слагаемого воспользуемся теоремой о том, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий. Вынося постоянный множитель за знак математического ожидания и имея в виду, что  $M(\beta_i) = \bar{\beta}_i$ , получаем

$$M\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \beta_i} (\beta_i - \bar{\beta}_i)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \beta_i} M(\beta_i - \bar{\beta}_i) \equiv 0. \quad (1.20)$$

При определении значения третьего слагаемого дополнительно учтем, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, и поэтому будем иметь

$$M\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i \partial \beta_j} (\beta_i - \bar{\beta}_i) (\beta_j - \bar{\beta}_j)\right] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i^2} M(\beta_i - \bar{\beta}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i^2} \sigma^2(\beta_i). \quad (1.21)$$

Из выражений (1.19) – (1.21) получим

$$M[f(\beta)] = f(\bar{\beta}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i^2} \sigma^2(\beta_i). \quad (1.22)$$

Таким образом, в общем случае математическое ожидание функции  $f(\beta)$  является смещенной оценкой функции  $f(\bar{\beta})$  и это смещение равно

$$\Delta f(\beta) = M[f(\beta)] - f(\bar{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_i^2} \sigma^2(\beta_i). \quad (1.23)$$

Вследствие предполагаемой достаточной малости дисперсий  $\sigma^2(\beta_i)$  смещение  $\Delta f(\beta)$  также является малой величиной. В конкретной ситуации лишь надлежит проверить значения вторых частных производных. Рассмотрим вопрос о систематической погрешности (смещении) при определении выходов и извлечений для простейшей разделительной.

операции. Для оценки смещения воспользуемся выражением (1.14) для выхода  $\gamma_1$ :

$$\gamma_1 = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta}.$$

Заметим, что поскольку сумма выходов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равна единице, их смещения, если они существуют, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Возьмем частные производные от  $\gamma_1$  по  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta - \vartheta}; \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial \alpha^2} = 0; \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} = - \frac{\alpha - \vartheta}{(\beta - \vartheta)^2}; \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial \beta^2} = \frac{2(\alpha - \vartheta)}{(\beta - \vartheta)^3} = \frac{2\gamma_1}{(\beta - \vartheta)^2}; \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \vartheta} = \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \vartheta)^2}; \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial \vartheta^2} = - \frac{2(\beta - \alpha)}{(\beta - \vartheta)^3} = - \frac{2\gamma_2}{(\beta - \vartheta)^2}. \quad (1.29)$$

Если погрешности измерения характеризуются средними квадратическими отклонениями  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_\vartheta$ , то, воспользовавшись выражением (1.23), для смещения вычисленного значения  $\gamma$ , получим

$$\Delta \gamma_1 = \bar{\gamma}_1 \frac{\sigma_\beta^2}{(\bar{\beta} - \bar{\vartheta})^2} - \bar{\gamma}_2 \frac{\sigma_\vartheta^2}{(\bar{\beta} - \bar{\vartheta})^2}. \quad (1.30)$$

Так как истинные значения содержаний неизвестны, а измеренные значения лежат вблизи истинных, для практической оценки смещения может быть использовано следующее выражение:

$$\Delta \gamma = \gamma_1 \frac{\sigma_\beta^2}{(\beta - \vartheta)^2} - \gamma_2 \frac{\sigma_\vartheta^2}{(\beta - \vartheta)^2}. \quad (1.31)$$

Таким образом, по традиционной методике расчета выходов для простейшей разделительной операции можно получить фактически только смещенную оценку.

Оценим это смещение. Содержание металла в концентрате обычно существенно превышает содержание металла в хвостах, т.е.  $\beta \gg \vartheta$ . Тогда

$$\frac{\sigma_{\beta}}{\beta - \vartheta} \approx \frac{\sigma_{\beta}}{\beta}$$

и множитель при  $\gamma_1$  в первом слагаемом представляет собой квадрат относительной погрешности измерения содержания металла в концентрате. На практике эта погрешность составляет 1–2%, т.е. первое слагаемое весьма мало.

Второе слагаемое близко к нулю, так как  $\beta \gg \vartheta$ , а тем более  $\beta \gg \sigma_{\vartheta}$ . Отсюда следует, что полученное при расчете выходов смещение весьма мало и для практических целей им можно пренебречь.

Для оценки смещения при вычислении извлечения  $\epsilon_1$  воспользуемся выражением (1.17):

$$\epsilon_1 = \frac{\beta}{a} \frac{a - \vartheta}{\beta - \vartheta}$$

Поскольку сумма извлечений  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  равна единице, их смещения, если они существуют, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Возьмем частные производные от  $\epsilon_1$  по  $a$ ,  $\beta$  и  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial a} = \frac{\beta \vartheta}{a^2 (\beta - \vartheta)} ; \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial a^2} = -\frac{2\beta \vartheta}{(a - \vartheta)} \frac{1}{a^3} = -2\epsilon_1 \frac{\vartheta}{a - \vartheta} \frac{1}{a^2} ; \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \beta} = -\frac{a - \vartheta}{a} \frac{\vartheta}{(\beta - \vartheta)^2} ; \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial \beta^2} = \frac{2(a - \vartheta)}{a} \vartheta \frac{1}{(\beta - \vartheta)^3} = 2\epsilon_1 \frac{\vartheta}{\beta} \frac{1}{(\beta - \vartheta)^2} ; \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \vartheta} = -\frac{\beta}{a} \frac{\beta - a}{(\beta - \vartheta)^2} ; \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial \vartheta^2} = -\frac{2\beta}{a} \frac{\beta - a}{(\beta - \vartheta)^3} = -2\epsilon_2 \frac{\beta}{\vartheta} \frac{1}{(\beta - \vartheta)^2} . \quad (1.37)$$

Используя формулу (1.23), получим следующее выражение для практической оценки смещения рассчитанного  $\epsilon_1$ :

$$\Delta \epsilon_1 = -\epsilon_1 \frac{\vartheta}{\alpha - \vartheta} \frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha^2} + \epsilon_1 \frac{\vartheta}{\beta} \frac{\sigma_\beta^2}{(\beta - \vartheta)^2} - \epsilon_2 \frac{\beta}{\vartheta} \frac{\sigma_\vartheta^2}{(\beta - \vartheta)^2} \quad (1.38)$$

Таким образом, и при расчете извлечения для простейшей разделительной операции получаем смещенную оценку. Но как показывает анализ, аналогичный проведенному ранее для выходов, это смещение пренебрежимо мало.

**Пример 1.** При измерении содержаний металла в продуктах простейшей разделительной операции получены следующие результаты: содержание в питании  $\alpha = 0,50$  %, содержание в концентрате  $\beta = 5,00$  %, содержание в хвостах  $\vartheta = 0,14$  %. Относительные погрешности измерения составляют: для исходного питания  $\sigma_\alpha/\alpha = 0,02$ , для концентрата  $\sigma_\beta/\beta = 0,01$ , для хвостов  $\sigma_\vartheta/\vartheta = 0,10$ . Необходимо определить выходы и извлечения, а также смещения этих параметров.

Исходная система уравнений материального баланса имеет вид

$$\begin{cases} 5,0\gamma_1 + 0,14\gamma_2 = 0,5 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \end{cases}$$

Используя приведенные выше формулы, определим выход:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} = \frac{0,5 - 0,14}{5,0 - 0,14} = 0,074; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1 = 1 - 0,074 = 0,926$$

и извлечения:

$$\epsilon_1 = \frac{\beta}{\alpha} \gamma_1 = \frac{5,0}{0,5} 0,074 = 0,74; \quad \epsilon_2 = 1 - \epsilon_1 = 0,26.$$

Средние квадратические погрешности измерения составляют:  $\sigma_\alpha = 0,01$  %,  $\sigma_\beta = 0,05$  %;  $\sigma_\vartheta = 0,014$  %.

Тогда смещение выхода концентрата

$$\Delta \gamma_1 = \gamma_1 \frac{\sigma_\beta^2}{(\beta - \vartheta)^2} - \gamma_2 \frac{\sigma_\vartheta^2}{(\beta - \vartheta)^2} = 0,074 \frac{0,05^2}{(5,0 - 0,14)^2} - 0,926 \frac{0,014^2}{(5,0 - 0,14)^2} = 0,80 \cdot 10^{-5} - 0,78 \cdot 10^{-5} = 0,2 \cdot 10^{-6},$$

а смещение извлечения

$$\Delta \epsilon_1 = -\epsilon_1 \frac{\vartheta}{1 - \vartheta} \frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha^2} + \epsilon_1 \frac{\vartheta}{\beta} \frac{\sigma_\beta^2}{(\beta - \vartheta)^2} - \epsilon_2 \frac{\beta}{\vartheta} \frac{\sigma_\vartheta^2}{(\beta - \vartheta)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -0,74 \frac{0,14}{0,5 - 0,14} \frac{0,01^2}{0,5^2} + 0,74 \frac{0,14}{5,0} \frac{0,05^2}{(5,0 - 0,14)^2} \\
 &- 0,26 \frac{5,0}{0,14} \frac{0,014^2}{(5,0 - 0,14)^2} = -0,115 \cdot 10^{-3} + 0,02 \cdot 10^{-4} - \\
 &- 0,77 \cdot 10^{-4} = -0,19 \cdot 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

Пример 2. Измеренные содержания металлов равны:  $\alpha = 1,0\%$ ,  $\beta = 25\%$ ,  $\vartheta = 0,1\%$ , а относительные погрешности измерения следующие:  $\sigma_\alpha/\alpha = 0,02$ ,  $\sigma_\beta/\beta = 0,01$ ,  $\sigma_\vartheta/\vartheta = 0,1$ . Определить выходы, извлечения и их смещения.

По аналогии с предыдущим примером находим:

$$\gamma_1 = \frac{1,0 - 0,1}{25 - 0,1} = 0,0361; \quad \gamma_2 = 1 - 0,0361 = 0,9639;$$

$$\epsilon_1 = \frac{25}{1,0} 0,0361 = 0,9025; \quad \epsilon_2 = 1 - 0,9025 = 0,0975;$$

$$\Delta\gamma_1 = 0,0361 \frac{0,25^2}{(25 - 0,1)^2} - 0,9639 \frac{0,01^2}{(25 - 0,1)^2} =$$

$$= 0,36 \cdot 10^{-5} - 0,01 \cdot 10^{-5} = 0,35 \cdot 10^{-5};$$

$$\Delta\epsilon_1 = -0,9025 \frac{0,1}{1,0 - 0,1} \frac{0,02^2}{1,0^2} + 0,9025 \frac{0,1}{25} \frac{0,25^2}{(25 - 0,1)^2} -$$

$$- 0,0975 \frac{25}{0,1} \frac{0,01^2}{(25 - 0,1)^2} = -0,401 \cdot 10^{-4} + 0,003 \cdot 10^{-4} -$$

$$- 0,039 \cdot 10^{-4} = 0,437 \cdot 10^{-4}.$$

Приведенные примеры подтверждают сделанный в результате анализа вывод: смещения рассчитанных по традиционной методике выходов и извлечений существуют, но являются пренебрежимо малыми.

Оценим случайную составляющую погрешности расчета выходов и извлечений. Напомним условия решаемой задачи. Проведены измерения содержаний металлов, которые вследствие погрешностей измерения отличаются от истинных. Рассчитанные выходы и извлечения также будут отличаться от истинных. При многократном повторении этой процедуры получим наборы выходов и извлечений, представляющие собой реализации соответствующих случайных величин. Точность определения выходов и извлечений будем оценивать средними квадратическими отклонениями. Воспользуемся результатами, известными из теории вероятностей.

Пусть  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  — вектор попарно независимых случайных величин  $\beta_i$ ,  $\sigma(\beta_i)$  — средние квадратические отклонения  $\beta_i$ , а

$f(\beta)$  — произвольная аналитическая функция вектора  $\beta$ . Тогда для определения дисперсии  $\sigma_f^2$  функции  $f(\beta)$  может быть использована следующая приближенная формула:

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \beta_i} \right)^2 \sigma^2(\beta_i), \quad (1.39)$$

где частные производные от  $f(\beta)$  взяты в точке  $\bar{\beta}$  (математическое ожидание вектора  $\beta$ ).

В рассматриваемом случае для определения дисперсии выходов имеем

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_\beta^2 + \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial \vartheta} \right)^2 \sigma_\vartheta^2; \quad (1.40)$$

$$\sigma_{\gamma_2}^2 = \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_\beta^2 + \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial \vartheta} \right)^2 \sigma_\vartheta^2.$$

Имея в виду, что  $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ , получаем

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial a} = - \frac{\partial \gamma_2}{\partial a}; \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} = - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \vartheta} = - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \vartheta}$$

и следовательно

$$\sigma_{\gamma_1}^2 = \sigma_{\gamma_2}^2. \quad (1.41)$$

С учетом соотношений (1.24), (1.26) и (1.28) получим следующее выражение для среднего квадратического отклонения определения выходов:

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\frac{1}{(\beta - \vartheta)^2} \sigma_a^2 + \frac{(a - \vartheta)^2}{(\beta - \vartheta)^4} \sigma_\beta^2 + \frac{(\beta - a)^2}{(\beta - \vartheta)^4} \sigma_\vartheta^2} \quad (1.42)$$

или

$$\sigma_\gamma = \frac{\sqrt{\sigma_a^2 + \gamma_1^2 \sigma_\beta^2 + \gamma_2^2 \sigma_\vartheta^2}}{\beta - \vartheta}. \quad (1.43)$$

Аналогично приведенному выше для определения дисперсии извлечений имеем

$$\sigma_\epsilon^2 = \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_\beta^2 + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \vartheta} \right)^2 \sigma_\vartheta^2. \quad (1.44)$$

Учитывая соотношения (1.32), (1.34) и (1.36), для средней квадратической погрешности определения извлечений будем иметь

$$\sigma_{\epsilon} = \sqrt{\left[ \frac{\beta \vartheta}{\alpha^2 (\beta - \vartheta)} \right]^2 \sigma_{\alpha}^2 + \left[ \frac{\alpha - \vartheta}{\alpha} \frac{\vartheta}{(\beta - \vartheta)^2} \right]^2 \sigma_{\beta}^2 + \left[ \frac{\beta}{\alpha} \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \vartheta)^2} \right]^2 \sigma_{\vartheta}^2} \quad (1.45)$$

$$\text{или } \sigma_{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_1^2 \left( \frac{\vartheta}{\alpha - \vartheta} \right)^2 \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\alpha^2} + \epsilon_1^2 \left( \frac{\vartheta}{\beta - \vartheta} \right)^2 \frac{\sigma_{\beta}^2}{\beta^2} + \epsilon_2^2 \left( \frac{\beta}{\beta - \vartheta} \right)^2 \frac{\sigma_{\vartheta}^2}{\vartheta^2}} \quad (1.46)$$

Пример 3. Измеренные содержания металлов в продуктах равны  $\alpha = 0,5\%$ ,  $\beta = 5,0\%$ ,  $\vartheta = 0,14\%$ ; средние квадратические отклонения —  $\sigma_{\alpha} = 0,01\%$ ,  $\sigma_{\beta} = 0,05\%$ ,  $\sigma_{\vartheta} = 0,014\%$ .

Определить средние квадратические отклонения выходов и извлечений. Используя выражения (1.42) и (1.45), находим:

$$\sigma_{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{(5,0 - 0,14)^2} 0,01^2 + \frac{(0,5 - 0,14)^2}{(5,0 - 0,14)^4} 0,05^2 + \frac{(5,0 - 0,5)^2}{(5,0 - 0,14)^4} 0,014^2} = 0,34 \cdot 10^{-2} \%$$

$$\sigma_{\epsilon} = \left\{ \left[ \frac{5,0 \cdot 0,14}{0,5^2 (5 - 0,14)} \right]^2 \cdot 0,01^2 + \left[ \frac{0,5 - 0,14}{0,4} \frac{0,14}{(5 - 0,14)^2} \right]^2 \times 0,05^2 + \left[ \frac{5,0}{0,5} \frac{5,0 - 0,5}{(5,0 - 0,14)^2} \right]^2 0,014^2 \right\}^{1/2} = 9,73 \cdot 10^{-2} \%$$

Пример 4. Измеренные содержания металлов равны  $\alpha = 1,0\%$ ,  $\beta = 25,0\%$ ,  $\vartheta = 0,1\%$ ; средние квадратические отклонения —  $\sigma_{\alpha} = 0,02\%$ ,  $\sigma_{\beta} = 0,25\%$ ,  $\sigma_{\vartheta} = 0,01\%$ . По формулам (1.42) и (1.45) находим:

$$\sigma_{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{(25,0 - 0,1)^2} 0,02^2 + \frac{(1,0 - 0,1)^2}{(25,0 - 0,1)^4} 0,25^2 + \frac{(25,0 - 1,0)^2}{(25,0 - 0,1)^4} 0,01^2} = 0,96 \cdot 10^{-3} \%$$

$$\sigma_{\epsilon} = \left\{ \left[ \frac{25 \cdot 0,1}{1,0^2 (25 - 0,1)} \right]^2 0,02^2 + \left[ \frac{1,0 - 0,1}{1,0} \frac{0,1}{(25 - 0,1)^2} \right]^2 0,25^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{25}{1,0} \frac{25,0 - 1,0}{(25,0 - 0,1)^2} \right]^2 0,01^2 \right\}^{1/2} = 0,988 \cdot 10^{-2} \%$$

**Расчет многопродуктовых операций .**

Традиционная методика расчета технологического баланса для многопродуктовых разделительных операций основана на решении определенной системы уравнений

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \dots + \beta_{1n}\gamma_n = \alpha_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \beta_{m1}\gamma_1 + \beta_{m2}\gamma_2 + \dots + \beta_{mn}\gamma_n = \alpha_m \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1, \end{cases} \quad (1.47)$$

где  $m + 1 = n$ .

В матричной форме записи система (1.47) имеет вид

$$[\beta_{ij}] \gamma = \alpha, \quad (1.48)$$

$$\text{где } [\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 1 \end{bmatrix} \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\beta_{ij}]$  является квадратной порядка  $n \times n$  и предполагается не особой.

В общем случае решение определенной системы (1.47) может быть получено по правилу Крамера

$$\gamma_i = \Delta_i / \Delta, \quad (1.49)$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы  $[\beta_{ij}]$ ,  $\Delta_i$  — определитель матрицы, полученной из  $[\beta_{ij}]$  заменой  $i$ -го столбца на вектор-столбец  $\alpha$ .

Тогда извлечение  $k$ -го металла в  $i$ -й продукт может быть определено по формуле

$$\epsilon_i = \frac{\beta_{ki}}{\alpha_k} \gamma_i. \quad (1.50)$$



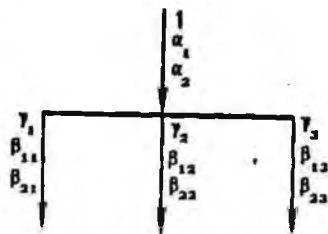


Рис. 1.6. Схема разделительной операции с одним входом и тремя выходами

В матричной форме решение системы (1.48) можно записать как

$$\gamma = [\beta_{ij}]^{-1} \alpha, \quad (1.51)$$

где  $[\beta_{ij}]^{-1}$  — обратная матрица для  $[\beta_{ij}]$ .

Библиотека стандартных программ практически любой универсальной ЭВМ содержит программы решения этой задачи тем или иным методом.

Достаточно простые и обозримые выражения удается получить лишь для систем уравнений, в которых число искомым выходов не превышает трех.

Поскольку решение системы двух уравнений с двумя неизвестными было рассмотрено при расчете баланса простейшей разделительной операции, остановимся на часто встречающемся на практике случае разделительной операции, имеющей один вход и три выхода (рис. 1.6).

Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \beta_{13}\gamma_3 = \alpha_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \beta_{23}\gamma_3 = \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \end{cases} \quad (1.52)$$

Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta_{11}(\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12}(\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13}(\beta_{21} - \beta_{22}).$$

Определители, полученные из главного заменой соответствующего столбца на вектор-столбец  $\alpha$ , равны соответственно

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \alpha_2 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1(\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12}(\alpha_2 - \beta_{23}) + \beta_{13}(\alpha_2 - \beta_{22});$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \alpha_1 & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \alpha_2 & \beta_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta_{11} (\alpha_2 - \beta_{23}) - \alpha_1 (\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13} (\beta_{21} - \alpha_2);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta_{11} (\beta_{22} - \alpha_2) - \beta_{12} (\beta_{21} - \alpha_2) + \alpha_1 (\beta_{21} - \beta_{22}).$$

Тогда искомые выходы могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\alpha_1 (\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12} (\alpha_2 - \beta_{23}) + \beta_{13} (\alpha_2 - \beta_{22})}{\beta_{11} (\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12} (\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13} (\beta_{21} - \beta_{22})}; \\ \gamma_2 &= \frac{\beta_{11} (\alpha_2 - \beta_{23}) - \alpha_1 (\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13} (\beta_{21} - \alpha_2)}{\beta_{11} (\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12} (\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13} (\beta_{21} - \beta_{22})}; \\ \gamma_3 &= \frac{\beta_{11} (\beta_{22} - \alpha_2) - \beta_{12} (\beta_{21} - \alpha_2) + \alpha_1 (\beta_{21} - \beta_{22})}{\beta_{11} (\beta_{22} - \beta_{23}) - \beta_{12} (\beta_{21} - \beta_{23}) + \beta_{13} (\beta_{21} - \beta_{22})}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Оценку точности расчета выходов для многопродуктовых операций начнем, как и ранее, с определения смещения. Для этого воспользуемся полученной ранее формулой (1.23).

Обозначив средние квадратические отклонения измеренных содержаний  $\alpha_i$  и  $\beta_{ij}$  соответственно  $\sigma_{i, n+1}$  и  $\sigma_{ij}$ , для определения смещения при вычислении выходов будем иметь

$$\Delta \gamma_k = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \beta_{ij}^2} \sigma_{ij}^2 + \right. \quad (1.54)$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \alpha_l^2} \sigma_{l, n+1}^2 \right), \quad k = \overline{1, n}.$$

Учтем следующие выражения для вычисления частных производных решения определенной системы уравнений баланса:

$$\frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \beta_{ij}^2} = 2a_{ki} a_{jk} \gamma_j; \quad \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \alpha_l^2} = 0, \quad (1.55)$$

$$\text{где } [a_{ij}] = [\beta_{ij}]^{-1}, \quad (1.56)$$

т.е.  $a_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\beta_{ij}$  матрицы  $[\beta_{ij}]$ , деленное на определитель системы. Тогда будем иметь

$$\Delta \gamma_k = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{n-1} a_{kl} a_{jk} \gamma_j \sigma_{ij}^2. \quad (1.57)$$

Анализ в общем виде выражения (1.57) с точки зрения значимости величины  $\Delta \gamma_k$  не представляется возможным. Однако из общих соображений можно предположить, что поскольку смещение пропорционально  $\sigma_{ij}^2$ , а величины  $\sigma_{ij}$  достаточно малы, то и величина  $\Delta \gamma_k$  будет пренебрежимо мала.

Определим случайную составляющую погрешности определения выходов. Поскольку математическое ожидание найденного решения системы (1.47) совпадает в линейном приближении с истинным решением, в качестве оценки точности будем использовать среднее квадратическое отклонение (дисперсию) выходов.

Так как случайные величины  $a_i$  и  $\beta_{ij}$  независимы, для определения среднего квадратического отклонения вычисленного выхода можно воспользоваться следующим известным выражением:

$$\sigma^2(\gamma_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_{ij}} \right)^2 \sigma_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{i, n+1}^2 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.58)$$

Как видно из выражения (1.58), величина  $\sigma(\gamma_k)$  зависит от всех  $\sigma_{ij}$  и  $\sigma_{i, n+1}$ , входящих в формулу с весовыми коэффициентами, определяющими удельный вес погрешностей измерения каждого из параметров. Эти весовые коэффициенты могут быть определены на основе следующих формул для частных производных [6]:

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_{ij}} = - \frac{\Delta_{ik}^*}{\Delta} \gamma_j, \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial a_i} = \frac{\Delta_{ik}^*}{\Delta}, \quad (1.59)$$

где  $\Delta_{ik}^*$  — алгебраическое дополнение элемента  $\beta_{ij}$  матрицы  $[\beta_{ij}]$ .

Нетрудно видеть, что  $\Delta_{ik}^*/\Delta = a_{ki}$ , т.е. представляют собой элементы введенной выше матрицы  $[a_{ki}]$ .

Обозначив  $a_i = \beta_{i, n+1}$  и  $\sigma(a_i) = \sigma_{i, n+1}$ , можно переписать выражение (1.58) следующим образом:

$$\sigma^2(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_{ij}} \right)^2 \sigma_{ij}^2 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1.60)$$

а положив для общности  $\gamma_{n+1} = -1$ , из формулы (1.59) получим

$$\left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_{ij}} \right)^2 = a_{ki} \gamma_j^2. \quad (1.61)$$

Тогда из формулы (1.60) с учетом равенства (1.61) находим

$$\sigma^2(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ki}^2 \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^2 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.62)$$

Обозначив через

$$D_i = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^2, \quad (1.63)$$

из формулы (1.62) имеем

$$\sigma^2(\gamma_k) = \sum_{i=1}^n D_i a_{ki}^2 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.64)$$

Легко заметить, что  $D_i$  представляет собой дисперсию  $i$ -го уравнения в исходной системе.

Проанализируем полученные выражения для дисперсий вычисленных выходов. Некоторые из их особенностей достаточно очевидны. Например, если переход от одного метода анализа содержаний к другому повышает точность измерения, то пропорционально повышается точность расчета выходов.

Что касается весовых коэффициентов, то их сравнение позволяет выявить влияние каждого из измерений на окончательную погрешность и определить, какие из величин  $\beta_{ij}$  и  $a_i$  требуют более точного измерения.

Выражение (1.59) показывает, что значения весовых коэффициентов определяются структурой матрицы исходных данных, которая, в свою очередь, зависит от структуры технологической схемы. Из формул (1.49) и (1.59) следует, что при прочих равных условиях коэффициенты тем больше, чем меньше значение главного определителя системы.

Значение главного определителя зависит от большого числа факторов. Однако можно отметить, что чем в большей степени диагональные элементы (содержания металлов в одноименных концентратах) превышают остальные элементы матрицы, тем больше значение главного определителя и, следовательно, меньше весовые коэффициенты. Такие соотношения между содержаниями характерны для полиметаллических фабрик, где содержания металлов в одноименных концентратах, как правило, более чем на порядок превышают содержание в них примесей. В то же время при обогащении медно-никелевых руд эти соотношения

менее благоприятны. По тем же причинам следует ожидать, что расчет баланса для технологической схемы в целом будет более точным, чем для ее части.

Если для получения определенной системы уравнений необходимо включить в рассмотрение металлы, разделение которых не предусматривается технологической схемой и которые распределены по продуктам более или менее равномерно, то ее решение также будет сопровождаться большими погрешностями вычисления выходов.

Для среднего квадратического отклонения (дисперсии) извлечения, как функции трех переменных, опуская индексы, можно записать

$$\begin{aligned} \sigma^2(\epsilon) &= \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma^2(\alpha) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta}\right)^2 \sigma^2(\beta) + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma^2(\gamma) + \\ &+ 2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta} \operatorname{cov}(\alpha, \beta) + 2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \operatorname{cov}(\alpha, \gamma) + \\ &+ 2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} \operatorname{cov}(\beta, \gamma), \end{aligned} \quad (1.65)$$

где  $\operatorname{cov}(u, v)$  — ковариация случайных величин  $u$  и  $v$ .

Определим для переменных, входящих в формулу извлечения, ковариации:

$$\operatorname{cov}(\beta_{kl}, \gamma_l) = \frac{\partial \gamma_l}{\partial \beta_{kl}} \sigma_{kl}^2 = -a_{lk} \gamma_l \sigma_{kl}^2;$$

$$\operatorname{cov}(\alpha_k, \gamma_l) = \frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha_k} \sigma_{k, n+1}^2 = a_{lk} \sigma_{k, n+1}^2.$$

Поскольку извлечение представляет собой произведение трех величин, удобно перейти к относительной погрешности. Имея в виду, что

$$\frac{\partial \epsilon / \partial \beta}{\epsilon} = \frac{1}{\beta}; \quad \frac{\partial \epsilon / \partial \alpha}{\epsilon} = -\frac{1}{\alpha}; \quad \frac{\partial \epsilon / \partial \gamma}{\epsilon} = \frac{1}{\gamma} \quad (1.66)$$

и  $\operatorname{cov}(\alpha, \beta) = 0$ , так как эти величины независимы, можно записать

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sigma(\epsilon)}{\epsilon}\right]^2 &= \left[\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right]^2 + \left[\frac{\sigma(\beta)}{\beta}\right]^2 + \left[\frac{\sigma(\gamma)}{\gamma}\right]^2 + \\ &+ \frac{2}{\beta\gamma} \operatorname{cov}(\beta, \gamma) - \frac{2}{\alpha\gamma} \operatorname{cov}(\alpha, \gamma). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Тогда из равенства (1.67) после преобразований получим

$$\left[ \frac{\sigma(\epsilon_{kl})}{\epsilon_{kl}} \right]^2 = \left[ \frac{\sigma(\gamma_l)}{\gamma_l} \right]^2 + (1 - 2a_{lk}\beta_{kl}) \left[ \frac{\sigma_{kl}}{\beta_{kl}} \right]^2 + \left( 1 - \frac{2a_{jk}a_k}{\gamma_l} \right) \left[ \frac{\sigma_{k,n+1}}{a_k} \right]^2, \quad (1.68)$$

где  $\sigma(\gamma_l)$  определяется по формуле (1.64).

### 1.3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ (КМП)

#### Расчет технологической операции

Математическая постановка задачи. Задана разделительная схема. Число выходных потоков  $n$  не превышает числа контролируемых элементов  $m$ , т.е.  $n \leq m$ . Соответствующая система балансных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \dots + \beta_{1n}\gamma_n = a_1 \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \dots + \beta_{2n}\gamma_n = a_2 \\ \dots \\ \beta_{m1}\gamma_1 + \beta_{m2}\gamma_2 + \dots + \beta_{mn}\gamma_n = a_m \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1, \end{cases} \quad (1.69)$$

где  $\beta_{ij}$ ,  $a_j$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ ) — содержания элементов в продуктах, а  $\gamma_j$  — выходы продуктов.

Предположим, что ранг матрицы коэффициентов (1.69) равен  $n$  и коэффициенты системы  $\beta_{ij}$  и  $a_j$  измерены с погрешностью, имеющей нормальный несмещенный закон распределения, причем дисперсии  $\sigma^2(\beta_{ij})$  и  $\sigma^2(a_j)$  известны. Измеренные значения содержаний будем обозначать через  $\beta_{ij}$  и  $a_j$ , а их математические ожидания соответственно через  $\bar{\beta}_{ij}$  и  $\bar{a}_j$ .

Очевидно, что система (1.69) переопределенная, а потому в общем случае несовместна. Если бы в системе (1.69) вместо  $\beta_{ij}$  и  $a_j$  стояли их истинные значения, т.е.  $\bar{\beta}_{ij}$  и  $\bar{a}_j$ , которые можно представить в виде суммы измеренных значений и поправок:

$$\bar{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij}; \quad \bar{a}_j = a_j + \delta_{j, n+1},$$

то она стала бы совместной, так как отражала бы реально существующую схему. Таким образом, нижеследующая система (1.70) уже сов-

местна, но содержит теперь не только  $n$  неизвестных выходов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , а еще и  $m(n+1)$  неизвестных корректировок  $\delta_{ij}$ , т.е. стала неопределенной:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta_{11} + \delta_{11})\gamma_1 + (\beta_{12} + \delta_{12})\gamma_2 + \dots + (\beta_{1n} + \delta_{1n})\gamma_n = \\ = a_1 + \delta_{1,n+1} \\ (\beta_{21} + \delta_{21})\gamma_1 + (\beta_{22} + \delta_{22})\gamma_2 + \dots + (\beta_{2n} + \delta_{2n})\gamma_n = \\ = a_2 + \delta_{2,n+1} \\ \dots \dots \dots (1.70) \\ (\beta_{m1} + \delta_{m1})\gamma_1 + (\beta_{m2} + \delta_{m2})\gamma_2 + \dots + (\beta_{mn} + \\ + \delta_{mn})\gamma_n = a_m + \delta_{m,n+1} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1. \end{array} \right.$$

Ясно, что система (1.70) имеет бесчисленное множество решений и по одному набору измеренных данных  $\beta_{ij}$  и  $a_i$  определить истинные значения выходов и корректировок нельзя, а можно лишь оценить неизвестные величины. Для этого необходимо выбрать какой-нибудь критерий сравнения решений системы (1.70), например, критерий максимального правдоподобия. Он позволяет выбрать такое решение системы (1.70), которое с наибольшей вероятностью соответствовало бы набору измеренных значений. Поскольку плотности распределения независимых случайных величин  $\beta_{ij}$  и  $a_i$  равны соответственно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(\beta_{ij})} \exp \left[ -\frac{(\beta_{ij} - \bar{\beta}_{ij})^2}{2\sigma^2(\beta_{ij})} \right] \text{ и}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(a_i)} \exp \left[ -\frac{(a_i - \bar{a}_i)^2}{2\sigma^2(a_i)} \right],$$

а вероятность принятия всеми этими величинами значений в узких диапазонах измеренных данных пропорциональна произведению плотностей их распределения, указанную вероятность с точностью до постоянного множителя найдем по формуле

$$P = \exp \left\{ -\sum_{i=m, j=1}^{j=n+1} \frac{\delta_{ij}^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\}, \quad (1.71)$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma(\beta_{ij})$  для  $j = \overline{1, n}$  и  $\sigma_{i, n+1} = \sigma(a_i)$ .

Естественно величину  $P$ , именуемую функцией правдоподобия, выбрать в качестве критерия для сравнения решений системы (1.70).





Функция Лагранжа для этой задачи на относительный экстремум записывается так:

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{l=m, j=n+1} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \sum_{l=1}^m 2\lambda_l' (\delta_{l1}\gamma_1 + \delta_{l2}\gamma_2 + \dots + \delta_{ln}\gamma_n + \delta_{l,n+1}\gamma_{n+1}). \quad (1.74)$$

В равенстве (1.74) и в дальнейшем для общности записи положено  $\gamma_{n+1} = -1$ .

Необходимые условия относительного экстремума крайне просты:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta_{ij}} = \frac{2\delta_{ij}}{\sigma_{ij}^2} - 2\lambda_l' \gamma_j = 0,$$

откуда  $\delta_{ij} = \lambda_l' \gamma_j \sigma_{ij}^2$ . (1.75)

Подставляя выражение (1.75) в выражения (1.73), найдем неопределенные множители  $\lambda_l'$ :

$$\lambda_l' = [a_l - (\beta_l, \gamma)] / \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{lj}^2 \gamma_j^2.$$

Из выражения (1.75) находим корректировки  $\delta_{ij}$  через заданные значения выходов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ :

$$\delta_{ij} = - \frac{(\beta_{l1}\gamma_1 + \beta_{l2}\gamma_2 + \dots + \beta_{ln}\gamma_n - a_l) \gamma_j \sigma_{lj}^2}{\sigma_{l1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{l2}^2 \gamma_2^2 + \dots + \sigma_{ln}^2 \gamma_n^2 + \sigma_{l,n+1}^2} \quad (1.76)$$

$$(j = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}),$$

а затем определяем  $L_{\min} = u(\gamma)$ :

$$u(\gamma) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\delta_{lj}^2}{\sigma_{lj}^2} = \sum_{l=1}^m \frac{(\beta_{l1}\gamma_1 + \beta_{l2}\gamma_2 + \dots + \beta_{ln}\gamma_n - a_l)^2}{\sigma_{l1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{l2}^2 \gamma_2^2 + \dots + \sigma_{ln}^2 \gamma_n^2 + \sigma_{l,n+1}^2} \quad (1.77)$$

Этап 2. Ищем векторов  $\gamma = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , минимизирующий функцию  $u(\gamma)$  при ограничении

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1.$$

Чтобы иметь задачу оптимизации без ограничений на переменные, выразим из последнего равенства  $\gamma_n$ :

$$\gamma_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j$$

и подставим полученное выражение в формулу (1.77). В итоге придем к следующей задаче на экстремум: найти вектор  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{n-1})$ , минимизирующий функцию  $u$  от  $(n-1)$  переменных

$$u = \sum_{l=1}^m \frac{[(\beta_{l1} - \beta_{ln})\gamma_1 + \dots + (\beta_{l, n-1} - \beta_{ln})\gamma_{n-1} - (\alpha_l - \beta_{ln})]^2}{\sigma_{l1}^2 \gamma_1^2 + \dots + \sigma_{l, n-1}^2 \gamma_{n-1}^2 + \sigma_{ln}^2 (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j)^2 + \sigma_{l, n+1}^2} \quad (1.78)$$

Для решения задач на отыскание минимума функции многих переменных на ЭВМ обычно имеется несколько стандартных программ. С помощью одной из них можно найти оптимальный вектор  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{n-1})$ , по нему определить  $\hat{\gamma}_n$ , а затем по формулам (1.76) вычислить поправки  $\delta_{ij}$  и по ним, — скорректированные значения  $\hat{\beta}_{ij}$ . Разумеется, что рассчитанные значения выходов  $\hat{\gamma}_j$  и скорректированных содержаний  $\hat{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij}$  удовлетворяют системе балансных уравнений.

Отметим, что в случае разделительной схемы, для которой соответствующая система балансных уравнений (1.69) отличается лишь знаком у коэффициентов какого-либо одного или нескольких столбцов, расчет баланса ведется по описанной методике после замены соответствующего выхода  $\gamma_j$  на  $-\gamma_j^*$ .

Если в библиотеке стандартных программ математического обеспечения ЭВМ нет программ минимизации функций многих переменных, то можно предложить другую вычислительную схему расчета баланса.

В этой схеме экстремальную задачу минимизации функции при ограничениях (1.70) решим в один этап. Для этого прежде всего исключим из системы (1.70) величины  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Поскольку ранг матрицы коэффициентов системы (1.70) по условию равен  $n$ , у нее имеется минор порядка  $n$ , отличный от нуля. Пусть, простоты ради, указанный минор содержит первые  $n$  строк из системы (1.70). Тогда из первых  $n$  уравнений системы (1.70) однозначно найдем величины  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  и подставим их в каждое из оставшихся  $m - n + 1$  уравнений.

Если для удобства записи обозначить  $\alpha_i = \beta_{i, n+1}$  ( $i = 1, m$ ) и ввести  $m(n+1)$ -мерные вектора

$$\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{m, n+1})$$

$$\text{и } \delta = (\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{m, n+1}),$$

то в результате подстановки величин

$$\gamma_i = \gamma_i (\beta + \delta) \quad (i = \overline{1, n})$$

получим  $m - n + 1$  уравнений относительно неизвестного вектора поправок  $\delta$ :

$$\psi_k(\beta + \delta) = 0 \quad (k = \overline{1, m - n + 1}),$$

именуемых в теории ошибок условными уравнениями.

Нетрудно видеть, что вектор  $\hat{\delta}$ , удовлетворяющий этой системе и минимизирующий функцию (1.72), совпадает с набором корректировок (1.76), рассчитанных по двухэтапной схеме. Чтобы найти  $\hat{\delta}$ , снова будем искать минимум  $L$  по переменным  $\delta_{ij}$  методом Лагранжа, предварительно линеаризовав функции ограничений  $\psi_k$ , т.е. представив условные уравнения в виде

$$\psi_k(\beta) + \sum_{i=m, j=n+1}^{i=m, j=n+1} \frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta_{ij}} \delta_{ij} = 0 \quad (k = \overline{1, m - n + 1}).$$

Функция Лагранжа  $F$  в этом случае запишется так:

$$F = \sum_{i=m, j=n+1}^{i=m, j=n+1} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \sum_{j=1}^{m-n+1} 2\lambda_j \sum_{i=m, j=n+1}^{i=m, j=n+1} \frac{\partial \psi_j(\beta)}{\partial \beta_{ij}} \delta_{ij}$$

Следовательно, условия экстремума примут вид

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_{ij}} = \frac{2\delta_{ij}}{\sigma_{ij}^2} - 2 \sum_{l=1}^{m-n+1} \lambda_l \frac{\partial \psi_l(\beta)}{\partial \beta_{ij}} = 0 \quad (i = \overline{1, m};$$

$$j = \overline{1, n+1}).$$

$$\text{Отсюда } \hat{\delta}_{ij} = \sigma_{ij}^2 \sum_{l=1}^{m-n+1} \lambda_l \frac{\partial \psi_l(\beta)}{\partial \beta_{ij}} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}).$$

Подставив  $\hat{\delta}_{ij}$  в уравнения связи, получим для определения неопределенных множителей  $\lambda_j$  следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^{m-n+1} \left[ \sum_{i=m, j=n+1}^{i=m, j=n+1} \frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta_{ij}} \frac{\partial \psi_l(\beta)}{\partial \beta_{ij}} \sigma_{ij}^2 \right] \lambda_l =$$

$$= -\psi_k(\beta) \quad (k = \overline{1, m - n + 1}).$$

Так как из построения функций  $\psi_k(\beta + \delta)$  следует линейная независимость векторов

$$\frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta} = \left( \frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta_{11}}, \frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta_{12}}, \dots, \frac{\partial \psi_k(\beta)}{\partial \beta_{m, n+1}} \right),$$

определитель этой системы уравнений, являющийся определителем Грама для указанной системы векторов, будет отличен от нуля, и поэтому система будет иметь единственное решение. С помощью этого решения вычислим приближенно вектор  $\hat{\delta}$ . При необходимости определить корректировки  $\hat{\delta}_{ij}$  с большей точностью следует воспользоваться методом итераций, повторяя описанную процедуру.

В заключение описываемой вычислительной схемы следует по найденным значениям поправок  $\hat{\delta}_{ij}$  вычислить скорректированные содержания  $\hat{\beta}_{ij}$ , а по ним уже из системы (1.70) определить выходы  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n$ .

**Пример.** Рассмотрим задачу расчета выходов для объекта, состоящего из двух разделительных флотационных операций и представляющего собой часть технологического процесса одной из обогащательных фабрик (рис. 1.7).

Из исходного продукта, поступающего на вход, получают два концентрата и хвосты. Для расчета выходов  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  по обычной методике достаточно измерить процентные содержания любых двух компонентов в исходном и выходных продуктах, составить с их использованием два балансных уравнения, добавить к ним третье уравнение, отражающее баланс масс, и решить полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

При исследовании объекта было проведено опробование, в ходе которого измеряли содержания (%) четырех компонентов (металлов I — IV) в исходном питании, концентратах и хвостах (табл. 1.1).

На основе полученных исходных данных можно составить систему из следующих пяти уравнений:

$$15,0\gamma_1 + 6,8\gamma_2 + 1,55\gamma_3 = 4,09; \quad (1)$$

$$4,5\gamma_1 + 5,9\gamma_2 + 3,05\gamma_3 = 3,77; \quad (2)$$

$$43,7\gamma_1 + 48,3\gamma_2 + 40,8\gamma_3 = 43,1; \quad (3)$$

$$33,6\gamma_1 + 34,7\gamma_2 + 20,8\gamma_3 = 25,9; \quad (4)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1. \quad (5)$$

для которой в принятых ранее обозначениях имеем  $n=3, m=4, n < m$ .

Прежде чем применить изложенный выше метод расчета выходов, попытаемся воспользоваться традиционной методикой. Добавляя к уравнению баланса масс (5) по два уравнения из четырех оставшихся, можно получить шесть вариантов систем трех уравнений с тремя неизвестными, решения которых приведены ниже:

Вариант системы . . . . .	I	II	III	IV	V	VI
Номер уравнения . . . . .	5, 1, 2	5, 1, 3	5, 1, 4	5, 2, 3	5, 2, 4	5, 3, 4
$\gamma_1, \%$ . . . . .	11,2	8,1	7,1	-44,2	27,7	11,3
$\gamma_2, \%$ . . . . .	19,6	27,5	30,2	47,8	11,2	26,3
$\gamma_3, \%$ . . . . .	69,2	64,4	62,7	96,4	61,1	62,4

Из приведенных выше данных видно, что полученные решения существенно отличаются друг от друга, а в варианте IV результат не имеет физического смысла. Таким образом, необходимость применения новых методов, учитывающих весь объем исходных данных и позволяющих получить объективные результаты, становится бесспорной.

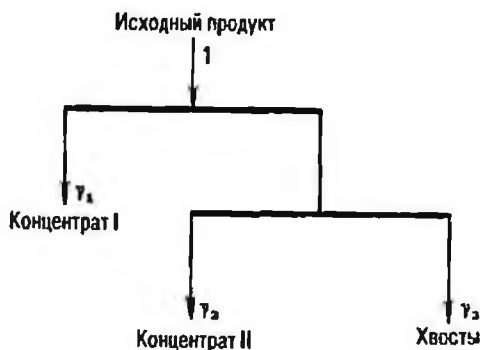


Рис. 1.7 Технологическая схема, состоящая из двух разделительных операций

Таблица 1.1

Металл	Концентрат		Хвосты	Исходное питание
	I	II		
I	15,0	6,8	1,55	4,09
II	4,5	5,9	3,05	3,77
III	43,7	48,3	40,80	43,10
IV	33,6	34,7	20,80	25,90

Для решения задачи кроме матрицы содержаний  $[\beta_{ij}]$  необходимо сформировать матрицу ошибок  $[\sigma_{ij}]$ , элементами которой являются средние квадратические отклонения  $\sigma_{ij}$  содержаний  $\beta_{ij}$ . Для определения  $\sigma_{ij}$  учитывали допустимые отклонения между результатами двух химических анализов пробы с содержанием металла  $\beta_{ij}$ , которые принимались равными  $6\sigma_{ij}$ . Для рассматриваемого случая матрица  $[\sigma_{ij}]$  имеет следующий вид:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,100 & 0,083 & 0,033 & 0,083 \\ 0,060 & 0,060 & 0,050 & 0,050 \\ 0,200 & 0,233 & 0,167 & 0,200 \\ 0,150 & 0,150 & 0,116 & 0,133 \end{bmatrix}$$

Первый этап решения заключается в отыскании значений  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$ , минимизирующих функцию  $u$ . Формула (1.78) в этом случае примет вид

$$u = \sum_{i=1}^4 \frac{[(\beta_{i1} - \beta_{i3})\gamma_1 + (\beta_{i2} - \beta_{i3})\gamma_2 - (\alpha_i - \beta_{i3})]^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{i2}^2 \gamma_2^2 + \sigma_{i3}^2 (1 - \gamma_1 - \gamma_2)^2 + \sigma_{i4}^2}$$

Для отыскания минимума  $u$  на ЭВМ был использован метод наискорейшего спуска. В качестве начального приближения брали равные значения  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,333$ , при которых  $u = 2303$ . В результате минимизации были получены следующие значения выходов:  $\hat{\gamma}_1 = 8,68\%$ ,  $\hat{\gamma}_2 = 26,75\%$ ,  $\hat{\gamma}_3 = 64,57\%$  при  $u_{\min} = 10,6$ . На втором этапе по формуле (1.76) были вычислены поправки  $\delta_{ij}^{\min}$  матрица

которых приведена ниже:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} -0,0047 & -0,0100 & -0,0038 & 0,0373 \\ -0,0137 & -0,0424 & -0,0710 & 0,1099 \\ 0,0026 & 0,0109 & 0,0135 & -0,0300 \\ 0,0210 & 0,0649 & 0,0936 & -0,1906 \end{bmatrix}$$

Относительные поправки, вычисленные в процентах от измеренных содержаний, могут быть представлены матрицей

$$[\delta_{ij}^{\text{отн}}] = \begin{bmatrix} -0,031 & -0,146 & -0,246 & 0,912 \\ -0,305 & -0,718 & -2,327 & 2,916 \\ 0,006 & 0,022 & 0,033 & -0,070 \\ 0,063 & 0,187 & 0,450 & -0,736 \end{bmatrix}$$

Как видно из приведенных результатов эти величины невелики (не превышают 3 % измеренных содержаний). Как правило, они не превышают  $\sigma_{ij}$ , лишь в одном случае они больше  $2\sigma$ . Таким образом, вычисленные корректировки лежат в пределах погрешности химического анализа, что обусловило существенно различные решения при традиционном подходе.

Откорректированные значения содержаний  $\hat{\beta}_{ij}$  представлены матрицей

$$[\hat{\beta}_{ij}] = \begin{bmatrix} 15,00 & 6,83 & 1,55 & 4,13 \\ 4,49 & 5,86 & 2,98 & 3,88 \\ 43,70 & 48,31 & 40,81 & 43,07 \\ 33,62 & 34,76 & 20,89 & 25,71 \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что новые значения  $\hat{\beta}_{ij}$  делают исходную переопределенную систему совместной, исключают невязки балансов и доставляют максимум критерию правдоподобия.

### Оценка точности расчета

Формула дисперсий выходов. Пусть в результате расчета баланса с помощью корректировок содержаний найденные выходы  $\hat{\gamma}_i$  будут в конечном счете зависеть от набора  $\beta_{ij}$  и  $\alpha_i = \beta_{i, n+1}$ , т.е.

$$\hat{\gamma}_i = \gamma_i(\beta) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.79)$$

Но вектор  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{n-1})$  является точкой минимума функции (1.78), а потому в ней все частные производные  $u$  по  $\gamma_k$  должны обращаться в нуль, т.е.

$$\sum_{l=1}^m \frac{[(\beta_{j1} - \beta_{in})\gamma_1 + \dots + (\beta_{i, n-1} - \beta_{in})\gamma_{n-1} - (\beta_{i, n+1} - \beta_{in})]^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^2 + \dots + \sigma_{i, n-1}^2 \gamma_{n-1}^2 + \sigma_{in}^2 (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j)^2 + \sigma_{i, n+1}^2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{2(\beta_{ik} - \beta_{in})}{(\beta_{j_1} - \beta_{in})\gamma_1 + \dots + (\beta_{i, n-1} - \beta_{in})\gamma_{n-1} - (\beta_{i, n+1} - \beta_{in})} \right. \\
 & \left. - \frac{2[\sigma_{ik}^2 \gamma_k - \sigma_{in}^2 (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j)]}{\sigma_{j_1}^2 \gamma_1^2 + \dots + \sigma_{i, n-1}^2 \gamma_{n-1}^2 + \sigma_{in}^2 (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j) + \sigma_{i, n+1}^2} \right] = \\
 & = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{1.80}
 \end{aligned}$$

Левая часть каждого из уравнений (1.80) зависит от векторов  $\beta$  и  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$ , и если ее для краткости обозначить через  $\varphi_k(\gamma, \beta)$ , то систему (1.80) удастся записать короче:

$$\varphi_k(\gamma, \beta) = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{1.81}$$

Поскольку точка  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{n-1})$  удовлетворяет системе уравнений (1.81), после подстановки вместо  $\gamma$  вектора  $\hat{\gamma}$  ( $\beta$ ) получим тождества

$$\varphi_k(\hat{\gamma}(\beta), \beta) \equiv 0 \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

Дифференцируя каждое из полученных тождеств по координате  $\beta_{st}$ , получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \beta_{st}} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_{n-1}} \frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_{st}} \\
 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \beta_{st}} + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \gamma_{n-1}} \frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}} = \\
 & = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_{st}} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \beta_{st}} + \dots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \gamma_{n-1}} \frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}} = \\
 & = - \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \beta_{st}}.
 \end{aligned} \right\} \tag{1.82}
 \end{aligned}$$

Система (1.82) представляет собой определенную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}}, \frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \beta_{st}}, \dots$

...,  $\frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}}$ . Если удастся решить систему (1.82), то дисперсии выходов

$\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  найдутся по известной формуле (1.39) для дисперсии функции многих независимых случайных величин  $\beta_{st}$ :

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) = \sum_{s,m,t=n+1} \left( \frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \right)^2 \sigma^2(\beta_{st}) = \sum_{s,m,t=n+1} \left( \frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \right)^2 \sigma_{st}^2$$

$$(k = \overline{1, n}), \quad (1.83)$$

причем частные производные  $\partial \hat{\gamma}_k / \partial \beta_{st}$  следует брать в точке  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_{11}, \bar{\beta}_{12}, \dots, \bar{\beta}_{m, n+1})$ . Поскольку точные значения содержаний  $\bar{\beta}_{st}$  неизвестны, естественно искать эти производные в какой-нибудь близкой точке, например, в точке  $\hat{\beta}$ .

С этой целью вычислим все коэффициенты системы (1.82) в точке  $\hat{\beta}$ . Для простоты записи обозначим

$$D_i = D_i(\gamma) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \sigma_{i\nu}^2 \gamma_\nu^2;$$

$$\Delta_i = \Delta_i(\gamma, \beta) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_{i\nu} \gamma_\nu,$$

$$(1.84)$$

где  $\gamma_n = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu$  и  $\gamma_{n+1} = \dot{-}1$ .

Тогда функция  $u$  и ее частные производные  $\partial u / \partial \gamma_k$  примут вид:

$$u = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^2(\gamma, \beta)}{D_i(\gamma)};$$

$$\varphi_k(\gamma, \beta) = \frac{\partial u}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i} \frac{\partial \Delta_i^2}{\partial \gamma_k} + \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{1}{D_i} \right)$$

$$(k = \overline{1, n-1}), \quad (1.85)$$

Отсюда при  $k, l = \overline{1, n-1}, s = \overline{1, m}, t = \overline{1, n+1}$  будем иметь

$$\frac{\partial \varphi_k(\gamma, \beta)}{\partial \gamma_l} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i} \frac{\partial^2 \Delta_i^2}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Delta_i^2}{\partial \gamma_k} \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \left( \frac{1}{D_i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{1}{D_i} \right);$$



$$\frac{\partial \varphi_k(\gamma, \beta)}{\partial \beta_{st}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i} \frac{\partial^2 \Delta_i^2}{\partial \gamma_k \partial \beta_{st}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta_{st}} \sum_{i=1}^m \Delta_i^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{1}{D_i} \right).$$

Чтобы найти эти производные в точке  $\hat{\beta}$ , надо заметить, что  $\gamma(\hat{\beta}) = \hat{\gamma}$ ;

$$\Delta_i(\gamma(\hat{\beta}), \hat{\beta}) = 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

и все частные производные от  $\Delta_i^2$  по  $\gamma_k$  и  $\beta_{st}$  в точке  $\hat{\beta}$  равны нулю. С учетом этого замечания получим

$$\frac{\partial \varphi_k(\hat{\gamma}, \hat{\beta})}{\partial \gamma_l} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i(\hat{\gamma})} \frac{\partial^2 \Delta_i^2(\hat{\gamma}, \hat{\beta})}{\partial \gamma_k \partial \gamma_l} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^m \frac{(\hat{\beta}_{ik} - \hat{\beta}_{in})(\hat{\beta}_{il} - \hat{\beta}_{in})}{D_i};$$

$$\frac{\partial \varphi_k(\hat{\gamma}, \hat{\beta})}{\partial \beta_{st}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i(\hat{\gamma})} \frac{\partial^2 \Delta_i^2(\hat{\gamma}, \hat{\beta})}{\partial \gamma_k \partial \beta_{st}} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^m \frac{(\hat{\beta}_{ik} - \hat{\beta}_{in})}{D_i} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \beta_{st}} = 2 \frac{\hat{\gamma}_t}{D_s} (\hat{\beta}_{sk} - \hat{\beta}_{sn}). \quad (1.86)$$

Введем в рассмотрение матрицу  $\beta$  — ранга  $n-1$  и вектора  $\Delta$  и  $\frac{\partial \gamma}{\partial \beta_{st}}$ :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\beta}_{11} - \hat{\beta}_{1n}}{\sqrt{D_1}} & \dots & \frac{\hat{\beta}_{1, n-1} - \hat{\beta}_{1n}}{\sqrt{D_1}} \\ \frac{\hat{\beta}_{21} - \hat{\beta}_{2n}}{\sqrt{D_2}} & \dots & \frac{\hat{\beta}_{2, n-1} - \hat{\beta}_{2n}}{\sqrt{D_2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\hat{\beta}_{m1} - \hat{\beta}_{mn}}{\sqrt{D_m}} & \dots & \frac{\hat{\beta}_{m, n-1} - \hat{\beta}_{mn}}{\sqrt{D_m}} \end{bmatrix}; \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_m \end{bmatrix}; \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \beta_{st}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}} \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \beta_{st}} \\ \dots \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}} \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

Тогда систему (1.72) можно записать в векторно-матричных обозначениях весьма просто:

$$B^T B \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \beta_{st}} = - B^T \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{st}},$$

где  $B^T$  обозначает транспонированную матрицу для  $B$ . Отсюда найдем вектор частных производных  $\partial \hat{\gamma} / \partial \beta_{st}$ :

$$\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \beta_{st}} = -(B^T B)^{-1} B^T \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{st}} = -\Omega \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{st}}, \quad (1.88)$$

причем для элементов матрицы  $\Omega = (B^T B)^{-1} B^T$  размерности  $(n-1) \times m$  будем использовать обозначения  $\omega_{kt}$ . Учтем также, что все элементы вектора  $\partial \Delta / \partial \beta_{st}$  нули, кроме  $s$ -го, равного  $\hat{\gamma}_t / \sqrt{D_s}$ , тогда из выражения (1.88) находим

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} = -\omega_{ks} \frac{\hat{\gamma}_t}{\sqrt{D_s}} \quad (k = \overline{1, n-1}; s = \overline{1, m}; t = \overline{1, n+1}). \quad (1.89)$$

С учетом выражения (1.83) получим

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) = \sum_{s,t=1}^{s=m, t=n+1} \omega_{ks}^2 \frac{\hat{\gamma}_t^2 \sigma_{st}^2}{D_s} = \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^2 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.90)$$

Частные производные выхода  $\hat{\gamma}_n$  находим из балансного уравнения

$$\gamma_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j;$$

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_n}{\partial \beta_{st}} = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} = \left( \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ks} \right) \frac{\gamma_t}{\sqrt{D_s}},$$

и если положить  $\omega_{ns} = - \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ks}$ , то

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_n}{\partial \beta_{st}} = -\omega_{ns} \frac{\hat{\gamma}_t}{\sqrt{D_s}}.$$

Дисперсию выхода  $\hat{\gamma}_n$  также найдем по формуле (1.90).

Заметим, что полученные в результате расчета баланса откорректированные значения содержаний  $\hat{\beta}_{ij}$  имеют меньшее среднее квадратическое отклонение  $\sigma(\hat{\beta}_{ij})$ , чем измеренные значения  $\beta_{ij}$ . Действительно, с помощью введенных обозначений (1.84) и формулы поправок (1.76)

величину  $\hat{\beta}_{ij}$  можно представить в виде

$$\hat{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\Delta_i(\hat{\gamma}, \beta) \hat{\gamma}_i \sigma_{ij}^2}{D_i(\gamma)} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}). \quad (1.91)$$

Отсюда найдем необходимые для вычисления дисперсий  $\sigma^2(\hat{\beta}_{ij})$  частные производные  $\frac{\partial \hat{\beta}_{ij}}{\partial \beta_{st}}$ , причем как и выше эти производные будем искать в точке  $\hat{\beta}$ :

$$\frac{\partial \hat{\beta}_{ij}}{\partial \beta_{st}} = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \beta_{st}} - \frac{\hat{\gamma}_i \sigma_{ij}^2}{D_i} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \beta_{st}} - \Delta_i \frac{\partial}{\partial \beta_{st}} \left( \frac{\hat{\gamma}_i \sigma_{ij}^2}{D_i} \right).$$

Вводя символы Кронеккера  $P_{is}$  и  $P_{jt}$  и символ  $r_{is}$ , обозначающий элемент  $i$ -й строки и  $s$ -го столбца матрицы  $R = B\Omega$ , с учетом того, что  $\partial \beta_{ij} / \partial \beta_{st} = P_{is} P_{jt}$  имеем:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial \beta_{st}} = (\hat{\beta}_{i1} - \hat{\beta}_{in}) \frac{\partial \hat{\gamma}_1}{\partial \beta_{st}} + \dots + (\hat{\beta}_{i, n-1} - \hat{\beta}_{in}) \frac{\partial \hat{\gamma}_{n-1}}{\partial \beta_{st}} +$$

$$+ P_{is} \hat{\gamma}_t = (\hat{\beta}_{i1} - \hat{\beta}_{in}) \omega_{1s} \frac{\hat{\gamma}_t}{\sqrt{D_s}} + \dots + (\hat{\beta}_{i, n-1} - \hat{\beta}_{in}) \omega_{n-1, s} \times$$

$$\times \frac{\hat{\gamma}_t}{\sqrt{D_s}} + P_{is} \hat{\gamma}_t = -\hat{\gamma}_t \left[ \sqrt{\frac{D_i}{D_s}} (B\Omega)_{is} - P_{is} \right] =$$

$$= -\hat{\gamma}_t \left( \sqrt{\frac{D_i}{D_s}} r_{is} - P_{is} \right);$$

$$\Delta_i \frac{\partial}{\partial \beta_{st}} \left( \frac{\hat{\gamma}_i \sigma_{ij}^2}{D_i} \right) = 0.$$

Поскольку  $\Delta_i$  в точке  $\hat{\beta}$  равно нулю, получим

$$\frac{\partial \hat{\beta}_{ij}}{\partial \beta_{st}} = P_{is} P_{jt} + \frac{\sigma_{ij}^2 \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_t}{D_i} \left( \sqrt{\frac{D_i}{D_s}} r_{is} - P_{is} \right). \quad (1.92)$$

Отсюда

$$\sigma^2(\hat{\beta}_{ij}) = \sum_{s, t=1}^{s=m, t=m+1} \left( \frac{\partial \hat{\beta}_{ij}}{\partial \beta_{st}} \right)^2 \sigma_{st}^2 = \sigma_{ij}^2 \left[ 1 - \frac{\sigma_{ij}^2 \hat{\gamma}_i^2}{D_i} \left( 1 - \sum_{s=1}^m r_{is}^2 \right) \right].$$

Исходя из очевидного матричного тождества

$$RR^T = B(B^T B)^{-1} B^T [B(B^T B)^{-1} B^T]^T = B(B^T B)^{-1} B^T = R.$$

приводящего к тождеству для элементов матрицы  $R$ :

$$R = B\Omega;$$

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^m r_{is}^2, \quad (1.93)$$

для дисперсии  $\hat{\beta}_{ij}$  окончательно получим формулу\*

$$\sigma^2(\hat{\beta}_{ij}) = \sigma_{ij}^2 \left[ 1 - \frac{\sigma_{ij}^2 \hat{\gamma}_j^2}{D_j} (1 - r_{ij}) \right], \quad 0 \leq r_{ij} \leq 1, \quad (1.94)$$

подтверждающую сделанное замечание.

**Формула дисперсий извлечений.** В первом подразделе данной главы была выведена формула для дисперсий извлечений ценных компонентов в концентраты и другие продукты при традиционной методике расчета технологического баланса. Несколько сложнее формула дисперсий извлечений получается при расчете баланса по критерию максимального правдоподобия.

Дело в том, что извлечение  $k$ -го компонента в  $l$ -й продукт  $\epsilon_{kl}$  определяется после корректировки измеренных содержаний, т.е. по формуле

$$\hat{\epsilon}_{kl} = \frac{\hat{\beta}_{kl} \hat{\gamma}_l}{\hat{\beta}_{k, n+1}}, \quad (1.95)$$

а величины  $\hat{\beta}_{kl}$ ,  $\hat{\beta}_{k, n+1}$  и  $\hat{\gamma}_l$  являются функциями всех измеренных содержаний  $\beta_{ij}$  ( $i = 1, m; j = 1, n+1$ ) [см. формулу (1.81)].

Для определения дисперсий извлечений сначала воспользуемся формулой (1.65) для относительной дисперсии произведения нескольких функций случайных величин. Будем иметь

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma(\hat{\epsilon}_{kl})}{\hat{\epsilon}_{kl}} \right]^2 &= \left[ \frac{\sigma(\hat{\beta}_{kl})}{\hat{\beta}_{kl}} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma(\beta_{k, n+1})}{\hat{\beta}_{k, n+1}} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma(\hat{\gamma}_l)}{\hat{\gamma}_l} \right]^2 + \\ &+ \frac{2 \text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\gamma}_l)}{\hat{\beta}_{kl} \hat{\gamma}_l} - \frac{2 \text{cov}(\hat{\beta}_{k, n+1}, \hat{\gamma}_l)}{\hat{\beta}_{k, n+1} \hat{\gamma}_l} - \frac{2 \text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\beta}_{k, n+1})}{\hat{\beta}_{kl} \hat{\beta}_{k, n+1}}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Найдем все слагаемые в правой части выражения (1.96). Первые два определим по формуле (1.94):

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{\beta}_{kl}) &= \sigma_{kl}^2 \left[ 1 - \frac{\sigma_{kl}^2 \hat{\gamma}_l^2}{D_k} (1 - r_{kk}) \right]; \\ \sigma^2(\hat{\beta}_{k, n+1}) &= \sigma_{k, n+1}^2 \left[ 1 - \frac{\sigma_{k, n+1}^2}{D_k} (1 - r_{kk}) \right], \end{aligned} \quad (1.97)$$

\* Приведенное доказательство формулы принадлежит Е.Г. Емельянову.

а третье — по формуле (1.90):

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_l) = \sum_{s=1}^m \omega_{ls}^2$$

Ковариации определим по известной приближенной формуле для ковариации двух случайных величин, являющихся функциями  $n$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\text{cov}(f, g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma^2(x_i). \quad (1.98)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\gamma}_l) &= \sum_{s,t=1}^{s=m, t=n+1} \frac{\partial \hat{\gamma}_l}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \hat{\beta}_{kl}}{\partial \beta_{st}} \sigma_{st}^2 = \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^{n+1} \left( -\omega_{ls} \frac{\hat{\gamma}_t}{\sqrt{D_s}} \right) [P_{ks} P_{lt} + \frac{\sigma_{kl}^2 \hat{\gamma}_l \hat{\gamma}_t}{D_k} \times \\ &\times \left( \sqrt{\frac{D_k}{D_s}} r_{ks} - P_{ks} \right)] \sigma_{st}^2 \end{aligned}$$

где использованы формулы для частных производных (1.89) и (1.92). Просуммировав, получим

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\gamma}_l) &= - \frac{\omega_{lk} \hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} - \frac{\hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} \sum_{s=1}^m \frac{\omega_{ls}}{\sqrt{D_s}} \times \\ &\times \left( \sqrt{\frac{D_k}{D_s}} r_{ks} - P_{ks} \right) \sum_{t=1}^{n+1} \hat{\gamma}_t^2 \sigma_{st}^2 = - \frac{\omega_{lk} \hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} - \frac{\hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} \sum_{s=1}^m r_{ks} \times \\ &\times \omega_{ls} + \frac{\omega_{lk} \hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} = - \frac{\hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\sqrt{D_k}} \sum_{s=1}^m r_{ks} \omega_{ls}. \end{aligned}$$

Этот результат можно упростить, если заметить матричное тождество

$$R\Omega^T = B\Omega\Omega^T = B(B^T B)^{-1} B^T B [(B^T B)^{-1}]^T = \Omega^T,$$

из которого следует тождество для элементов матриц  $R$  и  $\Omega$ :

$$\sum_{s=1}^m r_{ks} \omega_{ls} = \omega_{lk}.$$

Поэтому ковариация величин  $\hat{\beta}_{kl}$  и  $\hat{\gamma}_l$  выразится так:

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\gamma}_l) = -\omega_{lk} \hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2 / \sqrt{D_k}. \quad (1.99)$$

Аналогично получим ковариацию величин  $\hat{\beta}_{k,n+1}$  и  $\hat{\gamma}_l$ :

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{k,n+1}, \hat{\gamma}_l) = -\frac{\omega_{lk} \hat{\gamma}_{n+1} \hat{\sigma}_{k,n+1}^2}{\sqrt{D_k}} = \frac{\omega_{lk} \sigma_{k,n+1}^2}{\sqrt{D_k}}. \quad (1.100)$$

Ковариацию скорректированных содержаний  $\hat{\beta}_{kl}$  и  $\hat{\beta}_{k,n+1}$  также найдем по правилу (1.98):

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\beta}_{k,n+1}) &= \sum_{s=t=1}^{s=m, t=n+1} \frac{\partial \hat{\beta}_{kl}}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \hat{\beta}_{k,n+1}}{\partial \beta_{st}} \sigma_{st}^2 = \sum_{s,t=1}^{s=m, t=n+1} [P_{ks} \times \\ &\times P_{lt} + \frac{\sigma_{kl}^2 \hat{\gamma}_l \hat{\gamma}_t}{D_k} (\sqrt{\frac{D_k}{D_s}} r_{ks} - P_{ks})] [P_{ks} P_{n+1,t} + \frac{\sigma_{k,n+1}^2 \hat{\gamma}_{n+1} \hat{\gamma}_t}{D_k} \times \\ &\times (\sqrt{\frac{D_k}{D_s}} r_{ks} - P_{ks})] \sigma_{st}^2 = \frac{\sigma_{kl}^2 \sigma_{k,n+1}^2 \hat{\gamma}_l}{D_k} (1 - r_{kk}). \quad (1.101) \end{aligned}$$

Подставляя все найденные слагаемые в формулу (1.98), будем иметь

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma(\hat{\epsilon}_{kl})}{\hat{\epsilon}_{kl}} \right]^2 &= \left[ \frac{\sigma(\hat{\gamma}_l)}{\hat{\gamma}_l} \right]^2 + \frac{\sigma_{kl}^2}{\hat{\beta}_{kl}^2} + \frac{\sigma_{k,n+1}^2}{\hat{\beta}_{k,n+1}^2} - \\ &- \frac{2\omega_{lk} \hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\hat{\beta}_{kl} \hat{\gamma}_l \sqrt{D_k}} - \frac{2\omega_{lk} \sigma_{k,n+1}^2}{\hat{\beta}_{k,n+1} \hat{\gamma}_l \sqrt{D_k}} - (1 - r_{kk}) \times \\ &\times \left[ \frac{\sigma_{kl}^4}{D_k} \frac{\hat{\gamma}_l^2}{\hat{\beta}_{kl}^2} + \frac{\sigma_{k,n+1}^4}{D_k \hat{\beta}_{k,n+1}^2} + \frac{2\sigma_{kl}^2 \sigma_{k,n+1}^2 \hat{\gamma}_l}{D_k \hat{\beta}_{kl} \hat{\beta}_{k,n+1}} \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma(\hat{\epsilon}_{kl})}{\epsilon_{kl}} \right]^2 &= \left[ \frac{\sigma(\hat{\gamma}_l)}{\hat{\gamma}_l} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma_{kl}}{\hat{\beta}_{kl}} \right]^2 \left( 1 - \frac{2\omega_{lk} \hat{\beta}_{kl}}{\sqrt{D_k}} \right) + \\ &+ \left[ \frac{\sigma_{k,n+1}}{\hat{\beta}_{k,n+1}} \right]^2 \left( 1 - \frac{2\omega_{lk} \hat{\beta}_{k,n+1}}{\hat{\gamma}_l \sqrt{D_k}} \right) - \\ &- \frac{(1 - r_{kk})}{D_k} \left[ \frac{\hat{\gamma}_l \sigma_{kl}^2}{\hat{\beta}_{kl}} + \frac{\sigma_{k,n+1}^2}{\hat{\beta}_{k,n+1}} \right]^2. \quad (1.102) \end{aligned}$$

Алгоритм расчета за длительный период. В практической деятельности обогащательных фабрик всегда имеется необходимость вычисления технологических показателей (выходов, извлечений и т.п.) за длитель-

ный промежуток времени. При этом предполагается организация многократного контроля вещественного состава продуктов технологической схемы в точках, необходимых для составления системы уравнений материального баланса. На основе измерения содержаний полезных компонентов в сменных (суточных) пробах и производительности за смену (сутки) могут быть определены технологические показатели за промежуток времени, состоящий из нескольких смен (суток).

В общем случае проанализированный комплект проб всех продуктов технологической операции в совокупности с данными о производительности по исходному питанию называют разовым анализом, а соответствующий период времени — контролируемым периодом. Интервал времени, за который определяются технологические показатели, называют расчетным периодом, а его длительность учитывают числом разовых анализов контролируемых периодов.

Ясно, что разработанную методику расчета технологического баланса методом корректировок измеренных данных по критерию максимального правдоподобия необходимо дополнить формулами для определения выходов, извлечений и их погрешностей за расчетный период.

Приведем этот материал в форме алгоритма расчета баланса по КМП за расчетный период.

1. Задать исходные данные:

число выходных продуктов  $n$ ;

число контролируемых компонентов  $m$  ( $m \geq n - 1$ );

число проанализированных комплектов проб (разовых анализов)  $N$ ;

производительность по исходному питанию и погрешность ее измерения соответственно:

$$[Q_{n+1}^{(\nu)}] \quad (\nu = \overline{1, N});$$

$$[\Delta Q_{n+1}^{(\nu)}] \quad (\nu = \overline{1, N});$$

матрицы содержаний компонентов в продуктах

$$[\beta_{ij}^{(\nu)}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}; \nu = \overline{1, N})$$

матрицы допустимых отклонений при измерении содержаний

$$[\sigma_{ij}^{(\nu)}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}; \nu = \overline{1, N}).$$

Если известны средние квадратические отклонения результатов измерений, то вместо вектора  $[\Delta Q_{n+1}^{(\nu)}]$  и матриц  $[\Delta \beta_{ij}^{(\nu)}]$  ( $\nu = \overline{1, N}$ ) должны быть использованы, соответственно вектор —  $[\sigma(Q_{n+1}^{(\nu)})]$  и матрицы  $[\sigma_{ij}^{(\nu)}]$  ( $\nu = \overline{1, N}$ ), а пункт 3 данного алгоритма следует пропустить.

2. Сформировать системы балансных уравнений за каждый кон-

тролируемый период ( $\nu = \overline{1, N}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{i1} \gamma_1 + \beta_{i2} \gamma_2 + \dots + \beta_{in} \gamma_n = \beta_{i, n+1} \\ (i = \overline{1, m}) \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1. \end{array} \right.$$

3. Рассчитать вектор  $[\sigma(Q_{n+1}^{(\nu)})]$  и матрицы  $[\sigma_{ij}^{(\nu)}]$  ( $\nu = \overline{1, N}$ ) средних квадратических отклонений:

$$\sigma(Q_{n+1}^{(\nu)}) = \frac{\Delta Q_{n+1}^{(\nu)}}{k_1} \quad (\nu = \overline{1, N});$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta \beta_{ij}^{(\nu)}}{k_2} \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad \nu = \overline{1, n}).$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  позволяют перейти от допустимых отклонений при измерении производительности и содержаний к средним квадратическим отклонениям. Их значения зависят от методики определения допустимых отклонений.

4. Определить выходы за каждый контролируемый период:

$$\gamma^{(\nu)} = [\gamma_1^{(\nu)}, \gamma_2^{(\nu)}, \dots, \gamma_n^{(\nu)}] \quad (\nu = \overline{1, N}).$$

Вектор выходов  $\gamma^{(\nu)}$  находится методом корректировок измеренных содержаний  $\beta_{ij}^{(\nu)}$  по КМП. Он является точкой минимума целевой функции (1.77) при ограничении  $\sum_{j=1}^n \gamma_j = 1$ . Поиск вектора  $\gamma^{(\nu)}$  реализуется на ЭВМ.

5. Вычислить невязку и дисперсию каждого балансного уравнения (в алгоритме знак  $\wedge$  над  $\gamma_j^{(\nu)}$  для простоты не проставлен):

$$\Delta_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij}^{(\nu)} \gamma_j^{(\nu)};$$

$$D_i^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^{(\nu)2} \gamma_j^{(\nu)2};$$

$$(\dot{\gamma}_{n+1}^{(\nu)} = -1; \quad i = \overline{1, m}; \quad \nu = \overline{1, N}).$$

6. Вычислить скорректированные значения содержаний:

$$\hat{\beta}_{ij}^{(\nu)} = \beta_{ij}^{(\nu)} - \frac{\Delta_i^{(\nu)} \sigma_{ij}^{(\nu)}}{D_i^{(\nu)}} \gamma_j^{(\nu)}$$

$$(\dot{\gamma}_{n+1}^{(\nu)} = -1; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad \nu = \overline{1, N}).$$



7. Вычислить массы продуктов за каждый контролируемый и расчетный период:

$$Q_l^{(\nu)} = \gamma_l^{(\nu)} Q_{n+1}^{(\nu)} \quad (l = \overline{1, n}; \nu = \overline{1, M});$$

$$Q_l = \sum_{\nu=1}^N Q_l^{(\nu)} \quad (l = \overline{1, n+1}).$$

8. Вычислить выходы за весь расчетный период:

$$\gamma_l = Q_l / Q_{n+1} \quad (l = \overline{1, n}).$$

9. Вычислить массы всех компонентов во всех продуктах за каждый контролируемый период:

$$\Gamma_{kl}^{(\nu)} = \beta_{kl}^{(\nu)} \gamma_l^{(\nu)} \quad M_{kl}^{(\nu)} = \Gamma_{kl}^{(\nu)} Q_{n+1}^{(\nu)};$$

$$M_{k, n+1}^{(\nu)} = \hat{\beta}_{k, n+1}^{(\nu)} Q_{n+1}^{(\nu)} \quad (k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}; \nu = \overline{1, M}).$$

10. Вычислить массы всех компонентов во всех продуктах за расчетный период:

$$M_{kl} = \sum_{\nu=1}^N M_{kl}^{(\nu)} \quad (k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n+1}).$$

11. Вычислить извлечения всех компонентов за каждый контролируемый период:

$$\epsilon_{kl}^{(\nu)} = M_{kl}^{(\nu)} / M_{k, n+1}^{(\nu)} \quad (k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}; \nu = \overline{1, M}).$$

12. Вычислить извлечения всех компонентов за расчетный период:

$$\tilde{\epsilon}_{kl} = M_{kl} / M_{k, n+1} \quad (k = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}).$$

13. Сформировать матрицу  $B^{(\nu)}$  размерами  $m \times (n-1)$ :

$$B^{(\nu)} = \left[ \frac{\hat{\beta}_{ij}^{(\nu)} - \hat{\beta}_{in}^{(\nu)}}{\sqrt{D_i}} \right] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1}; \nu = \overline{1, M})$$

(справа индекс  $\nu$  для простоты записи везде опущен).

14. Рассчитать матрицу  $\Omega^{(\nu)} = [\omega_{ij}^{(\nu)}]$  размерами  $(n-1) \times m$ :

$$\Omega^{(\nu)} = (B^{(\nu)T} B^{(\nu)})^{-1} B^{(\nu)T} \quad (\nu = \overline{1, M}),$$

вектор-строку

$$\omega_{nl}^{(\nu)} = - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{il}^{(\nu)} \quad (l = \overline{1, m}; \nu = \overline{1, M})$$

$$\bar{r}^{(v)} = [r_{kl}^{(v)}] = B^{(v)} \Omega^{(v)} \quad (v = \overline{1, M}).$$

размерности  $m \times m$ .

15. Вычислить относительные погрешности выходов за каждый контролируемый период:

$$\left[ \frac{\sigma(\gamma_l^{(v)})}{\gamma_l^{(v)}} \right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_{il}^{(v)2}}{\gamma_l^{(v)2}} \quad (l = \overline{1, n}; \quad v = \overline{1, M}).$$

16. Вычислить относительные погрешности выходов за расчетный период:

$$\left[ \frac{\sigma(\tilde{\gamma}_l)}{\tilde{\gamma}_l} \right]^2 = \sum_{v=1}^N \left\{ \left( \frac{a_l^{(v)}}{a_l} \right)^2 \left[ \frac{\sigma(\gamma_l^{(v)})}{\gamma_l^{(v)}} \right]^2 + \left( \frac{a_l^{(v)}}{a_l} - \frac{a_{n+1}^{(v)}}{a_{n+1}} \right)^2 \left[ \frac{\sigma(a_{n+1}^{(v)})}{a_{n+1}^{(v)}} \right]^2 \right\}.$$

17. Вычислить относительные погрешности извлечений всех компонентов за каждый контролируемый период (по правилу (1.96) по ранее выведенной формуле (1.102)).

18. Вычислить относительные погрешности извлечений всех компонентов за расчетный период:

$$\left[ \frac{\sigma(\tilde{\epsilon}_{kl})}{\tilde{\epsilon}_{kl}} \right]^2 = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{kl}^2} \left[ \sigma \left( \frac{\sum_{v=1}^N M_{kl}^{(v)}}{\sum_{v=1}^N M_{k, n+1}^{(v)}} \right) \right]^2 = \left[ \frac{\sigma \left( \sum_{v=1}^N M_{kl}^{(v)} \right)}{M_{kl}} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma \left( \sum_{v=1}^N M_{k, n+1}^{(v)} \right)}{M_{k, n+1}} \right]^2 - \frac{2 \text{cov} \left( \sum_{v=1}^N M_{kl}^{(v)}, \sum_{v=1}^N M_{k, n+1}^{(v)} \right)}{M_{kl} M_{k, n+1}}.$$

( $k = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, n}$ ).

Окончательное выражение для относительных погрешностей громоздко, поэтому не приводится. Рекомендуется использовать далее приближенные формулы для дисперсий и ковариаций случайных величин, являющихся функциями многих независимых переменных.

Пример. Приведенная выше методика была апробирована при расчете технологических показателей для схемы, имеющей один входной и три выходных продукта (I, II, III). Работа схемы за месяц характеризовалась матрицей содержаний восьми компонентов в каждом из продуктов, а точность измерений — матрицей допустимых отклонений. Эти матрицы в условных единицах для каждого из рассматриваемых месяцев приведены ниже:

$$[\beta_{ij}^{(v)}] = \begin{bmatrix} 0,546 & 2,05 & 0,525 & 1,00 \\ 9,850 & 12,65 & 11,130 & 11,53 \\ 0,0159 & 0,0716 & 0,0191 & 0,0344 \\ 9,060 & 9,30 & 5,30 & 7,32 \\ 0,180 & 0,212 & 3,79 & 2,19 \\ 0,135 & 0,180 & 1,09 & 0,727 \\ 0,135 & 0,098 & 0,96 & 0,58 \\ 0,0585 & 0,0795 & 1,25 & 0,68 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta\beta_{ij}^{(v)}] = \begin{bmatrix} 0,0225 & 0,0530 & 0,0265 & 0,0397 \\ 0,1325 & 0,1325 & 0,1325 & 0,1325 \\ 0,0013 & 0,0053 & 0,0013 & 0,0026 \\ 0,1192 & 0,1325 & 0,0795 & 0,1060 \\ 0,0397 & 0,0397 & 0,1192 & 0,1060 \\ 0,0265 & 0,0397 & 0,0795 & 0,0662 \\ 0,0238 & 0,0238 & 0,0397 & 0,0530 \\ 0,0212 & 0,0265 & 0,0927 & 0,0662 \end{bmatrix}$$

Для других месяцев матрицы несколько отличались. Были рассчитаны технологические показатели работы сжмы за шесть месяцев и погрешности их определения.

В табл. 1.2 приведены результаты расчета выходов, извлечений одной из компонент и относительных погрешностей извлечений за каждый из шести контролируемых периодов и весь расчетный период по каждому из конечных продуктов (обозначен соответствующим индексом I, II, III).

Как видно из данных табл. 1.2 величины выходов, извлечений и погрешностей расчетов изменяются от месяца к месяцу, что является следствием изменения матриц содержаний. Погрешности вычисления технологических показателей за расчетный период снижаются по сравнению с погрешностями за контролируемый

Таблица 1.2

Период	Характеристики продуктов разделения									
	$\gamma^I$	$\epsilon^I, \%$	$\sigma^I(\epsilon)$		$\gamma^{II}$	$\sigma^{II}(\epsilon)$		$\gamma^{III}$	$\sigma^{III}(\epsilon)$	
			$\epsilon^I$	%		$\epsilon^{II}$	%		$\epsilon^{III}$	%
1	0,136	7,34	2,16	0,318	64,38	0,38	0,546	28,28	0,58	
2	0,111	6,14	2,84	0,390	68,85	0,35	0,495	25,01	0,59	
3	0,105	5,39	2,95	0,409	69,00	0,33	0,486	25,62	0,56	
4	0,128	6,40	2,30	0,488	75,35	0,26	0,384	18,64	0,62	
5	0,053	2,71	5,66	0,468	73,60	0,29	0,479	23,69	0,59	
6	0,127	6,06	2,35	0,436	70,48	0,30	0,437	23,46	0,57	
$\sum_{1}^6$	0,110	5,66	1,13	0,419	70,34	0,13	0,471	23,99	0,24	

период. Отношения  $\frac{\sigma(\gamma_l^{(v)})}{\sigma(\gamma_l)}$  и  $\frac{\sigma(\epsilon_{kl}^{(v)})}{\sigma(\epsilon_{kl})}$  приближенно равны  $\sqrt{N}$  и тем ближе к этому числу, чем меньше отличаются друг от друга производительности и матрицы содержаний, характеризующие каждый контролируемый период.

### Инженерный расчет простейшей разделительной операции

Любая самая сложная технологическая схема обогащения руд состоит из простейших разделительных операций, в которых один входной продукт делится на два: концентрат и хвосты (см. рис. 1.5). Технологическую схему обогатительной фабрики в целом, предусматривающую выпуск одного концентрата, также можно рассматривать как простейшую разделительную операцию.

Известно, что для такой операции система уравнений материального баланса имеет вид

$$\begin{cases} \beta_1 \gamma_1 + \vartheta_1 \gamma_2 = a_1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \end{cases}$$

где  $a_1, \beta_1, \vartheta_1$  — измеренные содержания металла соответственно в руде, концентрате и хвостах, а  $\gamma_1, \gamma_2$  — выходы концентрата и хвостов, определяемые по формулам

$$\gamma_1 = \frac{a_1 - \vartheta_1}{\beta_1 - \vartheta_1}; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1.$$

Коэффициенты  $a_1, \beta_1, \vartheta_1$  как результаты измерения являются случайными величинами с дисперсиями  $\sigma_{a_1}^2, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\vartheta_1}^2$ , имеющими распределения, близкие к нормальным. Найденные выходы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  также будут случайными величинами, математические ожидания которых в рамках линейной модели равны истинным значениям выходов, а дисперсии могут быть вычислены по преобразованной формуле (1.43):

$$\sigma^2(\gamma_1) = \sigma^2(\gamma_2) = \frac{\sigma_{\beta_1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{\vartheta_1}^2 \gamma_2^2 + \sigma_{a_1}^2}{(\beta_1 - \vartheta_1)^2}.$$

Строго говоря, при вычислении  $\sigma^2(\gamma)$  необходимо знать истинные значения выходов  $\gamma_1^0, \gamma_2^0$  и содержаний  $\beta_1$  и  $\vartheta_1$ . Однако, поскольку эти значения неизвестны, в первом приближении используют измеренные содержания и вычисленные выходы. Полученное значение среднего квадратического отклонения может служить мерой точности определения выходов.

Учитывая, что точность вычисления выходов может оказаться недостаточной, а современные методы анализа позволяют одновременно

определять содержания нескольких компонентов в каждом из продуктов, представляется целесообразным для уменьшения погрешностей использовать эту дополнительную информацию. Если в каждом из продуктов контролировать  $m$  элементов ( $m > 1$ ), то система уравнений баланса для простейшей схемы станет переопределенной

$$\begin{cases} \beta_1 \gamma_1 + \vartheta_1 \gamma_2 = a_1 \\ \beta_2 \gamma_1 + \vartheta_2 \gamma_2 = a_2 \\ \dots \dots \dots \\ \beta_m \gamma_1 + \vartheta_m \gamma_2 = a_m \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \end{cases} \quad (1.103)$$

а соответствующая матрица средних квадратических отклонений примет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \sigma_{m3} \end{bmatrix}$$

Использование метода корректировок измеренных данных по КМП позволяет получить решение системы (1.103), которое с наибольшей вероятностью соответствует набору измеренных данных.

Ниже предлагается приближенный инженерный метод определения выходов по КМП.

Напомним, что под решением системы (1.103) в смысле максимального правдоподобия понимается такой вектор  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ , который минимизирует функцию

$$u(\gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^2}{D_i} = \sum_{i=1}^m \frac{(\beta_i \gamma_1 + \vartheta_i \gamma_2 - a_i)^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{i2}^2 \gamma_2^2 + \sigma_{i3}^2}$$

при одном ограничении:  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . Ясно, что после подстановки в выражение для  $u(\gamma)$   $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$  для отыскания  $\hat{\gamma}_1$  потребуется найти безусловный минимум функции одной переменной

$$u = \sum_{i=1}^m \frac{[(\beta_i - \vartheta_i) \gamma_1 + (a_i - \vartheta_i)]^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^2 + \sigma_{i2}^2 (1 - \gamma_1)^2 + \sigma_{i3}^2}, \quad (1.104)$$

что при  $m \geq 2$  реализуется с помощью стандартной программы на ЭВМ.

Для определения выходов простейшей разделительной операции естественно желание иметь инженерный алгоритм, не требующий ЭВМ. С этой целью найдем точку минимума критериальной функции  $u$  приближенно. Прежде всего определим начальное приближение  $\gamma^{(0)} =$

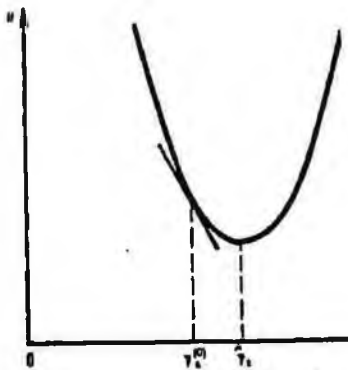


Рис. 1.8. Зависимость целевой функции от выхода для простейшей разделительной операции

$$= (\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}).$$

С этой целью выберем из имеющегося набора  $m$  уравнений баланса по металлам одно, которое вместе с уравнением баланса по массам образует систему вида (1.9). Решение этой системы и примем за начальное приближение.

При выборе уравнения обычно предпочитают уравнение баланса по основному металлу (элементу), для выделения которого данная разделительная операция предназначена, либо по элементу, для которого разность  $\beta_j - \vartheta_j$  наибольшая.

Определив начальное приближение, дальнейшее уточнение координат точки минимума осуществляют по методу Ньютона, согласно которому целевую функцию в окрестности приближения заменяют квадратичной параболой, имеющей с данной функцией в точке  $\gamma_1^{(0)}$  общую касательную и одинаковую кривизну (рис. 1.8). Абсцисса вершины этой параболы и принимается приближенно за точку экстремума (или за следующее приближение).

Разложим целевую функцию (1.104) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\gamma_1^{(0)}$  и ограничимся членами второго порядка относительно  $\gamma_1 - \gamma_1^{(0)}$

$$u = \sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)_{\gamma=\gamma^{(0)}} + (\gamma_1 - \gamma_1^{(0)}) \sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)'_{\gamma=\gamma^{(0)}} + \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_1^{(0)})^2 \sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)''_{\gamma=\gamma^{(0)}}.$$

Координату  $\hat{\gamma}_1$  вершины параболы найдем из условия  $du/d\gamma_1 = 0$ :

$$(\gamma_1 - \gamma_1^{(0)}) \sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)''_{\gamma=\gamma^{(0)}} + \sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)'_{\gamma=\gamma^{(0)}} = 0,$$

$$\text{откуда } \gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(0)} - \frac{\sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)'_{\gamma=\gamma^{(0)}}}{\sum_{i=1}^m \left( -\frac{\Delta_i^2}{D_i} \right)''_{\gamma=\gamma^{(0)}}}; \quad \gamma_2^{(1)} = 1 - \gamma_1^{(1)} \quad (1.105)$$

После преобразования выражения (1.105) получим

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{(a_i - \vartheta_i)(\beta_i - \vartheta_i)}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^{(0)2} + \sigma_{i2}^2 \gamma_2^{(0)2} + \sigma_{i3}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{(\beta_i - \vartheta_i)^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^{(0)2} + \sigma_{i2}^2 \gamma_2^{(0)2} + \sigma_{i3}^2}} \quad (1.106)$$

$$\gamma_2^{(1)} = 1 - \gamma_1^{(1)}.$$

Если ограничиться одной итерацией, то можно приближенно считать  $\tilde{\gamma}_1 \approx \gamma_1^{(1)}$ ,  $\tilde{\gamma}_2 = 1 - \gamma_1^{(1)}$ . Формулу (1.106) можно рекомендовать для инженерного расчета выходов. Заметим, что значения выходов  $\gamma_1^{(1)}$  и  $\gamma_2^{(1)}$ , вычисленные согласно (1.106), доставляют минимум сумме квадратов невязок исходных уравнений баланса, взятых с весами, равными корню квадратному из дисперсии этих уравнений в точке начального приближения.

Определив выходы продуктов, необходимо согласно формуле (1.8) найти корректировки содержаний, а по ним скорректированные содержания:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_i &= \beta_i - \frac{\Delta_i \gamma_1 \sigma_{i1}^2}{D_i} \Big|_{\gamma = \hat{\gamma}}; \\ \hat{\vartheta}_i &= \vartheta_i - \frac{\Delta_i \gamma_2 \sigma_{i2}^2}{D_i} \Big|_{\gamma = \hat{\gamma}}; \\ \hat{a}_i &= a_i + \frac{\Delta_i \sigma_{i3}^2}{D_i} \Big|_{\gamma = \hat{\gamma}}. \end{aligned}$$

По полученным содержаниям рассчитывают извлечения.

**П р и м е р.** В простейшей разделительной операции одной из обогащательных фабрик в каждом из продуктов контролировалось три элемента. В результате получена система из следующих балансных уравнений:

$$\begin{cases} 5,20 \gamma_1 + 0,28 \gamma_2 = 0,48; & (1) \\ 1,83 \gamma_1 + 0,10 \gamma_2 = 0,20; & (2) \\ 13,60 \gamma_1 + 1,20 \gamma_2 = 1,98; & (3) \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1. & (4) \end{cases}$$

Исходя из точности использованного метода контроля содержаний, была получена матрица средних квадратических отклонений

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,03 & 0,04 \\ 0,10 & 0,01 & 0,02 \\ 0,25 & 0,05 & 0,08 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1.3

Системы уравнений	Уравнения, входящие в систему	$\sigma^2(\gamma) \cdot 10^{-4}$	$\sigma(\gamma)$
Определенная	(1) и (4)	1,025	0,0101
Нарощенная	(1), (4), (2)	0,641	0,0080
Нарощенная	(1), (4), (3)	0,368	0,0061
Полная	(1) - (4)	0,304	0,0055

Таким образом, располагаем переопределенной системой четырех уравнений с двумя неизвестными, которая, как нетрудно убедиться, является несовместной. Для рассматриваемой разделительной операции основным является металл, которому в системе соответствует уравнение (1). Поэтому при дальнейшем анализе решение системы двух уравнений (1) и (4) с двумя неизвестными будем рассматривать как начальное приближение:

$$\gamma_1^{(0)} = 0,0406; \quad \gamma_2^{(0)} = 0,9594.$$

Воспользуемся формулой (1.106) и получим решение

$$\gamma_1^{(1)} = 0,0530; \quad \gamma_2^{(1)} = 0,9470.$$

Расчет тех же самых выходов на ЭВМ с использованием программы минимизации функции одной переменной дал следующие результаты:

$$\hat{\gamma}_1 = 0,0555 \quad \hat{\gamma}_2 = 0,9445.$$

Как видно, решения между собой достаточно близки. Проведение одной итерации значительно приближает к наиболее вероятному решению. После корректировки исходных данных получим скорректированную матрицу системы

$$[\hat{\beta}_{ij}] = \begin{bmatrix} 5,158 & 0,259 & 0,519 \\ 1,838 & 0,102 & 0,198 \\ 13,56 & 1,17 & 2,056 \end{bmatrix}.$$

В приведенном примере для характеристики адекватности наращивания системы балансных уравнений были вычислены также средние квадратические отклонения выходов, рассчитанных для разных вариантов балансных систем.

Данные табл. 1.3 показывают, что добавление к определенной системе уравнения (2) повышает точность решения на 20 %, в то время как добавление уравнения (3) дает выигрыш в точности около 40 %. Несмотря на то, что абсолютная погрешность анализа содержания элемента 3 значительно больше погрешностей анализа элемента 2, большая разность  $\beta_3 - \vartheta_3$  делает добавление уравнения (3) более эффективным. Решение полной исходной системы по КМП повышает точность более чем в 1,8 раза. Заметим, что полученный эффект равносильен увеличению точности контроля основного элемента в 1,8 раза, что может представлять собой достаточно сложную техническую задачу.

### Свойства метода расчета по КМП

Из вышеизложенных данных о методе расчета технологического баланса по КМП следует, что с появлением переопределенных балансных систем вида (1.69) возникают трудности при использовании тради-



ционной методики расчета баланса, поскольку неизвестно, какую из определенных подсистем балансных уравнений предпочесть и, главное, как поступить с невязками баланса по тем компонентам, которые не вошли в избранную для расчета подсистему.

Эти вопросы не возникают при применении метода расчета баланса по методу максимального правдоподобия (ММП). Сущность ММП заключается в том, что для расчета баланса используют все балансные уравнения (1.69), причем каждое измеренное содержание  $\beta_{ij}$  подвергается корректировке на такую величину  $\delta_{ij}$ , чтобы, во-первых, система балансных уравнений стала совместной и, во-вторых, чтобы взвешенная сумма квадратов всех корректировок, т.е. величина  $\sum (\delta_{ij}^2 / \sigma_{ij}^2)$  была бы наименьшей из всех возможных.

Приведем важные для применения ММП свойства: единственности решения, оптимальности (наибольшей эффективности) решения и монотонности погрешности расчета решения при наращивании системы (1.69).

Свойство единственности решения. При расчете технологического баланса по методу максимального правдоподобия ищется вектор  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , минимизирующий функцию  $u(\gamma)$ , заданную формулой (1.77), при ограничении

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1, \quad (1.107)$$

или при обозначениях (1.84) минимизирующий функцию  $u(\gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^2(\gamma, \beta)}{D_i(\gamma)}$ .

Естественно возникает вопрос: при поиске точки минимума функции (1.85) не получатся ли разные решения? Если считать исходные данные для расчета технологического баланса: содержания компонентов  $\beta_{ij}$  и средние квадратические отклонения  $\sigma_{ij}$  произвольными положительными числами, то гарантировать единственность решения — набора выходов  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n$  — не удастся, так как минимум критериальной функции может достигаться сразу во многих точках.

Рассмотрим простейшую технологическую схему, состоящую из одной операции. Предположим, что для всех продуктов кроме  $(n+1)$ -го входного, все содержания  $\beta_{ij}$  известны точно, т.е. для этих продуктов средние квадратические отклонения  $\sigma_{ij}$  пренебрежимо малы по сравнению с  $\sigma_{i,n+1} = \sigma(\alpha_i)$  ( $i = 1, m$ ). Тогда придется искать вектор  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , минимизирующий функцию

$$u(\gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{(\beta_{i1} \gamma_1 + \dots + \beta_{in} \gamma_n - \alpha_i)^2}{\sigma_{i,n+1}^2} \quad (1.108)$$

при линейном ограничении (1.107).

Каждое слагаемое в формуле (1.108), представляя собой квадрат линейной функции переменных  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , является, как известно,

выпуклой функцией этих переменных, а поэтому и  $u(\gamma)$  — выпуклая функция в  $n$ -мерном пространстве векторов  $\gamma$ . Свойство выпуклости функции  $u(\gamma)$  не позволяет ей иметь несколько различных локальных минимумов, но при определенных условиях, наложенных на содержания  $\beta_{ij}$ , например, если

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = n-1, \quad (1.109)$$

функция  $u(\gamma)$  будет принимать одно и то же минимальное значение на бесконечном множестве векторов  $\gamma$ . Точнее, если функция  $u(\gamma)$  принимает минимальное значение  $u_{\min}$  в точке  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , принадлежащей гиперплоскости (1.107), то и во всех точках некоторой прямой

$$\gamma = \hat{\gamma} + lt, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.110)$$

лежащей в плоскости (1.107) и определяемой направляющим вектором  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ , также будем иметь  $u(\gamma) = u_{\min}$ .

Действительно, определим направляющий вектор  $l$  следующим образом. Согласно условию (1.109)  $n$  столбцов матрицы  $[\beta_{ij}]$  линейно зависимы, а потому найдется ненулевой вектор  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , такой, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0. \quad (1.111)$$

Остается только нормировать вектор  $\lambda$ , чтобы получить вектор  $l$ , т.е.

$$l_j = \lambda_j / \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.112)$$

В соответствии с выражением (1.108) функция  $u(\gamma)$  на прямой  $\gamma = \hat{\gamma} + lt$  является сложной функцией одной переменной  $t$ :

$$u(\gamma(t)) = F(t) = \sum_{i=1}^m \frac{[\beta_{i1}(\hat{\gamma}_1 + l_1 t) + \dots + \beta_{in}(\hat{\gamma}_n + l_n t) - a_n]^2}{\sigma_{i,n+1}^2},$$

производную которой  $F'(t)$  найдем по правилу вычисления производной сложной функции

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} = 2 \sum_{i=1}^m x_i \times \frac{\beta_{i1} \gamma_1 + \dots + \beta_{in} \gamma_n - a_n}{\sigma_{i,n+1}^2} \left[ \sum_{j=1}^n \beta_{ij} l_j \right].$$

Но в силу условия (1.111) при каждом  $i = 1, m$   $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \lambda_j = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \lambda_j = 0$ ,  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \neq 0$ , т.е.  $F^i(t) = 0$  во всех точках прямой (1.110) и, следовательно, функция  $F(t) = u(\gamma(t))$  на прямой (1.110) принимает постоянное значение  $u_{\min}$ .

Таким образом, формальное применение метода максимального правдоподобия при расчете баланса для произвольного набора исходных данных может привести к существенно различным ответам в зависимости от того, какое выбрано начальное приближение при поиске минимума критериальной функции. Однако в реальных условиях расчета технологических балансов на обогатительных фабриках матрицы исходных данных  $[\beta_{ij}]$  и  $[\sigma_{ij}]$  не произвольны, их элементы удовлетворяют ряду естественных ограничений, учет которых обеспечивает единственность при отыскании выходов и корректировок содержаний.

Основные из этих ограничений следующие:

1. Система балансных уравнений (1.69) имеет матрицу коэффициентов ранга  $n$  и содержит определенную подсистему уравнений, включающую уравнение (1.107), единственное решение которой обладает свойством устойчивости, т.е. мало изменяется при достаточно малых возмущениях исходных данных.

2. Истинные поправки  $\delta_{ij}$  к измеренным содержаниям настолько малы, что невязки баланса по каждому элементу при точных значениях выходов составляют достаточно малую часть от общих масс этих элементов в технологической схеме, т.е.

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \gamma_j^* - \alpha_i = \theta_i \left[ \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \gamma_j^* + \alpha_i \right] \quad (1.113)$$

$$|\theta_i| \leq \theta \quad (i = 1, m),$$

где  $\theta$  — достаточно малое число, а  $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*$  — истинные значения выходов.

При указанных ограничениях можно доказать единственность решения задачи расчета технологического баланса. Для этого оценим критерий правдоподобия или соответствующее ему, согласно формуле (1.77), значение целевой функции  $u(\gamma)$  при истинных значениях выходов. Согласно выражению (1.113), имеем

$$u(\gamma^*) = \sum_{i=1}^m \frac{(\beta_{i1} \gamma_1^* + \dots + \beta_{in} \gamma_n^* - \alpha_i)^2}{\sigma_{i1}^2 \gamma_1^{*2} + \dots + \sigma_{in}^2 \gamma_n^{*2} - \sigma_{i,n+1}^2} \leq \theta^2 \sum_{i=1}^m x_i$$

$$x_i = \frac{(\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \gamma_j^* + \alpha_i)^2}{\sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^{*2}}$$

Величину  $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \gamma_j^2 + a_i^2$  можно выразить через  $\sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^2$ , используя неравенство Коши-Буняковского

$$\sum_{j=1}^n (\beta_{ij} \gamma_j^2 + a_i^2) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (1.114)$$

где для удобства записи введены обозначения (как указывалось ранее)

$$a_i = \beta_{i, n+1}; \sigma(a_i) = \sigma_{i, n+1}; \gamma_{n+1} = -1.$$

С применением неравенства (1.114) оценка  $u(\gamma)$  переписывается в виде

$$u(\gamma) \leq \theta^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}.$$

Но при расчете технологического баланса по критерию максимального правдоподобия в качестве решения задачи принимается вектор выходов  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , минимизирующий функцию  $u(\gamma)$ , а поэтому

$$u(\hat{\gamma}) \leq u(\gamma),$$

следовательно,

$$u(\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\delta_{ij}^2(\hat{\gamma})}{\sigma_{ij}^2} \leq \theta^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}.$$

Если предположить, что относительные дисперсии измеренных содержаний всех компонентов в каждом продукте находятся в диапазоне  $[D_1, D_2]$ , т.е.

$$D_1 \leq \left( \frac{\sigma_{ij}}{\beta_{ij}} \right)^2 \leq D_2.$$

то из последнего неравенства получим

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\delta_{ij}^2(\hat{\gamma})}{\beta_{ij}^2} \leq m(n+1) \frac{1}{D_1} \theta^2. \quad (1.115)$$

Неравенство (1.115) ограничивает всю совокупность поправок  $\delta_{ij}(\hat{\gamma})$  и подтверждает математически тот ожидаемый факт, что сумма квадратов всех относительных корректировок, вычисленных в точке максимального правдоподобия  $\hat{\gamma}$ , мажорируется величиной, малость которой зависит от параметра  $\theta$  — показателя точности измерения содержаний элементов в продуктах.

Получив оценку (1.115), выделим из системы (1.69) определенную подсистему уравнений, которая согласно ограничению 1 имеет единственное решение, обладающее свойством устойчивости. Пусть это решение обозначено  $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n)$ . В силу устойчивости выделенной подсистемы уравнений можно утверждать, что при незначительном изменении коэффициентов  $\beta_{ij}$  решение подсистемы изменится незначительно. Учитывая это, изменим  $\beta_{ij}$  на величину  $\delta_{ij}(\gamma)$ , т.е. в качестве коэффициентов выделенной системы возьмем числа  $\hat{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij}(\gamma)$ .

Ясно, что очевидное решение новой системы  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n)$  ввиду малости поправок  $\delta_{ij}(\gamma)$  будет достаточно близко к  $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n)$ , а это и означает, что решение переопределенной системы балансных уравнений, найденное по критерию максимального правдоподобия, практически единственно, ибо оно находится в малой окрестности вектора  $\gamma'$ . Одновременно отсюда следует, что при сделанных предположениях всегда найдется по крайней мере одна определенная подсистема балансных уравнений, решение которой близко к расчетному решению в смысле максимального правдоподобия и к истинному решению, а потому близки и последние.

Свойство оптимальности решения. Формально, следуя идее ММП, можно предложить и другие методы решения переопределенных систем балансных уравнений (1.69), избрав другие критерии. Наиболее распространенным в технике и в прикладной математике является метод наименьших квадратов (МНК) с постоянными весовыми коэффициентами.

Для системы балансных уравнений (1.69) при решении по МНК ищется вектор  $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n)$ , минимизирующий функцию

$$u_2 = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^2(\gamma, \beta)}{D_i} \quad (1.116)$$

представляющую собой взвешенную сумму квадратов невязок уравнений (1.69) с постоянными весами  $D_i$ . Естественно, что если система балансных уравнений (1.69) совместна, т.е. имеется вектор  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , обращающий каждое из уравнений в тождество, то и решения системы (1.69) по ММП ( $\hat{\gamma}$ ) и по МНК ( $\tilde{\gamma}$ ) совпадают с вектором  $\gamma$ . Следовательно, при точных значениях содержаний  $\beta_{ij}$  будем иметь

$$\hat{\gamma}(\bar{\beta}) = \tilde{\gamma}(\bar{\beta}) = \gamma^*$$

где  $\gamma^*$  — вектор истинных значений выходов.

Конечно, расчет по МНК значительно проще, чем по ММП, поскольку использует лишь решение определенной системы линейных алгебраических уравнений и не требует специальной программы минимизации функций многих переменных, как для ММП. Но при сравнении методов, хотя вычислительный аспект и важен, прежде всего следует сравнивать между собой погрешности расчета. Считая дисперсии содержаний  $\sigma_{ij}^2$  ( $i = 1, m; j = 1, n + 1$ ) достаточно малыми, можно показать, что ма-

тематические ожидания выходов  $\hat{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma}$ , рассчитанных по ММП и МНК, с точностью до малых высшего порядка совпадают с вектором истинных значений  $\gamma^*$ .

Естественно поэтому в качестве критерия точности рассчитанных выходов взять их дисперсии  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  и  $\sigma^2(\tilde{\gamma}_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и уже научно поставить вопрос: какой из двух указанных методов более точен при расчете баланса металлов? Поставленный вопрос можно уточнить так:

можно ли подобрать такие постоянные веса  $D_j$ , чтобы расчет по МНК был точнее расчета по ММП?

можно ли подобрать такие весовые коэффициенты  $D_j$ , чтобы расчет по МНК не уступал точности расчета по ММП?

Оказывается нельзя подобрать такие постоянные веса  $D_j$ , чтобы

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) < \sigma^2(\hat{\gamma}_k),$$

но найдутся такие весовые коэффициенты  $D_j$ , при которых

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) = \sigma^2(\hat{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Этот вывод следует из доказанной авторами теоремы: при любых положительных весовых коэффициентах  $D_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) для дисперсий выходов, рассчитанных по МНК и ММП, справедливо неравенство

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) \geq \sigma^2(\hat{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.117)$$

Знак равенства в выражении (1.117) будет в случае, если

$$D_j = \lambda D_j(\gamma^*) \quad (j = \overline{1, m}), \quad \lambda \geq 0.$$

При доказательстве исходим из известной формулы (1.83) для дисперсий функции многих независимых случайных величин:

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) = \sum_{s,t=1}^{s=m, t=n+1} \left( \frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \right)^2 \sigma_{st}^2;$$

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) = \sum_{s,t=1}^{s=m, t=n+1} \left( \frac{\partial \tilde{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \right)^2 \sigma_{st}^2.$$

где  $\sigma_{st}^2$  — дисперсия измеренного содержания  $\beta_{st}$ . Причем все частные производные следует брать в точке  $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{m, n+1})$ . Напомним вывод окончательной формулы для  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  из разд. 1.3, позволяющий легко получить формулу для  $\sigma^2(\tilde{\gamma}_k)$ .

Частные производные находим из выражения (1.89):

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_k(\beta)}{\partial \beta_{st}} = -\omega_{ks}^* \frac{\gamma_t^*}{\sqrt{D_s^*}} \quad (k = \overline{1, n-1}; s = \overline{1, m}; t = \overline{1, n+1}),$$

где  $\Omega = (B^T B)^{-1} B^T$ ,  $\omega_{ks} = [\Omega]_{ks}$ , а звездочка обозначает, что соответствующая величина вычислена при истинном значении вектора выходов  $\gamma^*$ .

Согласно выражению (1.83) получаем

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) = \sum_{s=1}^m \frac{\omega_{ks}^2}{D_s^*} \sum_{t=1}^{n+1} \sigma_{st}^2 \gamma_t^{*2} = \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^2 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.118)$$

При выводе окончательной формулы для дисперсии  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  придется повторить выкладки разд. 1.3 с той лишь разницей, что весовые коэффициенты  $D_j$  в последнем случае остаются постоянными (не зависящими от вектора  $\gamma$ ). Поэтому, сохраняя прежние обозначения, но понимая под  $B$  матрицу

$$B = \left[ \frac{\bar{\beta}_{ij} - \bar{\beta}_{in}}{\sqrt{D_j}} \right] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}), \quad (1.119)$$

получаем формулу

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) = \sum_{s=1}^m \frac{\omega_{ks}^2}{D_s} \sum_{t=1}^{n+1} \sigma_{st}^2 \gamma_t^{*2} = \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^2 \frac{D_s^*}{D_s}. \quad (1.120)$$

Напишем формулы (1.118) и (1.120), выразив  $\omega_{ks}^*$  и, соответственно,  $\omega_{ks}$  через элементы матриц  $(B^T B)^{-1}$  и  $B$ .

При  $B = \left[ \frac{\bar{\beta}_{ij} - \bar{\beta}_{in}}{\sqrt{D_j}} \right] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1})$  имеем

$$[B^T B]_{ij} = \sum_{s=1}^m \frac{\sqrt{D_j} (\bar{\beta}_{si} - \bar{\beta}_{sn}) (\bar{\beta}_{sj} - \bar{\beta}_{sn})}{D_s^*}; \quad (1.121)$$

$$[B^T B]^{-1} = [a_{ij}^*] \quad (i, j = \overline{1, n-1}).$$

Из определения матрицы  $\Omega$  [см. выражение (1.88)] находим

$$\omega_{ks}^* = \sum_{l=1}^{n-1} a_{kl}^* (\bar{\beta}_{sl} - \bar{\beta}_{sn}) / \sqrt{D_s^*}. \quad (1.122)$$

При  $B = \left[ \frac{\bar{\beta}_{ij} - \bar{\beta}_{in}}{\sqrt{D_j}} \right] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1})$  аналогично получим

$$\omega_{ks} = \frac{\sum_{l=1}^{n-1} a_{kl} (\bar{\beta}_{sl} - \bar{\beta}_{sn})}{\sqrt{D_s}}. \quad (1.123)$$

Из матричного тождества

$$\begin{aligned}\Omega \Omega^T &= (B^T B)^{-1} B^T [(B^T B)^{-1} B^T]^T = \\ &= (B^T B)^{-1} B^T B (B^T B)^{-1} = (B^T B)^{-1}\end{aligned}$$

следует равенство элементов матриц  $[\Omega \Omega^T]_{ij} = [(B^T B)^{-1}]_{ij}$ .

Но дисперсия выхода  $\hat{\gamma}_k$  в соответствии с формулой (1.118) равна  $k$ -му диагональному элементу матрицы  $\Omega \Omega^T$ , следовательно

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) = [\Omega \Omega^T]_{kk} = [(B^T B)^{-1}]_{kk} = a_{kk}^* \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.124)$$

Несколько сложнее выразить дисперсию выхода  $\tilde{\gamma}_k$ , т.е.  $\sigma^2(\tilde{\gamma}_k)$ , а поэтому преобразуем скалярное произведение векторов

$$\begin{aligned}(\omega_{k1}^*, \omega_{k2}^*, \dots, \omega_{km}^*) \text{ и } (\omega_{k1} \sqrt{\frac{D_1^*}{D_1}}, \omega_{k2} \sqrt{\frac{D_2^*}{D_2}}, \dots, \\ \omega_{km} \sqrt{\frac{D_m^*}{D_m}}),\end{aligned} \quad (1.125)$$

т.е. величину  $\sum_{s=1}^m \omega_{ks}^* \omega_{ks} \sqrt{\frac{D_s^*}{D_s}}$ . С учетом выражений (1.122) и (1.123)

имеем

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^m \omega_{ks}^* \omega_{ks} \sqrt{\frac{D_s^*}{D_s}} &= \sum_{s=1}^m x \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_{ki} (\bar{\beta}_{si} - \bar{\beta}_{sn}) \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}^* (\bar{\beta}_{sj} - \bar{\beta}_{sn})}{D_s} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ki} a_{kj}^* \sum_{s=1}^m \frac{(\bar{\beta}_{s1} - \bar{\beta}_{sn}) (\bar{\beta}_{sj} - \bar{\beta}_{sn})}{D_s} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ki} a_{kj}^* [B^T B]_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}^* \sum_{i=1}^{n-1} a_{ki} x [B^T B]_{ij} = a_{kk}^*.\end{aligned}$$

Но известно, что квадрат скалярного произведения двух векторов не больше произведения квадратов модулей этих векторов, т.е.



$$\left( \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^* \omega_{ks} \sqrt{\frac{D_s^*}{D_s}} \right)^2 \leq \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^2 \sum_{s=1}^m \omega_{ks}^2 \frac{D_s^*}{D_s} \quad (1.126)$$

(что строго следует из неравенства Коши-Буняковского). Остается подставить найденные ранее значения в выражение (1.126), чтобы получить требуемое неравенство (1.117).

Для доказательства неравенства (1.117) для  $\tilde{\gamma}_n$  и  $\tilde{\gamma}_n$  используем уравнение баланса масс  $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$  и сделаем соответствующие преобразования.

Для облегчения преобразований, определяя выходы продуктов при переходе к задаче на безусловный экстремум, из ограничения (1.107) будем исключать не  $\gamma_n$ , а какой-нибудь другой выход, например  $\gamma_1$ .

Чтобы соотношение (1.117) стало равенством, необходимо и достаточно совпадения векторов в выражении (1.125), т.е.

$$\omega_{ks}^* = \omega_{ks} \sqrt{\frac{D_s^*}{D_s}} \quad (s = \overline{1, m}). \quad (1.127)$$

Легко проверить, что равенство (1.127) всегда выполняется для весовых коэффициентов  $D_i = \lambda D_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) с любым  $\lambda > 0$ .

Таким образом, расчет баланса по МНК наиболее эффективен тогда, когда весовые коэффициенты  $D_i$  выбраны равными или пропорциональными  $D_i^*$  ( $\gamma^*$ ) — в этом случае по точности расчета он сравним с ММП. Однако практически воспользоваться этим выводом не просто, ибо веса  $D_i^* = D_i(\gamma^*)$  до расчета баланса остаются неизвестными. Заметим, что расчет баланса по традиционной методике путем решения какой-нибудь определенной подсистемы балансных уравнений из системы (1.69) может рассматриваться как расчет баланса по МНК со специально выбранными весами

$$\frac{1}{D_i} = \begin{cases} 1, & \text{для номеров } i, \text{ участвующих в подсистеме,} \\ 0, & \text{для остальных номеров } i, \end{cases}$$

и, следовательно, практически всегда уступает по точности расчету по ММП.

В этом и заключается оптимальное свойство расчета технологического баланса по ММП.

**Пример.** Для технологической операции одной из обогатительных фабрик, имеющей один вход и три выхода, измерены содержания восьми компонентов в каждом из продуктов. Расширенная матрица коэффициентов системы уравнений баланса имеет вид

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 2,06 & 7,74 & 1,98 & 3,77 \\ 37,17 & 47,66 & 41,96 & 43,56 \\ 0,06 & 0,27 & 0,072 & 0,13 \\ 34,18 & 35,14 & 21,16 & 27,60 \\ 0,68 & 0,80 & 14,32 & 8,26 \\ 0,51 & 0,68 & 4,12 & 2,74 \\ 0,51 & 0,37 & 3,62 & 2,19 \\ 0,22 & 0,30 & 4,72 & 2,56 \end{bmatrix}$$

Значения средних квадратических отклонений  $\sigma_{ij}$ , полученных на основе существующих допусков на точность анализа, образуют матрицу

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,19 & 0,10 & 0,15 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0,005 & 0,02 & 0,005 & 0,01 \\ 0,45 & 0,50 & 0,30 & 0,40 \\ 0,15 & 0,15 & 0,45 & 0,40 \\ 0,10 & 0,15 & 0,30 & 0,25 \\ 0,09 & 0,09 & 0,20 & 0,20 \\ 0,08 & 0,10 & 0,35 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Полная система содержит девять уравнений с тремя неизвестными, т.е. является переопределенной и, как можно убедиться, несовместной. Результаты решения этой системы несколькими методами даны в табл. 1.4 (выход исходного продукта нормирован единицей, индексы соответствуют номеру продукта).

При решении системы методом наименьших квадратов с одинаковыми весами  $D_j$  (МНК) средние квадратические отклонения определения выходов в 1,5–1,8 раза превышают погрешности решения по ММП. В то же время соотношения весов могут быть выбраны таким образом, что точность решения обоими методами оказывается практически одинаковой. В рассмотренном примере такой результат, в частности, был получен при весовых коэффициентах, равных дисперсиям уравнений баланса при значениях выходов, полученных решением определенной подсистемы, включающей уравнения материального баланса для основных компонентов руды (МНК'). Для сравнения здесь же приведены оценки точности решения этой определенной системы (ОС). Как видно, в этом случае средние квадратические отклонения выходов в несколько раз превышают соответствующие оценки для ММП.

*Таким образом, ММП дает более точное решение переопределенной системы балансных уравнений, чем МНК, хотя при удачно выбранных весах оценки точности сближаются.*

Таблица 1.4

Метод решения	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
ММП	0,135	0,318	0,547	0,0111	0,0086	0,0075
МНК	0,105	0,350	0,544	0,0170	0,0156	0,0079
МНК'	0,136	0,317	0,546	0,0111	0,0086	0,0075
ОС	0,035	0,310	0,654	0,0466	0,0105	0,0498

Свойство монотонности погрешности решения. Переопределенную систему балансных уравнений (1.69) можно получить в результате последовательного присоединения первоначально к определенной системе, а затем к переопределенным системам отдельных балансных уравнений по различным компонентам руды. На каждом шаге наращивания системы можно рассчитывать баланс и оценивать точность по ММП.

Оказывается каждый шаг описанного процесса, т.е. присоединение к системе балансного уравнения по новому компоненту уточняет расчет технологического баланса.

Сформулируем свойство монотонности погрешности расчета технологического баланса.

Пусть дана переопределенная система балансных уравнений вида (1.69), а ранг матрицы ее коэффициентов

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = n. \quad (1.128)$$

Как и прежде,  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_{11}, \bar{\beta}_{12}, \dots, \bar{\beta}_{m, n+1})$  — вектор истинных значений содержаний, а  $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*)$  — вектор истинных значений выходов.

Положим

$$D_i^* = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}^2 \gamma_j^{*2} \quad (i = \overline{1, m}; \gamma_{n+1}^* = -1);$$

$$B = [b_{ij}^*] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1}); \quad b_{ij}^* = \frac{\bar{\beta}_{ij} - \bar{\beta}_{in}}{\sqrt{D_i^*}};$$

$$\Omega = (B^T B)^{-1} B^T; \quad \Omega = [\omega_{ij}^*] \quad (i = \overline{1, n-1}; j = \overline{1, m}).$$

Выходы продуктов, найденные по ММП для системы (1.69), обозначим  $\hat{\gamma}_k(m)$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ).

Погрешность расчета баланса оценивается дисперсиями выходов  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m))$  по формуле (1.118) и, значит, для  $k = \overline{1, n-1}$  по формуле (1.124)  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m)) = [(B^T B)^{-1}]_{kk}$ .

Рассмотрим наращенную систему

$$\begin{cases} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \dots + \beta_{1n}\gamma_n = \beta_{1, n+1} \\ \beta_{21}\gamma_1 + \beta_{22}\gamma_2 + \dots + \beta_{2n}\gamma_n = \beta_{2, n+1} \\ \dots \\ \beta_{m1}\gamma_1 + \beta_{m2}\gamma_2 + \dots + \beta_{mn}\gamma_n = \beta_{m, n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{m+1,1}\gamma_1 + \beta_{m+1,2}\gamma_2 + \dots + \beta_{m+1,n}\gamma_n = \beta_{m+1,n+1} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1, \end{cases} \quad (1.129)$$

полученную добавлением к системе (1.69) уравнения

$$\beta_{m+1,1}\gamma_1 + \beta_{m+1,2}\gamma_2 + \dots + \beta_{m+1,n}\gamma_n = \beta_{m+1,n+1}$$

с достаточно малыми дисперсиями его коэффициентов  $\sigma_{m+1,j}^2$  ( $j = 1, n+1$ ). Очевидно, что вектор  $\gamma^*$  не зависит от числа уравнений в системе, а введенные ранее величины  $D_i^*$  для  $i = 1, m$  не изменятся при переходе от системы (1.69) к системе (1.129). Новым будет значение дисперсии  $(m+1)$ -го уравнения  $D_{m+1}^*$ , а в матрице. В появится новая  $(m+1)$ -я строка. Обозначим матрицу  $\tilde{B}$  с добавленной к ней новой строкой через

$$\tilde{B} = [b_{ij}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1}),$$

а добавленную новую строку через  $x^T$ . Следовательно

$$\hat{b}_{ij} = b_{ij} \quad \text{для } i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1};$$

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{m+1,1} \\ \tilde{b}_{m+1,2} \\ \dots \\ \tilde{b}_{m+1,n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.130)$$

Значения выходов для наращенной системы балансных уравнений, рассчитанных по ММП, обозначим через  $\hat{\gamma}_k(m+1)$  ( $k = 1, n$ ). Аналогично предыдущему погрешность расчета оценится дисперсиями выходов  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m+1))$  и для  $k = \overline{1, n-1}$ , согласно выражению (1.124),

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m+1)) = [(\tilde{B}^T \tilde{B})^{-1}]_{kk}$$

Требуется сравнить  $[(B^T B)^{-1}]_{kk}$  и  $[(\tilde{B}^T \tilde{B})^{-1}]_{kk}$  при  $k = \overline{1, n-1}$ .

Имеем

$$[\tilde{B}^T \tilde{B}]_{ij} = \sum_{s=1}^{m+1} \tilde{b}_{si} \tilde{b}_{sj} = \sum_{s=1}^m b_{si} b_{sj} + b_{m+1,i} b_{m+1,j} =$$

$$= \sum_{s=1}^m b_{si} b_{sj} + x_i^T x_j^T = [B^T B]_{ij} + [xx^T]_{ij},$$

$$\text{так что } \tilde{B}^T \tilde{B} = B^T B + xx^T. \quad (1.131)$$

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$(B^T B + \kappa x x^T)^{-1} = (B^T B)^{-1} - \frac{1}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T (B^T B)^{-1} \quad (1.132)$$

где  $\kappa = x^T (B^T B)^{-1} x$ .

После умножения правой части равенства (1.132) на матрицу  $B^T B + \kappa x x^T$  видно, что произведение равно единичной матрице  $E$ . Действительно,

$$\begin{aligned} & [(B^T B)^{-1} - \frac{1}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T (B^T B)^{-1}] [B^T B + \kappa x x^T] = \\ & = E + (B^T B)^{-1} \kappa x x^T - \frac{1}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T - \frac{1}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T x \\ & x (B^T B)^{-1} \kappa x x^T = E + \frac{\kappa}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T - \frac{\kappa}{1 + \kappa} (B^T B)^{-1} \kappa x x^T = \\ & = E. \end{aligned}$$

Далее удобно вместо вектора  $x$  вида (1.130) ввести в тождество (1.132)  $(n-1)$ -мерный вектор  $y$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} x; \quad (B^T B)^{-1} x x^T (B^T B)^{-1} = y y^T,$$

и тогда тождество переписывается в виде

$$(B^T B + \kappa y y^T)^{-1} = (B^T B)^{-1} - \frac{\kappa y y^T}{1 + \kappa}. \quad (1.133)$$

Но при  $k = \overline{1, n-1}$ , согласно равенству (1.124),

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m+1)) = [(\tilde{B}^T \tilde{B})^{-1}]_{kk}; \quad \sigma^2(\hat{\gamma}_k(m)) = (B^T B)^{-1}]_{kk},$$

и поэтому из выражения (1.133) найдем

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m+1)) = \sigma^2(\hat{\gamma}_k(m)) - \frac{\gamma_k^2}{1 + \kappa} \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.134)$$

При  $k = n$  получено равенство

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_n(m+1)) = \sigma^2(\hat{\gamma}_n(m)) - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})^2}{1 + \kappa}. \quad (1.135)$$

Анализируя равенства (1.134) и (1.135), прежде всего заметим, что число  $\kappa$  в знаменателе неотрицательное, поскольку

$$\kappa = x^T (B^T B)^{-1} x = [(B^T B) y]^T (B^T B) y = y^T (B^T B)^T x \\ x (B^T B)^{-1} (B^T B) y,$$

а так как матрица  $B^T B$  — симметрическая, то

$$\kappa = y^T (B^T B) y = (By)^T (By) = \sum_{i=1}^m (By)_i^2 \geq 0.$$

Из анализа формул (1.134) и (1.135) можно сделать вывод о монотонном поведении дисперсий выходов продуктов, характеризующих погрешность расчета баланса, при наращивании системы балансных уравнений. Формулы (1.134) и (1.135) позволяют не только теоретически доказать нестрогое убывание дисперсий  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m))$  при каждом  $k = \overline{1, n}$  с ростом числа уравнений  $m$ , но и оценить его количественно.

Вывод о нестрогом убывании дисперсий основан на том, что для некоторых номеров  $k$  возможно равенство  $y_k = 0$  и отсюда  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k(m+1)) = \sigma^2(\hat{\gamma}_k(m))$ . Но если рассматривать сумму дисперсий всех выходов  $D(m)$ , то

$$D(m+1) = D(m) - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 + (\sum_{k=1}^{n-1} y_k)^2}{1 + \kappa} \quad (1.136)$$

т.е. в данном случае можно утверждать о строгом монотонном убывании величины  $D(m)$  при наращивании системы балансных уравнений (1.69), так как не могут быть все координаты  $y_k$  одновременно равны нулю. В самом деле равенство нулю всех координат вектора  $y$  повлекло бы за собой равенство  $x = 0$ , а это означало бы равенство всех содержаний компонента  $y$  добавленного балансного уравнения  $\beta_{m+1,j} = \beta_{m+1,n}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ), что невозможно в разделительной технологической операции.

Следует только учесть, что истинные значения  $\gamma^*$  и  $\beta_{ij}$  неизвестны, поэтому придется в вычислениях вместо них использовать полученные по ММП выходы  $\hat{\gamma}_k$  и скорректированные содержания  $\hat{\beta}_{ij}$ .

Если вычислить и обозначить

$$\hat{D}_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 \hat{\gamma}_j^2 + \sigma_{i,n+1}^2 \quad (i = \overline{1, m+1});$$

$$B = [b_{ij}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n-1}); \quad b_{ij} = \frac{\hat{\beta}_{ij} - \hat{\beta}_{in}}{\sqrt{D_i}}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\beta}_{m+1,1} - \hat{\beta}_{m+1,n}}{\sqrt{\hat{D}_{m+1}}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{\beta}_{m+1,n-1} - \hat{\beta}_{m+1,n}}{\sqrt{\hat{D}_{m+1}}} \end{bmatrix}; \quad \hat{y} = (B^T B)^{-1} \hat{x};$$

$$\kappa = \hat{y}^T (B^T B) \hat{y}$$

то равенства (1.134), (1.135) и (1.136) станут приближенными, причем степень приближения будет зависеть от разности  $(\hat{\beta}_{ij} - \bar{\beta}_{ij})$ .

Таким образом, при расчете технологического баланса добавление к системе каждого нового балансного уравнения с тем же порядком точности измерения содержаний в продуктах оказывается полезным в силу монотонности изменения погрешности расчета, т.е. нестрогого убывания дисперсий каждого отдельного выхода и строгого убывания суммы дисперсий всех выходов продуктов.

## Глава 2

### РАСЧЕТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО БАЛАНСА МЕТАЛЛОВ РАЗВЕТВЛЕННОЙ СХЕМЫ ОБОГАЩЕНИЯ

#### 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В предыдущей главе были рассмотрены вопросы расчета технологического баланса для разделительной операции. Однако для современных обогатительных фабрик характерно использование развитых многостадийных схем обогащения, многообразие которых достаточно подробно рассмотрено, например, в работе К.А. Разумова "Проектирование обогатительных фабрик". Широкое внедрение рентгеновских спектрометров на обогатительных фабриках в сочетании с автоматической системой отбора и доставки проб позволяет анализировать не только конечные, но и промежуточные продукты обогащения, а это дает возможность получать дополнительную технологическую информацию о ходе процесса, решать задачи оптимизации.

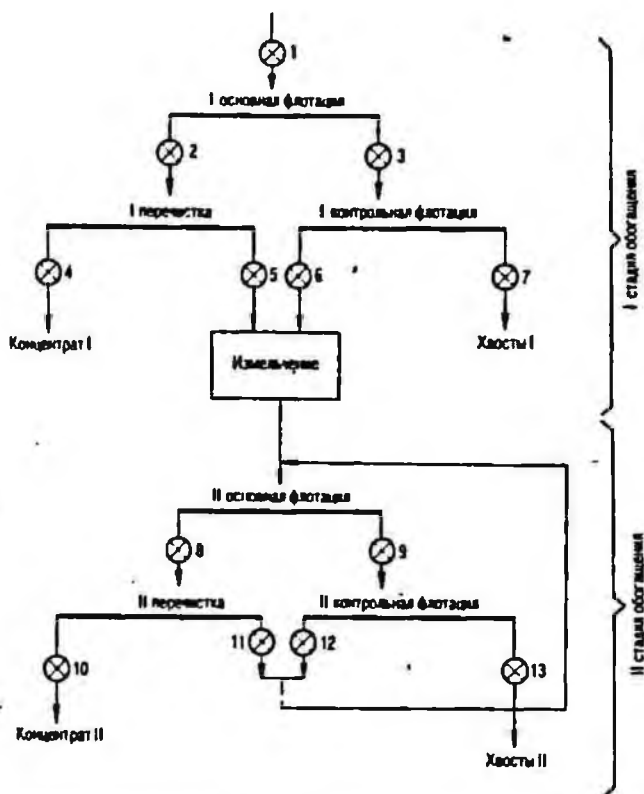


Рис. 2.1. Разветвленная схема обогащения (⊗ — точки контроля содержаний металлов)

Описание разветвленной схемы обогащения. При решении задачи расчета технологического баланса под разветвленной схемой обогащения будем понимать совокупность нескольких взаимосвязанных разделительных операций, в каждой из которых организован контроль содержаний компонентов во входных и выходных продуктах, а выход одного из продуктов, как правило, исходного питания, известен или нормирован единицей.

Проанализируем задачи, возникающие при расчете баланса металлов, на примере одной из возможных схем обогащения рис. 2.1.

При принятой системе контроля содержаний возможные варианты выделения разделительных операций в составе разветвленной схемы обогащения приведены в табл. 2.1.

Для каждой разделительной операции может быть составлена система уравнений баланса, совокупность которых представляет собой систему, описывающую разветвленную технологическую схему.

Отметим особенности разветвленных технологических схем.

1. Для разделительной операции в системе уравнений баланса каждое из измеренных содержаний используется в качестве коэффициента при соответствующем неизвестном выходе  $\gamma_j$  только один раз. Для раз-



Таблица 2.1

Наименование разделительной операции	Входные продукты	Выходные продукты
I основная флотация	1	2, 3
II перерешетка	2	4, 5
I контрольная флотация	3	6, 7
I основная флотация и I перерешетка	1	3, 4, 5
I основная и I контрольная флотации	1	2, 6, 7
I стадия обогащения	1	4, 5, 6, 7
II основная флотация	5; 6, 11, 12	8, 9
II перерешетка	8	10, 11
II контрольная флотация	9	12, 13
II основная флотация и II перерешетка	5, 6, 12	9, 10, 11
II основная и II контрольная флотации	5, 6, 11	8, 12, 13
II стадия обогащения	5, 6	10, 13
Схема обогащения в целом	1	4, 7, 10, 13

ветвленной технологической схемы значения содержаний могут входить в несколько уравнений, характеризую одновременно выходной продукт одной разделительной операции и входной продукт последующей.

2. Для разделительной операции каждое из уравнений баланса содержит полный набор неизвестных выходов  $\gamma_j$ , в то время как для разветвленной технологической схемы в каждом из уравнений присутствует лишь часть искоемых выходов.

3. Поскольку в разветвленной технологической схеме одни и те же продукты могут являться как входными, так и выходными, при общепринятой форме записи соответствующие неизвестные могут находиться как в левой, так и в правой частях уравнений баланса.

Если в каждом из продуктов рассмотренной схемы контролируется содержание лишь одного компонента, то расчет неизвестных выходов может быть произведен последовательным решением систем уравнений баланса, описывающих отдельные разделительные операции. Так, принимая выход исходного питания равным единице и используя системы уравнений баланса для первых трех разделительных операций табл. 2.1, можно рассчитать неизвестные выходы всех продуктов I стадии обогащения. Тот же результат может быть получен решением шести любых независимых линейных уравнений баланса из двенадцати уравнений, описывающих I стадию обогащения.

Таким образом, при решении определенных систем уравнений баланса проблем не возникает (см. гл. 1). Следует лишь отметить, что в случае систем весьма большой размерности для обеспечения оперативного расчета баланса потребуется применение специальных методов решения задачи на ЭВМ.

Точность же полученного решения следует оценивать по методике, изложенной в гл. 1.

Иная ситуация возникает, когда для разветвленной схемы обогащения имеется возможность формирования переопределенной системы уравнений баланса. Рассмотренный ранее алгоритм в полной мере применим для расчета каждой из разделительных операций, приведенных в табл. 2.1. Однако, если возникает, например, задача определения выходов всех продуктов I стадии обогащения (рис. 2.1) при измерении содержаний нескольких компонент в продуктах 1 — 7, то ее решение не укладывается в подобную схему.

Казалось бы, задача может быть решена следующим образом. С использованием стандартной схемы рассчитываются выходы продуктов 3, 4, 5 для разделительной операции, включающей основную флотацию и перемешку, затем — выходы продуктов 2, 6 и 7 для разделительной операции, включающей основную и контрольную флотацию, и, наконец, выходы продуктов 4, 5, 6, 7 для I стадии обогащения в целом. Однако, так как для каждой разделительной операции исходные данные (содержания металлов в соответствующих продуктах и погрешности их измерения) будут различны, результаты расчета (значения выходов и скорректированных содержаний) тоже не будут совпадать. Таким образом, возникает весьма нежелательная неопределенность: результаты зависят от выбранного порядка расчета или от набора используемых уравнений баланса. В то же время естественно желание использовать одновременно всю информацию, получаемую при контроле.

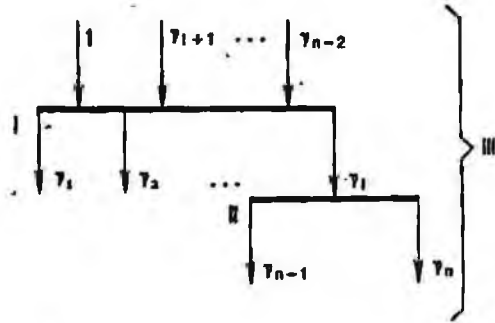
Равносильность расчета баланса. Число разделительных операций, которые могут быть выделены в разветвленной технологической схеме, определяется как структурой схемы, так и распределением точек контроля содержаний металлов. Очевидно, что числом разделительных операций и контролируемых компонентов определяется общее число возможных уравнений баланса. Так, для рассмотренного выше примера I стадии обогащения можно составить шесть систем уравнений баланса, каждая из которых при измерении  $m$  содержаний металлов в каждом продукте будет содержать  $m + 1$  уравнений. Если бы измерения производились абсолютно точно, то можно было бы составить  $6(m + 1)$  совместных линейных уравнений. Тогда, приняв выход исходной руды равным 1, остальные шесть неизвестных выходов определяли бы решением системы из шести любых независимых линейных уравнений, выбранных из  $6(m + 1)$ .

Совпадение решений для случая переопределенной системы, коэффициенты уравнений которых определены с погрешностями, не столь очевидно.

Пусть, например, разветвленная технологическая схема (рис. 2.2) состоит из разделительной операции I, для одного из выходных продуктов которой предусмотрено разделение по схеме II. Всю схему в целом можно рассматривать как разделительную операцию III.

Системы уравнений балансов для соответствующих разделительных операций при условии измерения в каждой точке  $m$  содержаний метал-

Рис. 2.2. Разветвленная технологическая схема, состоящая из двух разделительных операций



лов имеют следующий вид:

для разделительной операции I

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}\gamma_1 + \beta_{12}\gamma_2 + \dots + \beta_{1l}\gamma_l = \beta_{1,l+1}\gamma_{l+1} + \dots + \beta_{1,n-2}\gamma_{n-2} + \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_{m1}\gamma_1 + \beta_{m2}\gamma_2 + \dots + \beta_{ml}\gamma_l = \beta_{m,l+1}\gamma_{l+1} + \dots + \beta_{m,n-2}\gamma_{n-2} + \alpha_m \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_l = \gamma_{l+1} + \dots + \gamma_{n-2} + 1, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

для разделительной операции II

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,n-1}\gamma_{n-1} + \beta_{1n}\gamma_n = \beta_{1l}\gamma_l \\ \dots \\ \beta_{m,n-1}\gamma_{n-1} + \beta_{mn}\gamma_n = \beta_{ml}\gamma_l \\ \gamma_{n-1} + \gamma_n = \gamma_l, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

для разделительной операции III

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}\gamma_1 + \dots + \beta_{1,l-1}\gamma_{l-1} + \beta_{1,n-1}\gamma_{n-1} + \beta_{1n}\gamma_n = \beta_{1,l+1}\gamma_{l+1} + \dots + \beta_{1,n-2}\gamma_{n-2} + \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_{m1}\gamma_1 + \dots + \beta_{m,l-1}\gamma_{l-1} + \beta_{m,n-1}\gamma_{n-1} + \beta_{mn}\gamma_n = \beta_{m,l+1}\gamma_{l+1} + \dots + \beta_{m,n-2}\gamma_{n-2} + \alpha_m \\ \gamma_1 + \dots + \gamma_{l-1} + \gamma_{n-1} + \gamma_n = \gamma_{l+1} + \dots + \gamma_{n-2} + 1 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Если бы в системах (2.1), (2.2) и (2.3) использовались истинные значения  $\beta_{ij}$  и  $\alpha_j$ , определяемые, как и ранее, выражениями

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta_{ij} + \delta_{ij}; \\ \alpha_j &= \alpha_j + \delta_{j,n+1}. \end{aligned}$$

то каждая из них стала бы совместной, а результаты расчета баланса по любым двум разделительным операциям (I и II, I и III, II и III) совпали бы. В этом случае, объединяя системы, соответствующие, например, разделительным операциям I и II, в одну, получаем

$$\begin{cases}
 (\beta_{11} + \delta_{11})\gamma_1 + \dots + (\beta_{1l} + \delta_{1l})\gamma_l = (\beta_{1,l+1} + \delta_{1,l+1})\gamma_{l+1} + \dots + \\
 + (\beta_{1,n-2} + \delta_{1,n-2})\gamma_{n-2} + a_1 + \delta_{1,n+1} \\
 \dots \dots \dots \\
 (\beta_{m1} + \delta_{m1})\gamma_1 + \dots + (\beta_{ml} + \delta_{ml})\gamma_l = (\beta_{m,l+1} + \delta_{m,l+1})\gamma_{l+1} + \dots + \\
 + (\beta_{m,n-2} + \delta_{m,n-2})\gamma_{n-2} + a_m + \delta_{m,n+1} \\
 \gamma_1 + \dots + \gamma_l = \gamma_{l+1} + \dots + \gamma_{n-2} + 1 \\
 (\beta_{1,n-1} + \delta_{1,n-1})\gamma_{n-1} + (\beta_{1n} + \delta_{1n})\gamma_n = (\beta_{1l} + \delta_{1l})\gamma_l \\
 \dots \dots \dots (2.4) \\
 (\beta_{m,n-1} + \delta_{m,n-1})\gamma_{n-1} + (\beta_{mn} + \delta_{mn})\gamma_n = (\beta_{ml} + \delta_{ml})\gamma_l \\
 \gamma_{n-1} + \gamma_n = \gamma_l
 \end{cases}$$

Под решением переопределенной системы будем, как и прежде, понимать такой вектор  $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$ , который вместе с набором поправок  $\hat{\delta}_{ij}$  является решением неопределенной системы (2.4) и минимизирует целевую функцию

$$L(\delta) = \sum_{i=m, j=n+1}^{i,j} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma(\beta_{ij})$  для  $j = 1, n$ , и  $\sigma_{i,n+1} = \sigma(a_i)$  при  $i = 1, m$ .

Нетрудно видеть, что система уравнений (2.4) равносильна системам, построенным аналогичным образом для разделительных операций I и III, II и III, поскольку эти системы переходят друг в друга простой заменой столбцов. Если к тому же заметить, что во всех сравниваемых случаях и целевые функции (1.72) совпадают, так как содержат  $m(n+1)$  одних и тех же поправок  $\hat{\delta}_{ij}$ , то придем к выводу о совпадении решений переопределенных систем. В этом смысле рассмотренные комбинации систем равносильны.

Разумеется, доказанная равносильность расчета баланса по различным комбинациям разделительных операций характерна и для более сложных разветвленных технологических схем, чем в рассматриваемом примере (см. рис. 2.2)

**Кодирование технологической схемы. Технологическая матрица.** Примем единую форму записи любого уравнения баланса для разделительной операции, входящей в разветвленную технологическую схему, ко-

торая содержит  $n$  неизвестных выходов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  и один известный выход  $\gamma_{n+1} = 1$ . Такая форма записи предполагает:

все члены уравнения стоят в левой его части, в правой — только нуль;

левая часть уравнения всегда содержит  $n + 1$  членов;

перед каждым членом уравнения стоит множитель  $\tau$ , равный 1,  $-1$  или 0, в зависимости от того, стоит ли при обычной записи уравнения баланса этот член в левой части, в правой или вообще отсутствует.

Запишем в соответствии с принятой формой уравнения баланса масс для всех разделительных операций в рассматриваемом примере (см. рис. 2.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{l-1} + \gamma_l - \gamma_{l+1} - \dots - \gamma_{n-2} + 0 \cdot \gamma_{n-1} + 0 \cdot \gamma_n - \gamma_{n+1} = 0 \\ 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \dots + 0 \cdot \gamma_2 - \gamma_l - 0 \cdot \gamma_{l+1} + \dots + 0 \cdot \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1} + \\ + \gamma_n + 0 \cdot \gamma_{n+1} = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{l-1} + 0 \cdot \gamma_l - \gamma_{l+1} - \dots - \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1} + \gamma_n - \gamma_{n+1} = 0. \end{array} \right.$$

Если определить ранг матрицы этой системы, то он окажется равным двум. Другими словами, любое из трех уравнений может быть получено как линейная комбинация двух оставшихся, т.е. лишь два уравнения из трех являются независимыми. Такой же вывод получим и при анализе уравнений баланса по каждому из  $m$  металлов.

В общем случае, для системы, соответствующей разветвленной технологической схеме, состоящей из  $M$  разделительных операций, составлена матрица  $T_M$  коэффициентов

$$T_M = \begin{bmatrix} \tau_1^{(1)} & \tau_2^{(1)} & \dots & \tau_n^{(1)} & \tau_{n+1}^{(1)} \\ \tau_1^{(2)} & \tau_2^{(2)} & \dots & \tau_n^{(2)} & \tau_{n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{(M)} & \tau_2^{(M)} & \dots & \tau_n^{(M)} & \tau_{n+1}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ранг которой оказывается равным  $N$ , то исходная разветвленная технологическая схема содержит  $N$  независимых разделительных операций.

Таким образом, при расчёте баланса разветвленной технологической схемы достаточно составить объединенную систему уравнений по всем независимым разделительным операциям, не беспокоясь при этом о допущенном произволе. Структура такой системы может быть охарактеризована матрицей

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{1,1}^{(1)} & \tau_{2,1}^{(1)} & \dots & \tau_{n,1}^{(1)} & \tau_{n+1,1}^{(1)} \\ \tau_{1,2}^{(2)} & \tau_{2,2}^{(2)} & \dots & \tau_{n,2}^{(2)} & \tau_{n+1,2}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{1,N}^{(N)} & \tau_{2,N}^{(N)} & \dots & \tau_{n,N}^{(N)} & \tau_{n+1,N}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

причем  $\text{rang } T = N$ .

Для обеспечения единообразия при решении задач расчета технологического баланса примем следующую процедуру формализованного описания произвольной схемы обогащения.

1. С учетом структуры разветвленной схемы обогащения и принятой схемы контроля содержания металлов выделяются разделительные операции. Операции группируются по ступеням, причем к 1-й ступени относится каждая операция, единственным входным продуктом которой помимо возможных оборотных является одно из возможных питаний схемы; к  $i$ -й ступени (при  $i > 1$ ) относятся операции, входные продукты которых помимо оборотных выходят из операций меньших ступеней и при этом хотя бы один — из операции  $(i-1)$ -й ступени.

2. Осуществляется последовательная сквозная нумерация всех разделительных операций, причем сначала всех операций первой ступени, затем — второй, третьей и т.д. Общее число операций в схеме обозначим через  $p$ .

3. Последовательно нумеруются все продукты, начиная с выходных продуктов первой операции (для определенности слева направо по схеме), затем второй операции, третьей и т.д. Общее число выходных продуктов обозначим через  $n$ . Далее последовательная нумерация распространяется (в порядке возрастания номеров операций) на исходные питания схемы, число которых обозначим через  $l$ . Общее число продуктов в схеме равно  $n+1$ .

4. Составляется технологическая матрица  $T = [\tau_{kj}]$  ( $k = \overline{1, p}$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ ), элементы которой определяются формулой

$$\tau_{kj} = \begin{cases} -1, & \text{если } j\text{-й продукт в } k\text{-й операции является входным;} \\ 0, & \text{если } j\text{-й продукт в } k\text{-й операции не присутствует;} \\ 1, & \text{если } j\text{-й продукт в } k\text{-й операции является выходным.} \end{cases}$$

Проиллюстрируем предложенную процедуру на примере технологической схемы, представленной на рис. 2.3.

Учитывая структуру технологической схемы и точки контроля содержания металлов, выделим следующие разделительные операции:

- I операция в составе межциклового флотации;
- II операция в составе основной и контрольной флотаций и I перемычки;
- III операция в составе II перемычки и промпродуктовой флотации;

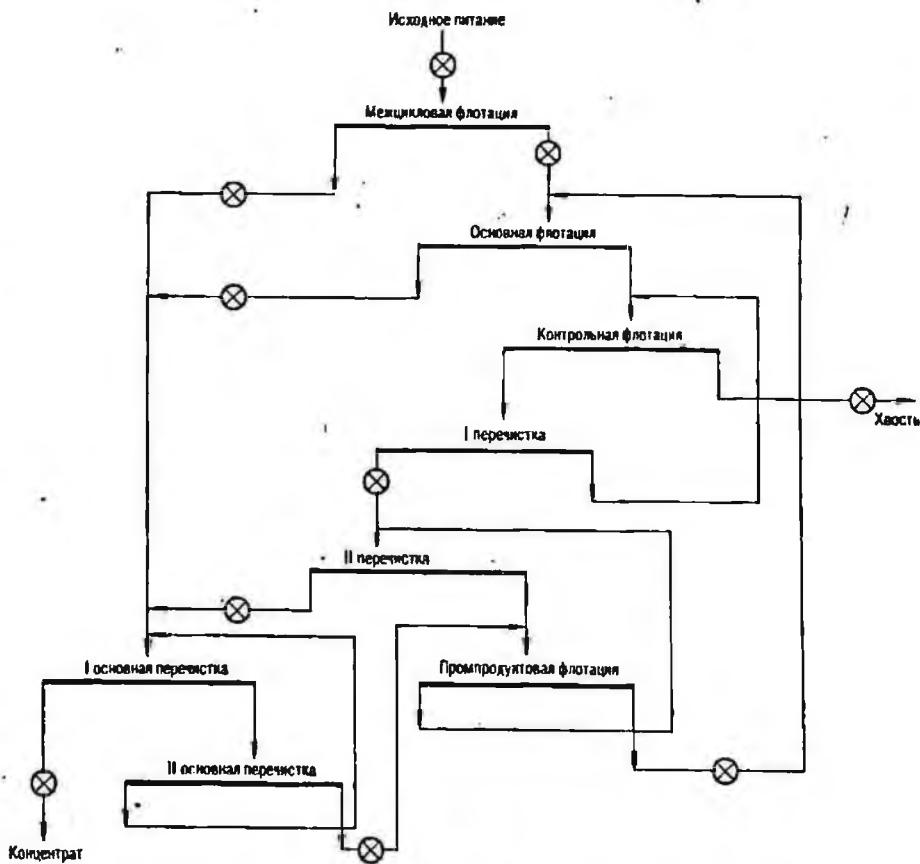


Рис. 2.3. Технологическая схема обогащения (⊗ — точки контроля содержаний металлов)

IV операция в составе I и II основных перекисток.

Совокупность этих разделительных операций образует разветвленную схему обогащения, представленную на рис. 2.4.

В данном случае понятия ступени и операции совпадают. Наличие ступеней характерно для технологических схем, содержащих не только последовательно, но и параллельно работающие разделительные операции. Итак схема содержит четыре операции ( $p = 4$ ), имеет  $n = 9$  выходных продуктов и  $l = 1$  исходное питание.

Схема описывается технологической матрицей, изображенной для наглядности в форме табл. 2.2.

Система уравнений баланса. Установим соотношения между основными параметрами, характеризующими структуру разветвленной схемы обогащения и систему контроля. Пусть разветвленная схема обогащения состоит из  $p$  независимых разделительных операций. Каждая из разделительных операций включает в себя  $t_i$  входных и выходных продуктов. Схема в целом содержит  $s$  так называемых внешних продуктов, которые

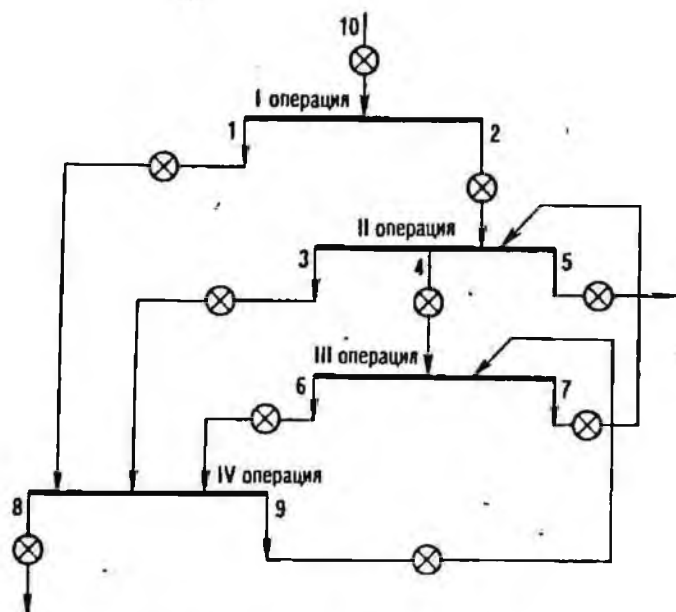


Рис. 2.4. Разветвленная схема обогащения

либо входят в схему, либо выходят из нее. Тогда число продуктов, являющихся одновременно выходом одной из операций и входом другой, равно  $\frac{\sum_{i=1}^p t_i - s}{2}$ , а общее число продуктов разветвленной схемы —

$$\frac{\sum_{i=1}^p t_i - s}{2} + s = \frac{\sum_{i=1}^p t_i + s}{2}$$

Таблица 2.2

Операция	Номер продукта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
II	0	-1	1	1	1	0	-1	0	0	0
III	0	0	0	-1	0	1	1	0	-1	0
IV	-1	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0



Если система контроля обеспечивает измерение масс  $l$  продуктов (в частном случае — исходных питаний), то число неизвестных масс равно

$$n = \frac{\sum_{i=1}^p t_i + s}{2} - l.$$

Поскольку каждая разделительная операция имеет как минимум три продукта ( $\sum_{i=1}^p t_i \geq 3p$ ), можно записать следующее неравенство ;

$$n \geq \frac{3p + s}{2} - l.$$

Если в каждом из продуктов контролируется содержание  $m$  элементов, то для получения определенной или переопределенной системы уравнений должно соблюдаться неравенство

$$n \leq p(m+1).$$

Таким образом, соотношение между параметрами определяется следующим двойным неравенством:

$$\frac{3p + s}{2} - l \leq n \leq p(m+1). \quad (2.7)$$

Отметим одно преимущество, которое дает переход от разделительной операции к разветвленной технологической схеме. Так как в разделительной операции для получения переопределенной системы необходимо выполнение неравенства  $n < m + 1$ , то в случае с несколькими неизвестными выходами следует контролировать большое число элементов. Это может вызвать затруднения, так как кроме основных элементов придется контролировать и дополнительные, которые часто бывают довольно равномерно распределены в продуктах обогащения. Абсолютно равномерное распределение какого-либо элемента по продуктам разделения означает, что уравнение баланса по этому элементу не является независимым, а может быть получено умножением всех членов уравнения баланса по массам на один и тот же коэффициент. Введение дополнительных точек контроля содержаний и переход к разветвленной технологической схеме позволяет ограничить число контролируемых элементов, получая тем не менее переопределенную систему уравнений.

Пусть задана разветвленная схема обогащения, включающая  $p$  независимых разделительных операций. Схема содержит  $n$  неизвестных масс продуктов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  и  $l$  измеренных исходных питаний  $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{n+l}$ . В каждом из  $n+l$  продуктов контролируется содержа-

ние  $m$  элементов. Запишем для каждой из  $p$  операций уравнения баланса по  $m$  контролируемым компонентам и по твердому и объединим их в одну систему уравнений, именуемую системой уравнений баланса разветвленной схемы обогащения. Составленная для истинных масс продуктов и истинных значений содержаний система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{11}\bar{\beta}_{11}\bar{Q}_1 + \tau_{12}\bar{\beta}_{12}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{1,n+1}\bar{\beta}_{1,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \tau_{11}\bar{\beta}_{m1}\bar{Q}_1 + \tau_{12}\bar{\beta}_{m2}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{1,n+1}\bar{\beta}_{m,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \\ \tau_{11}\bar{Q}_1 + \tau_{12}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{1,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \tau_{p1}\bar{\beta}_{11}\bar{Q}_1 + \tau_{p2}\bar{\beta}_{12}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{p,n+1}\bar{\beta}_{1,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \\ \dots \\ \tau_{p1}\bar{\beta}_{m1}\bar{Q}_1 + \tau_{p2}\bar{\beta}_{m2}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{p,n+1}\bar{\beta}_{m,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \\ \tau_{p1}\bar{Q}_1 + \tau_{p2}\bar{Q}_2 + \dots + \tau_{p,n+1}\bar{Q}_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1-я операция} \\ \dots \\ \dots \\ \text{p-я операция} \end{array} \quad (2.8)$$

где  $\bar{\beta}_{ij}$  — истинное значение содержания  $i$ -го компонента в  $j$ -м продукте ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}$ );  $\bar{Q}_j$  — истинная масса  $j$ -го продукта ( $j = \overline{1, n+1}$ ).

## 2.2. АНАЛИЗ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТОВ

### Полнота данных

При решении задачи расчета баланса предварительно необходимо убедиться в том, что совокупность исходной информации обеспечивает условия разрешимости исходной системы уравнений. До настоящего момента предполагалось, что во всех продуктах технологической схемы контролируется одинаковое число  $m$  компонентов. Однако на практике встречаются более сложные ситуации.

В зависимости от системы контроля в каждом продукте технологической схемы измеряют или не измеряют содержания компонентов и его массу. Возможны следующие два варианта: измеряются все массы продуктов и содержания компонентов в них; для некоторых продуктов не измеряется хотя бы одна из указанных величин.

При первом варианте контроля параметров получается максимально возможный объем исходной информации и всегда обеспечивается решение задачи расчета баланса. Методы поиска решения в этой ситуации подробно будут описаны в гл. 3.

Во втором варианте система балансовых уравнений представляет систему алгебраических уравнений относительно неизмеряемых параметров. Если в нее подставить истинные значения масс продуктов и содержаний, то она, отражая реальный физический процесс, окажется совместной. Однако в зависимости от набора измеряемых величин система может иметь единственное решение или множество решений, только одно из которых отражает физическую картину процесса обогащения. Поэтому необходимо иметь такой набор исходных данных, который бы обеспечивал единственность решения балансовой системы. Назовем такой набор данных полным, а соответствующую систему уравнений разрешимой.

Среди полных наборов данных выделим определенные и избыточные. К определенным наборам данных отнесем те, которые при удалении из них хотя бы одного параметра становятся неполными, а к избыточным — те наборы, удаление из которых определенного числа параметров не влечет потерю полноты.

Определим необходимые и достаточные условия полноты исходных данных или, что то же самое, разрешимости системы балансовых уравнений. Для этого в исходную систему подставим истинные значения измеряемых параметров и перенесем в правую часть все произведения типа  $\beta Q$ , где  $\beta$  и  $Q$  измерены. Обозначив те произведения  $\beta Q$ , где  $\beta$  и  $Q$  не измерены, через новые переменные  $Z$ , получим систему линейных уравнений относительно этих переменных, а также неконтролируемых содержаний компонентов и масс продуктов. Полученная модифицированная система уравнений эквивалентна исходной при ненулевых истинных значениях всех параметров. Поскольку исходная система имеет ненулевое положительное решение, необходимым и достаточным условием единственности решения модифицированной системы является выполнение следующих требований: модифицированная система должна быть неоднородна; ранг матрицы модифицированной системы должен быть равен числу неизвестных. Первое условие исключает нулевое решение, а второе обеспечивает его единственность.

Следовательно, для полноты набора исходных данных необходимо и достаточно, чтобы модифицированная система была неоднородна и ранг ее матрицы был равен числу неизвестных.

Приведем пример использования модифицированной системы для проверки полноты исходных данных. Рассмотрим схему обогащения, состоящую из двух операций, в продуктах которой (но не во всех) контролируется два компонента (рис. 2.5, а).

Запишем для нее систему уравнений баланса

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}^+ Q_1 + \beta_{12}^+ Q_2 - \beta_{14}^+ Q_4 - \beta_{15}^+ Q_5 = 0 \\ \beta_{21}^+ Q_1 + \beta_{22}^+ Q_2 - \beta_{24}^+ Q_4 - \beta_{25}^+ Q_5 = 0 \\ -\beta_{12}^+ Q_2 + \beta_{13}^+ Q_3 + \beta_{14}^+ Q_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\beta_{22} Q_2 + \beta_{23}^* Q_3 + \beta_{24} Q_4 = 0 \\ Q_1 + Q_2 - Q_4 - Q_5 = 0 \\ -Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \end{array} \right.$$

где символ "+" при  $\beta_{ij}$  и  $Q_j$  означает, что данная величина измеряется. Построим соответствующую модифицированную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}^* Q_1 + \beta_{12}^* Q_2 - \beta_{14}^* Q_4 = \beta_{15}^* Q_5^* \\ \beta_{21}^* Q_1 + Z_1 - Z_2 = \beta_{25}^* Q_5^* \\ -\beta_{12}^* Q_2 + \beta_{13}^* Q_3 + \beta_{14}^* Q_4 = 0 \\ +\beta_{23}^* Q_3 - Z_1 + Z_2 = 0 \\ Q_1 + Q_2 - Q_4 = Q_5^* \\ -Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0, \end{array} \right.$$

где  $Z_1 = \beta_{22} Q_2$ ,  $Z_2 = \beta_{24} Q_4$ .

Модифицированная система неоднородна, однако ранг матрицы системы

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \beta_{12}^* & 0 & -\beta_{14}^* & 0 & 0 \\ \beta_{21}^* & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\beta_{12}^* & \beta_{13}^* & \beta_{14}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23}^* & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 6,$$

поскольку пятый и шестой столбцы линейно зависимы. В связи с этим рассмотренный набор данных является неполным. Обратим внимание, что хотя число уравнений в исходной системе равно числу неизвестных, она не является разрешимой.

Для сравнения рассмотрим ту же схему обогащения, в которой число контролируемых параметров осталось таким же, но несколько изменена схема контроля третьего и четвертого продуктов (рис. 2.5, б). Легко проверить, что в этом случае набор исходных данных будет полным.

На практике известны лишь измеренные значения параметров, и поэтому непосредственное использование критерия полноты исходных данных невозможно. Для того чтобы сформулировать признак полноты, в этом случае заметим следующее.

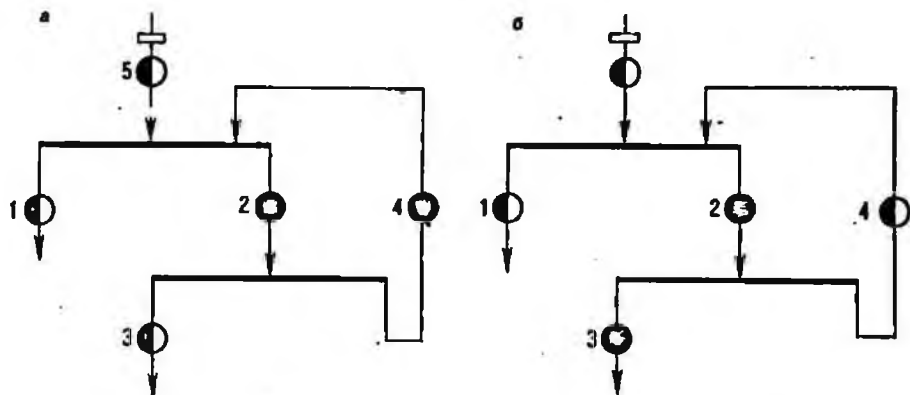


Рис. 2.5. Схема обогащения с различной организацией контроля параметров:  
*а* — неполный набор данных; *б* — полный набор данных; | | — точки измерения массы; ● — точки измерения одного компонента; ○ — точки измерения двух компонентов

Ранг матрицы есть порядок наибольшего отличного от нуля минора матрицы, и в силу непрерывности в некоторой окрестности заданной точки (в рассматриваемом случае — значений измеренных параметров) он сохраняет свое значение. Таким образом, если истинные и измеренные значения коэффициентов находятся в указанной окрестности, то для полноты исходных данных достаточно выполнение сформулированного критерия для матрицы, составленной из значений измеренных данных.

Для определения окрестности измеренных значений параметров, содержащей их истинные значения, учтем, что погрешности измерений и, следовательно, значения измеренных параметров представляют собой нормально распределенные случайные величины с известной дисперсией. Тогда, зная измеренное значение массы или содержания, можно указать доверительный интервал, включающий истинное значение этого параметра. Построенная, как декартово произведение доверительных интервалов в пространстве измеренных параметров, доверительная окрестность содержит с определенной вероятностью истинные значения измеренных масс продуктов и содержаний.

С учетом вышеизложенного, сформулируем критерий разрешимости балансовых уравнений. *Если модифицированная система балансовых уравнений, коэффициентами которой являются измеренные значения параметров, неоднородна и ранг матрицы модифицированной системы равен числу неизвестных в некоторой доверительной окрестности коэффициентов, то с вероятностью, определяемой доверительной окрестностью, исходная балансовая система разрешима.*

Критерий разрешимости определяет достаточные условия полноты исходных данных. Если балансовая система не удовлетворяет требованиям критерия или вероятность, определяемая допустимой окрестностью, мала, то при ее решении могут возникнуть явления, связанные с

потерей полноты исходных данных. В частности, решения балансовой системы может иметь значительную погрешность. На практике подобные ситуации появляются в случаях, когда используются балансовые уравнения по слаборазделяющимся или же зависимым друг от друга компонентам. Их устранение требует как специальных методов решения, так и расширения набора исходных данных.

### Достоверность данных

В реальных условиях работы обогатительных фабрик информация о процессе, поступающая от датчиков, может быть существенно искажена из-за частичного отказа датчиков, помех (нарушений) в каналах передачи и т.п. Поэтому для повышения надежности расчетов следует оценивать достоверность информации либо методом экспертных оценок, либо по критерию положительности решения системы балансовых уравнений операции.

Первый метод состоит в том, что для каждого контролируемого компонента в данном продукте контура задаются верхняя  $\beta_{ij}$  и нижняя  $\underline{\beta}_{ij}$  границы изменения содержания компонента, определяемые из опыта работы предприятия. Информация признается достоверной, если для всех содержаний компонентов в продуктах контура выполняется условие

$$\max \left\{ 0, \underline{\beta}_{ij} - 3\sigma(\beta_{ij}) \right\} \leq \beta_{ij} \leq \min \left\{ 1, \bar{\beta}_{ij} + 3(\beta_{ij}) \right\},$$

где  $\beta_{ij}$  — содержание  $i$ -го компонента в  $j$ -ом продукте, а  $\underline{\beta}_{ij}$  и  $\bar{\beta}_{ij}$ , соответственно, нижняя и верхняя границы изменения содержания  $\beta_{ij}$ . Здесь содержания компонентов выражены в долях единицы.

Второй метод более сложный, он заключается в проверке необходимых условий положительности решения задачи расчета баланса для каждой операции  $i$ -й подсхемы контура на основе данных по  $i$ -му компоненту. Для каждой операции  $i$ -й подсхемы определяются максимальные и минимальные значения измеренных содержаний входных и выходных продуктов  $\beta_{i,вх}$ ,  $\underline{\beta}_{i,вх}$ ,  $\bar{\beta}_{i,вых}$ ,  $\underline{\beta}_{i,вых}$ . Определим интервалы изменения содержаний формулами

$$I_{i,вх} = [\underline{\beta}_{i,вх}, \bar{\beta}_{i,вх}];$$

$$I_{i,вых} = [\underline{\beta}_{i,вых}, \bar{\beta}_{i,вых}].$$

Если эти интервалы имеют пересечение, то исходная информация для данной операции по  $i$ -му компоненту признается достоверной. Подобное сравнение проводится для всех контролируемых компонентов и всех операций подсхем исходной технологической схемы.

### 2.3. РАСЧЕТ ВЫХОДОВ, СКОРРЕКТИРОВАННЫХ СОДЕРЖАНИЙ

#### Расчет по КМП

Для описания расчета по КМП в системе уравнений баланса (2.8) представим истинные значения величин как сумму измеренных значений и поправок:

$$\bar{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}),$$

$$\bar{Q}_{n+v} = Q_{n+v} + \delta Q_{n+v} \quad (v = \overline{1, l}).$$

Тогда исходная система балансовых уравнений (2.8) тождественно преобразуется в виде

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_{kj} (\beta_{ij} + \delta_{ij}) Q_j + \sum_{j=n+1}^{n+l} \tau_{kj} (\beta_{ij} + \delta_{ij}) (Q_j + \delta Q_j) = 0 \\ (k = \overline{1, p}; i = \overline{1, m}) \\ \sum_{j=1}^n \tau_{kj} Q_j + \sum_{j=n+1}^{n+l} \tau_{kj} (Q_j + \delta Q_j) = 0 \quad (k = \overline{1, p}). \end{cases} \quad (2.9)$$

Видно, что система (2.9) состоит из  $p(m+1)$  уравнений баланса и содержит теперь  $(n+l)(m+1)$  неизвестных величин: корректировок содержаний  $\delta_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}$ ), масс продуктов  $Q_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), корректировок масс продуктов  $\delta Q_{n+v}$  ( $v = \overline{1, l}$ ). Следовательно, система (2.9) относится уже к типу неопределенных систем алгебраических уравнений, ибо

$$p(m+1) < (n+l)(m+1),$$

и чтобы найти оценки неизвестных величин, надо избрать разумный критерий сравнения решений системы (2.9), например, критерий максимального правдоподобия (КМП).

В соответствии с этим каждое измеренное значение содержания  $\beta_{ij}$  и каждое измеренное значение массы исходного питания  $Q_{n+v}$  подвергается корректировке соответственно на величины  $\delta_{ij}$  и  $\delta Q_{n+v}$  так, чтобы:

выполнялись все балансовые уравнения (2.9), т.е. система (2.9) превращалась в совместную;

величины корректировок  $\delta_{ij}$  и  $\delta Q_{n+v}$ , коль скоро все они не могут быть нулевыми в силу несовместности силы (2.9), были в определенном смысле наименьшими: чтобы взвешенная сумма квадратов всех корректировок

$$L = \sum_{i,j} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma^2 (\beta_{ij})} + \sum_v \frac{(\delta Q_{n+v})^2}{\sigma^2 (Q_{n+v})} \quad (2.10)$$

имела наименьшее возможное значение.

В этом случае функция правдоподобия  $P$ , с точностью до несущественного множителя имеющая вид

$$P = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^l \frac{(\delta Q_{n+\nu})^2}{\sigma^2(Q_{n+\nu})} \right\}, \quad (2.11)$$

достигает наибольшего значения, откуда и происходит название критерия.

В равенстве (2.11)  $\sigma_{ij} = \sigma(\beta_{ij})$  — средняя квадратическая погрешность определения содержания, связана простейшей формулой с допустимым расхождением  $\Delta\beta_{ij}$  (по утвержденным в отрасли или на предприятии нормам)

$$\sigma_{ij} = \Delta\beta_{ij} / K,$$

а коэффициент  $K$  зависит, например при химическом анализе, от числа параллельных определений;  $\sigma(Q_{n+\nu})$  — среднее квадратическое отклонение измерения масс, оно вычисляется с помощью паспортных данных весоизмерительного оборудования.

При расчете технологического баланса по КМП требуется найти такой набор корректировок содержаний  $\delta_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ ), корректировок масс  $\delta \overline{Q}_{n+\nu}$  ( $\nu = \overline{1, l}$ ) и неизвестных масс продуктов  $Q_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), при котором система балансовых уравнений (2.9) была бы совместной, а функция правдоподобия  $P$  достигала бы наибольшего значения, или, что то же, логарифмическая функция правдоподобия  $L$  имела бы минимум.

Расчет будем производить в два этапа, предварительно перейдя к векторно-матричным обозначениям:

$$\beta_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i, n+1}]^T;$$

$$\delta_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i, n+1}]^T;$$

$$\overline{Q} = [\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \dots, \overline{Q}_{n+1}]^T;$$

$$T_i = T \text{diag} [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i, n+1}];$$

$$T_{\overline{Q}} = T \text{diag} [\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \dots, \overline{Q}_{n+1}],$$

в которых система (2.9), если пренебречь произведениями  $\delta_{ij} \delta Q_{n+\nu}$ , принимает вид

$$T_{\overline{Q}} \delta_i = -T_{\overline{Q}} \beta_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (2.9^I)$$

$$T_{\overline{Q}} = 0. \quad (2.9^{II})$$



На первом этапе, зафиксировав вектор  $\bar{Q}$  — вектор-столбец истинных значений масс продуктов технологической схемы, будем искать минимум квадратичной формы (2.10) по переменным  $\delta_{ij}$  при линейных ограничениях (2.9<sup>1</sup>). Функция Лагранжа для этой задачи на относительный экстремум имеет вид

$$F = L - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(k)} (\tau_{k1} \bar{Q}_1 \delta_{i1} + \tau_{k2} \bar{Q}_2 \delta_{i2} + \dots + \tau_{kN} \bar{Q}_N \delta_{iN}),$$

где  $\lambda_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $k = \overline{1, p}$ ) — неопределенные множители Лагранжа, а через  $N$  обозначено для краткости  $n + l$ . Необходимыми условиями экстремума являются равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_{ij}} = 2 \frac{\delta_{ij}}{\sigma^2(\beta_{ij})} - 2 \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(k)} \tau_{kj} \bar{Q}_j = 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, N}),$$

откуда  $\delta_{ij} = \bar{Q}_j \sigma^2(\beta_{ij}) \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(k)} \tau_{kj}$ . (2.12)

Введя векторы неопределенных множителей Лагранжа

$$\lambda_i = [\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \dots, \lambda_i^{(p)}]^T$$

и диагональные матрицы

$$\sigma_i = \text{diag} [\sigma^2(\beta_{i1}), \sigma^2(\beta_{i2}), \dots, \sigma^2(\beta_{iN})] \quad (i = \overline{1, m}),$$

выражение (2.12) можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\delta_i = \sigma_i T_{\bar{Q}}^T \lambda_i. \quad (2.13)$$

Тогда уравнение (2.9<sup>1</sup>) принимает вид

$$T_{\bar{Q}} \sigma_i T_{\bar{Q}}^T \lambda_i = -T_{\bar{Q}} \beta_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

откуда  $\lambda_i = -A_i^{-1} T_{\bar{Q}}^{-1} \beta_i$ . (2.14)

где

$$A_i = A_i(\bar{Q}) = T_{\bar{Q}} \sigma_i T_{\bar{Q}}^T = T \text{diag} \times \\ \times [\bar{Q}_1^2 \sigma^2(\beta_{i1}), \dots, \bar{Q}_N^2 \sigma^2(\beta_{iN})] T^T, \quad (2.15)$$

т.е.  $A_i$  — неособая матрица размерности  $p \times p$ .

Используя формулы (2.14) и (2.15), найдем окончательное выражение для оптимальных корректировок содержаний по КМП при фиксированных значениях масс продуктов  $\bar{Q}$ :

$$\delta_i(\bar{Q}) = -\sigma_i T_{\bar{Q}}^T A_i^{-1}(\bar{Q}) T_{\bar{Q}} \beta_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.16)$$

При этом минимальное значение функции  $L$  выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} \min L = u(\bar{Q}) &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{lj}^2}{\sigma^2(\beta_{lj})} + \sum_{\nu=1}^l \frac{(\delta a_{n+\nu})^2}{\sigma^2(a_{n+\nu})} = \\ &= \sum_{l=1}^m \delta_l^T \sigma_l^{-1} \delta_l + \sum_{j=n+1}^N \frac{(\bar{a}_j - a_j)^2}{\sigma^2(a_j)} = \\ &= \bar{Q}^T \sum_{l=1}^m T_l^T A_l^{-1}(\bar{Q}) T_l \bar{Q} + \sum_{j=n+1}^N \left( \frac{\bar{a}_j^2}{\sigma^2(a_j)} + \right. \\ &\left. + \frac{a_j^2}{\sigma^2(a_j)} \right) - 2 \sum_{j=n+1}^N \frac{a_j \bar{a}_j}{\sigma^2(a_j)}. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$a = [a_j]_{j=1}^N; \quad a_j = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2(a_j)}, & j = \overline{n+1, N}; \\ 0, & j = \overline{1, n} \end{cases};$$

$$b = [b_j]_{j=1}^N; \quad b_j = \begin{cases} \frac{a_j}{\sigma^2(a_j)}, & j = \overline{n+1, N}; \\ 0, & j = \overline{1, n} \end{cases};$$

$$c = \sum_{j=n+1}^N \frac{a_j^2}{\sigma^2(a_j)}; \quad \sigma_0^{-1} = \text{diag} [a];$$

$$A(\bar{Q}) = \sum_{l=1}^m T_l^T A_l^{-1}(\bar{Q}) T_l + \sigma_0^{-1},$$

функцию  $u(\bar{Q})$  запишем в виде

$$u(\bar{Q}) = \bar{Q}^T A(\bar{Q}) \bar{Q} - 2b^T \bar{Q} + c, \quad (2.17)$$

где  $A(\bar{Q})$  — симметрическая матрица размерности  $N \times N$ , представленная в виде суммы положительно определенных матриц, а потому  $A(\bar{Q})$  — положительно определенная матрица.

Поскольку обычно принято выражать массы продуктов при расчете технологического баланса в относительных единицах, введем в рассмотрение выходы продуктов

$$\gamma_j = \frac{\bar{a}_j}{a_0} \quad (j = \overline{1, M}), \quad a_0 = \sum_{\nu=1}^l a_{n+\nu}. \quad (2.18)$$

В терминах выходов целевая функция (2.17) запишется в виде

$$u(\gamma) = \gamma^T A(\gamma) \gamma - 2b^T(\gamma) \gamma + c, \quad (2.19)$$

$$\text{где } A(\gamma) = \sum_{i=1}^m T_i^T A_i^{-1}(\gamma) T_i + Q_0^2 \sigma_0^{-1};$$

$$b(\gamma) = Q_0 [b_j]_{j=1}^N; \quad A_i(\gamma) = T \text{diag} [\gamma_1^2 \sigma_{i1}^2, \dots, \gamma_N^2 \sigma_{iN}^2] T^T.$$

На втором этапе расчета технологического баланса находят такой вектор  $\hat{\gamma}$ , который доставляет минимум функции  $u(\gamma)$  при условии  $T\gamma = 0$ . Для решения этой задачи могут применяться стандартные программы минимизации функций многих переменных при наличии линейных ограничений. После нахождения  $\hat{\gamma}$  по формулам (2.18) вычисляют массы продуктов  $\hat{Q}_j$ , а затем по формуле (2.16) — значения корректировок  $\hat{\delta}_j$ . Однако прежде всего полезно освободиться от условия  $T\gamma = 0$ , чтобы перейти к отысканию безусловного минимума. Условие  $T\gamma = 0$  позволяет выразить последние  $p$  координат вектора  $\gamma$  через первые  $N-p$  координат и соответственно преобразовать функцию  $u(\gamma)$ .

Если обозначить

$$x = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-p}]^T; \quad y = [\gamma_{N-p+1}, \gamma_{N-p+2}, \dots, \gamma_N]^T$$

и ввести подматрицы  $T^H, T^H, [b^H]^T$ , состоящие из первых  $N-p$  столбцов, и  $T^3, T^3, [b^3]^T$ , состоящие из последних  $p$  столбцов матриц  $T, T, [b]^T$  соответственно, то прежде всего получим

$$T(\gamma) = [T^H, T^3] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^H x + T^3 y = 0,$$

$$\text{откуда } y = - [T^3]^{-1} T^H x = Lx, \quad (2.20)$$

где через  $L$  обозначена матрица линейного преобразования

$$L = - [T^3]^{-1} T^H. \quad (2.21)$$

Далее можно выразить функцию  $u(\gamma)$  через свободные переменные  $x$ :

$$\begin{aligned} v(x) = u(x, y(x)) &= [x^T, y^T(x)] x \\ &+ \sum_{i=1}^m [T_i^H, T_i^3]^T A_i^{-1}([x, y(x)]) [T_i^H, T_i^3] + \\ &+ Q_0^2 \sigma_0^{-1} [y(x)] - 2([b^H]^T, [b^3]^T) x \cdot \\ &+ [y(x)] + c. \end{aligned}$$

Проделав указанные действия с матрицами, получим окончательный результат:

$$v(x) = x^T Z(x) x - 2b_0^T x + c, \quad (2.22)$$

где  $Z(x) = Z_1(x) + L^T Q_0^2 \text{diag} [0, 0, \dots, 0, \sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_{n+l}^{-2}] L$ ;  
 $p-l$

$$Z_1(x) = \sum_{i=1}^m w_i^T A_i^{-1}(x, y(x)) w_i;$$

$$w_i = T_i^H + T_i^3 L \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.23)$$

На втором этапе требуется найти вектор  $\hat{x}$ , определяющий  $(N - \rho)$  выходов продуктов, доставляющий минимум функции  $v(x)$ , заданной уравнением (2.22). По формуле

$$\hat{y} = L\hat{x} \quad (2.24)$$

найдутся остальные  $\rho$  выходов продуктов.

Зная векторы  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , образуем искомый вектор выходов  $\hat{\gamma}$ :

$$\hat{\gamma}^T = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_N) = [\hat{x}^T, \hat{y}^T] = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{N-\rho}, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\rho);$$

Выше указывалось, что согласно формуле (2.18) можно вычислить массы продуктов  $\hat{Q}_j$ , а затем по формуле корректировок (2.16) определить поправки содержаний  $\hat{\delta}_{ij}$ . Завершает расчет технологического баланса вычисление скорректированных содержаний:

$$\hat{\beta}_{ij} = \beta_{ij} + \hat{\delta}_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, N}).$$

### Расчет по квадратичному критерию

Расчет по ММП технологического баланса разветвленных схем обогащения при реализации на ЭВМ связан с определенными трудностями, так как требует программу минимизации функции многих переменных, которую сложно реализовать на малых и средних вычислительных машинах. Дело в том, что минимизация критериальной функции  $u(\gamma)$  или после освобождения от условия  $T\gamma = 0$  целевой функции  $v(x)$  производится, как правило, численными итерационными методами, а наличие в уравнении  $u(\gamma)$  переменной матрицы  $A(\gamma)$  большой размерности осложняет этот итерационный процесс. Поэтому желательно найти такой метод решения систем балансовых уравнений, который обладал бы примерно такой же точностью, что и ММП, но был бы достаточно прост в вычислительном плане. В этом смысле целесообразно рассмотреть метод расчета по квадратичному критерию.

Под решением балансной системы (2.9) по квадратичному критерию будем понимать такой вектор  $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N)^T$ , который минимизирует функцию

$$u_1(\gamma) = \gamma^T \left( \sum_{i=1}^m T_i^T A_{i0}^{-1} T_i \right) \gamma - 2b\gamma^T c \quad (2.25)$$

при линейных ограничениях  $T\gamma = 0$ , где

$$A_{j_0} = A_j (\gamma^0) \quad (j = \overline{1, m}), \quad (2.26)$$

а  $\gamma^0$  — некоторый фиксированный вектор-столбец. Существенно, что матрицы  $A_{j_0}$  ( $j = \overline{1, m}$ ) постоянные и не зависят от  $\gamma$ . Поэтому функция  $u_1(\gamma)$  — квадратичная функция  $N$  переменных и ее минимизация несравнимо проще минимизации функции  $u(\gamma)$ . Действительно, освобождаясь от линейных ограничений  $T\gamma = 0$ , будем иметь дело с минимизацией целевой функции  $Z(x)$ , сложность которой определяет матричная функция  $Z(x)$ . Метод решения по квадратичному критерию предполагает на каждой итерации поиска минимума функции  $v(x)$  считать приближенно  $Z(x)$  постоянной, тем самым функцию  $v(x)$  заменить другой функцией

$$v_1(x) = x^T Z_0 x - 2b_0^T x + c, \quad Z_0 = Z(x^0), \quad (2.27)$$

которая уже является квадратичной функцией  $(N - p)$  переменных. Точка минимума функции  $v_1(x)$  находится решением системы линейных уравнений

$$Z_0 x = b_0, \quad (2.28)$$

откуда  $x = Z_0^{-1} b_0$ .

Вектор  $x^0$  в расчете технологического баланса по квадратичному критерию уточняется итерационным процессом: необходимо несколько раз (от трех до шести) решить балансную систему указанным методом, выбирая на каждом шаге, начиная со второго, в качестве  $x^0$  результат предыдущего решения и взяв на первом шаге вектор выходов  $x^0$ , предложенный технологами (или по методу наименьших квадратов).

После определения вектора выходов  $x$  расчет баланса аналогичен расчету по КМП.

## 2.4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА

### Оценка точности расчета по КМП

В качестве критерия точности расчета технологического баланса разветвленной схемы обогащения естественно выбрать дисперсии выходов  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$ , а последние удобно вычислять как элементы ковариационной матрицы выходов.

Можно предложить следующий порядок действий. Сначала определить ковариационную матрицу первых  $N - p$  выходов  $D(\hat{x})$ , для чего воспользоваться известной формулой ковариации двух функций многих случайных переменных

$$\begin{aligned}
 [D(\hat{x})]_{kr} &= \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) + \\
 &+ \sum_{\nu=1}^l \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial a_{n+\nu}} \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial a_{n+\nu}} \sigma^2(a_{n+\nu}) \quad (k, r = \overline{1, N-p}),
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

причем частные производные должны вычисляться в точках математических ожиданий аргументов, а так как они не известны, то в близких точках  $\hat{\beta}_{ij}$  и  $\hat{a}_{n+\nu}$ . Затем определить ковариационную матрицу последних  $p$  выходов  $D(\hat{y})$ , что в силу линейной зависимости  $\hat{y} = L\hat{x}$  даст

$$D(\hat{y}) = D(L\hat{x}) = LD(\hat{x})L^T. \tag{2.30}$$

Искомые дисперсии  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  первых  $(N-p)$  выходов и последних  $p$  выходов будут являться диагональными элементами соответственно матриц  $D(\hat{x})$  и  $D(\hat{y})$ .

Приступая к определению матрицы  $D(x)$ , заметим, что функции

$$f_k(\hat{x}, \beta, a) = \frac{\partial v(\hat{x}(\beta, a), \beta, a)}{\partial x_k} \quad (k = \overline{1, N-p})$$

равны тождественно нулю, как необходимые условия безусловного минимума функции  $v(x)$ , заданной формулой (2.22).

Поэтому будем иметь

$$\frac{\partial f_k(\hat{x}, \beta, a)}{\partial \beta_{st}} = \sum_{j=1}^{N-p} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial \beta_{st}} + \frac{\partial f_k}{\partial \beta_{st}} \equiv 0 \quad (k = \overline{1, N-p}) \tag{2.31}$$

Равенства (2.31) представляют собой систему из  $N-p$  линейных алгебраических уравнений с  $N-p$  неизвестными

$$\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial \beta_{st}}, \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial \beta_{st}}, \dots, \frac{\partial \hat{x}_{N-p}}{\partial \beta_{st}}, \quad (s = \overline{1, m}; t = \overline{1, M}).$$

Чтобы решить эту систему, надо вычислить ее коэффициенты  $\partial f_k / \partial x_j$  и  $\partial f_k / \partial \beta_{st}$  в точке  $\hat{\beta}$  (или в скорректированной точке  $\hat{\beta}$ ).

Учитывая, что в точке  $\hat{\beta}$  имеем

$$\hat{\gamma}(\hat{\beta}) = \hat{\gamma}(\beta) = \hat{\gamma}$$

и невязки баланса по каждому компоненту обращаются в нуль, т.е.

$$T \text{diag } \gamma \beta_i = T_i \gamma = w_i x = 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

находим

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \Big|_{\hat{\beta}} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} \Big|_{\hat{\beta}} = 2 [Z(\hat{x})]_{kj}.$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial \beta_{st}} \Big|_{\hat{\beta}} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial \beta_{st}} \Big|_{\hat{\beta}} = 2 [w_s^T A_s^{-1} (\hat{x}, L\hat{x})^T \text{diag} \hat{\gamma}]_{kr}.$$

Следовательно, систему (2.31) можно представить в матричной форме:

$$Z(x) \frac{\partial \hat{x}}{\partial \beta_{st}} = - [w_s^T A_s^{-1} (\hat{x}, L\hat{x})^T \text{diag} \hat{\gamma}]_{kr} l_r, \quad (2.32)$$

где  $l_r$  —  $N$ -мерный вектор-столбец,  $t$ -я координата которого равна единице, а остальные нули.

Положив

$$\Phi_s = w_s^T A_s^{-1} (\hat{x}, L\hat{x})^T \text{diag} \hat{\gamma},$$

получим из последнего равенства

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \beta_{st}} = - Z^{-1} \Phi_s l_r \quad (2.33)$$

Подставив найденные значения производных, вычислим первое слагаемое в формуле (2.29):

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial x_r}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) &= [Z^{-1} (\sum_{s=1}^m \Phi_s \sigma_s \Phi_s^T) \times \\ &\times Z^{-1}]_{kr} = [\sum_{s=1}^m Z^{-1} w_s^T A_s^{-1} \text{diag} \hat{\gamma} \sigma_s T^T \times \\ &\times \text{diag} \hat{\gamma} A_s^{-1} w_s Z^{-1}]_{kr}. \end{aligned}$$

Если обратить внимание на матричные равенства

$$T \text{diag} \hat{\gamma} \sigma_s T^T \text{diag} \hat{\gamma} = A_s(\hat{\gamma}),$$

следующие из определения (2.15), и равенство

$$Z_1 = \sum_{s=1}^m w_s^T A_s^{-1} w_s,$$

вытекающее из второй формулы (2.23), то первое слагаемое в выражении (2.29) переписется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) &= [Z^{-1} Z_1 Z^{-1}]_{kr} \\ (k, r = \overline{1, N-1}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Чтобы вычислить второе слагаемое в выражении (2.29), надо аналогичным способом найти частные производные  $\partial x / \partial Q_{n+\nu}$ . В итоге бу-

дем иметь

$$\sum_{\nu=1}^l \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \sigma_{n+\nu}} \frac{\partial \hat{x}_r}{\partial \sigma_{n+\nu}} \sigma^2 (Q_{n+\nu}) = [Z^{-1} L^T Q_0^2 \times \\ \times \text{diag} [0, 0, \dots, 0, \sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_{n+l}^{-2}] LZ^{-1}]_{kr}.$$

$p - l$

Подставив вычисленные значения каждого из слагаемых в формулу (2.29), получим

$$[D(\hat{x})]_{kr} = [Z^{-1} Z_1 Z^{-1}]_{kr} + [Z^{-1} L^T Q_0^2 \text{diag} \times \\ \times [0, 0, \dots, 0, \sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_{n+l}^{-2}] LZ^{-1}]_{kr}.$$

что с учетом первого из равенств (2.23) даст окончательный результат

$$D(\hat{x}) = Z^{-1} (\hat{x}). \quad (2.35)$$

Как уже упоминалось, ковариационная матрица  $D(\hat{y})$  находится согласно выражению (2.30), а дисперсии выходов  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  являются диагональными элементами ковариационных матриц.

### Оценка точности расчета по квадратичному критерию

В качестве критерия точности расчета технологического баланса, как и в предыдущем подразделе, выберем дисперсии выходов  $\sigma^2(\hat{\gamma}_k)$  ( $k = \overline{1, M}$ ). Исходим из того, что под решением балансной системы (2.9) по квадратичному критерию понимается такой вектор выходов  $\tilde{\gamma} = [\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_N]^T$ , который минимизирует функцию  $u_1(\gamma)$ , определяемую равенством (2.25) при условии  $T\gamma = 0$ . Как и ранее, удобно освободиться от этого условия, введя векторы  $\tilde{x} = [\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_{N-p}]^T$  и  $\tilde{y} = [\tilde{\gamma}_{N-p+1}, \tilde{\gamma}_{N-p+2}, \dots, \tilde{\gamma}_N]^T = L\tilde{x}$ . Вектор  $\tilde{x}$  доставляет минимум квадратичной функции  $(N-p)$  переменных  $v_1(x)$ , заданной формулой (2.27). Для определения ковариационной матрицы выходов  $D(\hat{x})$  как и в разд. 2.4, заметим тождества

$$\frac{\partial v_1(x(\beta, a), \beta, a)}{\partial x_k} \equiv 0, \quad (k = \overline{1, N-p}), \quad (2.36)$$

которые вытекают из условия минимума функции  $v_1(x)$ .

Используя тождества (2.36), можно построить систему  $(N-p)$  линейных уравнений, аналогичную системе (2.31) с  $(N-p)$  неизвестными

$$\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \beta_{st}}, \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \beta_{st}}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}_{N-p}}{\partial \beta_{st}} \quad (s = \overline{1, m}; t = \overline{1, N}).$$



которая в матричной форме по аналогии с выражением (2.32) будет иметь вид

$$Z_0 \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \beta_{st}} = - [w_s^T A_{s0}^{-1} T \text{diag } \tilde{\gamma}] I_t, \quad (2.37)$$

где

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m w_i^T A_{i0}^{-1} w_i + L^T Q_0^2 \text{diag } [0, 0, \dots, 0, \underbrace{\sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_N^{-2}}_{p-l}].$$

Решив систему (2.37), найдем вектор частных производных

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \beta_{st}} = - Z_0^{-1} w_s^T A_{s0}^{-1} T \text{diag } \hat{\gamma} I_t = - Z_0^{-1} \Phi_{s0} I_t \quad (2.38)$$

Далее обратимся к формуле ковариации функций  $\tilde{x}_k$  и  $\tilde{x}_r$  ( $k, r = 1, N-p$ ) многих случайных переменных

$$[D(\tilde{x})]_{kr} = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) + \sum_{\nu=1}^l \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial a_{n+\nu}} \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial a_{n+\nu}} \sigma^2(Q_{n+\nu}) \quad (2.39)$$

и сначала с помощью выражения (2.38) вычислим первое слагаемое

$$\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) = \sum_{s=1}^m [Z_0^{-1} w_s^T A_{s0}^{-1} \times$$

$$\times T \text{diag } \hat{\gamma}_s T^T \text{diag } \hat{\gamma} A_{s0}^{-1} w_s Z_0^{-1}]_{kr} =$$

$$= [Z_0^{-1} (\sum_{s=1}^m w_s A_{s0}^{-1} A_s A_{s0}^{-1} w_s) Z_0^{-1}]_{kr} =$$

$$= [Z_0^{-1} Z_{10} Z_0^{-1}]_{kr},$$

$$\text{где } Z_{10} = \sum_{s=1}^m w_s A_{s0}^{-1} A_s A_{s0}^{-1} w_s.$$

Вычислив частные производные  $\partial x / \partial Q_{n+\nu}$ , найдем второе слагаемое для элементов ковариационной матрицы

$$\sum_{\nu=1}^l \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial a_{n+\nu}} \frac{\partial \tilde{x}_r}{\partial a_{n+\nu}} \sigma^2(Q_{n+\nu}) = [Z_0^{-1} L^T Q_0^2 \text{diag } \times$$

$$\times [0, 0, \dots, 0, \sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_N^{-2}] L Z_0^{-1}]_{kr}.$$

Подставив вычисленные значения обих слагаемых в равенство (2.39), окончательно получим формулу для ковариационной матрицы:

$$D(\tilde{x}) = Z_0^{-1} Z_2 Z_0^{-1}, \quad (2.40)$$

где  $Z_2 = Z_{10} + L^T O_0^2 \text{diag} [0, 0, \dots, 0, \underbrace{\sigma_{n+1}^{-2}, \dots, \sigma_N^{-2}}_{\rho-1}] L$ .

Ковариационную матрицу  $D(\tilde{y})$  можно определить по формуле (2.30).

### Сравнение точности расчета по КМП и квадратичному критерию

Ранее (см. разд. 1.2) при расчете технологического баланса разделительной операции доказывалось следующее свойство оптимальности метода расчета по КМП по сравнению с расчетом по МНК: *при любых положительных весовых коэффициентах  $D_i$  ( $i = 1, m$ ) в системе (1.69) для дисперсий выходов, рассчитанных по МНК и КМП, справедливо неравенство*

$$\sigma^2(\tilde{\gamma}_k) \geq \sigma^2(\hat{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Знак равенства реализуется в том случае, если  $D_i = \lambda D_i^*$  ( $\gamma^*$ ),  $\lambda > 0$ , ( $i = 1, m$ ). Здесь через  $\gamma^*$  обозначен вектор истинных значений выходов.

Сходный результат наблюдается и при сравнении точности расчета по КМП и квадратичному критерию. Действительно, предполагая для простоты, что рассматривается разветвленная технологическая схема с одним нормированным исходным питанием, для системы балансовых уравнений (2.9), согласно формулам (2.33) и (2.38), векторы частных производных от вычисленных выходов по КМП и квадратичному критерию запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \beta_{st}} &= -Z^{-1} \Phi_s / t; \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \beta_{st}} &= -Z_0^{-1} \Phi_{s0} / t; \end{aligned} \quad (2.41)$$

где все величины в правых частях равенств определены ранее.

Теперь рассмотрим ковариацию двух функций  $\hat{\gamma}_k$  и  $\tilde{\gamma}_k$  многих случайных переменных  $\beta_{st}$

$$\text{cov}(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N \frac{\partial \hat{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \frac{\partial \tilde{\gamma}_k}{\partial \beta_{st}} \sigma^2(\beta_{st}) \quad (k = \overline{1, N}),$$

где частные производные должны быть взяты в точке  $\bar{\beta}_{st}$  (или близкой к  $\hat{\beta}_{st}$ ). Значения частных производных определим из равенств (2.41), имея в виду, что

$$\frac{\partial \beta_{st}}{\partial \tilde{x}_k} = - [Z^{-1} \Phi_s]_{kt};$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_{st}}{\partial \beta_{st}} = - [Z_0^{-1} \Phi_{s0}]_{kt}.$$

Тогда равенство для ковариации  $\hat{\gamma}_k$  и  $\tilde{\gamma}_k$  переписывается так:

$$\text{cov}(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^N [Z^{-1} \Phi_s]_{kt} [Z_0^{-1} \Phi_{s0}]_{kt} \sigma^2(\beta_{st}).$$

Если воспользоваться очевидным матричным тождеством

$$\sum_{t=1}^N [Z^{-1} \Phi_s]_{kt} [Z_0^{-1} \Phi_{s0}]_{kt} \sigma^2(\beta_{st}) =$$

$$= [Z^{-1} \Phi_s \sigma_s \Phi_{s0}^T Z_0^{-1}]_{kk}.$$
(2.42)

то получим при  $k = \overline{1, N}$

$$\text{cov}(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) = \sum_{s=1}^m [Z^{-1} \Phi_s \sigma_s \Phi_{s0}^T Z_0^{-1}]_{kk} =$$

$$= [Z^{-1} (\sum_{s=1}^m \Phi_s \sigma_s \Phi_{s0}^T) Z_0^{-1}]_{kk}.$$
(2.42)

Раскрыв выражения  $\Phi_s$  и  $\Phi_{s0}$  (см. формулу (2.38)) и проделав простейшие матричные преобразования, найдем

$$\sum_{s=1}^m \Phi_s \sigma_s \Phi_{s0}^T = Z_0,$$

с учетом чего из формулы (2.42) следует

$$\text{cov}(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) = \sigma^2(\tilde{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, N}).$$

Сравнивая этот результат с формулой (2.35), получаем

$$\text{cov}(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) = \sigma^2(\hat{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, N}).$$

По известному неравенству для ковариации двух случайных величин имеем

$$\text{cov}^2(\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k) \leq \sigma^2(\hat{\gamma}_k) \sigma^2(\tilde{\gamma}_k),$$

а с учетом предыдущего равенства окончательно имеем

$$\sigma^2(\hat{\gamma}_k) \leq \sigma^2(\tilde{\gamma}_k) \quad (k = \overline{1, N}).$$
(2.43)

Неравенство (2.43) показывает, что расчет технологического баланса разветвленной схемы обогащения по квадратическому критерию при любом выборе фиксированного вектора  $\gamma^0$  (или  $x^0$ ) не может быть точнее расчета по КМП. Однако очевидно, при выборе  $\gamma^0 = \gamma^*$ , т.е.  $A_{i_0} = A_i(\gamma^*)$  ( $i = \overline{1, m}$ ), точность обоих методов окажется равной. Поэтому, выбрав  $A_{i_0}$  достаточно близким к  $A_i(\gamma^*)$ , можно добиться того, что отношение  $\sigma(\tilde{\gamma}_k) / \sigma(\hat{\gamma}_k)$  ( $k = \overline{1, M}$ ) будет сравнительно близко к единице. На практике значение  $\gamma^0$  ( $x^0$ ) уточняется итерационным процессом, описанным в предыдущем подразделе.

Расчеты технологических схем различных обогатительных фабрик показали, что после трех — шести итераций отношение  $\sigma(\tilde{\gamma}_k) / \sigma(\hat{\gamma}_k)$  удовлетворяет неравенству

$$1 \leq \sigma(\tilde{\gamma}_k) / \sigma(\hat{\gamma}_k) \leq 1,3 \quad (k = \overline{1, N}).$$

С учетом этого на практике целесообразно рассчитывать технологический баланс по квадратичному критерию.

## 2.5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ВЫХОДОВ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Рассмотрим несколько примеров расчета технологического баланса металлов для разветвленной схемы обогащения с использованием метода максимального правдоподобия.

Первый пример относится к технологическому процессу переработки медно-цинковой руды. Технологическая схема состоит из операций основной и контрольной медных флотаций, трех перечисток медного концентрата, основной и контрольной цинковых флотаций и трех перечисток цинкового концентрата. Кроме основных металлов в руде в небольшом количестве присутствует свинец.

Разветвленная схема обогащения (рис. 2.6) состоит из четырех операций, из которых операция I включает основную и контрольную медные флотации, операция II — три перечистки медного концентрата, операция III — основную и контрольную цинковые флотации, операция IV — три перечистки цинкового концентрата.

Пронумеровав продукты в соответствии с принятыми правилами, составим технологическую матрицу, состоящую из четырех строк (по числу операций) и девяти столбцов (по числу продуктов):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

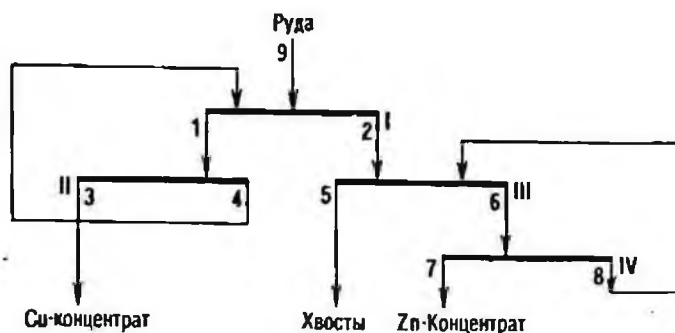


Рис. 2.6. Разветвленная схема обогащения медно-цинковой руды

Измеренные содержания меди, свинца и цинка в продуктах обогащения образуют матрицу содержаний

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 14,90 & 0,080 & 28,30 & 0,940 & 0,07 & 0,230 & 0,87 & 0,14 & 1,90 \\ 0,92 & 0,035 & 1,68 & 0,011 & 0,03 & 0,058 & 0,22 & 0,04 & 0,08 \\ 1,80 & 0,280 & 1,45 & 1,900 & 0,07 & 6,000 & 29,10 & 0,50 & 0,39 \end{bmatrix},$$

а соответствующая матрица средних квадратических погрешностей измерений имеет вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,020 & 0,30 & 0,500 & 0,020 & 0,04 & 0,05 & 0,030 & 0,09 \\ 0,10 & 0,015 & 0,14 & 0,015 & 0,015 & 0,02 & 0,04 & 0,015 & 0,02 \\ 0,12 & 0,040 & 0,12 & 0,120 & 0,020 & 0,22 & 0,42 & 0,050 & 0,04 \end{bmatrix}.$$

Выход исходного питания принят равным единице, а относительная погрешность его измерения равна 2 %.

Для решения задачи определения выходов с использованием определенных систем уравнений баланса нет необходимости использовать всю информацию о содержании, заключенную в  $[\sigma_{ij}]$ . Достаточно лишь данных о содержании основных металлов — меди и цинка, причем в некоторых продуктах можно ограничиться контролем лишь одного из них. Система контроля, которая является достаточной, может быть описана матрицей контроля содержаний, элементами которой являются единицы, если содержания металла измеряются, и нули, если измерение не производится. В рассматриваемом случае такая матрица будет иметь вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где первая строчка соответствует измерениям содержания меди, а вторая — цинка.

Решение полученной определенной системы — выходы продуктов  $\gamma$  и соответственно относительные средние квадратические погрешности  $\sigma$  их определения приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Продукт	Выход $\gamma$ , доли ед.	Погрешность $\sigma(\gamma)$ , %
1	0,126	5,30
2	0,936	0,76
3	0,0645	5,20
4	0,0619	6,00
5	0,9287	0,77
6	0,0352	21,7
7	0,0068	21,3
8	0,0286	21,9
9	1,000	0,67

Таблица 2.4

Продукт	Выход $\hat{\gamma}$ , доли ед.	Погрешность $\sigma(\hat{\gamma})$ , %
1	0,122	5,26
2	0,937	0,75
3	0,0624	5,17
4	0,0598	5,97
5	0,931	0,76
6	0,0303	20,23
7	0,0058	19,87
8	0,0245	20,44
9	1,000	0,67

Использование всей имеющейся информации о содержании металлов (матрица  $[\beta_{ij}]$ ) позволяет составить переопределенную систему уравнений баланса. В результате решения этой системы по критерию максимального правдоподобия получены выходы продуктов  $\hat{\gamma}$  и оценена средняя квадратическая погрешность  $\sigma(\hat{\gamma})$  их расчета (табл. 2:4).

Откорректированные значения содержаний металлов  $\hat{\beta}_{ij}$  представлены матрицей

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 14,92 & 0,079 & 28,32 & 0,940 & 0,074 & 0,265 & 0,860 & 0,1242 & 1,841 \\ 0,84 & 0,022 & 1,63 & 0,012 & 0,021 & 0,069 & 0,211 & 0,0351 & 0,122 \\ 1,71 & 0,250 & 1,48 & 1,945 & 0,071 & 5,971 & 29,120 & 0,5012 & 0,927 \end{bmatrix}$$

а поправки, выраженные в процентах измеренных содержаний, представлены матрицей

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,1 & -1,5 & 0,1 & -0,5 & 5,6 & 15,1 & -1,2 & -11,3 & -3,1 \\ -8,8 & -37,4 & -2,9 & 8,2 & 30,7 & 15,7 & -4,1 & -12,2 & 53,0 \\ -5,1 & -10,5 & 2,2 & 2,3 & 1,4 & -0,5 & 0,1 & 0,1 & 9,1 \end{bmatrix}$$

Как видно из приведенных данных, наибольшей коррекции подвергаются значения содержания свинца в различных продуктах, что объясняется весьма малым его содержанием и относительно большой погрешностью измерений. Что касается содержаний меди, то корректировки для большинства из них не превышают 5 %, хотя для продуктов 6 и 8 они равны соответственно 15,1 % и 11,3 %. Аналогичная картина наблюдается и для содержания цинка, где за исключением продуктов 2 и 9, корректировки не превышают 5 %.

Сравнивая между собой результаты, полученные при решении определенной и переопределенной систем, можно видеть, что в рассматриваемом примере существенного выигрыша в точности не произошло. Уменьшение относительной погрешности вычисления выходов при использовании критерия максимального правдоподобия составило не

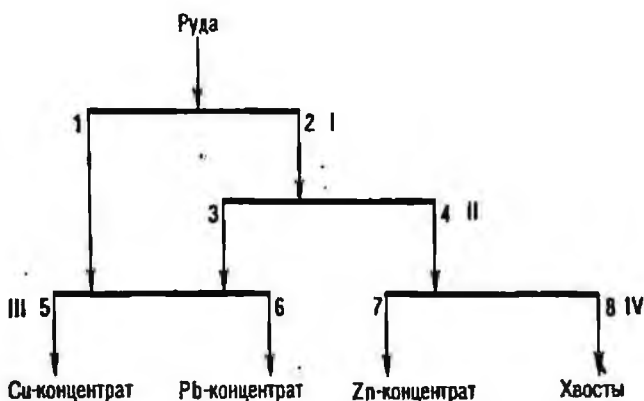


Рис. 2.7. Разветвленная схема обогащения полиметаллической руды

более 1,5 %. В то же время относительное изменение выходов достигает 16 %.

Отметим характерную особенность: несмотря на небольшие изменения выходов и содержаний, рассчитанные извлечения могут существенно отличаться. Так, если извлечения меди в медный концентрат при обоих вариантах расчета практически одинаковы (96,1 % и 96 %), то извлечения цинка в цинковый концентрат значительно отличаются друг от друга (66 % и 51,6 %).

Второй пример относится к технологическому процессу переработки полиметаллической руды. Фрагмент технологической схемы включает в себя два приема свинцово-медной флотации, свинцово-медное разделение и цинковую флотацию. Выходными продуктами схемы являются медный, свинцовый и цинковый концентраты, а также хвосты.

Разветвленная схема обогащения (рис. 2.7) так же, как и в предыдущем примере, состоит из четырех операций. В состав операции I входит первая стадия свинцово-медной флотации и три перечистки коллективного концентрата; в состав операции II — вторая стадия свинцово-медной флотации, контрольная флотация, три перечистки коллективного концентрата, основное и контрольное обесцинкование; в состав операции III — основная и контрольная медные флотации и три перечистки медного концентрата; в состав операции IV — основная и контрольная цинковые флотации и три перечистки цинкового концентрата.

Пронумеровав продукты в соответствии с принятыми правилами, составим технологическую матрицу

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

В каждом из продуктов измерены содержания меди, свинца и цинка, которые образуют матрицу

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} 6,7 & 2,3 & 14,1 & 0,27 & 30,1 & 2,3 & 0,9 & 0,15 & 2,5 \\ 28,7 & 4,2 & 25,0 & 0,56 & 4,0 & 39,1 & 1,5 & 0,25 & 5,1 \\ 6,6 & 12,2 & 5,9 & 13,40 & 1,7 & 8,6 & 59,1 & 0,60 & 12,5 \end{bmatrix},$$

а точность измерения характеризуется матрицей средних квадратических погрешностей

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,09 & 0,20 & 0,04 & 0,30 & 0,09 & 0,05 & 0,03 & 0,09 \\ 0,36 & 0,16 & 0,30 & 0,05 & 0,16 & 0,36 & 0,14 & 0,04 & 0,16 \\ 0,25 & 0,39 & 0,22 & 0,39 & 0,12 & 0,28 & 0,62 & 0,05 & 0,39 \end{bmatrix}.$$

Выход исходного питания как и прежде принят равным единице, а относительная погрешность его измерения равна 2 %.

Для составления определенной системы уравнений баланса достаточно контроля лишь одного металла, например, меди. Тогда, переходя последовательно от одной операции к другой, определим выходы всех продуктов обогащения. Для некоторого повышения точности решения целесообразно при определении выходов операции  $IV$  цинкового цикла использовать содержания цинка в ее входных и выходных продуктах. В этом случае матрица контроля содержаний будет иметь следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где первая строка соответствует измерениям содержания меди, а вторая — цинка.

Результаты решения полученной определенной системы уравнений приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Продукт	Выход $\gamma$ , доли ед.	Погрешность $\sigma(\gamma)$ , %
1	0,0455	62,27
2	0,9545	3,04
3	0,1401	7,21
4	0,8144	2,62
5	0,0667	3,77
6	0,1189	16,28
7	0,1793	4,15
8	0,6351	2,77
9	1,0000	0,67

Таблица 2.6

Продукт	Выход $\hat{\gamma}$ , доли ед.	Погрешность $\sigma(\hat{\gamma})$ , %
1	0,0350	19,87
2	0,9648	0,98
3	0,1426	3,59
4	0,8223	0,88
5	0,0665	2,62
6	0,1111	3,66
7	0,1824	2,37
8	0,6399	1,09
9	1,0000	0,67



Используя избыточную исходную информацию, полученную в результате измерений, рассчитаем выходы  $\hat{\gamma}$  по критерию максимального правдоподобия и оценим средние квадратические погрешности  $\sigma(\hat{\gamma})$  их вычисления (табл. 2.6).

Откорректированные значения содержаний металлов представлены матрицей

$$[\hat{\beta}_{ij}] = \begin{bmatrix} 6,71 & 2,34 & 14,14 & 0,30 & 30,03 & 2,29 & 0,89 & 0,134 & 2,50 \\ 28,75 & 4,18 & 25,16 & 0,54 & 3,98 & 38,96 & 1,54 & 0,261 & 5,04 \\ 6,60 & 12,38 & 5,89 & 13,50 & 1,70 & 8,62 & 59,11 & 0,500 & 12,17 \end{bmatrix},$$

а относительные поправки  $\delta_{ij}^{\text{отн}}$ , выраженные в процентах измеренных содержаний, представлены матрицей

$$[\delta_{ij}^{\text{отн}}] = \begin{bmatrix} 0,1 & 1,9 & 0,2 & 11,3 & -0,2 & -0,4 & -1,4 & -11,0 & -0,1 \\ 0,2 & -0,4 & 0,6 & -2,8 & -0,4 & -0,4 & 2,5 & 4,4 & -1,1 \\ 0 & -1,4 & 0,2 & 0,8 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0 & -2,6 \end{bmatrix}.$$

Как видно из приведенных данных, в отличие от первого примера, поправки содержаний значительно меньше. Лишь для продуктов 4 и 8 корректировка содержаний меди превышает 10 %, что же касается поправок содержаний свинца и цинка, то они не превышают 3 %.

Сравнивая между собой результаты, полученные при решении определенной и переопределенной систем, можно отметить, что в этом примере получен существенный выигрыш в точности. Значения средних квадратических погрешностей вычисления выходов значительно уменьшились для всех продуктов, причем это уменьшение было в пределах 1,5–4,5 раза.

Как и в первом примере, использование переопределенной системы уравнений привело к существенным отличиям рассчитанных извлечений по сравнению с традиционным подходом. Так, извлечения металлов в одноименные концентраты соответственно составили для меди 80,0 % и 80,3 %, для свинца 85,8 % и 91,2 %, а для цинка 88,6 % и 84,8 %.

Рассмотренные примеры показывают, что использование избыточной информации для решения задач расчета технологического баланса металлов всегда полезно, при этом показатели эффективности применения метода максимального правдоподобия по сравнению с традиционным подходом зависят от конкретных исходных данных.

Для второго примера рассчитан технологический баланс разветвленной схемы обогащения по квадратичному критерию. При этом получена матрица скорректированных содержаний

$$[\tilde{\beta}_{ij}] = \begin{bmatrix} 6,71 & 2,34 & 14,13 & 0,30 & 30,03 & 2,29 & 0,89 & 0,134 & 2,50 \\ 28,76 & 4,18 & 25,18 & 0,54 & 3,98 & 38,92 & 1,54 & 0,261 & 5,07 \\ 6,60 & 12,28 & 5,90 & 13,39 & 1,70 & 8,62 & 59,26 & 0,504 & 12,07 \end{bmatrix}$$

и вектор выходов

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0,0362, 0,9638, 0,1425, 0,8212, 0,0666, 0,1121, 0,1801, 0,6412, \\ 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая полученные результаты с соответствующими элементами матрицы  $[\hat{\beta}_{ij}]$  и вектора  $\hat{\gamma}$ , заметим, что скорректированные содержания и выходы отличаются не более, чем на 0,8 и 3 % относительных соответственно средние квадратические погрешности вычисления выходов не отличаются друг от друга.

Приведенный пример подтверждает возможность использования на практике квадратичного критерия для расчета технологического баланса.

## 2.6. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА

### Особенности расчета баланса при неодинаковом числе контролируемых компонентов

Рассмотренный выше метод решения задачи расчета технологического баланса по КМП для разветвленных технологических схем предполагает контроль одинакового числа компонентов во всех продуктах схемы. Однако в обогатительной практике такое требование не всегда выполняется, например: при стадийном обогащении многокомпонентных руд на каждой стадии часто контролируют только тот компонент, по которому ведется процесс; при наличии ценных компонентов-спутников их контролируют обычно в исходном сырье и конечных продуктах обогащения; при проведении в ряде операций дополнительных анализов продуктов обогащения, в частности, ситового, не характерных для других операций схемы обогащения, и т.д.

На рис. 2.8 приведен пример схемы обогащения с контролем двух основных компонентов и компонента-спутника, иллюстрирующий подобные ситуации.

Наличие таких особенностей исключает возможность использования максимального объема исходной информации о технологическом процессе при расчете баланса по схеме, описанной в разд. 2.3, что снижает достоверность результатов и уменьшает эффективность использования дорогостоящих данных.

Например, для ситуации, изображенной на рис. 2.8, возможны три варианта расчета баланса, сводимые к ранее рассмотренным случаям, каждый из которых характеризуется своей технологической схемой (рис. 2.9).

При расчете баланса по одному компоненту (см. рис. 2.9, а) из шестнадцати определяемых содержаний используется только семь, по двум компонентам (см. рис. 2.9, б) — десять и по трем (рис. 2.9, в) — двенадцать. Таким образом, как минимум 25 % исходной информации не

Рис. 2.8. Схема обогащения с разным числом контролируемых компонентов в продуктах:

○, ⊙, ● — точки контроля соответственно трех, двух и одного компонента

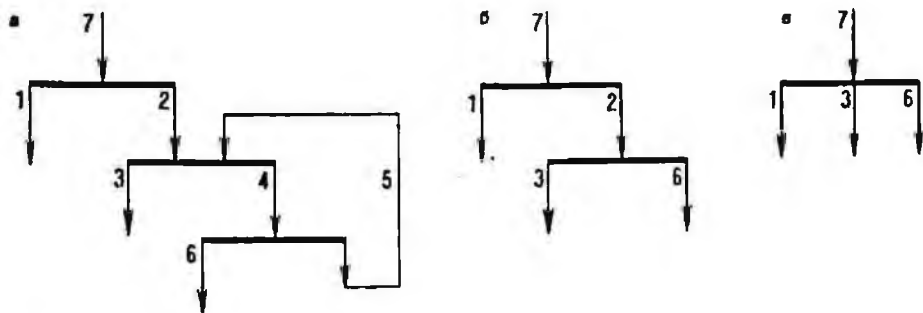
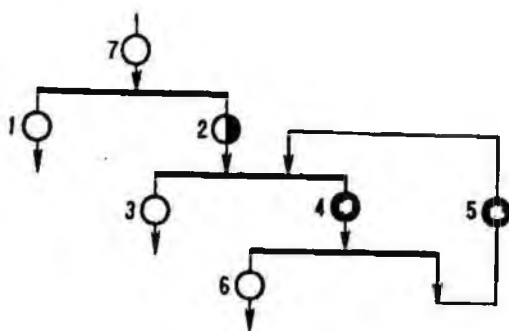


Рис. 2.9. Технологическая схема при расчете баланса металлов по одному (а), двум (б) и трем (в) компонентам

используется и, кроме того, расчеты по двум и трем компонентам не обеспечивают определение всех выходов продуктов для исходной схемы.

Подобные отрицательные явления свидетельствуют об ограниченности рассмотренного ранее подхода и необходимости распространения способов расчета баланса на более общую ситуацию контроля технологических параметров.

Заметим, что в этом случае исходная система уравнений баланса (2.8) является нелинейной относительно неизвестных параметров и труднорешаемой даже при наличии определенного набора данных.

Одним из преимуществ предложенной в разд. 2.3 схемы решения систем балансовых уравнений методом корректировок измеренных данных по КМП является существенное понижение размерности задачи оптимизации (от  $(m + 1)n$  переменных до  $n - 1$  переменной), которое достигается за счет предварительных аналитических преобразований. Однако в рассматриваемом случае этого непосредственно сделать не удастся, поскольку система уравнений относительно неизвестных корректировок и множителей Лагранжа (2.12), получающаяся при поиске относительного экстремума целевой функции, дополнительно содержит неизвестные содержания компонентов.

В работе [12] был предложен метод, позволяющий без потери общности исключить из системы балансовых уравнений те уравнения, которые содержат неизвестные содержания компонентов, и обеспечивающий поэтому эффективное решение исходной нелинейной задачи.

### Структурные преобразования технологических схем

Опишем процедуру преобразования системы уравнений баланса

$$\begin{cases} T \operatorname{diag} \beta_i Q = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \\ TQ = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Рассмотрим уравнение системы (2.44), содержащее неизвестную величину  $\beta_{ij}$  с ненулевым коэффициентом  $\tau_{ki}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{k1} \beta_{i1} Q_1 + \tau_{k2} \beta_{i2} Q_2 + \dots + \tau_{ki} \beta_{ii} Q_i + \dots + \\ + \tau_{kn} \beta_{in} Q_n = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Возможны два структурно различных положения  $i$ -го продукта: является внутренним продуктом технологической схемы и соединяет две операции, является входным или выходным для схемы.

Исключение из системы уравнений (2.44) неизвестного содержания, относящегося к внутреннему продукту, состоит в следующем. Поскольку в этом случае в системе имеется два уравнения, содержащих исключаемый параметр (одно составлено для операции, из которой продукт выходит, другое — для операции, в которую продукт входит), произведение  $\beta_{ii} Q_i$  в этих уравнениях имеет разные знаки. Поэтому, сложив левые и правые части этих уравнений, получим уравнение, не содержащее неизвестной величины  $\beta_{ii}$ .

Если  $i$ -й продукт является входным или выходным, то из системы (2.44) следует просто вычеркнуть данное уравнение.

Исключив для каждого компонента уравнения типа (2.45), получим новую систему уравнений, которая может быть представлена в том же виде, что и исходная:

$$T \operatorname{diag} \beta_i Q = 0 \Rightarrow T^{(i)} \operatorname{diag} \beta^{(i)} Q^{(i)} = 0.$$

Здесь  $T^{(i)}$ ,  $\beta^{(i)}$ ,  $Q^{(i)}$  — соответственно технологическая матрица, вектор содержащий  $i$ -го компонента и вектор масс продуктов для некоторой технологической схемы — подсхемы по  $i$ -му компоненту, построение которой осуществляется следующим образом.

Каждой операции исключения соответствует определенное преобразование технологической схемы, такие преобразования будем называть перестройками схемы. Если исключаемое содержание относится

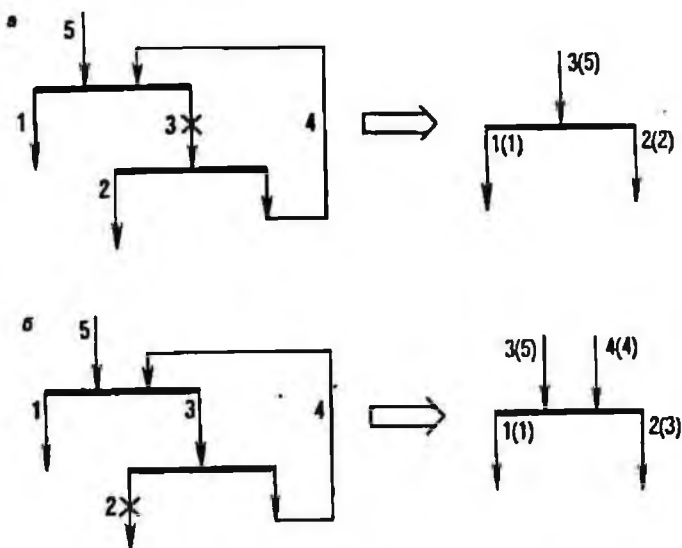


Рис. 2.10. Преобразование технологических схем:

*а* — удаление внутреннего продукта; *б* — удаление внешнего продукта; X — удаляемый продукт; цифры указывают номера продуктов (в скобках — номера продуктов в нумерации исходной схемы)

к внутреннему продукту, то перестройка заключается в объединении двух операций, связанных этим продуктом, в одну. Если при этом образуются рециклы некоторых продуктов в одной операции, то их также удаляют.

При исключении содержания, относящегося к входному или выходному продукту, удаляют все продукты, относящиеся к этой операции и являющиеся входными или выходными для технологической схемы, и операцию.

Примеры перестроек различного типа приведены на рис. 2.10.

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что система уравнений баланса по *i*-му компоненту после исключения какого-либо неизвестного содержания соответствует аналогичной системе для перестроенной схемы.

Связь между технологическими матрицами исходной и перестроенной схем в случае одной перестройки задается соотношением

$$T_n = S_n T_{in} R_n, \quad (2.46)$$

где  $T_{in}$ ,  $T_n$  — технологические матрицы исходной и перестроенной схемы;  $S_n$  —  $(\rho - 1) \times \rho$  матрица преобразований операций;  $R_n$  —  $n \times (n - 1 - l)$  матрица преобразования продуктов;  $l$  — число петель, получающихся в процессе перестройки, или число входных и выходных продуктов схемы, относящихся к данной операции (уравнению (2.45)), уменьшенное на единицу.

Элементы матриц  $S_n$  и  $R_n$  задаются следующими формулами:

$$s_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я операция полученной схемы образована слиянием} \\ & \text{двух операций исходной, в том числе } k\text{-й;} \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й продукт полученной схемы является} \\ & j\text{-м продуктом исходной;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для перестроек, показанных на рис. 2.10, соотношения (2.46) следующие.

Для случая а

$$[1, 1, -1] = [1, 1] \begin{bmatrix} 1, 0, 1, -1, -1 \\ 0, 1, -1, 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1 \end{bmatrix},$$

для случая б

$$[1, 1, -1, -1] = [1, 0] \begin{bmatrix} 1, 0, 1, -1, -1 \\ 0, 1, -1, 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

Из соотношений (2.46) легко найти связь между матрицами  $T$  и  $T^{(i)}$ :

$$T^{(i)} = S_i T R_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2.47)$$

где  $S_i$  и  $R_i$  получены следующим образом. Пусть последовательное преобразование технологической схемы, определяемой матрицей  $T$ , к схеме, соответствующей матрице  $T^{(i)}$ , осуществляется за конечное число перестроек  $t_j$ . Тогда в соответствии с соотношением (2.46) можно записать ряд равенств

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= T_n^{(t_i)} = S_n^{(t_i)} T_n^{(t_i-1)} R_n^{(t_i)} = \\ &= S_n^{(t_i)} (S_n^{(t_i-1)} T_n^{(t_i-2)} R_n^{(t_i-1)}) R_n^{(t_i)} = \dots = \\ &= S_n^{(t_i)} S_n^{(t_i-1)} \dots S_n^{(1)} T_n^{(0)} R_n^{(1)} R_n^{(2)} \dots R_n^{(t_i)} = S_i T R_i \end{aligned}$$

где  $T_n^{(l)}$  — технологическая матрица, полученная за  $l$  перестроек;  $S_n^{(l)}$ ,

$R_n^{(l)}$  — матрицы преобразований операции и продуктов в  $l$ -й перестройке.  
Из последнего равенства в этом ряду определяются  $S_i$  и  $R_i$ :

$$S_i = \prod_{k=i}^1 S_n^{(k)};$$

$$R_i = \prod_{k=1}^i R_n^{(k)}.$$

### Уравнения баланса и расчетные формулы

Используя процедуру, описанную в предыдущем подразделе, можно привести исходную систему балансовых уравнений (2.44) к виду

$$\begin{cases} T^{(i)} \text{diag } \beta^{(i)} Q^{(i)} = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \\ TQ = 0, \end{cases} \quad (2.48)$$

в которой все элементы векторов  $\beta^{(i)}$  известны. Таким образом она становится линейной относительно неизвестных масс продуктов и поиск ее решения методом корректировок измеренных данных по критерию максимального правдоподобия аналогичен приведенному в разд. 2.3 для случая, когда при всех  $i$   $T^{(i)} = T^*$ .

В итоге приходим к выражению функции  $u$  (2.17), которое в рассматриваемом случае запишется следующим образом:

$$u(Q) = \sum_{i=1}^m [Q^{(i)}]^T \text{diag } \beta^{(i)} T^{(i)T} A^{(i)-1} X \quad (2.49)$$

$$+ X T^{(i)} \text{diag } \beta^{(i)} Q^{(i)} + [\delta Q^{(0)}]^T [\sigma^{(0)}]^{-1} \delta Q^{(0)},$$

где  $A^{(i)}$ ,  $\sigma^{(i)}$  — соответственно аналоги  $A_p$ ,  $\sigma_p$ , а  $\beta^{(i)}$  и  $Q^{(i)}$  определены ранее.

Приведем функцию  $u$  к виду, явно зависящему только от вектора  $Q$ . Для этого заметим, что из формул (2.47) и определения матриц  $R_i$  следует справедливость соотношений

$$Q^{(i)} = R_i^T Q; \quad (2.50)$$

$$\text{diag } \beta^{(i)} = R_i^T \text{diag } \beta_i R_i.$$

Читатель, желающий непосредственно ознакомиться с соответствующими выкладками, может найти их в работе [12].

В формуле (2.49) рассмотрим выражение, стоящее под знаком суммы. Заменяя в нем по формулам (2.47) и (2.50) матрицы  $T^{(i)}$ ,  $\text{diag } \beta^{(i)}$  и векторы  $Q^{(i)}$  и учитывая очевидное равенство

$$R_i R_i^T \text{diag } \beta_i R_i R_i^T = R_i R_i^T \text{diag } \beta_i,$$

получаем

$$\begin{aligned} Q^{(i)T} \text{diag } \beta^{(i)} T^{(i)T} A^{(i)-1} T^{(i)} \text{diag } \beta^{(i)} Q^{(i)} = \\ = QR_i R_i^T \text{diag } \beta_i T^T S_i^T A S_i T \text{diag } \beta_i R_i R_i^T Q. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Для преобразования второго слагаемого введем матрицу  $R_0$ , связывающую вектор  $Q$  с вектором контролируемых по массе продуктов  $Q^{(0)}$ , соотношением

$$Q^{(0)} = R_0^T Q. \quad (2.52)$$

Подставляя во второе слагаемое равенства (2.49) выражение векторов корректировок  $\delta Q^{(0)}$  через вектора  $Q^{(0)}$  и  $Q^*$ , далее, заменяя согласно (2.52) вектор  $Q^{(0)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta Q^{(0)T} [\sigma^{(0)}]^{-1} \delta Q^{(0)} = Q^T R_0 [\sigma^{(0)}]^{-1} R_0 Q - \\ - 2 Q^{*T} [\sigma^{(0)}]^{-1} R_0^T Q + Q^{*T} [\sigma^{(0)}]^{-1} Q^*. \end{aligned} \quad (2.53)$$

С учетом выражений (2.51) и (2.53) получаем искомое представление целевой функции:

$$\begin{aligned} u(Q) = Q^T (Z_1 + Z_2) Q + 2B^T Q + C = \\ = Q^T A(Q) Q + 2B^T Q + C, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где

$$A = A(Q) = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^m R_i R_i^T \text{diag } \beta_i T^T S_i^T A^{(i)-1} S_i T \text{diag } \beta_i R_i R_i^T;$$

$$Z_2 = R_0 [\sigma^{(0)}]^{-1} R_0^T;$$

$$B = R_0 [\sigma^{(0)}]^{-1} Q^*;$$

$$C = Q^{*T} [\sigma^{(0)}]^{-1} Q^*.$$

Необходимо отыскать такой вектор масс продуктов  $Q$ , который бы минимизировал функцию  $u$  при ограничениях

$$TQ = 0. \quad (2.55)$$



Как и ранее данную задачу минимизации целевой функции с ограничениями можно привести к задаче отыскания безусловного минимума, выразив часть переменных  $Q$ , из уравнения (2.55). В итоге имеем вектор независимых выходов  $Q'$ , для которого

$$Q = PQ'. \quad (2.56)$$

Подставив в (2.54) выражение вектора  $Q$  через вектор  $Q'$ , получаем представление целевой функции для безусловной минимизации:

$$\begin{aligned} v(Q') &= u(PQ') = [Q']^T P^T A (PQ') - \\ &- 2B^T PQ' + C = [Q']^T A(Q')Q' - \\ &- 2B^T Q' + C, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$\tilde{A} = P^T A P, \quad \tilde{B} = P^T B.$$

После нахождения вектора  $\hat{Q}$  определяют корректировки измеренных содержаний  $\delta\beta^{(i)}$  (и скорректированные содержания  $\hat{\beta}^{(i)}$ ) по формулам, аналогичным (2.16). Но на этом решение задачи расчета баланса не заканчивают, поскольку остаются еще неопределенными те значения содержаний, которые были исключены в процессе структурных преобразований. Их легко находят из совокупности исключенных ранее уравнений, поскольку получаемая система линейна по отношению к ним (все величины  $Q$  определены).

По аналогии с описанным в разд. 2.4 выводится формула ковариационной матрицы скорректированных масс продуктов

$$\text{cov}(\hat{Q}, \hat{Q}) = P (P^T A P)^{-1} P^T. \quad (2.58)$$

Сформулируем теперь важное свойство, присущее решению задачи расчета баланса методом корректировок по КМП. Оно состоит в том, что при включении в систему контроля новых точек измерений повышается точность результатов.

Добавление к имеющейся схеме контроля дополнительных измерений масс продуктов и содержаний контролируемых компонентов в них влечет изменение целевой функции.

Это измерение заключается в добавлении аналогично сформированной функции, но для подсхем, определяемых дополнительными измерениями. Таким образом, матрица  $A$  из представления функции  $u$  для новой схемы контроля определится формулой

$$A_n = A_s + A_d$$

где  $A_n$ ,  $A_s$ ,  $A_d$  — указанные матрицы, соответственно, для новой, старой и дополнительной схем контроля. Матрица  $A_d$ , в общем случае, неотри-

цательно определенная, так как на дополнительную схему контроля не наложено условие полноты набора исходных данных.

Пусть  $\hat{Q}_n$  и  $\hat{Q}_s$  – векторы, полученные путем решения задачи расчета баланса при новой и старой схемах контроля. Тогда по формулам (2.58) получим ковариационные матрицы

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{Q}_n, \hat{Q}_n) &= P(P^T A_n P)^{-1} P^T; \\ \text{cov}(\hat{Q}_s, \hat{Q}_s) &= P(P^T A_s P)^{-1} P^T. \end{aligned}$$

Для сравнения диагоналей этих матриц напомним некоторые сведения из теории матриц. Обозначение  $X > Y$  ( $X \geq Y$ ) для двух симметричных матриц означает, что матрица  $X - Y$  положительно (неотрицательно) определенная. Если выполнено условие  $X > Y > 0$  ( $X \geq Y$ ), то  $Y^{-1} > X^{-1}$  ( $Y^{-1} \geq X$ ) [5].

Обозначим, по аналогии с ранее изложенным, скорректированные массы продуктов, выбранные в качестве независимых переменных и полученные при новой и старой схемах контроля,  $\hat{Q}'_n$  и  $\hat{Q}'_s$ .

Докажем сначала, что с увеличением числа контролируемых параметров дисперсии масс продуктов не возрастают, т.е. что

$$\sigma^2(\hat{Q}'_{nj}) \leq \sigma^2(\hat{Q}'_{sj}) \quad (j = \overline{1, n-p}). \quad (2.59)$$

В силу того, что  $A_n \geq A_s$ , выполняется неравенство  $\tilde{A}_n \geq \tilde{A}_s$ . Следовательно,

$$\tilde{A}'_n = \text{cov}(\hat{Q}'_n, \hat{Q}'_n) \leq \text{cov}(\hat{Q}'_s, \hat{Q}'_s) = \tilde{A}'_s, \quad (2.60)$$

что и доказывает неравенство (2.59), так как диагональные элементы положительно (неотрицательно) определенной матрицы положительны (неотрицательны).

Заметим, что если матрица  $A_d$  – положительно определенная, то неравенство (2.59) будет строгим. Такая ситуация, в частности, выполняется при увеличении числа контролируемых компонентов во всех продуктах технологической схемы.

В случае, если  $A_d$  – неотрицательно определенная матрица, можно доказать, что для некоторых продуктов технологической схемы неравенство (2.59) будет строгим.

Из доказанного, в частности, следует, что дисперсия скорректированных значений не больше, чем измеренных. Если исключение выбранного параметра не влечет потерю полноты исходных данных, то можно доказать, что дисперсия скорректированного значения строго меньше дисперсии измеренного. Таким образом, решение задачи расчета баланса по методу максимального правдоподобия уточняет измеренные параметры.

## СОСТАВЛЕНИЕ И РАСЧЕТ ТОВАРНОГО БАЛАНСА МЕТАЛЛОВ

3.1. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА БАЛАНСА  
НА ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ ФАБРИКАХПорядок составления товарного баланса на обогатительных  
фабриках

Товарный баланс на обогатительной фабрике предназначен для определения итоговых данных о количестве и качестве поступивших и переработанных руд и другого металлосодержащего сырья, выпущенных товарных концентратов, отвальных хвостов и других продуктов обогащения. Его составляют по данным массового учета исходного сырья, продуктов обогащения, остатков незавершенного производства, механических потерь и содержания в них полезных компонентов за отчетный период времени. Он является основой технико-экономической оценки работы обогатительной фабрики за этот период и более длительные промежутки времени. В качестве основного отчетного периода принят месяц, в некоторых случаях для более оперативной оценки работы фабрики составляют, как вспомогательный, товарный баланс за декаду.

Измерение массы и содержания полезных компонентов в продуктах, фиксируемых в балансе, систематически осуществляют в течение отчетного периода. Причем периодичность измерений для разных продуктов различна: массу и качество остатков незавершенного производства определяют в начале и конце месяца, а те же параметры товарных концентратов — по мере отгрузки и т.п.

На примере простейшей схемы обогатительной фабрики — руда, концентрат, хвосты (рис. 3.1) — рассмотрим проблему, которую приходится решать ее персоналу в конце отчетного периода.

Пусть  $Q_p$ ,  $Q_k$ ,  $Q_{хв}$  — массы соответственно переработанной руды, выпущенного концентрата и отвальных хвостов за отчетный период, определенные путем накопления (суммирования) данных оперативного учета, а  $M_{i,p}$ ,  $M_{i,k}$ ,  $M_{i,хв}$  — массы  $i$ -го компонента соответственно в руде, концентрате и хвостах.

Согласно закону сохранения вещества, должно выполняться равенство масс продуктов и компонентов в них на входе и выходе, однако в

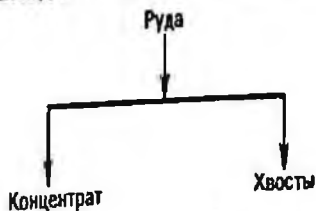


Рис. 3.1. Укрупненная блок-схема обогатительной фабрики

действительности разность между ними отлична от нуля, т.е.

$$Q_p - Q_k - Q_{xв} = \Delta_0;$$

$$M_{i,p} - M_{i,k} - M_{i,xв} = \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

где  $\Delta_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ) — невязки баланса, имеющие ненулевые значения.

Причин появления невязок несколько. Во-первых, данные, используемые при составлении баланса, получены в результате измерений. Поэтому вследствие неизбежных погрешностей измерений массы определяются неточно, что и обуславливает нарушение (разрыв) баланса. Во-вторых, на обогатительных предприятиях имеются каналы утечки минерального сырья — механические потери, которые, как правило, не обеспечены средствами опробования и анализа. Обычно при нормальной работе предприятия механические потери либо пренебрежимо малы, либо достаточно точно могут быть учтены при составлении баланса. Однако при грубых нарушениях технологии (аварийных ситуациях) эти потери могут быть значительными и вызвать заметное отклонение невязок баланса от нуля.

Имеются два варианта последующих действий при разрыве баланса.

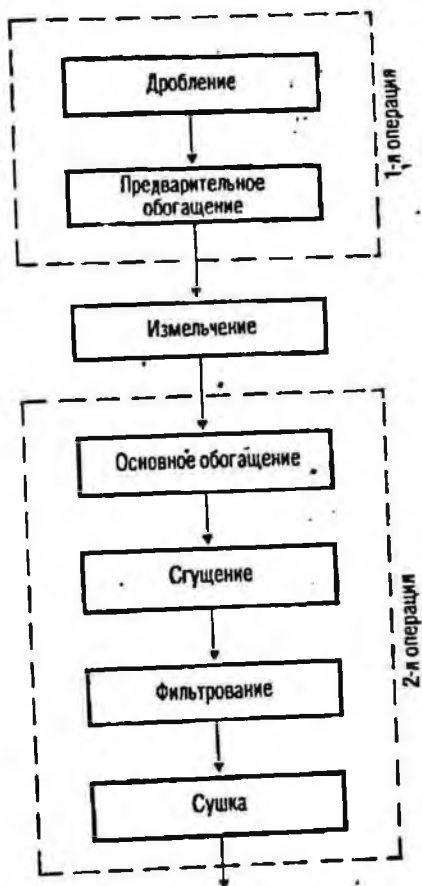
В соответствии с первым из них рекомендуется в отчете о работе обогатительной фабрики, составляемом на основе баланса, приводить итоговые данные оперативного учета и указывать фактические невязки баланса. Такой подход имеет существенный недостаток — затруднена дальнейшая интерпретация результатов, поскольку без дополнительного анализа неясно, являются ли невязки баланса следствием нарушения технологических режимов или же ошибок учета минерального сырья?

В соответствии со вторым вариантом предусматривается в конце отчетного периода корректировать данные оперативного учета таким образом, чтобы устранить невязки баланса. На этом подходе основаны нормативные материалы, регламентирующие порядок составления и расчета товарного баланса в цветной металлургии. Таким образом, расчет товарного баланса представляет собой последовательность вычислительных операций с целью сведения товарного баланса, т.е. определения сбалансированных значений масс продуктов, фиксируемых в балансе, и металлов в них. Этот процесс разбивается на два этапа: первый из них заключается в определении масс продуктов и компонентов в них путем накопления (суммирования) данных оперативного учета, второй — состоит в определении невязок баланса и последующем устранении их путем корректировок накопленных данных.

Проведем декомпозицию схемы обогащения фабрики с целью составления технологической схемы для математического расчета баланса.

Процесс обогащения полезного ископаемого в общем случае проводится в следующей последовательности: дробление, предварительное обогащение, измельчение, основное обогащение, сгущение, фильтрование

Рис. 3.2. Основные стадии процесса обогащения



и сушка (рис. 3.2). На каждом конкретном предприятии возможно исключение из этой цепочки некоторых переделов, но порядок их очередности сохраняется. Для оценки работы фабрики в целом основное значение имеет функционирование двух обогатительных участков — предварительного и основного обогащений. Поэтому в расчете товарного баланса технологическая схема в наиболее укрупненном виде выглядит так, как показано на рис. 3.3. Каждый продукт этой схемы условно обозначает совокупность группы реальных физических потоков,

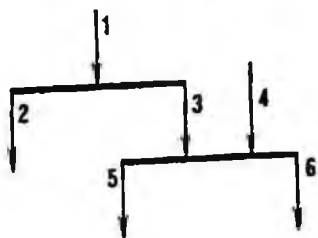


Рис. 3.3. Укрупненная технологическая схема обогатительной фабрики для расчета товарного баланса

действительности разность между ними отлична от нуля, т.е.

$$Q_p - Q_k - Q_{xв} = \Delta_0;$$

$$M_{i,p} - M_{i,k} - M_{i,xв} = \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

где  $\Delta_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ) — невязки баланса, имеющие ненулевые значения.

Причин появления невязок несколько. Во-первых, данные, используемые при составлении баланса, получены в результате измерений. Поэтому вследствие неизбежных погрешностей измерений массы определяются неточно, что и обуславливает нарушение (разрыв) баланса. Во-вторых, на обогатительных предприятиях имеются каналы утечки минерального сырья — механические потери, которые, как правило, не обеспечены средствами опробования и анализа. Обычно при нормальной работе предприятия механические потери либо пренебрежимо малы, либо достаточно точно могут быть учтены при составлении баланса. Однако при грубых нарушениях технологии (аварийных ситуациях) эти потери могут быть значительными и вызвать заметное отклонение невязок баланса от нуля.

Имеются два варианта последующих действий при разрыве баланса.

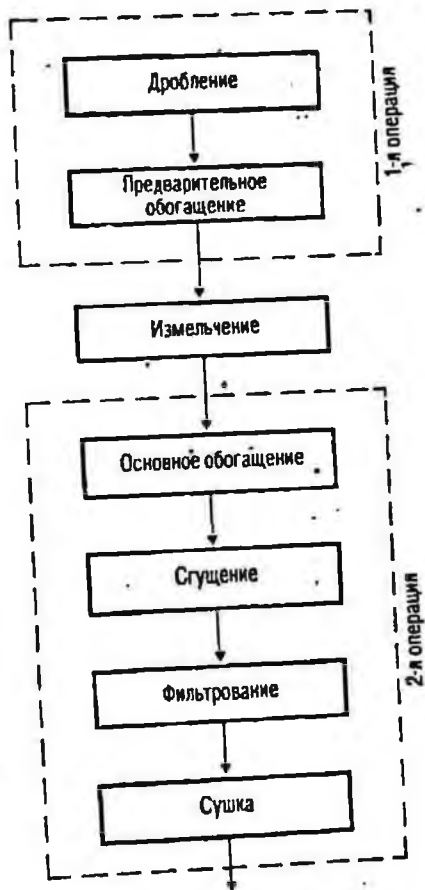
В соответствии с первым из них рекомендуется в отчете о работе обогатительной фабрики, составляемом на основе баланса, приводить итоговые данные оперативного учета и указывать фактические невязки баланса. Такой подход имеет существенный недостаток — затруднена дальнейшая интерпретация результатов, поскольку без дополнительного анализа неясно, являются ли невязки баланса следствием нарушения технологических режимов или же ошибок учета минерального сырья?

В соответствии со вторым вариантом предусматривается в конце отчетного периода корректировать данные оперативного учета таким образом, чтобы устранить невязки баланса. На этом подходе основаны нормативные материалы, регламентирующие порядок составления и расчета товарного баланса в цветной металлургии. Таким образом, расчет товарного баланса представляет собой последовательность вычислительных операций с целью сведения товарного баланса, т.е. определения сбалансированных значений масс продуктов, фиксируемых в балансе, и металлов в них. Этот процесс разбивается на два этапа: первый из них заключается в определении масс продуктов и компонентов в них путем накопления (суммирования) данных оперативного учета, второй — состоит в определении невязок баланса и последующем устранении их путем корректировок накопленных данных.

Проведем декомпозицию схемы обогащения фабрики с целью составления технологической схемы для математического расчета баланса.

Процесс обогащения полезного ископаемого в общем случае проводится в следующей последовательности: дробление, предварительное обогащение, измельчение, основное обогащение, сгущение, фильтрование

Рис. 3.2 Основные стадии процесса обогащения



и сушка (рис. 3.2). На каждом конкретном предприятии возможно исключение из этой цепочки некоторых переделов, но порядок их очередности сохраняется. Для оценки работы фабрики в целом основное значение имеет функционирование двух обогатительных участков — предварительного и основного обогащений. Поэтому в расчете товарного баланса технологическая схема в наиболее укрупненном виде выглядит так, как показано на рис. 3.3. Каждый продукт этой схемы условно обозначает совокупность группы реальных физических потоков,

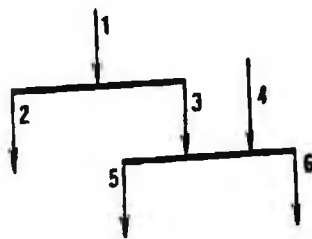


Рис. 3.3 Укрупненная технологическая схема обогатительной фабрики для расчета товарного баланса

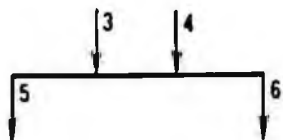


Рис. 3.4. Преобразованная укрупненная схема обогатительной фабрики для расчета товарного баланса при отсутствии головного опробования

определенным образом связанных с операциями предварительного и основного обогащения.

К первой группе относятся поступившие на обогатительную фабрику руды, а также остатки руды на складах и в бункерах, накопленные на начало месяца. Вторую группу составляют продукты, исключаемые из технологического процесса после предварительного обогащения, а также остатки руды на складах и в бункерах, накопленные к концу месяца. Третья и четвертая группы продуктов — это продукты, соответственно прошедшие или не прошедшие операцию предварительного обогащения и поступившие в основной цикл обогащения или непосредственно, либо через измельченный передел. К четвертой группе относятся также остатки незавершенного производства на начало месяца. В пятую группу входят полученные в результате основного обогащения концентраты, остатки незавершенного производства на конец месяца и механические потери, а в шестую — отвальные хвосты.

При организации контроля технологических параметров (масс продуктов и содержаний компонентов) необходимо учесть, что продукты каждой группы имеют свои особенности. Например, содержание компонентов в поступившей руде с требуемой для баланса точностью можно определить лишь на специальной установке головного опробования, которая не везде есть. В связи с этим на большинстве фабрик содержание компонентов в продуктах первой группы не контролируют.

Из отмеченного следует, что при сведении товарного баланса в общем случае необходимо решить задачу расчета баланса разветвленной технологической схемы при неодинаковом наборе измеренных технологических параметров различных продуктов.

На практике при отсутствии результатов головного опробования эту задачу упрощают, приводя ее к задаче расчета баланса технологической операции следующим образом. Вначале для продуктов первой, второй и третьей групп находят сбалансированные значения масс продуктов, которые принимают за окончательные. Далее, изменив значения масс продуктов третьей группы, полученные на основе оперативного учета, найденными на первом этапе упрощения, решают задачу расчета баланса для схемы, указанной на рис. 3.4 и являющейся технологической операцией.

Именно эта задача и является в настоящее время основной при сведении товарного баланса на обогатительных фабриках.



## Допустимая невязка

Корректировка данных оперативного учета с целью устранения невязок баланса обоснована только тогда, когда имеется фактический баланс между массами компонентов и твердого на входе и выходе обогатительной фабрики, нарушаемый для рассматриваемой модели в случае наличия значительного количества неучтенных механических потерь. Однако причиной появления невязок могут быть не только неучтенные механические потери, но и погрешности измерений.

Для оценки влияния этих двух факторов на имеющиеся невязки баланса необходим дополнительный анализ как работы предприятия (нарушения технологии, аварии), так и средств измерений технологических параметров (систематические погрешности, отказы и т.п.) за отчетный период.

Один из элементов такого анализа — оценка фактических невязок баланса для определения аномальных ситуаций.

В настоящее время в цветной металлургии принят следующий порядок. Если фактическая невязка по какому-либо компоненту превышает 2 % массы этого компонента в руде или в течение 3 мес. сохраняет знак, то ситуацию считают аномальной и создают специальную комиссию, определяющую причины разрыва баланса.

Такой подход нельзя считать удачным, поскольку он не отражает специфики технологии обогащения и системы контроля параметров конкретной обогатительной фабрики. В частности, для одних обогатительных фабрик 1 %-ная невязка баланса — явление аномальное, а для других — 2,5 %-ная невязка является нормой.

Анализ разрыва баланса с использованием теории оценивания, учитывающий специфику технологии и контроля, был проведен в Механобре [7]. Близкий подход к этому вопросу был высказан также в работе [6].

При изложении методики оценки невязок баланса будем исходить из следующих предположений: все механические потери на обогатительной фабрике либо учитываются средствами измерений, либо пренебрежимо малы; отсутствуют систематические погрешности при определении исходных данных для составления товарного баланса, известны все погрешности измерений технологических параметров.

Рассмотрим простейшую схему обогатительной фабрики, представленную на рис. 3.1.

Пусть:  $m$  — число контролируемых компонентов;  $N$  — число рабочих смен в отчетном периоде;  $\tilde{Q}_p^{(i)}$ ,  $\tilde{Q}_k^{(i)}$  — массы соответственно переработанной руды и выпущенного концентрата за  $i$ -ую смену;  $Q_p^{(i)}$ ,  $Q_k^{(i)}$ ,  $Q_{xв}^{(i)}$  — массы твердого соответственно в руде, концентрате и хвостах за  $i$ -ую смену;  $\beta_{i,p}^{(i)}$ ,  $\beta_{i,k}^{(i)}$ ,  $\beta_{i,xв}^{(i)}$  — содержания  $i$ -го компонента соответственно в руде, концентрате и хвостах за  $i$ -ую смену;  $M_{i,p}^{(i)}$ ,  $M_{i,k}^{(i)}$ ,  $M_{i,xв}^{(i)}$  — масса  $i$ -го контролируемого компонента соответственно в руде,

концентрате и хвостах за  $l$ -ую смену;  $\rho_{i,p}^{(l)}$ ,  $\rho_{i,k}^{(l)}$  — содержание твердого соответственно в руде и концентрате за  $l$ -ую смену;  $\bar{\sigma}(\cdot)$  — относительное среднее квадратическое отклонение соответствующей величины\*.

Фактические невязки баланса за месяц в принятых обозначениях, согласно выражению (3.1), определяют формулами:

$$\Delta_0 = \sum_{l=1}^N \left\{ Q_p^{(l)} - Q_k^{(l)} - Q_{xв}^{(l)} \right\};$$

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^N \left\{ M_{i,p}^{(l)} - M_{i,k}^{(l)} - M_{i,xв}^{(l)} \right\} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Массы твердого и компонентов в продуктах вследствие погрешностей измерений являются случайными, и следовательно, фактические невязки  $\Delta_i$  также являются случайными величинами, распределение которых близко к нормальному с нулевым средним и дисперсиями, равными

$$D(\Delta_0) = D\left(\sum_{l=1}^N \left\{ Q_p^{(l)} - Q_k^{(l)} - Q_{xв}^{(l)} \right\}\right) = \sum_{l=1}^N \left\{ D(Q_p^{(l)}) + D(Q_k^{(l)}) + D(Q_{xв}^{(l)}) \right\};$$

$$D(\Delta_i) = D\left(\sum_{l=1}^N \left\{ M_{i,p}^{(l)} - M_{i,k}^{(l)} - M_{i,xв}^{(l)} \right\}\right) = \sum_{l=1}^N \left\{ D(M_{i,p}^{(l)}) + D(M_{i,k}^{(l)}) + D(M_{i,xв}^{(l)}) \right\} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3.2)$$

Поскольку

$$Q_p^{(l)} = \frac{1}{100} \rho_p^{(l)} \tilde{Q}_p^{(l)}; \quad Q_k^{(l)} = \frac{1}{100} \rho_k^{(l)} \tilde{Q}_k^{(l)};$$

$$M_{i,p}^{(l)} = \frac{1}{100^2} \beta_{i,p}^{(l)} \rho_p^{(l)} \tilde{Q}_p^{(l)}; \quad M_{i,k}^{(l)} = \frac{1}{100^2} \beta_{i,k}^{(l)} \rho_k^{(l)} \tilde{Q}_k^{(l)};$$

$$M_{i,xв}^{(l)} = \frac{1}{100} \beta_{i,xв}^{(l)} Q_{xв}^{(l)} \quad (i = \overline{1, m})$$

(здесь содержания выражены в процентах, а массы — в тоннах), дисперсии этих величин можно записать в следующем виде:

$$D(Q_p^{(l)}) = [Q_p^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\rho_p^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_p^{(l)})];$$

$$D(Q_k^{(l)}) = [Q_k^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\rho_k^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_k^{(l)})];$$

$$D(M_{i,p}^{(l)}) = [M_{i,p}^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\beta_{i,p}^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\rho_p^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_p^{(l)})] \quad (i = \overline{1, m});$$

\*Для хвостов непосредственно из расчета технологического баланса определяют массу твердого  $Q_{xв}^{(l)}$ .

$$D(M_{i,k}^{(i)}) = [M_{i,k}^{(i)}]^2 [\sigma^2(\beta_{i,k}^{(i)}) + \sigma^2(\rho_k^{(i)}) + \sigma^2(\tilde{Q}_k^{(i)})] \quad (i = \overline{1, m});$$

$$D(M_{i,x_b}^{(i)}) = [M_{i,x_b}^{(i)}]^2 [\sigma^2(\beta_{i,x_b}^{(i)}) + \sigma^2(Q_{x_b}^{(i)})] \quad (i = \overline{1, \overline{m}}).$$

Дисперсию  $\sigma^2(Q_{x_b}^{(i)})$  определяют согласно формулам (2.35) из расчета технологического баланса.

Подставляя полученные выражения в формулы (3.2), получаем следующие формулы дисперсий невязок баланса:

$$D(\Delta_0) = \sum_{i=1}^N \left\{ [Q_p^{(i)}]^2 [\sigma^2(\rho_p^{(i)}) + \sigma^2(\tilde{Q}_p^{(i)})] + [Q_k^{(i)}]^2 [\sigma^2(\rho_k^{(i)}) + \sigma^2(\tilde{Q}_k^{(i)})] + [Q_{x_b}^{(i)}]^2 \sigma^2(Q_{x_b}^{(i)}) \right\}; \quad (3.3)$$

$$D(\Delta_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ [M_{i,p}^{(i)}]^2 [\sigma^2(\beta_{i,p}^{(i)}) + \sigma^2(\rho_p^{(i)}) + \sigma^2(\tilde{Q}_p^{(i)})] + [M_{i,k}^{(i)}]^2 [\sigma^2(\beta_{i,k}^{(i)}) + \sigma^2(\rho_k^{(i)}) + \sigma^2(\tilde{Q}_k^{(i)})] + [M_{i,x_b}^{(i)}]^2 [\sigma^2(\beta_{i,x_b}^{(i)}) + \sigma^2(Q_{x_b}^{(i)})] \right\} \quad (i = \overline{1, \overline{m}}).$$

После вычисления дисперсий  $D(\Delta_i)$  можно получить для заданной вероятности  $P$  (стандартное значение  $P$  для интимальных задач равно 0,954) доверительный интервал, в котором с этой вероятностью должна находиться фактическая невязка, т.е.

$$|\Delta_i| < K\sqrt{D(\Delta_i)} \quad (i = \overline{0, \overline{m}}),$$

где коэффициент  $K$  зависит от вероятности  $P$  (для  $P = 0,954$   $K = 2$ ).

Половину длины доверительного интервала для фактической невязки назовем допустимой невязкой и обозначим  $\Delta_i^{доп}$ . Очевидно, что

$$\Delta_i^{доп} = K\sqrt{D(\Delta_i)}. \quad (3.4)$$

Таким образом, с вероятностью не меньшей  $P$  модуль фактической невязки баланса должен попадать в интервал  $(0, \Delta_i^{доп})$ . Если вероятность  $P$  близка к единице, то попадания модуля фактической невязки за указанные пределы — событие маловероятное, на которых был основан расчет вероятности  $P(\Delta)$ . Эти нарушения, в частности, могут выразиться в фактическом наличии неучтенных механических потерь, систематических нарушениях пределов измерений и погрешной оценке точности производимых измерений.

Следовательно, сравнение фактической невязки с допустимой является инструментом, позволяющим выделять аномальные ситуации при расчете баланса и учитывать особенности технологии и контроля параметров на обогатительной фабрике.

Для более сложных схем обогащения допустимые невязки подсчитывают аналогично.

### 3.2. МЕТОДЫ СВЕДЕНИЯ ТОВАРНОГО БАЛАНСА

Методы сведения товарного баланса для технологической операции при контроле только одного компонента во всех продуктах

Обозначим через  $n$  общее число входных и выходных продуктов технологической операции. Пусть  $Q_j$  — измеренная масса  $j$ -го продукта;  $\beta_j$  — измеренное содержание компонента в  $j$ -ом продукте;  $M_j$  — масса компонента в  $j$ -м продукте, рассчитанная через измеренные данные по формуле

$$M_j = \beta_j Q_j; \quad (3.5)$$

$Q_j^*$ ,  $\beta_j^*$ ,  $M_j^*$  — истинные значения величин  $Q_j$ ,  $\beta_j$ ,  $M_j$  соответственно.

В этих обозначениях уравнения материального баланса, выражающие равенства масс продуктов и контролируемого компонента в них на входе и выходе операции, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tau_j Q_j^* &= 0; \\ \sum_{j=1}^n \tau_j M_j^* &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\tau_j$  — коэффициент, равный +1 и -1 в зависимости от того, является ли  $j$ -й продукт выходным или входным для технологической операции.

Поскольку истинные значения масс продуктов и содержаний компонентов неизвестны, а значения  $Q_j$  и  $\beta_j$  измерены со случайными погрешностями, после подстановки в уравнения (3.6) вместо истинных значений  $Q_j^*$  и  $M_j^*$  величин  $Q_j$  и  $M_j$  появляются невязки баланса

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tau_j Q_j &= \Delta_0; \\ \sum_{j=1}^n \tau_j M_j &= \Delta_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На этапе сведения товарного баланса его невязки устраняют корректировкой всех измеренных значений  $Q_j$  и  $\beta_j$  и в результате — корректи-

ровкой масс продуктов  $Q_j$  и масс контролируемого компонента  $M_j$ . Обозначим соответствующие скорректированные значения через  $\tilde{Q}_j$ ,  $\tilde{M}_j$  и представим их в виде суммы измеренных величин и корректировок:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_j &= Q_j + \delta Q_j; \\ \tilde{M}_j &= M_j + \delta M_j.\end{aligned}\tag{3.8}$$

где  $\delta Q_j$  и  $\delta M_j$  — корректировки  $Q_j$  и  $M_j$ .

Исходя из требования сбалансированности скорректированных величин, подставляя равенства (3.8) в систему уравнений (3.7), получаем соотношения, которым должны удовлетворять неизвестные корректировки:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \tau_j \delta Q_j &= -\Delta_0; \\ \sum_{j=1}^n \tau_j \delta M_j &= -\Delta_1.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Таким образом, корректировки являются функциями невязок баланса  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ :

$$\begin{aligned}\delta Q_j &= \varphi_{0j}(\Delta_0, \Delta_1); \\ \delta M_j &= \varphi_{1j}(\Delta_0, \Delta_1).\end{aligned}$$

Очевидно, что функции  $\varphi_{ij}$  равны нулю в точке  $(0, 0)$ . Поэтому, раскладывая их в ряд Тэйлора по степеням корректировок  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  и оставляя главную часть разложения, получаем следующее представление для искомых корректировок:

$$\begin{aligned}\delta Q_j &= \nu_{0j}^{(0)} \Delta_0 + \nu_{1j}^{(0)} \Delta_1; \\ \delta M_j &= \nu_{0j}^{(1)} \Delta_0 + \nu_{1j}^{(1)} \Delta_1,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где  $\nu_{ij}^{(l)}$  — некоторые постоянные коэффициенты, по существу определяющие способ сведения баланса.

Нетрудно проверить, что коэффициенты  $\nu_{ij}^{(l)}$  должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \nu_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0, & l \neq i \\ -1, & l = i. \end{cases}\tag{3.11}$$

Действительно, если подставить выражения корректировок (3.10) в систему уравнений (3.9) и привести подобные члены, то получим

систему уравнений относительно  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ :

$$\begin{cases} \left( \sum_{j=1}^n \tau_j v_{0j}^{(0)} \right) \Delta_0 + \left( \sum_{j=1}^n \tau_j v_{1j}^{(0)} \right) \Delta_1 = -\Delta_0 \\ \left( \sum_{j=1}^n \tau_j v_{0j}^{(1)} \right) \Delta_0 + \left( \sum_{j=1}^n \tau_j v_{1j}^{(1)} \right) \Delta_1 = -\Delta_1, \end{cases} \quad (3.12)$$

которая должна быть справедлива при любых  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ . Последнее возможно тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.11).

Для последующего изложения удобно представить полученные формулы в векторно-матричном виде.

Введем вектора

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad \delta Q = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \\ \vdots \\ \delta Q_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}, \quad \delta M = \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \vdots \\ \delta M_n \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix}$$

и матрицы

$$v_0 = \begin{bmatrix} v_{01}^{(0)} & v_{11}^{(0)} \\ v_{02}^{(0)} & v_{12}^{(0)} \\ \dots & \dots \\ v_{0n}^{(0)} & v_{1n}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} v_{01}^{(1)} & v_{11}^{(1)} \\ v_{02}^{(1)} & v_{12}^{(1)} \\ \dots & \dots \\ v_{0n}^{(1)} & v_{1n}^{(1)} \end{bmatrix}$$

В таких обозначениях формулы (3.10) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta Q &= v_0 \Delta; \\ \delta M &= v_1 \Delta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Рассмотрим на простейшем примере технологической схемы (см. рис. 3.1) способ сведения баланса, используемый в цветной металлургии. При сведении товарного баланса руководствуются следующими положениями. Вначале определяют массу отвальных хвостов, как разность между массой исходной руды и концентрата, т.е. всю невязку относят на соответствующее изменение массы хвостов и в дальнейшем полученные результаты не подвергают никаким преобразованиям. Затем устанавливают баланс по металлу, при этом поступают так: в случае недостачи металла в продуктах обогащения невязку рас-

пределяют пропорционально между исходной рудой и хвостами, причем в руде необходимо уменьшить, а в хвостах соответственно увеличить массу металла; при избытке металла в продуктах обогащения всю невязку относят на увеличение массы содержания металла в руде.

Указанная процедура математически задается двумя способами. Если обозначить концентрат, хвосты и руду соответственно первым, вторым и третьим продуктом, то при недостатке металла ( $\Delta_1 < 0$ )

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_2}{M_2+M_3} \\ 0 & \frac{M_3}{M_2+M_3} \end{bmatrix},$$

а при его избытке ( $\Delta_1 > 0$ )

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Естественно, что в обоих случаях

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Корректировки масс продуктов  $\delta Q$  и металлов  $\delta M$  определяем согласно формулам (3.13):

$$\delta Q = \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \\ \delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta_0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\delta M = \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \delta M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_2}{M_2+M_3} \\ 0 & -\frac{M_3}{M_2+M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M_2}{M_2+M_3} \Delta_1 \\ \frac{M_3}{M_2+M_3} \Delta_1 \end{bmatrix} \text{ при } (\Delta_1 < 0),$$

$$\text{или } \delta M = \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \delta M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \end{bmatrix} \quad \text{при } (\Delta_1 > 0).$$

Изложенный в предыдущих главах метод корректировок измеренных данных по КМП может быть с успехом применен и для решения задачи сведения товарного баланса. Причем вследствие особенности исходных данных (все массы продуктов и содержания компонентов измерены) удастся существенно упростить решение задачи, исключив из него этап минимизации функции многих переменных. Покажем это на примере сведения товарного баланса технологической операции при контроле только одного компонента.

Пусть, как и раньше, корректировки масс продуктов  $Q_j$  обозначены через  $\delta Q_j$ , а корректировки измеренных содержаний  $\beta_{ij}$  — через  $\delta \beta_{ij}$ . Обозначим скорректированные по КМП значения  $Q_j$  и  $\beta_j$  через  $\hat{Q}_j$  и  $\hat{\beta}_j$  и представим их в виде суммы измеренных величин и корректировок:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_j &= Q_j + \delta Q_j; \\ \hat{\beta}_j &= \beta_j + \delta \beta_j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу того, что скорректированные значения  $\hat{Q}_j$  и  $\hat{\beta}_j$  должны удовлетворять балансовым уравнениям (3.6), имеем

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_j (Q_j + \delta Q_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^n \tau_j (\beta_j Q_j + \beta_j \delta Q_j + \delta \beta_j Q_j + \delta \beta_j \delta Q_j) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Если опустить члены с произведением корректировок  $\delta \beta_j \delta Q_j$ , считая их при переходе к относительным величинам достаточно малыми, то с учетом системы (3.7) получим

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_j \delta Q_j = -\Delta_0 \\ \sum_{j=1}^n \tau_j (\beta_j \delta Q_j + Q_j \delta \beta_j) = -\Delta_1. \end{cases} \quad (3.16)$$

При решении задачи расчета баланса по КМП наиболее достоверными считаются такие корректировки, при которых достигается наибольшее значение функции правдоподобия или, что то же самое, наименьшее значение логарифмической функции правдоподобия



$$L = \sum_{j=1}^n \frac{[\delta\beta_j]^2}{\sigma^2(\beta_j)} + \sum_{j=1}^n \frac{[\delta\alpha_j]^2}{\sigma^2(\alpha_j)}, \quad (3.17)$$

где  $\sigma(\beta_j)$  и  $\sigma(\alpha_j)$  — средние квадратические отклонения величин  $\beta_j$  и  $\alpha_j$ .

Для решения этой задачи на относительный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа с учетом системы (3.16) запишется следующим образом:

$$\Phi = L - 2\lambda_0 \sum_{j=1}^n \tau_j \delta\alpha_j - 2\lambda_1 \sum_{j=1}^n \tau_j (\beta_j \delta\alpha_j + \alpha_j \delta\beta_j).$$

Необходимые условия экстремума определяют следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta \alpha_j} = \frac{2\delta \alpha_j}{\sigma^2(\alpha_j)} - 2\lambda_0 \tau_j - 2\lambda_1 \tau_j \beta_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta \beta_j} = \frac{2\delta \beta_j}{\sigma^2(\beta_j)} - 2\lambda_1 \tau_j \alpha_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

из которой легко находятся выражения корректировок через множители Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_j &= \sigma^2(\alpha_j) \tau_j [\lambda_0 + \beta_j \lambda_1]; \\ \delta \beta_j &= \sigma^2(\beta_j) \tau_j \alpha_j \lambda_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Чтобы определить неизвестные множители  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , подставим полученные выражения корректировок (3.18) в систему уравнений (3.16) и после преобразований получим систему линейных уравнений относительно  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$

$$\begin{cases} \omega_{11} \lambda_0 + \omega_{12} \lambda_1 = -\Delta_0 \\ \omega_{21} \lambda_0 + \omega_{22} \lambda_1 = -\Delta_1, \end{cases} \quad (3.19)$$

где коэффициенты  $\omega_{jj}$  — элементы матрицы  $\Omega$  системы уравнений, определяются равенствами:

$$\omega_{11} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(\alpha_j);$$

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(\alpha_j) \beta_j;$$

$$\omega_{22} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 [\beta_j^2 \sigma^2(Q_j) + Q_j^2 \sigma^2(\beta_j)].$$

Решение системы уравнений (3.19) можно выразить через элементы  $\bar{\omega}_{ij}$  обратной матрицы  $\Omega^{-1}$  и невязки баланса  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ :

$$\lambda_0 = -\bar{\omega}_{11} \Delta_0 - \bar{\omega}_{12} \Delta_1;$$

$$\lambda_1 = -\bar{\omega}_{21} \Delta_0 - \bar{\omega}_{22} \Delta_1.$$

Подстановка найденных значений  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  в выражения (3.18) приводит к окончательным формулам искомым корректировок  $\delta Q_j$  и  $\delta \beta_j$ :

$$\begin{aligned} \delta Q_j = & -\tau_j [\sigma^2(Q_j) \bar{\omega}_{11} + \sigma^2(Q_j) \beta_j \bar{\omega}_{21}] \Delta_0 - \\ & -\tau_j [\sigma^2(Q_j) \bar{\omega}_{12} + \sigma^2(Q_j) \beta_j \bar{\omega}_{22}] \Delta_1; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\delta \beta_j = -\tau_j \sigma^2(\beta_j) Q_j \bar{\omega}_{21} \Delta_0 - \tau_j \sigma^2(\beta_j) Q_j \bar{\omega}_{22} \Delta_1.$$

Используя соотношения (3.20) и равенство

$$\delta M_j = \beta_j \delta Q_j + Q_j \delta \beta_j,$$

определим корректировки  $\delta M_j$  через невязки баланса. Имеем

$$\begin{aligned} \delta M_j = & -\tau_j \left\{ \sigma^2(Q_j) \beta_j \bar{\omega}_{11} + [\sigma^2(Q_j) \beta_j^2 + \right. \\ & \left. + Q_j^2 \sigma^2(\beta_j)] \bar{\omega}_{21} \right\} \Delta_0 - \tau_j \left\{ \sigma^2(Q_j) \beta_j \bar{\omega}_{12} + \right. \\ & \left. + [\sigma^2(Q_j) \beta_j^2 + Q_j^2 \sigma^2(\beta_j)] \bar{\omega}_{22} \right\} \Delta_1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Заметим, что выражения, стоящие перед невязками  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$  в полученных формулах корректировок  $\delta Q_j$  и  $\delta M_j$ , являются коэффициентами, определяющими способ сведения баланса.

Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить выполнения условий (3.11). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tau_j \nu_{0j}^{(0)} &= - \sum_{j=1}^n \tau_j^2 [\sigma^2(Q_j) \bar{\omega}_{11} + \sigma^2(Q_j) \beta_j \bar{\omega}_{21}] = \\ &= - \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(Q_j) \right] \bar{\omega}_{11} + \left[ \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(Q_j) \beta_j \right] \bar{\omega}_{21} \right\} = \\ &= - (\omega_{11} \bar{\omega}_{11} + \omega_{12} \bar{\omega}_{21}) = -1. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \nu_{1j}^{(0)} = 0; \quad \sum_{j=1}^n \tau_j \nu_{0j}^{(1)} = 0; \quad \sum_{j=1}^n \tau_j \nu_{1j}^{(1)} = -1.$$

Таким образом, матрицы  $\nu_0$  и  $\nu_1$  для способа сведения товарного баланса по критерию максимального правдоподобия равны соответственно

$$\nu_0 = \begin{bmatrix} \tau_1 \sigma^2(Q_1), & \tau_1 \sigma^2(Q_1) \beta_1 \\ \tau_2 \sigma^2(Q_2), & \tau_2 \sigma^2(Q_2) \beta_2 \\ \dots & \dots \\ \tau_n \sigma^2(Q_n), & \tau_n \sigma^2(Q_n) \beta_n \end{bmatrix} \Omega^{-1};$$

$$\nu_1 = \begin{bmatrix} \tau_1 \sigma^2(Q_1) \beta_1, & \tau_1 [\sigma^2(Q_1) \beta_1^2 + Q_1^2 \sigma^2(\beta_1)] \\ \tau_2 \sigma^2(Q_2) \beta_2, & \tau_2 [\sigma^2(Q_2) \beta_2^2 + Q_2^2 \sigma^2(\beta_2)] \\ \dots & \dots \\ \tau_n \sigma^2(Q_n) \beta_n, & \tau_n [\sigma^2(Q_n) \beta_n^2 + Q_n^2 \sigma^2(\beta_n)] \end{bmatrix} \Omega^{-1}.$$

Расчет по методу максимального правдоподобия в случае контроля нескольких компонентов в продуктах технологической операции

Формулы сведения баланса и вывод формул корректировок по ММП в случае контроля нескольких компонентов в продуктах технологической операции выводится на основе рассуждений, приведенных в разд. 3.2, поэтому приведем лишь основные формулы, встречающиеся в процессе доказательства.

Система балансовых уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_j Q_j = \Delta_0 \\ \sum_{j=1}^n \tau_j M_{ij} = \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (3.22)$$

где  $M_{ij}$  — масса  $i$ -го компонента в  $j$ -м продукте.

Способ сведения баланса характеризуется набором констант  $\nu_{ij}^{(l)}$ , которые удовлетворяют условиям (3.11) и определяют корректировки масс продуктов и содержаний компонентов:

$$\delta Q_j = \sum_{k=0}^m \nu_{kj}^{(0)} \Delta_k;$$

$$\delta M_{ij} = \sum_{k=0}^m v_{kj}^{(i)} \Delta_k \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.23)$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{i1} \\ M_{i2} \\ \dots \\ M_{in} \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_m \end{bmatrix}$$

и матрицы

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{01}^{(i)} & v_{11}^{(i)} & \dots & v_{m1}^{(i)} \\ v_{02}^{(i)} & v_{12}^{(i)} & \dots & v_{m2}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{0n}^{(i)} & v_{1n}^{(i)} & \dots & v_{mn}^{(i)} \end{bmatrix},$$

то выражения искоемых корректировок можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$\delta Q = v_0 \Delta; \quad (3.24)$$

$$\delta M_i = v_i \Delta \quad (i = \overline{1, m}).$$

При выводе формул корректировок по критерию максимального правдоподобия в соответствии с выражениями (3.14) – (3.16) приходим к условиям, которым должны удовлетворять корректировки:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_j \delta Q_j = -\Delta_0 \\ \sum_{j=1}^n \tau_j (\beta_{ij} \delta Q_j + Q_j \delta \beta_{ij}) = -\Delta_i \quad (i = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (3.25)$$

где  $\delta \beta_{ij}$  – корректировка содержания  $i$ -го компонента в  $j$ -м продукте.

Критериальная функция – логарифмическая функция правдоподобия определяется как взвешенная сумма квадратов корректировок:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{(\delta \beta_{ij})^2}{\sigma^2(\beta_{ij})} + \sum_{j=1}^n \frac{(\delta Q_j)^2}{\sigma^2(Q_j)}, \quad (3.26)$$

а функция Лагранжа для оптимизационной задачи

$$\Phi = L - 2\lambda_0 \sum_{j=1}^n \tau_j \delta Q_j - 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \tau_j (\beta_{ij} \delta Q_j + Q_j \delta \beta_{ij}). \quad (3.27)$$

Необходимые условия экстремума порождают уравнения, совместное решение которых с системой (3.25) относительно неизвестных корректировок приводит к формулам:

$$\delta Q_j = \tau_j \sigma^2(Q_j) [\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} \lambda_i] \quad (j = \overline{1, n}); \quad (3.28)$$

$$\delta \beta_{ij} = \tau_j \sigma^2(\beta_{ij}) Q_j \lambda_i \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Множители Лагранжа  $\lambda_j$  определяются из системы уравнений

$$\Omega \lambda = -\Delta,$$

где  $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$ ,  $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix}$ ,

а элементы матрицы  $\Omega = [\omega_{ij}]$  заданы определяющими соотношениями:

$$\omega_{11} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(Q_j);$$

$$\omega_{i+1, i+1} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 [\sigma^2(Q_j) \beta_{ij}^2 + Q_j^2 \sigma^2(\beta_{ij})] \quad (i = \overline{1, m});$$

$$\omega_{i, i+1} = \omega_{i+1, i} = \sum_{j=1}^m \tau_j^2 \sigma^2(Q_j) \beta_{ij} \quad (i = \overline{1, m});$$

$$\omega_{i+1, k+1} = \omega_{k+1, i+1} = \sum_{j=1}^n \tau_j^2 \sigma^2(Q_j) \beta_{ij} \beta_{kj} \quad (i, k = \overline{1, m}).$$

На основе формул (3.28) после вычисления множителей  $\lambda_j$  нетрудно найти общие выражения для искоемых матриц.

Имеем

$$v_0 = \begin{bmatrix} \tau_1 \sigma^2 (Q_1), \tau_1 \sigma^2 (Q_1) \beta_{i_1}, \dots, \tau_1 \sigma^2 (Q_1) \beta_{m_1} \\ \tau_2 \sigma^2 (Q_2), \tau_2 \sigma^2 (Q_2) \beta_{i_2}, \dots, \tau_2 \sigma^2 (Q_2) \beta_{m_2} \\ \dots \\ \tau_n \sigma^2 (Q_n), \tau_n \sigma^2 (Q_n) \beta_{i_n}, \dots, \tau_n \sigma^2 (Q_n) \beta_{m_n} \end{bmatrix} \Omega^{-1}; \quad (3.29)$$

$$v_i = \begin{bmatrix} \tau_1 \sigma^2 (Q_1) \beta_{i_1}, \tau_1 \sigma^2 (Q_1) \beta_{1_1} \beta_{i_1}, \dots, \tau_1 (\sigma^2 (Q_1) \beta_{i_1}^2 + \\ + Q_1^2 \sigma^2 (\beta_{i_1})) , \dots, \tau_1 \sigma^2 (Q_1) \beta_{m_1} \beta_{i_1} \\ \tau_2 \sigma^2 (Q_2) \beta_{i_2}, \tau_2 \sigma^2 (Q_2) \beta_{1_2} \beta_{i_2}, \dots, \tau_2 (\sigma^2 (Q_2) \beta_{i_2}^2 + \\ + Q_2^2 \sigma^2 (\beta_{i_2})) , \dots, \tau_2 \sigma^2 (Q_2) \beta_{m_2} \beta_{i_2} \\ \dots \\ \tau_n \sigma^2 (Q_n) \beta_{i_n}, \tau_n \sigma^2 (Q_n) \beta_{1_n} \beta_{i_n}, \dots, \tau_n (\sigma^2 (Q_n) \beta_{i_n}^2 + \\ + Q_n^2 \sigma^2 (\beta_{i_n})) , \dots, \tau_n \sigma^2 (Q_n) \beta_{m_n} \beta_{i_n} \end{bmatrix} \Omega^{-1}.$$

Условия (3.11), которым должны удовлетворять элементы матриц  $v_p$ , проверяют непосредственно.

Рассмотренные варианты расчета товарного баланса одной операции при одно- и многокомпонентном контроле продуктов обогащения, как отмечалось в разд. 3.1, не отражают все возможные случаи, возникающие на обогатительных фабриках.

### Расчет сложных технологических схем

Пусть задана схема обогащения, технологическая матрица которой равна  $T$ , а в каждом продукте схемы контролируются масса и  $m$  компонентов. Более общую ситуацию, когда число контролируемых компонентов в продуктах неодинаково, специально рассматривать не будем, поскольку аналогичная задача, но в более общем виде подробно исследовалась в гл. 2.

Введем в рассмотрение следующие векторы:

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{i_1} \\ \beta_{i_2} \\ \vdots \\ \beta_{i_n} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}; \quad M_i = \begin{bmatrix} M_{i_1} \\ M_{i_2} \\ \vdots \\ M_{i_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{i_1} Q_1 \\ \beta_{i_2} Q_2 \\ \vdots \\ \beta_{i_n} Q_n \end{bmatrix}; \quad \Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix},$$

где  $\beta_{ij}$  и  $M_{ij}$  — соответственно содержание и масса  $i$ -го компонента в  $j$ -м продукте;  $Q_j$  — масса  $j$ -го продукта;  $\Delta_{ik}$  — невязка баланса по  $i$ -му компоненту в  $k$ -й операции. В этих обозначениях система балансовых уравнений согласно (2.44) запишется так:

$$\begin{cases} TQ = \Delta_0 \\ T \operatorname{diag} \beta_j Q = \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (3.30)$$

Учитывая, что  $M_{ij} = \beta_{ij} Q_j$ , и следовательно, справедливо векторно-матричное равенство

$$M_i = \operatorname{diag} \beta_j Q = \operatorname{diag} Q \beta_j, \quad (3.31)$$

система уравнений (3.30) преобразуется к виду

$$\begin{cases} TQ = \Delta_0 \\ TM_i = \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (3.32)$$

В дальнейшем при формулировке и выводе основных результатов целесообразно переписать уравнения (3.30) и (3.32) в более компактной форме. Для этого определим векторы

$$X = \begin{bmatrix} Q \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} Q \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix}; \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix}$$

и матрицы

$$R_0 = \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{diag} \beta_1 & \operatorname{diag} Q & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{diag} \beta_2 & 0 & \operatorname{diag} Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{diag} \beta_m & 0 & 0 & \dots & \operatorname{diag} Q \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{bmatrix} \quad R_0 = T^* R_0.$$

Здесь  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ , а  $O$  — нулевая матрица размерами  $n \times n$  в определении  $R_0$  и  $p \times n$  в определении  $R$ .

Напомним, что если векторы и матрицы разбиты на блоки, то произведение матрицы на матрицу на вектор можно вычислять по тому же правилу, как если бы эти блоки были числами. При этом предполагается, что разбиение на блоки согласованное, т.е. все встречающиеся при умножении блоков векторно-матричные операции определены.

В этих обозначениях систему (3.32) можно записать следующим образом:

$$T^*M = \Delta. \quad (3.33)$$

Под ее решением будем понимать такой вектор  $M$ , который аннулирует правую часть, т.е. удовлетворяет соотношению

$$T^*M = 0. \quad (3.34)$$

Вектор  $M$  представим в виде

$$M = M + \delta M,$$

где  $\delta M$  — вектор неизвестных корректировок, который по аналогии с ранее рассмотренными случаями определим формулой

$$\delta M = \nu \Delta. \quad (3.35)$$

Здесь  $\nu$  — некоторая постоянная матрица, определяющая способ сведения баланса.

Имеем

$$T^*M = T^*(M + \delta M) = T^*M + T^*\delta M = \Delta + T^*\nu\Delta = (E + T\nu)\Delta = 0,$$

откуда следует, что матрица  $\nu$  должна удовлетворять условию

$$T\nu \approx -E, \quad (3.36)$$

которое является обобщением условия (3.11).

Определим матрицу  $\nu$  для случая сведения баланса по КМП.

Пусть  $\hat{\beta}_i = \beta_i + \delta\beta_i$ ;  $\hat{Q} = Q + \delta Q$ , где  $\delta\beta_i$  и  $\delta Q$  — векторы корректировок содержаний и масс продуктов. Поскольку векторы  $\hat{\beta}_i$  и  $\hat{Q}$  должны удовлетворять системе уравнений (3.30), то при подстановке в нее выражений (3.10), отбросив члены второго порядка малости относительно корректировок, получим

$$T\delta Q = -\Delta_0;$$

$$T \text{diag } \beta_i, \delta Q + T \text{diag } \delta\beta_i, Q = -\Delta, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (3.37)$$

Набор корректировок  $\delta\beta_i$  и  $\delta Q$ , минимизирующий функцию  $L = \sum_{i=1}^m [\delta\beta_i]^T \sigma_i^{-1} [\delta\beta_i]$  при ограничениях (3.37), и будет являться решением задачи.



Функция Лагранжа запишется в следующем виде:

$$\Phi = L - 2 \left\{ \lambda_0^T T \delta Q + \sum_{i=1}^m \lambda_i^T T (\text{diag } \beta_i \delta Q + \text{diag } \delta \beta_i Q) \right\},$$

где  $\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_{ip} \end{bmatrix}$  ( $i = \overline{0, m}$ ) — векторы неопределенных множителей Лагранжа.

Дифференцируя функцию  $\Phi$  по переменным  $\delta \beta_i$  и  $\delta Q$  и приравняв к нулю частные производные, получаем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta \beta_i} = 2 \sigma_i^{-1} \delta \beta_i - 2 \text{diag } Q T^T \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1, m});$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta Q} = 2 \sigma_0^{-1} \delta Q - 2 \sum_{i=1}^m \text{diag } \beta_i T^T \lambda_i - 2 T^T \lambda_0 = 0.$$

Из этих уравнений выразим векторы корректировок через неизвестные множители Лагранжа  $\lambda_i$ :

$$\delta Q = \sigma_0 T^T \lambda_0 + \sigma_0 \left( \sum_{i=1}^m \text{diag } \beta_i T^T \lambda_i \right); \quad (3.38)$$

$$\delta \beta_i = \sigma_i \text{diag } Q T^T \lambda_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Положим

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0, 0, \dots, 0 \\ 0, \sigma_1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, \sigma_m \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}; \quad \delta X = \begin{bmatrix} \delta Q \\ \delta \beta_1 \\ \delta \beta_2 \\ \vdots \\ \delta \beta_m \end{bmatrix}$$

Тогда системы уравнений (3.37) и (3.38) запишутся в виде

$$R \delta X = -\Delta; \quad \delta X = \sigma R^T \lambda.$$

Их совместное решение определяет искомое выражение для корректировок:

$$\delta X = -\sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1} \Delta. \quad (3.39)$$

Замечая, что вектор корректировок масс  $\delta M$  связан с вектором  $\delta X$  соотношением

$$\delta M = R_0 \delta X,$$

получаем общую формулу корректировок масс продуктов и компонентов по КМП

$$\delta M = -R_0 \sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1} \Delta. \quad (3.40)$$

Полученное выражение определяет искомую матрицу

$$\nu = -R_0 \sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1}. \quad (3.41)$$

Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет условию (3.36), действительно,

$$T^* \nu = -T R_0 \sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1} = -E.$$

### 3.3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СВЕДЕНИЯ ТОВАРНОГО БАЛАНСА И ОПТИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО РАСЧЕТА ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Наиболее естественным критерием для оценки любого способа сведения, как средства измерения, является точность получаемых результатов, под которой, как и ранее, понимаем набор средних квадратических отклонений или дисперсий всех скорректированных масс.

Выведем формулу для дисперсий скорректированных масс, предполагая, как и ранее, что все исходные данные (массы продуктов и содержания компонентов) измерены с погрешностями, имеющими случайный характер, попарно независимыми и с нормальным несмещенным законом распределения.

Исходим из того, что скорректированные массы, определенные формулой (3.35), являются функциями измеренных данных и поэтому их ковариационную матрицу можно найти по известной формуле

$$\text{cov}(M, M) = \frac{\partial M}{\partial X} \sigma \left[ \frac{\partial M}{\partial X} \right]^T. \quad (3.42)$$

Определим частные производные  $\partial M / \partial X$ . Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial (M + \delta M)}{\partial X} = \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{\partial \delta M}{\partial X}$$

Чтобы определить частные производные  $\partial M / \partial X$ , заметим, что

$$\frac{\partial M}{\partial X} = R_0. \quad (3.43)$$

Вычислим производную  $\partial \delta M / \partial X$ . Согласно формуле (3.35) имеем

$$\partial M = \nu \Delta,$$

дифференцируя это равенство по переменным  $X$  и учитывая соотношения (3.33) и (3.43), получаем

$$\frac{\partial \delta M}{\partial X} = \frac{\partial (\nu \Delta)}{\partial X} = \nu \frac{\partial \Delta}{\partial X} = \nu T^* \frac{\partial M}{\partial X} = \nu T^* R_0.$$

Подставляя полученные выражения частных производных в формулу (3.42), находим окончательную форму ковариационной матрицы:

$$\text{cov}(M, M) = (E + \nu T^*) R_0 \sigma R_0^T (E + \nu T^*)^T, \quad (3.44)$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $(m+1) \times n$ .

*Сведение товарного баланса методом корректировок по КМП обладает следующим свойством — дисперсии скорректированных значений имеют минимальное значение. Таким образом, этот метод является оптимальным по точности.*

Приведем схему доказательства этого результата в общем случае (для расчета товарного баланса одной операции оно приведено в работе [14]).

Из формул (3.41) и (3.44) получим выражение ковариационной матрицы скорректированных масс при сведении баланса по КМП:

$$\text{cov}(M, M) = [E - R_0 \sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1} T^*] R_0 \sigma R_0^T [E - R_0 \sigma R^T \times \\ \times (R \sigma R^T)^{-1} T^*]^T = R_0 \sigma R_0^T - R_0 \sigma R^T (R \sigma R^T)^{-1} R \sigma R_0^T.$$

Если рассмотреть разность  $\text{cov}(M, M) - \text{cov}(\hat{M}, \hat{M})$ , то можно показать, что она является неотрицательно определенной матрицей и, следовательно, ее диагональные элементы неотрицательны. Диагональные элементы представляют собой разность дисперсий скорректированных масс продуктов произвольным методом сведения баланса и методом корректировок по КМП. Следовательно, дисперсии скорректированных по КМП величин минимальны. Что и требовалось доказать.

### 3.4. ДОСТОВЕРНОСТЬ ТОВАРНОГО БАЛАНСА

Допустимая невязка, как следует из ее определения, пропорциональна суммарной погрешности измерения масс компонентов во всех продуктах, фиксируемых в товарном балансе. Поэтому, чем меньше допустимая невязка, тем точнее контроль продуктов обогащения и, следовательно, достовернее товарный баланс.

Таким образом, на основе допустимой невязки можно оценить достоверность товарного баланса на обогатительной фабрике. С этой целью рассмотрим допустимую невязку, отнесенную к массе  $i$ -го компонента в

исходном для фабрики сырье,

$$\bar{\Delta}_I^{\text{доп}} = \Delta_I^{\text{доп}} / M_{I,p}, \quad (3.45)$$

где  $\Delta_I^{\text{доп}}$  — допустимая невязка, а  $M_{I,p}$  — масса  $I$ -го компонента в руде.

Проведенные на ряде обогатительных фабрик исследования показали, что величина  $\bar{\Delta}_I^{\text{доп}}$  достаточно стабильна в течение длительного периода и поэтому может быть основой для оценки состояния контроля на них.

Согласно формулам (3.3) дисперсии невязок баланса:

$$D(\Delta_I) = \sum_{l=1}^N \left\{ [M_{I,p}^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\beta_{I,p}^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\rho_p^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_p^{(l)})] + [M_{I,k}^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\beta_{I,k}^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\rho_k^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_k^{(l)})] + [M_{I,xв}^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\beta_{I,xв}^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(Q_{xв}^{(l)})] \right\};$$

$$D(\Delta_0) = \sum_{l=1}^N \left\{ [Q_p^{(l)}]^2 [\bar{\sigma}^2(\rho_p^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_p^{(l)})] + [Q_k^{(l)}]^2 \times \right.$$

$$\left. \times [\bar{\sigma}^2(\rho_k^{(l)}) + \bar{\sigma}^2(Q_k^{(l)})] + [\tilde{Q}_{xв}^{(l)}]^2 \bar{\sigma}^2(Q_{xв}^{(l)}) \right\}.$$

Для относительных средних квадратических отклонений  $\bar{\sigma}(\tilde{Q}_*^{(l)})$ ,  $\sigma(\beta_{i,*}^{(l)})$  и  $\bar{\sigma}(\rho_*^{(l)})$  на основе метрологических характеристик средств и методов измерений можно определить верхние граничные значения, которые обозначим соответственно через  $\bar{\sigma}_B(\tilde{Q}_*)$ ,  $\bar{\sigma}_B(\beta_{i,*})$  и  $\bar{\sigma}_B(\rho_*)$ . Важно отметить, что эти значения зависят лишь от качества измерения того или иного параметра в продуктах обогащения, т.е. отражают качество системы контроля.

По верхним границам относительных средних квадратических отклонений можно оценить дисперсии невязок баланса. Справедливы неравенства:

$$D(\Delta_I) \leq [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,p}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] \sum_{l=1}^N [M_{I,p}^{(l)}]^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,k}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \sum_{l=1}^N [M_{I,k}^{(l)}]^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,xв}) + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв})] \times$$

$$\times \sum_{l=1}^N [M_{I,xв}^{(l)}]^2 \quad (3.46)$$

$$D(\Delta_0) \leq [\bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] \sum_{l=1}^N [\tilde{Q}_p^{(l)}]^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \times$$

$$\times \sum_{l=1}^N [\tilde{Q}_k^{(l)}]^2 + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв}) \sum_{l=1}^N [Q_{xв}^{(l)}]^2.$$

Положим

$$M_{I,p} = \sum_{l=1}^N M_{I,p}^{(l)}; M_{I,k} = \sum_{l=1}^N M_{I,k}^{(l)}; M_{I,xв} = \sum_{l=1}^N M_{I,xв}^{(l)};$$

$$Q_p = \sum_{l=1}^N Q_p^{(l)}; Q_k = \sum_{l=1}^N Q_k^{(l)}; Q_{xв} = \sum_{l=1}^N Q_{xв}^{(l)}.$$

Если учесть, что для сменных показателей  $M_{I,p}^{(l)}$  и  $Q_p^{(l)}$  относительные отклонения от средних значений не превышают  $\kappa$  (как правило,  $\kappa \leq 0,2$ ), т.е. справедливы неравенства:

$$M_{I,p}^{(l)} \leq \frac{M_{I,p}}{N} (1 - \kappa); M_{I,k}^{(l)} \leq \frac{M_{I,k}}{N} (1 + \kappa); M_{I,xв}^{(l)} \leq \frac{M_{I,xв}}{N} (1 + \kappa);$$

$$Q_p^{(l)} \leq \frac{Q_p}{N} (1 + \kappa); Q_k^{(l)} \leq \frac{Q_k}{N} (1 + \kappa); Q_{xв}^{(l)} \leq \frac{Q_{xв}}{N} (1 + \kappa),$$

то оценки  $D(\Delta_i)$  можно записать следующим образом:

$$D(\Delta_i) \leq \frac{(1 + \kappa)^2}{N} \left\{ \begin{aligned} & [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,p}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] M_{I,p}^2 + \\ & + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,k}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] M_{I,k}^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,xв}) + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв})] \times \\ & \times M_{I,xв}^2 \end{aligned} \right\} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (3.47)$$

$$D(\Delta_0) \leq \frac{(1 + \kappa)^2}{N} \left\{ \begin{aligned} & [\bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] Q_p^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \times \\ & \times Q_k^2 + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв}) Q_{xв}^2 \end{aligned} \right\}.$$

Докажем более точные неравенства, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$D(\Delta_i) \leq \frac{1 + \kappa}{N} \left\{ \begin{aligned} & [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,p}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] M_{I,p}^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,k}) + \\ & + \bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] M_{I,k}^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{I,xв}) + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв})] M_{I,xв}^2 \end{aligned} \right\} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (3.48)$$

$$D(\Delta_0) \leq \frac{1 + \kappa}{N} \left\{ \begin{aligned} & [\bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] Q_p^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] Q_k^2 + \\ & + \bar{\sigma}_B^2(Q_{xв}) Q_{xв}^2 \end{aligned} \right\}.$$

Если умножить левую и правую части неравенства (3.48) на квадрат коэффициента  $K$ , определяющий согласно выражению (3.4) значение допустимой невязки, и разделить каждое из них на квадрат массы соответствующего компонента в руде (при  $i = 0$  на квадрат массы руды), то

получим оценку для квадрата относительной допустимой невязки:

$$\begin{aligned}
 (\overline{\Delta}_i^{\text{доп}})^2 &\leq K^2 \frac{1+K}{N} \left\{ [\overline{\sigma}_B^2(\beta_{i,p}) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_p) + \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] + \right. \\
 &+ [\overline{\sigma}_B^2(\beta_{i,k}) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_k) + \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \epsilon_{i,k}^2 + [\overline{\sigma}_B^2(\beta_{i,xв}) + \overline{\sigma}_B^2(Q_{xв})] \epsilon_{i,xв}^2 \left. \right\} = \\
 &= C_i^2 \quad (i = \overline{1, m}); \\
 (\overline{\Delta}_0^{\text{доп}})^2 &\leq K^2 \frac{1+K}{N} \left\{ [\overline{\sigma}_B^2(\rho_p) + \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] + [\overline{\sigma}_B^2(\rho_k) + \right. \\
 &+ \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \gamma_k^2 + \overline{\sigma}_B^2(Q_{xв}) \gamma_{xв}^2 \left. \right\} = C_0^2,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

где  $\epsilon_{i,k}$ ,  $\epsilon_{i,xв}$  — извлечения  $i$ -го компонента соответственно в концентрат и хвосты; а  $\gamma_k$  и  $\gamma_{xв}$  — выходы концентрата и хвостов. Откуда следует, что

$$\overline{\Delta}_i^{\text{доп}} \leq C_i \quad (i = 0, m).$$

Величины  $C_i$  примем в качестве показателей достоверности товарного баланса. Как следует из определения  $C_i$ , они зависят лишь от точности средств и методов измерений, характеризующихся относительными средними квадратическими отклонениями, и уровня технологии (извлечения  $\epsilon$  и коэффициента  $K$ ) обогатительной фабрики, т.е. только от тех факторов, которые и определяют степень достоверности товарного баланса.

Рассмотрим на примерах особенности в системе контроля и структуре схемы обогащения, оказывающие влияние на достоверность баланса.

При наличии нескольких точек входа исходного сырья, например  $l$  секций, схема обогащения в случае двух выходных продуктов (концентрат и хвосты) выглядит так, как показано на рис. 3.5.

Схема определения показателей достоверности  $C_i$  остается прежней: сначала определяют допустимые невязки, а затем по изложенной выше методике оценки  $\Delta_i^{\text{доп}}$ . Все преобразования остаются такими же за исключением вычисления дисперсий и их оценок для исходного питания. Имеем:

$$\begin{aligned}
 D(M_{i,p}) &= D\left(\sum_{k=1}^l M_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^l D(M_{i,k}) \leq \sum_{k=1}^l [\overline{\sigma}_B^2(\beta_{i,p}) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_p) + \\
 &+ \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] M_{i,k}^2 \leq \frac{[\overline{\sigma}_B^2(\beta_{i,k}) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_p) + \overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)]}{l} M_{i,p}^2; \\
 D(Q_p) &= D\left(\sum_{k=1}^l Q_k\right) = \sum_{k=1}^l D(Q_k) \leq \sum_{k=1}^l [\overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_p)] Q_k^2 \leq \\
 &\leq \frac{[\overline{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p) + \overline{\sigma}_B^2(\rho_p)]}{l} Q_p^2,
 \end{aligned}$$

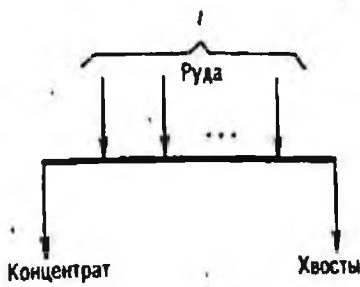


Рис. 3.5. Схема обогатительной фабрики с несколькими исходными питаниями

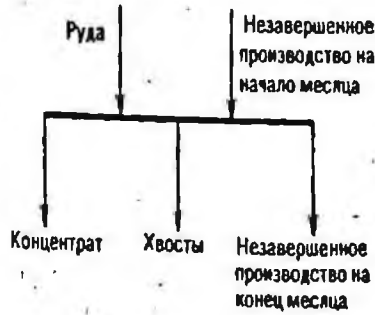


Рис. 3.6. Схема обогатительной фабрики с незавершенным производством

где  $\beta_{i,k}$ ,  $M_{i,k}$  — соответственно содержание и масса  $i$ -го компонента на  $k$ -й секции, а  $\tilde{Q}_k$  — масса руды, переработанная на этой секции.

Отсюда следует, что

$$C_i = k \sqrt{\frac{1+k}{N}} \left\{ \frac{\sigma_v^2(\beta_{i,p}) + \sigma_v^2(\rho_p) + \sigma_v^2(Q_p)}{i} + [\sigma_v^2(\beta_{i,k}) + \sigma_v^2(\rho_k) + \sigma_v^2(\tilde{Q}_k)] \epsilon_{i,k}^2 + [\sigma_v^2(\beta_{i,xв}) + \sigma_v^2(Q_{xв})] \epsilon_{i,xв}^2 \right\}^{1/2} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (3.50)$$

$$C_0 = k \sqrt{\frac{1+k}{N}} \left\{ \frac{\sigma_v^2(\tilde{Q}_p) + \sigma_v^2(\rho_p)}{i} + [\sigma_v^2(\rho_k) + \sigma_v^2(\tilde{Q}_k)] \gamma_k^2 + \sigma_v^2(Q_{xв}) \gamma_{xв}^2 \right\}^{1/2}.$$

Сравнение формул (3.50) с ранее полученными показывает, что при увеличении числа контролируемых входных продуктов достоверность баланса повышается.

Рассмотрим влияние незавершенного производства на показатель достоверности. Схема обогатительной фабрики в этом случае примет вид, изображенный на рис. 3.6.

Фактические невязки баланса по каждому контролируемому компоненту и твердому равны соответственно

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^N [M_{i,p}^{(l)} - M_{i,k}^{(l)} - M_{i,xв}^{(l)}] + M_{i,нн} - M_{i,нк} \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\text{и } \Delta_0 = \sum_{l=1}^N [Q_p^{(l)} - Q_k^{(l)} - Q_{xв}^{(l)}] + Q_{нн} - Q_{нк}, \text{ где } M_{i,нн} \text{ и } M_{i,нк} \text{ (} Q_{нн}$$

и  $Q_{нк}$ ) — массы  $i$ -го компонента (твердого) в незавершенном производстве соответственно на начало и конец отчетного периода.

Формулы для показателей  $C_i$  также изменятся:

$$C_i = K \sqrt{\frac{1+K}{N}} \left\{ [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{i,p}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p)] + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{i,k}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \epsilon_{i,k}^2 + [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{i,xв}) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_{xв})] \epsilon_{i,xв}^2 + \frac{N}{1+K} \times \right. \\ \left. \times [\bar{\sigma}_B^2(\beta_{i,нк}) + \bar{\sigma}_B^2(\rho_{i,нк}) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_{нк})] \epsilon_{i,нк}^2 \right\}^{1/2} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (3.51)$$

$$C_0 = K \sqrt{\frac{1+K}{N}} \left\{ [\bar{\sigma}_B^2(\rho_p) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_p) + [\bar{\sigma}_B^2(\rho_k) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_k)] \gamma_k^2 + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_{xв}) \gamma_{xв}^2 + \frac{N}{1+K} [\bar{\sigma}_B^2(\rho_{нк}) + \bar{\sigma}_B^2(\tilde{Q}_{нк})] \gamma_{нк}^2 \right\}^{1/2}.$$

Отсюда видно, что если извлечение  $i$ -го компонента в незавершенное производство  $\epsilon_{i,нк}$  или выход твердого  $\gamma_{нк}$  сравнительно велики, то за счет множителя  $N$  последнее слагаемое в выражениях (3.51) значительно повысит значение соответствующего показателя  $C_i$  и тем самым достоверность баланса уменьшится.

Отметим также, что с увеличением интервала между измерениями достоверность баланса снижается. В этом нетрудно убедиться, сравнивая соответствующие показатели достоверности.

При расчете показателей  $C_i$  используем следующие формулы перехода от относительных погрешностей измерения массы  $\Delta_r(\tilde{Q})$  и содержания твердого  $\Delta_r(\rho)$  к относительным средним квадратическим погрешностям  $\bar{\sigma}(\tilde{Q})$  и  $\bar{\sigma}(\rho)$ :

$$\bar{\sigma}(\tilde{Q}) = \frac{1}{3} \Delta_r(\tilde{Q});$$

$$\bar{\sigma}(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Delta_r(\rho).$$

Подробнее рассмотрим формулу перехода от относительного допустимого расхождения результатов параллельных анализов содержания контролируемого компонента  $\Delta_r(\beta)$  к относительной средней квадратической погрешности  $\bar{\sigma}(\beta)$ .

В соответствии с действующими нормативными материалами результат анализа контролируемого компонента в продукте является средним арифметическим из  $n$  параллельных определений. Число параллельных определений регламентируется для каждого контролируемого компонента. Для характеристики анализа используют нормы допустимых расхождений между результатами параллельных определений. В соответствии с этими нормами для каждого компонента разность между максимальным и минимальным значениями из  $n$  параллельных определений не может превышать допустимого расхождения.



Пусть погрешности каждого параллельного определения распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_{ед}^2$ . Тогда результат анализа, равный

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \beta_l,$$

имеет дисперсию

$$\sigma_{ан}^2 = \sigma_{ед}^2 / n.$$

В то же время, как известно, с доверительной вероятностью  $P$  выполняется неравенство

$$R_n = \max_{l=1, n} \{ \beta_l \} - \min_{l=1, n} \{ \beta_l \} < a_n \sigma_{ед},$$

где  $R_n$  — выборочный размах. Но величина в правой части равенства и является допустимым расхождением. Следовательно, связь между допустимым расхождением  $\Delta$  и средним квадратическим отклонением анализа  $\sigma_{ан}$  имеет вид

$$\sigma_{ан} = \Delta / (a_n \sqrt{n}) = \Delta / a.$$

Коэффициенты перехода  $a$  от  $\Delta$  к  $\sigma_{ан}$  при различном числе параллельных операций  $n$  в наиболее часто встречающихся случаях приведены в табл. 3.1.

Очевидно, что коэффициенты перехода от относительных допустимых расхождений к относительным средним квадратическим отклонениям такие же, как и при переходе от  $\Delta$  к  $\sigma_{ан}$ .

В приводимых ниже примерах расчета принято, что проводится три параллельных определения, т.е.  $n = 3$ , отчетный период включает в себя 90 смен, коэффициенты  $k = 0,2$ , а  $K = 3$ .

Показатели достоверности рассчитывают с учетом и без учета погрешности опробования. В первом случае предполагаем, что суммарная погрешность определения содержаний компонентов в  $\sqrt{2}$  раз больше погрешности анализа. Значения погрешностей, использованные при расчетах, взяты из действующих нормативно-справочных материалов.

Таблица 3.1

Доверительная вероятность $P$	$a$ при $n$ , равном				
	2	3	4	5	6
0,95	3,92	5,73	7,26	8,61	9,88
0,995	5,61	7,66	9,38	10,93	12,32

Пример 1. Обогащительная фабрика имеет технологическую схему, изображенную на рис. 3.1, с одной секцией ( $J=1$ ). Контролируется один металл — медь. Исходные данные следующие: содержания твердого и меди в руде соответственно 95 % и 0,88 %, в концентрате — 84 % и 14,5 %, в хвостах — 100 % и 0,15 %.

Относительные погрешности измерения параметров руды, концентрата и хвостов, %:

$$\begin{aligned} \Delta_r(\tilde{\alpha}_1) &= 3,0; & \Delta_r(\rho_1) &= 0,2; & \Delta_r(\beta_1) &= 5,68; \\ \Delta_r(\tilde{\alpha}_2) &= 0,5; & \Delta_r(\rho_2) &= 0,6; & \Delta_r(\beta_2) &= 1,88; \\ \Delta_r(\tilde{\alpha}_3) &= 3,0; & - & & \Delta_r(\beta_3) &= 20,0. \end{aligned}$$

Здесь и далее предполагается следующая нумерация: руда — первый продукт, концентрат — второй, хвосты — третий.

Тогда получим средние квадратические погрешности определения измеренных параметров, %:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\tilde{\alpha}_1) &= 1,0; & \bar{\sigma}(\rho_1) &= 0,072; & \bar{\sigma}(\beta_1) &= 0,99; \\ \bar{\sigma}(\tilde{\alpha}_2) &= 0,167; & \bar{\sigma}(\rho_2) &= 0,21; & \bar{\sigma}(\beta_2) &= 0,24; \\ \bar{\sigma}(\tilde{\alpha}_3) &= 1,0; & - & & \bar{\sigma}(\beta_3) &= 3,5. \end{aligned}$$

Извлечения меди в продукты обогащения следующие:

$$\epsilon_1 = 1,0; \quad \epsilon_2 = 0,82; \quad \epsilon_3 = 0,18.$$

Показатель достоверности рассчитываем по формуле:

$$C_{Cu} = 3\sqrt{\frac{1,2}{90}} \left\{ \sum_{j=1}^3 \epsilon_j^2 [\mu^2 \bar{\sigma}^2(\beta_j) + \bar{\sigma}^2(\rho_j) + \bar{\sigma}^2(\tilde{\alpha}_j)] \right\}^{1/2}$$

где  $\mu$  — коэффициент перехода от погрешности анализа к суммарной погрешности измерения.

Результаты расчета таковы:  $C_{Cu} = 0,55$  % без учета погрешности опробования;  $C_{Cu} = 0,77$  % с учетом погрешности опробования.

Пример 2. Обогащительная фабрика имеет схему, изображенную на рис. 3.7: два контролируемых потока исходной руды на двух секциях, два концентрата — медный и молибденовый и два контролируемых металла — медь и молибден. Исходные данные для расчета показателя достоверности следующие: содержание твердого, молибдена и меди соответственно равны в молибденовом концентрате 100, 50 и 0,45 %, в медном концентрате — 100, 0,05 и 17,5 %, в хвостах — 100, 0,0085 и 0,059 %, в руде — 95, 0,0525 и 0,26 %.

Относительные погрешности определения параметров в продуктах обогащения, %:

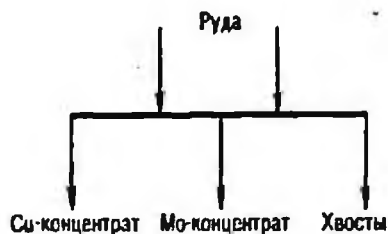


Рис. 3.7. Технологическая схема обогащительной фабрики для примера 2

$$\Delta_r(\tilde{\alpha}_p) = 3,0; \Delta_r(\rho_p) = 0,2; \Delta_r(\beta_p^{\text{Mo}}) = 24,76; \Delta_r(\beta_p^{\text{Cu}}) = 15,38; \Delta_r(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Mo}}) = 1,0; \Delta_r(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Cu}}) = 11,1; \Delta_r(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Mo}}) = 26,0; \Delta_r(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Cu}}) = 1,31; \Delta_r(\beta_{\text{хв}}^{\text{Mo}}) = 47,0; \Delta_r(\beta_{\text{хв}}^{\text{Cu}}) = 33,9.$$

Извлечения в продуктах обогащения, %:

$$\epsilon_p^{\text{Mo}} = 100,0; \epsilon_{\text{МоК}}^{\text{Mo}} = 82,7; \epsilon_{\text{Сук}}^{\text{Mo}} = 1,1; \epsilon_{\text{хв}}^{\text{Mo}} = 16,2; \epsilon_p^{\text{Cu}} = 100,0; \epsilon_{\text{МоК}}^{\text{Cu}} = 0,15; \epsilon_{\text{Сук}}^{\text{Cu}} = 77,4; \epsilon_{\text{хв}}^{\text{Cu}} = 22,45.$$

Средние квадратические погрешности определения измеренных параметров, %:

$$\bar{\sigma}(\tilde{\alpha}_p) = 1,0; \bar{\sigma}(\rho_p) = 0,72; \sigma(\beta_p^{\text{Mo}}) = 4,32; \sigma(\beta_p^{\text{Cu}}) = 2,68; \bar{\sigma}(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Mo}}) = 0,17; \bar{\sigma}(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Cu}}) = 1,94; \sigma(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Mo}}) = 4,57; \bar{\sigma}(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Cu}}) = 0,23; \bar{\sigma}(\beta_{\text{хв}}^{\text{Mo}}) = 8,2; \bar{\sigma}(\beta_{\text{хв}}^{\text{Cu}}) = 5,92.$$

Показатели достоверности рассчитывали по формулам:

$$C_{\text{Mo}} = 3 \sqrt{\frac{1+K}{90}} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2(\beta_p^{\text{Mo}}) + \bar{\sigma}^2(\rho_p) + \bar{\sigma}^2(\tilde{\alpha}_p)}{1} + [\epsilon_{\text{МоК}}^{\text{Mo}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Mo}}) \times \right. \\ \left. \times \mu^2/100 + [\epsilon_{\text{Сук}}^{\text{Mo}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Mo}}) \mu^2/100 + [\epsilon_{\text{хв}}^{\text{Mo}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{хв}}^{\text{Mo}}) \mu^2/100 \right\}^{1/2};$$

$$C_{\text{Cu}} = 3 \sqrt{\frac{1+K}{90}} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^2(\beta_p^{\text{Cu}}) \mu^2 + \bar{\sigma}^2(\rho_p) + \bar{\sigma}^2(\tilde{\alpha}_p)}{1} + [\epsilon_{\text{МоК}}^{\text{Cu}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{МоК}}^{\text{Cu}}) \times \right. \\ \left. \times \mu^2/100 + [\epsilon_{\text{Сук}}^{\text{Cu}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{Сук}}^{\text{Cu}}) \mu^2/100 + [\epsilon_{\text{хв}}^{\text{Cu}}]^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{\text{хв}}^{\text{Cu}}) \mu^2/100 \right\}^{1/2},$$

в которых не учитываются ввиду сравнительной малости погрешности при определении масс концентратов, хвостов и содержаний твердого в концентратах.

Результаты расчета:  $C_{\text{Mo}} = 1,18$  и  $C_{\text{Cu}} = 0,84$  без учета погрешности опробования;  $C_{\text{Mo}} = 1,65$  и  $C_{\text{Cu}} = 1,16$  с учетом погрешности опробования.

Значения показателей достоверности для вышеприведенных примеров и еще для трех обогатительных фабрик приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Порядковый номер фабрики	Контролируемый компонент	Показатель достоверности при	
		$\mu=1$	$\mu=\sqrt{2}$
1	Медь	0,55	0,77
2	Молибден	1,18	1,65
3	Медь	0,84	1,16
	Никель	0,50	0,71
4	Медь	0,47	0,67
	Медь	1,08	1,16
5	Триоксид вольфрама	1,37	1,95
	Медь	0,79	1,11

#### 4.1. ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ РАСЧЕТА МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА

При расчете баланса для оценки работы фабрики в целом, используя традиционную методику расчета, в принципе можно обойтись без ЭВМ. Однако на современном уровне производства целесообразно использовать для расчета имеющиеся средства вычислительной техники (от программируемых калькуляторов вплоть до микро- или мини-ЭВМ).

Принципы построения пакета прикладных программ. Реализация современных методов расчета баланса вследствие большого объема вычислений требует использования ЭВМ и поэтому должна быть поддержана соответствующим программным обеспечением.

Наиболее простой, но достаточно эффективной формой такого программного обеспечения в современных условиях является пакет прикладных программ, отдельная программа которого реализует определенный этап расчета баланса или фрагмент какого-либо этапа. Разбиение общего алгоритма на отдельные элементы, с одной стороны, упрощает процесс программирования, а с другой — позволяет компоновать наиболее рациональную программу расчета баланса, учитывающую особенности конкретной задачи.

Если проанализировать технологию решения задачи, то в общем случае она состоит из следующих этапов, имеющих самостоятельное функциональное назначение: ввод данных, анализ и корректировка данных, расчет материального баланса, оценка точности, вывод результатов.

Ввод данных и вывод результатов являются процедурами, которые в значительной мере зависят от требований пользователя и состава имеющихся технических средств ввода-вывода информации. Поэтому с учетом широкого круга приложений программы расчета баланса (АСУТП, САПР, инженерные расчеты и т.п.) унификация этих процедур в рамках пакета прикладных программ нецелесообразна.

Однако анализ и корректировка данных, расчет баланса и оценка точности являются теми этапами, каждый из которых с большой степенью универсальности может быть реализован. Важно отметить тот факт, что универсальность достигается созданием не мощной программы, наиболее полно реализующей данный этап, а совокупности программ, ориентированных на определенные условия реализации данного этапа.

Такая форма организации пакета обеспечивает возможность его дальнейшего совершенствования путем включения новых программ, учитывающих особенности конкретных классов задач.

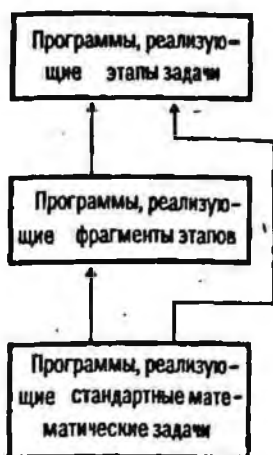


Рис. 4.1. Функциональные связи программ пакета



Рис. 4.2. Блок-схема общего алгоритма анализа и корректировки исходных данных

Помимо программ, реализующих какой-либо из этапов решения задачи, в пакет целесообразно включить программы, которые обеспечивают выполнение отдельного фрагмента этапа, например: минимизацию целевой функции, вычисление технологической матрицы подсхемы и т.п. Эти программы также могут иметь несколько версий, каждая из которых специализирована на определенные условия задачи.

При работе описанных выше программ используются процедуры, реализующие некоторые стандартные задачи линейной алгебры и математического программирования. Несмотря на наличие большого числа специализированных пакетов, содержащих такие программы, для обеспечения большей автономности пакета прикладных программ расчета баланса целесообразно включить их в состав пакета.

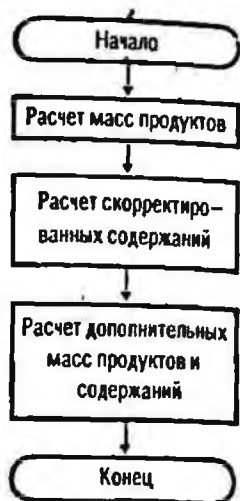
Таким образом, структура пакета представляет собой трехуровневый набор программ (рис. 4.1), каждый уровень которого может быть расширен без изменения других.

- В дальнейшем для определенности программы 1-го уровня будем называть программами, второго уровня — программными модулями или просто модулями, третьего уровня — процедурами.

**Описание пакета.** На изложенных выше принципах был основан разработанный в Механобре пакет прикладных программ расчета материального баланса. Приведем краткое описание его основных программных единиц.

Рассмотрим подпрограммы, реализующие этап анализа и корректировки исходных данных. Он включает в себя оценку достоверности и корректировку данных, а также оценку полноты данных. Общий алгоритм этого этапа приведен на рис. 4.2.

Рис. 4.3. Общий алгоритм расчета баланса



Выделенные в нем три блока в зависимости от конкретного приложения задачи могут быть включены или не включены при реализации данного этапа.

Действительно, если задача расчета баланса используется для оценки работы действующей обогатительной фабрики, то оценка полноты данных, как правило, не нужна, поскольку эта задача уже решена на стадии проектирования системы контроля обогатительного процесса. В то же время при проектировании нет особой необходимости в оценке достоверности данных, так как для оценки полноты данных существенны лишь пределы изменения параметров. Таким образом, этот этап имеет три основных варианта подпрограммы: первый — реализующий общий алгоритм, второй и третий — реализующие оценку соответственно достоверности (совместно с корректировкой\*) и полноты. Математические методы решения этих задач были описаны в разд. 2.2 для расчета технологического баланса и в разд. 3.3 для расчета товарного баланса.

Кроме того, анализ ситуаций показал, что следует разработать две версии программных модулей оценки достоверности и полноты для случая одинакового и неодинакового контроля компонентов в продуктах.

Рассмотрим программы, обеспечивающие выполнение основного этапа — расчета материального баланса.

При этом выделим два типа подпрограмм, обеспечивающих соответственно расчет технологического и товарного балансов.

Алгоритм расчета технологического баланса в общем случае, согласно разд. 2.6, можно представить в виде блок-схемы, представленной на рис. 4.3.

---

\* Обоснованная корректировка данных связана с необходимостью дополнительного анализа, выходящего за рамки задачи расчета баланса, поэтому при программировании этот модуль был описан как внешняя процедура и не вошел в состав пакета.

Отметим, что блок 3 необходим только в случае расчета баланса при контроле неодинакового числа компонентов в продуктах схемы, что порождает две группы подпрограмм.

Блок расчета масс продуктов является наиболее сложным, поскольку связан с минимизацией функции многих переменных. Декомпозиция этого алгоритма приводит к следующей последовательности вычислений (рис. 4.4).

Вначале выбирают независимые продукты в технологической схеме из условия (2.55). На следующем шаге определяют эффективное начальное приближение, что обусловлено требованием оперативности расчета, поскольку выбор исходной точки минимизации в значительной степени определяет скорость сходимости итерационного процесса. В некоторых случаях, например для задач малой размерности (не более трех-пяти операций), оказывается, что дальнейшая минимизация необязательна, так как выбранное начальное приближение практически совпадает с точкой минимума. На следующем шаге находят минимум целевой функции (1.77), (2.27) и (2.57) в зависимости от типа исходной задачи. Полученный результат требует проверки на достоверность, так как из-за погреш-

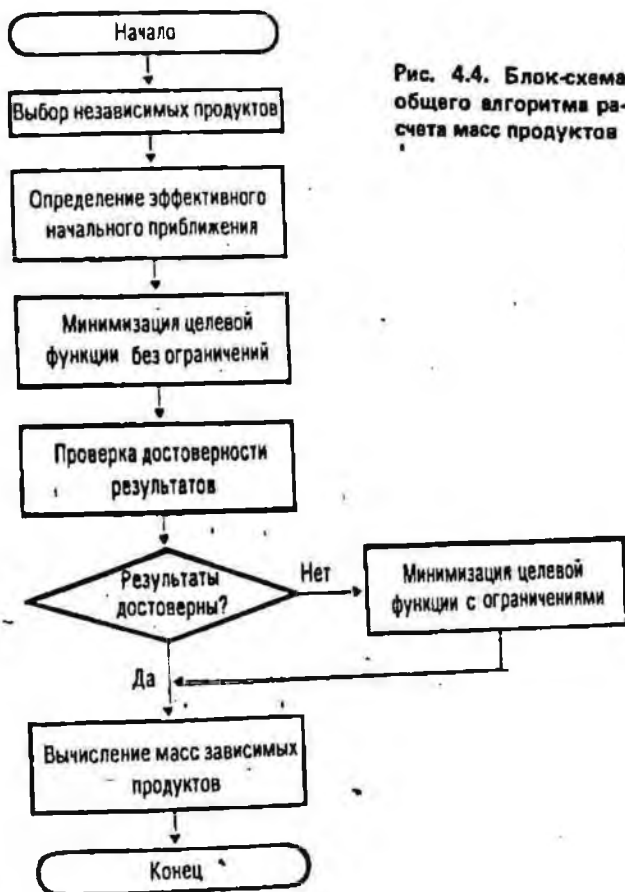


Рис. 4.4. Блок-схема общего алгоритма расчета масс продуктов

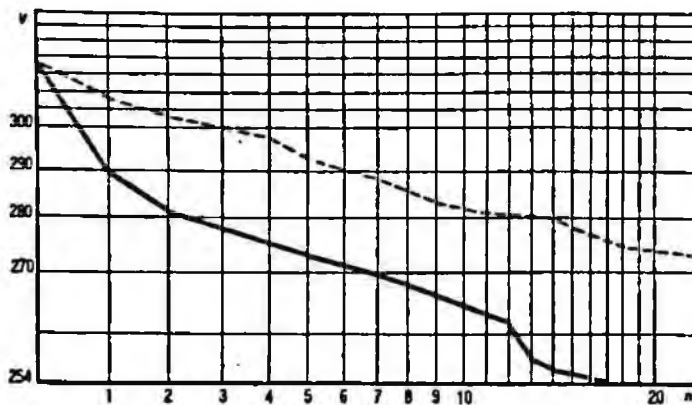


Рис. 4.5. Графики сходимости двух методов минимизации:

— — — метод наискорейшего спуска; — метод корректировки направления наискорейшего спуска

ностей исходных данных возможно получение результатов, не имеющих физического смысла. При возникновении подобных ситуаций дальнейший поиск масс продуктов осуществляют путем минимизации исходной целевой функции при ограничениях, которые исключают не имеющие физического смысла результаты.

Практическое испытание алгоритма показало его быструю сходимость к точке минимума (не более шести итераций) и высокую степень приближения. А для задач малой размерности такой процесс может быть принят в качестве процедуры минимизации целевой функции.

При выборе "точных" методов минимизации функции  $v$  естественно было бы использовать стандартные методы, имеющие готовую программную реализацию. Однако испытание таких градиентных методов, как метод наискорейшего спуска и сопряженных градиентов, показало, что в некоторых ситуациях они не обеспечивают достаточно быстрой сходимости. Более эффективным оказался метод корректировки наискорейшего спуска положительно определенной матрицей. Основная идея этого метода заключается в том, что поиск минимума на каждой итерации ведется не в направлении  $-\text{grad } v$ , как в методе наискорейшего спуска, а в направлении  $-C \text{ grad } v$ , где  $C$  — некоторая положительно определенная матрица. На рис. 4.5 отображены сходимости этих двух методов для решения задачи расчёта баланса технологической схемы, состоящей из 11 операций и 23 продуктов.

Эффективное начальное приближение находят методом квадратичной аппроксимации [13]. Суть его состоит в следующем. Если рассмотреть целевую функцию

$$v(a') = a'^T \tilde{A}(a') a' - 2\tilde{B}a' + c$$

и заменить матрицу  $\tilde{A}(a')$  некоторой постоянной симметричной положи-



тельно определенной матрицей  $\tilde{A}$ , то получим новую квадратичную функцию

$$v_0(Q') = Q'^T \tilde{A} Q' - 2\tilde{B} Q' + C, \quad (4.1)$$

поиск минимума которой сводится к решению системы уравнений

$$\tilde{A} Q' = \tilde{B}. \quad (4.2)$$

Если матрица  $\tilde{A}$  выбрана удачно, то минимум функции  $v_0$  будет близок к минимуму функции  $v$ . Поиск матрицы  $A$  проводят итеративно: на первом этапе задают некоторое начальное значение вектора  $Q'$  [0].

Таблица 4.1

Наименование программы	Назначение программы	Число версий
ODID	Оценка достоверности исходных данных	1
OPID	Оценка полноты исходных данных	1
VMTI	Вычисление технологической матрицы подсхемы по какому-нибудь компоненту	2
VOPL	Вычисление матрицы линейного преобразования "независимых" потоков в "зависимые"	1
VENP	Вычисление эффективного начального приближения целевой функции	2
VCF	Вычисление целевой функции $v$	2
VMZ	Вычисление матрицы $A$ и вектора $B$ в представлении функции $v = Q^T A Q + 2B^T Q + C$	2
VGCF	Вычисление градиента целевой функции	2
MCFBO	Минимизация целевой функций без ограничений	4
MCFO	Минимизация целевой функции при наличии ограничений	2
VVMP	Вычисление выходов (масс) продуктов	1
VMSS	Вычисление скорректированных содержаний компонентов	2
DVK	Дополнительное определение содержаний компонентов	1
ODR	Оценка достоверности результатов расчета	1
RDW	Расчет дисперсий выходов	1
VNV	Выбор "независимых" потоков	1
RBK	Расчет баланса контура	2
GELG	Решение системы линейных уравнений	1
MINV	Обращение матрицы общего вида	1
SINV	Обращение симметричной матрицы	1
RANK	Вычисление ранга матрицы	1

Примечания: 1. В таблице дано типовое имя, конкретные версии программ определяются следующими за типовым именем одним или двумя символами. 2. Число версий дано по состоянию на июль 1989 г., поскольку состав пакета постоянно расширяется.

а затем определяют матрицу  $\tilde{A}_{[1]}$  по формуле

$$\tilde{A}_{[1]} = \tilde{A}(Q'_{[0]}).$$

Последующие значения  $Q'_{[i]}$  находят из решения системы уравнений

$$\tilde{A}_{[i]} Q'_{[i]} = \tilde{A}(Q'_{[i-1]}) Q'_{[i]} = \tilde{B}.$$

На каждом шаге вычисляют значение целевой функции  $v(Q'_{[i]})$ .

За эффективное начальное приближение принимают величину  $Q'_{[k]}$ , минимизирующую значение целевой функции  $v$ .

Оценка достоверности результатов основана на введении экспертных границ изменения выходов продуктов. При нарушении этих границ выходы признаются недостоверными.

Варианты подпрограмм расчета технологического баланса и программных модулей определяются как типом задачи (равенством или неравенством числа контролируемых компонентов в продуктах), так и размерностью задачи.

Расчет товарного баланса реализован подпрограммой, предусматривающей вычисления по формулам (3.39) — (3.41).

Оценка точности расчета сводится к вычислению ковариационных матриц по формулам (2.30), (2.40) и (2.58).

Описанные подпрограммы при расчетах используют следующие модули: вычисление матрицы подсхемы; вычисление значения целевой функции  $v$  и ее параметров — матрицы  $\tilde{A}$  и вектора  $\tilde{B}$ ; вычисление градиента целевой функции  $\text{grad } v$ , а также специальные процедуры (обращение матриц, решение линейных систем, вычисление ранга матрицы).

Общий перечень подпрограмм, модулей и специальных процедур с указанием числа разработанных вариантов приведен в табл. 4.1.

#### 4.2. РАСЧЕТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО БАЛАНСА НА ОБОГАТИТЕЛЬНОЙ ФАБРИКЕ № 3 НПО "ДЖЕЗКАЗГАНЦВЕТМЕТ"

Пакет прикладных программ был использован при создании программного обеспечения расчета технологического баланса обогатительной фабрики № 3 НПО "Джезказганцветмет".

Обогатительная фабрика № 3 представляет собой производство, перерабатывающее многокомпонентное сырье и выпускающее три концентрата (медный, свинцовый и цинковый). Общая схема обогащения с указанием точек контроля масс и содержаний представлена на рис. 4.6. В каждом контролируемом потоке измеряют содержание свинца, меди и цинка. В настоящее время фабрика находится в стадии развития, которое предполагает в дальнейшем изменения в схеме контроля параметров. Кроме того, в связи с поступлением на фабрику различных сортов руд возможны и особые режимы обогащения, связанные с исключением од-

Рис. 4.6. Схема обогатительной фабрики:  
 ■ — точка контроля массы; ○, ⊖, ● — точки контроля содержаний соответственно постоянного, для 1-й очереди, для 2-й очереди

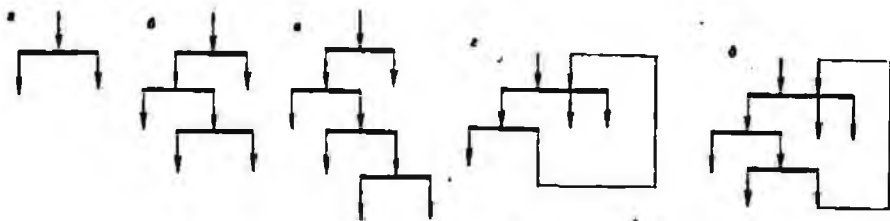
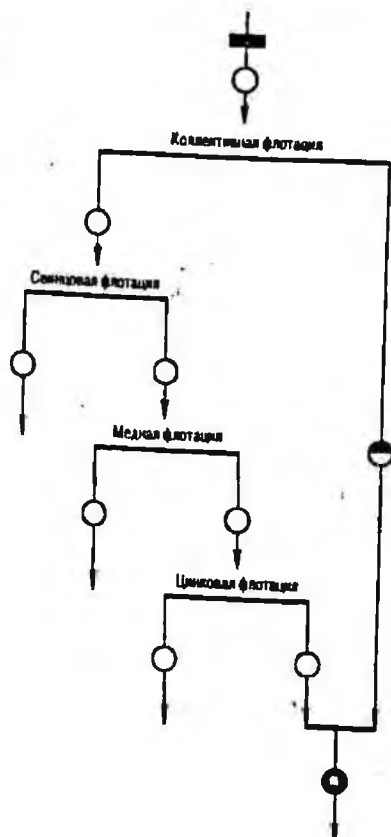


Рис. 4.7. Взаимосвязи контролируемых потоков:

*а* — при исключении всех селективных циклов для 1-й и 2-й очередей контроля; *б* — при исключении одного селективного цикла для 1-й очереди контроля; *в* — полная схема обогащения для 1-й очереди контроля; *г* — при исключении одного селективного цикла для 2-й очереди контроля; *д* — полная схема обогащения для 2-й очереди контроля

ного или всех селективных циклов. На рис. 4.7 показаны взаимосвязи контролируемых потоков в различных ситуациях. Эти обстоятельства приводят к существенным изменениям в структуре балансовых уравнений и, как следствие, в процедуре расчета баланса.

Однако, имея в пакете прикладных программ модули, ориентиро-

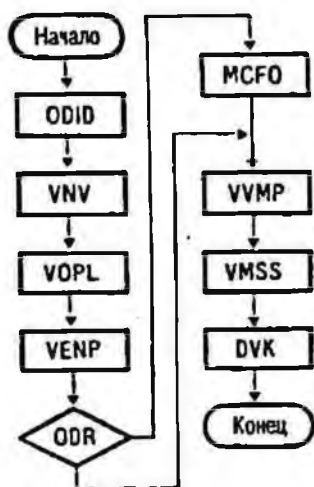


Рис. 4.8. Укрупненная блок-схема программы расчета технологического баланса

ванные на широкий класс задач расчета баланса, достаточно легко скопировать программу, реализующую балансовые расчеты в условиях изменения режимов работы.

Рассмотрим этап анализа исходных данных. Согласно общему алгоритму, приведенному в предыдущем разделе, он состоит из трех задач — оценка достоверности данных, корректировка данных и оценка полноты данных. Для условий обогатительной фабрики данный этап может быть реализован только одной программой оценки достоверности исходных данных ODID, поскольку вопросы полноты данных были учтены на стадии проектирования системы контроля, а система балансовых уравнений обладает такой степенью избыточности, что даже при исключении недостоверных данных осуществимо решение задачи расчета баланса на основе оставшейся информации, а недостоверные данные восстанавливаются затем при помощи программы DVK.

Как показали практические расчеты, нет необходимости использовать все задачи общего алгоритма и на этапе расчета баланса. В частности, можно исключить процедуру поиска минимума целевой функции  $v$  без ограничений, так как эффективное начальное приближение, как правило, обеспечивает достаточную точность определения минимума целевой функции. Для реализации оставшихся задач необходимо использовать программы VNV, VOPL, VENP, ODR, MCFO, VVMP, VMSS, DVK, причем следует использовать те версии программ, которые предназначены для расчета в условиях неодинакового числа контролируемых компонентов в продуктах. На рис. 4.8 представлена блок-схема компоновки программ пакета, которые реализуют расчет баланса на обогатительной фабрике.

Описанная программа входит в качестве составного элемента в более общую, которая обеспечивает ввод-вывод информации и вызов программы расчета баланса. Она занимает около 40 000 (восьмеричных) ячеек памяти, а время расчета составляет примерно 10–15 с (на ЭВМ СМ2).

#### 4.3. РАСЧЕТ БАЛАНСА НА АНОФ-3 ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ "АПАТИТ"

Пакет прикладных программ был использован при разработке программного обеспечения АСУТП (апатито-нефелиновая обогатительная фабрика № 3) АНОФ-3, в состав которой входила задача расчета технологического баланса. АНОФ-3 — развивающееся предприятие, ввод производственных мощностей которой запланирован поэтапно. Последовательный пуск 1-й, 2-й и 3-й секций соответственно меняет объем исходных данных, необходимых для расчета технологического баланса, и порядок расчета. Поэтому организация балансовых расчетов должна быть достаточно гибкой, чтобы при расширении производства, а также при остановке отдельных участков фабрики не требовалось бы корректировки программного обеспечения.

Реализация балансовых расчетов в рамках АСУТП налагает определенные ограничения на скорость решения. С одной стороны, время решения задачи расчета баланса должно быть достаточным для выполнения процедуры расчета, обеспечивающей высокую достоверность результатов, с другой — оно не должно быть настолько значительным, чтобы ограничивать время выполнения других задач в рамках АСУТП.

Приведенные основные требования к расчету баланса противоречивы, поэтому компромиссного решения с учетом особенностей обогатительной фабрики (схемы обогащения и контроля параметров, средств вычислительной техники) является задачей, которую необходимо решить на этапе проектирования АСУТП.

АНОФ-3 состоит из трех однотипных секций, на которых осуществляется раздельная переработка минерального сырья. На каждую секцию из дробильно-измельчительного передела поступает сырье по четырем технологическим линиям. В каждой из них измеряют массу продукта и содержания восьми компонентов. В выходных продуктах секции — хвостах (четыре потока) и концентрате (один поток) — также контролируют восемь компонентов. Таким образом, схема для расчета баланса имеет вид, представленный на рис. 4.9, а.

Система балансных уравнений для этой схемы содержит девять урав-

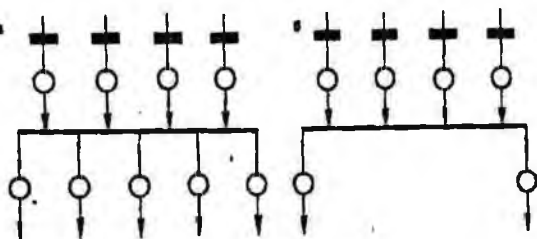


Рис. 4.9. Схема расчета технологического баланса:

○ — точки контроля содержания компонентов; ■ — точки контроля масс

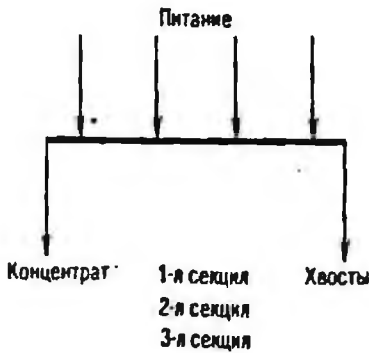


Рис. 4.10. Принципиальная схема расчета баланса обогатительной фабрики

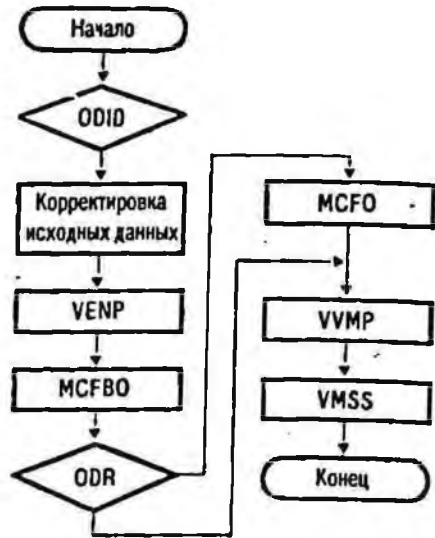


Рис. 4.11. Укрупненная блок-схема программы RBK

нений (восемь по массам контролируемых компонентов и одно по массе продуктов), пять неизвестных (массы выходных продуктов секции) и является переопределенной. Поэтому в качестве метода решения системы балансных уравнений был выбран метод корректировок измеренных данных по критерию максимального правдоподобия.

Следует учесть существенную особенность исходных данных для расчета баланса: содержания одноименных компонентов в хвостах близки и



Рис. 4.12. Укрупненная блок-схема программы RNB

поэтому имеется лишь формальная переопределенность системы балансных уравнений, не обеспечивающая достоверности результатов.

В связи с этим для расчета баланса секции была принята принципиальная схема, приведенная на рис. 4.9, б. В ней хвосты объединены в один продукт, содержания компонентов в котором определяются как средние арифметические содержания хвостовых потоков.

Взаимосвязь внутренних потоков секции и контроль содержаний в них таковы, что для какого-либо участка секции расчет технологического баланса невозможен.

Расчет баланса обогатительной фабрики в целом, в силу независимости работы секций (рис. 4.10), осуществляют суммированием результатов расчета баланса секций.

Таким образом, анализ схемы обогащения определяет двухуровневую структуру расчета баланса: на первом уровне расчет для секций (программа RBK), на втором — расчет по фабрике в целом (программа RNB).

При разработке указанных программ были использованы программы из пакета прикладных программ расчета технологического баланса. Укрупненные блок-схемы программ RBK и RNB приведены на рис. 4.11 и 4.12.

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. *Аленицин Ю.Е.* О составлении товарного баланса на обогатительных фабриках. — Обогащение руд, 1982, № 1, с. 24–28.
2. *Дюмин В.Г.* Особенности расчета баланса металлов при неодинаковом числе контролируемых компонентов в продуктах. — В кн.: Гибкие автоматизированные системы обогатительного производства. — Л., 1986, с. 154–168.
3. *Дюмин В.Г., Милин И.М., Процуто В.С.* Оптимальное свойство сведения товарного баланса металлов по критерию максимального правдоподобия. — Обогащение руд, 1982, № 6, с. 31–34.
4. *Дюмин В.Г., Тихонов О.Н.* Нахождения сепарационных характеристик на основе измерений средних содержаний компонентов в продуктах схемы обогащения. — Обогащение руд, 1987, № 5, с. 22–25.
5. *Козин В.З.* Опробование и контроль технологических процессов обогащения. — М., Недра, 1985.
6. *Козин В.З.* Опробование на обогатительных фабриках. — М., Недра, 1988.
7. *Косаревский А.Н., Милин И.М.* Об оценке достоверности товарного баланса. — Обогащение руд, 1987, № 4, с. 29–34.
8. *Оптимальные свойства сведения товарного баланса металлов по критерию максимального правдоподобия для полиметаллических фабрик / В.Г. Дюмин, А.Н. Косаревский, И.М. Милин, В.С. Процуто.* — В кн.: Гибкие автоматизированные системы автоматического производства. — Л., 1986, с. 141–154.
9. *Методика расчета технологического баланса металлов на обогатительных фабриках ОСТ 48–157–79 / В.И. Браун, В.Г. Дюмин, М.С. Крупнов, И.М. Милин.* — В кн.: Проектирование и внедрения автоматизированных систем управления технологическими процессами на обогатительных фабриках цветной металлургии. — Л., 1979, с. 90–102.
10. *Походзей Б.Б., Тихонов О.Н.* Расчет и оптимизация схем флотационного обогащения с применением ЭВМ. — Л., 1983.
11. *Щупов Л.П.* Моделирование и расчет на ЭВМ схем обогащения. — М., 1980.
12. *Hoduin D., Everell M.D.* A hierarchical procedure for djustment and material balancing of mineral processing, 1980, V. 7, № 2, p. 911–1116.



**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОТРАСЛЕВОГО СТАНДАРТА  
"РАСЧЕТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО БАЛАНСА МЕТАЛЛОВ  
НА ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ ФАБРИКАХ МЦМ СССР  
С ПРИМЕНЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И ЭВМ"**

Отраслевой стандарт разработан Механобром в 1979 г. и введен в действие с 1 января 1980 г. Методы расчета технологического баланса основаны на использовании избыточной информации для более точного определения технологических показателей.

Стандарт распространяется на методы расчета технологического баланса на обогатительных фабриках МЦМ СССР, перерабатывающих руды тяжелых, цветных и редких металлов (полиметаллические, свинцово-цинковые, медные, медно-никелевые, вольфрамо-молибденовые), на которых накоплен значительный опыт использования рентгеноспектральных анализаторов для контроля содержаний элементов в рудах и продуктах обогащения и установлены современные средства вычислительной техники — универсальные или управляющие вычислительные машины.

Стандарт устанавливает порядок подготовки и проведения расчета технологического баланса на обогатительных фабриках цветной металлургии. Стандарт предусматривает использование избыточной информации о содержании полезных компонентов в руде и продуктах обогащения с целью повышения точности расчета выходов продуктов, массы металлов и извлечений, а также корректировки содержаний.

Результаты расчета технологического баланса используются для оперативного управления технологическим процессом обогащения, оценки работы обогатительной фабрики в целом и отдельных ее участков.

При функционировании автоматизированной системы управления технологическими процессами (АСУТП) обогатительной фабрики алгоритм расчета технологического баланса является составной частью математического обеспечения подсистемы расчета технико-экономических показателей и использует информацию, получаемую от подсистемы централизованного контроля и подсистемы автоматизированного аналитического контроля.

## 1. Основные определения

1.1. Технологический баланс металлов обогатительной фабрики или отдельных ее участков контуров за установленный отрезок времени является отчетом о поступлении и переработке металлосодержащего материала, основным на аналитических методах расчета без учета механических потерь.

1.2. Технологический баланс металлов, в дальнейшем именуемый баланс, за минимальный для контура отрезок времени (контрольный период) является первичным. Баланс за более продолжительные периоды (смена, сутки и т.д.), именуемые в дальнейшем расчетными, является вторичным.

1.3. Расчет баланса представляет собою последовательность вычислительных операций с целью определения выходов продуктов, масс металлов, скорректированных содержаний и извлечений по измеренным массам исходных питаний и содержаниям компонентов в продуктах.

1.4. Расчет первичного баланса осуществляют на основе системы балансных уравнений, являющихся математическим выражением закона сохранения вещества.

1.5. Расчет вторичного баланса производят накоплением результатов первичных балансов.

## 2. Подготовка информации для расчета технологического баланса металлов

2.1. Подготовка информации для расчета баланса включает в себя анализ технологической схемы, схемы контроля содержания металлов и измерения масс, подготовительные операции для оценки точности измерений и задание исходных данных, поступающих за контрольный период.

2.2. Анализ технологической схемы и схемы измерений заключается в выделении технологических контуров, установлении иерархии технологических операций и порядка нумерации продуктов.

2.2.1. В технологической схеме обогащения, содержащей операции промпродуктового сгущения, выделяют технологические контуры. Баланс рассчитывают по контурам.

2.2.2. В технологическом контуре последовательно выделяют технологические операции первой ступени, второй и т.д.

2.2.3. Все технологические операции, входящие в состав контура, нумеруют последовательно по ступеням.

2.2.4. Осуществляют сквозную нумерацию всех продуктов технологического контура. Продукты нумеруют по операциям: последовательно нумеруют выходные продукты первой операции, второй и т.д., а затем исходные питаня контура.

2.2.5. Для контура, имеющего  $p$  операций,  $l$  исходных питаний и  $n$  выходных продуктов суммарно по всем операциям, составляют технологическую матрицу  $T$  размерности  $p(n + l)$ , полностью отражающую его структуру. Элементы технологической матрицы  $T_{kj}$  ( $k = \overline{1, p}; j = \overline{1, n + 1}$ ) определяют следующим образом:

$$T_{kj} = \begin{cases} -1, & \text{если } j\text{-й продукт является входным для } k\text{-й операции;} \\ 0, & \text{если } j\text{-й продукт не участвует в } k\text{-й операции;} \\ +1, & \text{если } j\text{-й продукт является выходным для } k\text{-й операции.} \end{cases}$$

2.3. Подготовительные операции для оценки точности измерений.

2.3.1. На основе метрологических характеристик и опыта эксплуатации используемых средств и методов определения содержания каждого из контролируемых компонентов в продуктах обогащения формируют таблицы допустимых расхождений, имеющие следующую структуру:

Пределы изменения содержания, %	Допустимые расхождения в результатах параллельных анализов, %

Для технологического контура, содержащего  $p$  операций и  $n$  выходных продуктов операций, число контролируемых компонентов  $m$  выбирают таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $(m+1)p \geq n$ .

2.3.2. На основе метрологических характеристик и опыта эксплуатации используемых средств измерения масс (по сухому твердому) определяют относительные погрешности измерения масс исходных питаний  $\Delta_r(Q_j^*)$  ( $j = \overline{n+1, n+l}$ ).

2.4. Исходными данными для расчета баланса за контрольный период являются значения измеренных содержаний компонентов во всех продуктах контура, представляемые в форме матрицы

$$B = [\beta_{ij}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+l}),$$

где  $\beta_{ij}$  — измеренное содержание  $i$ -го металла в  $j$ -м продукте, и массы (по сухому весу) исходных питаний контура  $Q_{n+1}^*, Q_{n+2}^*, \dots, Q_{n+l}^*$ .

### 3. Расчет технологического баланса металлов

Выходы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+l}$  продуктов контура за контрольный период находят из системы балансных уравнений, которая в общем случае является переопределенной и после введения для ее совместности корректировок содержаний  $\delta_{ij}$  имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{k1} (\beta_{11} + \delta_{11}) \gamma_1 + \tau_{k2} (\beta_{12} + \delta_{12}) \gamma_2 + \dots + \tau_{k, n+l} (\beta_{1, n+l} + \delta_{1, n+l}) \gamma_{n+l} = 0 \\ \tau_{k1} (\beta_{21} + \delta_{21}) \gamma_1 + \tau_{k2} (\beta_{22} + \delta_{22}) \gamma_2 + \dots + \tau_{k, n+l} (\beta_{2, n+l} + \delta_{2, n+l}) \gamma_{n+l} = 0 \\ \dots \dots \dots (k = \overline{1, p}) \\ \tau_{k1} (\beta_{m1} + \delta_{m1}) \gamma_1 + \tau_{k2} (\beta_{m2} + \delta_{m2}) \gamma_2 + \dots + \tau_{k, n+l} (\beta_{m, n+l} + \delta_{m, n+l}) \gamma_{n+l} = 0 \\ \tau_{k1} \gamma_1 + \tau_{k2} \gamma_2 + \dots + \tau_{k, n+l} \gamma_{n+l} = 0 \\ \gamma_{n+v} = (Q_{n+v}^* + \delta Q_{n+v}^*) / Q_{\max}^* \quad (v = \overline{1, l}), \end{array} \right.$$

где

$$Q_{\max}^* = \max_v \{ Q_{n+v}^* \}.$$

Система уравнений решается по критерию максимального правдоподобия, т.е. под решением понимается такой вектор  $\gamma = [\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{n+l}]$ , который вместе с набором корректировок  $\delta_{ij}$  и  $\delta Q_{n+v}^*$  удовлетворяет каждому уравнению и минимизирует функцию

$$L = \sum_{i,j} \frac{\delta_{ij}^2}{\sigma^2 (\beta_{ij})} + \sum_v \frac{(\delta Q_{n+v}^*)^2}{\sigma^2 (Q_{n+v}^*)}.$$

В частном случае определенной системы балансных уравнений, при  $n = p(m+1)$ , все корректировки равны нулю и получаем обычное решение.

#### 3.1. Предварительные действия.

3.1.1. Формирование матрицы допустимых расхождений  $\Delta B = [\Delta \beta_{ij}]$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+l}$ ) выбором из таблиц допустимых расхождений значений  $\Delta \beta_{ij}$ , соответствующих измеренным содержаниям  $\beta_{ij}$ .

3.1.2. Вычисление матрицы средних квадратических отклонений содержаний  $\sigma = [\sigma_{ij}]$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}$ );

$$\sigma = \frac{1}{k_1} \Delta B,$$

где  $k_1$  — коэффициент пересчета; при нормальном распределении погрешностей измерений и 95 %-ной доверительной вероятности  $k_1 = 2\sqrt{2}$ .

3.1.3. Нормирование масс исходных питаний

$$\gamma_{n+\nu}^* = Q_{n+\nu}^* / Q_{\max}^* \quad (\nu = \overline{1, l}),$$

где

$$Q_{\max}^* = \max_{\nu} \left\{ Q_{n+\nu}^* \right\}.$$

3.1.4. Вычисление средних квадратических отклонений нормированных масс исходных питаний

$$\sigma_{n+\nu} = \Delta_i (Q_{n+\nu}^*) \gamma_{n+\nu}^* / k_2 \quad (\nu = \overline{1, l}),$$

где  $k_2$  — коэффициент пересчета;  $k_2 = 3$ .

3.1.5. Описание используемых векторов и матриц:

вектор выходов продуктов  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+l}]^T$ , где символ  $T$  обозначает операцию транспонирования;

вектор содержаний  $l$ -го компонента в продуктах контура

$$\beta_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i, n+l}]^T \quad (i = \overline{1, m});$$

вектор корректировок содержаний  $l$ -го компонента

$$\delta_i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i, n+l}]^T \quad (i = \overline{1, m});$$

матрица  $T_i = T \text{diag} [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i, n+l}]$  ( $i = \overline{1, m}$ );

матрица  $T_\gamma = T \text{diag} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+l}]$ ;

матрица  $A_i = A_i(\gamma) = T \text{diag} [\sigma_{i1}^2 \gamma_1^2, \sigma_{i2}^2 \gamma_2^2, \dots, \sigma_{i, n+l}^2 \gamma_{n+l}^2] T^T$  ( $i = \overline{1, m}$ );

матрица квадратичной формы  $A = A(\gamma) = \sum_{i=1}^m T_i A_i(\gamma) T_i + \text{diag} \left[ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \frac{1}{\sigma_{n+1}^2} \right]$ .

$$\left[ \frac{1}{\sigma_{n+2}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{n+l}^2} \right];$$

вектор-столбец  $b = \left[ 0, 0, \dots, 0, \frac{\gamma_{n+1}^*}{\sigma_{n+1}^2}, \frac{\gamma_{n+2}^*}{\sigma_{n+2}^2}, \dots, \frac{\gamma_{n+l}^*}{\sigma_{n+l}^2} \right]^T$ ;

постоянная  $c = \sum_{\nu=1}^l \left( \frac{\gamma_{n+\nu}^*}{\sigma_{n+\nu}} \right)^2$ .

3.2. Расчет выходов.

3.2.1. Вычисление начального приближения

$$\gamma^{(0)} = [\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dots, \gamma_{n+1}^{(0)}]^T$$

решением системы балансных уравнений

$$\begin{cases} T_l \gamma = 0 & (l = \overline{1, m}) \\ \gamma_{n+v} = \gamma_{n+v}^* & (v = \overline{1, l}) \end{cases}$$

методом наименьших квадратов при соблюдении условия  $T\gamma = 0$ .

3.2.2. Вычисление  $k$ -го приближения  $\gamma^{(k)}$  как точки минимума квадратичной функции  $\gamma^T A (\gamma^{(k-1)}) \gamma - 2b^T \gamma + c$  ( $k \geq 1$ ) при линейных ограничениях  $T\gamma = 0$ .

3.2.3. Вычисление целевой функции в точке  $\gamma^{(k)}$

$$u(\gamma^{(k)}) = \gamma^{(k)T} A (\gamma^{(k)}) \gamma^{(k)} - 2b^T \gamma^{(k)} + c.$$

3.2.4. Проверка на окончание итерационного процесса. Точка  $\gamma^{(k)}$  — последнее приближение, если

$$\left| \frac{u(\gamma^{(k)}) - u(\gamma^{(k-1)})}{u(\gamma^{(k-1)})} \right| \leq \epsilon,$$

где  $\epsilon = 0,01$  — показатель стабилизации.

В противном случае итерационный процесс ступенчатого поиска продолжают до выполнения условия  $k = \mu$ , где  $\mu$  — максимальное число итераций,  $\mu = 10$ .

3.2.5. В качестве искомого вектора выходов

$$\tilde{\gamma} = [\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_{n+1}]^T$$

принимают приближение  $\gamma^{(k)}$ , соответствующее наименьшему значению целевой функции  $u$

3.3. Корректировка содержаний.

3.3.1. Вычисление вектора невязок по  $i$ -му компоненту

$$\Delta_i = T \tilde{\gamma} \beta_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

3.3.2. Вычисление матриц  $H_i = H_i(\tilde{\gamma}) = \text{diag} [\sigma_{i1}^2 \tilde{\gamma}_1^2, \sigma_{i2}^2 \tilde{\gamma}_2^2, \dots, \sigma_{i, n+1}^2 \tilde{\gamma}_{n+1}^2] \times$   
 $\times T^T A_i^{-1}(\tilde{\gamma}) \quad (i = \overline{1, m}).$

3.3.3. Вычисление векторов корректировок  $\delta_j = H_i(\tilde{\gamma}) \Delta_i \quad (i = \overline{1, m}).$

3.3.4. Вычисление скорректированных содержаний  $\beta_{ij}^* = \beta_{ij} + \delta_j \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}).$

3.4. Расчет масс металлов.

3.4.1. Вычисление масс продуктов контура  $Q_j = Q_{\max}^* \tilde{\gamma}_j \quad (j = \overline{1, n+1}).$

3.4.2. Вычисление масс компонентов во всех продуктах

$$M_{kj} = \beta_{kj}^* Q_j \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{1, n+1}).$$

3.5. Расчет извлечений.

3.5.1. Вычисление суммарных масс компонентов, поступивших в контур

$$M_k = \sum_{j=1}^l M_{k, n+j} \quad (k = \overline{1, m}).$$

3.5.2. Определение числа  $q$  конечных продуктов контура и их номеров  $j_1, j_2, \dots, j_q$  анализом технологической матрицы  $T$ .

3.5.3. Вычисление извлечений компонентов в конечные продукты контура  $\tilde{\epsilon}_{k, js} = M_{k, js} / M_k \quad (k = \overline{1, m}; s = \overline{1, q}).$

### 3.6. Определение показателей за расчетный период.

Определение показателей за расчетный период (смена, сутки и т.д.), состоящий из  $N$  контрольных периодов, осуществляется накоплением. Вычисленные за каждый  $\nu$ -й контрольный период ( $\nu = \overline{1, N}$ ) величины в п.п. 3.3.4, 3.4, 3.5.1 и 3.5.3 обозначаются соответственно через  $\tilde{\beta}_{kj}^{(\nu)}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{k,j,s}^{(\nu)}$ ,  $Q_j^{(\nu)}$ ,  $M_{kj}^{(\nu)}$ ,  $M_k^{(\nu)}$ , а те же величины за расчетный период обозначаются без индекса сверху.

3.6.1. Вычисление масс всех продуктов за расчетный период  $Q_j = \sum_{\nu=1}^N Q_j^{(\nu)}$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ).

3.6.2. Вычисление масс компонентов во всех продуктах за расчетный период  $M_{kj} = \sum_{\nu=1}^N M_{kj}^{(\nu)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ ).

3.6.3. Вычисление суммарных масс компонентов, поступивших в контур за расчетный период  $M_k = \sum_{\nu=1}^N M_k^{(\nu)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ).

3.6.4. Вычисление средних содержаний компонентов за расчетный период  $\tilde{\beta}_{kj} = M_{kj} / Q_j$  ( $k = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ ).

3.6.5. Вычисление извлечений компонентов в конечные продукты контура за расчетный период  $\tilde{\epsilon}_{k,j,s} = M_{k,j,s} / M_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ;  $s = \overline{1, q}$ ).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ПРОЕКТ ВРЕМЕННОЙ ОТРАСЛЕВОЙ МЕТОДИКИ СОСТАВЛЕНИЯ И РАСЧЕТА ТОВАРНОГО БАЛАНСА МЕТАЛЛОВ НА ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ ФАБРИКАХ ЦВЕТНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И ЭВМ\*

Отраслевая методика предусматривает сведение товарного баланса металлов по методу максимального правдоподобия с помощью ЭВМ, что повышает достоверность расчета основных показателей товарного баланса.

Рабочие инструкции по составлению товарного баланса металлов на обогатительных фабриках цветной металлургии СССР разрабатываются предприятиями совместно с отраслевыми институтами, утверждают всесоюзными производственными объединениями и должны конкретизировать требования настоящей методики: уточнять перечень исходных данных для составления товарного баланса и устанавливать значения погрешностей их определения с учетом местных условий.

\* Разработан Механобром.

## 1. Основные определения

1.1. Товарный баланс металлов на обогатительной фабрике предназначен для определения итоговых данных о количестве и качестве поступивших и переработанных руд или другого металлосодержащего сырья, выпущенных товарных концентратов, отвальных хвостов и других продуктов обогащения. Его составляют по данным массового учета исходного сырья, продуктов обогащения, остатков незавершенного производства, механических потерь и содержания в них полезных компонентов за отчетный период времени.

1.2. Расчет товарного баланса представляет собой последовательность вычислительных операций с целью сведения баланса, т.е. определения сбалансированных значений масс металлов и продуктов, участвующих в товарном балансе.

1.3. Товарный баланс составляют по всей фабрике в целом, а также по сортам руд, при раздельной их переработке и учете.

Основным отчетным периодом времени является месяц. В качестве вспомогательного составляют товарный баланс за декаду.

1.4. Товарный баланс составляют по массе руды и продуктов обогащения, выражаемой в тоннах, а содержания в них металлов, влаги или твердого задают в процентах.

1.5. Переработанной считается исходная руда, поступившая в цикл процесса обогащения.

1.6. Товарным концентратом называется концентрат, принятый ОТК.

1.7. Отвальными хвостами называются все металлосодержащие продукты, направляемые после осуществления технологических операций на обогатительной фабрике в отвал.

1.8. Остатками незавершенного производства на обогатительной фабрике называются концентраты, не принятые ОТК, а также другие металлосодержащие продукты, не выданные в товарную продукцию или в отвальные хвосты и находящиеся в емкостях обезвоживающего оборудования, на промежуточных складах, в отстойниках или других емкостях, подлежащих дальнейшей переработке или доводке на обогатительной фабрике.

1.9. Механическими потерями называются металлосодержащие продукты, систематически теряемые в процессе производства на обогатительной фабрике и учитываемые средствами измерения, опробования и анализа.

К механическим потерям относятся твердое в сливах сгустителей при сгущении продуктов (т.е. черновых, коллективных и готовых концентратов), пыль и тонкие фракции руды и продуктов обогащения, выносимые в процессе переработки.

## 2. Требования к исходным данным

Исходными данными для расчета товарного баланса являются массы сырья и продуктов обогащения, содержания в них металлов, влаги или твердого, а также погрешности их определения.

2.1. Определение массы сырья и продуктов обогащения.

2.1.1. Массу поступившей на фабрику за смену руды определяют по показаниям весоизмерительного оборудования перед приемными бункерами фабрики или сразу после дробления, перед поступлением в бункера дробленой руды, если при подаче на фабрику руду не взвешивают.

2.1.2. Массу переработанной на секции за смену руды определяют суммированием данных массового учета поступившей на рудные мельницы секции руды и массы поступивших на секцию шпамов от отмывки руды.

2.1.3. Массу поступивших в обогащение промпродуктов за смену определяют по данным массового учета.

2.1.4. Массу отгруженных внешнему потребителю товарных концентратов за оперативный период (сутки или смену) определяют суммированием данных массового учета (партий, вагонов, контейнеров) за этот период.

Массу товарных концентратов, отправленных потребителю внутри предприятия, определяют согласно установленному на предприятии порядку.

2.1.5. Массу остатков руды на складах и бункерах на конец отчетного периода определяет комиссия, назначенная главным инженером предприятия, путем маркшейдерских замеров.

На начало отчетного периода берут данные из сведенного товарного баланса за предшествующий отчетный период.

2.1.6. Массу (по сухому весу) остатков незавершенного производства, находящихся на промежуточных складах, в сгустителях и других емкостях, а также остатков товарных концентратов на складах на конец отчетного периода определяет комиссия по действующей на предприятии инструкции.

Данные о массе этих продуктов на начало отчетного периода берут из сведенного баланса за предшествующий отчетный период.

2.1.7. Массу механических потерь за оперативный период определяют как произведение объема соответствующих механических потерь (слива, газа и т.п.) на концентрацию в них твердого.

2.1.8. Массу отвальных хвостов за смену определяют из технологического баланса как разность между массой переработанной руды, других исходных продуктов и суммой масс концентратов.

2.2. Определение содержания металлов в сырье и продуктах обогащения.

2.2.1. Содержание металлов в переработанной руде определяют по сменным пробам, отобранным до начала основного цикла процесса переработки, включая операции предварительного обогащения.

2.2.2. Содержание металлов в отвальных хвостах определяют по сменным пробам отвальных хвостов.

2.2.3. Содержание металлов в товарных концентратах определяют по пробам, отобранным согласно действующим стандартам.

2.2.4. Содержание металлов в поступивших промпродуктах определяют по данным сертификатов поставщиков в случае согласия с ними потребителя.

2.2.5. Содержание металлов в остатках незавершенного производства, а также в остатках товарных концентратов на складах на конец месяца (декады) определяет комиссия по действующей на фабрике инструкции.

2.2.6. Содержание металлов в механических потерях определяют как средневзвешенное за месяц (декаду) по пробам, отобранным с утвержденной на предприятии периодичностью.

2.3. Определение содержания влаги в сырье и продуктах обогащения.

2.3.1. Содержание влаги в поступившей на фабрику руде определяют за весь отчетный период или за смену (по отобранным в этот период пробам или по данным поставщиков).

2.3.2. Содержание влаги в остатках руды на конец отчетного периода определяют по отобранным пробам.



2.3.3. Содержание влаги в переработанной руде определяют по сменным пробам, отобранными в непосредственной близости от места ее взвешивания.

2.3.4. Содержание влаги в привозных полупродуктах определяют по отобраным пробам.

2.3.5. Содержание влаги в отгруженных товарных концентратах (партий, вагоны, контейнеры) определяют по отобраным пробам.

Содержание влаги в товарных концентратах, отправленных потребителю внутри предприятия, определяют согласно установленному на предприятии порядку.

2.4. Определение содержания и концентрации твердого.

2.4.1. Содержание твердого в сырье и продуктах обогащения определяют по содержанию влаги в этих продуктах по формуле

$$\rho = 100 - W,$$

где  $\rho$  — содержание твердого в %;  $W$  — содержание влаги в %.

2.4.2. Концентрацию твердого ( $г/м^3$ ) в сливах сгустителей, печных газах и т.п. определяют как средневзвешенное за месяц (декаду) по пробам, отобраным с утвержденной на предприятии периодичностью.

2.5. Определение погрешностей измерения масс сырья и продуктов обогащения и содержаний в них металлов, влаги и твердого.

2.5.1. Погрешности измерения масс сырья и продуктов обогащения определяет метрологическая служба предприятия или ОТК на основании проверки характеристик и условий эксплуатации средств измерений масс.

2.5.2. Погрешности измерений содержаний металлов определяют в соответствии с действующими на предприятии нормативными материалами.

2.5.3. Погрешности измерений содержаний влаги определяют в соответствии с действующими на предприятии нормативными материалами.

2.5.4. Абсолютная погрешность определения содержания твердого в продукте равна абсолютной погрешности определения содержания влаги в этом продукте.

2.5.5. Погрешности определения характеристик остатков незавершенного производства устанавливают согласно принятой на предприятии инструкции.

2.5.6. Погрешности опробований руды и продуктов обогащения устанавливают экспериментально, согласно утвержденной на предприятии инструкции, и учитываются совместно с погрешностями определений влаги и содержаний металлов в этих продуктах.

Переход от погрешности анализа  $\sigma_{ан}$  к суммарной погрешности  $\sigma_{\Sigma}$  осуществляют по формуле

$$\sigma_{\Sigma} = \mu \sigma_{ан},$$

где  $\mu$  — коэффициент перехода.

### 3. Составление товарного баланса металлов

3.1. Товарный баланс металлов состоит из баланса по руде и баланса по металлам.

3.1.1. Все продукты, используемые в алгоритме расчета баланса, разбивают по технологическому принципу и периодичности измерений на десять групп, каждой из которых присваивают свой номер.

Первая группа (I) — поступившие руды и руды с усреднительного промежуточного склада.

Вторая группа (II) — руды в усреднительный склад (в отвал).

Третья группа (III) — переработанные секциями руды.

Четвертая группа (IV) — поступившие в обогащение промпродукты.

Пятая группа (V) — товарные концентраты, отгруженные внешнему потребителю, и товарные концентраты, используемые внутри предприятия.

Шестая группа (VI) — отвальные хвосты.

Седьмая группа (VII) — механические потери.

Восьмая группа (VIII) — остатки руды в бункерах дробления и главного корпуса.

Девятая группа (IX) — остатки незавершенного производства.

Десятая группа (X) — товарные концентраты на складах.

При отсутствии на предприятии какой-либо группы продуктов принятую нумерацию групп сохраняют.

3.1.2. В товарном балансе по руде сумма масс поступившей на фабрику руды и остатков ее в бункерах на начало отчетного периода должна быть равна сумме масс переработанной руды, ее остатков в бункерах на конец отчетного периода и поступивших в усреднительный склад (в отвал).

Принципиальная схема расчета товарного баланса по руде приведена на рис. П. 1.

Цифры на рис. П. 1 соответствуют перечисленным в п. 3.1.1 группам продуктов.

Пунктиром выделены группы продуктов, данные о которых определяют только на начало и конец отчетного периода.

3.1.3. В товарном балансе по металлам сумма масс переработанной руды, поступивших промпродуктов, остатков незавершенного производства и товарных концентратов на складах на начало отчетного периода и масс металлов в них должна быть равна сумме масс отгруженных товарных концентратов, отвальных хвостов, механических потерь, остатков незавершенного производства и товарных концентратов на складах на конец отчетного периода и масс металлов в них.

Принципиальная схема расчета товарного баланса по металлам приведена на рис. П. 2.

Цифры на рис. П. 2 соответствуют перечисленным в п. 3.1.1 группам продуктов.

Пунктиром выделены группы продуктов, данные о которых определяют только на начало и конец отчетного периода.

3.2. Баланс по руде.

3.2.1. Баланс по руде должен составляться по данным о массах поступивших и переработанных руд, движении руд на усреднительных складах (с учетом остатков руд на начало и конец отчетного периода) и по данным о содержании в них влаги.



Рис. П. 1. Принципиальная схема расчета товарного баланса по руде

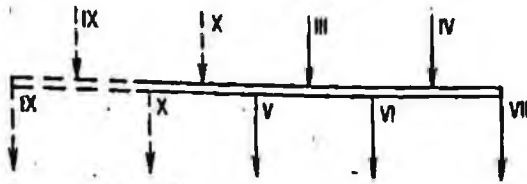


Рис. П. 2. Принципиальная схема расчета товарного баланса по металлам

3.2.2. При сведении баланса уточняют (корректируют), в соответствии с погрешностями их определения, массы руд, поступивших на фабрику, переработанных на каждой секции за отчетный период и поступивших в усреднительный склад, а также находящихся в остатках на конец отчетного периода.

3.2.3. Сведение баланса осуществляют в следующей последовательности. Согласно п. 3.1 алгоритма расчета (см. ниже) вычисляют невязку — разрыв баланса, а с учетом погрешностей весоизмерительного оборудования, маркшейдерских замеров и определения влажности вычисляют, согласно п. 3.3 алгоритма расчета, допустимую невязку баланса за отчетный период.

Если невязка баланса по абсолютной величине не превышает допустимую и за последние пять месяцев подряд не было постоянства знака невязки, то невязку устраняют путем корректировки исходных данных, согласно п.п. 3.5–3.6 алгоритма расчета.

В остальных случаях главным инженером предприятия должна быть назначена специальная комиссия для проверки правильности определения исходных данных и разработки мероприятий по устранению причин недопустимой невязки.

### 3.3. Баланс по металлам.

3.3.1. Баланс по металлам должен составляться по данным о массах переработанных руд, поступивших в обогащение промпродуктов, механических потерь, остатков незавершенного производства, товарных концентратов и их остатков, по данным о содержании металлов, влаги или твердого в этих продуктах и о содержании металлов в отвальных хвостах за отчетный период.

3.3.2. Массы продуктов третьей группы принимают равными массам, установленным при сведении баланса по руде.

Массы продуктов IV–VII групп определяют накоплением данных оперативного учета. Массы продуктов IX–X групп на начало отчетного периода принимают равными скорректированным значениям масс этих продуктов на конец предшествующего отчетного периода.

Массы продуктов IX–X групп на конец отчетного периода определяет комиссия по действующей на предприятии инструкции, путем маркшейдерских замеров или взвешивания.

Содержания металлов за отчетный период в продуктах III–VI групп определяют расчетно как средневзвешенные величины ежесменных оперативных анализов. Содержания металлов в продуктах IX–X групп на начало отчетного периода принимают равными скорректированным значениям содержаний металлов в этих продуктах на конец предшествующего отчетного периода. Содержания металлов в продуктах IX–X групп на конец отчетного периода определяет комиссия по действующей на предприятии инструкции.

**3.3.3.** При сведении баланса уточняют в соответствии с погрешностями их определения массы металлов в продуктах III группы и товарных концентратах, используемых внутри предприятия из V группы, путем корректировки содержаний металлов в них, а массы металлов в продуктах VI, IX-X групп уточняют путем корректировки масс этих продуктов и содержаний металлов в них.

**3.3.4.** Сведение баланса по металлам осуществляют в следующей последовательности.

Согласно п. 5.1 алгоритма расчета вычисляют невязки баланса по каждому из контролируемых металлов и с учетом погрешностей измерений масс продуктов, ошибок опробований, погрешностей измерений содержания металлов и влаги в этих продуктах вычисляют, согласно п. 6.2 алгоритма расчета, допустимые невязки баланса за отчетный период для каждого контролируемого металла.

Если невязки баланса для каждого из контролируемых металлов не превышают по абсолютной величине соответствующих допустимых невязок для этих металлов за отчетный период, то баланс сводят в соответствии с п.п. 5-6 алгоритма расчета.

В противном случае главный инженер предприятия назначает специальную комиссию для проверки правильности определения исходных данных.

По уточненным данным повторно вычисляют невязку и далее действуют согласно вышеизложенному.

**3.4.** После сведения балансов по руде и по металлам по уточненным данным подсчитывают товарное извлечение (в процентах) для каждого контролируемого металла в каждый товарный концентрат как отношение массы металла в товарном концентрате, полученном за отчетный период, к уточненной массе металла в переработанном сырье с учетом остатков незавершенного производства.

### **3.5. Товарный баланс с начала года.**

**3.5.1.** Товарный баланс с начала года должен составляться по данным месячных балансов в следующем порядке. Остатки руды, незавершенного производства и товарных концентратов на складах на первое число текущего года, зафиксированные в балансе, повторяют в каждом балансе с начала года без изменения.

Поступившие в переработку руды и промпродукты, товарные концентраты, отвальные хвосты и механические потери фиксируют нарастающим итогом по месячным товарным балансам.

Остатки руды, незавершенного производства и товарных концентратов на складе записывают в том количестве, в каком они определены за последний отчетный месяц.

**3.5.2.** Товарное извлечение металлов в товарные концентраты определяют согласно п. 3.4 алгоритма расчета.

**3.6.** Товарный баланс подписывается составителем, главным инженером обогатительной фабрики, начальником ОТК и утверждается главным инженером предприятия.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТОВАРНОГО БАЛАНСА МЕТАЛЛОВ

1. Перечень исходных данных

1.1. Исходные данные общего назначения:

- число контролируемых металлов  $m$ ;
- число суток в отчетном периоде  $N$ ;
- число продуктов в каждой группе

$$n_I, n_{III}, n_{III}, n_{IV}, n_V, n_{VI}, n_{VII}, n_{VIII}, n_{IX}, n_X;$$

- таблицы допустимых расхождений результатов анализов для каждого контролируемого металла и на содержание твердого, имеющие структуру

Пределы изменения содержания, %	Допустимые расхождения, %

- максимальные относительные погрешности измерения масс продуктов в каждой группе, %:

$$\Delta_l(\tilde{a}_{Ij}), \Delta_l(\tilde{a}_{IIj}), \Delta_l(\tilde{a}_{IIIj}), \Delta_l(\tilde{a}_{IVj}), \Delta_l(\tilde{a}_{Vj}), \Delta_l(\tilde{a}_{VIj}),$$

$$\Delta_l(\tilde{a}_{VIIj}), \Delta_l(\tilde{a}_{VIIIj}), \Delta_l(\tilde{a}_{IXj}), \Delta_l(\tilde{a}_{Xj});$$

- коэффициент перехода от погрешности анализа к суммарной погрешности (с учетом опробования)

$$\mu_{kij} (k = \overline{III, VI, IX, X}, l = \overline{1, m}; j = \overline{1, n_k});$$

- знаки невязок по руде за последние четыре отчетных периода;
- принципиальная схема расчета товарного баланса;
- схема контроля по массе, каждому контролируемому компоненту и влажности для всех продуктов принципиальной схемы;
- частота контроля продуктов.

1.2. Исходные данные для расчета суточных показателей:

- наборы сменных оперативных значений за  $\nu$ -ые сутки масс продуктов I—V групп и по сухому весу VI группы

$$[\tilde{a}_{Ij}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_I}), [\tilde{a}_{IIj}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_{II}}), [\tilde{a}_{IIIj}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_{III}}),$$

$$[\tilde{a}_{IVj}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_{IV}}), [\tilde{a}_{Vj}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_V}), [\tilde{a}_{VIj}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_{VI}}),$$

$$[\tilde{a}_{VI, j}^{\nu, \nu'}] (U = \overline{1, n_{VI}});$$

— наборы сменных оперативных значений содержаний твердого в каждом продукте I—V групп за  $\mathcal{U}$ -ые сутки

$$a) [\rho_{1j}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_1}), a) [\rho_{11j}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{11}}), [\rho_{111j}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{111}}),$$

$$[\rho_{1Vj}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{1V}}), [\rho_{Vj}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_V}), [\rho_{VVj}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{VV}}).$$

Если содержания твердого в I—II группах продуктов определяют на весь отчетный период, то вместо а) задаются соответственно

$$б) [\rho_{1j}] (v = \overline{1, n_1}), б) [\rho_{11j}] (v = \overline{1, n_{11}});$$

— наборы сменных (оперативных) значений содержаний каждого металла ( $i = \overline{1, m}$ ) в каждом продукте III—VI групп за  $\mathcal{U}$ -ые сутки

$$[\beta_{111ij}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{111}}), [\beta_{1Vij}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{1V}}), [\beta_{Vij}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_V}),$$

$$[\beta_{VVij}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{VV}}), [\beta_{VIj}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{VI}});$$

— набор сменных (оперативных) значений объемов продуктов VII группы за  $\mathcal{U}$ -ые сутки

$$[v_{VIIj}^{v,v'}] (v = \overline{1, n_{VII}}).$$

1.3. Исходные данные для расчета остатков на начало и конец отчетного периода:

— массы продуктов VIII—X групп по сухому весу на начало отчетного периода

$$a''_{VIIIj} (v = \overline{1, n_{VIII}}), a''_{IXj} (v = \overline{1, n_{IX}}), a''_{Xj} (v = \overline{1, n_X});$$

— массы продуктов VIII—X групп на конец отчетного периода

$$\tilde{a}_{VIIIj} (v = \overline{1, n_{VIII}}), \tilde{a}_{IXj} (v = \overline{1, n_{IX}}), \tilde{a}_{Xj} (v = \overline{1, n_X});$$

— содержание твердого в продуктах VIII—X групп на конец отчетного периода

$$\rho_{VIIIj} (v = \overline{1, n_{VIII}}), \rho_{IXj} (v = \overline{1, n_{IX}}), \rho_{Xj} (v = \overline{1, n_X}).$$

— концентрация твердого в каждом продукте VII группы за отчетный период

$$\rho_{VII} (v = \overline{1, n_{VII}});$$

— содержание каждого металла в каждом из продуктов VII группы за отчетный период

$$\beta_{VIIij} (v = \overline{1, n_{VII}}; i = \overline{1, m});$$

— содержания каждого металла ( $i = 1, m$ ) в каждом из продуктов IX—X групп на начало и конец отчетного периода

$$\beta_{IXj}^H, \beta_{IXij} (v = \overline{1, n_{IX}}), \beta_{Xij}^H, \beta_{Xij} (v = \overline{1, n_X}).$$

## 2. Накопление масс продуктов и их дисперсий за отчетный период

2.1. Определить сменные (оперативные) значения масс продуктов I–V групп по сухому весу.

$$Q_{kj}^{v,v'} = \hat{Q}_{kj}^{v,v'} \frac{\rho_{kj}^{v,v'}}{100} \quad (k = \overline{III, V}; j = \overline{1, n_k}; v' = \overline{1, 3});$$

$$Q_{kj}^{v,v'} = \begin{cases} \frac{1}{100} \hat{Q}_{kj}^{v,v'} \rho_{kj}^{v,v'} & \text{а)} \\ \frac{1}{100} \hat{Q}_{kj}^{v,v'} \rho_{kj} & \text{б)} \end{cases}, \quad (k = \overline{I, II}; j = \overline{1, n_k}; v' = \overline{1, 3}).$$

2.2. Накопить массы продуктов I–VI групп по сухому весу за текущие ( $\mu$ -ые) сутки

$$Q_{kj}^{(\nu)} = \sum_{v'=1}^3 Q_{kj}^{v,v'} \quad (k = \overline{I, VI}; j = \overline{1, n_k}; \nu = \overline{1, M}).$$

2.3. Накопить объемы продуктов VII группы за текущие ( $\mu$ -ые) сутки

$$V_{VII}^{(\nu)} = \sum_{v'=1}^3 V_{VII}^{v,v'} \quad (j = \overline{1, n_{VII}}).$$

2.4. Накопить массы продуктов I–VI групп по сухому весу с начала отчетного периода

$$Q_{kj} = \sum_{s=1}^{\nu} Q_{kj}^{(s)} \quad (k = \overline{I, VI}; \nu = \overline{1, M}).$$

2.5. Определить относительные средние квадратические погрешности измерения масс продуктов I–VI и VIII–X групп

$$\bar{\sigma}(\tilde{Q}_{kj}^{v,v'}) = \Delta_r (\tilde{Q}_{kj}) / k_2 \quad (k = \overline{I, V}; j = \overline{1, n_k}), \quad \sigma(Q_{VII}^{v,v'}) = \Delta_r (Q_{VII}) / k_2;$$

$$\bar{\sigma}(\tilde{Q}_{kj}) = \Delta_r (\tilde{Q}_{kj}) / k_2 \quad (k = \overline{VIII, X}; j = \overline{1, n_k}).$$

где  $k_2$  – коэффициент пересчета,  $k_2 = 3 \cdot 100$ .

2.6. Определить допустимые расхождения результатов анализов на содержание твердого в продуктах I–V и VIII–X групп.

$$\text{а) } \Delta \rho_{kj}^{v,v'}$$

$$\text{или } (k = \overline{I, II}; j = \overline{1, n_k}); \Delta \rho_{kj}^{v,v'} \quad (k = \overline{III, V}; j = \overline{1, n_k}); \Delta \rho_{kj} \quad (k = \overline{VIII, X}; j = \overline{1, n_k})$$

$$\text{б) } \Delta \rho_{kj}$$

выбором из таблиц допустимых расхождений.

2.7. Определить относительные средние квадратические погрешности измерения содержания твердого в продуктах I-V и VIII-X групп

$$a) \bar{\sigma}(\rho_{kj}^{v,v'}) = \frac{\Delta \rho_{kj}^{v,v'}}{k_1 \rho_{kj}^{v,v'}} \quad (k = I, II; j = \overline{1, n_k}; v' = \overline{1, 3})$$

или

$$b) \bar{\sigma}(\rho_{kj}) = \frac{\Delta \rho_{kj}}{k_1 \rho_{kj}} \quad (k = I, II; j = \overline{1, n_k});$$

$$\bar{\sigma}(\rho_{kj}^{v,v'}) = \frac{\Delta \rho_{kj}^{v,v'}}{k_1 \rho_{kj}^{v,v'}} \quad (k = III, V; j = \overline{1, n_k}, v' = \overline{1, 3});$$

$$\bar{\sigma}(\rho_{kj}) = \frac{\Delta \rho_{kj}}{k_1 \rho_{kj}} \quad (k = VIII, X; j = \overline{1, n_k}),$$

где  $k_1$  — коэффициент пересчета,  $k_1 = 2\sqrt{2}$ .

2.8. Определить дисперсии накопленных с начала отчетного периода масс продуктов I-III групп

$$D(Q_{kj}) = \begin{cases} \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_{kj}^{v,v'}) \sum_{v,v'} (Q_{kj}^{v,v'}) + \sum_{v,v'} (Q_{kj}^{v,v'})^2 \bar{\sigma}^2(\rho_{kj}^{v,v'}), & a) \\ \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_{kj}^{v,v'}) \sum_{v,v'} (Q_{kj}^{v,v'})^2 + \bar{\sigma}^2(\rho_{kj}) \bar{Q}_{kj}^2. & б) \end{cases}$$

$$D(Q_{kj}) = \bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_{kj}^{v,v'}) \sum_{v,v'} (Q_{kj}^{v,v'})^2 + \sum_{v,v'} (Q_{kj}^{v,v'})^2 \bar{\sigma}^2(\rho_{kj}^{v,v'}) \quad (k = III; j = \overline{1, n_{III}}).$$

2.9. Накопить объемы продуктов VII группы с начала отчетного периода

$$V_{VIIj} = \sum_{s=1}^v V_{VIIj}^{(s)} \quad (j = \overline{1, n_{VII}}; v = \overline{1, N}).$$

2.10. Определить массу продуктов VII группы с начала отчетного периода

$$Q_{VIIj} = V_{VIIj} \frac{\rho_{VIIj}}{10^6} \quad (j = \overline{1, n_{VII}}).$$

2.11. Определить массы продуктов VIII-X групп по сухому весу на конец отчетного периода и их дисперсии

$$Q_{kj} = \tilde{Q}_{kj} \frac{\rho_{kj}}{100} \quad (k = VIII, X; j = \overline{1, n_k});$$

$$D(Q_{kj}) = Q_{kj}^2 [\bar{\sigma}^2(\tilde{Q}_{kj}) + \bar{\sigma}^2(\rho_{kj})] \quad (k = VIII, X; j = \overline{1, n_k}).$$



### 3. Сведение баланса по руде за отчетный период

3.1. Определить невязку баланса по руде за отчетный период

$$\Delta_0 = \sum_{j=1}^{n_I} a_{Ij} + \sum_{j=1}^{n_{VIII}} (a_{VIIIj}^H - a_{VIIIj}) - \sum_{j=1}^{n_{III}} a_{IIj} - \sum_{j=1}^{n_{III}} a_{IIIj}.$$

3.2. Определить дисперсию невязки по руде за отчетный период

$$D(\Delta_0) = \sum_{k=1}^{III} \sum_{j=1}^{n_k} D(a_{kj}) + \sum_{j=1}^{n_{VIII}} D(a_{VIIIj})$$

3.3. Определить допустимую невязку баланса по руде за отчетный период

$$\Delta_0^{доп} = k \sqrt{D(\Delta_0)}, \quad k = 1,965.$$

3.4. Сравнить фактическую невязку баланса по руде за отчетный период с допустимой. Если выполняется неравенство  $|\Delta_0| \leq \Delta_0^{доп}$  и при этом за последние пять отчетных периодов нет постоянного знака разрыва баланса, то продолжить расчет. В противном случае действовать согласно п. 3.2.3 отраслевой методики (см. прилож. 1).

3.5. Уточнить массы руды I-II групп за отчетный период по критерию максимального правдоподобия

$$\hat{a}_{I,j} = a_{I,j} - \frac{D(a_{I,j})}{D(\Delta_0)} \Delta_0 \quad (j = \overline{1, n_I});$$

$$\hat{a}_{II,j} = a_{II,j} + \frac{D(a_{II,j})}{D(\Delta_0)} \Delta_0 \quad (j = \overline{1, n_{II}}).$$

3.6. Определить скорректированные массы переработанной секциями руды за отчетный период по критерию максимального правдоподобия

$$a'_{III,j} = a_{III,j} + \frac{D(a_{III,j})}{D(\Delta_0)} \Delta_0 \quad (j = \overline{1, n_{III}}).$$

В дальнейшем для удобства в обозначении величины  $a'_{III,j}$  штрих опускается.

3.7. Уточнить массы остатков руды в бункерах на конец отчетного периода по критерию максимального правдоподобия

$$\hat{a}_{VIII,j} = a_{VIII,j} + \frac{D(a_{VIII,j})}{D(\Delta_0)} \Delta_0 \quad (j = \overline{1, n_{VIII}}).$$

#### 4. Накопление масс металлов и их дисперсий за отчетный период

4.1. Определить сменные оперативные значения масс каждого из металлов в продуктах III–VI групп

$$M_{k,l,j}^{v,v'} = Q_{k,j}^{v,v'} \frac{\beta_{k,l,j}^{v,v'}}{100} \quad (k = \overline{\text{III, IV, V', V''}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}; v' = \overline{1, 3}).$$

4.2. Накопить массы каждого из металлов в продуктах III–VI групп за текущие ( $\nu$ -ые) сутки

$$M_{k,l,j}^{(\nu)} = \sum_{v'=1}^3 M_{k,l,j}^{v,v''} \quad (k = \overline{\text{III, IV, V', V'', VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}; \nu = \overline{1, N}).$$

4.3. Накопить массы каждого из металлов в продуктах III–VI групп с начала отчетного периода

$$M_{k,l,j} = \sum_{s=1}^{\nu} M_{k,l,j}^{(s)} \quad (k = \overline{\text{III, IV, V', V'', VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}; \nu = \overline{1, N}).$$

4.4. Определить массы каждого из металлов в продуктах VII группы за отчетный период

$$M_{VII,l,j} = Q_{VII,j} \frac{\beta_{VII,l,j}}{100} \quad (j = \overline{1, n_{VII}}; l = \overline{1, m}).$$

4.5. Определить массы каждого из металлов в продуктах IX–X групп на начало и конец отчетного периода

$$M_{k,l,j} = Q_{k,j} \frac{\beta_{k,l,j}}{100} \quad (k = \overline{\text{IX, X}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m});$$

$$M_{k,l,j}^H = Q_{k,j}^H \frac{\beta_{k,l,j}^H}{100} \quad (k = \overline{\text{IX, X}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}).$$

4.6. Определить средневзвешенные с начала отчетного периода содержания каждого из металлов в продуктах III–VI групп

$$\beta_{k,l,j} = \frac{M_{k,l,j}}{Q_{k,j}} \cdot 100 \quad (k = \overline{\text{III, VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}).$$

4.7. Определить допустимые расхождения результатов сменных (оперативных) анализов на содержание каждого металла в продуктах III–VI групп

$$\Delta \beta_{k,l,j}^{v,v'} \quad (k = \overline{\text{III, VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m})$$

выбором из таблиц допустимых расхождений.

4.8. Определить относительные средние квадратические погрешности сменных оперативных значений содержаний металлов в продуктах III–VI групп

$$\bar{\sigma}(\beta_{k,l,j}^{v,v'}) = \frac{\mu_{k,l,j} \Delta \beta_{k,l,j}^{v,v'}}{k_1 \beta_{k,l,j}^{v,v'}} \quad (k = \overline{\text{III, VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}).$$

4.9. Определить дисперсии средневзвешенных с начала отчетного периода содержаний каждого металла в продуктах III—VI групп, отнесенные к квадрату содержаний

$$\bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}) = \frac{\sum_{v,v'} (M_{k,l,j}^{v,v'})^2 [\bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}^{v,v'}) + (1 - \beta_{k,l,j}^{v,v'})^2 \bar{\sigma}^2(\alpha_{k,l,j}^{v,v'})]}{M_{k,l,j}^2}$$

$$(k = \overline{\text{III, VI}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}).$$

4.10. Определить допустимые расхождения результатов анализов на содержание каждого металла в продуктах IX—X групп на конец отчетного периода

$$\Delta \beta_{k,l,j} \quad (k = \overline{\text{IX, X}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m})$$

выбором из таблиц допустимых расхождений.

4.11. Определить относительные средние квадратические погрешности измененных содержаний металлов в продуктах IX—X групп на конец отчетного периода

$$\bar{\sigma}(\beta_{k,l,j}) = \frac{\mu_{k,l,j} \Delta \beta_{k,l,j}}{k_1 \beta_{k,l,j}} \quad (k = \overline{\text{IX, X}}; j = \overline{1, n_k}; l = \overline{1, m}).$$

4.12. Определить дисперсии накопленных с начала отчетного периода масс каждого металла в продуктах III—VI групп и на конец отчетного периода в продуктах IX—X групп

$$D(M_{k,l,j}) = \begin{cases} \sum_{v,v'} (M_{k,l,j}^{v,v'})^2 [\bar{\sigma}^2(\tilde{\alpha}_{k,l,j}^{v,v'}) + \bar{\sigma}^2(\rho_{k,l,j}^{v,v'}) + \bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}^{v,v'})], & k = \overline{\text{III, V}} \\ \sum_{v,v'} (M_{k,l,j}^{v,v'})^2 [\bar{\sigma}^2(\alpha_{k,l,j}^{v,v'}) + \bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}^{v,v'})], & k = \overline{\text{VI}} \\ M_{k,l,j}^2 [\bar{\sigma}^2(\tilde{\alpha}_{k,l,j}) + \bar{\sigma}^2(\rho_{k,l,j}) + \bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j})], & k = \overline{\text{IX, X}}. \end{cases}$$

## 5. Расчет масс отвальных хвостов

5.1. Определить невязки баланса по каждому металлу за отчетный период

$$\Delta_l = \sum_{k=\overline{\text{III}}}^{\text{IV}} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} - \sum_{k=\overline{\text{V}}}^{\text{VII}} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} + \sum_{k=\overline{\text{IX}}}^{\text{X}} \sum_{j=1}^{n_k} (M_{k,l,j}^{\text{H}} - M_{k,l,j}) \quad (l = \overline{1, m}).$$

5.2. Определить долю каждой массы хвостов  $Q_{\text{VI},j}$  в общей массе отвальных хвостов

$$\kappa_j = \frac{Q_{\text{VI},j}}{\sum_{j=1}^{n_{\text{VI}}} Q_{\text{VI},j}} \quad (j = \overline{1, n_{\text{VI}}}).$$

5.3. Ввести в рассмотрение следующие вектора и матрицы:

— вектор невязок по каждому металлу

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix};$$

— матрицы масс контролируемых металлов во всех продуктах IX и X групп

$$M_{IX} = \begin{bmatrix} M_{IX,1,1} & M_{IX,1,2} & \dots & M_{IX,1,n_{IX}} \\ M_{IX,2,1} & M_{IX,2,2} & \dots & M_{IX,2,n_{IX}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{IX,m,1} & M_{IX,m,2} & \dots & M_{IX,m,n_{IX}} \end{bmatrix}; M_X = \begin{bmatrix} M_{X,1,1} & M_{X,1,2} & \dots & M_{X,1,n_X} \\ M_{X,2,1} & M_{X,2,2} & \dots & M_{X,2,n_X} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{X,m,1} & M_{X,m,2} & \dots & M_{X,m,n_X} \end{bmatrix};$$

— транспонированные матрицы для  $M_{IX}$  и  $M_X$  соответственно  $M_{IX}^T, M_X^T$ ;  
— вспомогательную матрицу  $\Omega$  размерами  $m \times m$

$$[\Omega]_{l,l} = \begin{cases} \sum_{k=IX}^X \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} M_{k,l,j} \bar{\sigma}^2(a_{k,j}), & \text{если } l \neq I \\ \sum_{k=IX}^X \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j}^2 \bar{\sigma}^2(a_{k,j}) + \sum_{k=III, V''}^{VI, IX, X} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j}^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}), & \text{если } l = I \end{cases}$$

— обратную матрицу для матрицы  $\Omega$  соответственно  $\Omega^{-1}$ .

5.4. Найти скорректированную массу суммарных отвальных хвостов  $\hat{a}_{VI}$  из уравнения баланса масс продуктов

$$a_{VI} = \sum_{k=III}^{IV} \sum_{j=1}^{n_k} a_{k,j} + \sum_{j=1}^{n_{IX}} a_{IX,j} + \sum_{j=1}^{n_X} a_{X,j} - \sum_{k=V, V''}^{VII, IX, X} \sum_{j=1}^{n_k} a_{k,j} - \\ - \sum_{j=1}^{n_{IX}} \bar{\sigma}^2(a_{IX,j}) a_{IX,j} [M_{IX}^T \Omega^{-1} \Delta] - \sum_{j=1}^{n_X} \bar{\sigma}^2(a_{X,j}) a_{X,j} [M_X^T \Omega^{-1} \Delta],$$

в правую часть которого величина  $a_{VI}$  входит только в каждую координату вектора невязок  $\Delta$  и в каждый диагональный элемент матрицы  $\Omega$  по формулам:

$$\Delta_l = \sum_{k=III}^{IV} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} - \sum_{k=V, V''} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} + \sum_{k=IX}^X \sum_{j=1}^{n_k} (M_{k,l,j}^H - M_{k,l,j}) - \\ - \frac{1}{100} a_{VI} \sum_{j=1}^{n_{VI}} \kappa_j \beta_{VI,j,j}$$

$$\Omega_{II} = \sum_{k=IX}^X \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j}^2 \bar{\sigma}^2(\alpha_{k,j}) + \sum_{k=III,V}^{IX,X} \sum_{j=1}^{n_k} M_{k,l,j} \bar{\sigma}^2(\beta_{k,l,j}) + \frac{1}{100^2} \alpha_{VI}^2 \times \\ \times \left( \sum_{j=1}^{n_{VI}} \kappa_j^2 \beta_{VI,l,j}^2 \bar{\sigma}^2(\beta_{VI,l,j}) \right).$$

При решении уравнения итерационным методом рекомендуется за начальное приближения взять значение

$$(\alpha_{VI})_0 = \sum_{j=1}^{n_{VI}} \alpha_{VI,j}.$$

5.5. Определить скорректированные массы отвальных хвостов

$$\hat{\alpha}_{VI,j} = \kappa_j \hat{\alpha}_{VI} \quad (j = \overline{1, n_{VI}}).$$

## 6. Сведение баланса по металлам за отчетный период

6.1. Определить дисперсии невязок баланса по каждому металлу за отчетный период

$$D(\Delta_i) = \sum_{k=III}^{VI} \sum_{j=1}^{n_k} D(M_{k,l,j}) + \sum_{k=IX}^X \sum_{j=1}^{n_k} D(M_{k,l,j}) \quad (i = \overline{1, m}).$$

6.2. Определить допустимые невязки баланса по каждому металлу за отчетный период

$$\Delta_i^{\text{доп}} = k \sqrt{D(\Delta_i)}, \quad k = 1,965 \quad (i = \overline{1, m}).$$

6.3. Сравнить фактическую невязку баланса по каждому металлу за отчетный период с допустимой.

Если неравенство  $|\Delta_i| \leq \Delta_i^{\text{доп}}$  выполняется для всех металлов, то продолжить расчет товарного баланса. В противном случае расчет баланса прекратить и действовать согласно п. 3.3.4 разд. 3 отраслевой методики (см. прилож. 1).

6.4. Определить скорректированные массы продуктов и массы металлов по формулам, приведенным в таблице.

Номер группы	Скорректированные массы продуктов и металлов
III	$\hat{\alpha}_{III,j} = \alpha_{III,j}$ $\hat{M}_{III,l,j} = M_{III,l,j}$
IV	$\hat{\alpha}_{IV,j} = \alpha_{IV,j}$ $\hat{M}_{IV,l,j} = M_{IV,l,j}$

Номер группы	Скорректированные массы продуктов и металлов
V'	$\hat{a}_{V',j} = a_{V',j}$ $\hat{m}_{V',i,j} = m_{V',i,j}$
V''	$\hat{a}_{V'',j} = a_{V'',j}$ $\hat{m}_{V'',i,j} = m_{V'',i,j} + \bar{\sigma}^2 (\beta_{V'',i,j})^2 m_{V'',i,j}^2 [\Omega^{-1} \Delta]_i$
VI	$\hat{a}_{VI,j} = \kappa_j \hat{a}_{VI}$ $\hat{m}_{VI,i,j} = m_{VI,i,j} + \bar{\sigma}^2 (\beta_{VI,i,j})^2 m_{VI,i,j}^2 [\Omega^{-1} \Delta]_i$
VII	$\hat{a}_{VII,j} = a_{VII,j}$ $\hat{m}_{VII,i,j} = m_{VII,i,j}$
IX	$\hat{a}_{IX,j} = a_{IX,j} + \bar{\sigma}^2 (a_{IX,j}) a_{IX,j} [M_{IX}^T \Omega^{-1} \Delta]_j$ $\hat{m}_{IX,i,j} = m_{IX,i,j} + \bar{\sigma}^2 (\beta_{IX,i,j})^2 m_{IX,i,j}^2 [\Omega^{-1} \Delta]_i + \bar{\sigma}^2 (a_{IX,j})^2 m_{IX,i,j}^2 \times$ $\times [M_{IX}^T \Omega^{-1} \Delta]_j$
X	$\hat{a}_{X,j} = a_{X,j} + \bar{\sigma}^2 (a_{X,j}) a_{X,j} [M_X^T \Omega^{-1} \Delta]_j$ $\hat{m}_{X,i,j} = m_{X,i,j} + \bar{\sigma}^2 (\beta_{X,i,j})^2 m_{X,i,j}^2 [\Omega^{-1} \Delta]_i + \bar{\sigma}^2 (a_{X,j})^2 m_{X,i,j}^2 \times$ $\times [M_X^T \Omega^{-1} \Delta]_j$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Справочные сведения по математике . . . . .	13
<b>Глава 1. Расчет технологического баланса металлов разделительной операции . . . . .</b>	<b>21</b>
1.1. Общие сведения . . . . .	21
1.2. Традиционная методика расчета технологического баланса. . . . .	26
1.3. Методика расчета технологического баланса металлов по критерию максимального правдоподобия (КМП) . . . . .	42
<b>Глава 2. Расчет технологического баланса металлов разветвленной схемы обогащения . . . . .</b>	<b>83</b>
2.1. Математическая постановка задачи. . . . .	83
2.2. Анализ исходных данных для расчетов . . . . .	94
2.3. Расчет выходов, скорректированных содержаний. . . . .	99
2.4. Оценка точности расчета . . . . .	105
2.5. Примеры расчета выходов и оценка точности . . . . .	112
2.6. Обобщение методики расчета . . . . .	118
<b>Глава 3. Составление и расчет товарного баланса металлов. . . . .</b>	<b>127</b>
3.1. Особенности расчета баланса на обогатительных фабриках . . . . .	127
3.2. Методы сведения товарного баланса . . . . .	134
3.3. Оценка точности сведения товарного баланса и оптимальное свойство расчета по критерию максимального правдоподобия . . . . .	148
3.4. Достоверность товарного баланса . . . . .	149
<b>Глава 4. Балансовые расчеты на ЭВМ . . . . .</b>	<b>158</b>
4.1. Пакет прикладных программ расчета материального баланса . . . . .	158
4.2. Расчет технологического баланса на обогатительной фабрике № 3 НПО "Джезказганцветмет" . . . . .	164
4.3. Расчет баланса на АНОФ-3 производственного объединения "Апатит" . . . . .	167
Список литературы . . . . .	170
<b>П р и л о ж е н и е 1. Основные положения отраслевого стандарта "Расчет технологического баланса металлов на обогатительных фабриках МЦМ СССР с применением математических методов и ЭВМ". . . . .</b>	<b>171</b>
<b>П р и л о ж е н и е 2. Проект временной отраслевой методики составления и расчета товарного баланса металлов на обогатительных фабриках цветной металлургии с применением математических методов и ЭВМ . . . . .</b>	<b>176</b>
<b>П р и л о ж е н и е 3. Алгоритм расчета товарного баланса металлов. . . . .</b>	<b>183</b>

70 коп.

НЕДРА