ИЗВЕСТИЯ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА ГИДРОТЕХНИКИ, Т. XXIV, 1939
TRANSACTIONS OF THE SCIENTIFIC RESEARCH INSTITUTE OF HYDROTECHNICS, V. XXIV, 1939

Инж. А. И. Боткин

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СЫПУЧИХ И СВЯЗНЫХ ГРУНТАХ

ГЛАВА I

§ 1. Введение

Вопрос о равновесии грунта относится к наиболее слабо разработанным отделам строительной механики. Существующие способы расчета напряжений и деформаций в грунтах, вызванные необходимостью решения целого ряда важнейших инженерных задач, опираются главным образом на теорию упругости и не учитывают особенностей грунта, отличающих его от упругого тела. Поэтому результаты расчета, выполненного этими способами, нужно рассматривать как первое и, во многих случаях, довольно грубое приближение к действительности.

В данной работе сделана попытка решения вопроса о равновесии грунта с учетом основных механических свойств, отличающих его от тела, изучаемого в теории упругости. Грунт рассматривается как сплошная среда, характеристики деформируемости которой зависят от напряжений. В основу решения положены принципы теории пластичности. Исследование ограничено случаем, когда нагрузки, прикладываемые к грунту, возрастают. Возрастание предполагается настолько медленным, что деформации грунта успевают следовать за нагрузкой. Влияние скорости деформации и деформируемость грунта во времени, в этой части работы, не рассматриваются.

Исследование охватывает случай объемного напряженного состояния грунта и случай плоской деформации. В качестве примеров разобраны решения простейших задач. Одновременно приводятся результаты предварительного экспериментального исследования.

§ 2. Тензорное представление напряжения в данной точке

Рассмотрим сплошную среду, подверженную действию внешних сил. Напряжение в любой точке этой среды можно представить матрицей тензора

$$N=\begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Из условий равновесия элемента среды известно, что

$$X_y=Y_x;\ X_z=Z_x;\ Y_z=Z_y. \tag{2}$$

Тензор, обладающий таким свойством, называется с и м м е т р и ч н ы м.

Если тензор N умножить скалярно на вектор a справа, то получим новый вектор b. Это действие записывается в таком виде:

$$(N\cdot a)=b. \tag{3}$$

Составляющие вектора b представятся такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} b_x &= X_x a_x + X_y a_y + X_z a_z \\ b_y &= Y_x a_x + Y_y a_y + Y_z a_z \\ b_z &= Z_x a_x + Z_y a_y + Z_z a_z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

На основании этого тензор N можно рассматривать как оператор, совершающий преобразование вектора a в вектор b.

Если вектор a после умножения на тензор N изменяет только величину, не меняя направления, то

$$(N \cdot a) = \lambda a \tag{5}$$

и направление вектора a называют главным направлением тензора, а величину λ называют главным значением тензора.

Уравнение (5) равносильно трем уравнениям (4). Главные значения тензора определим из системы ур-ий (6):

$$\left.\begin{aligned} X_x a_x + X_y a_y + X_z a_z &= \lambda a_x \\ Y_x a_x + Y_y a_y + Y_z a_z &= \lambda a_y \\ Z_x a_x + Z_y a_y + Z_z a_z &= \lambda a_z \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Система ур-ий (6) имеет решение отличное от нуля только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} X_x-\lambda & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y-\lambda & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно λ:

$$\lambda^3 - (X_x + Y_y + Z_z)\lambda^2 + \left\{ \begin{vmatrix} Y_y & Z_y \\ Y_z & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Z_x \\ X_z & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} \right\} \lambda -$$

$$- \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Корни уравнения (8) λ_1, λ_2 и λ_3 будут главными значениями тензора и не должны зависеть от выбора системы координат, поэтому коэфициенты перед λ в уравнении (8) будут инвариантами тензора.

На основании соотношений между корнями уравнения третьей степени и коэфициентами можно написать равенства:

$$I_1 = X_x + Y_y + Z_z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} Y_y & Y_z \\ Z_y & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Z_x \\ X_z & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3. \tag{9}$$

I_1, I_2 и I_3 будем называть основными инвариантами тензора. Зная основные инварианты, можно составить неограниченное число других инвариантов.

В частности инвариантом тензора является величина:

$$\left.\begin{aligned} 2(I_1^2 - 3I_2) &= (X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6\,[X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2] = \\ &= 2\,[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1] = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

На основании работ Рош'а и Эйхингер'а легко показать, что величина, представленная формулой [1]

$$\frac{1}{3}\sqrt{2I_1^2-6I_2}=\frac{1}{3}\sqrt{(X_x-Y_y)^2+(Y_y-Z_z)^2+(Z_z-X_x)^2+6\,[X_y^2+Y_x^2+Z_x^2]}, \quad (11)$$

будет равна скалывающему напряжению по площадке равнонаклоненной к главным направлениям.

Напряжение в данной точке может быть представлено суммой двух тензоров. Для этого из диагональных членов тензора напряжений вычтем величину:

$$\sigma=\frac{X_x+Y_y+Z_z}{3}. \quad (12)$$

Тогда

$$N=\begin{vmatrix} X_x-\sigma & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y-\sigma & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z-\sigma \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Второй тензор в правой части равенства (13) называют шаровым, так как он не зависит от направления. Напряженное состояние, соответствующее этому тензору, будем называть гидростатическим напряжением (напряжения сжатия будем считать положительными).

Сумма диагональных членов первого составляющего тензора равна нулю. Такие тензора называются *девиаторами*. Девиатор напряжения в данной точке будет характеризовать напряжение сдвига. Интенсивность девиатора напряжений в данной точке будем выражать через инвариант (10) в таком виде:

$$\tau_m^2=(X_x-Y_y)^2+(Y_y-Z_z)^2+(Z_z-X_x)^2+6\,[X_y^2+Y_z^2+Z_x^2]. \quad (14)$$

Из формул (11) и (14) легко видеть, что интенсивность девиатора напряжений пропорциональна скалывающему напряжению по площадке, равнонаклоненной к главным направлениям.

§ 3. Тензорное представление деформации в данной точке.

Если перемещение точек сплошной среды в результате деформации представить векторной функцией

$$r=iu+jv+kw, \quad (15)$$

где u, v и w — проекции перемещения точек, то производная по некоторому направлению n от этой функции представится матрицей тензора:

$$\frac{dr}{dn}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Тензор, сопряженный с тензором (16), представится матрицей

$$\left(\frac{dr}{dn}\right)_c=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

[1] См. статью проф. Н. М. Беляева „Теории пластических деформаций", „Известия А. Н. СССР", 1937, О. Т. Н., № 1.

Любой тензор может быть разложен единственным образом на сумму двух тензоров, из которых один будет симметричным и другой антисимметричным. Симметричный тензор будет равен полусумме заданного тензора и тензора с ним сопряженного. Антисимметричный тензор равен полуразности заданного тензора и тензора с ним сопряженного.

$$\frac{dr}{dn} = \frac{\frac{dr}{dn} + \left(\frac{dr}{dn}\right)_c}{2} + \frac{\frac{dr}{dn} - \left(\frac{dr}{dn}\right)_c}{2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} + \tag{18}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad \omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \quad \omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right). \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \quad \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

После этого тензор (16) можно представить в таком виде:

$$\frac{dr}{dn} = \begin{vmatrix} e_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & e_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{xy} & \omega_{zx} \\ \omega_{xy} & 0 & -\omega_{yz} \\ -\omega_{zx} & \omega_{yz} & 0 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Первый составляющий тензор в правой части равенства (20) характеризует деформацию длины сторон и углов малого элемента, а второй вращение этого элемента как целого без деформации.

Тензор деформаций элемента можно разложить аналогично тензору напряжений на девиатор деформаций и шаровой тензор. Для этого из диагональных членов тензора вычтем величину

$$e = \frac{e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}}{3}, \tag{21}$$

которая является инвариантом тензора деформаций. После этого тензор деформаций (D) можно представить в таком виде:

$$D = \begin{vmatrix} e_{xx} - e & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & e_{yy} - e & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & e_{zz} - e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Девиатор тензора деформаций характеризует деформацию элемента, не сопровождающуюся изменением объема. Шаровой тензор характеризует деформацию элемента, при которой не происходит деформации углов и элемент остается сам себе подобным, т. е. деформацию, связанную с изменением объема.

Основными инвариантами тензора деформаций будут:

$$e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=e_1+e_2+e_3;$$

$$\begin{vmatrix} e_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{xx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xz} & e_{zz} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_{xx} & \gamma_{yx} \\ \gamma_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix}=e_1 e_2+e_2 e_3+e_3 e_1;$$

$$\begin{vmatrix} e_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & e_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}=e_1 e_2 e_3. \tag{23}$$

Интенсивность девиатора деформации γ_m будем выражать в таком виде:

$$\gamma_m^2=(e_{xx}-e_{yy})^2+(e_{yy}-e_{zz})^2+(e_{zz}-e_{xx})^2+6\,[\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2]. \tag{24}$$

Легко показать, что угол сдвига элемента нормали к площадке, равнонаклоненной к главным направлениям, равен

$$\frac{1}{3}\sqrt{(e_{xx}-e_{yy})^2+(e_{yy}-e_{zz})^2+(e_{zz}-e_{xx})^2+6\,[\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2]}. \tag{25}$$

§ 4. Условие прочности для грунтов в пространственной задаче

Сопротивление твердых тел действию внешних нагрузок поддерживается междучастичными силами.

В телах сыпучих сопротивляемость элемента действию одного вида напряжений будет обеспечиваться напряжениями другого вида и силами сцепления. Исходя из этого, общее напряженное состояние элемента грунта полезно разделить на две части и рассматривать действие каждой из этих частей в отдельности.

Условие прочности грунта по некоторой площадке согласно представлению Кулона может быть выражено такой формулой:

$$\tau \leqslant f\cdot\sigma+\tau_0, \tag{26}$$

где: τ — скалывающее напряжение по площадке,
σ — нормальное напряжение по площадке,
τ_0 — сила сцепления на единицу площади,
f — коэфициент внутреннего трения грунта.

Для того чтобы, оставаясь на точке зрения Кулона, перейти от площадки к объемному элементу, воспользуемся изложенным выше тензорным представлением напряжения в данной точке.

Согласно этому представлению напряжение сдвига в данной точке выражается девиатором напряжений с помощью шести составляющих.

Примем в качестве обобщенного скалывающего напряжения в данной точке интенсивность девиатора напряжения τ_m, выраженную через составляющие девиатора напряжений формулой (14). Это напряжение соответствует левой части уравнения (25).

Далее полагаем, что в грунте (сыпучем или связном) действию обобщенного сдвига в рассматриваемом элементе противодействует гидростатическое напряжение (σ) и сила сцепления грунта.

Окончательно условие прочности для объемного напряженного состояния может быть формулировано так: интенсивность девиатора напряжений или интенсивность сдвига должна быть меньше или равна некоторой функции от гидростатического напряжения (σ) плюс постоянная величина, учитывающая силы сцепления грунта

$$\tau_m \leqslant F(\sigma)+C. \tag{27}$$

В соответствии с данными опытов по испытанию грунтов функцию $F(\sigma)$ можно принять линейной.

Тогда условие прочности можно выразить такой формулой:

$$\tau_m \leqslant k\cdot\sigma+C. \tag{28}$$

Если σ для рассматриваемого элемента величина постоянная, то разрушение может наступить вследствие того, что τ_m будет велико и не будет удовлетворять условию (28).

С другой стороны, если $\tau_m = 0$ и σ изменяется уменьшаясь, то в сыпучем грунте разрушение произойдет при $\sigma = 0$; в грунте связном разрушение должно произойти тогда, когда правая часть неравенства (28) будет равна нулю

$$k\sigma + C = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = -\frac{C}{k}.$$

При этом σ достигнет некоторого отрицательного значения, способного преодолеть силы сцепления и разрушить элемент грунта.

Введем обозначение $C = kn$ и перепишем формулу (28) в таком виде:

$$\tau_m \leqslant k(\sigma + n). \tag{29}$$

Согласно формуле (29) мерой прочности грунта будет являться коэфициент k, соответствующий коэфициенту внутреннего трения в формуле (26)

$$\frac{\tau_m}{n+\sigma} \leqslant k$$

и коэфициент связности грунта n.

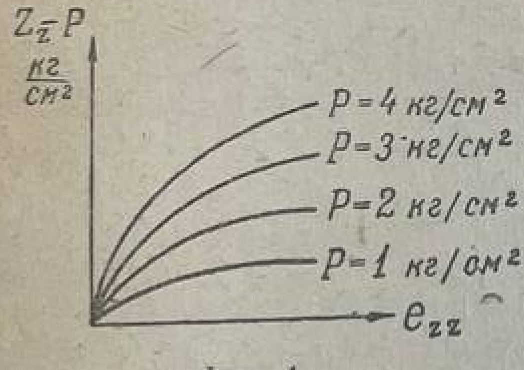
Сопротивление грунта действию внешней нагрузки, обусловленное силами сцепления, можно считать при этом соответствующим сопротивлению, обусловленному всесторонним сжатием (гидростатическим напряжением) интенсивности n.

§ 5. Результаты предварительного экспериментального исследования

Параллельно с теоретическим исследованием в Грунто-технической лаборатории Научно-исследовательского института гидротехники были поставлены опыты по изучению механических свойств грунта.

Испытание было проведено с образцами из песка.

Испытуемый песок насыпали в резиновый шланг, придавали ему цилиндрическую форму и помещали в прибор. После этого в прибор накачивали воздух и создавали всестороннее давление на образец. Во время опыта давление воздуха поддерживали постоянным.



Фиг. 1.

Давление воды и воздуха, заключенного в порах образца поддерживалось равным атмосферному. Далее образец нагружали осевой нагрузкой и измеряли с помощью зеркальных приборов поперечные и продольные деформации. В результате такого рода испытаний были получены диаграммы сжатия песчаных образцов (см. фиг. 1). По оси ординат отложены разности осевых и боковых напряжений, действующих на образец; по оси абсцисс—относительная продольная деформация. На основании данных этого опыта можно сделать следующие заключения:

а) диаграмма сжатия не содержит участка линейной зависимости между напряжениями и деформациями;

б) характеристики деформируемости грунта зависят от напряжений.

Если результаты опытов, представленные на фиг. 1, обработать с учетом бокового давления и поперечной деформации и отложить по оси ординат отношение $\frac{\tau_m}{\sigma}$, а по оси абсцисс γ_m (фиг. 2), то все кривые, соответствующие отдельным опытам при различном боковом давлении, почти наложатся одна на другую.

Далее с тем же песком были проведены опыты, в которых одновременно с возрастанием осевой нагрузки уменьшали боковое давление на образец. Соотношение между увеличением боковой нагрузки и уменьшением бокового давления было выбрано таким образом, что величина $\frac{\tau_m}{\sigma}$ возрастала. После обработки опытов кривые $\frac{\tau_m}{\sigma} =$

$=F(\gamma_m)$ совпали с пучком кривых, полученных из первого цикла опытов при другом характере возрастания нагрузки.

Из результатов опытов, приведенных на фиг. 2, можно сделать очень важные заключения:

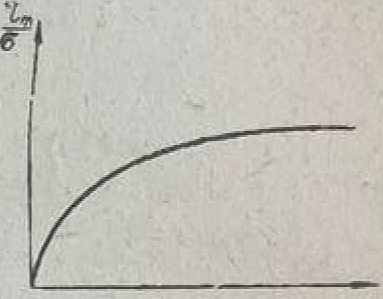
a) Если $\frac{\tau_m}{\sigma}$ монотонно возрастает, то зависимость

$$\frac{\tau_m}{\sigma}=F(\gamma_m) \tag{29'}$$

будет являться характеристикой деформируемости песка.

b) На основании предварительных опытов можно считать, что характеристикой деформируемости связных грунтов будет являться зависимость

$$\frac{\tau_m}{n+\sigma}=F(\gamma_m). \tag{29''}$$



Фиг. 2.

c) Выбор функциональной зависимости (29′) и (29″) не ограничен. Должны быть выполнены в основном два условия: 1) зависимость должна быть по возможности простой и 2) возможно более точно совпадать с кривой, полученной из опыта.

d) Для песка, испытанного в лаборатории, хорошее совпадение с данными опыта дает зависимость такого вида:

$$\frac{\tau_m}{\sigma}=\frac{A\gamma_m}{B+\gamma_m}. \tag{30}$$

Легко видеть, что при $F(\gamma_m)=k$ формулы (29′) и (29″) превращаются в условие прочности (29). Такое состояние грунта будет соответствовать моменту предельного равновесия.

§ 6. Зависимости между напряжениями и деформациями и характеристики деформируемости грунта

Зависимости между напряжениями и деформациями в упругом теле представляются следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{l} e_{xx}=\frac{1}{E}[(1+\mu)X_x-\mu(X_x+Y_y+Z_z)];\ \gamma_{xy}=\frac{1+\mu}{E}X_y. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{31}$$

Если ввести обозначение

$$X_x+Y_y+Z_z=3\sigma,$$

то формулы (31) можно привести к такому виду:

$$\left.\begin{array}{l} e_{xx}=\frac{1+\mu}{E}\left[X_x-\frac{3\mu}{1+\mu}\sigma\right];\ \ \gamma_{xy}=\frac{1+\mu}{E}X_y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{32}$$

$$e=\frac{1-2\mu}{E}\sigma. \tag{33}$$

Пользуясь формулами (32) и (33), легко получить зависимости между составляющими девиатора напряжений и составляющими девиатора деформаций

$$\left.\begin{array}{l} X_x-\sigma=\frac{E}{1+\mu}(e_{xx}-e);\ \ X_y=\frac{E}{1+\mu}\gamma_{xy} \\ Y_y-\sigma=\frac{E}{1+\mu}(e_{yy}-e);\ \ Y_z=\frac{E}{1+\mu}\gamma_{yz} \\ Z_z-\sigma=\frac{E}{1+\mu}(e_{zz}-e);\ \ Z_x=\frac{E}{1+\mu}\gamma_{zx}. \end{array}\right\} \tag{34}$$

Зависимость между гидростатическим напряжением

$$\sigma = \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3}$$

$$e = \frac{e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}}{3}$$

и деформацией объема будет выражена формулой (33).

Пользуясь формулами (34), легко получить зависимость между интенсивностью девиатора напряжений и интенсивностью девиатора деформаций в упругом теле

$$\tau_m = \frac{E}{1+\mu} \gamma_m. \tag{35}$$

Из формул (34) с помощью формулы (35) получим зависимости между составляющими девиатора напряжений и деформаций, не содержащие упругих постоянных.[1]

$$\left.\begin{aligned} X_x - \sigma &= (e_{xx} - e)\frac{\tau_m}{\gamma_m}; \quad X_y = \gamma_{xy}\frac{\tau_m}{\gamma_m}; \\ Y_y - \sigma &= (e_{yy} - e)\frac{\tau_m}{\gamma_m}; \quad Y_z = \gamma_{yz}\frac{\tau_m}{\gamma_m}; \\ Z_z - \sigma &= (e_{zz} - e)\frac{\tau_m}{\gamma_m}; \quad Z_x = \gamma_{zx}\frac{\tau_m}{\gamma_m}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Деформируемость упругого изотропного материала может быть полностью описана двумя независимыми коэфициентами. В соответствии с формулами (33), (34) и (36) в качестве характеристик деформируемости можно принять следующие величины:

$$\frac{\tau_m}{\gamma_m} = \frac{E}{1+\mu} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma}{e} = \frac{E}{1-2\mu} = K. \tag{37}$$

Первую из них будем называть обобщенным модулем сдвига и вторую — модулем объемного сжатия.

Допустим, что уравнения (36) остаются справедливы и в том случае, если зависимость, представленная для изотропного упругого тела формулой (35), будет выражаться некоторой более общей функцией

$$\tau_m = \varphi(\sigma, \gamma_m).$$

Подставив в формулы (36) значение τ_m по формуле (29″) и воспользовавшись обозначением:

$$\frac{F(\gamma_m)}{\gamma_m} = G(\gamma_m), \tag{38}$$

получим зависимости между напряжениями и деформациями в сыпучих и связных грунтах, заменяющие закон Гука:[2]

$$\left.\begin{aligned} X_x - \sigma &= (e_{xx} - e)(\sigma + n)G(\gamma_m); \quad X_y = \gamma_{xy}(\sigma + n)G(\gamma_m); \\ Y_y - \sigma &= (e_{yy} - e)(\sigma + n)G(\gamma_m); \quad Y_z = \gamma_{yz}(\sigma + n)G(\gamma_m); \\ Z_z - \sigma &= (e_{zz} - e)(\sigma + n)G(\gamma_m); \quad Z_x = \gamma_{zx}(\sigma + n)G(\gamma_m). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

---

[1] Соотношения (36) впервые были установлены Г. К. Генки. См. „Известия А. Н. СССР“, О. Т. Н., № 2, 1937 г.

[2] Если в формулах (39) положить $n = 0$ $G(\gamma_m) = \text{const}$ и $K = \infty$, то получим зависимости между напряжениями и деформациями в сыпучих телах, полученные Буссинеском на основании совершенно иных исходных предпосылок. См. „Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui des massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion“, par M. J. Boussinesq. 1876.

Для грунта сыпучего $n=0$.

Если ограничить исследование рассмотрением цикла нагрузки и допустить, что грунт на всем пути развития деформации будет оставаться телом изотропным, то для характеристики деформируемости необходимо иметь две величины. В соответствии с формулами (37) такими величинами будут являться

$$\frac{\tau_m}{\gamma_m}=(\sigma+n)\,G(\gamma_m) \text{ и } \frac{\sigma}{e}=K. \tag{40}$$

Обобщенный модуль сдвига грунта зависит от всестороннего сжатия и от интенсивности девиатора деформаций; модуль объемного сжатия, в том случае, если деформации малы, можно считать постоянным.

Последнее положение достаточно хорошо подтверждается опытами.

§ 7. Общие уравнения равновесия грунта.

Установив зависимости между напряжениями и деформациями, задачу о равновесии грунтов можно поставить как задачу математической физики.

Если грунт находится в равновесии или медленно деформируется, так что инерционными членами можно пренебречь, то составляющие напряжения должны удовлетворить уравнениям равновесия.[1]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}-\varrho x=0\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}-\varrho y=0\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}-\varrho z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Кроме того должны быть удовлетворены условия на поверхности

$$\left.\begin{aligned}
X_n&=X_x\cos(nx)+X_y\cos(ny)+X_z\cos(nz)\\
Y_n&=Y_x\cos(nx)+Y_y\cos(ny)+Y_z\cos(nz)\\
Z_n&=Z_x\cos(nx)+Z_y\cos(ny)+Z_z\cos(nz).
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Если тело линейно деформируемо, т. е. подчиняется закону Гука, то кроме этих двух условий составляющие напряжения должны удовлетворять шести соотношениям Бельтрами:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 X_x+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0\\
&\nabla^2 Y_y+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0\\
&\nabla^2 Z_z+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0\\
&\nabla^2 Y_z+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=0\\
&\nabla^2 Z_x+\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x}=0\\
&\nabla^2 X_y=\frac{1}{1+\mu}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

[1] Напряжения сжатия считаем положительными.

Соотношения Бельтрами можно получить из условий неразрывности деформаций Сен-Венана:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}=2\,\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}; \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right);\\
&\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}=2\,\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right);\\
&\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=2\,\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}; \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

если составляющие деформации в этих соотношениях заменить их выражениями через составляющие напряжения.

Таким образом соотношения Бельтрами предполагают наличие линейной зависимости между напряжениями и деформациями и поэтому не могут быть использованы при решении задачи о равновесии грунта.

Если выразить составляющие деформации через компоненты смещения в таком виде:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right);$$

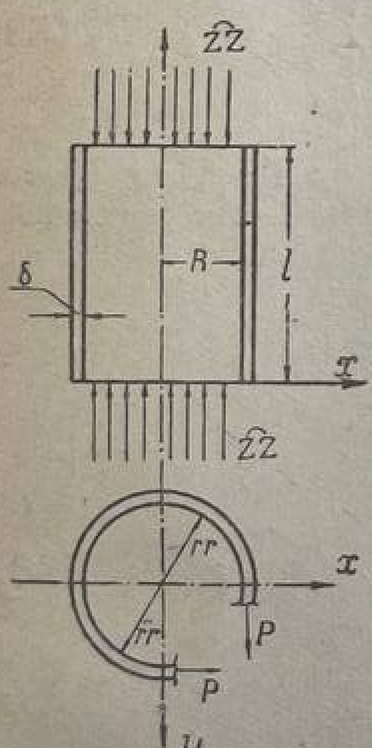
$$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z};\quad \gamma_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

то уравнения (44) будут являться необходимым и достаточным условием существования функций u, v и w.

Соотношения Сен-Венана получаются из чисто кинематического рассмотрения деформации и поэтому могут быть применены при исследовании напряженного состояния любого тела.

Подставив в соотношения (44) выражения для составляющих деформаций по формулам (39), получим соотношения подобные соотношениям Бельтрами для нелинейно деформируемого тела.

Уравнения неразрывности деформаций вместе с уравнениями равновесия и условиями на поверхности будут достаточными для решения вопроса о напряженном состоянии грунта. Таким образом задача о равновесии грунта в самом общем виде приводится к интегрированию системы трех уравнений равновесия и шести уравнений неразрывности деформаций с учетом условий на поверхности.



Фиг. 3.

§ 8. Простейшие задачи о равновесии грунта

а) Сжатие цилиндрического образца грунта в стакане с деформируемыми стенками

Цилиндрический образец грунта радиуса R и высотою l помещен в цилиндрическую оболочку толщиною δ (см. фиг. 3). Модуль нормальной упругости оболочки E. Перед нагрузкой грунт в стакане уплотняется до состояния, соответствующего всестороннему сжатию σ_0. При уплотнении грунта в стакане происходит некоторая деформация оболочки. Полагаем эту деформацию малой и исключаем ее из исследования.

Состояние уплотнения грунта, соответствующее всестороннему сжатию σ_0, будем рассматривать как исходное, от которого будем отсчитывать все деформации.

Трением по стенкам и по торцам образца пренебрегаем. Так как оболочка тонкая, то в первом приближении можем считать, что напряжения по радиальному сечению распределяются равномерно.

Напряжения zz возрастают от σ_0 до некоторого конечного значения. Из уравнений равновесия получаем

$$\widehat{rr} = \widehat{\theta\theta}. \tag{a}$$

Напряжения в оболочке

$$P = \frac{R\,(\widehat{rr} - \sigma_0)}{\delta}. \tag{b}$$

Относительная деформация оболочки

$$\varepsilon = \frac{R(\widehat{rr} - \sigma_0)}{\delta \cdot E}. \tag{c}$$

По условиям деформации

$$\varepsilon = e_{rr} = e_{\theta\theta}. \tag{d}$$

Гидростатическое напряжение

$$\sigma = \frac{\widehat{rr} + \widehat{\theta\theta} + \widehat{zz}}{3} = \frac{2\widehat{rr} + \widehat{zz}}{3}. \tag{e}$$

Деформация объема:

$$e = \frac{2e_{rr} + e_{zz}}{3} \tag{f}$$

$$\sigma - \sigma_0 = Ke \tag{g}$$

$$\tau_m = \sqrt{2}\,(\widehat{zz} - \widehat{rr}) \tag{h}$$

$$\gamma_m = \sqrt{2}\,(e_{zz} - e_{rr}). \tag{i}$$

Воспользовавшись формулой (30), получим:

$$\tau_m = (n + \sigma)\frac{A\gamma_m}{B + \gamma_m}; \tag{30}$$

Подставив τ_m по формуле (30) в уравнения (36), будем иметь:

$$\widehat{rr} - \sigma = \widehat{\theta\theta} - \sigma = (e_{rr} - e)(n + \sigma)\frac{A}{B + \gamma_m}; \tag{k}$$

$$\widehat{zz} - \sigma = (e_{zz} - e)\,(n + \sigma)\frac{A}{B + \gamma_m}. \tag{l}$$

Воспользовавшись приведенными выше формулами, получим выражения для составляющих деформаций:

$$e_{rr} = \frac{3R}{2\delta E}(\sigma - \sigma_0) + \frac{R}{2\delta E}(\sigma_0 - \widehat{zz}) \tag{m}$$

$$e_{zz} = \frac{3}{K}(\sigma - \sigma_0) - \frac{3R}{\delta E}(\sigma - \sigma_0) - \frac{R}{\delta E}(\sigma_0 - \widehat{zz}) \tag{n}$$

$$\gamma_m = \sqrt{2}\left[\frac{3}{K}(\sigma - \sigma_0) - \frac{9R}{2\delta E}(\sigma - \sigma_0) - \frac{3R}{2\delta E}(\sigma_0 - \widehat{zz})\right]. \tag{o}$$

Подставив значения e_{rr}, e_{zz} и γ_m по формулам (m), (n) и (o) в уравнение (l), получим:

$$(\widehat{zz} - \sigma)\left[B + \frac{3\sqrt{2}}{K}(\sigma - \sigma_0) - \frac{9\sqrt{2}\,R}{2\delta E}(\sigma - \sigma_0) - \frac{3\sqrt{2}\,R}{2\delta E}(\sigma_0 - \widehat{zz})\right] =$$

$$= A(n + \sigma\left[\frac{2}{K}(\sigma - \sigma_0) - \frac{3R}{\delta E}(\sigma - \sigma_0) - \frac{R}{\delta E}(\sigma_0 - \widehat{zz})\right]. \tag{p}$$

Из уравнения (р) получим формулу для определения $(\sigma-\sigma_0)$ в таком виде:

$$\sigma-\sigma_0=-\frac{1}{2}\left[-\frac{3\sqrt{2}\,\widehat{zz}'}{N}+\frac{2A(n+\sigma_0)}{N}+\frac{R\widehat{zz}'}{2\delta EL}+\frac{B}{LN}\right]\pm \tag{45}$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[-\frac{3\sqrt{2}\,\widehat{zz}'}{N}+\frac{2A(n+\sigma_0)}{N}+\frac{R\widehat{zz}'}{2\delta EL}+\frac{B}{LN}\right]^2-\left[-\frac{B\widehat{zz}'}{LN}-\frac{3\sqrt{2}\,R\widehat{zz}'^2}{2\delta ELN}+\frac{2RA(n+\sigma_0)\widehat{zz}'}{2\delta ELN}\right]},$$

где $L=\frac{1}{K}-\frac{3R}{2\delta E}$; $N=3\sqrt{2}+2A$; $\widehat{zz}'=\widehat{zz}-\sigma_0$.

Из того условия, что при $\widehat{zz}'=0$ $\sigma-\sigma_0=0$, перед корнем выберем знак плюс.

Задаваясь значениями $\widehat{zz}'$ по формуле (45), будем определять $(\sigma-\sigma_0)$; зная $(\sigma-\sigma_0)$, можно определить все составляющие напряжений и деформаций.

b) Сжатие цилиндрического образца грунта без возможности бокового расширения

Значение $(\sigma-\sigma_0)$ в этом случае можно подсчитать по формуле (45), если подставить в эту формулу $E=\infty$. Это будет соответствовать абсолютно жестким стенкам. При этом формулу (45) можно написать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}\sigma-\sigma_0=-\frac{1}{2}\left[-\frac{3\sqrt{2}\,\widehat{zz}'}{N}+\frac{2A(n+\sigma_0)}{N}+\frac{B\cdot K}{N}\right]+\\+\sqrt{\frac{1}{4}\left[-\frac{3\sqrt{2}\,\widehat{zz}'}{N}+\frac{2A(n+\sigma_0)}{N}+\frac{BK}{N}\right]^2+\left[\frac{BK\cdot\widehat{zz}'}{N}\right]},\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где: K — модуль объемного сжатия,

$N=3\sqrt{2}+2A$,

$\widehat{zz}'=\widehat{zz}-\sigma_0$,

n — характеристика связности грунта.

c) Сжатие цилиндрического образца грунта со свободной возможностью бокового расширения

На образец грунта действует некоторое начальное гидростатическое напряжение σ_0.

Кроме этого к торцам образца прикладываются дополнительные медленно возрастающие напряжения zz'. Полное напряжение

$$\widehat{zz}=\sigma_0+\widehat{zz}'. \tag{a}$$

Напряжения:

$$\widehat{rr}=\widehat{\theta\theta}=\sigma_0, \tag{b}$$

$$\sigma=\frac{2\sigma_0+\widehat{zz}}{3}. \tag{c}$$

Деформации:

$$e_{rr}=e_{\theta\theta}, \tag{d}$$

$$e=\frac{2e_{rr}+e_{zz}}{3}, \tag{e}$$

$$\sigma-\sigma_0=Ke, \tag{f}$$

$$\tau_m=\sqrt{2}(\widehat{zz}-\sigma_0), \tag{g}$$

$$\gamma_m=\sqrt{2}(e_{zz}-e_{rr}), \tag{h}$$

$$e=\frac{\widehat{zz}-\sigma_0}{3K}, \tag{i}$$

$$\tau_m=(n+\sigma)\frac{A\gamma_m}{B+\gamma_m}, \tag{k}$$

$$\gamma_m=\frac{B\tau_m}{A(n+\sigma)-\tau_m}. \tag{l}$$

Составляющие деформации представляются такими формулами:

$$e_{\widehat{rr}} = \frac{\widehat{zz} - \sigma_0}{3}\left[\frac{1}{K} - \frac{B}{A(n+\sigma) - \sqrt{2}(\widehat{zz} - \sigma_0)}\right], \tag{47}$$

$$e_{\widehat{zz}} = \frac{\widehat{zz} - \sigma_0}{3}\left[\frac{1}{K} + \frac{2B}{A(n+\sigma) - \sqrt{2}(\widehat{zz} - \sigma_0)}\right]. \tag{48}$$

d) Давление на вертикальные стенки круглого силоса

При определении давления на вертикальные стенки круглого силоса пренебрегаем трением по стенкам и по основанию. Засыпка грунта или какого-нибудь сыпучего тела в силос производится слоями. Каждый слой утрамбовывается до некоторого определенного уплотнения, одинакового для всех слоев и соответствующего некоторому гидростатическому напряжению σ_0.

При полном загружении силоса в сечении на высоте z

$$\widehat{zz} = \sigma_0 + \gamma(l - z), \tag{a}$$

где: γ — объемный вес грунта,
l — высота силоса,

$$\widehat{zz}' = \gamma(l - z). \tag{b}$$

Подставив значение $\widehat{zz}'$ в формулу (45), получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - \sigma_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{R}{2\delta EL} - \frac{3\sqrt{2}}{N}\right)\gamma(l-z) + \frac{2A(n+\sigma_0)}{N} + \frac{B}{LN}\right] + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{R}{2\delta EL} - \frac{3\sqrt{2}}{N}\right)\gamma(l-z) + \frac{2A(n+\sigma_0)}{N} + \frac{B}{LN}\right]^2 - \left[\frac{RA(n+\sigma_0)}{\delta ELN} - \frac{B}{LN} - \right.} \\ \overline{\left. - \frac{3\sqrt{2}R\gamma(l-z)}{2\delta ELN}\right]\gamma(l-z)}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Зная $(\sigma - \sigma_0)$, можно определить давление на вертикальные стенки силоса с учетом деформируемости стенки.

Подставив значение $\widehat{zz}'$ по формуле (b) в формулу (46), получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma - \sigma_0 = -\frac{1}{2}\left[\frac{B\cdot K}{N} + \frac{2A(n+\sigma_0)}{N} - \frac{3\sqrt{2}}{N}\gamma(e-z)\right] + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{B\cdot K}{N} + \frac{2A(n+\sigma_0)}{N} - \frac{3\sqrt{2}}{N}\gamma(e-z)\right]^2 + \frac{B\cdot K}{N}\gamma(e-z)}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Зная $(\sigma - \sigma_0)$, легко получить давление на вертикальные стенки силоса $(\widehat{rr})$ в предположении, что стенки силоса абсолютно жесткие.

ГЛАВА II

§ 1. Тензорное представление напряжения в данной точке в случае плоской деформации

Рассмотрим случай плоской деформации. Если ось z расположить перпендикулярно плоскости деформаций, то $w = 0$. Составляющие напряжения и деформации при этом не будут зависеть от координаты z. Из формул (19) легко установить, что

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Тогда на основании формул (36) получим:

$$Y_z = Z_x = 0.$$

Тензор напряжения для случая плоской деформации можно представить в таком виде:

$$N' = \begin{vmatrix} X_x & X_y & 0 \\ Y_x & Y_y & 0 \\ 0 & 0 & Z_z \end{vmatrix}. \tag{51}$$

Для определения главных значений этого тензора воспользуемся уравнениями (6)

$$\left.\begin{aligned} X_x a_x + X_y a_y &= \lambda a_x \\ Y_x a_x + Y_y a_y &= \lambda a_y \\ Z_z a_z &= \lambda a_z. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Из уравнений (52) видно, что Z_z будет одним из главных значений тензора. Для определения двух других значений получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} (X_x - \lambda)\, a_x + X_y a_y &= 0 \\ Y_x a_x + (Y_y - \lambda) a_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Система уравнений (53) имеет решение отличное от нуля только в том случае, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} X_x - \lambda & X_y \\ Y_x & Y_y - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

Раскрыв определитель, получим уравнение второй степени относительно λ:

$$\lambda^2 - (X_x + Y_y)\, \lambda + X_x Y_y - X_y^2 = 0. \tag{55}$$

Из уравнения (55) видно, что основными инвариантами тензора напряжений для случая плоской деформации будут являться величины

$$X_x + Y_y;\; X_x Y_y - X_y^2.$$

Зная соотношения между коэфициентами и корнями уравнения второй степени, можно написать:

$$\left.\begin{aligned} I'_1 &= X_x + Y_y = \lambda_1 + \lambda_2; \\ I'_2 &= X_x Y_y - X_y^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Пользуясь основными инвариантами тензора, можно получить бесчисленное множество других инвариантов; в частности инвариантом будет являться величина:

$$I_1'^2 - 4I_2' = (X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2. \tag{57}$$

Тензор напряжений можно представить в виде суммы двух тензоров, если из диагональных членов вычесть

$$\sigma' = \frac{X_x + Y_y}{2}. \tag{58}$$

Тогда

$$N' = \begin{vmatrix} X_x - \sigma' & X_y & 0 \\ Y_x & Y_y - \sigma' & 0 \\ 0 & 0 & Z_z - \sigma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma' & 0 & 0 \\ 0 & \sigma' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma' \end{vmatrix}. \tag{59}$$

Интенсивность девиатора напряжений в случае плоской деформации выразим такой формулой:

$$\tau'^2_m = (X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2. \tag{60}$$

§ 2. Деформации

Тензор деформации для случая плоской задачи можно представить в таком виде:

$$D' = \begin{vmatrix} e_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & e_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Легко показать, что основными инвариантами тензора деформаций в этом случае будут:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} + e_{yy} &= e_1 + e_2 \\ e_{xx} e_{yy} - \gamma^2{}_{xy} &= e_1 \cdot e_2 \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Представим тензор напряжений (61) в виде суммы двух тензоров. Для этого вычтем из диагональных членов величину:

$$e' = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2}. \tag{63}$$

Тогда

$$D' = \begin{vmatrix} e_{xx} - e' & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & e_{yy} - e' & 0 \\ 0 & 0 & -e' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e' & 0 & 0 \\ 0 & e' & 0 \\ 0 & 0 & e' \end{vmatrix}. \tag{64}$$

Интенсивность девиатора деформаций выразим такой формулой:

$$\gamma_m'^2 = (e_{xx} - e_{yy})^2 + 4\gamma_{xy}^2. \tag{65}$$

§ 3. Зависимости между напряжениями и деформациями

Для случая плоской деформации формулы (36) перепишутся в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x - \sigma &= (e_{xx} - e)\frac{\tau_m}{\gamma_m} \\ Y_y - \sigma &= (e_{yy} - e)\frac{\tau_m}{\gamma_m} \\ Z_z - \sigma &= -e\frac{\tau_m}{\gamma_m} \\ X_y &= \gamma_{xy}\frac{\tau_m}{\gamma_m}, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$$\sigma = Ke, \tag{67}$$

где

$$\sigma = \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3}; \quad e = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{3}.$$

На основании третьего уравнения (66) получим:

$$Z_z = \sigma - e\frac{\tau_m}{\gamma_m}. \tag{68}$$

Подставив в эту формулу значение σ по формуле (67), получим:

$$Z_z = \left(K - \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right) e = \left(K - \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right)\frac{e_{xx} + e_{yy}}{3}. \tag{69}$$

С другой стороны, из формулы (67) получим:

$$\frac{X_x + Y_y + Z_z}{3} = K\frac{e_{xx} + e_{yy}}{3}.$$

Отсюда

$$Z_z = K(e_{xx} + e_{yy}) - (X_x + Y_y). \tag{70}$$

Исключив Z_z из равенства (69) и (70), после некоторых преобразований получим:

$$\frac{X_x + Y_y}{2} = \frac{1}{3}\left(2K + \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right)\frac{e_{xx} + e_{yy}}{2}. \tag{71}$$

Если воспользоваться полученными выше для случая плоской деформации инвариантами тензора напряжений и деформаций

$$\sigma' = \frac{X_x + Y_y}{2}; \qquad e' = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2},$$

то формулу (71) можно приписать в таком виде:

$$\sigma' = \frac{1}{3}\left(2K + \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right)e'. \tag{72}$$

Перепишем формулу (69) в таком виде:

$$Z_z = \frac{2}{3}\left(K - \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right)e'. \tag{73}$$

Подставив значение e' в формулу (73), по формуле (72) получим:

$$Z_z = \frac{K - \dfrac{\tau_m}{\gamma_m}}{K + \dfrac{1}{2}\dfrac{\tau_m}{\gamma_m}}\sigma'. \tag{74}$$

Подставив значение Z_z по формуле (74) в формулу

$$\sigma = \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3},$$

получим зависимость между σ и σ' в таком виде:

$$\sigma = \frac{2K}{2K + \dfrac{\tau_m}{\gamma_m}}\sigma'. \tag{75}$$

С другой стороны,

$$e = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{3} = \frac{2}{3}\,e'. \tag{76}$$

Подставив значения σ и e в формулы (66), по формулам (75) и (76) после некоторых преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
X_x - \sigma' &= (e_{xx} - e')\frac{\tau_m}{\gamma_m};\\
Y_y - \sigma' &= (e_{yy} - e')\frac{\tau_m}{\gamma_m};\\
Z_z - \sigma' &= -e'\frac{\tau_m}{\gamma_m};\\
X_y &= \gamma_{xy}\frac{\tau_m}{\gamma_m};\\
\sigma' &= \frac{1}{3}\left(2K + \frac{\tau_m}{\gamma_m}\right)e'.
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Легко показать, что в телах упругих

$$\frac{\tau_m}{\gamma_m} = \frac{\tau'_m}{\gamma'_m} = \frac{E}{1+\mu}. \tag{78}$$

Этим обстоятельством весьма выгодно воспользоваться при исследовании напряженного состояния в случае плоской деформации. Подставив в формулы (77) значение $\frac{\tau_m}{\gamma_m}$, по формуле (78) получим окончательные и, на наш взгляд, наиболее удобные зависимости между напряжениями и деформациями для случая плоской задачи

$$\left.\begin{aligned} &X_x - \sigma' = (e_{xx} - e')\frac{\tau'_m}{\gamma'_m}; \qquad X_y = \gamma_{xy}\frac{\tau'_m}{\gamma'_m};\\ &Y_y - \sigma' = (e_{yy} - e')\frac{\tau'_m}{\gamma'_m}; \qquad \sigma' = \frac{1}{3}\left(2K + \frac{\tau'_m}{\gamma'_m}\right)e'.\\ &Z_z - \sigma' = -e'\frac{\tau'_m}{\gamma'_m}; \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

§ 4. Характеристики деформируемости грунта в случае плоской деформации

При рассмотрении вопросов равновесия грунта в случае плоской деформации будем считать справедливыми допущения, положенные в основу исследования пространственной задачи.

Сравнивая формулы (79) с формулами (36) и (37), видим, что характер зависимости между составляющими девиатора напряжений и девиатора деформаций остается тем же самым. Отличаются лишь зависимости между гидростатическим напряжением и объемной деформацией. Согласно пятой формуле (79) в случае плоской деформации зависимость между σ' и e' не будет линейной, если отношение $\frac{\tau'_m}{\gamma'_m}$ зависит от деформаций.

Заменив в зависимости между напряжениями и деформациями отношение $\frac{\tau_m}{\gamma_m}$ новым $\frac{\tau'_m}{\gamma'_m}$, мы тем самым значительно упростили задачу исследования напряжений в случае плоской деформации и одновременно сделали возможным применение обобщенного условия пластичности Ренкина. Использование формулы Ренкина предполагает, в соответствии с теорией прочности Мора, независимость прочности грунта от третьего среднего по величине главного напряжения.

Обобщенную формулу Ренкина с учетом сил сцепления грунта по аналогии с формулой (29) можно написать в таком виде: [1]

$$\tau'_m \leqslant K'(n' + \sigma'), \tag{80}$$

где n' — характеристика связности грунта.

---

[1] Для того чтобы формулу (80) привести к обычно употребляемому виду, положим n равным нулю. Тогда

$$\frac{\tau'_m}{\sigma'} = \frac{2\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}}{X_x + Y_y} \leqslant K'.$$

Формула Ренкина обычно пишется в таком виде:

$$\frac{\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}}{X_x + Y_y} \leqslant \frac{K'}{2} = \sin\varphi$$

Отношение $\frac{\tau'_m}{n' + \sigma'}$ на всем участке деформации можно выразить некоторой функцией от интенсивности девиатора деформаций γ'_m:

$$\frac{\tau'_m}{n' + \sigma'} = F(\gamma'_m). \tag{81}$$

Установив характер функциональной зависимости (81), будем иметь одну из двух характеристик деформируемости грунта. Вторая характеристика деформируемости — модуль объемного сжатия — будет иметь то же самое значение, как и в пространственной задаче.

Подставив значение τ'_m по формуле (81) в формулы (79) и воспользовавшись обозначением

$$\frac{F(\gamma'_m)}{\gamma'_m} = C(\gamma'_m), \tag{82}$$

получим зависимости между составляющими напряжения и деформации в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&X_x - \sigma' = (e_{xx} - e')(n' + \sigma')G(\gamma'_m);\\
&Y_y - \sigma' = (e_{yy} - e')(n' + \sigma')G(\gamma'_m);\\
&Z_z - \sigma' = -e'(n' + \sigma')G(\gamma'_m);\\
&X_y = \gamma_{xy}(n' + \sigma')G(\gamma'_m);\\
&\sigma' = \frac{1}{3}\left[2K + (n' + \sigma')G(\gamma'_m)\right]e'.
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Обобщенным модулем сдвига будет являться величина

$$(n' + \sigma')G(\gamma'_m).$$

Полагая $n' = 0$, получим зависимости между напряжениями и деформациями для сыпучего грунта.

§ 5. Основные уравнения

Составляющие напряжения в случае плоской деформации должны удовлетворять:
а) уравнениям равновесия

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} - \varrho X = 0;\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \varrho Y = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

б) условию неразрывности деформаций, которое получим, заменив составляющие деформации в уравнении

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{85}$$

их выражениями по формулам (83), и в) условиям на поверхности

$$\left.\begin{aligned}
&X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny)\\
&Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny).
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Уравнение неразрывности деформаций, выраженное через напряжения, будет представлять нелинейное диференциальное уравнение второго порядка в частных производных.

Поэтому точное решение задачи о равновесии грунта даже в случае плоской деформации представит большие трудности. Во многих случаях интегрирование может быть выполнено приближенными методами.

Study of Stressed State of Cohesive and Non-Cohesive Soils

By *A. I. Botkin, Eng.*

The soil is considered as a continuous body, subjected to a gradually increased load. The rate of load increase is supposed to be sufficiently slow, so, that deflections can follow every change of the load. The study is based on the principles of plasticity.

Stress and strain at a given point can be expressed by the sum of two tensors; one of them is a spherical tensor, and the other is the deviator of the tensor [see Eqs. (12), (13), (21), (22)].

The intensity of the stress deviator or, the intensity of shearing stress τ_m at a given point will be expressed by Eq. (14).

For the intensity of the strain deviator or, the intensity of slide γ_m at a given point we will have Eq. (24).

In accordance with the Coulomb's assuption regarding the resistance to sliding along a plane developed in a mass of soil, we can write the condition of strength for a three-dimensional element in the following form

$$\tau_m \leqslant k_0 (\sigma + n), \tag{29}$$

where n — a factor describing the cohesive properties of the soil.

Experiments have shown that the relation

$$\frac{\tau_m}{\sigma + n} = F(\gamma_m) \tag{29''}$$

can be regarded as a characteristic showing the capacity of the soil to be strained.

The equations of the theory of elasticity permit to deduce relations between stresses and strain, not containing any elastic constants [see Eqs. (36)].

We assume that Eqs. (36) will be valid also for the case where Relation

$$\tau_m = \frac{E}{1+\mu} \gamma_m$$

is expressed by a more general function.

In that case the relations between stresses and strains can be expressed by Eqs. (38), (39).

Assuming, further, that during the whole process of deformation the soil remains isotropic, we find that two factors are necessary for the determination of the state of strains.

In our case these two factors are: the modulus of cubical dilatation, k, and the generalized shear modulus $(\sigma + n) G(\gamma_m)$.

In case of small strains, the modulus of cubical dilatation may be regarded as having a constant value. The generalized shear modulus will depend upon the values of stresses and strains.

In case of plane strain the relation between stresses and strains can be expressed by Eqs. (83). [See also Eqs. (58), (60), (63), (65)].

Once the relations between stresses and strains are known, the problem of the equilibrium of a mass of soil can be treated as a problem in mathematical physics.
