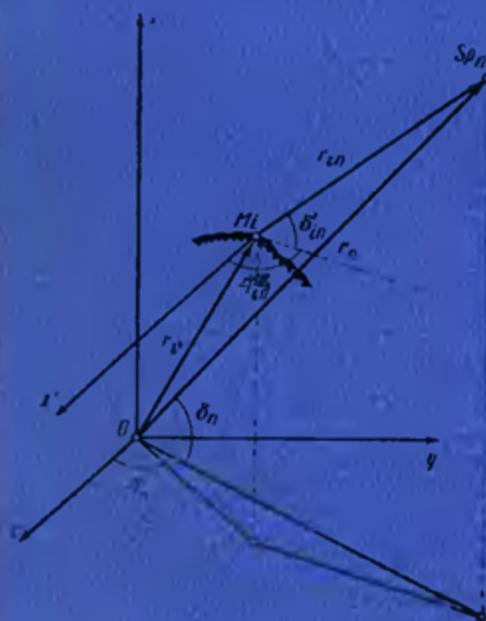




$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}, z) &= \cos i \\ \cos(\vec{n}, x) &= \sin(\Omega - S) \sin i \\ \cos(\vec{n}, y) &= -\cos(\Omega - S) \sin i \end{aligned}$$

М. Б У Р Ш А



ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

М. БУРША

ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Часть I. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Перевод с чешского *А. В. Буткевича* и *Б. Н. Дьякова*

Под редакцией *А. В. Буткевича*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕ Д Р А»
Москва 1971

MINISTERSTVO NÁRODNI OBRANY

MILAN BURŠA

ZÁKLADY
KOSMICKÉ GEODÉZIE

Díl. I

Kosmická geodézie geometrická

Praha 1967

Основы космической геодезии. Ч. I. Геометрическая космическая геодезия. М. Б у р ш а, М., изд-во «Недра». 1971, стр. 128.

Книга написана как учебное пособие и содержит краткое систематическое изложение не только геометрических методов и проблем космической геодезии, но и ее динамических методов, а также описание принципов обработки наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ). Инструменты и вопросы организации наблюдений в ней не затронуты.

В книге подробно разобраны системы координат, применяемые в космической геодезии, и их трансформация, сформулированы геометрические задачи космической геодезии; особое внимание обращено на обработку синхронных наблюдений ИСЗ и связь отдельных референциальных систем координат.

В книге изложен перечень проблем и основы их решения, выведены законы Кеплера и их динамические следствия, рассмотрены задачи двух тел, интегралы площадей и энергии. Далее рассматривается теория определения элементов орбит близких спутников. В заключение рассматриваются задачи определения центра масс Земли и создания всемирной системы координат и параметров общего земного эллипсоида.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга «Основы космической геодезии» известного чехословацкого ученого астронома-геодезиста М. Бурши представляет значительный интерес для советских геодезистов, тем более что книг советских авторов по этому кругу проблем не издавалось. Отдельные вопросы космической геодезии излагались лишь в статьях, опубликованных в журналах и ведомственных сборниках. Не издавались и учебники по космической геодезии.

Книга написана как учебное пособие для сотрудников ВТС и содержит краткое, но систематическое изложение геометрических методов и проблем космической геодезии, включая и орбитальные задачи. Поэтому первая часть книги «Геометрическая космическая геодезия» несколько уже содержания всей книги.

Издание книги М. Бурши на русском языке пополнит скромный список книг и учебных пособий по этой новой быстро развивающейся области геодезии.

Особую ценность книге придает то обстоятельство, что автор сам активно работает над исследованием проблем космической геодезии и опубликовал большое число статей на эту тему в научных журналах. Часть новых исследований автора нашла отражение в этой книге. В ней получили освещение и работы советских геодезистов.

Книга содержит описание принципов обработки наблюдений искусственных спутников Земли. Инструменты и вопросы организации наблюдений в ней не затронуты. Но эти вопросы подробно освещены в книге И. Меллера «Введение в спутниковую геодезию» (русский перевод. М., изд-во «Мир», 1967) и в ряде инструкций, изданных Астрономическим советом АН СССР и другими организациями, ведущими наблюдения ИСЗ, применительно к СССР.

Автор подробно разбирает системы координат, применяемые в космической геодезии, и их трансформацию, затем формулирует геометрические задачи космической геодезии, обращая особое внимание на обработку синхронных наблюдений ИСЗ и связь отдельных систем координат.

Вторую половину своей книги М. Бурша называет «Орбитальные задачи». При переводе она выделена в главы 8 и 9. Здесь он излагает перечень орбитальных проблем и основы их решения, выводит законы Кеплера и их динамические следствия, рассматривает задачу двух тел, интегралы площадей и энергии. Далее рассматривается теория определения элементов орбит близких спутников. В заключение рассматриваются задачи определения положения центра масс Земли, создания всемирной системы координат и определения параметров общего земного эллипсоида.

Книга будет интересна и полезна не только советским студентам-астрономам, геодезистам, гравиметристам и геофизикам, но также и преподавателям, научным работникам и сотрудникам Геодезических служб и станций наблюдений ИСЗ.

При переводе некоторые обозначения изменены в соответствии с общепринятыми в СССР, изменена рубрикация, даны подписи к рисункам. Главы 1—7 перевел Б. Н. Дьяков, 8, 9—А. В. Буткевич.

Рукопись перевода просмотрена и исправлена автором.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- a — большая полуось орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ),
 \bar{a} — большая полуось общего земного эллипсоида,
 a_r — большая полуось референц-эллипсоида,
 a, b, c — направляющие косинусы в системе x, y, z ,
 \bar{A} — геодезический азимут,
 A, B, C — направляющие косинусы в системе X, Y, Z ,
 B — геодезическая широта,
 e — эксцентриситет орбиты ИСЗ,
 \bar{e} — эксцентриситет общего земного эллипсоида,
 e_r — эксцентриситет референц-эллипсоида (вращения),
 E — эксцентрическая аномалия,
 E_r — (поверхность) референц-эллипсоида,
 f — постоянная тяготения,
 F — сила,
 H — (геодезическая) высота над эллипсоидом $H = H_q + \zeta_q$,
 H_q — нормальная высота,
 i — наклонность плоскости орбиты ИСЗ к плоскости экватора,
 K — удвоенная секториальная (площадная) скорость ИСЗ,
 l, m, n — направляющие параметры в системе x, y, z ,
 L — геодезическая долгота,
 L, M, N — направляющие параметры в системе X, Y, Z ,
 m_{sp_n} — масса ИСЗ,
 N — радиус кривизны в плоскости первого вертикала референц-эллипсоида,
 M — средняя аномалия,
 M_Z — масса Земли,
 O — центр масс Земли,
 O_r — центр референц-эллипсоида,
 r — радиус-вектор в системе x, y, z ,
 R — радиус-вектор в системе X, Y, Z ,
 S — гриничское звездное время,
 t_0 — момент прохождения ИСЗ через перигей,
 t' — топоцентрический часовой угол относительно астрономического меридиана места наблюдений в системе x', y', z' или x, y, z ,
 t'' — топоцентрический часовой угол относительно геодезического меридиана места наблюдений в системе X', Y', Z' или X, Y, Z ,
 T — геоцентрический гриничский часовой угол,
 \bar{T} — период обращения,
 T' — «референчный» (в системе X, Y, Z) гриничский часовой угол (направления, исходящего из центра референц-эллипсоида),
 T'' — топоцентрический гриничский часовой угол в системе x', y', z' или x, y, z ,
 \tilde{T} — квазигеоцентрический гриничский часовой угол
 T''' — топоцентрический, «референчный» гриничский часовой угол (в системе X', Y', Z' или X, Y, Z).
 u — аргумент склонения,
 v — скорость спутника,
 ν — истинная аномалия,

v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в системе x, y, z ,
 W — ускорение,
 W_x, W_y, W_z — составляющие ускорения,
 (x, z) — плоскость основного (гриничского) астрономического меридиана,
 x, y, z — геоцентрическая система координат
 x', y', z' — топоцентрическая система координат с направлениями осей $x' \parallel x, y' \parallel y, z' \parallel z$,
 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ — квазигеоцентрическая система координат,
 $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ — прямоугольные пространственные координаты центра референц - эллипсоида относительно центра масс Земли,
 (XZ) — плоскость основного (гриничского) геодезического меридиана,
 X, Y, Z — геодезическая «референция» система координат,
 X', Y', Z' — топоцентрическая система координат с направлениями осей, $X' \parallel X, Y' \parallel Y, Z' \parallel Z$,
 z — среднее положение оси вращения Земли,
 z — астрономическое зенитное расстояние,
 Z — ось вращения референц - эллипсоида,
 \bar{Z} — геодезическое зенитное расстояние,
 $\frac{ds}{dt}$ — секториальная скорость ИСЗ,
 α — геоцентрическое прямое восхождение,
 α' — топоцентрическое прямое восхождение

ние в системе x', y', z' или x, y, z ,
 α — астрономический азимут,
 $\tilde{\alpha}$ — квазигеоцентрическое прямое восхождение,
 γ — точка весеннего равноденствия,
 δ — геоцентрическое склонение,
 δ^r — «референцное» (в системе X, Y, Z) склонение (направления, исходящего из центра референц - эллипсоида),
 δ' — топоцентрическое склонение в системе x', y', z' или x, y, z ,
 $\tilde{\delta}$ — квазигеоцентрическое склонение,
 δ'^r — топоцентрическое «референцное» склонение (в системе X', Y', Z' или X, Y, Z),
 Δ — геоцентрическое расстояние,
 Δ^r — «референцное» расстояние (считаемое от центра референц - эллипсоида),
 Δ' — топоцентрическое расстояние,
 $\tilde{\Delta}$ — квазигеоцентрическое расстояние,
 $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ — углы Эйлера, определяющие ориентировку осей систем X, Y, Z и x, y, z ,
 ξ_q — высота квазигеоида (аномалия высоты). — *Прим. пер.*),
 λ — астрономическая долгота,
 φ — астрономическая широта,
 ω — аргумент перигея орбиты ИСЗ,
 Ω — прямое восхождение восходящего угла орбиты ИСЗ.

ПРЕДМЕТ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ²

Содержание понятия «космическая геодезия» (*kosmičeskaja geodezija, kosmische Geodäsie*) до сих пор точно и окончательно не установлено. По нашему определению, *космическая геодезия — это наука, решающая проблемы и задачи высшей геодезии путем наземных измерений положений искусственных небесных тел в близком космическом пространстве.*

При этом все рассуждения и выводы сохраняют силу, если за центральное тело вместо Земли принимать другое тело, для которого решается задача, например Луну³. Близким космическим пространством будем считать пространство около центрального тела от его поверхности до высоты, равной части или нескольким единицам, максимально десяткам радиусов тела. В этом близком космическом пространстве необходимо, следовательно, предполагать наличие тел, положение которых относительно центрального тела можно измерить⁴.

Таковыми телами могут быть:

- а) искусственные спутники Земли (ИСЗ);
- б) искусственные «статические» световые цели, т. е. искусственные тела, которые являются не планетами, а обычно переносятся воздушными шарами или ракетами;
- в) естественные спутники (например, Луна по отношению к Земле).

¹ В настоящее время автор подготовил и часть II Динамическая космическая геодезия.

² Также употребляются названия «спутниковая геодезия» (*sputnikovaja geodezija, Satellite Geodesy, géodésie des satellites, Satellitengeodäsie* — принято Международной геодезической ассоциацией в 1963 г.) и «небесная геодезия» (*Celestial Geodesy* принято только на английском языке).

³ Вместо термина «лунная геодезия» чаще употребляют термин «селенодезия». Это, разумеется, означает, что для «геодезии» каждого другого небесного тела можно образовать самостоятельное название («марсодезия» или «ареодезия» и т. д.). Поэтому можно предположить, что в будущем содержание понятия «геодезия» расширится и распространится на другие естественные небесные тела. Возможность такого расширения вполне допустима.

⁴ Близким космическим пространством Каула называет пространство в пределах от 40 км (граница воздухоплавания) до 400 тыс. км от Земли, включающее орбиту Луны (*Прим. ред.*).

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Хотя и принято считать космическую геодезию новой наукой, но все же можно найти работы прошлого века и даже более ранние, которые имеют к ней отношение в том ее определении, какое мы дали выше.

Так, еще в 1768 г. вышла работа И. А. Эйлера «Versuch die Figur der Erden durch beobachtungen des Mondes zu bestimmen» (Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften, V. Bd.), в которой теоретически решена задача определения формы земного меридиана по одновременным наблюдениям Луны на станциях, расположенных в плоскости определяемого меридиана.

В одном из вариантов решения требуется измерить топоцентрические зенитные расстояния Луны в момент прохождения ее через плоскость исследуемого меридиана. Географическая широта станции (точнее говоря, ее геодезическая широта, отнесенная к нормали данного меридианного эллипса с центром в центре масс Земли¹), так же как и высота над уровнем моря, предполагается известной. В этом случае остается одно неизвестное — эксцентриситет меридианного эллипса².

Очевидно, что решение эйлеровой задачи будет тем точнее, чем больше параллакс наблюдаемого тела, т. е. чем ближе к Земле оно находится. В этом смысле Эйлер сформулировал и заключение своей работы:

«Наконец, вполне очевидно, что этот метод определения формы Земли большей частью не дает надежных результатов и поэтому уступает методу, который применяла Парижская академия (т. е. методу градусных измерений. — *Прим. автора*), потому что расстояние до Луны по сравнению с диаметром Земли очень велико. Если бы Луна была значительно ближе к Земле или вблизи Земли находилось бы другое небесное тело, которое можно было бы наблюдать из разных точек исследуемого меридиана, то описанный здесь метод определения формы Земли был бы значительно надежнее и, очевидно, намного удобнее, чем метод градусных измерений с помощью триангуляции»³.

Эйлерова теория не получила применения в практике высшей геодезии именно из-за слишком малого параллакса Луны. В основном по той же причине лунный метод в последующие годы не был внедрен в практические геодезические измерения. Речь идет прежде всего именно о лунном параллактическом (геометрическом) и динамическом методах. В параллактическом методе оп-

¹ Влияние уклонений отвесной линии и высоты квазигеоида здесь не учитывается.

² Эйлерову теорию см. в § 25.

³ В оригинале оно приведено на немецком языке (*Прим. ред.*).

ределяется геоцентрическое положение станции, расположенной на земной поверхности, по измерениям топоцентрических положений (топоцентрических прямого восхождения и склонения) Луны и по ее известным геоцентрическим экваториальным координатам, которые получают из уравнения орбиты Луны. С тем же успехом можно использовать покрытия звезд Луной и затмения Солнца¹. В динамическом методе используется зависимость наблюдаемых возмущений элементов орбиты Луны от уклонений формы реальной Земли от идеального шара.

Названными «лунными методами» занимались, например: P. S. Laplace, F. R. Helmert (*Die math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie*, 1884), W. D. Lambert (*The Figure of the Earth and the Parallax of the Moon*, *Astronomical Journal*, 38 (1928), 22), H. Battermann (*Bestimmung der Mondlänge, des Mondhaldmessers und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen* (1902)), Th. Banachiewicz (*Polnische Sonnenfinsternisexpedition*, 1927) и в последние десятилетия главным образом А. А. Михайлов, В. Марковиц и Д. О'Киф.

В. Марковиц в США и А. Михайлов в Пулковской обсерватории сконструировали для наблюдений Луны специальные «лунные фотографические камеры», которые стали широко использоваться учеными разных стран, особенно в период Международного геофизического года и Международного геофизического сотрудничества.

Однако упомянутое большое расстояние до Луны, относительно большие ошибки геоцентрических координат Луны и до сих пор малоточное картографирование неровностей лунного рельефа делают лунные методы практически малопригодными для решения задач высшей геодезии.

Практическое решение этих задач сделало возможным создание современных искусственных космических тел, которые находятся значительно ближе к Земле, чем Луна, и прежде всего ИСЗ. Действительно, то, что ИСЗ ближе к Земле, означает благоприятное для геометрических задач увеличение параллакса и выгодное для динамических задач увеличение влияния аномалий гравитационного поля Земли. Конечно, с точки зрения точности решения динамических задач, ИСЗ не должны находиться слишком близко к Земле, чтобы их орбиты не были очень сильно деформированы вследствие тормозящего действия атмосферы, которое пока нельзя достаточно точно количественно учесть. Высота (спутников) 1000—1500 км является как будто бы нижней границей для динамических задач.

Первые геодезические работы с использованием искусственных

¹ Эти методы мы здесь описывать не будем, так как после появления ИСЗ они отошли на задний план и, кроме того, были многократно и полно описаны, например, A. Berroth, W. Hofmann: *Kosmische Geodäsie*, 1960 (русск. перевод, М., ИЛ, 1963); I. I. Mueller: *Introduction to Satellite Geodesy*, 1964 (русск. перевод, М., изд-во «Мир», 1967).

небесных тел относятся еще к «доспутниковому» периоду. Так, в Финляндии И. Вайсяля еще в 1946 г. (по первым опытам) осуществил подъем на высоту 25 км источника света с помощью азростата. По одновременным измерениям топоцентрических координат этой вспомогательной «космической» цели (в экваториальной астрономической системе координат) на двух станциях было получено расстояние по прямой между ними. Эти станции (Турку и Хельсинки) удалены на 150 км, причем достигнутая точность равна $\pm 2''$ (V. Väisälä, L. Oterma: Anwendung der astronomischen Triangulationsmethode, 1960).

Выдающаяся эпоха интенсивного развития космической геодезии фактически наступила после создания искусственных спутников Земли, т. е. 4 октября 1957 г., когда на круговую орбиту был выведен советский спутник 1. С этого времени стали интенсивно развиваться теоретические исследования в этой области и их практическое применение. Действительно, если иметь в виду тела, свободно движущиеся в гравитационном поле Земли и не получающие никакого добавочного ускорения (здесь мы отвлекаемся от влияния атмосферы и притяжения Луны, Солнца и других небесных тел), то можно в полном объеме решать не только задачи геометрического, но и динамического характера, которые, вообще, в расширенном понимании нельзя решать по наблюдениям Луны.

В настоящее время развитие науки идет в быстром и все более ускоряющемся темпе. В стадии реализации или, по крайней мере, подготовки находятся несколько проектов так называемой «космической триангуляции» в континентальном или даже во всемирном масштабе. Был запущен целый ряд спутников, пригодных для решения геодезических задач геометрического и динамического характера; некоторые из этих ИСЗ предназначены исключительно для геодезической программы. В недалеком будущем планируется запуск более далеких геодезических спутников Земли.

В настоящее время уже теоретически обоснованы лунные спутниковые программы, практическое претворение в жизнь которых началось 3 апреля 1966 г., когда в СССР был запущен первый искусственный спутник Луны — станция «Луна 10».

Мы отказываемся здесь от описания современного состояния космической геодезии, так как при ее быстром развитии в настоящее время такое описание скоро потеряло бы актуальность. Пока же речь будет идти о теории космической геодезии (конечно, о ее геометрических задачах — см. их классификацию в главе 6); ее современное состояние поясняет содержание главы 3. Некоторые практические применения теории описаны в заключениях соответствующих разделов.

РАЗДЕЛЕНИЕ КУРСА КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Проблемы и задачи геодезии, решаемые по наблюдениям спутников, можно разделить по характеру на две основные группы¹:

- 1) преимущественно геометрического характера,
- 2) преимущественно динамического характера.

В задачах первой группы по наблюдениям положений ИСЗ в конечном счете вычисляют величины, полностью или частично определяющие положение станций наблюдений или их частные производные (т. е. их проекции на оси координат. — *Прим. пер.*). Результаты вычислений можно далее использовать при выводе параметров геодезической референцной системы и при решении практических задач высшей геодезии в масштабе континентов или всей планеты.

В задачах второй группы используется зависимость элементов орбиты ИСЗ от некоторых параметров гравитационного поля Земли, которые являются функциями величин, определяющих форму тела Земли (полярное сжатие, экваториальное сжатие, несимметричность полушарий и т. д.).

Если бы Земля была идеальным шаром, полностью однородным, или имела бы такое распределение масс, при котором плотность являлась бы функцией только расстояния от ее центра, если бы ИСЗ не попадал в зоны нарушения слоистости атмосферы и не существовало бы влияния Луны, Солнца и других более удаленных небесных тел, то орбита спутника была бы плоской и в системе, не вращающейся с Землей, неизменной. При этом получалось бы, что земной шар при своем вращении как будто остается внутри (в фокусе. — *Прим. пер.*) эллиптического или кругового кольца, образуемого орбитой ИСЗ с постоянными элементами a , e , i , Ω , ω (большая полуось, эксцентриситет, наклонность орбиты к экватору, прямое восхождение восходящего узла, аргумент перигея).

Однако в действительности тело Земли по форме и плотности весьма сложно и в первом приближении может быть представлено, например, эллипсоидом вращения с определенным полярным сжатием. Это полярное сжатие, т. е. как бы «избыток вещества» на экваторе; кроме того, отступление экватора от идеальной окружности, несимметричность полушарий и вообще все аномалии в распределении плотности в теле Земли, особенно в ее коре, и являются причинами того, что элементы орбиты спутника меняются

¹ Границу между этими двумя группами нельзя, конечно, провести четко; существуют задачи, относящиеся по характеру и к геометрической, и к динамической группам. Поэтому можно говорить как о геометрико-динамических, так и динамико-геометрических задачах. Например, орбитальные задачи (см. главу 9) отнесены к группе задач геометрического характера, хотя и здесь фигурируют элементы орбит ИСЗ, определение которых представляет уже задачу динамического характера.

со временем. Изменяются, следовательно, как форма орбиты ИСЗ, так и ее положение в пространстве. Наиболее характерными являются изменения во времени положения линии узлов и оси (эллиптической) орбиты, т. е. величины $\frac{d\Omega}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$. Численные значения изменений элементов, по которым затем вычисляют параметры фигуры Земли, можно определить из наблюдений спутников в достаточно длительном интервале времени.

Напомним, что именно в ЧССР впервые в мире было определено полярное сжатие Земли с помощью динамического спутникового метода. Проф. Е. Бухар, который использовал наблюдения за движением линии узлов советского спутника 1957 β , запущенного 3 ноября 1957 г., решил эту задачу к концу 1957 г. и опубликовал результаты вычислений в 1958 г. (Motion of the Nodal Line of the second Russian Earth Satellite (1957 β), Nature No 4629; Die Bestimmung der Erdabplattung aus der Bewegung von Sputnik II, Wiss. Zft. Techn. Hochschule Dresden, 8 (1958/59), 2; Vliv zplošteni Zeme na pohyb umelých družic, Říše hvězd 6/58; The Motion of the Orbital Node of Sputnik 2 (1957 β) and the Oblateness of the Earth, Studia geoph. et geod. 2 (1928), 306).

Глава 4

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕЛ В БЛИЗКОМ КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Системы координат, которые будем использовать в дальнейшем, разделим в зависимости от местоположения начала координат на:

- а) геоцентрические;
- в) референцные (геодезические);
- с) топоцентрические¹.

§ 1. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Геоцентрической системой координат является любая система с началом координат в центре тяжести (центр масс) Земли (рис. 1). Мы будем использовать как прямоугольную пространственную геоцентрическую систему координат x, y, z , так и экваториальную геоцентрическую систему T (или α), δ , Δ .

Определим оси координат:

¹ Направления соответствующих осей координат геоцентрических и референцных систем в общем не совпадают. Направления осей координат топоцентрических систем в одном варианте совпадают с направлениями осей геоцентрической системы, а в другом варианте — с направлениями осей референцной системы.

ось z совпадает со средним положением оси вращения Земли и имеет положительное направление на север;

ось x параллельна плоскости начального (гриничского) астрономического меридиана и положительна в гриничском полушарии¹;

ось y направлена положительным концом на восток.

Подчеркнем, что плоскость xoz не является плоскостью геоцентрического гриничского меридиана и не проходит через Гринич. Положение геоцентрического гриничского меридиана с достаточной (для решения геодезических задач) точностью неизвестно и его использование в качестве геодезической плоскости вызвало бы нежелательные осложнения.

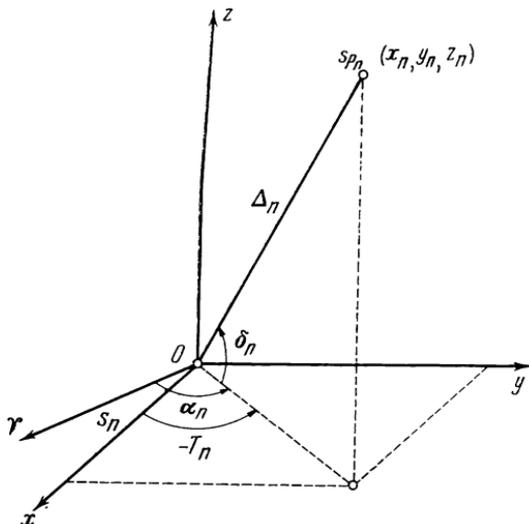


Рис. 1. Геоцентрическая система координат

В экваториальной системе координат: $T = S - \alpha$ — геоцентрический гриничский часовой угол, S — гриничское звездное время, α , δ , Δ — геоцентрические прямое восхождение, склонение и расстояние.

Из рис. 1, на котором Oy — направление на точку весеннего равноденствия, вытекают следующие соотношения для положения (спутника):

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n \\ y_n &= -\Delta_n \cos \delta_n \sin T_n \\ z_n &= \Delta_n \sin \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T_n &= -y_n : x_n \\ \operatorname{tg} \delta_n &= \frac{z_n}{|\sqrt{x_n^2 + y_n^2}|} \\ \Delta_n &= |\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ Ось x можно было бы направить в точку весеннего равноденствия, как это делается в сферической астрономии и небесной механике. Но тогда все неподвижные наземные точки имели бы изменяющиеся во времени координаты. С точки зрения решения геодезических задач такая система координат была бы менее удобна.

а также

$$\left. \begin{aligned} \sin T_n &= -\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\ \cos T_n &= \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_n &= \frac{z_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}} \\ \cos \delta_n &= \frac{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

§ 2. РЕФЕРЕНЦНЫЕ¹ (ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ) СИСТЕМЫ

Референцной будем называть систему координат с началом в центре O_r геодезического референц-эллипсоида E_r (рис. 2).

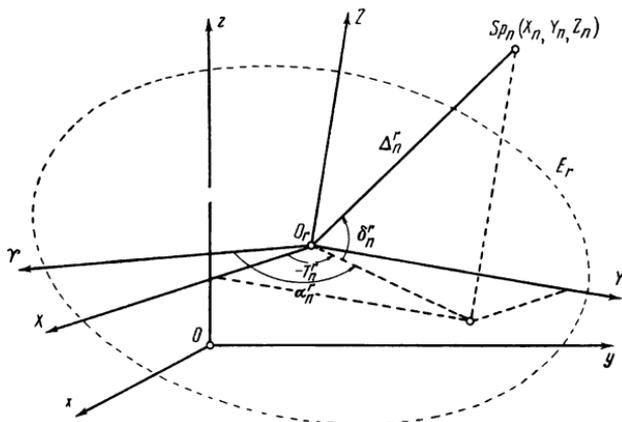


Рис. 2. Референцная система координат

Будем использовать прежде всего прямоугольную пространственную референцную систему координат X, Y, Z и классическую геодезическую систему B, L, H (геодезическая широта и геодезическая долгота относительно поверхности E_r и высота над поверхностью E_r).

Определим оси координат. Пусть ось Z совпадает с осью вращения референц-эллипсоида E_r и направлена к Северному полюсу; ось X параллельна плоскости исходного (гриничского) геодезического меридиана и ее положительное направление такое же, как и оси x ; ось Y направлена на восток.

² Связанные с референц-эллипсоидом (Прим. ред.).

В общем случае [1], [2]:

$$Z \neq z; X \neq x; Y \neq y.$$

Кроме указанных двух систем, будем в некоторых задачах использовать системы так называемых экваториальных референцных координат T^r, δ^r, Δ^r , определяемых аналогично T, δ, Δ , но по отношению к плоскости (XY) экватора геодезического референц-эллипсоида и плоскости (XZ) исходного геодезического меридиана. Аналогично равенствам (1) и (2) имеют силу равенства:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \Delta_n^r \cos \delta_n^r \cos T_n^r \\ Y_n &= -\Delta_n^r \cos \delta_n^r \sin T_n^r \\ Z_n &= \Delta_n^r \sin \delta_n^r \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T_n^r &= -Y_n : X_n \\ \operatorname{tg} \delta_n^r &= \frac{Z_n}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}} \\ \Delta_n^r &= \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} \sin T_n^r &= -\frac{Y_n}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}} \\ \cos T_n^r &= \frac{X_n}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_n^r &= \frac{Z_n}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}} \\ \cos \delta_n^r &= \frac{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Отметим, что экваториальные координаты T^r, δ^r, Δ^r не применяются в классической небесной механике и сферической астрономии, так как для всех естественных небесных тел разности $T - T^r, \delta - \delta^r, \Delta - \Delta^r$ пренебрегаемо малы. Только для Луны в старых референцных системах они могли бы иметь заметную величину. Однако у близких ИСЗ эти разности должны быть учтены, особенно при решении глобальных геодезических задач высокой точности.

Между координатами X, Y, Z и B, L, H существуют известные соотношения [3], которые мы будем в дальнейшем применять в основном для точки M_i на физической поверхности Земли, и, только в виде исключения и со сравнительно малой точностью,

для ИСЗ — Sp_n (например, при вычислении положения так называемой подспутниковой точки и высоты ИСЗ над поверхностью Земли):

$$\left. \begin{aligned} X_i &= (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i \\ Y_i &= (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \\ Z_i &= [N_i(1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где $N_i = \frac{a_r}{\sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B_i}}$ — радиус кривизны первого вертикала в

основании нормали, проведенной из точки B_i, L_i, H_i на эллипсоид E_r ; a_r, e_r^2 — длина большой полуоси и квадрат эксцентриситета E_r .

Обратные соотношения для выражения B_i, L_i, H_i как функций X_i, Y_i, Z_i требуют исключения геодезической долготы, для которой имеем точные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} L_i &= Y_i : X_i \\ \sin L_i &= \frac{Y_i}{\left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right|} = \frac{Y_i}{(N_i + H_i) \cos B_i} \\ \cos L_i &= \frac{X_i}{\left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right|} = \frac{X_i}{(N_i + H_i) \cos B_i} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Геодезическую широту можно выразить, например, так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_i}{X_i} &= \operatorname{tg} B_i \frac{N_i + H_i - N_i e_r^2}{(N_i + H_i) \cos L_i} \\ \operatorname{tg} B_i &= \frac{Z_i (N_i + H_i) \cos L_i}{X_i [(N_i + H_i) - N_i e_r^2]} = \frac{Z_i (N_i + H_i)}{\left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right| [(N_i + H_i) - N_i e_r^2]} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B_i &= \frac{Z_i}{\left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right|} \left(1 - \frac{N_i}{N_i + H_i} e_r^2 \right)^{-1} = \\ &= \frac{Z_i}{\left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right|} \left[1 - e_r^2 \left(1 + \frac{H_i}{N_i} \right)^{-1} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если иметь в виду, что данная задача (т. е. выражение B_i через X_i, Y_i, Z_i) в дальнейшем встречается только для случая, когда точка i располагается на физической поверхности Земли, то всегда будет выполняться неравенство $\frac{H_i}{N_i} < \frac{1}{8} \cdot 10^{-2}$ и в уравнении

(12) можно произвести разложение в ряд

$$\begin{aligned} \left[1 - e_r^2 \left(1 - \frac{H_i}{N_i} \right)^{-1} \right]^{-1} &= 1 + e_r^2 \left(1 + \frac{H_i}{N_i} \right)^{-1} + \\ &+ e_r^4 \left(1 + \frac{H_i}{N_i} \right)^{-2} + e_r^6 \left(1 + \frac{H_i}{N_i} \right)^{-3} + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left[1 - e_r^2 \left(1 + \frac{H_i}{N_i}\right)^{-1}\right]^{-1} = 1 + e_r^2 + e_r^4 + e_r^6 + \dots -$$

$$- e_r^2 \frac{H_i}{N_i} + e_r^2 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^2 - e_r^2 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^3 - 2e_r^4 \frac{H_i}{N_i} + 3e_r^4 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^2 - \dots$$

$$\dots - 3e_r^6 \frac{H_i}{N_i} + \dots \quad (14)$$

Если допустить ошибку определяемой широты, равную $0''{,}001$, то можно пренебречь членами $e_r^2 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^3$, $e_r^4 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^2$, $e_r^6 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)$ и меньшими.

Прежде чем подставлять выражение (14) в (12), учтем соотношение

$$e_r^2 + e_r^4 + e_r^6 + \dots = \frac{e_r^2}{1 - e_r^2} = e_r'^2,$$

после чего получим

$$\operatorname{tg} B_i = \frac{Z_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} (1 + e_r'^2 + q), \quad (15)$$

где

$$q = - (e_r^2 + 2e_r^4) \frac{H_i}{N_i} + e_r^2 \left(\frac{H_i}{N_i}\right)^2$$

или, с учетом формулы для N_i ,

$$q = - \left(e_r^2 + 2e_r^4 - \frac{1}{2} e_r^4 \sin^2 B_i \right) \frac{H_i}{a_r} + e_r^2 \left(\frac{H_i}{a_r} \right)^2. \quad (16)$$

Пусть неизвестные величины H_i и B_i , стоящие в правой части формулы (16), требуется знать с такой точностью, чтобы вычисляемая широта B_i получалась с ошибкой до $0''{,}001$. Это значит, что в высоте над эллипсоидом можно допустить ошибку до 10 м , а в широте (в выражении $\frac{1}{2} e_r^4 \sin^2 B_i$) — даже в несколько градусов. Из первого уравнения (9) найдем, например,

$$H_i = \left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right| \sec B_i - N_i = \left| \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \right| \sec B_i -$$

$$- a_r (1 - e_r^2 \sin^2 B_i)^{-1/2}, \quad (17)$$

причем аргумент B_i (при $B=45^\circ$) нужно знать с точностью до $0''{,}3$. Если ограничиться территорией ЧССР, где практически

$H < 2$ км, то можно использовать уравнение (15) без члена, содержащего $\frac{H_i}{a_r}$, т. е.

$$\sec^2 B_i \simeq \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 (1 + e_r'^2)^2}{X_i^2 + Y_i^2}, \quad (18)$$

$$\sin^2 B_i \simeq \frac{Z_i^2 (1 + e_r'^2)^2}{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 (1 + e_r'^2)^2}. \quad (19)$$

С учетом формул (17)–(19) (при $H < 2$ км) в уравнении (16) можно пренебречь членами $\frac{H_i}{a_r} e_r^4$ и $e_r^2 \left(\frac{H_i}{a_r}\right)^2$ и поправку q привести к виду

$$q = -\frac{e_r^2 \rho_i}{a_r} + e_r^2 \left[1 - e_r^2 \frac{Z_i^2 (1 + e_r'^2)^2}{\rho_i^2} \right]^{-1/2}, \quad (20)$$

где

$$\rho_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 (1 + e_r'^2)^2.$$

Отношение $\frac{H_i}{a_r}$ можно точнее получить из уравнения, следующего из (9),

$$\begin{aligned} X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 &= (N_i + H_i)^2 \cos^2 B_i + [N_i (1 - e_r^2) + H_i]^2 \sin^2 B_i = \\ &= (N_i + H_i)^2 - 2H_i (N_i + H_i) e_r^2 \sin^2 B_i + N_i^2 e_r^4 \sin^2 B_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Из выражения (21) найдем

$$\begin{aligned} N_i + H_i &= N_i e_r^2 \sin^2 B_i + \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 - N_i^2 e_r^4 \sin^2 B_i \cos^2 B_i} = \\ &= N_i e_r^2 \sin^2 B_i + \Delta_i' \sqrt{1 - \frac{N_i^2}{\Delta_i'^2} e_r^4 \sin^2 B_i \cos^2 B_i}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_i' = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2},$$

и далее, после замены N_i и разложения в ряд с точностью до 10^{-6} , получим

$$\begin{aligned} \frac{H_i}{a_r} &= \frac{\Delta_i' - a_r}{a_r} + \frac{1}{2} e_r^2 \sin^2 B_i + \frac{1}{8} e_r^4 \sin^4 B_i - \\ &- \frac{1}{2} \frac{a_r}{\Delta_i'} e_r^4 \sin^2 B_i \cos^2 B_i. \end{aligned} \quad (22)$$

Если для функций широты использовать приближенно выражения (18, 19), то (22) можно переписать так:

$$\frac{H_i}{a_r} = \frac{\Delta_i' - a_r}{a_r} + \frac{Z_i^2}{\rho_i^2} \left[\frac{1}{2} e_r^2 (1 + e_r'^2)^2 + \frac{1}{8} e_r^4 \left(\frac{Z_i^2}{\rho_i^2} - \frac{4a_r(X_i^2 + Y_i^2)}{\rho_i^3} \right) \right]. \quad (23)$$

Эту формулу можно далее упростить и приспособить для числовых расчетов.

Практически все же выгоднее применять простой метод последовательных приближений и сначала вычислить приближенное значение B_0 по формуле [4, 5, 6]

$$\operatorname{tg} B_{0i} = \frac{Z_i (1 + e_r'^2)}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}}, \quad (24)$$

пренебрегая величиной q в [15], а затем для окончательного значения

$$B_i = B_{0i} + \delta B_{0i} \quad (25)$$

найти поправку

$$\begin{aligned} \frac{\delta B_{0i}''}{\rho''} &= -e_r^2 \cos^2 B_{0i} \frac{\rho_i - N_{0i}}{a_r} \cdot \frac{Z_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} \approx \\ &\approx -\frac{e_r^2}{a_r} \sin B_{0i} \cos B_0 (\rho_i - N_{0i}). \end{aligned} \quad (26)$$

При этом N_{0i} выбирается из геодезических таблиц по аргументу B_{0i} .

Для эллипсоида Красовского поправка $\delta B_{0i}''$ имеет вид:

$$\delta B_{0i}'' = -0'',2165 (\rho_i - N_{0i}) \sin B_{0i} \cos B_{0i},$$

а для эллипсоида Хейфорда

$$\delta B_{0i}'' = -0'',2174 (\rho_i - N_{0i}) \sin B_{0i} \cos B_{0i}.$$

Здесь $(\rho_i - N_{0i})$ выражается в км.

Получив величины B_i и L_i , высоту H_i легко рассчитать по формулам (9):

$$\left. \begin{aligned} H_i &= X_i \sec B_i \sec L_i - N_i \\ H_i &= Y_i \sec B_i \operatorname{cosec} L_i - N_i \\ H_i &= Z_i \operatorname{cosec} B_i - N_i (1 - e_r^2) \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Напомним, что при известной нормальной высоте $H_{q,i}$ можно получить и высоту квазигеоида $\zeta_{q,i}$ над эллипсоидом E_r

$$\zeta_{q,i} = H_i - H_{q,i}. \quad (28)$$

Примечание. Вопросами перехода от координат X, Y, Z к координатам B, L, H занимались, например, К. Риннер [48], К. Лапинг [4], [6], А. Буткевич [5] и др. Поправка [26] (в несколько ином виде) была табулирована в [5].

§ 3. ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Топоцентрической называется система координат с началом в любой точке M_i (станции наблюдений) на поверхности Земли.

Будем использовать (рис. 3) как прямоугольную пространственную топоцентрическую систему x', y', z' с направлениями осей

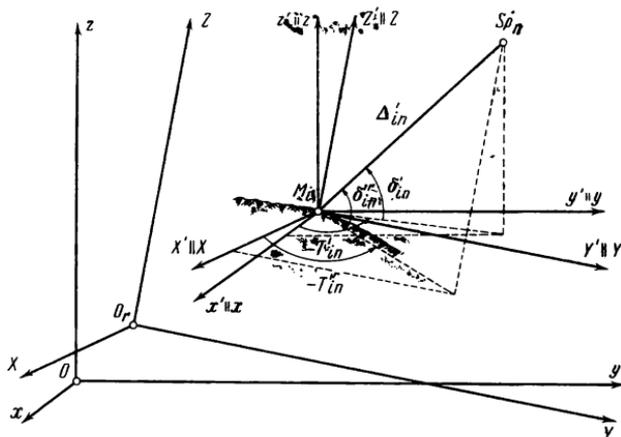


Рис. 3. Топоцентрическая система координат

$x' \parallel x, y' \parallel y, z' = z$, так и систему X', Y', Z' с направлениями осей $X' \parallel X, Y' \parallel Y, Z' \parallel Z$ и, кроме того, соответствующие им экваториальные топоцентрические системы. Координаты в экваториальных системах обозначим через $T', (\alpha'), \delta', \Delta'$ (соответственно в системе x, y, z) и $T'', (\alpha''), \delta'', \Delta'' = \Delta'$ (соответственно в системе X, Y, Z).

Для станции наблюдений M_i и спутника Sp_n аналогично формулам (1) — (8) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x'_{in} &= \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \\ y'_{in} &= -\Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \\ z'_{in} &= \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T'_{in} &= -y'_{in} : x'_{in} \\ \operatorname{tg} \delta'_{in} &= \frac{z'_{in}}{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in}}} \\ \Delta'_{in} &= \sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in} + z'^2_{in}} \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} \sin T'_{in} &= \frac{y'_{in}}{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in}}} \\ \cos T'_{in} &= \frac{x'_{in}}{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in}}} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta'_{in} &= \frac{z'_{in}}{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in} + z'^2_{in}}} \\ \cos \delta'_{in} &= \frac{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in}}}{\sqrt{x'^2_{in} + y'^2_{in} + z'^2_{in}}} \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

и

$$\left. \begin{aligned} X'_{in} &= \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \\ Y'_{in} &= -\Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \\ Z'_{in} &= \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T'_{in} &= -Y'_{in} : X'_{in} \\ \operatorname{tg} \delta'_{in} &= \frac{Z'_{in}}{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in}}} \\ \Delta'_{in} &= \Delta'_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

а также

$$\begin{aligned} \sin T'_{in} &= -\frac{Y'_{in}}{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in}}}; & \cos T'_{in} &= \frac{X'_{in}}{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in}}}, & (35) \\ \sin \delta'_{in} &= \frac{Z'_{in}}{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in} + Z'^2_{in}}}; & \cos \delta'_{in} &= \frac{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in}}}{\sqrt{X'^2_{in} + Y'^2_{in} + Z'^2_{in}}}. & (36) \end{aligned}$$

При использовании аппаратуры с азимутальной установкой может встретиться необходимость применять горизонтную си-

стему координат $\bar{\alpha}^1$ (астрономический азимут, считаемый от точки севера в направлении на восток²) и \bar{z} (астрономическое зенитное расстояние). Тогда в выражения (29) и (33) нужно ввести топцентрические часовые углы t'_{in} , t'_{in} , отсчитываемые от местных меридианов, — астрономического с долготой λ_i и геодезического с долготой L_i . Счет долгот ведется от гриничского астрономического меридиана на восток, т. е.

$$T'_{in} = t'_{in} - \lambda_i; \quad T'_{in}{}^r = t'_{in}{}^r - L_i.$$

В системе (29) получаем

$$\left. \begin{aligned} x'_{in} &= \Delta'_{in} (\cos \lambda_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} + \sin \lambda_i \cos \delta'_{in} \sin t'_{in}) \\ y'_{in} &= \Delta'_{in} (\sin \lambda_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} - \cos \lambda_i \cos \delta'_{in} \sin t'_{in}) \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

Из выражений (37), используя известные соотношения сферической астрономии (формулы сферического треугольника, образо-

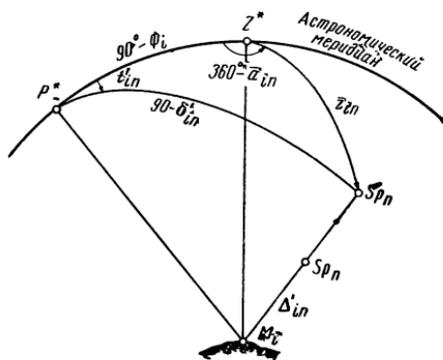


Рис. 4. Астрономический параллактический треугольник

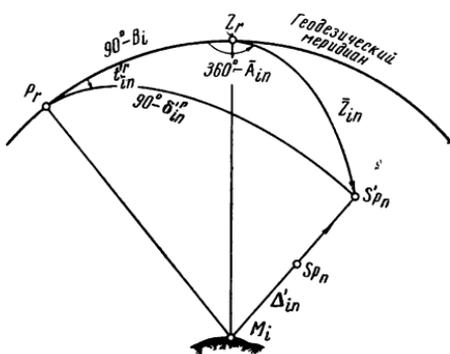


Рис. 5. Геодезический параллактический треугольник

ванного северным полюсом мира P^* , астрономическим зенитом Z^* , и проекцией Sp'_n спутника Sp_n на небесную сферу) для наблюдателя, находящегося в точке M_i ³ (рис. 4):

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} &= \cos \varphi_i \cos \bar{z}_{in} - \sin \varphi_i \sin \bar{z}_{in} \cos \bar{\alpha}_{in} \\ \cos \delta'_{in} \sin t'_{in} &= -\sin \bar{z}_{in} \sin \bar{\alpha}_{in} \\ \sin \delta'_{in} &= \sin \varphi_i \cos \bar{z}_{in} + \cos \varphi_i \sin \bar{z}_{in} \cos \bar{\alpha}_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (38)$$

¹ Черточка сверху поставлена для того, чтобы отличать астрономический азимут от геоцентрического прямого восхождения α .

² В сферической астрономии азимут измеряется, как правило, от точки юга по направлению к западу; здесь мы придерживаемся ориентировки, принятой в геодезии.

³ В советской литературе этот треугольник называется параллактическим (Прим. пер.).

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x'_{in} &= \Delta'_{in} [\cos \lambda_i (\cos \varphi_i \cos \bar{z}_{in} - \sin \varphi_i \sin \bar{z}_{in} \cos \bar{\alpha}_{in} - \\ &\quad - \sin \lambda_i \sin \bar{z}_{in} \sin \bar{\alpha}_{in})] \\ y'_{in} &= \Delta'_{in} [\sin \lambda_i (\cos \varphi_i \cos \bar{z}_{in} - \sin \varphi_i \sin \bar{z}_{in} \cos \bar{\alpha}_{in}) + \\ &\quad + \cos \lambda_i \sin \bar{z}_{in} \sin \bar{\alpha}_{in}] \\ z'_{in} &= \Delta'_{in} (\sin \varphi_i \cos \bar{z}_{in} + \cos \varphi_i \sin \bar{z}_{in} \cos \bar{\alpha}_{in}) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Аналогично в системе (33) получим

$$\left. \begin{aligned} X'_{in} &= \Delta'_{in} (\cos L_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} + \sin L_i \cos \delta'_{in} \sin t'_{in}) \\ Y'_{in} &= \Delta'_{in} (\sin L_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} - \cos L_i \cos \delta'_{in} \sin t'_{in}) \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

и затем, обозначая геодезическое зенитное расстояние через \bar{Z} , геодезический азимут через \bar{A} ¹ и используя соотношения в сферическом треугольнике (рис. 5), образованном геодезическим референсным полюсом P_r , геодезическим зенитом Z_r и проекцией спутника Sp'_n :

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} &= \cos B_i \cos \bar{Z}_{in} - \sin B_i \sin \bar{Z}_{in} \cos \bar{A}_{in} \\ \cos \delta'_{in} \sin t'_{in} &= -\sin \bar{Z}_{in} \sin \bar{A}_{in} \\ \sin \delta'_{in} &= \sin B_i \cos \bar{Z}_{in} + \cos B_i \sin \bar{Z}_{in} \cos \bar{A}_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X'_{in} &= \Delta'_{in} [\cos L_i (\cos \bar{B}_i \cos \bar{Z}_{in} - \sin B_i \sin \bar{Z}_{in} \cos \bar{A}_{in}) - \\ &\quad - \sin L_i \sin \bar{Z}_{in} \sin \bar{A}_{in}] \\ Y'_{in} &= \Delta'_{in} [\sin L_i (\cos B_i \cos \bar{Z}_{in} - \sin B_i \sin \bar{Z}_{in} \cos \bar{A}_{in}) + \\ &\quad + \cos L_i \sin \bar{Z}_{in} \sin \bar{A}_{in}] \\ Z'_{in} &= \Delta'_{in} (\sin B_i \cos \bar{Z}_{in} + \cos B_i \sin \bar{Z}_{in} \cos \bar{A}_{in}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Из формул (39) и (42) можно было бы вывести обратные соотношения, т. е. выразить $\bar{\alpha}_{in}$, \bar{z}_{in} , $(\bar{A}_{in}, \bar{Z}_{in})$ как функции величин x'_{in} , y'_{in} , z'_{in} (X'_{in} , Y'_{in} , Z'_{in}). Однако эти соотношения лучше получить непосредственно из сферического треугольника $P^*Z^*Sp'_n$ (см. рис. 4)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_{in} &= \sin \varphi_i \operatorname{ctg} t'_{in} - \cos \varphi_i \operatorname{tg} \delta'_{in} \operatorname{cosec} t'_{in} \\ \cos \bar{z}_{in} &= \sin \varphi_i \sin \delta'_{in} + \cos \varphi_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (43)$$

¹ Черта сверху — знак отличия геодезического азимута от направляющего косинуса A (см. дальше).

и из треугольника P, Z, Sp'_n (см. рис. 5)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \bar{A}_{in} &= \sin B_i \operatorname{ctg} t'_{in} - \cos B_i \operatorname{tg} \delta'_{in} \operatorname{cosec} t'_{in} \\ \cos \bar{Z}_{in} &= \sin B_i \sin \delta'_{in} + \cos B_i \cos \delta'_{in} \cos t'_{in} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Если в уравнениях (43) и (44) заменить t'_{in} на $T'_{in} + \lambda_i$, t'_{in} на $T'_{in} + L_i$ и подставить в них выражения (30)—(32) и (34)—(36), то они примут вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\alpha}_{in} &= \frac{x'_{in} \sin \lambda_i - y'_{in} \cos \lambda_i}{(x'_{in} \cos \lambda_i + y'_{in} \sin \lambda_i) \sin \varphi_i - z'_{in} \cos \varphi_i} \\ \cos \bar{z}_{in} &= [(x'_{in} \cos \lambda_i + y'_{in} \sin \lambda_i) \cos \varphi_i + z'_{in} \sin \varphi_i] \Delta'^{-1}_{in} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{A}_{in} &= \frac{X'_{in} \sin L_i - Y'_{in} \cos L_i}{(X'_{in} \cos L_i + Y'_{in} \sin L_i) \sin B_i - Z'_{in} \cos B_i} \\ \cos \bar{Z}_{in} &= [(X'_{in} \cos L_i + Y'_{in} \sin L_i) \cos B_i + Z'_{in} \sin B_i] \Delta'^{-1}_{in} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Вместо топоцентрических координат мы часто будем пользоваться системой направляющих косинусов (или параметров) отрезка $\overline{M_i Sp'_n}$. Обозначим их через a'_{in} , b'_{in} , c'_{in} (в системе x' , y' , z') и A'_{in} , B'_{in} , C'_{in} (в системе X' , Y' , Z') и из (45) и (46) выведем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\alpha}_{in} &= \frac{a'_{in} \sin \lambda_i - b'_{in} \cos \lambda_i}{(a'_{in} \cos \lambda_i + b'_{in} \sin \lambda_i) \sin \varphi_i + c'_{in} \cos \varphi_i} \\ \cos \bar{z}'_{in} &= (a'_{in} \cos \lambda_i + b'_{in} \sin \lambda_i) \cos \varphi_i + c'_{in} \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{A}_{in} &= \frac{A'_{in} \sin L_i - B'_{in} \cos L_i}{(A'_{in} \cos L_i + B'_{in} \sin L_i) \sin B_i - C'_{in} \cos B_i} \\ \cos \bar{Z}_{in} &= (A'_{in} \cos L_i + B'_{in} \sin L_i) \cos B_i + C'_{in} \sin B_i \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Уравнения (48) были получены ранее и другим способом в [7], а основы общей теории трехмерной геодезии изложены в [8]. Этой теории посвящен целый ряд работ, критический обзор которых дан в [7].

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Преобразования координат относительно отдельных систем (§ 1, § 2, § 3) частично уже описаны. Для перехода от системы § 1 к системе § 2, от системы § 1 к системе § 3 и от системы § 2 к системе § 3 в основном достаточно провести преобразования лишь в некоторых комбинациях. Остальные комбинации преобразований вытекают из формул главы 4.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕФЕРЕНЦНЫХ КООРДИНАТ В ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И НАОБОРОТ

1. Прямоугольные пространственные системы

Пусть координаты центра референц-эллипсоида в геоцентрической системе суть Δx_0 , Δy_0 и Δz_0 (рис. 6), и, следовательно, имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta x_0 + X \cos(X, x) + Y \cos(Y, x) + Z \cos(Z, x) \\ y &= \Delta y_0 + X \cos(X, y) + Y \cos(Y, y) + Z \cos(Z, y) \\ z &= \Delta z_0 + X \cos(X, z) + Y \cos(Y, z) + Z \cos(Z, z) \end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

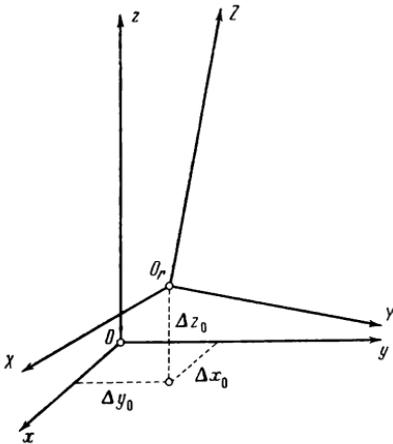


Рис. 6. Прямоугольные пространственные системы

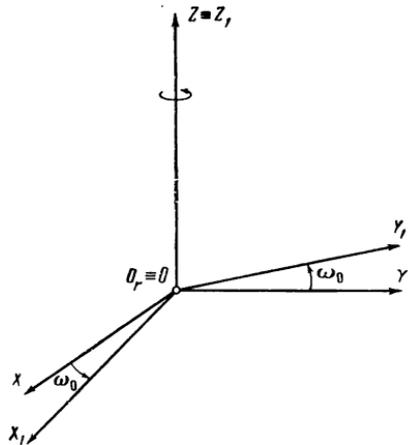


Рис. 7. Угол прецессии ω_0

Поскольку обе системы — и исходная X, Y, Z , и преобразованная — ортогональны, то можно написать шесть известных условий ортогональности с помощью указанных девяти направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(X, x) + \cos^2(Y, x) + \cos^2(Z, x) &= 1 \\ \cos^2(X, y) + \cos^2(Y, y) + \cos^2(Z, y) &= 1 \\ \cos^2(X, z) + \cos^2(Y, z) + \cos^2(Z, z) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(X, x) \cos(X, y) + \cos(Y, x) \cos(Y, y) + \cos(Z, x) \cos(Z, y) &= 0 \\ \cos(X, x) \cos(X, z) + \cos(Y, x) \cos(Y, z) + \cos(Z, x) \cos(Z, z) &= 0 \\ \cos(X, y) \cos(X, z) + \cos(Y, y) \cos(Y, z) + \cos(Z, y) \cos(Z, z) &= 0 \end{aligned} \right\} (51)$$

Вследствие наличия равенств (50) и (51) в формулах (49) лишь три угла из девяти являются независимыми, а потому шесть оставшихся углов можно выразить через известные три. Для этой цели больше всего подходят так называемые углы типа эйлеровых.

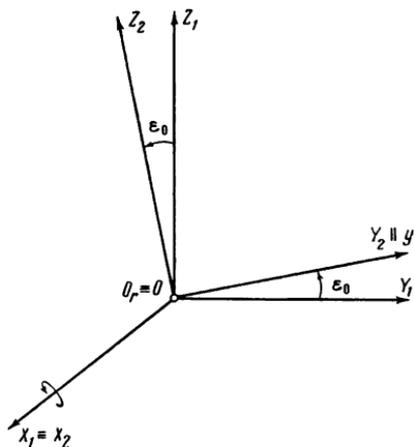


Рис. 8. Угол нутации ε_0

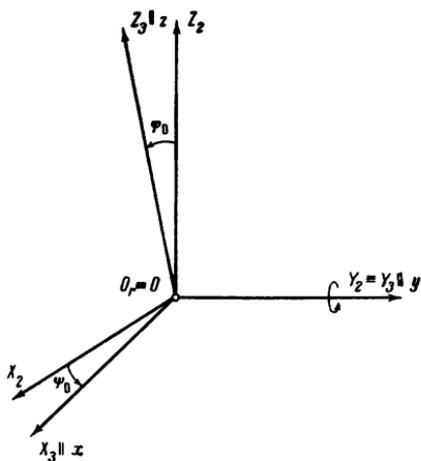


Рис. 9. Угол чистого вращения ψ_0

Обозначим их ω_0 , ε_0 , ψ_0 и определим так¹:

а) $+\omega_0$ — угол поворота исходной системы X, Y, Z вокруг оси Z против часовой стрелки (если смотреть из положительного конца оси Z) (угол прецессии. — *Прим. пер.*). После этого поворота получаем систему X_1, Y_1, Z_1 (рис. 7).

в) $+\varepsilon_0$ — угол поворота системы X_1, Y_1, Z_1 вокруг оси X_1 (положительное направление определяется так же, как у угла $+\omega_0$) (угол нутации. — *Прим. пер.*). После такого поворота получаем систему X_2, Y_2, Z_2 (рис. 8).

с) $+\psi_0$ — угол поворота системы X_2, Y_2, Z_2 вокруг оси Y_2 (угол чистого вращения. — *Прим. пер.*). После этого поворота получаем систему $X_3 \parallel x, Y_3 \parallel y, Z_3 \parallel z$ (рис. 9).

Отдельные повороты систем для сокращения математических выкладок можно характеризовать ортогональными афинными тензорами поворота, которые применительно к углам ω_0 , ε_0 , ψ_0 обозначим Ω , E , Ψ . Они в матричной форме имеют вид

¹ В этой части вывода временно примем, что O_r совпадает с O , тогда элементы Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 не будут участвовать в математических выкладках.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 & \sin \omega_0 & 0 \\ -\sin \omega_0 & \cos \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_0 & \sin \varepsilon_0 \\ 0 & -\sin \varepsilon_0 & \cos \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \psi_0 & 0 & -\sin \psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_0 & 0 & \cos \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Общий поворот (рис. 10) можно выразить с помощью скалярного произведения $\Psi E \Omega$:

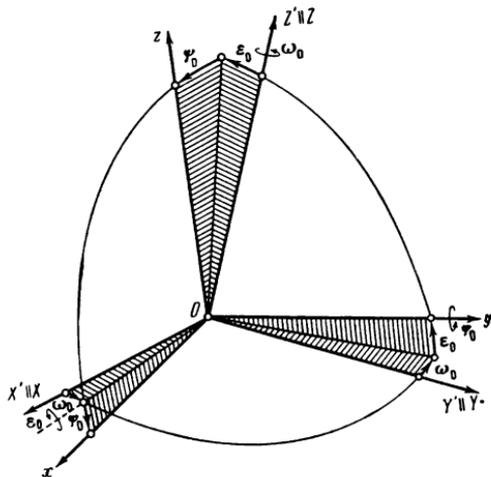


Рис. 10. «Эйлера» углы и общий поворот

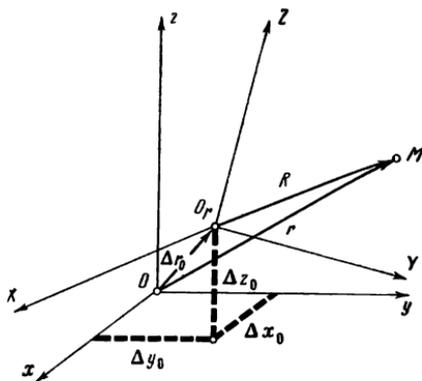


Рис. 11. Смещения начала координат

$$\begin{aligned} \Psi E \Omega &= \begin{pmatrix} \cos \psi_0 & 0 & -\sin \psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_0 & 0 & \cos \psi_0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \omega_0 & \sin \omega_0 & 0 \\ -\sin \omega_0 \cos \varepsilon_0 & \cos \omega_0 \cos \varepsilon_0 & \sin \varepsilon_0 \\ \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 & -\cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 & \cos \varepsilon_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0 & & \\ & -\sin \omega_0 \cos \varepsilon_0 & \times \\ \cos \omega_0 \sin \psi_0 + \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0 & & \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \sin \omega_0 \cos \psi_0 + \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0 & -\cos \varepsilon_0 \sin \psi_0 \\ \cos \omega_0 \cos \varepsilon_0 & \sin \varepsilon_0 \\ \sin \omega_0 \sin \psi_0 - \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0 & \cos \varepsilon_0 \cos \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (55) \end{aligned}$$

Последний тензор должен удовлетворять условиям (50) и (51), т. е.

$$\left. \begin{aligned}
 & (\cos \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0)^2 + \\
 & + (\sin \omega_0 \cos \psi_0 + \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0)^2 + (-\cos \varepsilon_0 \sin \psi_0)^2 = 1 \\
 & (-\sin \omega_0 \cos \varepsilon_0)^2 + (\cos \omega_0 \cos \varepsilon_0)^2 + \sin^2 \varepsilon_0 = 1 \\
 & (\cos \omega_0 \sin \psi_0 + \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0)^2 + \\
 & + (\sin \omega_0 \sin \psi_0 - \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0)^2 + (\cos \varepsilon_0 \cos \psi_0)^2 = 1 \\
 & - \sin \omega_0 \cos \varepsilon_0 (\cos \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0) + \\
 & + \cos \omega_0 \cos \varepsilon_0 (\sin \omega_0 \cos \psi_0 + \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0) - \\
 & - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \sin \psi_0 = 0 \\
 & (\cos \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0)(\cos \omega_0 \sin \psi_0 + \\
 & + \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0) + (\sin \omega_0 \cos \psi_0 + \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \sin \psi_0) \times \\
 & \times (\sin \omega_0 \sin \psi_0 - \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0) - \cos^2 \varepsilon_0 \sin \psi_0 \cos \psi_0 = 0 \\
 & - \sin \omega_0 \cos \varepsilon_0 (\cos \omega_0 \sin \psi_0 + \sin \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0) + \\
 & + \cos \omega_0 \cos \varepsilon_0 (\sin \omega_0 \sin \psi_0 - \cos \omega_0 \sin \varepsilon_0 \cos \psi_0) + \\
 & + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 \cos \psi_0 = 0
 \end{aligned} \right\} . \quad (56)$$

Имея в виду, что в современных референцных системах величины ω_0 , ε_0 и ψ_0 очень малы и, вероятно, не превышают нескольких дуговых секунд, в уравнениях (52) — (54) с ошибкой, не превышающей 1 см, можно пренебречь их квадратами и произведениями и конечную матрицу упростить так:

$$\Psi E \Omega = \begin{Bmatrix} 1 & \omega_0 & -\psi_0 \\ -\omega_0 & 1 & \varepsilon_0 \\ \psi_0 & -\varepsilon_0 & 1 \end{Bmatrix} . \quad (57)$$

Если обозначить: r — радиус-вектор произвольной точки M в системе координат x, y, z ; R — радиус-вектор той же точки в системе X, Y, Z ; Δr_0 — вектор OO_r , то преобразование координат из системы X, Y, Z в систему x, y, z будет определяться соотношением (векторным. — Прим. ред.) (рис. 11)

$$r = \Delta r_0 + \Psi E \Omega \cdot R. \quad (58)$$

Скалярные уравнения, эквивалентные (58), будут аналогичны уравнениям (49)

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \Delta x_0 + X + \omega_0 Y - \psi_0 Z \\
 y &= \Delta y_0 + Y - \omega_0 X + \varepsilon_0 Z \\
 z &= \Delta z_0 + Z + \psi_0 X - \varepsilon_0 Y
 \end{aligned} \right\} . \quad (59)$$

Обратное соотношение, характеризующее переход от системы x, y, z к системе X, Y, Z , будет, очевидно, таким:

$$R = (\Psi E \Omega)^{-1} r - \Delta r_0, \quad (60)$$

и, следовательно, его скалярные составляющие будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - \Delta x_0 - \omega_0 y + \psi_0 z \\ Y &= y - \Delta y_0 + \omega_0 x - \varepsilon_0 z \\ Z &= z - \Delta z_0 - \psi_0 x + \varepsilon_0 y \end{aligned} \right\}. \quad (61)$$

В задачах геометрической космической геодезии часто бывает необходимо преобразовывать направляющие косинусы направлений на спутник с различных станций наблюдений ИСЗ M_i, M_k из системы X, Y, Z (т. е. от A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}) в систему x, y, z (т. е. к a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}) и наоборот. Формулы для таких преобразований получаются прямо из выражений (59) и (61), если последние написать для разностей

$$x_k - x_i = \Delta x_{ik}, \quad y_k - y_i = \Delta y_{ik}, \quad z_k - z_i = \Delta z_{ik}$$

и

$$\left. \begin{aligned} &\Delta X_{ik}, \quad \Delta Y_{ik}, \quad \Delta Z_{ik}: \\ \Delta x_{ik} &= \Delta X_{ik} + \omega_0 \Delta Y_{ik} - \psi_0 \Delta Z_{ik} \\ \Delta y_{ik} &= \Delta Y_{ik} - \omega_0 \Delta X_{ik} + \varepsilon_0 \Delta Z_{ik} \\ \Delta z_{ik} &= \Delta Z_{ik} + \psi_0 \Delta X_{ik} - \varepsilon_0 \Delta Y_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{ik} &= \Delta x_{ik} - \omega_0 \Delta y_{ik} + \psi_0 \Delta z_{ik} \\ \Delta Y_{ik} &= \Delta y_{ik} + \omega_0 \Delta x_{ik} - \varepsilon_0 \Delta z_{ik} \\ \Delta Z_{ik} &= \Delta z_{ik} - \psi_0 \Delta x_{ik} + \varepsilon_0 \Delta y_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (63)$$

С учетом того, что расстояние $s_{ik} = \overline{M_i M_k}$ инвариантно относительно системы координат, из формул (62) следует

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= A_{ik} + \omega_0 B_{ik} - \psi_0 C_{ik} \\ b_{ik} &= B_{ik} - \omega_0 A_{ik} + \varepsilon_0 C_{ik} \\ c_{ik} &= C_{ik} + \psi_0 A_{ik} - \varepsilon_0 B_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (64)$$

а из формул (63)

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= a_{ik} - \omega_0 b_{ik} + \psi_0 c_{ik} \\ B_{ik} &= b_{ik} + \omega_0 a_{ik} - \varepsilon_0 c_{ik} \\ C_{ik} &= c_{ik} - \psi_0 a_{ik} + \varepsilon_0 b_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (65)$$

Напомним, что уравнения (64) и (65) не являются независимыми, так как с учетом принятой точности (т. е. при отбрасывании квадратов и произведений углов Эйлера) имеют место равенства

$$a_{ik}^2 + b_{ik}^2 + c_{ik}^2 = A_{ik}^2 + B_{ik}^2 + C_{ik}^2 = 1.$$

II. Экваториальные сферические системы

При решении задач космической геодезии часто бывает необходимо знать соотношения между геоцентрическими (T, δ, Δ) и референсными (T^r, δ^r, Δ^r) экваториальными координатами спутника. При выводе этих соотношений будем исходить из основных

уравнений (6) для референционной системы координат. Дифференцируя их, получаем

$$\left. \begin{aligned} dT_n^r &= -\cos^2 T_n^r \frac{dY_n}{X_n} + \cos^2 T_n^r \frac{Y_n}{X_n^2} dX_n \\ d\delta_n^r &= \cos^2 \delta_n^r \frac{dZ_n}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}} - Z_n \cos^2 \delta_n^r \frac{X_n dX_n + Y_n dY_n}{(X_n^2 + Y_n^2)^{3/2}} \\ d\Delta_n^r &= \frac{X_n}{\Delta_n^r} dX_n + \frac{Y_n}{\Delta_n^r} dY_n + \frac{Z_n}{\Delta_n^r} dZ_n \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Если принять $dT_n^r = T_n - T_n^r$, $d\delta_n^r = \delta_n - \delta_n^r$, $d\Delta_n^r = \Delta_n - \Delta_n^r$ и заменить в (66) $dX_n = x_n - X_n$, $dY_n = y_n - Y_n$ и $dZ_n = z_n - Z_n$ выражениями, вытекающими из (59), т. е.

$$\left. \begin{aligned} dX_n &= \Delta x_0 + \omega_0 Y_n - \psi_0 Z_n \\ dY_n &= \Delta y_0 - \omega_0 X_n + \varepsilon_0 Z_n \\ dZ_n &= \Delta z_0 + \psi_0 X_n - \varepsilon_0 Y_n \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_n^r + \omega_0 - \left(\varepsilon_0 \cos T_n^r - \psi_0 \sin T_n^r \right) \operatorname{tg} \delta_n^r - \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta_n^r} \sin T_n^r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta y_0}{\Delta_n^r} \cos T_n^r \right) \operatorname{sec} \delta_n^r \\ \delta_n &= \delta_n^r + \varepsilon_0 \sin T_n^r + \psi_0 \cos T_n^r - \frac{\Delta x_0}{\Delta_n^r} \sin \delta_n^r \cos T_n^r + \\ &\quad + \frac{\Delta y_0}{\Delta_n^r} \sin \delta_n^r \sin T_n^r + \frac{\Delta z_0}{\Delta_n^r} \cos \delta_n^r \\ \Delta_n &= \Delta_n^r + \Delta x_0 \cos \delta_n^r \cos T_n^r - \Delta y_0 \cos \delta_n^r \sin T_n^r + \Delta z_0 \sin \delta_n^r \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Обратные соотношения для перехода от T_n , δ_n , Δ_n к T_n^r , δ_n^r , Δ_n^r с учетом малости элементов Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , ε_0 , ψ_0 и ω_0 вытекают непосредственно из выражений (68)

$$\left. \begin{aligned} T_n^r &= T_n - \omega_0 + \left(\varepsilon_0 \cos T_n - \psi_0 \sin T_n \right) \operatorname{tg} \delta_n + \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta_n} \sin T_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta y_0}{\Delta_n} \cos T_n \right) \operatorname{sec} \delta_n \\ \delta_n^r &= \delta_n - \varepsilon_0 \sin T_n - \psi_0 \cos T_n + \frac{\Delta x_0}{\Delta_n} \sin \delta_n \cos T_n - \\ &\quad - \frac{\Delta y_0}{\Delta_n} \sin \delta_n \sin T_n - \frac{\Delta z_0}{\Delta_n} \cos \delta_n \\ \Delta_n^r &= \Delta_n - \Delta x_0 \cos \delta_n \cos T_n + \Delta y_0 \cos \delta_n \sin T_n - \Delta z_0 \sin \delta_n \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

В том же плане напишем зависимости между топоцентрическими экваториальными координатами T'_{in} , δ'_n (формулы 30) и T'^r_{in} , δ'^r_{in} (формулы 34), см. рис. 3.

Их вывод полностью аналогичен выводу уравнений (66) — (69), причем элементы сдвига Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , конечно, здесь не фигурируют, так как точка M_i является общим началом обеих систем координат как x' , y' , z' , так и X' , Y' , Z' . Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} T'_{in} &= T'^r_{in} + \omega_0 - (\varepsilon_0 \cos T'^r_{in} - \psi_0 \sin T'^r_{in}) \operatorname{tg} \delta'^r_{in} \\ \delta'_n &= \delta'^r_{in} + \varepsilon_0 \sin T'^r_{in} + \psi_0 \cos T'^r_{in} \\ \Delta'_{in} &= \Delta'^r_{in} \end{aligned} \right\}, \quad (70)$$

и аналогично этому

$$\left. \begin{aligned} T'^r_{in} &= T'_{in} - \omega_0 + (\varepsilon_0 \cos T'_{in} - \psi_0 \sin T'_{in}) \operatorname{tg} \delta'_{in} \\ \delta'^r_{in} &= \delta'_{in} - \varepsilon_0 \sin T'_{in} - \psi_0 \cos T'_{in} \\ \Delta'^r_{in} &= \Delta'_{in} \end{aligned} \right\}. \quad (71)$$

В заключение отметим, что при решении некоторых задач геометрической космической геодезии с невысокой точностью можно полагать $\varepsilon_0 = \psi_0 = \omega_0 = 0$. При этом общие преобразования сведутся к простым смещениям системы по осям координат

$$\left. \begin{aligned} x &= X + \Delta x_0 \\ y &= Y + \Delta y_0 \\ z &= Z + \Delta z_0 \end{aligned} \right\}, \quad (72)$$

и будут иметь место такие приближенные равенства:

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &\simeq A_{ik} \\ b_{ik} &\simeq B_{ik} \\ c_{ik} &\simeq C_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned} T_n &\simeq T'_n - \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta'_n} \sin T'_n + \frac{\Delta y_0}{\Delta'_n} \cos T'_n \right) \operatorname{sec} \delta'_n \\ \delta_n &\simeq \delta'_n - \frac{\Delta x_0}{\Delta'_n} \sin \delta'_n \cos T'_n + \frac{\Delta y_0}{\Delta'_n} \sin \delta'_n \sin T'_n + \frac{\Delta z_0}{\Delta'_n} \cos \delta'_n \end{aligned} \right\}, \quad (74)$$

$$\left. \begin{aligned} T'_n &\simeq T_n + \left(\frac{\Delta x_0}{\Delta_n} \sin T_n + \frac{\Delta y_0}{\Delta_n} \cos T_n \right) \operatorname{sec} \delta_n \\ \delta'_n &\simeq \delta_n + \frac{\Delta x_0}{\Delta_n} \sin \delta_n \cos T_n - \frac{\Delta y_0}{\Delta_n} \sin \delta_n \sin T_n - \frac{\Delta z_0}{\Delta_n} \cos \delta_n \end{aligned} \right\}, \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} T'_{in} &\simeq T'_{in} \\ \delta'_{in} &\simeq \delta'_{in} \end{aligned} \right\}. \quad (76)$$

Соотношения между величинами Δ_n , Δ'_n и Δ'_{in} , Δ'_{in} , конечно, остаются неизменными.

**§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ
В ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И НАОБОРОТ. ТЕОРИЯ ПАРАЛЛАКСА
БЛИЗКИХ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Пусть точка M_i (рис. 12) — станция наблюдений ИСЗ на поверхности Земли, R_i — ее радиус-вектор в референцной системе координат, Sp_n — положение спутника и r_n (r'_{in}) — его геоцентрический (топоцентрический) радиус-вектор в системе x, y, z

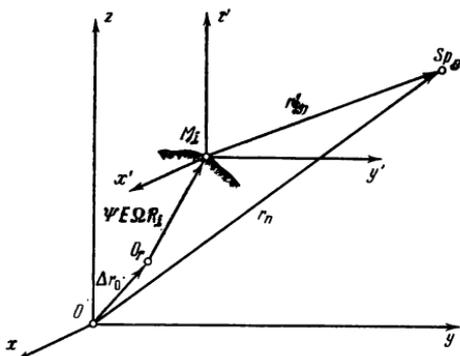


Рис. 12. Связь основных векторов

(x', y', z') . Тогда, используя выражения (58), напомним основное векторное уравнение¹

$$r_n = r'_{in} + \Delta r_0 + \Psi E \Omega R_i. \quad (77)$$

Скалярные уравнения, эквивалентные (77), с учетом формул (1), (29) и (59) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n &= \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} + \Delta x_0 + X_i + \omega_0 Y_i - \psi_0 Z_i \\ - \Delta_n \cos \delta_n \sin T_n &= - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} + \Delta y_0 + Y_i - \omega_0 X_i + \epsilon_0 Z_i \\ \Delta_n \sin \delta_n &= \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} + \Delta z_0 + Z_i + \psi_0 X_i - \epsilon_0 Y_i \end{aligned} \right\}. \quad (78)$$

Координаты X_i, Y_i, Z_i вычисляются по известным геодезическим координатам $B_i, L_i, H_i = H_{q, i} + \zeta_{g, i}$ согласно формулам (9). Топоцентрические координаты спутника $\Delta'_{in}, T'_{in}, \delta'_{in}$ определяются из наблюдений в точке M_i (или же и на другой станции наблюдений, положение которой в геодезической системе координат

¹ Если бы топоцентрическое положение спутника было дано в системе X', Y', Z' (33), (34), то аналогично получилось бы $r_n = \Delta r_0 + \Psi E \Omega (R_i + R'_{in})$. Для краткости это выражение в дальнейшем раскрывать не будем, так как соотношения между T'_{in}, T_{in} и $\delta'_{in}, \delta_{in}$ определяются формулами (70), (71).

известно, если измерять лишь направления на спутник, а не расстояние Δ_{in} .

Если даны элементы сдвига и ориентирования $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0$ и ω_0 геодезического референц-эллипсоида E_r и положение точки $M_i (B_i, L_i, H_i)$ в системе этого эллипсоида, то из формул (78) можно выразить геоцентрические координаты T_n, δ_n, Δ_n как функции величин $T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}, \Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0$ и ω_0 , например, используя выражения (2). Аналогично можно было бы выразить топоцентрические величины $T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}$ как функции от $T_n, \delta_n, \Delta_n, B_i, L_i, H_i, \Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0$ и ω_0 .

Конечно, параметры $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0$ и ω_0 , определяющие положение референц-эллипсоида в теле Земли, с нужной степенью точности до сих пор не известны (обычно, как правило, предполагают $\varepsilon_0=0, \psi_0=0, \omega_0=0$). Поэтому преобразование координат $T'_n, \delta'_n, \Delta'_n$ в T_n, δ_n, Δ_n по формулам (78) точно осуществить невозможно. Появляется, таким образом, необходимость ввести понятие о квазигеоцентрических координатах спутника $Sp_n, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{z}_n$.

$$\tilde{x}_n = X_i + x'_{in}; \quad \tilde{y}_n = Y_i + y'_{in}; \quad \tilde{z}_n = Z_i + z'_{in}. \quad (79)$$

Они близки к геоцентрическим координатам и равенства $\tilde{x}_n = x_n, \tilde{y}_n = y_n, \tilde{z}_n = z_n$ выполнялись бы при условиях $\Delta x_0=0, \Delta y_0=0, \Delta z_0=0, \varepsilon_0=0, \psi_0=0$ и $\omega_0=0$. Они также близки к референсным координатам X_n, Y_n, Z_n спутника (в равной мере к ним подойдет название — квазиреференсные координаты), и равенства $\tilde{x}_n = X_n, \tilde{y}_n = Y_n, \tilde{z}_n = Z_n$ действительны лишь в случае, когда $\varepsilon_0=0, \psi_0=0, \omega_0=0$. Квазигеоцентрической системе координат все же недостает геометрического определения; выражения (79) имеют поэтому лишь характер обозначений (символов).

Уравнения (78), с учетом (79) и (67) при $n=i$ можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n &= \tilde{x}_n + dX_i \\ -\Delta_n \cos \delta_n \sin T_n &= \tilde{y}_n + dY_i \\ \Delta_n \sin \delta_n &= \tilde{z}_n + dZ_i \end{aligned} \right\}, \quad (80)$$

где согласно (67)

$$\left. \begin{aligned} dX_i &= \Delta x_0 + \omega_0 Y_i - \psi_0 Z_i \\ dY_i &= \Delta y_0 - \omega_0 X_i + \varepsilon_0 Z_i \\ dZ_i &= \Delta z_0 + \psi_0 X_i - \varepsilon_0 Y_i \end{aligned} \right\}. \quad (81)$$

В соответствии с формулами (79) введем также квазигеоцентрические экваториальные координаты T'_n

$(\tilde{\alpha}_n)$, $\tilde{\delta}_n$ и квазигеоцентрическое расстояние $\tilde{\Delta}_n$ спутника:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \tilde{T}_n &= -\frac{\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n} \\ \operatorname{tg} \tilde{\delta}_n &= \frac{\tilde{z}_n}{\sqrt{\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2}} \\ \tilde{\Delta}_n &= \sqrt{\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2 + \tilde{z}_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Величины, входящие в формулы (82), не имеют геометрической интерпретации (определения), так, например, $\tilde{\Delta}_n$ не является расстоянием спутника $S\rho_n$ ни от O_r , ни от центра масс O . Однако их можно точно вычислить, имея топоцентрические координаты спутника $T'_n(\alpha'_{in})$, δ'_{in} , измеренные в момент S_n , и геодезические координаты B_i , L_i , $H_{q,i}$, $\zeta_{q,i}$, определяющие положение топоцентра M_i в геодезической референцной системе. Неточности в их определении вызываются только ошибками исходных величин $T'_{in}(\alpha'_{in})$, δ'_{in} , B_i , L_i , $H_{q,i}$, $\zeta_{q,i}$, т. е., по сути дела, ошибками измерительного характера.

Квазигеоцентрические координаты \tilde{T} , $\tilde{\delta}$, $\tilde{\Delta}$ по своим величинам близки к геоцентрическим, так что можно использовать дифференциальные формулы

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \tilde{x}_n + dX_i; & y_n &= \tilde{y}_n + dY_i; & z_n &= \tilde{z}_n + dZ_i \\ T_n &= \tilde{T}_n + d\tilde{T}_n; & \delta_n &= \tilde{\delta}_n + d\tilde{\delta}_n; & \Delta_n &= \tilde{\Delta}_n + d\tilde{\Delta}_n \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Из формул (82), (80) и (81) легко получить выражения дифференциалов, стоящих в правых частях равенств (83),

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{T}_n &= \left(\frac{\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n^2} dX_i - \frac{1}{\tilde{x}_n} dY_i \right) \cos^2 \tilde{T}_n \\ d\tilde{\delta}_n &= \frac{\tilde{z}_n}{\sqrt{(\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2)^3}} (-\tilde{x}_n dX_i - \tilde{y}_n dY_i) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2}} dZ_i \\ \delta \tilde{\Delta}_n &= \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{\Delta}_n} dX_i + \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{\Delta}_n} dY_i + \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\Delta}_n} dZ_i \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Если подставить выражения (81) в (84), то получим [9]

$$\begin{aligned} d\tilde{T}_n &= - \left[\left(\frac{\Delta x_0}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{T}_n + \frac{\Delta y_0}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{T}_n \right) - \omega_0 \left(\frac{X_i}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{T}_n - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{Y_i}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{T}_n \right) + \frac{Z_i}{\tilde{\Delta}_n} (\epsilon_0 \cos \tilde{T}_n - \psi_0 \sin \tilde{T}_n) \right] \sec \tilde{\delta}_n, \end{aligned} \quad (85)$$

$$d\tilde{\delta}'_n = -\frac{\Delta x_0}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \cos \tilde{T}'_n + \frac{\Delta y_0}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \sin \tilde{T}'_n + \frac{\Delta z_0}{\tilde{\Delta}_0} \cos \tilde{\delta}'_n -$$

$$- \omega_0 \left(\frac{X_i}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \sin \tilde{T}'_n + \frac{Y_i}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \cos \tilde{T}'_n \right) + \varepsilon_0 \left(\frac{Z_i}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \sin \tilde{T}'_n - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_i}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{\delta}'_n \right) + \psi_0 \left(\frac{X_i}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{\delta}'_n + \frac{Z_i}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}'_n \cos \tilde{T}'_n \right), \quad (86)$$

$$d\tilde{\Delta}'_n = \Delta x_0 \cos \tilde{\delta}'_n \cos \tilde{T}'_n - \Delta y_0 \cos \tilde{\delta}'_n \sin \tilde{T}'_n + \Delta z_0 \sin \tilde{\delta}'_n +$$

$$+ \omega_0 \cos \tilde{\delta}'_n (X_i \sin \tilde{T}'_n + Y_i \cos \tilde{T}'_n) - \psi_0 (Z_i \cos \tilde{\delta}'_n \cos \tilde{T}'_n - X_i \sin \tilde{\delta}'_n) -$$

$$- \varepsilon_0 (Y_i \sin \tilde{\delta}'_n + Z_i \cos \tilde{\delta}'_n \sin \tilde{T}'_n). \quad (87)$$

Уравнениями (80) и (83)—(87) заодно исчерпывается точная теория параллакса спутников. В литературе приводятся и традиционные формулы для разностей ($T_n - T'_{in}$) и соответственно ($\alpha_n - \alpha'_{in}$) и ($\delta_n - \delta'_{in}$); но все же нужно принять во внимание, что ИСЗ находятся очень близко к Земле (в сотнях или нескольких тысячах километров над ее поверхностью), и о малых параллактических углах не может быть и речи, так как они достигают десятков градусов. Поэтому использование прямых формул для ($T_n - T'_{in}$) и ($\delta_n - \delta'_{in}$) не дает никаких преимуществ. Эти формулы пригодны лишь для весьма удаленных тел, например Солнца, для которых можно применять соответствующие разложения в ряды.

Точные обратные соотношения, т. е. формулы для перехода от геоцентрических координат T_n , δ_n , Δ_n к топоцентрическим T'_{in} , δ'_{in} , Δ'_{in} , мы выводить не будем, так как в них нет необходимости. На практике, например, для вычисления эфемерид обычно применяют приближенные формулы. В этом случае вполне достаточно уравнения (80) брать без членов dX_i , dY_i , dZ_i , т. е. писать

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} &\simeq \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n - \\ &- (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i = x_n - X_i \\ - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} &\simeq - \Delta_n \cos \delta_n \sin T_n - \\ &- (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i = y_n - Y_i \\ \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} &\simeq \Delta_n \sin \delta_n - [N_i (1 - e_r^2) + \\ &+ H_i] \sin B_i = z_n - Z_i \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Отсюда можно выразить искомые топоцентрические координаты

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T'_{in} &\simeq - \frac{y_n - Y_i}{x_n - X_i} \\ \operatorname{tg} \delta'_{in} &\simeq \frac{z_n - Z_i}{\sqrt{(x_n - X_i)^2 + (y_n - Y_i)^2}} \\ \Delta'_{in} &\simeq \sqrt{(x_n - X_i)^2 + (y_n - Y_i)^2 + (z_n - Z_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Аналогичные формулы получаются и для перехода от топоцентрических координат к геоцентрическим, если пренебречь параметрами $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0$ и ω_0 :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n &\simeq \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} + \\ &+ (N_l + H_l) \cos B_l \cos L_l = x'_{in} + X_l \\ - \Delta_n \cos \delta_n \sin T_n &\simeq - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} + \\ &+ (N_l + H_l) \cos B_l \sin L_l = y'_{in} + Y_l \\ \Delta_n \sin \delta_n &\simeq \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} + [N_l(1 - e_r^2) + \\ &+ H_l] \sin B_l = z'_{in} + Z_l \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T_n &\simeq - \frac{y'_{in} + Y_l}{x'_{in} + X_l} \\ \operatorname{tg} \delta_n &\simeq \frac{z'_{in} + Z_l}{\sqrt{(x'_{in} + X_l)^2 + (y'_{in} + Y_l)^2}} \\ \Delta_n &\simeq \left| \sqrt{(x'_{in} + X_l)^2 + (y'_{in} + Y_l)^2 + (z'_{in} + Z_l)^2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

В заключение еще раз напомним, что величины dT_n (формула 85) и $d\delta_n$ (формула 86) для близких спутников в существующих референчных системах могут достигать нескольких дуговых секунд, а величина $d\tilde{\Delta}_n$ (формула 87) — сотен метров.

§ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В РЕФЕРЕНЧНЫЕ И НАОБОРОТ

Из рис. 13 вытекают соотношения между радиусом-вектором R_n спутника Sp_n , радиусом-вектором R_i точки M_i (оба вектора рассматриваются в референчной системе X, Y, Z) и топоцентрическим радиусом-вектором R'_{in} спутника (в системе X', Y', Z')

$$R_n = R_i + R'_{in} = R_l (\Psi E \Omega)^{-1} r'_{in}, \quad (92)$$

где $(\Psi E \Omega)^{-1}$ — матрица, обратная к матрице (57). Скалярные уравнения, эквивалентные (92), можно написать с обозначениями, принятыми в формулах (79), (5), (29), в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n^r \cos \delta_n^r \cos T_n^r &= \tilde{x}_n - \omega_0 y'_{in} - \psi_0 z'_{in} \\ - \Delta_n^r \cos \delta_n^r \sin T_n^r &= \tilde{y}_n + \omega_0 x'_{in} - \varepsilon_0 z'_{in} \\ \Delta_n^r \sin \delta_n^r &= \tilde{z}_n - \psi_0 x'_{in} + \varepsilon_0 y'_{in} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Референционные экваториальные координаты и референсное расстояние спутника можно аналогично формулам (83) выразить так:

$$\left. \begin{aligned} T_n^r &= \tilde{T}_n + d\tilde{T}_n^r \\ \delta_n^r &= \tilde{\delta}_n + d\tilde{\delta}_n^r \\ \Delta_n^r &= \tilde{\Delta}_n + d\tilde{\Delta}_n^r \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

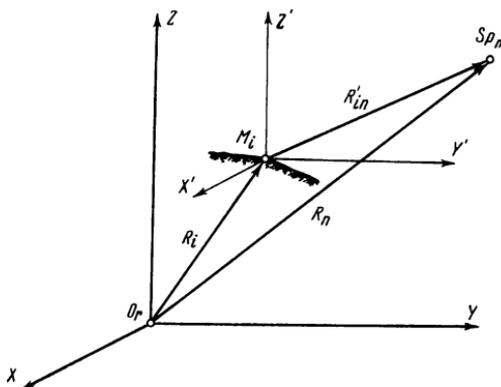


Рис. 13. Преобразование топоцентрических координат в референсные

Для величин $d\tilde{T}_n^r$, $d\tilde{\delta}_n^r$, $d\tilde{\Delta}_n^r$ можно вывести формулы, подобные (84):

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{T}_n^r &= \left(\frac{y_n}{\tilde{x}_n^2} dX'_{in} - \frac{1}{\tilde{x}_n} dY'_{in} \right) \cos^2 \tilde{T}_n \\ d\tilde{\delta}_n^r &= \frac{\tilde{z}_n}{\left| \sqrt{(\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2)^3} \right|} (-\tilde{x}_n dX'_{in} - \tilde{y}_n dY'_{in}) + \\ &\quad + \frac{1}{\left| \sqrt{(\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2)} \right|} dZ'_{in} \\ d\tilde{\Delta}_n^r &= \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{\Delta}_n} dX'_{in} + \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{\Delta}_n} dY'_{in} + \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\Delta}_n} dZ'_{in} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Далее, с учетом (61) напомним

$$\left. \begin{aligned} dX'_{in} &= -\omega_0 Y'_{in} + \psi_0 Z'_{in} \\ dY'_{in} &= \omega_0 X'_{in} - \varepsilon_0 Z'_{in} \\ dZ'_{in} &= -\psi_0 X'_{in} + \varepsilon_0 Y'_{in} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

и после преобразований

$$d\tilde{T}_n^r = \left[\omega_0 \left(\frac{Y'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{T}_n - \frac{X'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{T}_n \right) + \frac{Z'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} (\varepsilon_0 \cos \tilde{T}_n - \psi_0 \sin \tilde{T}_n) \right] \sec \tilde{\delta}_n, \quad (97)$$

$$d\tilde{\delta}_n^r = \omega_0 \left(\frac{X'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \sin \tilde{T}_n + \frac{Y'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \cos \tilde{T}_n \right) - \varepsilon_0 \left(\frac{Z'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \sin \tilde{T}_n - \frac{Y'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{\delta}_n \right) - \psi_0 \left(\frac{X'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{\delta}_n + \frac{Z'_{in}}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \cos \tilde{T}_n \right), \quad (98)$$

$$d\tilde{\Delta}_n^r = -\omega_0 \cos \tilde{\delta}_n (X'_{in} \sin \tilde{T}_n + Y'_{in} \cos \tilde{T}_n) + \psi_0 (Z'_{in} \cos \tilde{\delta}_n \cos \tilde{T}_n - X'_{in} \sin \tilde{\delta}_n) + \varepsilon_0 (Y'_{in} \sin \tilde{\delta}_n + Z'_{in} \cos \tilde{\delta}_n \sin \tilde{T}_n). \quad (99)$$

Заметим, что поправки, выражаемые уравнениями (97)—(99), превращаются в нули при $\varepsilon_0 = \psi_0 = \omega_0 = 0$, независимо от величин элементов сдвигов Δx_0 , Δy_0 и Δz_0 .

Очевидно, используя формулы (68), можно получить контрольные формулы для выражений (85)—(87) и (97)—(99) (величины порядка квадратов элементов сдвигов Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 здесь отброшены, как и в главах о преобразованиях координат):

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{T}_n - d\tilde{T}_n^r = \tilde{T}_n - \tilde{T}_n^r &= \omega_0 - (\varepsilon_0 \cos \tilde{T}_n - \psi_0 \sin \tilde{T}_n) \operatorname{tg} \tilde{\delta}_n - \\ &- (\Delta x_0 \sin \tilde{T}_n + \Delta y_0 \cos \tilde{T}_n) \Delta_n^{-1} \sec \tilde{\delta}_n \\ d\tilde{\delta}_n - d\tilde{\delta}_n^r = \tilde{\delta}_n - \tilde{\delta}_n^r &= \varepsilon_0 \sin \tilde{T}_n + \psi_0 \cos \tilde{T}_n - \\ - \left[\frac{\Delta x_0}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \cos \tilde{T}_n - \frac{\Delta y_0}{\tilde{\Delta}_n} \sin \tilde{\delta}_n \sin \tilde{T}_n - \frac{\Delta z_0}{\tilde{\Delta}_n} \cos \tilde{\delta}_n \right] \\ d\tilde{\Delta}_n - d\tilde{\Delta}_n^r = \tilde{\Delta}_n - \tilde{\Delta}_n^r &= \Delta x_0 \cos \tilde{\delta}_n \cos \tilde{T}_n - \\ &- \Delta y_0 \cos \tilde{\delta}_n \sin \tilde{T}_n + \Delta z_0 \sin \tilde{\delta}_n \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

и, конечно,

$$\left. \begin{aligned} dX_i - dX'_{in} &= d\tilde{X}_n \\ dY_i - dY'_{in} &= d\tilde{Y}_n \\ dZ_i - dZ'_{in} &= d\tilde{Z}_n \end{aligned} \right\}. \quad (101)$$

ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

§ 7. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

Разделим эти задачи на две основные группы в зависимости от того, нужно или нет для их решения знать точные элементы орбиты спутника:

1) орбитальные задачи, в которых предполагается знание элементов орбиты (геоцентрического положения) известного спутника;

2) задачи, в которых не требуется знание элементов орбиты ИСЗ (задачи космической геодезии об относительном положении) (или космическая триангуляция. — *Прим. ред.*)¹.

Определение элементов орбит спутников с точностью, необходимой для решения орбитальных задач, возможно только для достаточно тяжелых спутников, обращающихся вне плотных слоев атмосферы. Кроме того, желательно, чтобы в определении элементов орбит принимало участие как можно больше станций, размещенных, по возможности, по всей Земле, так как редукции к наблюдаемым топоцентрическим величинам при переходе к геоцентрическим величинам по формулам (78), (80) вычисляются недостаточно точно. Можно рассчитать только квазигеоцентрические величины (см. формулы 79, 82), но их отклонения от точных геоцентрических величин будут неодинаковыми для разных станций наблюдений на поверхности Земли и для различных референцных геодезических систем. Влияние ошибок систематического характера для определенного топоцентра и принятой референцной системы можно ослабить лишь путем наблюдения положений одних и тех же спутников из нескольких станций, целесообразно расположенных на земной поверхности.

До сих пор лишь в некоторых случаях элементы орбиты спутника можно было вычислять с такой точностью, чтобы направление геоцентрического вектора, определенное по ним, получалось с ошибкой до $10''$ [10]. Конечно, направление топоцентрического вектора спутника сравнительно легко определяется с реальной точностью приблизительно на порядок выше.

Вследствие этого такое разделение задач можно считать удобным. При этом группе спутниковых задач об относительном положении соответствуют все геодезические задачи, которые решаются только по топоцентрическим величинам

¹ Проф. И. Д. Жонголович называет задачи 1 и 2 задачами с использованием «активных» и «пассивных» спутников. Но за рубежом «активными» называют такие ИСЗ, которые дают в строго определенные моменты вспышки или радиопульсы (ANNA, GEOS), а «пассивными» — те, которые их не дают (ECHO, PAGEOS). (*Прим. ред.*).

и не зависят от геоцентрических. В группу орбитальных задач входят «все остальные» задачи, в которых, как правило, учитывается положение центра масс Земли. Тогда число неизвестных (определяемых) величин в задачах этой группы уменьшится до минимума, а точность их вычисления повысится до максимально возможного уровня.

Глава 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ, В КОТОРЫХ НЕ ТРЕБУЕТСЯ ЗНАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ (ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ)

§ 8. СУЩНОСТЬ РЕШЕНИЯ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЗАДАЧ

В этих задачах спутник играет роль вспомогательной визирной цели, которую синхронно (или квазисинхронно) наблюдают по крайней мере из двух (геодезических) станций наблюдений ИСЗ на физической поверхности Земли. Определяемыми неизвестными при этом являются величины, частично или полностью характеризующие взаимное расположение этих станций. Они могут быть исходными для решения задач об определении параметров референционной геодезической системы при условии, что положения станций наблюдений ИСЗ известны с достаточной точностью. Кроме того, может быть определено и положение спутника.

Рассмотрим такие задачи:

Группа I

1. Определение направления (направляющих косинусов, азимута и зенитного расстояния) линии, соединяющей станции наблюдений ИСЗ.
2. Определение относительного положения (разностей координат) станций наблюдений ИСЗ.
3. Определение геодезических координат и высоты квазигеоида для станций наблюдений ИСЗ (в определенной референционной системе с известными элементами ориентирования).

Группа II

1. Определение направления оси вращения геодезического эллипсоида и направления нормали к плоскости основного (гриничского) геодезического меридиана.
2. Соединение различных геодезических референционных систем (определение разностей координат центров референц-эллипсоидов, к которым относятся эти системы).

Задачи I группы касаются положения станций наблюдений ИСЗ, задачи II группы — параметров и элементов ориентирования геодезической референционной системы.

Различный характер задач обеих групп требует и различных программ наблюдений и разных схем расположения (геодезических) станций наблюдений ИСЗ. При этом в I группе речь идет о задачах, значительно более простых, чем задачи II группы. По сути дела, это та же хорошо известная пространственная триангуляция (называемая при использовании космических целей также «спутниковой», «астрономической» или «звездной» триангуляцией).

§ 9. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ

За основу для решения задач, в которых знание элементов орбиты спутника не является обязательным условием, можно взять соотношение [11], [12] между топоцентрическими положениями спутника для двух станций M_i и M_k на земной поверхности

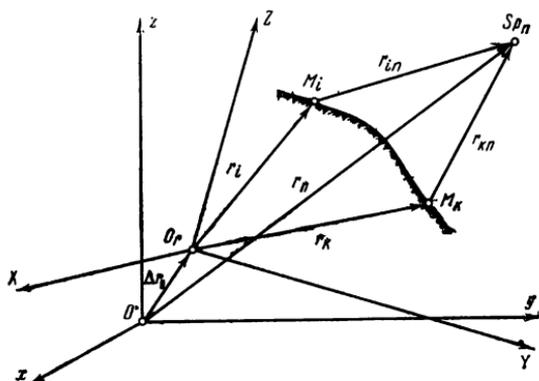


Рис. 14. Основное соотношение космической геодезии

(рис. 14). Обозначим через $\bar{\Gamma}_{in}$ и $\bar{\Gamma}_{kn}$ топоцентрические радиус-векторы спутника Sp_n соответственно для станций наблюдений ИСЗ M_i и M_k и через $\bar{\Gamma}_i$ и $\bar{\Gamma}_k$ — радиусы-векторы станций по отношению к центру O_r принятого референц-эллипсоида (все векторы рассматриваются в геоцентрической системе x, y, z)¹.

Затем получим элементарное соотношение

$$\bar{\Gamma}_i + \bar{\Gamma}_{in} = \bar{\Gamma}_k + \bar{\Gamma}_{kn}. \quad (102)$$

¹ Радиусы-векторы обозначены в соответствии с осями координат систем, к которым они относятся: $\bar{\Gamma}$ — в системе x, y, z ; $\bar{\Gamma}'$ — в системе x', y', z' ; \bar{R} — в X, Y, Z ; \bar{R}' — в X', Y', Z' .

Так как $r'_{in} = r'_{in}$ и $r'_{kn} = r'_{kn}$, то с учетом (58) равенство (102) можно привести к виду

$$r'_{kn} - r'_{in} + \Psi E \Omega (R_k - R_i) = 0. \quad (103)$$

Это и есть указанное основное уравнение. Оно дает зависимость между топоцентрическими координатами спутника, геодезическими координатами и геодезическими (эллипсоидальными) высотами станций, на которых измеряется положение спутника, с одной стороны, и элементами взаимной ориентировки топоцентрической и референцной систем, — с другой. Эта зависимость лучше видна из скалярных уравнений, эквивалентных векторному уравнению (103), которые напомним с учетом равенств (29), (9) и (57), так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{kn} \cos \delta'_{kn} \cos T'_{kn} - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} + (N_k + H_k) \cos B_k \cos L_k - \\ - (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i + \delta X_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0 \\ - \Delta'_{kn} \cos \delta'_{kn} \sin T'_{kn} + \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} + \\ + (N_k + H_k) \cos B_k \sin L_k - (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i + \\ + \delta Y_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0 \\ \Delta'_{kn} \sin \delta'_{kn} - \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} + [N_k(1 - e_r^2) + H_k] \sin B_k - \\ - [N_i(1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i + \delta Z_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (104)$$

Выражения для поправок будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \delta X_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \Delta x_{ik} - \Delta X_{ik} \\ \delta Y_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \Delta y_{ik} - \Delta Y_{ik} \\ \delta Z_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \Delta z_{ik} - \Delta Z_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (105)$$

а с учетом выражения (58)

$$\left. \begin{aligned} \delta X_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \omega_0 \Delta Y_{ik} - \psi_0 \Delta Z_{ik} \\ \delta Y_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = -\omega_0 \Delta X_{ik} + \epsilon_0 \Delta Z_{ik} \\ \delta Z_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \psi_0 \Delta X_{ik} - \epsilon_0 \Delta Y_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (106)$$

Понятно, что выражения (104) не зависят ни от положения станции, ни от положения спутника относительно центра масс Земли, т. е. от составляющих вектора Δr_0 .

В том случае, когда влияние углов $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$ учитывать не нужно, т. е. при $\delta X_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0, \delta Y_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0$ и $\delta Z_{ik}(\epsilon_0, \psi_0, \omega_0) = 0$, основное уравнение (103) упрощается так:

$$r'_{kn} - r'_{in} + R_k - R_i = 0$$

или с обозначениями, принятыми в формулах (29), (9),

$$\left. \begin{aligned} x'_{in} + X_i = x'_{kn} + X_k = X_n \\ y'_{in} + Y_i = y'_{kn} + Y_k = Y_n \\ z'_{in} + Z_i = z'_{kn} + Z_k = Z_n \end{aligned} \right\}, \quad (107)$$

причем X_n, Y_n, Z_n суть прямоугольные пространственные координаты спутника Sp_n в геодезической референцной системе.

§ 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ СТАНЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ, ПО СИНХРОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ СПУТНИКА

I. Сущность решения

Эта задача является простейшей и вместе с тем основной частью приведенного комплекса задач (§ 8). Практически она была впервые решена в Финляндии [13] (см. «Краткий исторический очерк», глава 2). Идея и теория ее элементарны: каждая пара направлений на спутник, одновременно измеренных на двух станциях наблюдений ИСЗ M_i и M_k (рис. 15), определяет положение плоскости, проходящей через обе станции и спутник Sp_n ; каждая пара таких непараллельных плоскостей $M_i M_k Sp_n$ и $M_i M_k Sp_{n+1}$ определяет искомое направление линии $M_i M_k$.

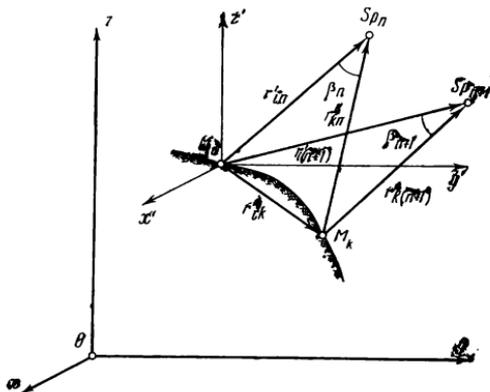


Рис. 15. Определение направления хорды

Если r'_{ikn} — вектор нормали к плоскости $M_i M_k Sp_n$, а $r'_{ik(n+1)}$ — вектор нормали к плоскости $M_i M_k Sp_{n+1}$, то вектор r'_{ik} можно выразить векторным произведением

$$r'_{ik} = r'_{ikn} \times r'_{ik(n+1)}, \quad (108)$$

причем, аналогично этому,

$$\left. \begin{aligned} r'_{ikn} &= r'_{in} \times r'_{kn} \\ r'_{ik(n+1)} &= r'_{i(n+1)} \times r'_{k(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

II. Определение направляющих косинусов (параметров)

Имея в виду, что в данной задаче речь идет только о направлениях, можно перейти к единичным векторам, составляющие которых, как известно, равны направляющим косинусам относительно соответствующих осей координат. Направляющие косинусы (направляющие параметры) будем последовательно обозначать $a', b', c' (l', m', n')$ в системе x', y', z' и $A', B', C' (L', 1,$

¹ Буквой L обозначается также геодезическая долгота, а буквой N — радиус кривизны первого вертикала. Двойные индексы у направляющих косинусов исключают всякие недоразумения.

$M', N')$ в системе X', Y', Z' с добавлением такого же индекса, который имеется у соответствующего вектора.

Пусть измеряемыми величинами (в моменты S_n и S_{n+1} гриничского звездного времени, соответствующие положениям спутника Sp_n и Sp_{n+1}) будут топоцентрические экваториальные координаты (см. главу 4) спутника T'_{in}, δ'_{in} и T'_{kn}, δ'_{kn} . Из формул (109) следуют очевидные соотношения (в которых β_n есть угол между направлениями $M_i Sp_n$ и $M_k Sp_n$; β_{n+1} — угол между $M_i Sp_{n+1}$ и $M_k Sp_{n+1}$; $\beta_{n, n+1}$ — угол между нормальными к плоскостям $M_i M_k Sp_n$ и $M_i M_k Sp_{n+1}$; предполагается, что $\beta_n \neq 0$, $\beta_{n+1} \neq 0$ и $\beta_{n(n+1)} \neq 0$):

$$\frac{r'_{ikn}}{r'_{ikn}} = \frac{1}{\sin \beta_n} \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ a'_{in} & b'_{in} & c'_{in} \\ a'_{kn} & b'_{kn} & c'_{kn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \beta_n} (l'_{ikn} i' + m'_{ikn} j' + n'_{ikn} k'), \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \frac{r'_{ik(n+1)}}{|r'_{ik(n+1)}|} &= \frac{1}{\sin \beta_{n+1}} \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ a'_{i(n+1)} & b'_{i(n+1)} & c'_{i(n+1)} \\ a'_{k(n+1)} & b'_{k(n+1)} & c'_{k(n+1)} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sin \beta_{n+1}} (l'_{ik(n+1)} i' + m'_{ik(n+1)} j' + n'_{ik(n+1)} k'). \end{aligned} \quad (111)$$

При этом с учетом формул (29) и равенств

$$a'_{in} = \frac{x'_{in}}{\Delta'_{in}}, \quad b'_{in} = \frac{y'_{in}}{\Delta'_{in}} \text{ и т. д.};$$

$$\left. \begin{aligned} l'_{ikn} &= \begin{vmatrix} b'_{in} & c'_{in} \\ b'_{kn} & c'_{kn} \end{vmatrix} = b'_{in} c'_{kn} - b'_{kn} c'_{in} = -\cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \sin \delta'_{kn} + \\ &\quad + \cos \delta'_{kn} \sin T'_{kn} \sin \delta'_{in} \\ m'_{ikn} &= - \begin{vmatrix} a'_{in} & c'_{in} \\ a'_{kn} & c'_{kn} \end{vmatrix} = a'_{kn} c'_{in} - a'_{in} c'_{kn} = \\ &= -\cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \sin \delta'_{kn} + \cos \delta'_{kn} \cos T'_{kn} \sin \delta'_{in} \\ n'_{ikn} &= \begin{vmatrix} a'_{in} & b'_{in} \\ a'_{kn} & b'_{kn} \end{vmatrix} = a'_{in} b'_{kn} - a'_{kn} b'_{in} = \\ &= -\cos \delta'_{in} \cos \delta'_{kn} \sin (T'_{kn} - T'_{in}) \end{aligned} \right\}, \quad (112)$$

$$\left. \begin{aligned}
l'_{ik(n+1)} &= \left| \begin{array}{c} b'_{i(n+1)} c'_{i(n+1)} \\ b'_{k(n+1)} c'_{k(n+1)} \end{array} \right| = b'_{i(n+1)} c'_{k(n+1)} - \\
&- b'_{k(n+1)} c'_{i(n+1)} = -\cos \delta'_{i(n+1)} \sin T'_{i(n+1)} \sin \delta'_{k(n+1)} + \\
&\quad + \cos \delta'_{k(n+1)} \sin T'_{k(n+1)} \sin \delta'_{i(n+1)} \\
m'_{ik(n+1)} &= - \left| \begin{array}{c} a'_{i(n+1)} c'_{i(n+1)} \\ a'_{k(n+1)} c'_{k(n+1)} \end{array} \right| = a'_{k(n+1)} c'_{i(n+1)} - \\
&- a'_{i(n+1)} c'_{k(n+1)} = -\cos \delta'_{i(n+1)} \cos T'_{i(n+1)} \sin \delta'_{k(n+1)} + \\
&\quad + \cos \delta'_{k(n+1)} \cos T'_{k(n+1)} \sin \delta'_{i(n+1)} \\
n'_{ik(n+1)} &= \left| \begin{array}{c} a'_{i(n+1)} b'_{i(n+1)} \\ a'_{k(n+1)} b'_{k(n+1)} \end{array} \right| = a'_{i(n+1)} b'_{k(n+1)} - \\
&- a'_{k(n+1)} b'_{i(n+1)} = -\cos \delta'_{i(n+1)} \cos \delta'_{k(n+1)} \times \\
&\quad \times \sin(T'_{k(n+1)} - T'_{i(n+1)})
\end{aligned} \right\} \quad (113)$$

и

$$\left. \begin{aligned}
\sin \beta_n &= \left| \sqrt{l'^2_{ikn} + m'^2_{ikn} + n'^2_{ikn}} \right| \\
\sin \beta_{n+1} &= \left| \sqrt{l'^2_{ik(n+1)} + m'^2_{ik(n+1)} + n'^2_{ik(n+1)}} \right|
\end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Аналогично из формул (108) следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{r'_{ik}}{|r'_{ik}|} &= \frac{1}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1} \sin \beta_{n(n+1)}} \left| \begin{array}{ccc} i' & j' & k' \\ l'_{ikn} & m'_{ikn} & n'_{ikn} \\ l'_{ik(n+1)} & m'_{ik(n+1)} & n'_{ik(n+1)} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1} \sin \beta_{n(n+1)}} (l'_{ik} i' + m'_{ik} j' + n'_{ik} k'), \quad (115)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
l'_{ik} &= \left| \begin{array}{cc} m'_{ikn} & n'_{ikn} \\ m'_{ik(n+1)} & n'_{ik(n+1)} \end{array} \right|; \\
m'_{ik} &= - \left| \begin{array}{cc} l'_{ikn} & n'_{ikn} \\ l'_{ik(n+1)} & n'_{ik(n+1)} \end{array} \right|; \\
n'_{ik} &= \left| \begin{array}{cc} l'_{ikn} & m'_{ikn} \\ l'_{ik(n+1)} & m'_{ik(n+1)} \end{array} \right| \\
\sin \beta_{n(n+1)} &= \frac{1}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1}} \left| \sqrt{l'^2_{ik} + m'^2_{ik} + n'^2_{ik}} \right|
\end{aligned} \right\} \quad (116)$$

От направляющих параметров (116) и (113) перейдем к направляющим косинусам:

$$\left. \begin{aligned} a'_{ik} &= \frac{i}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1} \sin \beta_{n(n+1)}} l'_{ik} \\ b'_{ik} &= \frac{1}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1} \sin \beta_{n(n+1)}} m'_{ik} \\ c'_{ik} &= \frac{1}{\sin \beta_n \sin \beta_{n+1} \sin \beta_{n(n+1)}} n'_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (117)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{ikn} &= \frac{1}{\sin \beta_n} l'_{ikn} \\ b'_{ikn} &= \frac{1}{\sin \beta_n} m'_{ikn} \\ c'_{ikn} &= \frac{1}{\sin \beta} n'_{ikn} \end{aligned} \right\}, \quad (118)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{ik(n+1)} &= \frac{1}{\sin \beta_{n+1}} l'_{ik(n+1)} \\ b'_{ik(n+1)} &= \frac{1}{\sin \beta_{n+1}} m'_{ik(n+1)} \\ c'_{ik(n+1)} &= \frac{1}{\sin \beta_{n+1}} n'_{ik(n+1)} \end{aligned} \right\}. \quad (119)$$

III. Определение топоцентрических экваториальных координат, азимута и зенитного расстояния хорды

Вследствие взаимозависимости направляющих параметров (направляющих косинусов), входящих в формулы (116) и (117), в некоторых задачах становится более удобным определять направление линии $M_i M_k$ двумя независимыми величинами. Ими могут быть, например, топоцентрические экваториальные координаты T'_{ik} и δ'_{ik} направления на M_k , наблюдаемого из точки M_i (рис. 16). Они определяются уравнениями (30), примененными к наземной цели (при $n=k$):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T'_{ik} &= -\frac{y'_{ik}}{x'_{ik}} \\ \operatorname{tg} \delta'_{ik} &= \frac{z'_{ik}}{\sqrt{x'^2_{ik} + y'^2_{ik}}} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

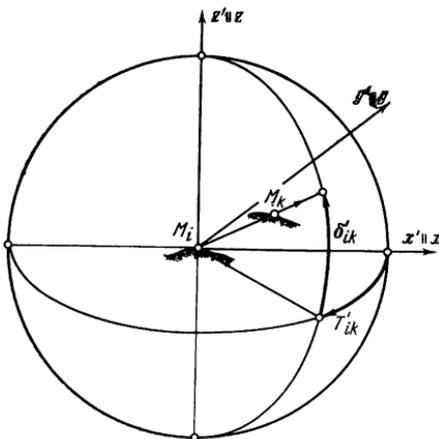


Рис. 16. Топоцентрические экваториальные координаты

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T'_{ik} &= -\frac{b'_{ik}}{a'_{ik}} = -\frac{m'_{ik}}{l'_{ik}} \\ \operatorname{tg} \delta'_{ik} &= \frac{c'_{ik}}{\sqrt{a'^2_{ik} + b'^2_{ik}}} = \frac{n'_{ik}}{\sqrt{l'^2_{ik} + m'^2_{ik}}} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Из формул (121) получим обратные соотношения

$$\left. \begin{aligned} a'_{ik} &= \frac{l'_{ik}}{\sqrt{l'^2_{ik} + m'^2_{ik} + n'^2_{ik}}} = \cos \delta'_{ik} \cos T'_{ik} \\ b'_{ik} &= \frac{m'_{ik}}{\sqrt{l'^2_{ik} + m'^2_{ik} + n'^2_{ik}}} = -\cos \delta'_{ik} \sin T'_{ik} \\ c'_{ik} &= \frac{n'_{ik}}{\sqrt{l'^2_{ik} + m'^2_{ik} + n'^2_{ik}}} = \sin \delta'_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

По величинам (122) можно вычислить астрономический азимут α_{ik} и астрономическое зенитное расстояние z_{ik} направления $\overline{M_i M_k}$. Для этого можно использовать уравнения (47) при $n=k$ и при известных астрономических координатах φ_i, λ_i станции M_i :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\alpha}_{ik} &= \frac{a'_{ik} \sin \lambda_i - b'_{ik} \cos \lambda_i}{(a'_{ik} \cos \lambda_i + b'_{ik} \sin \lambda_i) \sin \varphi_i - c'_{ik} \cos \varphi_i} = \\ &= \frac{l'_{ik} \sin \lambda_i - m'_{ik} \cos \lambda_i}{(l'_{ik} \cos \lambda_i + m'_{ik} \sin \lambda_i) \sin \varphi_i - n'_{ik} \cos \varphi_i} \\ \cos \bar{z}_{ik} &= (a'_{ik} \cos \lambda_i + b'_{ik} \sin \lambda_i) \cos \varphi_i + c'_{ik} \sin \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Однако вычисляемые направляющие косинусы (117), (122) или направляющие параметры (116), (115), так же как и топоцентрические экваториальные координаты (121), азимут и зенитное расстояние (123) направления линии $\overline{M_i M_k}$, соединяющей станции наблюдений ИСЗ, не относятся к геодезической референцной системе и, следовательно, не могут быть использованы непосредственно в этой системе (например, как контрольные величины в классических астрономических сетях). Сначала их нужно трансформировать из системы x', y', z' в систему X', Y', Z' .

Для перевода направляющих косинусов A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} в a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} были выведены формулы (65). Чтобы перейти от направляющих параметров $l'_{ik}, m'_{ik}, n'_{ik}$ к L_{ik}, M_{ik}, N_{ik} , имеем вполне аналогичные подобные им равенства:

$$\left. \begin{aligned} L_{ik} &= l'_{ik} - \omega_0 m'_{ik} + \psi_0 n'_{ik} \\ M_{ik} &= m'_{ik} + \omega_0 l'_{ik} - \varepsilon_0 n'_{ik} \\ N_{ik} &= n'_{ik} - \psi_0 l'_{ik} + \varepsilon_0 m'_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Преобразование экваториальных координат T'_{ik}, δ_{ik} (121) в T''_{ik}, δ''_{ik} осуществляют по формулам (71) при $n=k$. Если предположить, что геодезические координаты B_i, L_i станции M_i известны, то с привлечением топоцентрических экваториальных координат в референцной системе можно вычислить геодезический азимут \bar{A}_{ik} и геодезическое зенитное расстояние \bar{Z}_{ik} согласно формулам (44)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \bar{A}_{ik} &= \sin B_i \operatorname{ctg} (T''_{ik} + L_i) - \cos B_i \operatorname{tg} \delta''_{ik} \operatorname{cosec} (T''_{ik} + L_i) \\ \cos \bar{Z}_{ik} &= \sin B_i \sin \delta''_{ik} + \cos B_i \cos \delta''_{ik} \cos (T''_{ik} + L_i) \end{aligned} \right\}. \quad (125)$$

Можно также использовать уравнения (48), конечно, уже имея преобразованные направляющие параметры (124),

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{A}_{ik} &= \frac{L'_{ik} \sin L_i - M'_{ik} \cos L_i}{(L'_{ik} \cos L_i + M'_{ik} \sin L_i) \sin B_i - N'_{ik} \cos B_i} \\ \cos \bar{Z}_{ik} &= [(L'_{ik} \cos L_i + M'_{ik} \sin L_i) \cos B_i + N'_{ik} \sin B_i] \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{L'^2_{ik} + M'^2_{ik} + N'^2_{ik}}} \end{aligned} \right\}. \quad (126)$$

Геодезические величины (126) могут быть использованы непосредственно в астрономо-геодезических сетях.

§ 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ ($\bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik}$) И ($\bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik}$)

Если направляющие параметры или топоцентрические экваториальные координаты линии $\bar{M}_i \bar{M}_k$ заранее не переводят из системы (x', y', z') , в которой они были измерены, в систему (X', Y', Z') и сразу вычисляют значения астрономических координат $\bar{\alpha}_{ik}, \bar{z}_{ik}$ (123), то нужно сначала провести дополнительные преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{ik} &= \bar{\alpha}_{ik} + (\bar{A}_{ik} - \bar{\alpha}_{ik}) = \bar{\alpha}_{ik} + d\bar{\alpha}_{ik} \\ \bar{Z}_{ik} &= \bar{z}_{ik} + (\bar{Z}_{ik} - \bar{z}_{ik}) = \bar{z}_{ik} + d\bar{z}_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (127)$$

Необходимые формулы перехода выведем из выражений (43) при $n=k$:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\sin^2 \bar{\alpha}_{ik}} d\bar{\alpha}_{ik} &= (\cos \varphi_i \operatorname{ctg} t'_{ik} + \sin \varphi_i \operatorname{tg} \delta'_{ik} \operatorname{cosec} t'_{ik}) d\varphi_i + \\ &\quad + \operatorname{cosec}^2 t'_{ik} (\cos \varphi_i \operatorname{tg} \delta'_{ik} \cos t'_{ik} - \sin \varphi_i) dt'_{ik} - \\ &\quad - \operatorname{cosec} t'_{ik} \sec^2 \delta'_{ik} \cos \varphi_i d\delta'_{ik} \\ -\sin \bar{z}_{ik} d\bar{z}_{ik} &= (\cos \varphi_i \sin \delta'_{ik} - \sin \varphi_i \cos \delta'_{ik} \cos t'_{ik}) d\varphi_i - \\ &\quad - \cos \varphi_i \cos \delta'_{ik} \sin t'_{ik} dt'_{ik} + \\ &\quad + (\sin \varphi_i \cos \delta'_{ik} - \cos \varphi_i \sin \delta'_{ik} \cos t'_{ik}) d\delta'_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (128)$$

Отсюда с использованием известных формул сферического треугольника, образованного астрономическим полюсом P^* , астрономическим зенитом Z^* и пересечением линии $\overline{M_i M_k}$ со сферой для наблюдателя, находящегося в точке M_i (рис. 17, где q'_{ik} есть параллактический угол), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta'_{ik} &= \operatorname{tg} \varphi_i \cos t'_{ik} - \sec \varphi_i \sin t'_{ik} \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_{ik} \\ \cos \varphi_i \sin \delta'_{ik} - \sin \varphi_i \cos \delta'_{ik} \cos t'_{ik} &= \sin \bar{z}_{ik} \cos \bar{\alpha}_{ik} \\ \sin t'_{ik} \cos \delta'_{ik} &= -\sin \bar{z}_{ik} \sin \bar{\alpha}_{ik} \\ \sin \varphi_i \cos \delta'_{ik} - \cos \varphi_i \sin \delta'_{ik} \cos t'_{ik} &= \cos q'_{ik} \sin \bar{z}_{ik} \\ \operatorname{ctg} t'_{ik} &= \frac{\sin \varphi_i \cos \bar{\alpha}_{ik} - \cos \varphi_i \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik}}{\sin \bar{\alpha}_{ik}} \end{aligned} \right\} (129)$$

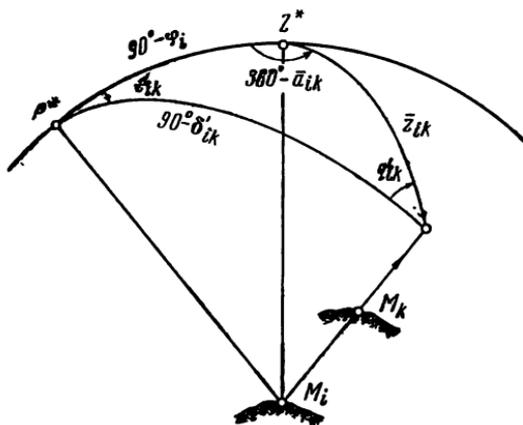


Рис. 17. Связь топоцентрических экваториальных и горизонтных координат

и после введения дифференциалов

$$\begin{aligned} d\bar{\alpha}_{ik} &= \bar{A}_{ik} - \bar{\alpha}_{ik}, \quad d\bar{z}_{ik} = \bar{Z}_{ik} - \bar{z}_{ik}, \quad d\varphi_i = B_i - \varphi_i, \\ d\delta'_{ik} &= \delta'_{ik} - \delta'_{ik}, \quad dt'_{ik} = dT'_{ik} - d\lambda'_{ik} = (T''_{ik} - T'_{ik}) + (L_i - \lambda_i) \end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik} &= \sin \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik} (\varphi_i - B_i) + (\sin \varphi_i - \\ &- \cos \varphi_i \cos \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik}) [(T'_{ik} - T''_{ik}) + (\lambda_i - L_i)] - \\ &- \cos \varphi_i \sec \delta'_{ik} \sin \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{cosec} \bar{z}_{ik} (\delta'_{ik} - \delta'_{ik}) \\ \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\cos \bar{\alpha}_{ik} (\varphi_i - B_i) - \cos \varphi_i \sin \bar{\alpha}_{ik} [(T'_{ik} - T''_{ik}) + \\ &+ (\lambda_i - L_i)] - \cos q'_{ik} (\delta'_{ik} - \delta'_{ik}) \end{aligned} \right\} (130)$$

Уравнения (130) приведем далее к виду, сходному по структуре с классическим уравнением Лапласа и известной формулой

для разности астрономического и геодезического зенитных расстояний:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik} &= (\lambda_i - L_i) \sin \varphi_i + \\ &+ \frac{(\varphi_i - B_i) \sin \bar{\alpha}_{ik} - (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i \cos \bar{\alpha}_{ik}}{\operatorname{tg} \bar{z}_{ik}} + (\sin \varphi_i - \\ &- \cos \varphi_i \cos \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik}) (T'_{ik} - T''_{ik}) - \\ &- \cos \varphi_i \sec \delta'_{ik} \operatorname{cosec} \bar{z}_{ik} \sin \bar{\alpha}_{ik} (\delta'_{ik} - \delta''_{ik}) \\ \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -(\varphi_i - B_i) \cos \bar{\alpha}_{ik} - (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i \sin \bar{\alpha}_{ik} - \\ &- \cos \varphi_i \sin \bar{\alpha}_{ik} (T'_{ik} - T''_{ik}) - \cos q'_{ik} (\delta'_{ik} - \delta''_{ik}) \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Еще раз напомним, что астрономические координаты φ_i , λ_i и геодезические координаты B_i , L_i относятся к разным (непараллельным) экваториальным плоскостям и разным (непараллельным) плоскостям начальных меридианов. Поэтому разности $\varphi_i - B_i$ и $\lambda_i - L_i$ нельзя выразить обычными формулами, т. е. через составляющие астрономо-геодезического отклонения отвесной линии ξ_i , η_i (здесь $\varphi_i - B_i \neq \xi_i$; $\lambda_i - L_i \neq \eta_i \sec \varphi_i$).

Здесь будут действительны более общие формулы, выведенные А. А. Изотовым [2] и М. С. Молоденским [8]. Для нашего случая получим эти разности как функции углов ε_0 , ψ_0 , ω_0 . Поскольку имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i - B_i &= \xi_i + \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \xi_i - \delta \varphi_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \lambda_i - L_i &= \eta_i \sec \varphi_i + \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \eta_i \sec \varphi_i - \delta \lambda_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

то задача сводится к определению поправок

$$\left. \begin{aligned} \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\delta \varphi_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\delta \lambda_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

с переходом от взаимно непараллельных систем x, y, z и X, Y, Z (см. рис. 10) к системам с соответственно параллельными осями $X \parallel X, y \parallel Y, z \parallel Z$.

При этом для перевода широты и долготы из системы X, Y, Z в систему x, y, z служат поправки $+\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ и $+\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$, а из системы x, y, z в систему X, Y, Z — поправки $-\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ и $-\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$.

Формулы (131) с учетом выражений (132) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik} &= \eta_i \operatorname{tg} \varphi_i + \frac{\xi_i \sin \bar{\alpha}_{ik} - \eta_i \cos \bar{\alpha}_{ik}}{\operatorname{tg} \bar{z}_{ik}} + \\ &+ (\sin \varphi_i - \cos \varphi_i \cos \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik}) [\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + (T'_{ik} - T''_{ik})] - \\ &- \cos \varphi_i \sec \delta'_{ik} \operatorname{cosec} \bar{z}_{ik} \sin \bar{\alpha}_{ik} (\delta'_{ik} - \delta''_{ik}) + \\ &+ \sin \bar{\alpha}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{z}_{ik} \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\xi_i \cos \bar{\alpha}_{ik} - \eta_i \sin \bar{\alpha}_{ik} - \cos \varphi_i \sin \bar{\alpha}_{ik} \times \\ &\times [\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + (T'_{ik} - T''_{ik})] - \cos q'_{ik} (\delta'_{ik} - \delta''_{ik}) - \\ &- \cos \bar{\alpha}_{ik} \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Разности $(T'_{ik} - T''_{ik})$ и $(\delta'_{ik} - \delta''_{ik})$ получаются непосредственно из формул (70) при $n=k$

$$\left. \begin{aligned} T'_{ik} - T''_{ik} &= \omega_0 - (\varepsilon_0 \cos T'_{ik} - \psi_0 \sin T'_{ik}) \operatorname{tg} \delta'_{ik} \\ \delta'_{ik} - \delta''_{ik} &= \varepsilon_0 \sin T'_{ik} + \psi_0 \cos T'_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (135)$$

Формулы для поправок $\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ и $\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ выведем путем полного дифференцирования формул (9). В согласии с выражениями (61) и (59) и с учетом малости углов $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \omega_0 y_i - \psi_0 z_i = \omega_0 Y_i - \psi_0 Z_i \\ \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\omega_0 x_i + \varepsilon_0 z_i = -\omega_0 X_i + \varepsilon_0 Z_i \\ \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \psi_0 x_i - \varepsilon_0 y_i = \psi_0 X_i - \varepsilon_0 Y_i \end{aligned} \right\}, \quad (136)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \omega_0 (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i - \\ &\quad - \psi_0 [N_i (1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i \\ \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\omega_0 (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i + \\ &\quad + \varepsilon_0 [N_i (1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i \\ \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \psi_0 (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i - \\ &\quad - \varepsilon_0 (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \end{aligned} \right\}. \quad (137)$$

и можем написать формулы

$$\left. \begin{aligned} \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \left(\frac{\partial X}{\partial B} \right)_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial X}{\partial L} \right)_i \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \left(\frac{\partial X}{\partial H} \right)_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \left(\frac{\partial Y}{\partial B} \right)_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial Y}{\partial L} \right)_i \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \left(\frac{\partial Y}{\partial H} \right)_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= \left(\frac{\partial Z}{\partial B} \right)_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial Z}{\partial L} \right)_i \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \left(\frac{\partial Z}{\partial H} \right)_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \end{aligned} \right\}. \quad (138)$$

Они являются так называемыми дифференциальными формулами 1 рода для метода проектирования [14]. Здесь $\delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ означает поправку к эллипсоидальной высоте при переходе от системы X, Y, Z к системе x, y, z .

Частные производные $\left(\frac{\partial X}{\partial B} \right)_i, \dots, \left(\frac{\partial Z}{\partial H} \right)_i$ легко вычисляются на основе формул (9):

$$\left. \begin{aligned}
\left(\frac{\partial X}{\partial B}\right)_i &= \left(\frac{\partial N}{\partial B}\right)_i \cos B_i \cos L_i - (N_i + H_i) \sin B_i \cos L_i = \\
&= -(M_i + H_i) \sin B_i \cos L_i \\
\left(\frac{\partial N}{\partial B}\right)_i &= \frac{a_r e_r^2 \sin B_i \cos B_i}{(1 - e_r^2 \sin^2 B_i)^{3/2}} \\
\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)_i &= -(N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \\
&\left(\frac{\partial X}{\partial H}\right)_i = \cos B_i \cos L_i \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial B}\right)_i &= \left(\frac{\partial N}{\partial B}\right)_i \cos B_i \sin L_i - (N_i + H_i) \sin B_i \sin L_i = \\
&= -(M_i + H_i) \sin B_i \sin L_i \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)_i &= (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial H}\right)_i &= \cos B_i \sin L_i \\
\left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)_i &= \left(\frac{\partial N}{\partial B}\right)_i (1 - e_r^2) \sin B_i + [N_i (1 - e_r^2) + H_i] \cos B_i = \\
&= (M_i + H_i) \cos B_i \\
&\left(\frac{\partial Z}{\partial L}\right)_i = 0 \\
&\left(\frac{\partial Z}{\partial H}\right)_i = \sin B_i
\end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Подставим эти выражения в (138) и получим [14]:

$$\left. \begin{aligned}
\delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -(M_i + H_i) \sin B_i \cos L_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \\
&\quad - (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\
&\quad + \cos B_i \cos L_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\
\delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -(M_i + H_i) \sin B_i \sin L_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\
&\quad + (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\
&\quad + \cos B_i \sin L_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\
\delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= (M_i + H_i) \cos B_i \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\
&\quad + \sin B_i \delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)
\end{aligned} \right\} \quad (140)$$

а отсюда [14]

$$\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = -\frac{1}{M_i + H_i} [\sin B_i \cos L_i \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \sin B_i \sin L_i \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \cos B_i \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)]; \quad (141)$$

$$\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = -\frac{1}{(N_i + H_i) \cos B_i} [\sin L_i \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \cos L_i \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)]; \quad (142)$$

$$\delta H_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \delta \xi_{qi}(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \cos B_i \cos L_i \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \\ + \cos B_i \sin L_i \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \sin B_i \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0), \quad (143)$$

здесь M_i — радиус кривизны эллипсоида E_r в плоскости меридиана $\left(M_i = \frac{a_r (1 - e_r^2)}{(1 - e_r^2 \sin^2 B_i)^{3/2}} \right)$, $\delta \xi_{qi}$ — соответствующая поправка к высоте квазигеоида над эллипсоидом E_r в результате осуществляемого перехода. Заметим, что формулы (141)—(143) можно вывести из выражений (10), (15) и (24). Если взять функцию

$$\operatorname{tg} L_i = \frac{Y_i}{X_i},$$

то с учетом формул (9) получим

$$\delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \cos^2 L_i \left[- \frac{1}{(N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i} \operatorname{tg} L_i \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i} \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \right], \quad (144)$$

откуда сразу следует выражение (142).

Однако подобный вывод поправки $\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ затруднителен, поэтому мы от этого пути откажемся. Конечно, его можно было бы с выгодой использовать в том случае, когда поверхность эллипсоида E_r можно принять за поверхность шара. Положим в формуле (15) $e_r^2 = 0$ и сразу же напишем

$$\delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) = \frac{\cos B_i}{N_i} [\delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \operatorname{tg} B_i \cos L_i \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \\ - \operatorname{tg} B_i \sin L_i \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)]. \quad (145)$$

В пределах принятой точности, равной порядку сжатия референц-эллипсоида, формула (145) совпадает с формулой (141).

Если подставим выражения (136) в (141) и (142), то получим, наконец, пренебрегая членами $\frac{H_i}{N_i}$, $\frac{H_i}{M_i}$, e_r^4 и меньшими [15],

$$\left. \begin{aligned} \delta B_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\varepsilon_0 (1 + e_r^2 \cos 2B_i) \sin L_i + \\ &+ \psi_0 (1 + e_r^2 \cos 2B_i) \cos L_i \\ \delta L_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) &= -\omega_0 + \varepsilon_0 (1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \cos L_i + \\ &+ \psi_0 (1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \sin L_i \end{aligned} \right\}. \quad (146)$$

Подобные формулы были другим путем выведены также в [2] и [8].

Теперь с учетом формул (135) и (146) выражения (134) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik} &= \eta_i \operatorname{tg} B_i + \frac{\xi_i \sin \bar{A}_{ik} - \eta_i \cos \bar{A}_{ik}}{\operatorname{tg} \bar{Z}_{ik}} + (\sin B_i - \\ &- \cos B_i \cos \bar{A}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{Z}_{ik}) \{ \varepsilon_0 [(1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \cos L_i - \operatorname{tg} \delta'_{ik} \cos T'_{ik}] + \\ &+ \psi_0 [(1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \sin L_i + \operatorname{tg} \delta'_{ik} \sin T'_{ik}] \} - \\ &- \cos B_i \operatorname{sec} \delta'_{ik} \operatorname{cosec} \bar{Z}_{ik} \sin \bar{A}_{ik} (\varepsilon_0 \sin T'_{ik} + \psi_0 \cos T'_{ik}) + \\ &+ \sin \bar{A}_{ik} \operatorname{ctg} \bar{Z}_{ik} (\psi_0 \cos L_i - \varepsilon_0 \sin L_i) (1 + e_r^2 \cos 2B_i), \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\xi_i \cos \bar{A}_{ik} - \eta_i \sin \bar{A}_{ik} - \cos B_i \sin \bar{A}_{ik} \times \\ &\times \{ \varepsilon_0 [(1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \cos L_i - \operatorname{tg} \delta'_{ik} \cos T'_{ik}] + \\ &+ \psi_0 [(1 - e_r^2) \operatorname{tg} B_i \sin L_i + \operatorname{tg} \delta'_{ik} \sin T'_{ik}] \} - \\ &- \cos q'_{ik} (\varepsilon_0 \sin T'_{ik} + \psi_0 \cos T'_{ik}) - \\ &- \cos \bar{A}_{ik} (\psi_0 \cos L_i - \varepsilon_0 \sin L_i) (1 + e_r^2 \cos 2B_i). \end{aligned} \quad (148)$$

Заметим, что положение геодезического зенита мало зависит от ориентировки референционной системы. Для референционной шаровой системы эта зависимость будет нулевой, а в системе эллипсоида вращения она будет сказываться только на членах, зависящих от его сжатия. Действительно, находим

$$\left. \begin{aligned} \cos B_i \sin \bar{A}_{ik} \operatorname{tg} \delta'_{ik} \cos T'_{ik} - \sin B_i \sin \bar{A}_{ik} \cos L_i - \\ - \cos q'_{ik} \sin T'_{ik} + \cos \bar{A}_{ik} \sin L_i &= 0 \\ \cos B_i \sin \bar{A}_{ik} \operatorname{tg} \delta'_{ik} \sin T'_{ik} + \sin B_i \sin \bar{A}_{ik} \sin L_i + \\ + \cos q'_{ik} \cos T'_{ik} + \cos \bar{A}_{ik} \cos L_i &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (149)$$

а, следовательно, подставляя (149) в формулу (148), получим

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\xi_i \cos \bar{A}_{ik} - \eta_i \sin \bar{A}_{ik} + \\ &+ \cos B_i \sin \bar{A}_{ik} (\varepsilon_0 e_r^2 \operatorname{tg} B_i \cos L_i + \psi_0 e_r^2 \operatorname{tg} B_i \sin L_i - \\ &- \cos \bar{A}_{ik} (\psi_0 \cos L_i - \varepsilon_0 \sin L_i) e_r^2 \cos 2B_i), \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\xi_i \cos \bar{A}_{ik} - \eta_i \sin \bar{A}_{ik} + \\ &+ \varepsilon_0 e_r^2 (\sin B_i \cos L_i \sin \bar{A}_{ik} + \cos 2B_i \sin L_i \cos \bar{A}_{ik}) + \\ &+ \psi_0 e_r^2 (\sin B_i \sin L_i \sin \bar{A}_{ik} - \cos 2B_i \cos L_i \cos \bar{A}_{ik}). \end{aligned} \quad (151)$$

Вспомним, что при $\varepsilon_0=0$, $\psi_0=0$ и $\omega_0=0$ классическое уравнение Лапласа и известная формула разности астрономического и геодезического зенитных расстояний имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik} &= \eta_i \operatorname{tg} B_i + \frac{\xi_i \sin \bar{A}_{ik} - \eta_i \cos \bar{A}_{ik}}{\operatorname{tg} \bar{Z}_{ik}} \\ \bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik} &= -\xi_i \cos \bar{A}_{ik} - \eta_i \sin \bar{A}_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (152)$$

Обобщенное уравнение Лапласа (134) или (147), так же как и формула (150) или (151) разности астрономического и геодезического зенитных расстояний, относятся к прямому направлению линии $\overline{M_i M_k}$, соединяющей станции наблюдений ИСЗ, причем прямая видимость между ними не требуется, и расстояние между ними может достигать нескольких тысяч километров, лишь бы оно было соизмеримым с высотой спутника. Если бы было нужно геодезический азимут $\overline{A_{ik}}$ перевести в азимут, соответствующий геодезической линии на эллипсоиде E_r , то следовало бы использовать известные формулы высшей геодезии.

Теорию § 10 можно распространить на случай, когда при измерении направлений на спутник используется аппаратура с азимутальной ориентировкой (например, при использовании стационарных спутников), т. е. когда синхронно измеряют горизонтальные координаты $\overline{\alpha_{in}}$, $\overline{z_{in}}$, $\overline{\alpha_{kn}}$, $\overline{z_{kn}}$ и $\overline{\alpha_{i, n+1}}$, $\overline{z_{i, n+1}}$, $\overline{\alpha_{k, n+1}}$, $\overline{z_{k, n+1}}$. Для этого в формулах (110) и (111) достаточно заменить направляющие косинусы их выражениями из формул (39):

$$\left. \begin{aligned} a'_{in} &= (\cos \overline{z_{in}} \cos \varphi_i - \sin \overline{z_{in}} \sin \varphi_i \cos \overline{\alpha_{in}}) \cos \lambda_i - \\ &\quad - \sin \overline{z_{in}} \sin \overline{\alpha_{in}} \sin \lambda_i \\ b'_{in} &= (\cos \overline{z_{in}} \cos \varphi_i - \sin \overline{z_{in}} \sin \varphi_i \cos \overline{\alpha_{in}}) \sin \lambda_i + \\ &\quad + \sin \overline{z_{in}} \sin \overline{\alpha_{in}} \cos \lambda_i \\ c'_{in} &= \cos \overline{z_{in}} \sin \varphi_i + \sin \overline{z_{in}} \cos \varphi_i \cos \overline{\alpha_{in}} \\ a'_{kn} &= (\cos \overline{z_{kn}} \cos \varphi_k - \sin \overline{z_{kn}} \sin \varphi_k \cos \overline{\alpha_{kn}}) \cos \lambda_k - \\ &\quad - \sin \overline{z_{kn}} \sin \overline{\alpha_{kn}} \sin \lambda_k \\ b'_{kn} &= (\cos \overline{z_{kn}} \cos \varphi_k - \sin \overline{z_{kn}} \sin \varphi_k \cos \overline{\alpha_{kn}}) \sin \lambda_k + \\ &\quad + \sin \overline{z_{kn}} \sin \overline{\alpha_{kn}} \cos \lambda_k \\ c'_{kn} &= \cos \overline{z_{kn}} \sin \varphi_k + \sin \overline{z_{kn}} \cos \varphi_k \cos \overline{\alpha_{kn}} \end{aligned} \right\}, \quad (153)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{i(n+1)} &= (\cos \overline{z_{i(n+1)}} \cos \varphi_i - \sin \overline{z_{i(n+1)}} \sin \varphi_i \cos \overline{\alpha_{i(n+1)}}) \times \\ &\quad \times \cos \lambda_i - \sin \overline{z_{i(n+1)}} \sin \overline{\alpha_{i(n+1)}} \sin \lambda_i \\ b'_{i(n+1)} &= (\cos \overline{z_{i(n+1)}} \cos \varphi_i - \sin \overline{z_{i(n+1)}} \times \\ &\quad \times \sin \varphi_i \cos \overline{\alpha_{i(n+1)}}) \sin \lambda_i + \sin \overline{z_{i(n+1)}} \sin \overline{\alpha_{i(n+1)}} \cos \lambda_i \\ c'_{i(n+1)} &= \cos \overline{z_{i(n+1)}} \sin \varphi_i + \sin \overline{z_{i(n+1)}} \cos \varphi_i \cos \overline{\alpha_{i(n+1)}} \\ a'_{k(n+1)} &= (\cos \overline{z_{k(n+1)}} \cos \varphi_k - \sin \overline{z_{k(n+1)}} \sin \varphi_k \cos \overline{\alpha_{k(n+1)}}) \times \\ &\quad \times \sin \lambda_k - \sin \overline{z_{k(n+1)}} \sin \overline{\alpha_{k(n+1)}} \sin \lambda_k \\ b'_{k(n+1)} &= (\cos \overline{z_{k(n+1)}} \cos \varphi_k - \sin \overline{z_{k(n+1)}} \sin \varphi_k \times \\ &\quad \times \cos \overline{\alpha_{k(n+1)}}) \sin \lambda_k + \sin \overline{z_{k(n+1)}} \sin \overline{\alpha_{k(n+1)}} \cos \lambda_k \\ c'_{k(n+1)} &= \cos \overline{z_{k(n+1)}} \sin \varphi_k + \sin \overline{z_{k(n+1)}} \cos \varphi_k \cos \overline{\alpha_{k(n+1)}} \end{aligned} \right\}. \quad (154)$$

Чтобы вычислять по формулам (153) и (154), нужно, конечно, знать астрономические координаты обеих станций наблюдений ИСЗ φ_i, λ_i и φ_k, λ_k .

Теория определения направления линии, соединяющей наземные станции, по топоцентрическим экваториальным координатам спутника уже имеет широкое практическое применение. Оно описано в десятках работ, например [36—38], [40—45].

§ 12. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ УРАВНИВАНИИ СИНХРОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НАПРАВЛЕНИЙ НА ИСЗ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ЛИНИИ, СОЕДИНЯЮЩЕЙ СТАНЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

В предыдущей главе были рассмотрены только два положения ИСЗ $S\rho_n$ и $S\rho_{n+1}$. При числе положений, большем двух, получим избыточные измерения и решение можно будет проводить методом уравнивания

Уравнения поправок можно вывести разными способами. Простым способом является, например, тот, в котором исходят из условия компланарности единичных топоцентрических радиусов-векторов спутника (см. рис. 15)

$$\frac{\mathbf{r}'_{in}}{|\mathbf{r}'_{in}|} \cdot \frac{\mathbf{r}'_{kn}}{|\mathbf{r}'_{kn}|} \cdot \frac{\mathbf{r}'_{ik}}{|\mathbf{r}'_{ik}|} = 0, \quad (155)$$

т. е.

$$\frac{\mathbf{r}'_{ikn}}{|\mathbf{r}'_{ikn}|} \cdot \frac{\mathbf{r}'_{ik}}{|\mathbf{r}'_{ik}|} = 0. \quad (156)$$

Уравнения (155) и (156) эквивалентны условию нулевой длины кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми $M_i S\rho_n$ и $M_k S\rho_n$ (их непересечение вызывается ошибками измеряемых элементов $T'_{in}, \delta'_{in}, T'_{kn}, \delta'_{kn}$, которые именно и являются уравниваемыми элементами)

$$d = \frac{1}{\sin \beta_n} \begin{vmatrix} x'_{ik} & y'_{ik} & z'_{ik} \\ a'_{in} & b'_{in} & c'_{in} \\ a'_{kn} & b'_{kn} & c'_{kn} \end{vmatrix} = 0; \quad \beta_n \neq 0. \quad (157)$$

Скалярное произведение (156) можно написать в таком виде:

$$a'_{ikn} a'_{ik} + b'_{ikn} b'_{ik} + c'_{ikn} c'_{ik} = 0, \quad (158)$$

а условие (157), например, так:

$$a'_{ikn} x'_{ik} + b'_{ikn} y'_{ik} + c'_{ikn} z'_{ik} = 0. \quad (159)$$

Уравнение (159) нетрудно получить и из формулы (158), если ввести в него длину отрезка $s_{ik} = \overline{M_i M_k}$.

В формуле (158) вместо направляющих косинусов можно подставить направляющие параметры, тогда основное условие (156) можно записать так:

$$l'_{ikn} a'_{ik} + m'_{ikn} b'_{ik} + n'_{ikn} c'_{ik} = 0. \quad (160)$$

Величины l'_{ikn} , m'_{ikn} , n'_{ikn} вычисляются по формулам (112) с использованием измеренных элементов T'_{in} , δ'_{in} , T'_{kn} , δ'_{kn} , а величины a'_{ik} , b'_{ik} , c'_{ik} неизвестны, т. е. подлежат уравниванию и, конечно, не являются независимыми, так как всегда удовлетворяют условию

$$a'^2_{ik} + b'^2_{ik} + c'^2_{ik} = 1. \quad (161)$$

Имея в виду эту зависимость, лучше перейти к двум новым независимым неизвестным, например,

$$\frac{a'_{ik}}{c'_{ik}} = u, \quad \frac{b'_{ik}}{c'_{ik}} = v, \quad (162)$$

т. е.

$$l'_{ikn} u + m'_{ikn} v + n'_{ikn} = 0.$$

Для искомых направляющих косинусов с учетом условия (161) можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= u(u^2 + v^2 + 1)^{-1/2}, \\ b'_{ik} &= v(u^2 + v^2 + 1)^{-1/2}, \\ c'_{ik} &= (u^2 + v^2 + 1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Конечно, здесь оказывается целесообразным использование (см. рис. 16) топоцентрических координат T'_{ik} , δ'_{ik} (направления на точки M_k) в системе станции (топоцентра) M_i , для которых имеем формулы (121) и (122), удовлетворяющие условию (161). Основное условие (160) приведем к виду

$$l'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \cos T'_{ik} - m'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \sin T'_{ik} + n'_{ikn} \sin \delta'_{ik} = 0. \quad (163)$$

К выражению (163) можно было бы прийти и другим путем, например, исключая (неизмеряемые) топоцентрические расстояния Δ'_{in} и Δ'_{kn} из уравнений (104), т. е. из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{kn} a'_{kn} - \Delta'_{in} a'_{in} + x'_{ik} &= 0 \\ \Delta'_{kn} b'_{kn} - \Delta'_{in} b'_{in} + y'_{ik} &= 0 \\ \Delta'_{kn} c'_{kn} - \Delta'_{in} c'_{in} + z'_{ik} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (164)$$

Вычисления по формуле (164), однако, более трудоемки.

Теперь нужно уравнение (163) привести к линейному виду относительно неизвестных T'_{ik} и δ'_{ik} . Это возможно после введения приближенных значений неизвестных

$$\left. \begin{aligned} T'_{ik} &= T'_{ik} - dT'_{ik} \\ \delta'_{ik} &= \delta'_{ik} - d\delta'_{ik} \end{aligned} \right\},$$

достаточно близких к уравненным значениям T'_{ik} , δ'_{ik} , чтобы в разложении (163) по степеням T'_{ik} и δ'_{ik} можно было пренебрегать вторыми и высшими дифференциалами. Составим уравнение поправок вида

$$\begin{aligned} & - (l'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \sin T'_{ik} + m'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \cos T'_{ik}) dT'_{ik} - \\ & - (l'_{ikn} \sin \delta'_{ik} \cos T'_{ik} - m'_{ikn} \sin \delta'_{ik} \sin T'_{ik} - \\ & - n'_{ikn} \cos \delta'_{ik}) d\delta'_{ik} + l_n = v_n. \end{aligned} \quad (165)$$

Здесь свободный член l_n равен

$$l_n = l'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \cos T'_{ik} - m'_{ikn} \cos \delta'_{ik} \sin T'_{ik} + n'_{ikn} \sin \delta'_{ik}. \quad (166)$$

Выражение (166) после умножения на величину $\frac{1}{\sin \beta_n}$ из уравнения (114), т. е. $\frac{l_n}{\left| \sqrt{l'^2_{ikn} + m'^2_{ikn} + n'^2_{ikn}} \right|}$, получает геометрический смысл, а именно: это косинус угла, образованного принятым приближенным направлением (T'_{ik}, δ'_{ik}) , с направлением «наблюдённой» нормали к плоскости $M_i M_k S p_n$. Приближенные значения неизвестных можно вычислить, например, по (приближенным или точным) геодезическим координатам B_i, L_i, B_k, L_k и высотам над эллипсоидом H_i, H_k станций M_i, M_k , т. е. с обозначениями, принятыми в формулах (120), так:

$$\left. \begin{aligned} T'_{ik} &= - \operatorname{arctg} \frac{Y'_{ik}}{X'_{ik}} \\ \delta'_{ik} &= \operatorname{arctg} \frac{Z_{ik}}{\left| \sqrt{X'^2_{ik} + Y'^2_{ik}} \right|} \end{aligned} \right\}. \quad (167)$$

Уравнение поправок (165) составляют для каждого наблюдаемого положения спутника $S p_n$, неизвестные dT'_{ik} и $d\delta'_{ik}$ вычисляют обычным способом при условии $[p_n v_n v_n] = \min$ (где p_n — вес соответствующего «наблюдения» нормали к n -ой плоскости, т. е. $M_i M_k S p_n$).

Практические применения в настоящее время позволяют сделать вывод, что точность в $\pm 1''$ такого определения направления отрезка $\overline{M_i M_k}$ в пространстве при использовании фотограмметрических камер и фотографических телескопов вполне реальна [39]. При этом расстояния между станциями наблюдений ИСЗ могут достигать тысяч километров.

**§ 13. ПРИНЦИП ОБРАБОТКИ СЕТИ КОСМИЧЕСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ
(РАЗНОСТЕЙ КООРДИНАТ) СТАНЦИЙ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ**

Если кроме станций M_i и M_k имеется третья станция наблюдений ИСЗ M_l , то при достаточном числе синхронных измерений направлений на ИСЗ (всегда независимо, по двум станциям, т. е.

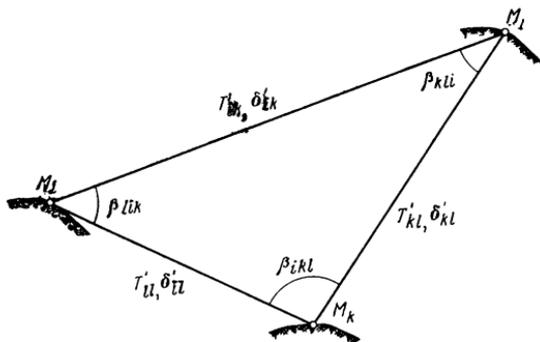


Рис. 18. Синхронные наблюдения ИСЗ

$M_i - M_k$, $M_i - M_l$, $M_k - M_l$) можно способом, описанным в § 12, вычислить величины T'_{ik} , δ'_{ik} , T'_{il} , δ'_{il} , T'_{kl} , δ'_{kl} . Далее по формулам (122) можно определить значение направляющих косинусов a'_{ik} , b'_{ik} , c'_{ik} , a'_{il} , b'_{il} , c'_{il} , a'_{kl} , b'_{kl} , c'_{kl} , а затем и углов плоского треугольника $M_i M_k M_l$ (рис. 18).

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{ikl} &= -a'_{ik} a'_{kl} - b'_{ik} b'_{kl} - c'_{ik} c'_{kl} \\ \cos \beta_{lik} &= a'_{ik} a'_{il} + b'_{ik} b'_{il} + c'_{ik} c'_{il} \\ \cos \beta_{kli} &= a'_{il} a'_{kl} + b'_{il} b'_{kl} + c'_{il} c'_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Имея в виду, что плоские углы, выраженные формулами (168), являются инвариантными по отношению к системам координат, они в этом смысле соответствуют величинам, вычисляемым классическими методами геодезии, т. е. в геодезической референционной системе X, Y, Z (в предположении, что ошибки всех используемых измерений равны нулю)

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{ikl} &= -A'_{ik} A'_{kl} - B'_{ik} B'_{kl} - C'_{ik} C'_{kl} \\ \cos \beta_{lik} &= A'_{ik} A'_{il} + B'_{ik} B'_{il} + C'_{ik} C'_{il} \\ \cos \beta_{kli} &= A'_{il} A'_{kl} + B'_{il} B'_{kl} + C'_{il} C'_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Конечно, абсолютное тождество величин, выражаемых уравнениями (169) и (168), имело бы место только в том случае, когда все используемые измерения как классические, так и спутниковой триангуляции, были бы абсолютно точными.

Указанным способом можно измерить направления в сети спутниковой триангуляции, образованной плоскими треугольниками и в общем случае представленной неправильными многогранниками с плоскими гранями.

Уравнивание такой свободной сети с точки зрения составления уравнений поправок элементарно (поэтому здесь мы его не будем приводить), так как при этом возникают только условия компланарности

$$\begin{vmatrix} A'_{ik} & B'_{ik} & C'_{ik} \\ A'_{il} & B'_{il} & C'_{il} \\ A'_{kl} & B'_{kl} & C'_{kl} \end{vmatrix} = 0.$$

Конечно, в результате измерений и обработки такой сети спутниковой триангуляции нельзя определить взаимное положение пунктов. Необходимо еще иметь по крайней мере один базис, т. е. длину хотя бы одной линии, соединяющей станции наблюдений ИСЗ. Эта длина (обозначим ее s_{12}) может быть определена, например, геодезическими координатами B_1, L_1, B_2, L_2 и высотами над эллипсоидом H_1, H_2 двух станций наблюдений ИСЗ M_1, M_2 :

$$\left. \begin{aligned} s_{12} &= \left| \sqrt{\Delta X_{12}^2 + \Delta Y_{12}^2 + \Delta Z_{12}^2} \right| \\ \Delta X_{12} &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1 \\ \Delta Y_{12} &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1 \\ \Delta Z_{12} &= [N_2 (1 - e_r^2) + H_2] \sin B_2 - [N_1 (1 - e_r^2) + H_1] \sin B_1 \end{aligned} \right\} . \quad (170)$$

После уравнивания вычисляют длины s_{jm} всех сторон $\overline{M_j M_m}$ сети. По ним и по направляющим косинусам $a'_{jm}, b'_{jm}, c'_{jm}$, определенным по синхронно измеренным направлениям на ИСЗ со станций M_j и M_m , после уравнивания находят, наконец, разности координат

$$\Delta x'_{jm} = s_{jm} a'_{jm}, \quad \Delta y'_{jm} = s_{jm} b'_{jm}; \quad \Delta z'_{jm} = s_{jm} c'_{jm}.$$

При большем числе базисов в процессе уравнивания сети возникают условия базисов, но и тогда уравнивание полностью аналогично уравниванию классической триангуляции.

Необходимость наличия базиса в космической триангуляции, конечно, отпала бы, если бы кроме направлений на ИСЗ (величин T', δ') одновременно измерялись и топоцентрические расстояния

Δ' . Разности координат двух станций M_j и M_m , на которых одновременно измерялись бы величины T'_{jn} , δ'_{jn} , Δ'_{jn} и T'_{mn} , δ'_{mn} , Δ'_{mn} (с обозначением положения спутника через $S\rho_n$), выразились бы так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{jm} &= x'_{jm} = \Delta'_{jn} \cos \delta'_{jn} \cos T'_{jn} - \Delta'_{mn} \cos \delta'_{mn} \cos T'_{mn} \\ \Delta y_{jm} &= y'_{jm} = -\Delta'_{jn} \cos \delta'_{jn} \sin T'_{jn} + \Delta'_{mn} \cos \delta'_{mn} \sin T'_{mn} \\ \Delta z_{jm} &= z'_{jm} = \Delta'_{jn} \sin \delta'_{jn} - \Delta'_{mn} \sin \delta'_{mn} \end{aligned} \right\}. \quad (171)$$

Если в измеряемой сети космической триангуляции имеется несколько станций наблюдений ИСЗ с известными геодезическими координатами, то уравнивание усложняется (особенно, если синхронные измерения производились более чем с двух станций).

Это вызывается тем, что положения этих «исходных» станций наблюдений ИСЗ даны в референционной системе X, Y, Z , тогда как направления на спутник измеряются в системе x, y, z (x', y', z'). Следовательно, в этой задаче нужно принимать во внимание несовпадение направлений осей в системах X, Y, Z , и x, y, z , т. е. влияние углов Эйлера $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$ (см. формулы (52)—(54)).

Аналогично формулам (159), в референционной системе будем иметь

$$A'_{jmn}(X_m - X_j) + B'_{jmn}(Y_m - Y_j) + C'_{jmn}(Z_m - Z_j) = v_{jmn}, \quad (172)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A'_{jmn} &= a'_{jmn} - \omega_0 b'_{jmn} + \psi_0 c'_{jmn} \\ B'_{jmn} &= b'_{jmn} + \omega_0 a'_{jmn} - \epsilon_0 c'_{jmn} \\ C'_{jmn} &= c'_{jmn} - \omega_0 a'_{jmn} + \epsilon_0 b'_{jmn} \end{aligned} \right\}. \quad (173)$$

Предположим, что мы желаем полностью обработать весь материал наблюдений в измеряемой сети не по этапам, т. е. не по отдельным синхронным наблюдениям, относящимся к каждой паре станций ИСЗ; тогда могут возникнуть три случая:

1. Рассматриваемые станции наблюдений ИСЗ M_j и M_m не являются геодезическими пунктами, т. е. геодезические координаты $B_j, L_j, H_j, B_m, L_m, H_m$ не даны, и, следовательно, неизвестны референсные (геодезические) координаты $X_j, Y_j, Z_j, X_m, Y_m, Z_m$. Эти референсные координаты, или, что то же самое, поправки $dX_j, dY_j, dZ_j, dX_m, dY_m, dZ_m$ к приближенным их значениям $X_j^0, Y_j^0, Z_j^0, X_m^0, Y_m^0, Z_m^0$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} dX_j &= X_j - X_j^0; & dY_j &= Y_j - Y_j^0; & dZ_j &= Z_j - Z_j^0 \\ dX_m &= X_m - X_m^0; & dY_m &= Y_m - Y_m^0; & dZ_m &= Z_m - Z_m^0 \end{aligned} \right\}, \quad (174)$$

были бы неизвестными величинами в уравнениях поправок

$$\left. \begin{aligned} A'_{jmn}dX_m + B'_{jmn}dY_m + C'_{jmn}dZ_m - A'_{jmn}dX_j - B'_{jmn}dY_j - \\ - C'_{jmn}dZ_j + L'_{jmn} = v_{jmn} \\ L'_{jmn} = A'_{jmn}(X_m^\circ - X_j^\circ) + B'_{jmn}(Y_m^\circ - Y_j^\circ) + C'_{jmn}(Z_m^\circ - Z_j^\circ) \end{aligned} \right\}, \quad (175)$$

вытекающих из формул (172) с учетом (173).

2. Станция M_j является геодезическим пунктом, тогда в соответствующем уравнении поправок, подобном (175),

$$A'_{jmn}dX_m + B'_{jmn}dY_m + C'_{jmn}dZ_m + \bar{L}'_{jmn} = \bar{v}_{jmn} \quad (176)$$

неизвестными будут являться dX_m , dY_m , dZ_m , а свободный член будет равен

$$\bar{L}'_{jmn} = A'_{jmn}(X_m^\circ - X_j) + B'_{jmn}(Y_m^\circ - Y_j) + C'_{jmn}(Z_m^\circ - Z_j). \quad (177)$$

3. Станция M_m является геодезическим пунктом. Аналогично формуле (76), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -A'_{jmn}dX_j - B'_{jmn}dY_j - C'_{jmn}dZ_j + \bar{\bar{L}}'_{jmn} = \bar{\bar{v}}_{jmn} \\ \bar{\bar{L}}'_{jmn} = A'_{jmn}(X_m - X_j^\circ) + B'_{jmn}(Y_m - Y_j^\circ) + C'_{jmn}(Z_m - Z_j^\circ) \end{aligned} \right\}. \quad (178)$$

Мы не будем рассматривать различные варианты, которые могут встретиться при уравнивании спутниковой триангуляции. Речь идет именно о пространственной (с измеренными направлениями или расстояниями либо направлениями и расстояниями) сети, а теория ее обработки является предметом высшей геодезии; этому вопросу посвящены, например, работы [16], [17], [18]. Практическое применение этой теории описано, например, в [36], [41], [49].

§ 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА В РЕФЕРЕНЦНОЙ (ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ) СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

I. Решение задачи при измерении направлений

1. Уравнивание по способу условных измерений

Сначала рассмотрим случай, когда на двух геодезических станциях M_i , M_k наблюдений ИСЗ в момент гриничского звездного времени S_n синхронно измерены¹ топоцентрические экваториальные координаты спутника $S\rho_n$, т. е. T'_{in} , δ'_{in} , T'_{kn} , δ'_{kn} . Пусть положение станций задано в референционной системе геодезическими координатами B_i , L_i , H_i и B_k , L_k , H_k , от которых по форму-

¹ Мы имеем в виду абсолютно синхронные измерения или точное приведение квазисинхронных измерений на один и тот же момент времени.

лам (9) можно перейти к референцным координатам $X_i, Y_i, Z_i, X_k, Y_k, Z_k$ и затем получить разности $\Delta X_{ik}, \Delta Y_{ik}, \Delta Z_{ik}$.

Поскольку величины $T'_{in}, \delta'_{in}, T'_{ik}, \delta'_{ik}, \Delta X_{ik}, \Delta Y_{ik}, \Delta Z_{ik}$ относятся к разным системам, то сначала нужно выполнить преобразования. Для перехода от $\Delta X_{ik}, \Delta Y_{ik}, \Delta Z_{ik}$ к $\Delta x_{ik} = x'_{ik}, \Delta y_{ik} = y'_{ik}, \Delta z_{ik} = z'_{ik}$ применим формулы (62). Затем для системы (x, y, z) или (x', y', z') можно составить условие компланарности двух векторов $\overline{M_i S p'_n}$ и $\overline{M_k S p'_n}$ типа (160), тогда условное уравнение будет иметь вид

$$+ l'_{ikn} x'_{ik} + m'_{ikn} y'_{ik} + n'_{ikn} z'_{ik} = f \left[T'_{in} + v_{T'_{in}} ; \delta'_{in} + v_{\delta'_{in}} ; T'_{kn} + v_{T'_{kn}} ; \delta'_{kn} + v_{\delta'_{kn}} \right] = 0. \quad (179)$$

С учетом условия (179) составим уравнения поправок¹

$$\left. \begin{aligned} v_{T'_{in}} &= \frac{1}{p_{T'_{in}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial T'_{in}} \lambda; & v_{\delta'_{in}} &= \frac{1}{p_{\delta'_{in}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \delta'_{in}} \lambda \\ v_{T'_{kn}} &= \frac{1}{p_{T'_{kn}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial T'_{kn}} \lambda; & v_{\delta'_{ik}} &= \frac{1}{p_{\delta'_{kn}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \delta'_{kn}} \lambda \end{aligned} \right\}, \quad (180)$$

где p_i — веса соответствующих величин, λ — коррелата.

Коэффициенты в выражениях (180) с учетом (112) будут равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T'_{in}} &= -\cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \sin \delta'_{kn} x'_{ik} + \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \sin \delta'_{kn} y'_{ik} + \\ &\quad + \cos \delta'_{in} \cos \delta'_{kn} \cos (T'_{kn} - T'_{in}) z'_{ik} \\ \frac{\partial f}{\partial \delta'_{in}} &= (\sin \delta'_{in} \sin T'_{in} \sin \delta'_{kn} + \cos \delta'_{in} \cos \delta'_{kn} \sin T'_{kn}) x'_{ik} + \\ &\quad + (\sin \delta'_{in} \cos T'_{in} \sin \delta'_{kn} + \cos \delta'_{in} \cos \delta'_{kn} \cos T'_{kn}) y'_{ik} + \\ &\quad + \sin \delta'_{in} \cos \delta'_{kn} \sin (T'_{kn} - T'_{in}) z'_{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (181)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T'_{kn}} &= \cos \delta'_{kn} \cos T'_{kn} \sin \delta'_{in} x'_{ik} - \cos \delta'_{kn} \sin T'_{kn} \sin \delta'_{in} y'_{ik} - \\ &\quad - \cos \delta'_{kn} \cos \delta'_{in} \cos (T'_{kn} - T'_{in}) z'_{ik} \\ \frac{\partial f}{\partial \delta'_{kn}} &= -(\sin \delta'_{kn} \sin T'_{kn} \sin \delta'_{in} + \cos \delta'_{kn} \sin T'_{in} \cos \delta'_{in}) x'_{ik} - \\ &\quad - (\sin \delta'_{kn} \cos T'_{kn} \sin \delta'_{in} + \cos \delta'_{kn} \cos T'_{in} \cos \delta'_{in}) y'_{ik} + \\ &\quad + \sin \delta'_{kn} \cos \delta'_{in} \sin (T'_{kn} - T'_{in}) z'_{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (182)$$

¹ Здесь, например, $v_{T'_{in}}$ есть поправка в часовой угол T'_{in} , $p_{\delta'_{in}}$ — вес склонения δ'_{in} и т. д.

По уравненным величинам $\bar{T}'_{in} = T'_{in} + v_{T'_{in}}$, $\bar{\delta}'_{in} = \delta'_{in} + v_{\delta'_{in}}$, $\bar{T}'_{kn} = T'_{kn} + v_{T'_{kn}}$, $\bar{\delta}'_{kn} = \delta'_{kn} + v_{\delta'_{kn}}$ вычислим, применяя формулы (122), уравненные значения направляющих косинусов \bar{a}'_{in} , \bar{b}'_{in} , \bar{c}'_{in} , \bar{a}'_{kn} , \bar{b}'_{kn} , \bar{c}'_{kn} . Затем преобразуем их в референционную систему, т. е. по формулам (65) найдем \bar{A}'_{in} , \bar{B}'_{in} , \bar{C}'_{in} , \bar{A}'_{kn} , \bar{B}'_{kn} , \bar{C}'_{kn} :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}'_{in} &= \bar{a}'_{in} - \omega_0 \bar{b}'_{in} + \psi_0 \bar{c}'_{in} \\ \bar{B}'_{in} &= \bar{b}'_{in} + \omega_0 \bar{a}'_{in} - \varepsilon_0 \bar{c}'_{in} \\ \bar{C}'_{in} &= \bar{c}'_{in} - \psi_0 \bar{a}'_{in} + \varepsilon_0 \bar{b}'_{in} \\ \bar{A}'_{kn} &= \bar{a}'_{kn} - \omega_0 \bar{b}'_{kn} + \psi_0 \bar{c}'_{kn} \\ \bar{B}'_{kn} &= \bar{b}'_{kn} + \omega_0 \bar{a}'_{kn} - \varepsilon_0 \bar{c}'_{kn} \\ \bar{C}'_{kn} &= \bar{c}'_{kn} - \psi_0 \bar{a}'_{kn} + \varepsilon_0 \bar{b}'_{kn} \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Уравненное положение спутника Sp_n в референционной геодезической системе будет, наконец, определяться следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X_i + \Delta'_{in} \bar{A}'_{in} = X_k + \Delta'_{kn} \bar{A}'_{kn} \\ Y_n &= Y_i + \Delta'_{in} \bar{B}'_{in} = Y_k + \Delta'_{kn} \bar{B}'_{kn} \\ Z_n &= Z_i + \Delta'_{in} \bar{C}'_{in} = Z_k + \Delta'_{kn} \bar{C}'_{kn} \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Топоцентрические расстояния Δ'_{in} , Δ'_{kn} , входящие в уравнения (184), легко вычисляются из плоского треугольника $M_i M_k S p_n$ (см. рис. 14), в котором известны длина

$$s_{ik} = \overline{M_i M_k} = \left| \sqrt{\Delta X_{ik}^2 + \Delta Y_{ik}^2 + \Delta Z_{ik}^2} \right| \quad (185)$$

и направляющие косинусы всех сторон в референционной системе (X', Y', Z') или (X, Y, Z) : \bar{A}'_{in} , \bar{B}'_{in} , \bar{C}'_{in} , \bar{A}'_{kn} , \bar{B}'_{kn} , \bar{C}'_{kn} ,

$$A_{ik} = \frac{\Delta X_{ik}}{s_{ik}}; \quad B_{ik} = \frac{\Delta Y_{ik}}{s_{ik}}; \quad C_{ik} = \frac{\Delta Z_{ik}}{s_{ik}}. \quad (186)$$

2. Уравнивание по способу посредственных измерений

Если положение спутника определяется по синхронным измерениям направлений на трех станциях, то возникают три условных уравнения типа (179); при четырех станциях таких уравнений будет пять, и тогда, так же как и при большем числе станций, выгоднее решать задачу уравнивания по способу посредственных измерений.

Неизвестными здесь будут являться уравниваемые референционные координаты X_n , Y_n , Z_n спутника или поправки $dX_n = X_n - X_n^0$,

$dY_n = Y_n - Y_n^0$, $dZ_n = Z_n - Z_n^0$ к их принятым приближенным значениям X_n^0 , Y_n^0 , Z_n^0 . В референционной системе уравнения поправок можно написать в таком виде

$$\left. \begin{aligned} v_{T_{in}'} &= dT_{in}' - (T_{in}' - T_{in}'^0); & v_{\delta_{in}'} &= d\delta_{in}' - (\delta_{in}' - \delta_{in}'^0) \\ v_{T_{kn}'} &= dT_{kn}' - (T_{kn}' - T_{kn}'^0); & v_{\delta_{kn}'} &= d\delta_{kn}' - (\delta_{kn}' - \delta_{kn}'^0) \end{aligned} \right\} (187)$$

Величины dT_{in}' , $d\delta_{in}'$, dT_{kn}' , $d\delta_{kn}'$, входящие в уравнения (187), рассчитаем по измеренным значениям T_{in}' , δ_{in}' , T_{kn}' , δ_{kn}' , используя формулы (70). Величины dT_{in}' , $d\delta_{in}'$, dT_{kn}' , $d\delta_{kn}'$ получим из отношений, составленных по типу формул (34):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} T_{in}'^0 &= -\frac{Y_n^0 - Y_i}{X_n^0 - X_i} \\ \operatorname{tg} \delta_{in}'^0 &= \frac{Z_n^0 - Z_i}{\left| \sqrt{(X_n^0 - X_i)^2 + (Y_n^0 - Y_i)^2} \right|} \\ \operatorname{tg} T_{kn}'^0 &= -\frac{Y_n^0 - Y_k}{X_n^0 - X_k} \\ \operatorname{tg} \delta_{kn}'^0 &= \frac{Z_n^0 - Z_k}{\left| \sqrt{(X_n^0 - X_k)^2 + (Y_n^0 - Y_k)^2} \right|} \end{aligned} \right\} (188)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} dT_{in}' &= -\left(\sin T_{in}'^0 dX_n + \cos T_{in}'^0 dY_n \right) \frac{1}{\Delta_{in}'^0 \cos \delta_{in}'^0} \\ d\delta_{in}' &= -\left(\sin \delta_{in}'^0 \cos T_{in}'^0 dX_n - \sin \delta_{in}'^0 \sin T_{in}'^0 dY_n - \right. \\ &\quad \left. - \cos \delta_{in}'^0 dZ_n \right) \frac{1}{\Delta_{in}'^0} \\ \Delta_{in}'^0 &= \left| \sqrt{(X_n^0 - X_i)^2 + (Y_n^0 - Y_i)^2 + (Z_n^0 - Z_i)^2} \right| \\ dT_{kn}' &= -\left(\sin T_{kn}'^0 dX_n + \cos T_{kn}'^0 dY_n \right) \frac{1}{\Delta_{kn}'^0 \cos \delta_{kn}'^0} \\ d\delta_{kn}' &= -\left(\sin \delta_{kn}'^0 \cos T_{kn}'^0 dX_n - \sin \delta_{kn}'^0 \sin T_{kn}'^0 dY_n \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \delta_{kn}'^0 dZ_n \right) \frac{1}{\Delta_{kn}'^0} \\ \Delta_{kn}'^0 &= \left| \sqrt{(X_n^0 - X_k)^2 + (Y_n^0 - Y_k)^2 + (Z_n^0 - Z_k)^2} \right| \end{aligned} \right\} (189)$$

После введения соответствующих весов $p_{T_{in}''}$, $p_{\delta_{in}''}$, $p_{T_{kn}''}$, $p_{\delta_{kn}''}$ решим систему уравнений (187) с учетом формул (185) под условием $[p_{T_{in}''} v_{T,r}^2] + [p_{\delta_{in}''} v_{\delta,r}^2] = \min$. Подробное описание теории уравнивания положений спутника методами условных и посредственных измерений с учетом нетождественности геодезической референцной системы с системой x, y, z дано в [19].

В некоторых задачах, где не требуется максимально достижимая точность, можно ограничиться приближенным решением, при котором влияние углов $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$ пренебрегают. Тогда теория § 14 существенно упрощается и превращается в теорию пространственной засечки, общеизвестную по курсу высшей геодезии и потому здесь не приводимую. Все формулы § 14 при этом остаются в силе, нужно только положить

$$\epsilon_0 = 0, \quad \psi_0 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_0 = 0.$$

II. Решение задачи при комбинированных измерениях направлений и расстояний и при измерении только расстояний

Если, кроме топоцентрических экваториальных координат спутника T_{in}, δ_{in}' , измеряются еще и топоцентрические расстояния Δ_{in}' (в тот же момент времени), то для определения положения спутника Sp_n оказывается достаточно измерений, проведенных на одной геодезической станции наблюдений ИСЗ M_i :

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X_i + \Delta_{in}' \cos \delta_{in}' \cos T_{in}'' \\ Y_n &= Y_i - \Delta_{in}' \cos \delta_{in}' \sin T_{in}'' \\ Z_n &= Z_i + \Delta_{in}' \sin \delta_{in}' \end{aligned} \right\}. \quad (190)$$

При синхронных измерениях уравнения вида (190) можно составить и для второй станции наблюдений ИСЗ; тогда возникают три избыточных измерения, и задачу нужно решать методом уравнивания.

В том случае, когда синхронно измеряются только топоцентрические расстояния, нужны как минимум три геодезические станции наблюдений ИСЗ; при числе станций, большем трех, составляют уравнения погрешностей типа

$$v_{\Delta_{in}'} = d\Delta_{in}' - (\Delta_{in}' - \Delta_{in}^{\circ}), \quad (191)$$

где Δ_{in}° определяется формулой (189) и, следовательно,

$$\begin{aligned} d\Delta_{in}' &= [(X_n^{\circ} - X_i) dX_n + (Y_n^{\circ} - Y_i) dY_n + (Z_n^{\circ} - Z_i) dZ_n] \frac{1}{\Delta_{in}^{\circ}} = \\ &= A_{in}^{\circ} dX_n + B_{in}^{\circ} dY_n + C_{in}^{\circ} dZ_n. \end{aligned} \quad (192)$$

Достоинством этого метода является то, что измеренные топоцентрические расстояния Δ' инвариантны по отношению к системам координат, а потому полностью отпадает необходимость в преобразовании координат.

III. Применение изложенных способов для создания сети космической триангуляции

Рассмотренные способы можно использовать и при обработке сети космической триангуляции, проблемам которой был посвящен § 13.

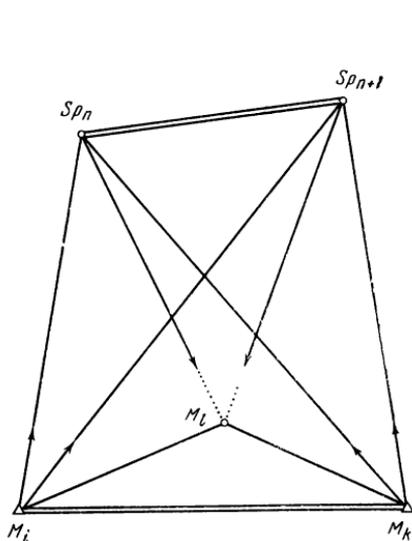


Рис. 19. Прямая и обратная космические засечки

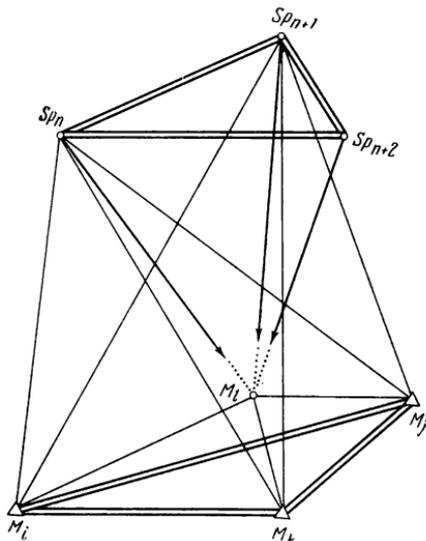


Рис. 20. Космическая трилатерация

Пусть синхронные измерения топоцентрических экваториальных координат T' , δ' производятся на нескольких станциях M_i , M_k , M_l , ..., из которых хотя бы две являются заданными геодезическими пунктами (M_i и M_k на рис. 19), и дано, по крайней мере, два положения спутника S_{p_n} , $S_{p_{n+1}}$. Тогда, решая системы уравнений, аналогичные системам (180) или (187), можно вычислить уравненные референсные координаты спутника X_n , Y_n , Z_n и X_{n+1} , Y_{n+1} , Z_{n+1} . Затем можно решить «обратную» задачу, т. е. по данным двум точкам S_{p_n} , $S_{p_{n+1}}$ в космическом пространстве («космическому базису» $S_{p_n}S_{p_{n+1}}$) определить положение наземной станции M_l и т. д.

В том случае, когда синхронно измеряют только топоцентрические расстояния Δ' , нужны, по крайней мере, три станции,

совмещенные с геодезическими пунктами (M_i, M_j, M_k на рис. 20) ¹. Сначала из решения системы уравнений типа (191) находят три положения спутника Sp_n, Sp_{n+1}, Sp_{n+2} , а затем переходят (опять-таки методом линейной засечки) к определению положений других наземных станций M_l . Мы предполагаем, конечно, что измерения топоцентрических расстояний проводятся синхронно на всех пунктах как на исходных, так и на определяемых.

Задачи обработки пространственной сети по измеренным направлениям, расстояниям или по комбинированным измерениям относятся к области классической геодезии, а потому мы их рассматривать не будем.

§ 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА ДЛЯ СТАНЦИЙ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ ПО СИНХРОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ПОЛОЖЕНИЙ СПУТНИКА

Чтобы эта задача вообще имела смысл, должны быть заданы параметры a_r, e_r^2 и элементы $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$, определяющие референционную геодезическую систему X, Y, Z , в которой необходимо определять геодезические координаты спутника. Вместо элементов сдвига $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$, определяющих положение центра референц-эллипсоида, могут быть, конечно, даны геодезические координаты (B_0, L_0), нормальная высота $H_{q,0}$ и высота квазигеоида $\zeta_{q,0}$ (хотя бы для одной) геодезической станции наблюдений ИСЗ M_0 . Тогда по формулам (9) можно вычислить референционные координаты X_0, Y_0, Z_0 . Роль точки M_0 лучше всего выполняет исходный пункт триангуляции, где ориентирован принятый референц-эллипсоид, который служит основой координат системы X, Y, Z (например, Пулковое в системе координат 1942 г.); однако практически за точку M_0 приходится принимать в большинстве случаев любой пункт сети классической триангуляции.

При решении данной задачи воспользуемся формулами § 13 для определения разностей координат $\Delta x_{0i}, \Delta y_{0i}, \Delta z_{0i}$ в системе (x, y, z) точек M_0 (исходного геодезического пункта) и M_i (станции наблюдений ИСЗ, геодезические координаты которой нужно определить и для которой предполагаем известной нормальную высоту $H_{q,i}$) ².

¹ Именно таким способом Флот США производит измерения в спутниковой сети, основанные на использовании эффекта Доплера [50], и Геодезическая Служба Армии США, применяя систему SECOR (последовательное суммирование расстояний) [46].

² Необходимость в знании высоты $H_{q,i}$ полностью отпала бы, если бы нужно было определять только геодезические координаты без высоты квазигеоида для станции M_i наблюдений ИСЗ.

Выразим референчные координаты точки M_i через величины $\Delta x_{0i}, \Delta y_{0i}, \Delta z_{0i}, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ с учетом формул (63)

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_0 + \Delta x_{0i} - \omega_0 \Delta y_{0i} + \psi_0 \Delta z_{0i} \\ Y_i &= Y_0 + \Delta y_{0i} + \omega_0 \Delta x_{0i} - \varepsilon_0 \Delta z_{0i} \\ Z_i &= Z_0 + \Delta z_{0i} - \psi_0 \Delta x_{0i} + \varepsilon_0 \Delta y_{0i} \end{aligned} \right\}. \quad (193)$$

Непосредственно из уравнений (193) можно вычислить геодезические координаты B_i, L_i , применяя формулы (10) и (15) или (25). Высота над эллипсоидом H_i получается из формулы (27), а высота квазигеоида $\zeta_{q,i}$ — из формулы (28). Таким способом по материалам наблюдений спутника вычисляют геодезические координаты и высоту квазигеоида в различных референчных системах в зависимости от того, какие исходные величины $B_0, L_0, \zeta_{q,0}$, параметры a, e^2 и элементы ориентирования $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ при этом используются.

Вычисленные таким образом геодезические координаты B_i, L_i можно использовать при составлении условных уравнений широты и долготы в процессе уравниваний классических астрономо-геодезических сетей. Однако это целесообразно только тогда, когда расстояние s_{ik} настолько велико, что ошибка передачи геодезических координат в классической триангуляции больше, чем ошибки величин B_i, L_i , определяемых по наблюдениям спутника. В настоящее время речь, видимо, будет идти о расстояниях в несколько тысяч километров и о триангуляции, обрабатываемой методом развертывания. Именно деформация сети в результате развертывания ее на поверхность референц-эллипсоида может значительно понизить точность классической триангуляции в целом. Согласно [21] ошибка δS по линии развертывания для ряда одинаковых треугольников длиной S

$$|\delta S| = \int_0^S \vartheta \sin \frac{s-S}{R} ds \approx \frac{1}{2} R \vartheta_m \left(\frac{S}{R} \right)^2, \quad (194)$$

где ϑ — составляющая уклонения отвеса по направлению цепочки в текущей точке, удаленной от исходного пункта на расстояние s ; ϑ_m — ее среднее интегральное значение; R — средний радиус кривизны поверхности референц-эллипсоида.

В этом смысле было бы целесообразно определять геодезические координаты и высоту над эллипсоидом конечной точки цепи по синхронным измерениям направлений на спутник на этой точке и на исходном пункте, откуда начинают производить развертывание. Хотя в сплошных сетях эта проблема значительно усложняется, основные положения ее все же остаются в силе.

Предложение о составлении условий долготы и широты впервые было изложено в [20].

Отметим, что при неучете влияния углов типа эйлеровых задача решается опять-таки лишь приближенно. В этом случае

можно ожидать ошибок в геодезических координатах, равных примерно значениям самих эйлеровых углов. Напомним, что эти углы, по-видимому, не превышают $10''$, и, как правило, в современных системах они достигают величины порядка $1''$.

§ 16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА И НАПРАВЛЕНИЯ НОРМАЛИ К ПЛОСКОСТИ ОСНОВНОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО МЕРИДИАНА

Эта задача впервые сформулирована в 1962 г. [22]; позднее ей были посвящены работы [12], [15], [23], [24] и др. Речь идет об отыскании по наблюдениям спутников углов Эйлера ϵ_0 , ψ_0 , ω_0 , определяемых уравнениями (52) — (54); по ним затем можно вычислить угол между направлением малой оси референц-эллипсоида и направлением средней оси вращения Земли

$$\delta_z = \left| \sqrt{\epsilon_0^2 + \psi_0^2} \right| \quad (195)$$

и угол между плоскостями основного (гриничского) геодезического и основного (гриничского) астрономического меридиана

$$\delta_\lambda = \left| \sqrt{\epsilon_0^2 + \omega_0^2} \right|. \quad (196)$$

Предположим, что станции M_i , M_k наблюдений ИСЗ, на которых производят синхронные измерения топоцентрических экваториальных координат T' , δ' , являются геодезическими пунктами, т. е. что даны их геодезические координаты B_i , L_i , H_i и B_k , L_k , H_k . Следовательно, можно вычислить значения направляющих косинусов прямой $\overline{M_i M_k}$ (длиной s_{ik}), с одной стороны, в референцной геодезической системе X , Y , Z , т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= [(N_k + H_k) \cos B_k \cos L_k - (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i] \frac{1}{s_{ik}} \\ B_{ik} &= [(N_k + H_k) \cos B_k \sin L_k - (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i] \frac{1}{s_{ik}} \\ C_{ik} &= \left\{ [N_k(1 - e_r^2) + H_k] \sin B_k - [N_i(1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i \frac{1}{s_{ik}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

и, с другой стороны (по наблюдениям спутников, организованным так, как описано в § 12), в системе x , y , z или x' , y' , z' , т. е. $a_{ik} = a'_{ik}$, $b_{ik} = b'_{ik}$, $c_{ik} = c'_{ik}$ (см. формулы 117). Затем из полученных величин (197) можно образовать разности $(a_{ik} - a'_{ik})$, $(b_{ik} - b'_{ik})$ и $(c_{ik} - c'_{ik})$. Если предположить, что все используемые измерения, и спутниковые, и классической триангуляции, достаточно точны, то эти разности будут зависеть только от элементов ориентирования, как это следует из уравнений (64).

¹ Отметим, что эта задача неразрешима при измерении топоцентрических расстояний Δ' , которые инвариантны по отношению к системам координат.

Соответствующие уравнения поправок будут иметь такой вид [15]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 B'_{ik} - \psi_0 C'_{ik} + (A'_{ik} - a'_{ik}) &= v_{a_{ik}} \\ -\omega_0 A'_{ik} + \varepsilon_0 C'_{ik} + (B'_{ik} - b'_{ik}) &= v_{b_{ik}} \\ \psi_0 A'_{ik} - \varepsilon_0 B'_{ik} + (C'_{ik} - c'_{ik}) &= v_{c_{ik}} \end{aligned} \right\}. \quad (198)$$

Абсолютные (свободные. — *Прим. пер.*) члены в выражениях (198), однако, не являются независимыми, а поэтому от направляющих косинусов A'_{ik} , B'_{ik} , C'_{ik} или a'_{ik} , b'_{ik} , c'_{ik} лучше перейти к топоцентрическим экваториальным координатам T'_{ik} , δ'_{ik} или T'^r_{ik} , δ'^r_{ik} (формулы 121), т. е.

$$\left. \begin{aligned} T'^r_{ik} &= -\operatorname{arctg} \frac{B'_{ik}}{A'_{ik}}; & \delta'^r_{ik} &= \operatorname{arctg} \frac{C'_{ik}}{\sqrt{A'^2_{ik} + B'^2_{ik}}} \\ T'_{ik} &= -\operatorname{arctg} \frac{b'_{ik}}{a'_{ik}}; & \delta'_{ik} &= \operatorname{arctg} \frac{c'_{ik}}{\sqrt{a'^2_{ik} + b'^2_{ik}}} \end{aligned} \right\}. \quad (199)$$

Используя формулы преобразований (135), получим уравнения, эквивалентные (198):

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 - \varepsilon_0 \cos T'_{ik} \operatorname{tg} \delta'_{ik} + \psi_0 \sin T'_{ik} \operatorname{tg} \delta'_{ik} + (T'^r_{ik} - T'_{ik}) &= v_{T'_{ik}} \\ \varepsilon_0 \sin T'_{ik} + \psi_0 \cos T'_{ik} + (\delta'^r_{ik} - \delta'_{ik}) &= v_{\delta'_{ik}} \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

под условием $[p_{T'} v_{T'}^2] + [p_{\delta'} v_{\delta'}^2] = \min$. Затем обычным методом уравнивания из уравнений (200) получают искомые углы ε_0 , ψ_0 , ω_0 .

Число пар геодезических станций наблюдений ИСЗ должно быть, конечно, достаточно велико (теоретически, минимально две пары), и они должны быть целесообразно размещены. Выгодным является такое расположение, какое схематически показано на рис. 21. Точка M_0 совмещена с исходным пунктом, в котором ориентирован эллипсоид E_r являющийся основой исследуемой референционной системы (в системе 1942 года — Пулково).

Такой выбор обоснован тем, что геодезические величины B_0 , L_0 , $H_0 = H_{q,0} + \xi_{q,0}$, а следовательно, и X_0 , Y_0 , Z_0 , исходного пункта абсолютно точны по отношению к референционной системе X , Y , Z , так как не содержит ошибок передачи геодезических координат.

Спутниковые измерения нужно проводить синхронно на двух станциях M_0 и M_k , где M_k — это пункт геодезической сети, доста-

точно удаленный от M_0 (определенный в той же системе X, Y, Z методами классической триангуляции) и имеющий известные геодезические координаты $B_k, L_k, H_k = H_{g, k} + \zeta_{g, k}$. Желательно, чтобы пункт M_k был и пунктом основного профиля астрономо-гравиметрического нивелирования.

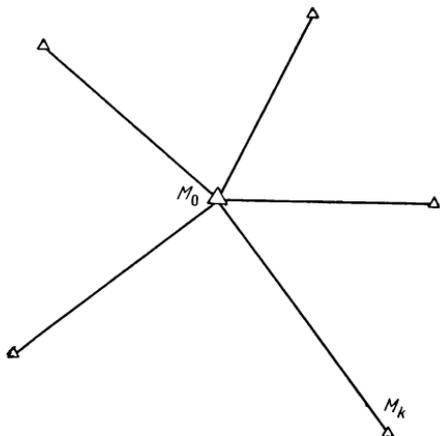


Рис. 21. Выгодное расположение пунктов

Тогда разности координат $(X_k - X_0), (Y_k - Y_0), (Z_k - Z_0)$ в референцной системе, а следовательно, и направляющие косинусы A_{0k}, B_{0k}, C_{0k} были бы известны с максимальной достижимой для классического метода точностью. Далее можно было бы узнать экваториальные координаты пункта M_k на вспомогательной небесной сфере с центром в точке M_0 , т. е. T_{0k}^r, δ_{0k}^r .

В системе x, y, z или соответственно x', y', z' , были бы по наблюдениям спутников получены искомые направляющие косинусы $a'_{0k}, b'_{0k}, c'_{0k}$ и топоцентрические экваториальные координаты T'_{0k}, δ'_{0k} . Уравнения поправок имели бы такой же вид, как уравнения (200), конечно, при $i=0$. Можно предположить, что в таком способе средняя квадратическая ошибка свободного члена в уравнениях (200) может быть снижена, по крайней мере, до $\pm 1''$. Поэтому при достаточном количестве пунктов M_k , т. е. пар $M_0 - M_k$, средняя квадратическая ошибка определения углов $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$, очевидно, также не превысит $\pm 1''$.

§ 17. СОЕДИНЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИ НЕ СВЯЗАННЫХ РЕФЕРЕНЦНЫХ СИСТЕМ

Предположим, что задачи предыдущих параграфов уже решены, и выведем формулы для элементов сдвига в случае преобразования двух геодезически не связанных референцных систем I и II (рис. 22). Каждая из этих систем полностью определяется восемью параметрами:

Система I: $a^I, e^{2I}, \Delta x_0^I, \Delta y_0^I, \Delta z_0^I, \epsilon_0^I, \psi_0^I, \omega_0^I$.

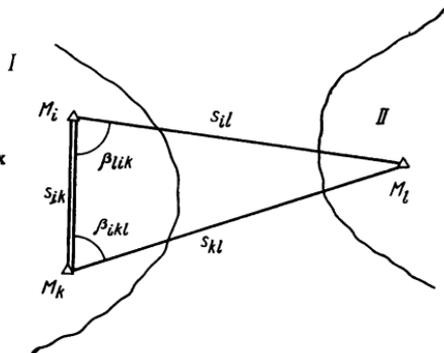
Система II: $a^{II}, e^{2II}, \Delta x_0^{II}, \Delta y_0^{II}, \Delta z_0^{II}, \epsilon_0^{II}, \psi_0^{II}, \omega_0^{II}$.

Из этих параметров (нижний индекс r мы здесь опускаем) а priori заданы $a^I, a^{II}, e^{2I}, e^{2II}$, определяющие форму и размеры соответствующих референц-эллипсоидов E^I и E^{II} (рис. 23).

¹ В несколько упрощенной формулировке ($\epsilon_0^{II} = \epsilon_0^I; \psi_0^{II} = \psi_0^I; \omega_0^{II} = \omega_0^I$) эта задача была поставлена и теоретически решена в [25].

Для краткости вывода предположим, что в обеих системах уже определены углы типа эйлеровых, т. е. $\epsilon_0^I, \psi_0^I, \omega_0^I$ и $\epsilon_0^{II}, \psi_0^{II}, \omega_0^{II}$, по специальным геодезическим программам наблюдений спутников, например способом, изложенным в § 16. Неизвестными

Рис. 22. Связь изолированных референционных систем (космическая связь материков)



останутся, следовательно, только координаты центров $O^I(\Delta x_0^I, \Delta y_0^I, \Delta z_0^I)$ и $O^{II}(\Delta x_0^{II}, \Delta y_0^{II}, \Delta z_0^{II})$ эллипсоидов E^I и E^{II} (см. рис. 23) в геоцентрической системе x, y, z и на этой основе достаточно узнать только разности:

$$\Delta x_0^{II} = \Delta x_0^I - \Delta x_0^{II}, \Delta y_0^{II} = \Delta y_0^I - \Delta y_0^{II}, \Delta z_0^{II} = \Delta z_0^I - \Delta z_0^{II}.$$

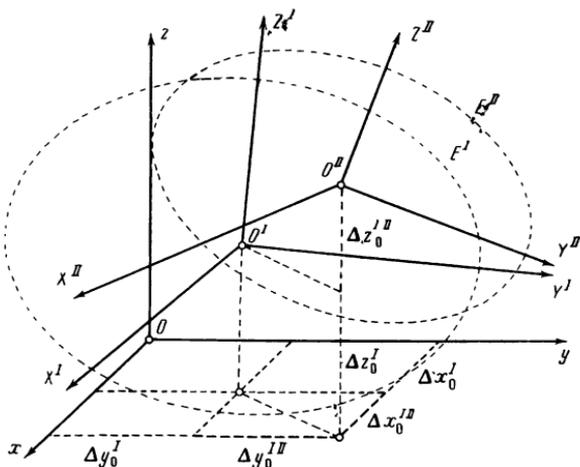


Рис. 23. Расположение двух референционных систем координат

Предположим, что система II должна быть трансформирована в систему I. Тогда в системе I необходимо иметь минимум две геодезические станции наблюдений ИСЗ $M_i(B_i^I, L_i^I, H_i^I, X_i^I, Y_i^I, Z_i^I)$

и $M_k(B_k^I, L_k^I, H_k^I, X_k^I, Y_k^I, Z_k^I)$. В системе II должна быть дана, по крайней мере, одна такая станция $M_l(B_l^{II}, L_l^{II}, H_l^{II}, X_l^{II}, Y_l^{II}, Z_l^{II})$. Далее предположим, что были выполнены синхронные измерения направлений на спутник на станциях M_i, M_l и M_k, M_l , т. е. что имеется достаточное количество синхронно измеренных величин типа T'_{in}, δ'_{in} и T'_{kn}, δ'_{kn} (§ 12) и вычислены направляющие косинусы $a'_{il}, b'_{il}, c'_{il}, a'_{kl}, b'_{kl}, c'_{kl}$ (см. формулы 117).

Сначала вычислим по данным в системе I геодезическим координатам инвариантную длину базиса $s_{ik} = \overline{M_i M_n}$ и направляющие косинусы $A'_{ik}, B'_{ik}, C'_{ik}$. Затем переведем направляющие косинусы линий $M_i M_l$ и $M_k M_l$, определенные по наблюдениям спутника, в систему I по формулам (65):

$$\left. \begin{aligned} A'_{il} &= a'_{il} - \omega_0^I b'_{il} + \psi_0^I c'_{il} \\ B'_{il} &= b'_{il} + \omega_0^I a'_{il} - \varepsilon_0^I c'_{il} \\ C'_{il} &= c'_{il} - \psi_0^I a'_{il} + \varepsilon_0^I b'_{il} \end{aligned} \right\}; \quad (201)$$

$$\left. \begin{aligned} A'_{kl} &= a'_{kl} - \omega_0^I b'_{kl} + \psi_0^I c'_{kl} \\ B'_{kl} &= b'_{kl} + \omega_0^I a'_{kl} - \varepsilon_0^I c'_{kl} \\ C'_{kl} &= c'_{kl} - \psi_0^I a'_{kl} + \varepsilon_0^I b'_{kl} \end{aligned} \right\}. \quad (202)$$

Имея значения $A'_{ik}, B'_{ik}, C'_{ik}$ и величины (201) и (202), вычислим инвариантные плоские углы. В соответствии с уравнениями (169) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{ilk} &= A'_{il} A'_{ik} + B'_{il} B'_{ik} + C'_{il} C'_{ik} \\ \cos \beta_{ikl} &= -A'_{ik} A'_{kl} - B'_{ik} B'_{kl} - C'_{ik} C'_{kl} \end{aligned} \right\}. \quad (203)$$

Далее при помощи известной длины базиса s_{ik} и углов β (203) получим длины сторон s_{il} и s_{kl} и соответствующие разности координат

$$X_l^I - X_i^I = s_{il} A'_{il}; \quad Y_l^I - Y_i^I = s_{il} B'_{il}; \quad Z_l^I - Z_i^I = s_{il} C'_{il}. \quad (204)$$

Выражения (204) уже определяют референсные координаты пункта M_l в системе I, т. е. X_l^I, Y_l^I, Z_l^I (так как величины X_i^I, Y_i^I, Z_i^I и X_k^I, Y_k^I, Z_k^I известны), а следовательно, и геодезические координаты B_l^I, L_l^I, H_l^I согласно формулам (10), (15), (27).

Однако в данной задаче требуется определить элементы сдвигов $\Delta x_0^{I, II}, \Delta y_0^{I, II}, \Delta z_0^{I, II}$, необходимые для преобразования координат из системы II в систему I обычного пункта (не являющегося станцией наблюдений ИСЗ). Исходными данными для решения здесь будут являться разности $X_l^{II} - X_l^I, Y_l^{II} - Y_l^I, Z_l^{II} - Z_l^I$, вычис-

ленные по формулам (204) и по данным геодезическим координатам B_i^{II} , L_i^{II} , H_i^{II} . Они зависят, с одной стороны, от элементов сдвига $\Delta x_0^{\text{I II}}$, $\Delta y_0^{\text{I II}}$, $\Delta z_0^{\text{I II}}$, а, с другой стороны, от разностей

$$\varepsilon_0^{\text{I II}} = \varepsilon_0^{\text{I}} - \varepsilon_0^{\text{II}}; \quad \psi_0^{\text{I II}} = \psi_0^{\text{I}} - \psi_0^{\text{II}}; \quad \omega_0^{\text{I II}} = \omega_0^{\text{I}} - \omega_0^{\text{II}}. \quad (205)$$

Сохраняя принятую точность (т. е. отбрасывая квадраты элементов сдвига и их произведения, например $\Delta x_0^{\text{I II}}$, $\varepsilon_0^{\text{I II}}$ и т. д.), с учетом формул (204) получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0^{\text{I II}} &= X_i^{\text{II}} - X_i^{\text{I}} - s_{il} A_{il}^{\text{II}} - \omega_0^{\text{I II}} Y_i^{\text{I}} + \psi_0^{\text{I II}} Z_i^{\text{I}} \\ \Delta y_0^{\text{I II}} &= Y_i^{\text{II}} - Y_i^{\text{I}} - s_{il} B_{il}^{\text{II}} + \omega_0^{\text{I II}} X_i^{\text{I}} - \varepsilon_0^{\text{I II}} Z_i^{\text{I}} \\ \Delta z_0^{\text{I II}} &= Z_i^{\text{II}} - Z_i^{\text{I}} - s_{il} C_{il}^{\text{II}} - \psi_0^{\text{I II}} X_i^{\text{I}} + \varepsilon_0^{\text{I II}} Y_i^{\text{I}} \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Подобные выражения получаются и при $i=k$.

Выражения (206) полностью решают поставленную задачу. Добавим только, что если она решена, то можно преобразовывать координаты обычного пункта $M_j(B_j^{\text{II}}, L_j^{\text{II}}, H_j^{\text{II}})$ из системы II в систему I уже без наблюдений спутника на этом пункте. Для этой же цели можно использовать дифференциальные формулы способа проектирования [14], обобщенные на случай непараллельности осей, и формулы (146), в которых достаточно оставить только главные члены. В этом случае получаем ($\Delta a^{\text{I II}} = a^{\text{II}} - a^{\text{I}}$, $\Delta e^{2^{\text{I II}}} = e^{2^{\text{II}}} - e^{2^{\text{I}}}$):

$$\left. \begin{aligned} B_j^{\text{I}} &= B_j^{\text{II}} - \left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)_{\text{II}, j} \Delta x_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial B}{\partial Y} \right)_{\text{II}, j} \Delta y_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial B}{\partial Z} \right)_{\text{II}, j} \Delta z_0^{\text{I II}} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial B}{\partial a} \right)_{\text{II}, j} \Delta a^{\text{I II}} \left(\frac{\partial B}{\partial e^2} \right)_{\text{II}, j} \Delta e^{2^{\text{I II}}} + \\ &\quad + \varepsilon_0^{\text{I II}} \sin L_j^{\text{II}} - \psi_0^{\text{I II}} \cos L_j^{\text{II}} \\ L_j^{\text{I}} &= L_j^{\text{II}} - \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right)_{\text{II}, j} \Delta x_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \right)_{\text{II}, j} \Delta y_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)_{\text{II}, j} \Delta a^{\text{I II}} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial L}{\partial e^2} \right)_{\text{II}, j} \Delta e^{2^{\text{I II}}} + \omega_0^{\text{I II}} - (\varepsilon_0^{\text{I II}} \cos L_j^{\text{II}} + \\ &\quad + \psi_0^{\text{I II}} \sin L_j^{\text{II}}) \operatorname{tg} B_j^{\text{II}} \\ H_j^{\text{I}} &= H_j^{\text{II}} - \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)_{\text{II}, j} \Delta x_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right)_{\text{II}, j} \Delta y_0^{\text{I II}} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial H}{\partial Z} \right)_{\text{II}, j} \Delta z_0^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial H}{\partial a} \right)_{\text{II}, j} \Delta a^{\text{I II}} - \left(\frac{\partial H}{\partial e^2} \right)_{\text{II}, j} \Delta e^{2^{\text{I II}}} \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Выражения для коэффициентов $\left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)$, \dots , $\left(\frac{\partial H}{\partial e^2} \right)$ выведе-

ны, например, в [14] и обычно используются в высшей геодезии в таком виде

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial B}{\partial X} &\simeq -\frac{\rho''}{M} \sin B \cos L; & \frac{\partial B}{\partial Y} &\simeq -\frac{\rho''}{M} \sin B \sin L; \\
 & & \frac{\partial B}{\partial Z} &\simeq \frac{\rho''}{M} \cos B; \\
 \frac{\partial B}{\partial a} &\simeq \rho'' \frac{e^2}{a} \sin B \cos B; & \frac{\partial B}{\partial e^2} &= \frac{\rho''}{2(1-e^2)} \times \\
 & & & \times (2 - e^2 \sin^2 B) \sin B \cos B \\
 \frac{\partial L}{\partial X} &= -\frac{\rho''}{N} \sec B \sin L; & \frac{\partial L}{\partial Y} &= \frac{\rho''}{N} \sec B \cos L \\
 \frac{\partial L}{\partial Z} &= 0; & \frac{\partial L}{\partial a} &= 0; & \frac{\partial L}{\partial e^2} &= 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial X} &= \cos B \cos L; & \frac{\partial H}{\partial Y} &= \cos B \sin L; & \frac{\partial H}{\partial Z} &= \sin B \\
 \frac{\partial H}{\partial a} &= -\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; & \frac{\partial H}{\partial e^2} &= \frac{M}{2(1 - e^2)} \times \\
 & & & \times (1 - e^2 \sin^2 B) \sin^2 B
 \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

При решении поставленной задачи мы предполагали, что в системе I даны, по крайней мере, две станции наблюдений ИСЗ, а в системе II — хотя бы одна станция. Если же имеется целая сеть станций в системе I или II или в системе I и II, то решать задачу нужно методом уравнивания. В каждом сложившемся конкретном случае речь идет, конечно, о вычислении только трех неизвестных (при условии, что углы $\epsilon_0^I, \psi_0^I, \omega_0^I$ и $\epsilon_0^{II}, \psi_0^{II}, \omega_0^{II}$, известны), т. е. $\Delta x_0^{II}, \Delta y_0^{II}, \Delta z_0^{II}$.

Далее мы полагали, что измерялись направления на спутник. Однако, кроме того, синхронно могли быть измерены также и топоцентрические расстояния или только топоцентрические расстояния.

В первом случае достаточно одной станции наблюдений ИСЗ (M_i) в системе I и одной (M_j) в системе II. По измерениям n -го положения спутника мы имели бы в этом случае величины $T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}, T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}$ и составили бы (для краткости положив $\epsilon_0^{II} = \epsilon_0^I, \psi_0^{II} = \psi_0^I, \omega_0^{II} = \omega_0^I$, так как учет поправок не отличается от применения формул (206)) выражения

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x_0^{II} &= X_i^{II} - X_i^I - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} + \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \\
 \Delta y_0^{II} &= Y_i^{II} - Y_i^I + \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \\
 \Delta z_0^{II} &= Z_i^{II} - Z_i^I + \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} - \Delta'_{in} \sin \delta'_{in}
 \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

¹ Для вывода этих коэффициентов можно использовать формулы (10), (15), (23). Выражения для $\frac{\partial L}{\partial X}, \frac{\partial L}{\partial Y}$ непосредственно следуют из формул (10). Однако в [14] дан более простой вывод.

Во втором случае в системе I должны быть даны, по крайней мере, три станции наблюдений ИСЗ (M_i, M_j, M_k на рис. 20), а в системе II — одна (M_l на рис. 20). Если число наблюдаемых положений спутника больше трех, то для определения положения точки M_l составляют уравнения поправок типа (191).

Задача значительно упрощается, если достаточно получить приближенные решения, в которых можно пренебречь влиянием углов $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$. Тогда речь будет идти только об элементах сдвига центров эллипсоидов, составляющих основу трансформируемых систем. Соответствующие формулы легко получить, приняв $\epsilon_0=0; \psi_0=0; \omega_0=0$.

Такое же решение приходится применять и в том случае, когда требуется решить задачу с максимальной точностью, а взаимное ориентирование осей трансформируемых систем неизвестно.

Глава 8

ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ БЛИЗКИХ СПУТНИКОВ

Прежде чем рассматривать каждую орбитальную задачу в отдельности и оперировать с орбитой (положением) ИСЗ, приведем, хотя бы в общих чертах, основы теории определения орбит близких спутников.

Изложение теории сократим до минимума, имея в виду только близкие ИСЗ, однако заодно укажем и на некоторые трудности, вытекающие именно из нетождественности применяемых референцных систем и геоцентрической системы.

Обратимся сначала к небесной механике и теоретической астрономии и изложим здесь только самые необходимые с точки зрения потребностей геометрической космической геодезии положения. При этом будем учитывать специфику близких спутников, которая, собственно, и является основой решения задач космической геодезии, а именно:

1) возможность определения расстояния между ИСЗ и станцией наблюдения (например, не прямо, а по синхронным измерениям направлений на двух пунктах спутниковой геодезической сети);

2) возможность измерения ряда положений спутника в сравнительно небольших интервалах времени.

В силу этих особенностей близких ИСЗ можно будет временно обойтись (лишь в этой части) без теории возмущения орбит. Последняя требует изложения основных положений теории потенциала, которое и будет дано во второй части книги («Динамическая космическая геодезия»).

§ 18. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА И ИХ ДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Если бы спутник двигался в гравитационном поле, имеющем свойства поля материальной точки или однородного шара, то его движение точно бы описывалось законами Кеплера. Приведем эти законы в той последовательности, в какой они были (для планет солнечной системы) открыты (1-й и 2-й законы в 1609 г., а 3-й закон — в 1616 г.)¹:

1. Движение спутника происходит в плоскости, проходящей через центр масс центрального тела так, что площадь, описываемая радиусом-вектором спутника (проведенным из центра масс центрального тела), пропорциональна времени.

2. Орбита спутника есть эллипс (в общем случае, коническое сечение), в одном из фокусов которого располагается центр масс центрального тела.

3. Отношение квадратов периодов обращения спутников равно отношению кубов больших полуосей их орбит.

Реальное силовое поле всегда, конечно, отличается от идеального. В случае ИСЗ значительные нарушения законов Кеплера вызваны именно отклонениями формы реальной Земли от идеального шара, неправильностями в определении гравитационных элементов поля Земли (масс, плотностей и т. д. — *прим. ред.*), тормозящим действием атмосферы и, кстати, влиянием других тел. Тем не менее идеальная орбита, соответствующая только законам Кеплера, является удобным исходным пунктом для изучения истинной (возмущенной) орбиты; подробнее об этом будет сказано во второй части книги. Предполагая, что при измерениях положений ИСЗ определяются не только координаты x , y , z спутника, но и их производные по времени $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, т. е. составляющие скорости (для спутников это практически возможно, см. § 20, II), всегда можно получить мгновенные элементы орбиты (см. § 20, III).

I. Динамические следствия 1-го закона Кеплера

Из первой части 1-го закона Кеплера, утверждающей, что орбита (спутника) лежит в плоскости, проходящей через центр масс, следует, что вектор ускорения \mathbf{W} , под действием которого и происходит движение, направлен к центру масс O . Только тогда при любом направлении вектора скорости \mathbf{v} (которая сообщена спутнику) плоскость орбиты будет центральной; это ясно из простого кинематического рассуждения. Составляющие ускорения $\mathbf{W}_x =$

¹ Здесь мы их напишем для ИСЗ.

$= \frac{d^2x}{dt^2}$, $W_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ и $W_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ должны удовлетворять условию (рис. 24)

$$\frac{W_y}{W_x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{y}{x} \quad (210)$$

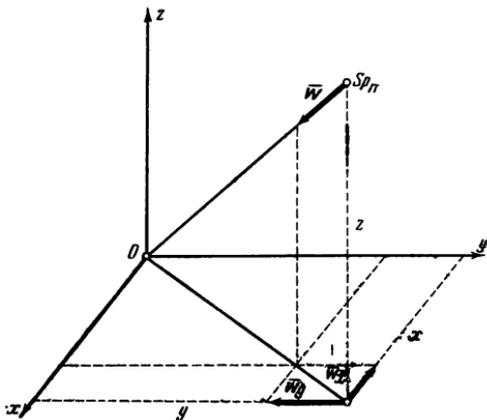


Рис. 24. К выводу закона площадей

и аналогично в плоскостях (yz) и (xz)

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{z}{y}; \quad \frac{W_x}{W_z} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{d^2z}{dt^2}} = \frac{x}{z}. \quad (211)$$

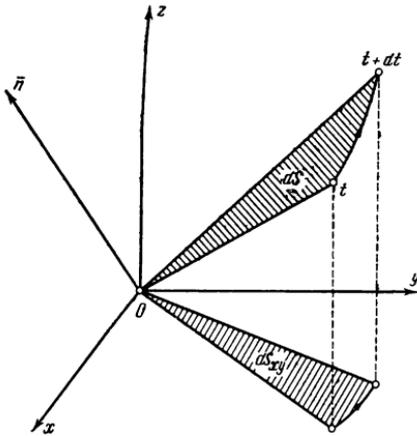
Из уравнения (210) и (211) вытекает далее содержание второй части 1-го закона Кеплера, т. е. прямая пропорциональная зависимость между площадью сектора и временем. Напишем ее в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \\ x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

Интегрируя выражения (213), получаем



$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= C_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= C_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= C_3 \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Имея в виду, что криволинейные интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{C_{xy}} (x dy - y dx); \\ \int_{C_{yz}} (y dz - z dy); \\ \int_{C_{xz}} (z dx - x dz) \end{aligned} \right\}$$

Рис. 25. Эллиптические координаты ИСЗ

определяют (согласно теореме Остроградского — Грина) удвоенную площадь выделенных замкнутых контуров C_{xy}, C_{yz}, C_{xz} в плоскостях $(xy), (yz)$ и (xz) , можно написать

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2 \frac{dS_{xy}}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} \cos(\bar{n}, z) \\ C_2 &= 2 \frac{dS_{yz}}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} \cos(\bar{n}, x) \\ C_3 &= 2 \frac{dS_{xz}}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} \cos(\bar{n}, y) \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

В формулах (215) dS (рис. 25) обозначает элементарный сектор орбиты спутника, описываемый радиусом-вектором за элемент времени dt ; $dS_{xy}, dS_{yz}, dS_{xz}$ — его проекции на плоскости $(xy), (yz), (xz)$; n — нормаль к плоскости орбиты спутника. Отношение дифференциалов (производная. — прим. ред.) $\frac{dS}{dt}$ есть так называемая секториальная, или площадная, скорость.

Из формул (215) следует, что эта величина для данного спутника (при неизменном положении плоскости орбиты в соответствии

с 1-м законом Кеплера) постоянна. Удвоенную секториальную скорость обозначим

$$2 \frac{dS}{dt} = K. \quad (216)$$

Интегрируя выражение (218), получаем

$$S = \frac{1}{2} Kt + K_1. \quad (217)$$

Эта формула является математическим выражением 1-го закона Кеплера; в ней K_1 — постоянная интегрирования.

II. Динамические следствия 2-го закона Кеплера

При изучении движения по эллипсу удобно пользоваться системой плоских прямоугольных координат \bar{x} , \bar{y} с началом в фокусе O (центре масс центрального тела) или системой полярных координат Δ , E , определяемых так, как показано на рис. 26. Между этими системами имеют место следующие соотношения:

$$\bar{x} = a(\cos E - e), \quad (218)$$

$$\bar{y} = b \sin E. \quad (219)$$

Угол E — это так называемая эксцентрическая аномалия спутника. На рис. 26 C — центр эллипса, P — точка орбиты, наименее удаленная от фокуса O (перигей спутника). Формула (218) вытекает непосредственно из рис. 26. Формула (219) получается из общего уравнения эллипса в системе \bar{x} , \bar{y}

$$(\bar{x} + ae)^2(1 - e^2) + \bar{y}^2 = a^2(1 - e^2) \quad (220)$$

после подстановки в него выражения (218).

Выразим в полярных координатах составляющие ускорения $\mathbf{W}_{\bar{x}} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$, $\mathbf{W}_{\bar{y}} = \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$, а затем по ним и полное значение ускорения $|\mathbf{W}| = \sqrt{\mathbf{W}_{\bar{x}}^2 + \mathbf{W}_{\bar{y}}^2}$. Дифференцирование выражений (218) и (219) дает

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -a \sin E \frac{dE}{dt}, \quad (221)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = b \cos E \frac{dE}{dt}. \quad (222)$$

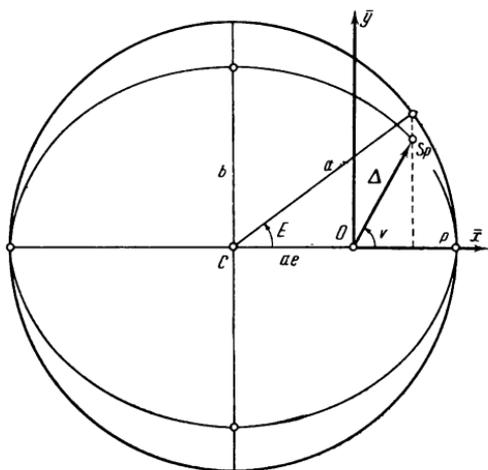


Рис. 26. Орбита ИСЗ в пространстве

получается из общего уравнения

Эти величины согласно 1-му закону Кеплера должны удовлетворять условию, аналогичному (214). В плоской системе координат (\bar{x}, \bar{y}) с учетом формулы (216) будем иметь

$$\bar{x} \frac{d\bar{y}}{dt} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{dt} = K. \quad (223)$$

Подставим в (223) выражения (218), (219), (221) и (222) и выведем формулу для $\frac{dE}{dt}$, при помощи которой упростим затем уравнения (221) и (222). Тогда найдем

$$ab \cos E (\cos E - e) \frac{dE}{dt} + ab \sin^2 E \frac{dE}{dt} = K \quad (224)$$

и отсюда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{K}{ab(1 - e \cos E)}. \quad (225)$$

С учетом соотношения (225) уравнения (221) и (222) можно написать в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = - \frac{K \sin E}{b(1 - e \cos E)}, \quad (226)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{K \cos E}{a(1 - e \cos E)}. \quad (227)$$

Дифференцируя выражения (226) и (227), получим формулы для составляющих ускорения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= - \frac{K}{b} \cdot \frac{\cos E (1 - e \cos E) - e \sin^2 E}{(1 - e \cos E)^2} \cdot \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{K}{b} \cdot \frac{(e - \cos E)}{(1 - e \cos E)^2} \cdot \frac{dE}{dt}, \end{aligned} \quad (228)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} &= - \frac{K}{a} \cdot \frac{\sin E (1 - e \cos E) + e \sin E \cos E}{(1 - e \cos E)^2} \cdot \frac{dE}{dt} = \\ &= - \frac{K}{a} \cdot \frac{\sin E}{(1 - e \cos E)^2} \cdot \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (229)$$

и далее с учетом (225)

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{K^2 (e - \cos E)}{ab^2 (1 - e \cos E)^3}, \quad (230)$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = - \frac{K^2 \sin E}{a^2 b (1 - e \cos E)^3} \quad (231)$$

Квадрат полного ускорения будет тогда равен

$$\begin{aligned} W^2 &= \frac{K^4}{a^4 b^4} \cdot \frac{1}{(1 - e \cos E)^6} [a^2 (e - \cos E)^2 + b^2 \sin^2 E] = \\ &= \frac{K^4}{a^2 b^4} \cdot \frac{1}{(1 - e \cos E)^4}. \end{aligned} \quad (232)$$

Отсюда получим

$$W = \frac{K^2}{ab^2} \cdot \frac{1}{(1 - e \cos E)^2}. \quad (233)$$

В выражение (233) введем еще геоцентрическое расстояние спутника, для которого имеем с учетом соотношений (218) и (219) формулу

$$\Delta^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = a^2 (\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E \quad (234)$$

или

$$\Delta = a(1 - e \cos E). \quad (235)$$

В результате уравнение (233) примет вид

$$W = \frac{aK^2}{b^2 \Delta^2}. \quad (236)$$

Величины, входящие в уравнение (236), должны быть функциями только положения спутника в данном силовом поле и не должны зависеть от параметров орбиты. С этой целью преобразуем прежде всего постоянную K , так как именно она зависит (наравне с a и b) от конкретного движения. Это можно сделать, например, интегрируя уравнение (225),

$$\frac{K}{ab} \int dt = \int (1 - e \cos E) dE, \quad (237)$$

т. е.

$$\frac{K}{ab} t + \bar{C} = E - e \sin E, \quad (238)$$

где \bar{C} — постоянная интегрирования, определяемая из условия

$$E = 0 \rightarrow t = t_0. \quad (239)$$

Следовательно,

$$\bar{C} = -\frac{K}{ab} t_0, \quad (240)$$

где t_0 — момент прохождения спутником через перигей P .

Уравнение (238) с учетом формулы (240) принимает такой вид:

$$E - e \sin E = \frac{K}{ab} (t - t_0). \quad (241)$$

Теперь рассмотрим положение спутника ровно через один оборот (от перигея. — *Прим. ред.*) и обозначим его период обращения через T . Применяя для этого случая уравнение (241), находим, что

$$2\pi = \frac{K}{ab} (t_0 + T - t_0) = \frac{K}{ab} T. \quad (242)$$

Отсюда следует

$$\frac{K}{ab} = \frac{2\pi}{T} \quad (243)$$

и затем

$$K = ab \frac{2\pi}{T}. \quad (244)$$

Подставляя (244) в (236) и в (241), получаем выражения

$$W = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\Delta^2}, \quad (245)$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = M. \quad (246)$$

Уравнение (246) есть так называемое уравнение Кеплера, выражающее зависимость между эксцентрической аномалией E и моментом времени t . Буквой M обозначена так называемая средняя аномалия.

III. Динамические следствия 3-го закона Кеплера

Из 3-го закона Кеплера следует, что для всех спутников данного центрального тела

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.} \quad (247)$$

С учетом формулы (247) выражение (245) перепишем в таком виде:

$$W = \text{const} \frac{1}{\Delta^2} = \frac{\mu}{\Delta^2}, \quad (248)$$

где μ — постоянная, характеризующая гравитационное поле центрального тела.

IV. Закон тяготения Ньютона

Динамические следствия законов Кеплера выражаются, следовательно, зависимостью (248) ускорения от расстояния Δ до центра масс, уже известной нам по закону тяготения Ньютона. И, действительно, этот закон можно вывести из формулы (250), если учесть 2-й и 3-й динамические законы Ньютона. Обозначим массу центрального тела (для ИСЗ) через M_z , постоянную, характеризующую гравитационное поле Земли, через μ_z и аналогично

этому величины, соответствующие данному спутнику, через m_{Sp} и μ_{Sp} . Сила, с которой спутник Sp (находящийся на расстоянии Δ) притягивается к центру масс центрального тела (Земли), равна согласно 2-му закону Ньютона

$$|\bar{F}| = m_{Sp} \frac{\mu_z}{\Delta^2}. \quad (249)$$

Аналогично этому сила, с которой спутник притягивает центральное тело, будет равна

$$|\bar{F}| = M_z \frac{\mu_{Sp}}{\Delta^2}. \quad (250)$$

Согласно 3-му закону Ньютона действие равно противодействию, а поэтому величины (модули. — *Прим. пер.*) обеих сил (249) и (250) должны быть равны. Следовательно,

$$m_{Sp} \frac{\mu_z}{\Delta^2} = M_z \frac{\mu_{Sp}}{\Delta^2} \quad (251)$$

и

$$\frac{\mu_z}{M_z} = \frac{\mu_{Sp}}{m_{Sp}} = \text{const} = f, \quad (252)$$

где f — гравитационная постоянная.

Непосредственно из формулы (252) вытекают выражения для постоянной μ

$$\mu_z = fM_z, \quad (253)$$

$$\mu_{Sp} = fm_{Sp}. \quad (254)$$

Подставляя их в уравнение (249) или (250), получаем формулу закона тяготения Ньютона

$$|\bar{F}| = f \frac{M_z m_{Sp}}{\Delta^2}. \quad (255)'$$

§ 19. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

I. Уравнения движения и уравнение орбиты в ее плоскости

В идеальном случае, когда за гравитационное поле центрального тела (M_z , μ_z , далее просто M , μ) принимают гравитационное поле материальной точки и никаких возмущений ускорений не существует, имеет место так называемая задача двух тел и

¹ Иногда силам притяжения приписывают знак минус, а силам отталкивания — знак плюс. Тогда формула (255) будет иметь вид $|\bar{F}| = -f \frac{M_z m_{Sp}}{\Delta^2}$.

зоваться прямоугольными (x, y) и полярными (Δ, u) координатами (рис. 29). Угол u есть так называемый аргумент склонения (широты). Между u и аргументом перигея ω существует следующее соотношение

$$u - \omega = v, \quad (258)$$

где v — так называемая истинная аномалия (рис. 29, 30).

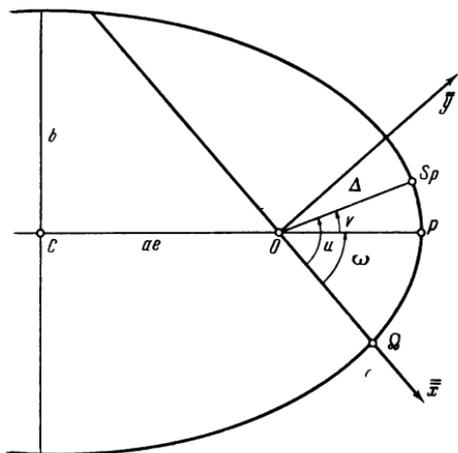


Рис. 29. Связь аргумента перигея и истинной аномалии

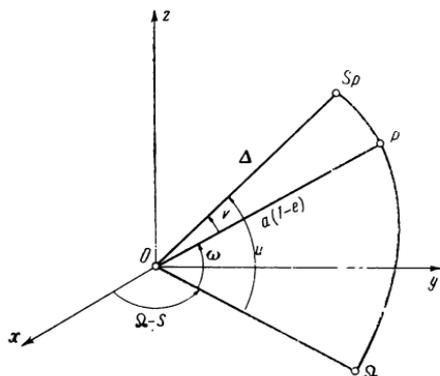


Рис. 30. Положение спутника в пространстве

Полярные координаты Δ, u и прямоугольные координаты \bar{x}, \bar{y} являются взаимозависимыми функциями; из рис. 29 очевидны равенства

$$\bar{x} = \Delta \cos u; \quad \bar{y} = \Delta \sin u. \quad (259)$$

Дифференцируя выражения (259), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{d\Delta}{dt} \cos u - \Delta \sin u \frac{du}{dt} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \frac{d\Delta}{dt} \sin u + \Delta \cos u \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (260)$$

Вторые производные будут равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} &= \frac{d^2\Delta}{dt^2} \cos u - 2 \frac{d\Delta}{dt} \sin u \frac{du}{dt} - \Delta \cos u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \\ &\quad - \Delta \sin u \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} &= \frac{d^2\Delta}{dt^2} \sin u + 2 \frac{d\Delta}{dt} \cos u \frac{du}{dt} - \Delta \sin u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \\ &\quad + \Delta \cos u \frac{d^2u}{dt^2} \end{aligned} \right\}. \quad (261)$$

Теперь подставим значения $\overline{(261)}$ и (259) в уравнения движения в плоских координатах x, y , т. е. в уравнения, аналогичные (257):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \overline{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{\Delta^3} \overline{x} &= 0 \\ \frac{d^2 \overline{y}}{dt^2} + \frac{\mu}{\Delta^3} \overline{y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (262)$$

После умножения первого уравнения (262) на $\cos u$, второго — на $\sin u$ и последующего их сложения получим с учетом (259)

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} - \Delta \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{\Delta^2} = 0. \quad (263)$$

Выражение (263) является уравнением орбиты в ее плоскости, выраженным в полярных координатах Δ, u . Прежде чем решать это уравнение, исключим из него производную $\frac{du}{dt}$ (214). Аналогично формулам (214) и (223) в плоских координатах будем иметь

$$\overline{x} \frac{d\overline{y}}{dt} - \overline{y} \frac{d\overline{x}}{dt} = K \quad (264)$$

и после подстановки сюда выражений (259) и (260)

$$\Delta \cos u \left(\frac{d\Delta}{dt} \sin u + \Delta \cos u \frac{du}{dt} \right) - \Delta \sin u \left(\frac{d\Delta}{dt} \cos u - \Delta \sin u \frac{du}{dt} \right) = K \quad (265)$$

или

$$\Delta^2 \frac{du}{dt} = K. \quad (266)$$

С учетом формулы (266) дифференциальное уравнение (263) перепишем в виде

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} - \frac{K^2}{\Delta^3} + \frac{\mu}{\Delta^2} = 0, \quad (267)$$

а после подстановки

$$\frac{1}{\Delta} = y, \quad (268)$$

т. е.

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\Delta^2 \frac{dy}{dt} = -\Delta^2 \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -K \frac{dy}{du}, \quad (269)$$

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} = -K \frac{d^2 y}{du^2} \cdot \frac{du}{dt} = -K^2 y^2 \frac{d^2 y}{du^2}, \quad (270)$$

когда мы двукратно применим соотношение (266), — в виде

$$\frac{d^2 y}{du^2} + y = \frac{\mu}{K^2}. \quad (271)$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Прежде всего нужно решить соответствующее ему однородное уравнение, т. е. исходное неоднородное уравнение без правой части

$$\frac{d^2y}{du^2} + y = 0. \quad (272)$$

Оно имеет характеристическое уравнение

$$r^2 + 1 = 0 \quad (273)$$

с комплексными корнями $r_{12} = \pm i$. Общий интеграл однородного уравнения (274) будет, следовательно, таким:

$$y_0 = A \cos u + B \sin u. \quad (274)^1$$

Если мы выразим постоянные интегрирования A, B через новые постоянные C, ω

$$A = C \cos \omega, \quad B = C \sin \omega, \quad (275)$$

то получим

$$y_0 = C \cos(u - \omega). \quad (276)$$

Теперь вернемся к неоднородному уравнению (271). Поскольку правая его часть есть константа, частный интеграл его будет равен

$$\varphi(u) = \frac{\mu}{K^2}, \quad (277)$$

а общий интеграл

$$y = y_0 + \varphi(u) = C \cos(u - \omega) + \frac{\mu}{K^2}. \quad (278)$$

В соответствии с подстановкой (268) далее получим

$$\Delta = \frac{1}{C \cos(u - \omega) + \frac{\mu}{K^2}} = \frac{\frac{K^2}{\mu}}{1 + C \frac{K^2}{\mu} \cos(u - \omega)}. \quad (279)$$

Траектория, определяемая уравнением (279), должна быть согласно 2-му закону Кеплера эллипсом (в общем случае, коническим сечением), т. е. для вектора, проведенного из фокуса, должно быть справедливо отношение (известное уравнение конического сечения в полярных координатах)

$$\Delta = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (280)$$

¹ Обычный вид общего интеграла однородного уравнения (272) таков:

$$y_0 = e^{\alpha u} (A \cos \beta u + B \sin \beta u), \quad (274)'$$

если корни характеристического уравнения равны $\alpha + \beta i$. В рассматриваемом нами случае $\alpha = 0, \beta = 1$.

Приравнивая (279) и (280), получаем выражения, из которых определяется смысл постоянных интегрирования C и ω :

$$e = C \frac{K^2}{\mu}, \quad (281)$$

$$a(1 - e^2) = \frac{K^2}{\mu}, \quad (282)$$

$$u - \omega = v. \quad (283)$$

Из выражения (282) получим формулу для удвоенной секториальной скорости (216)

$$K = 2 \frac{ds}{dt} = \sqrt{\mu} \sqrt{a(1 - e^2)}. \quad (284)$$

Теперь видно, что секториальная скорость зависит только от размеров и формы орбиты (не считая константы μ , постоянной для рассматриваемого центрального тела (Земли) и равной произведению постоянной тяготения на массу тела) и не зависит от ее ориентировки.

Из выражения (281) следует формула для постоянной интегрирования C как функции элементов орбиты

$$C = \frac{\mu e}{K^2} = \frac{e}{a(1 - e^2)}. \quad (285)$$

Уравнение (283) определяет постоянную интегрирования ω как аргумент перигея и подтверждает исходное выражение (258) (см. рис. 28, 29).

Сопоставляя выражения (284) и (244), получаем зависимость между периодом T и большой полуосью a

$$\sqrt{\mu} \sqrt{a(1 - e^2)} = ab \frac{2\pi}{T}, \quad (286)$$

т. е. при $b = a \sqrt{1 - e^2}$

$$a^{3/2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\mu} \quad (287)$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}. \quad (288)$$

II. Положение спутника в пространстве

Теперь приступим к выражению геоцентрического положения x , y , z спутника $S\rho_n$ на орбите, параметры которой будем предполагать известными.

Из рис. 31 очевидны следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta \cos(\Delta, x) \\ y &= \Delta \cos(\Delta, y) \\ z &= \Delta \cos(\Delta, z) \end{aligned} \right\}, \quad (289)$$

а по теореме косинуса стороны для обозначенных на рис. 31 сферических треугольников можно написать

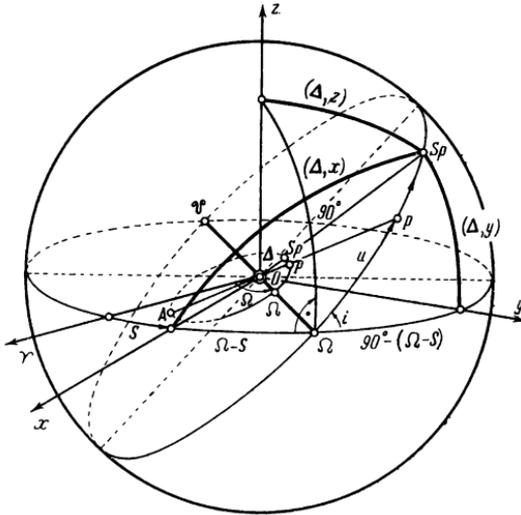


Рис. 31. Направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты

$$\left. \begin{aligned} \overline{\cos(\Delta, x)} &= \cos u \cos(\Omega - S) + \sin u \sin(\Omega - S) \cos(180^\circ - i) \\ \overline{\cos(\Delta, y)} &= \cos u \sin(\Omega - S) + \sin u \cos(\Omega - S) \cos i \\ \overline{\cos(\Delta, z)} &= \cos u \cos 90^\circ + \sin u \sin 90^\circ \cos(90^\circ - i) \end{aligned} \right\}. \quad (290)$$

Уравнения (289) с учетом выражений (290) примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i] \\ y &= \Delta [\cos u \sin(\Omega - S) + \sin u \cos(\Omega - S) \cos i] \\ z &= \Delta \sin u \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (291)$$

Чтобы вычислить положение спутника по формулам (291) на данный момент времени t , нужно знать соотношение между эксцентриситетом e и истинной аномалией v . За исходные можно взять уравнения (218) и (219), написанные для плоских координат \bar{x} , \bar{y} спутника.

Из рис. 26 видно, что

$$\bar{x} = \Delta \cos v; \quad \bar{y} = \Delta \sin v, \quad (292)$$

и, следовательно (с учетом того, что $b = a\sqrt{1-e^2}$), имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} a(\cos E - e) &= \Delta \cos v \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E &= \Delta \sin v \end{aligned} \right\}. \quad (293)$$

С учетом формулы (280) для Δ можно переписать уравнения (293) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \cos E - e &= \frac{1-e^2}{1+e \cos v} \cos v \\ \sqrt{1-e^2} \sin E &= \frac{1-e^2}{1+e \cos v} \sin v \end{aligned} \right\}. \quad (294)$$

Далее используем только первое уравнение из (294) и преобразуем его так:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (295)$$

и затем так:

$$\cos E = \frac{1-e^2}{1+e \cos v} \cos v + e. \quad (296)$$

Уравнения (295) и (296) решают задачу перехода от E к v и наоборот. Однако их можно привести к еще более удобному для практических вычислений виду.

Прибавив и отняв от единицы выражение (295), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 1 + \cos v &= \frac{(1-e)(1+\cos E)}{(1-e \cos E)} \\ 1 - \cos v &= \frac{(1+e)(1-\cos E)}{(1-e \cos E)} \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

и отсюда

$$2 \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{2(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}}{1-e \cos E}, \quad (298)$$

$$2 \sin^2 \frac{v}{2} = \frac{2(1+e) \sin^2 \frac{E}{2}}{1-e \cos E}. \quad (299)$$

Разделим уравнение (299) на (298) и извлечем из частного квадратный корень, тогда получим, наконец, наиболее часто используемые соотношения (Лакайля. — Прим. ред.):

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (300)$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (301)$$

III. Интегралы площадей

При определении орбит по измерениям положений и составляющих скорости спутника важную роль играют интегралы (214),

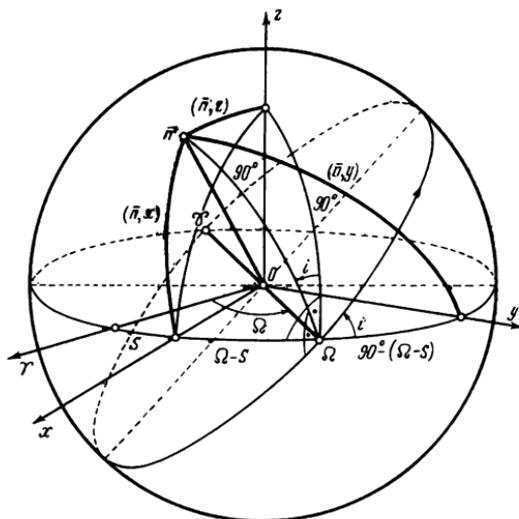


Рис. 32. Определение геоцентрического радиуса и составляющих скорости ИСЗ

называемые интегралами и площадей. Учитывая равенства (215), (216), и (284), напишем

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \cos(\bar{n}, z) \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \cos(\bar{n}, x) \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \cos(\bar{n}, y) \end{aligned} \right\}. \quad (302)$$

Направляющие косинусы нормали \bar{n} к плоскости орбиты выразим из соответствующих прямоугольных сферических треугольников по формуле косинуса стороны, как это следует из рис. 32,

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{n}, z) &= \cos i \\ \cos(\bar{n}, x) &= \sin(\Omega - S) \sin i \\ \cos(\bar{n}, y) &= -\cos(\Omega - S) \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (303)$$

В заключение отметим, что интеграл площади в полярных координатах выражается уравнением (266).

IV. Интеграл энергии

Важную роль при определении орбит также играет соотношение между кинетической и потенциальной энергией спутника, называемое интегралом энергии, или интегралом живой силы. Оно заключается в том, что сумма кинетической энергии $\frac{v^2}{2}$ (для спутника с массой единица) и потенциальной энергии (потенциала) $-\frac{\mu}{\Delta}$ спутника на расстоянии Δ от центра масс центрального тела есть величина постоянная. Выведем это соотношение из уравнений движения (257).

Если каждое уравнение из (257) в отдельности умножить соответственно на $2 \frac{dx}{dt}$, $2 \frac{dy}{dt}$, $2 \frac{dz}{dt}$ и затем сложить их, то получится

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} + 2 \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{2\mu}{\Delta^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) = 0 \quad (304)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + \frac{2\mu}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{dt} = 0, \quad (305)$$

так как

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{\Delta} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right). \quad (306)$$

Интегрируя выражение (305), получим

$$\int \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] dt + 2\mu \int \frac{1}{\Delta^2} \cdot \frac{d\Delta}{dt} dt = h \quad (307)$$

или

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu}{\Delta} = h, \quad (308)$$

где h — постоянная интегрирования.

Уравнение (308) и есть интеграл энергии. Сумма квадратов составляющих скорости $\left(\frac{dx}{dt} \right)$, $\left(\frac{dy}{dt} \right)$, $\left(\frac{dz}{dt} \right)$, равна квадрату полной скорости v^2 , так что можно написать

$$v^2 - \frac{2\mu}{\Delta} = h. \quad (309)$$

Таким образом, сумма удвоенной кинетической энергии и потенциальной энергии равна постоянной интегрирования h .

Константу h нужно, конечно, выразить как функцию элементов орбиты. Для этого лучше всего записать интеграл энергии (308) в плоских координатах \bar{x} , \bar{y} и в полярных координатах Δ , u , причем необходимо отметить, что константа h инвариантна по отношению к переходам от одной системы координат к другой, так как скорость v и геоцентрическое расстояние Δ являются инвариантами по отношению к таким переходам. В системе координат \bar{x} , \bar{y} интеграл энергии имеет вид

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{\Delta} = h, \quad (310)$$

а в полярной системе Δ , u с учетом (260)

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 + \Delta^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{\Delta} = h. \quad (311)$$

Для производной $\left(\frac{du}{dt}\right)$ из интеграла площадей (266) в полярных координатах Δ , u с учетом формулы (284) получаем такое выражение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{K}{\Delta^2} = \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}}{\Delta^2}. \quad (312)$$

Производная $\frac{d\Delta}{dt}$ вычисляется с помощью формулы (280)

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{ae(1-e^2)}{(1+e\cos v)^2} \sin v \frac{dv}{dt}. \quad (313)$$

Подставим теперь выражения (312) и (313) в интеграл энергии (311). При этом примем во внимание, что константа h одна и та же для всех положений спутника, в том числе и для положения его в перигее, где $v=0$, а $\Delta=a(1-e)$. Для положения в перигее справедливы выражения

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_{v=0} = 0, \quad (314)$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{v=0} = \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{1-e^2}}{a^{3/2}(1-e)^2}. \quad (315)$$

Следовательно, интеграл (311) для этого же положения равен

$$a^2(1-e)^2 \left[\frac{\sqrt{\mu} \sqrt{1-e^2}}{a^{3/2}(1-e)^2} \right]^2 - \frac{2\mu}{a(1-e)} = h$$

ИЛИ

$$h = \mu \frac{1+e}{a(1-e)} - \frac{2\mu}{a(1-e)} = -\frac{\mu}{a}. \quad (316)$$

Интеграл энергии (308) имеет, следовательно, окончательный точный вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \mu \left(\frac{2}{\Delta} - \frac{1}{a}\right) = 0. \quad (317)$$

Припомним еще, что в формуле (317) сумма первых трех членов $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$ может быть выражена в произвольной системе координат. Так, например, в геоцентрической экваториальной системе (1) имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \delta \cos T \frac{d\Delta}{dt} - \Delta \sin \delta \cos T \frac{d\delta}{dt} - \Delta \cos \delta \sin T \frac{dT}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -\cos \delta \sin T \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \sin \delta \sin T \frac{d\delta}{dt} - \Delta \cos \delta \cos T \frac{dT}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \sin \delta \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \cos \delta \frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (318)$$

и, следовательно:

$$v^2 = \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 + \Delta^2 \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \Delta^2 \cos^2 \delta \left(\frac{dT}{dt}\right)^2. \quad (319)$$

Для топоцентрической экваториальной системы (29) аналогично этому получаем

$$v^2 = \left(\frac{d\Delta'_{in}}{dt}\right)^2 + \Delta'^2_{in} \left(\frac{d\delta'_{in}}{dt}\right)^2 + \Delta'^2_{in} \cos^2 \delta'_{in} \left(\frac{dT'_{in}}{dt}\right)^2, \quad (320)$$

здесь M_i — топоцентр, а Sp_n — положение ИСЗ.

Подобные выражения имеют место и в геодезической референцной системе X, Y, Z или X^1, Y^1, Z^1 .

V. Обзор основных формул для решения задачи двух тел

Мы рассмотрели все необходимые формулы, встречающиеся при решении задачи двух тел. Изложим еще вкратце последовательность вычисления геоцентрических координат спутника x, y, z (для произвольного момента времени t) по известным элементам орбиты спутника $\Omega, i, \omega, a, e, t_0$.

1. По данному моменту времени t вычисляем среднюю аномалию M по формуле (246)

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - t_0).$$

Если период T неизвестен, то используем формулы (246) и (288), т. е.

$$M = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0).$$

2. Из уравнения Кеплера (246) находим эксцентрическую аномалию E как функцию средней аномалии M . Нужно, следовательно, решить уравнение Кеплера (246)

$$E - e \sin E = M.$$

3. Вычисляем истинную аномалию v согласно формуле (300), т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

4. Находим аргумент склонения по формуле (283)

$$u = \omega + v.$$

5. Рассчитываем геоцентрическое расстояние по формуле (280)

$$\Delta = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}.$$

6. Вычисляем прямоугольные пространственные геоцентрические координаты (спутника) по формулам (291):

$$x = \Delta [\cos u \cos (\Omega - S) - \sin u \sin (\Omega - S) \cos i],$$

$$y = \Delta [\cos u \sin (\Omega - S) - \sin u \cos (\Omega - S) \cos i],$$

$$z = \Delta \sin u \sin i.$$

В связи с этим нужно подчеркнуть, что координаты, полученные по формулам (291), будут действительно геоцентрическими только в случае, если используемые при их вычислении элементы орбиты Ω , i , ω , a , e , t_0 тоже имеют точно геоцентрический характер.

Однако практически, даже если бы все наблюдения были безошибочны, будем иметь совокупность лишь квазигеоцентрических величин $\tilde{\Omega}$, \tilde{i} , $\tilde{\omega}$, \tilde{a} , \tilde{e} , \tilde{t}_0 , независимо от ошибок собственно измерений положений ИСЗ. Конечно, по этим величинам мы сможем найти только квазигеоцентрические координаты ИСЗ \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} .

VI. Применение изложенной теории для вычисления эфемерид ИСЗ

Прежде чем составлять эфемериды для наблюдений спутника, нужно провести преобразование координат x , y , z в \tilde{z} и $\tilde{\alpha}$. Точное решение этой задачи описано в главах 4 и 5. Для эфемерид, однако, достаточно приближенного решения. Выразим (приближенно) топоцентрические координаты спутника \tilde{x}^1 , \tilde{y}^1 , \tilde{z}^1 для дан-

ной станции наблюдений ИСЗ через ее геодезические координаты B, L и высоту H

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}' &= x - (N + H) \cos B \cos L \\ \tilde{y}' &= y - (N + H) \cos B \sin L \\ \tilde{z}' &= z - [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{aligned} \right\}. \quad (321)^1$$

Отсюда согласно формулам (45) получаем приближенные горизонтальные координаты¹

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \tilde{\alpha} &= \frac{\tilde{x}' \sin L - \tilde{y}' \cos L}{(\tilde{x}' \cos L + \tilde{y}' \sin L) \sin B - \tilde{z}' \cos B} \\ \cos \tilde{z} &= \frac{(\tilde{x}' \cos L + \tilde{y}' \sin L) \cos B + \tilde{z}' \sin B}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 + \tilde{z}'^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (322)$$

Если же ставится задача найти еще и астрономические координаты подспутниковой точки (т. е. точки на земной поверхности, над которой спутник находится в зените)², то нужно дополнительно вычислять геоцентрические экваториальные координаты спутника:

$$\operatorname{tg} T = -\frac{y}{x}, \quad (323)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (324)$$

Весьма приближенно (для шаровой Земли) можем считать, что $\tilde{\varphi} \approx \delta$; $\tilde{\lambda} \approx -T$.

В случае надобности на основе содержания глав 4 и 5 можно получить и точное решение, но пока в этом нет необходимости. Однако можно ожидать, что необходимость в точных эфемеридах появится в связи с совершенствованием методики измерений положений спутника подвижными камерами [как бы «замораживающими» (т. е. «останавливающими». — *Прим. пер.*) движение ИСЗ] и аппаратурой с фотоэлектрической регистрацией.

§ 20. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ БЛИЗКИХ СПУТНИКОВ

1. Точная формулировка проблемы

В этой главе мы в максимальной мере сузим общую проблему и остановимся только на ее специфических чертах применительно к близким ИСЗ.

¹ В этой задаче можно не различать геодезические координаты B, L и астрономические φ, λ ; вместо высоты над эллипсоидом H достаточно брать нормальную (и приближенную) высоту.

² Согласно строгой формулировке, эта точка должна совпадать с основанием нормали, опущенной из ИСЗ на поверхность референц-эллипсоида; для приближенного решения такая формулировка не требуется.

В противоположность классической небесной механике особенностью и в то же время существенным преимуществом здесь является то, что из измерений можно полностью определить топоцентрический радиус-вектор спутника, т. е. не только направление на спутник, но и его топоцентрическое расстояние.

При этом такая возможность имеется не только, когда топоцентрические расстояния измеряются прямым способом (например, системами SECOR [45], Допплер [50]), но и в случае, когда синхронно (квазисинхронно) измеряются только направления на ИСЗ на геодезических станциях наблюдений ИСЗ, т. е. на точках с известными геодезическими координатами и высотами над эллипсоидом.

Топоцентрические расстояния вычисляются при этом (с помощью уравнивания) из плоского треугольника, образуемого двумя станциями наблюдений ИСЗ и спутником. В этом треугольнике известны длина линий, соединяющей станции наблюдений (вычисляемая по их данным геодезическим координатам), и все углы (решение этой задачи см. в § 14).

Другой особенностью и преимуществом здесь является то, что можно измерить несколько положений ИСЗ в сравнительно малых интервалах времени, т. е. можно вычислить дифференциальные отношения $\frac{dT'}{dt}$, $\frac{d\delta'}{dt}$, $\frac{d\Delta'}{dt}$ и, следовательно, составляющие скорости $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Исходя из указанных особенностей, будем рассматривать только такие случаи. Остальные варианты, пусть даже и интересные с теоретической точки зрения (например, определение орбиты без знания топоцентрических расстояний или составляющих скорости), разбирать не будем.

Можно предполагать, что в большинстве стран организация наблюдений с целью регистрации прохождений ИСЗ и определения их орбит удовлетворяет указанным требованиям. Она выполнима и при существующем состоянии технического оборудования в ЧССР.

II. Обработка квазисинхронных наблюдений ИСЗ. Определение топоцентрического радиуса-вектора ИСЗ и составляющих скорости

Предположим, что в близкие моменты времени

$$t_1, t_2, \dots, t_n \quad (325)$$

(S_1, S_2, \dots, S_n гриничского звездного времени) на геодезической станции наблюдений M_i (рис. 33) определены топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ

$$(T'_{i1}, \delta'_{i1}); (T'_{i2}, \delta'_{i2}); \dots; (T'_{in}, \delta'_{in}) \quad (326)$$

$$Sp_1, Sp_2, \dots, Sp_n \quad (327)$$

Пусть на другой геодезической станции M_k^1 проведены квазисинхронные наблюдения ИСЗ в моменты времени, несколько отличающиеся от предыдущих, т. е. в моменты

$$t_1', t_2', \dots, t_n',$$

$$(S_1', S_2', \dots, S_n'),$$

и получены

$$(T'_{k1'}, \delta'_{k1'}); (T'_{k2'}, \delta'_{k2'}); \dots;$$

$$(T'_{kn'}, \delta'_{kn'}) \quad (328)$$

Далее редуцируем квазисинхронные наблюдения к одинаковым моментам времени, например к моментам t_1, t_2, \dots, t_n наблюдений на станции M_i . Это можно осуществить так: с помощью последнего ряда наблюдений составим эмпирические функции

$$T'_k = T'_k(t); \quad \delta'_k = \delta'_k(t) \quad (329)$$

и по ним для аргументов

$$t_1, t_2, \dots, t_n$$

вычислим значения

$$(T'_{k1}, \delta'_{k1}); (T'_{k2}, \delta'_{k2}), \dots, (T'_{kn}, \delta'_{kn}). \quad (330)$$

По длине s_{ik} линии, соединяющей геодезические станции M_i, M_k , определяемой формулой

$$\begin{aligned} s_{ik}^2 = \Delta X_{ik}^2 + \Delta Y_{ik}^2 + \Delta Z_{ik}^2 = & [(N_k + H_k) \cos B_k \cos L_k - \\ & - (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i]^2 + [(N_k + H_k) \cos B_k \sin L_k - \\ & - (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i]^2 + \{ [N_k(1 - e_r^2) + H_k] \sin B_k - \\ & - [N_i(1 - e_r^2) + H_i] \sin B_i \}^2 \end{aligned} \quad (331)$$

¹ Можно было бы рассмотреть случай с большим числом станций (>2), однако, учитывая форму и размеры территории ЧССР и высоты существующих ИСЗ, равные сотням и тысячам километров, число станций, равное двум, принимаем за оптимальное.

и по рядам наблюдений (326) и (330) уравнием положения спутника, полученные в моменты (325), согласно теории, упомянутой в § 14. Тогда получим такие топоцентрические расстояния:

$$\Delta'_{i1}, \Delta'_{i2}, \dots, \Delta'_{in} \quad (332)$$

и

$$\Delta'_{k1}, \Delta'_{k2}, \dots, \Delta'_{kn}. \quad (333)$$

При вычислении Δ нужно, конечно, знать и учитывать влияние углов Эйлера $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$, так как направления $\overline{M_i S_p}, \overline{M_k S_{p_n}}$ (направляющие косинусы $a_{in}, b_{in}, c_{in}; a_{kn}, b_{kn}, c_{kn}$) определены в системе x, y, z , тогда как направление $\overline{M_i M_k}$ (направляющие косинусы $A_{ik} = \frac{\Delta X_{ik}}{s_{ik}}, B_{ik} = \frac{\Delta Y_{ik}}{s_{ik}}, C_{ik} = \frac{\Delta Z_{ik}}{s_{ik}}$) дано в референцной системе.

* Плоские углы $\beta_{nik}, \beta_{ikn}, \beta_{kni}$ (см. рис. 34) инвариантны по отношению к различным системам координат, однако направления, вычисляемые по ним, должны получаться всегда в одной, хотя бы и произвольной, системе. Без знания углов $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ можно точно вычислить только угол β_{kni} , для которого имеет место формула

$$\cos \beta_{kni} = a'_{in} a'_{kn} + b'_{in} b'_{kn} + c'_{in} c'_{kn}. \quad (334)$$

Углы β_{nik}, β_{ikn} выразим так:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{nik} &= \tilde{\beta}_{nik} + d\beta_{nik} \\ \beta_{ikn} &= \tilde{\beta}_{ikn} + d\beta_{ikn} \end{aligned} \right\}. \quad (335)$$

Приближенные значения β_{nik}, β_{ikn} определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \cos \tilde{\beta}_{nik} &= A_{ik} a'_{in} + B_{ik} b'_{in} + C_{ik} c'_{in} \\ \cos \tilde{\beta}_{ikn} &= -A_{ik} a'_{kn} - B_{ik} b'_{kn} - C_{ik} c'_{kn} \end{aligned} \right\}, \quad (336)$$

а поправки к ним получаются путем дифференцирования выражений (336)

$$\left. \begin{aligned} d\beta_{nik} &= -\operatorname{cosec} \beta_{nik} [(a_{ik} - A_{ik}) a'_{in} + (b_{ik} - B_{ik}) b'_{in} + \\ &\quad + (c_{ik} - C_{ik}) c'_{in}] \\ d\beta_{ikn} &= \operatorname{cosec} \beta_{ikn} [(a_{ik} - A_{ik}) a'_{kn} + (b_{ik} - B_{ik}) b'_{kn} + \\ &\quad + (c_{ik} - C_{ik}) c'_{kn}] \end{aligned} \right\}. \quad (337)$$

Привлекая формулы (64), далее получаем

$$\left. \begin{aligned} d\beta_{nik} &= -\operatorname{cosec} \beta_{nik} [\omega_0 (B_{ik} a'_{in} - A_{ik} b'_{in}) - \psi_0 (C_{ik} a'_{in} - \\ &\quad - A_{ik} c'_{in}) + \varepsilon_0 (C_{ik} b'_{in} - B_{ik} c'_{in})] \\ d\beta_{ikn} &= \operatorname{cosec} \beta_{ikn} [\omega_0 (B_{ik} a'_{kn} - A_{ik} b'_{kn}) - \psi_0 (C_{ik} a'_{kn} - \\ &\quad - A_{ik} c'_{kn}) + \varepsilon_0 (C_{ik} b'_{kn} - B_{ik} c'_{kn})] \end{aligned} \right\}. \quad (338)$$

Если не вводить поправки (например, в случае, когда углы ε_0 , ψ_0 , ω_0 неизвестны), то можно вычислить только приближенные расстояния $\tilde{\Delta}'_{in}$, $\tilde{\Delta}'_{ik}$

$$\tilde{\Delta}'_{in} = s_{ik} \frac{\sin \tilde{\beta}_{ikn}}{\sin \beta_{kni}}; \quad \tilde{\Delta}'_{kn} = s_{ik} \frac{\sin \tilde{\beta}_{nik}}{\sin \beta_{kni}}, \quad (339)$$

которые отличаются от точных расстояний

$$\tilde{\Delta}'_{in} = \tilde{\Delta}'_{in} + d\Delta'_{in}; \quad \Delta'_{kn} = \tilde{\Delta}'_{kn} + d\Delta'_{kn} \quad (340)$$

на поправки

$$\left. \begin{aligned} d\Delta'_{in} &= s_{ik} \operatorname{cosec} \beta_{kni} \operatorname{ctg} \tilde{\beta}_{ikn} [\omega_0 (B_{ik} a'_{kn} - A_{ik} b'_{kn}) - \\ &\quad - \psi_0 (C_{ik} a'_{kn} - A_{ik} c'_{kn}) + \varepsilon_0 (C_{ik} b'_{nk} - B_{ik} c'_{kn})] \\ d\Delta'_{kn} &= -s_{ik} \operatorname{cosec} \beta_{kni} \operatorname{ctg} \tilde{\beta}_{nik} [\omega_0 (B_{ik} a'_{in} - A_{ik} b'_{in}) - \\ &\quad - \varphi_0 (C_{ik} a'_{in} - A_{ik} c'_{in}) + \varepsilon_0 (C_{ik} b'_{in} - B_{ik} c'_{in})] \end{aligned} \right\}. \quad (341)$$

Далее предположим, что для каждого ряда моментов времени (327) имеем комбинации величин

$$(T'_{i1}, \delta'_{i1}, \Delta'_{i1}); (T'_{i2}, \delta'_{i2}, \Delta'_{i2}); \dots; (T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in})$$

и

$$(T'_{k1}, \delta'_{k1}, \Delta'_{k1}); (T'_{k2}, \delta'_{k2}, \Delta'_{k2}); \dots; (T'_{kn}, \delta'_{kn}, \Delta'_{kn}),$$

целиком определяющие топоцентрические радиусы-векторы спутника. Из них по формулам (29) вычисляем:

$$x'_{i1}, x'_{i2}, \dots, x'_{in},$$

$$y'_{i1}, y'_{i2}, \dots, y'_{in},$$

$$z'_{i1}, z'_{i2}, \dots, z'_{in},$$

$$x'_{k1}, x'_{k2}, \dots, x'_{kn},$$

$$y'_{k1}, y'_{k2}, \dots, y'_{kn},$$

$$z'_{k1}, z'_{k2}, \dots, z'_{kn}.$$

Теперь применим точную теорию параллакса близких ИСЗ [9] и вычислим (двумя способами: 1 относительно топоцентра M_i

III. Определение элементов орбиты спутника по его положению и составляющим скорости

Здесь мы имеем задачу с 6-ю исходными величинами: положение спутника задано координатами x, y, z и известны три составляющие его скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ¹. Из этих шести исходных данных можно вывести шесть элементов орбиты $\Omega, i, \omega, a, e, t_0$. Как следует из § 19 (о задаче двух тел), это решение вполне однозначно.

Можно наметить такую последовательность действий:

1. Вычислить интегралы площадей

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \cos i = C_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \sin(\Omega - S) \sin i = C_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \cos(\Omega - S) \sin i = C_3 \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Вычислить величины $i, (\Omega - S)$ и величину $a(1-e^2)$, например, так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i &= \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2}}{C_1}; \quad \operatorname{tg}(\Omega - S) = -\frac{C_2}{C_3} \\ a(1-e^2) &= \frac{1}{\mu} (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2) = \frac{K^2}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

2. Найти геоцентрическое расстояние

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (6)$$

3. Вычислить интеграл энергии

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \mu \left(\frac{2}{\Delta} - \frac{1}{a}\right) = v^2. \quad (317)$$

Отсюда определить большую полуось орбиты

$$a = \frac{1}{\frac{2}{\Delta} - \frac{v^2}{\mu}} = \frac{\Delta}{2 - \frac{v^2 \Delta}{\mu}}. \quad (349)$$

4. Вычислить эксцентриситет орбиты по известному значению большой полуоси и выражению (348) для $a(1-e^2)$

$$e^2 = 1 - \frac{1}{\mu a} (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2).$$

¹ В этой главе мы не будем рассматривать влияние углов эйлера типа: $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$, чтобы не нарушать основных положений небесной механики. Сделаем это в главе 9.

5. Вычислить аргумент склонения u из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i] \\ y &= \Delta [\cos u \sin(\Omega - S) + \sin u \cos(\Omega - S) \cos i] \\ z &= \Delta \sin u \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (291)$$

Достаточно было бы и одного из этих уравнений; можно, кстати, применять и их комбинации, например:

$$\operatorname{tg} u = \frac{z \operatorname{cosec} i}{x \cos(\Omega - S) + y \sin(\Omega - S)}. \quad (350)$$

6. Вычислить истинную аномалию v . Если орбита спутника не круговая ($e \neq 0$), то нужно использовать формулу

$$\Delta = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (280)$$

из которой следует

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2) - \Delta}{e\Delta}. \quad (351)$$

Кроме того, можно, дифференцируя выражение

$$e \cos v = \frac{a(1 - e^2) - \Delta}{\Delta}, \quad (352)$$

получить формулу

$$-e \sin v \frac{dv}{dt} = -\frac{a(1 - e^2)}{\Delta^2} \cdot \frac{d\Delta}{dt} \quad (353)$$

и отсюда с учетом формулы (312) и равенства $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$ найти выражение

$$e \sin v = \frac{\sqrt{a(1 - e^2)}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{d\Delta}{dt}, \quad (354)$$

после деления выражения (354) на (352) и с учетом формулы (306), т. е. равенства

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{1}{\Delta} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right),$$

получить искомую истинную аномалию по формуле

$$\operatorname{tg} v = \frac{\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) \sqrt{a(1 - e^2)}}{\sqrt{\mu} [a(1 - e^2) - \Delta]}. \quad (355)$$

7. Вычислить эксцентрическую аномалию E по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (301)$$

8. Найти среднюю аномалию M из уравнения Кеплера

$$M = E - e \sin E. \quad (246)$$

9. Определить время t_0 прохождения ИСЗ через перигей с помощью правой части уравнения (246)

$$t_0 = t - \frac{T}{2\pi} M. \quad (356)$$

Если период T неизвестен, то следует использовать выражение (288) и найти

$$t_0 = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} M. \quad (357)$$

На этом решение задачи заканчивается. Если периодически (например, при каждом прохождении спутника) повторять определения значений Ω , i , ω , a , e , t_0 , относящихся к разным моментам времени, то можно составить эмпирические функции

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega(t); & a &= a(t) \\ i &= i(t); & e &= e(t) \\ \omega &= \omega(t); & t_0 &= t_0(t) \end{aligned} \right\}. \quad (358)$$

Изменение элементов орбиты во времени происходит особенно вследствие уклонений формы реальной Земли от идеального шара и аномальности ее масс. Эти возмущения будут рассмотрены во второй части книги.

Ряды (358) определяют действительную орбиту спутника. Отдельные значения элементов (например, для момента t_i , Ω_i , i_i , ω_i , a_i , e_i , t_{0i}), хотя и определяют кеплеров эллипс, но характеризуют действительное положение x , y , z и действительные составляющие скорости $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ как и в случае действительной орбиты, мы предполагаем, что ошибки наблюдений равны нулю и все редукции на геоцентр можно точно вычислить).

При решении орбитальных задач космической геодезии, конечно, необходимо, чтобы топоцентрические наблюдения, для которых по элементам вычисляются геоцентрические положения x , y , z , выполнялись внутри интервала времени, для которого образованы ряды (358)¹.

¹ Теория так называемых возмущений элементов орбит $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$,

$\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{dt_0}{dt}$ относится к динамической космической геодезии.

IV. Изменения элементов орбиты, вызываемые несовпадением используемой геодезической (референцной) системы координат и геоцентрической системы

Ни в предыдущем разделе, ни в § 19 о задаче двух тел мы не учитывали параметров $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$, определяющих систему x, y, z , в которой задано положение станций наблюдений ИСЗ по отношению к системе x, y, z . Мы так поступали для того, чтобы не нарушать основных положений небесной механики.

Однако элементы орбиты, вычисленные таким образом, не являются действительно геоцентрическими, даже если все измерения были бы абсолютно точными. Мы получаем всего лишь приближенные значения $\tilde{\Omega}, \tilde{i}, \tilde{\omega}, \tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{t}_0$, которые назовем квази-геоцентрическими. Они будут отличаться от точных геоцентрических элементов на некоторые поправки:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Omega &= \Omega - \tilde{\Omega}; & \delta a &= a - \tilde{a} \\ \delta i &= i - \tilde{i}; & \delta e &= e - \tilde{e} \\ \delta\omega &= \omega - \tilde{\omega}; & \delta t_0 &= t_0 - \tilde{t}_0 \end{aligned} \right\}, \quad (359)$$

являющиеся аналитическими функциями параметров $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ и координат используемых станций наблюдений ИСЗ.

Это, следовательно, означает, что для точного решения орбитальных задач космической геодезии нужно знать геоцентрические положения станций наблюдений ИСЗ. А они, разумеется, и являются предметом вычисления в орбитальных геодезических задачах. Напомним, что определение геоцентрических координат точек земной поверхности—это главная проблема высшей геодезии в настоящее время. В нее входит проблема определения параметров соответствующей математической поверхности.

Получается как бы «замкнутый круг» в проблемах орбитальных задач космической геодезии и положение выглядит как будто безнадежным. Конечно, в известной мере выходом из этого положения является возможность определения элементов орбит с помощью ряда геодезических станций наблюдений ИСЗ, покрывающих как можно большую часть земной поверхности. Чем большая часть поверхности Земли будет покрыта сетью геодезических станций наблюдений ИСЗ, тем большая степень приближения вычисляемых элементов орбит ИСЗ к геоцентрическим можно ожидать.

Формулы поправок (359), о существовании которых впервые было указано в [27], здесь мы выводить не будем, так как объем рассуждений при этом значительно бы увеличился. Сошлемся на работы [28], [29], а здесь приведем только результаты вывода. Впрочем, этот вывод почти не требует особого математического

аппарата, он только очень длинный; по сути дела, в нем речь идет о полных дифференциалах функций, однозначно определяющих элементы орбиты, как это видно из обзора содержания раздела III, § 20. Все формулы имеют одинаковую структуру, поэтому можно их написать в общем виде

$$\delta_N = A_N \Delta x_0 + B_N \Delta y_0 + C_N \Delta z_0 + D_N \varepsilon_0 + E_N \psi_0 + F_N \omega_0, \quad (360)$$

где N обозначает соответствующий элемент ($\Omega, i, \omega, a, e, t_0$).

Выражения для функций $A_N, B_N, C_N, D_N, E_N, F_N$ можно найти в работах [28], [29], однако там применена совершенно другая символика. Здесь же мы существенно упростим задачу. Прежде всего предположим, что составляющие скорости ИСЗ v_x, v_y, v_z вообще не зависят от элементов $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$. Это соответствует только случаю, когда топоцентрические расстояния ИСЗ измеряются прямым способом (именно этот случай анализируется в работе [28]).

Если же топоцентрические расстояния непосредственно не измеряются, а вычисляются по синхронным измерениям направлений, то приходится определять поправки к вычисленным составляющим скорости

$$\delta v_x(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0); \quad \delta v_y(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0); \quad \delta v_z(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0), \quad (361)$$

как указано в [29]. Они являются функциями эйлеровых углов.

Дальнейшее упрощение заключается в том, чтобы выразить поправку δ_N . Вместо формул (360) напомним (при $\delta v_x=0, \delta v_y=0, \delta v_z=0$)

$$\delta_N = a_N \delta x + b_N \delta y + c_N \delta z, \quad (362)$$

где с учетом (59):

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \Delta x_0 + \varepsilon_0 Y_i - \psi_0 Z_i \\ \delta y &= \Delta y_0 - \omega_0 X_i + \varepsilon_0 Z_i \\ \delta z &= \Delta z_0 + \psi_0 X_i - \varepsilon_0 Y_i \end{aligned} \right\}. \quad (363)$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i обозначают референсные координаты геодезической станции M_i наблюдений ИСЗ, на которой выполнялись измерения.

После этого достаточно написать только первые полные дифференциалы переменных функций, определяющих элементы орбиты по известным величинам x, y, z .

На основании [28], поправки, определяемые по формулам (362), можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{\Omega} &= - \{ \delta x v_z \sin (\tilde{\Omega} - S) - \delta y v_z \cos (\tilde{\Omega} - S) + \\
 &\quad + \delta z [v_x \sin (\tilde{\Omega} - S) + v_y \cos (\tilde{\Omega} - S)] \} \frac{1}{\tilde{K} \sin \tilde{i}} \\
 \delta_i &= \{ \delta x [v_z \cos (\tilde{\Omega} - S) \cos \tilde{i} - v_y \sin \tilde{i}] + \delta y [v_x \sin \tilde{i} + \\
 &\quad v_z \sin (\tilde{\Omega} - S) \cos \tilde{i}] - \delta z [v_x \cos (\tilde{\Omega} - S) \cos \tilde{i} + \\
 &\quad + v_y \sin (\tilde{\Omega} - S) \cos \tilde{i}] \} \frac{1}{\tilde{K}} \\
 \delta_a &= \frac{2\tilde{a}^2}{\tilde{\Delta}^3} (\tilde{x}\delta x + \tilde{y}\delta y + \tilde{z}\delta z) \text{ и т. д.}
 \end{aligned} \right\} . \quad (364)$$

Символы $\tilde{\Omega}$, \tilde{i} , \tilde{a} , \tilde{K} , $\tilde{\Delta}$ обозначают здесь «квазигеоцентрические» элементы орбит и другие вспомогательные величины. Они вычисляются по классическим формулам, в совокупности приведенным в разделе III, § 20, по значениям \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} и v_x , v_y , v_z , т. е. без учета влияния параметров Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 , ε_0 , ψ_0 , ω_0 .

Глава 9

ОРБИТАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ (ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА, В КОТОРЫХ ТРЕБУЕТСЯ ЗНАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА)

§ 21. СУЩНОСТЬ РЕШЕНИЯ И ПЕРЕЧЕНЬ ГЛАВНЫХ ЗАДАЧ

Основное соотношение, в котором содержится суть решения, следует из рис. 34. Если \mathbf{r}_n — геоцентрический радиус-вектор спутника $S\rho_n$, \mathbf{r}_i — геоцентрический радиус станции наблюдений ИСЗ и \mathbf{r}_{in} — совпадающий с \mathbf{r}'_{in} топоцентрический радиус-вектор спутника, то имеет место следующее (векторное — *прим. ред.*) уравнение в геоцентрической системе x, y, z

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{in}. \quad (365)$$

Скалярные уравнения, эквивалентные уравнению (365), могут быть написаны в таком виде:

$$\left. \begin{aligned}
 x_i &= \Delta_n \cos \delta_n \cos T_n - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \\
 y_i &= -\Delta_n \cos \delta_n \sin T_n + \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \\
 z_i &= \Delta_n \sin \delta_n - \Delta'_{in} \sin \delta'_{in}
 \end{aligned} \right\} . \quad (366)$$

Если известны с достаточной точностью геоцентрические элементы орбиты спутника, наблюдавшегося в момент S_n гриничского звездного времени на станции M_i ¹, то можно по ним обычными методами небесной механики [26] вычислить геоцентрические экваториальные координаты T, δ и геоцентрическое расстояние Δ , а следовательно, и геоцентрические координаты станции наблюдений ИСЗ (см. формулы 209). При этом геодезические или астрономические координаты станции знать необязательно.

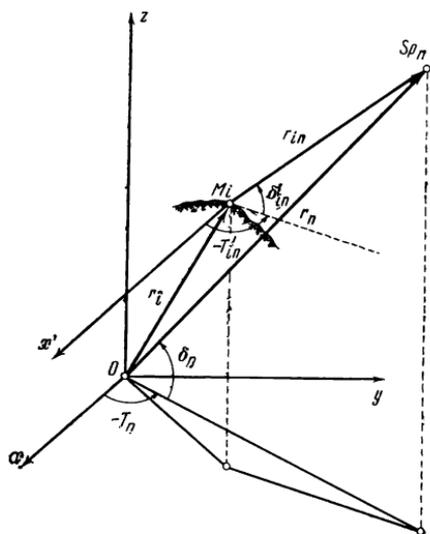


Рис. 34. Ускорение и его проекции

Этот принцип лежит в основе решения целого ряда орбитальных задач, из которых рассмотрим следующие:

1) определение положения центра данного референц-эллипсоида по отношению к центру масс Земли;

2) образование всемирной геодезической системы с началом в центре масс Земли;

3) получение геодезических координат и высот квазигеоида для станций наблюдений ИСЗ в определенной референцной системе;

4) вывод параметров общего земного эллипсоида.

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ЗЕМЛИ

Рассмотрим геодезическую станцию наблюдений ИСЗ $M_i(B_i, L_i, H_i)$ при тех условиях, которые указаны в § 17. Далее предположим, что по синхронным измерениям направлений на ИСЗ уже вычислены элементы ориентирования $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$ используемой геодезической системы, согласно § 16². Исходя из формул (209),

¹ Предполагается, что определяются величины T'_{in}, δ'_{in} и Δ'_{in} . Что касается Δ'_{in} то эту величину необязательно измерять прямым способом, она всегда может быть вычислена по синхронным измерениям T', δ' на двух станциях (основной M_i и вспомогательной M'_i), если известны их геодезические положения в произвольной (но, конечно, в одной и той же) системе.

² Углы $\epsilon_0, \psi_0, \omega_0$ здесь необязательно предполагать известными, как это сделано в [22]; тогда число неизвестных возрастает с 3 до 6. Однако точность вычисленного геоцентрического направления $\overline{OSp_n}$ существенно меньше точности измеренного топоцентрического направления $\overline{M_iSp_n}$, а поэтому можно с полным правом сделать вывод, что общая точность при таком способе решения снижается.

можно с учетом выражений (1), (9), (29), (59) и (136) написать

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= x_n - x'_{in} - X_i - \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \Delta y_0 &= y_n - y'_{in} - Y_i - \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \\ \Delta z_0 &= z_n - z'_{in} - Z_i - \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) \end{aligned} \right\}. \quad (367)$$

В соответствии с принятыми предположениями все величины, стоящие в правых частях уравнений (367), известны. Следовательно, уравнения (367) полностью решают задачу; единственными неизвестными в этих уравнениях являются координаты центра референц-эллипсоида. Конечно, предположение о знании действительно геоцентрических элементов орбиты является до известной степени проблематичным, как это следует из раздела IV, § 20.

Можно существенно ослабить влияние поправок $\delta\Omega$, δi , $\delta\omega$, δa , δe , δt_0 (см. раздел IV, § 20), если вести обработку не с «полными» геоцентрическими положениями (293), а только с плоскостями $O\Omega S_{pn}$ [30], [31]. В этом случае величины Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 должны удовлетворять условию [31]

$$[\Delta x_0 + \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \tilde{x}_n] \cos(\bar{n}, x) + [\Delta y_0 + \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \tilde{y}_n] \cos(\bar{n}, y) + [\Delta z_0 + \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \tilde{z}_n] \cos(\bar{n}, z) = 0, \quad (368)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{n}, x) &= \sin(\Omega - S) \sin i \\ \cos(\bar{n}, y) &= -\cos(\Omega - S) \sin i \\ \cos(\bar{n}, z) &= \cos i \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

суть направляющие косинусы нормали \bar{n} в системе (x, y, z) [см. рис. 33, формулы (303)].

В формулах (368) символы \tilde{x}_n , \tilde{y}_n , \tilde{z}_n обозначают квазигеоцентрические координаты (79); а $\delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$, $\delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$, $\delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$ — поправки (136) к координатам геодезической станции M_i наблюдений ИСЗ. Если будет использовано достаточно большое число надлежащим образом ориентированных плоскостей орбит, то можно предполагать, что из соответствующих систем уравнений типа (368) будут найдены элементы сдвига Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 . Однако эта проблема требует дополнительного анализа.

Практическое применение теории определения величин Δx_0 , Δy_0 , Δz_0 в несколько иной формулировке уже реализовано (по предварительным результатам) при анализе почти 50 000 наблюдений спутников для следующих шести референцных геодезических систем [39]:

1. Североамериканская система (эллипсоид Кларка 1866 г.

$a_r = 6\,378\,206$ м, $\alpha_r = 1 : 294,98$, исходный пункт «Миде Рэнц»: $B_0 = 39^\circ 13' 26''$, $L_0 = 261^\circ 27' 32''$).

2. Европейская система (эллипсоид Хейфорда, $a_r = 6\,378\,388$ м, $\alpha_r = 1 : 297$, исходный пункт «Потсдам»: $B_0 = 52^\circ 22' 55''$, $L_0 = 13^\circ 04' 02''$).

3. Австралийская система (эллипсоид с параметрами $a_r = 6\,378\,165$ м, $\alpha_r = 1 : 298,30$, исходный пункт «Маурица»: $B_0 = -32^\circ 51' 14''$, $L_0 = 138^\circ 30' 34''$).

4. Японская система (эллипсоид Бесселя, $a_r = 6\,377\,397$ м, $\alpha_r = 1 : 299,15$, исходный пункт «Токио»: $B_0 = 35^\circ 39' 16''$, $L_0 = 139^\circ 44' 41''$).

5. Аргентинская система (эллипсоид Хейфорда, исходный пункт с координатами: $B_0 = 35^\circ 58' 17''$, $L_0 = 297^\circ 49' 48''$).

6. Система Гавайских островов (эллипсоид Кларка 1866 г., исходный пункт «Диамонд Хэд»: $B_0 = 21^\circ 15' 46''$, $L_0 = 202^\circ 11' 08''$).

Задачу, рассмотренную в этом разделе, можно, конечно, сформулировать как определение положения центра масс Земли относительно центра референц-эллипсоида. Сущность теории от этого не изменится.

Ясно, что результаты ее решения можно использовать для трансформации несвязанных референцных геодезических систем (см. § 17). Если удалось способом, описанным выше, определить величины $\Delta x_0^I, \Delta y_0^I, \Delta z_0^I$ и $\Delta x_0^{II}, \Delta y_0^{II}, \Delta z_0^{II}$ в системах I и II, которые должны быть трансформированы, то можно вычислить разности $\Delta x_0^{I,II}, \Delta y_0^{I,II}, \Delta z_0^{I,II}$, на которых основана трансформация (207).

Впервые эта задача была теоретически решена в [25]. Преимуществом здесь является то, что для проведения трансформации не нужны синхронные наблюдения. Конечно, точность такого способа по сравнению со способом, приведенным в § 17, значительно ниже.

§ 23. СОЗДАНИЕ ВСЕМИРНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НАЧАЛОМ В ЦЕНТРЕ МАСС ЗЕМЛИ

В этой задаче будем предполагать, что предыдущая задача уже решена, т. е. что в нашем распоряжении имеются совокупности всех восьми параметров, определяющих геодезическую референционную систему (размеры и форму эллипсоида и его положение в теле Земли):

$$E_r^I(a_r^I, e_r^{2I}, \Delta x_0^I, \Delta y_0^I, \Delta z_0^I, \varepsilon_0^I, \psi_0^I, \omega_0^I), \dots \\ \dots, E_r^N(a_r^N, e_r^{2N}, \Delta x_0^N, \Delta y_0^N, \Delta z_0^N, \varepsilon_0^N, \psi_0^N, \omega_0^N),$$

которые следует трансформировать в геодезическую систему

$$E_r^0(a^0, e^{20}, \Delta x_0^0 = 0; \Delta y_0^0 = 0; \Delta z_0^0 = 0; \varepsilon_0^0 = 0; \psi_0^0 = 0; \omega_0^0 = 0)$$

с предварительно выбранными параметрами a^0, e^{20} .

Эта задача уже описана в [25] и, по сути дела, заключается в применении так называемых дифференциальных формул для метода проектирования [14], конечно, в общем виде при непараллельных осях. Произвольная точка (X^N, Y^N, Z^N) в N -ной референционной системе получает с учетом формул (136) поправки

$$\left. \begin{aligned} X - X^N &= \Delta x_0^N + \omega_0^N Y - \psi_0^N Z \\ Y - Y^N &= \Delta y_0^N - \omega_0^N X + \varepsilon_0^N Z \\ Z - Z^N &= \Delta z_0^N + \psi_0^N X - \varepsilon_0^N Y \end{aligned} \right\}. \quad (370)$$

Координаты X, Y, Z , которые получаются из формул (370), можно перевести в координаты B, L, H , применяя формулы (10), (15) и (27).

Аналогично формулам (370) можно написать выражения для $B - B^N, L - L^N$ и $H - H^N$. Конечно, нужно опять использовать дифференциальные формулы для метода проектирования [14], учитывая поправки (136), т. е. уравнения (205). Основой полученной таким образом геодезической системы еще не является общий земной эллипсоид, удачно представляющий тело Земли в целом. Теорию вывода такого эллипсоида орбитальными методами см. в § 25.

§ 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА ДЛЯ СТАНЦИЙ НАБЛЮДЕНИЙ СПУТНИКОВ В КОНКРЕТНОЙ РЕФЕРЕНЦИОННОЙ СИСТЕМЕ (ОРБИТАЛЬНЫЙ СПУТНИКОВЫЙ МЕТОД)

Имея опять в виду §§ 21 и 22, предположим, что известны все восемь параметров, определяющих референционную и геодезическую систему $E_r(a_r, e_r^2, \Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0)$, в которой по спутникам определяется положение пункта $M_i (B_i, L_i, H_i)$.

Предположим также, что для каждого измеренного положения спутника $S p_n$ имеются совокупности топоцентрических величин $T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}$ (об определении Δ' см. сноску на стр. 112). Референционные координаты пункта M_i с учетом формул (78), (29) и (136) можно выразить так:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= x_n - \Delta x_0 - \delta X_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \cos T'_{in} \\ Y_i &= y_n - \Delta y_0 - \delta Y_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) + \Delta'_{in} \cos \delta'_{in} \sin T'_{in} \\ Z_i &= z_n - \Delta z_0 - \delta Z_i(\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0) - \Delta'_{in} \sin \delta'_{in} \end{aligned} \right\}. \quad (371)$$

Искомые геодезические координаты B_i, L_i вычисляем по найденным величинам X_i, Y_i, Z_i по формулам (10) и (15), а высоту над эллипсоидом H_i — по формуле (27). Если предполагать известной нормальную высоту $H_{q,i}$ рассматриваемой станции M_i

наблюдений ИСЗ, то по формуле (28) можно рассчитать и относительную высоту $\zeta_{g, i}$ над E_r^1 .

После подстановки в формулы (371) значений параметров $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ получим референчные координаты в соответствующей референционной системе, конечно, пока относительно центра эллипсоида и направлений осей X, Y, Z . От параметров a_r, e_r^2 , определяющих размеры и форму эллипсоида, выражения (371) вообще не зависят.

Эти два параметра применяются только при вычислении B_i, L_i, H_i по формулам (10), (75), (27). После подстановки в эти уравнения значений параметров a_r, e_r^2 получаем геодезические величины B_i, L_i, H_i , относящиеся к референц-эллипсоиду соответствующей формы и размеров. Впервые эта задача решена в [20].

§ 25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОБЩЕГО ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Основу решения данной задачи мы найдем еще в классическом труде Эйлера [32]. В этой работе (в одном варианте решения) Эйлер определяет эксцентриситет меридианного эллипса по измерениям топоцентрических зенитных расстояний $\bar{z}_{i\zeta}$ Луны (рис. 35) в моменты ее прохождения через плоскость данного меридиана. Измерения должны проводиться на станции M_i , расположенной на этом меридиане.

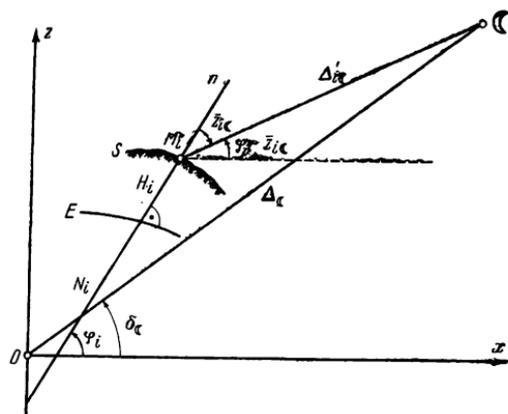


Рис. 35. Вывод параметров общего земного эллипсоида.

Географическая широта φ_i станции M_i (точнее говоря, ее геодезическая широта относительно нормали \bar{n} к определяемому меридианному эллипсу E с центром в центре масс Земли O^2), так же как и ее высота H_i над уровнем моря (точнее, вы-

сота над эллипсоидом E), предполагаются известными.

Определяемой величиной является единственное неизвестное e — эксцентриситет эллипса E . Для его вывода можно использовать очевидную зависимость (см. рис. 35) между координатами станций (x_i, z_i) и Луны (x_ζ, z_ζ) :

$$\left. \begin{aligned} x_\zeta &= x_i + \Delta'_i \zeta \cos(\varphi_i - \bar{z}_{i\zeta}) \\ z_\zeta &= z_i + \Delta'_i \zeta \sin(\varphi_i - \bar{z}_{i\zeta}) \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

¹ $\zeta_{g, i}$ — аномалия высоты (Прим. пер.).

² Влияние уклонений отвеса и высоты квазигеоида в этом выводе не учитывается.

(где $\Delta'_{i\zeta}$ обозначает неизвестное топоцентрическое расстояние Луны) или лучше

$$\operatorname{tg}(\varphi_i - \bar{z}'_{i\zeta}) = \frac{z_{\zeta} - z_i}{x_{\zeta} - x_i}. \quad (373)$$

Далее подставим в (373) известные выражения согласно формулам (9)

$$x_i = [N_i + H_i] \cos \varphi_i; \quad z_i = [N_i(1 - e^2) + H_i] \sin \varphi_i, \quad (374)$$

где $N_i = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}}$ (a — большая полуось E), и геоцентрические прямоугольные пространственные координаты Луны (372) выразим через геоцентрическое склонение δ_{ζ} и геоцентрическое расстояние Δ_{ζ} или через экваториальный горизонтальный параллакс π_{ζ} Луны ($\sin \pi_{\zeta} = \frac{a}{\Delta_{\zeta}}$):

$$\left. \begin{aligned} x_{\zeta} &= \Delta_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} = a \operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \\ \delta_{\zeta} &= \Delta_{\zeta} \sin \delta_{\zeta} = a \operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \sin \delta_{\zeta} \end{aligned} \right\}. \quad (375)$$

С учетом формул (374) и (375) получим

$$\operatorname{tg}(\varphi_i - \bar{z}'_{i\zeta}) = \frac{\operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \sin \delta_{\zeta} - [N_i(1 - e^2) + H_i] \sin \varphi_i / a}{\operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} - (N_i + H_i) \cos \varphi_i / a}. \quad (376)$$

При известных значениях лунного параллакса, геоцентрического склонения на момент прохождения через исследуемый меридиан и приближенном значении большой полуоси единственным неизвестным в уравнении (376) остается квадрат эксцентриситета e^2 . Для надежного его определения недостаточно, конечно, наблюдения одного прохождения Луны.

Эйлер предусматривал одновременные наблюдения таких прохождений на нескольких удаленных одна от другой станциях с известными астрономическими широтами, расположенных на исследуемом меридиане. При достаточно большом числе станций (>3) можно не считать известным геоцентрическое положение Луны (в единицах полуоси a). Из уравнений типа (376), составленных для каждой станции, можно исключить параллакс и геоцентрическое склонение Луны или же оставить эти величины (наравне с e^2) как неизвестные (определяемые).

Из уравнения (376) видно, что неточности в значениях φ и \bar{z} тем больше влияют на результат, чем меньше будет параллакс, т. е. чем дальше будет находиться наблюдаемое небесное тело. В этом смысле Эйлер сформулировал и заключение своей работы (см. гл. 2).

Метод Эйлера можно обобщить и на случай, когда на произвольных станциях M_i измеряют топоцентрические экваториальные координаты T'_{in}, δ'_{in} спутника Sp_n в известных его положениях x_n, y_n, z_n [см. формулы (1), (291)].

Заметим, что выведенный общий земной эллипсоид $E(\bar{a}, \bar{e}^2)$ будет расположен и ориентирован так, что его центр совместится с центром масс Земли, т. е. $\Delta x_0=0, \Delta y_0=0, \Delta z_0=0$; далее, что его малая ось совпадет со средним положением оси вращения Земли и плоскость основного меридиана будет параллельна плоскости гриничского астрономического меридиана (т. е. $\varepsilon_0=0, \psi_0=0, \omega_0=0$).

Затем можно выразить измеренные топоцентрические величины как функции параметров \bar{a}, \bar{e}^2 и геоцентрических координат спутника [см. формулы (1), (291)], например с использованием формул (130), так:

$$\left. \begin{aligned} & \text{tg } \delta'_{in} = \\ & = \frac{z_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i - \bar{N}_i \bar{e}^2) \sin \bar{B}_i}{\{[x_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \cos \bar{L}_i]^2 + [y_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \sin \bar{L}_i]^2\}^{1/2}} \\ & \text{tg } T'_{in} = - \frac{y_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \sin \bar{L}_i}{x_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \cos \bar{L}_i} \\ & \Delta'_{in} = \{[x_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \cos \bar{L}_i]^2 + [y_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i) \cos \bar{B}_i \sin \bar{L}_i]^2 + [z_n - (\bar{N}_i + \bar{H}_i - \bar{N}_i \bar{e}^2) \sin \bar{B}_i]^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \cdot (377)$$

В уравнениях (377), кроме параметров \bar{a}, \bar{e}^2 , неизвестными являются величины B_i, L_i, H_i . Предположим, что известны астрономические координаты φ_i, λ_i и нормальная высота H_{qi} станции M_i . Тогда эти неизвестные величины, относящиеся к выводимому эллипсоиду E , можно выразить при помощи соответствующих составляющих уклонения отвеса $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i$ и высоты квазигеоида $\bar{\zeta}_{qi}$ над эллипсоидом \bar{E} , т. е.

$$\bar{B}_i = \varphi_i - \bar{\xi}_i; \quad \bar{L}_i = \lambda_i - \bar{\eta}_i \sec \varphi_i; \quad \bar{H}_i = H_{qi} + \bar{\zeta}_{qi}. \quad (378)$$

Параметры \bar{a}, \bar{e}^2 можно теперь найти из решения системы уравнений (377), составленных для необходимого числа станций M_i под условием $[\bar{\zeta}_q^2] = \min$ (для вывода полуоси a), или

$$[\bar{\xi}^2] + [\bar{\eta}^2] = \min, \text{ или } [\bar{\xi}^2] + [\bar{\eta}^2] + [\bar{\zeta}_q^2] = \min. \quad (379)$$

Конечно, уравнения для $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}_q$, составленные по типу уравнений (377), содержат отдельные конкретные значения геоцентрических координат спутника x_n, y_n, z_n и топоцентрических величин $T'_{in}, \delta'_{in}, \Delta'_{in}$, аналогично упрощенному случаю метода Эйлера [32].

Поэтому было бы лучше сначала вычислить геоцентрические положения всех станций x_i, y_i, z_i по формулам (209), затем выразить величины $\bar{B}_i, \bar{L}_i, \bar{H}_i$ в зависимости от x_i, y_i, z_i по формулам (10), (15), (27) и, наконец, составить уравнения для ξ, η, ζ_q и условия минимума. Однако, как указано в работах [33], [34], в этом случае получаются уравнения, по своей форме похожие на классические уравнения, только исходная информация в них другая.

Совершенно иной способ составления уравнений для ζ_q изложен в работе [35], являющейся вообще первой работой, посвященной определению параметров эллипсоида из наблюдений спутников. Первое практическое решение этой задачи некоторым комбинированным способом описано в [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. Изотов А. А. К теории установления исходных геодезических дат, Тр. ЦНИИГАиК, вып. 96, М., 1953.
2. Изотов А. А. Общие формулы уклонения отвесной линии и азимута Лапласа. «Геодезия и картография», 1957, № 6.
3. Русси Е. Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica. Ann. di Mat., II., 14 (1886—1887), 193.
4. Лапинг К. А. Вычисление координат и высот точек по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на исходных пунктах. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, № 1.
5. Буткевич А. В. Переход от пространственных прямоугольных координат к геодезическим. «Геодезия и картография», 1963, № 10.
6. Лапинг К. А. О преобразовании прямоугольных пространственных координат в геодезические координаты. «Геодезия и картография», 1964, № 6.
7. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. On the Evaluation of Space Networks. Studia geoph. et geod., 10 (1966), 1.
8. Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 103, М., 1954.
9. Burša M. On the Theory of the Parallax of Near Cosmic Bodies. Studia geoph. et geod., 10 (1966), 117.
10. Veis G. The Deflection of the Vertical of Major Geodetic Datums and the Semimajor Axis of the Earth's Ellipsoid as Obtained from Satellite Observations. Space Research V, Proc. of the fifth Int. Space Sci. Symp., Florence, May 8—20, 1964, North-Holl, Publ. Co., Amsterdam, 1965.
11. Жонголович И. Д. Спутники Земли и геодезия. Астр. журн., т. 38, вып. 1, (1961), 115.
12. Жонголович И. Д. Спутники Земли и геодезия. Астр. журн., т. 41, вып. 1 (1964), 156.
13. Väisälä Y., Oterma L. Anwendung der astronomischen Triangulationsmethode. Veröff. d. Finn. Geod. Inst., N 53, Helsinki, 1960.
14. Изотов А. А. Форма и размеры Земли по современным данным. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 73, М., 1950.
15. Бурша М. К вопросу определения направления малой оси референц-эллипсоида и исходного геодезического меридиана по наблюдениям искусственных спутников Земли. Studia geoph. et geod., 9 (1965), 14.
16. Разумов О. С. О точности некоторых систем космической триангуляции. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», № 6, 1964.
17. Устинов Г. А. Уравнивание пространственной космической триангуляции. Набл. ИСЗ, № 2, Варшава, 1963.
18. Кленицкий Б. М., Устинов Г. А. Уравнивание пространственной космической триангуляции в системе прямоугольных геоцентрических координат. «Геодезия и картография», 1964, № 5.
19. Бурша М. К определению положения искусственного спутника Земли в геодезической системе координат. Studia geoph. et geod., 9 (1965), 313.
20. Бурша М. Определение геодезических координат и относительной высоты квазигеоида по наблюдениям ИСЗ. Studia geoph. et geod., 5 (1961), 312. Něm. překl.: Bestimmung der geodätischen Koordinaten und der relativen Quasigeoidhöhe aus der Beobachtung künstlicher Satelliten. Nachr. aus. d. Kart. u. Vermessungsw., Reihe III, N 17, Frankfurt a. M., 1965.
21. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 42, М., 1945.
22. Бурша М. Теория определения непараллельностей малой оси референц-эллипсоида, полярной оси инерции Земли и плоскостей исходного астрономического и геодезического меридианов по наблюдениям ИСЗ. Studia geoph. et geod., 6 (1962), 209. Něm. překl.: Theorie der Bestimmung der Nichtparallelität der Nebenachse des Referenzellipsoides mit der Rotationsachse der Erde und der Ebene des

astronomischen und geodätischen Ausgangsmeridians aus Beobachtungen künstlicher Satelliten. Frankfurt a. M., 1965, viz (20).

23. Поповици С. Orientarea elipsoidului terestru folosind satelitti artificiali. Rev. de geodezie si organizarea teritorului, 9 (1965), N 4.

24. Burša M. Au programme géodésique des observations simultanées des satellites artificiels. Réseau géodésique européen par observation de Satellites. Symp. de Paris 14—16. Décembre 1964, Paříž, 1965.

25. Burša M. Theorie der Lösung der grundlegenden geodätischen Aufgabe und der Bildung eines einheitlichen geodätischen Weltsystems auf Grund der Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten. Studia geoph. et geod., 5 (1961), 264.

26. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. I. М.—Л., Гос. изд. тех.-теор. лит., 1941.

27. Burša M. On the Use of Artificial Satellites for Geodesy. Second Int. Symp. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Athens, April 27—May 1, 1965.

28. Бурша М. К определению орбиты спутника по положению и скорости. Studia geoph. et geod., 10 (1966), 401.

29. Burša M. On the Determination of Orbital Elements of Satellites Using Quasisimultaneous Observations of Directions. Studia geoph. et geod., 11 (1967).

30. Поповици О. Some Geodetic Uses of Non-Simultaneous Observations of Satellites. Studii si cercetari de astronomie, 9 (1964), 201.

31. Бурша М. Теория определения положения центра референц-эллипсоида по наблюдениям, искусственных спутников Земли. Studia geoph. et geod., 9 (1965), 225.

32. Euler I. A. Versuch die Figur der Erde durch Beobachtungen des Mondes zu bestimmen. Abh. d. Churfürst. baier. Ak. d. Wiss., Bd. 5, (1768), 198.

33. Изотов А. А. К теории определения фигуры и размеров Земли по наблюдениям искусственных спутников Земли. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, № 3.

34. Изотов А. А. On the Determination of the Shape and Dimensions of the Earth from Observations of Artificial Satellites. Studia geoph. et geod., 9 (1965), 201.

35. Бурша М. Теория определения размеров общего земного эллипсоида и исходных геодезических дат по наблюдениям ИСЗ. Studia geoph. et geod., 5 (1961), 312. Nĕm. překl.: Theorie der Bestimmung der Dimensionen des mittleren Erdellipsoids u. der geod. Ausgangsdaten aus Beob. künstlicher Erdsatelliten. Nachr. aus d. Kart.-u. Vermessungsw., Reihe III, N. 17, Frankfurt a. M., 1965. Angl. překl.: Determining Dimensions of a Reference Ellipsoid and Geodetic Datum on the Basis of Artificial Satellite Observation. Office of Technical Services, Dpt. of Commerce, Washington 25, D. C., 1963.

36. Phillips J. O.: Coast and Geodetic Survey Satellite Triangulation Program. Réseau géodésique européen par observation de Satellites. Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964. Paris, 1965.

37. Кутузов И. А. Preliminary Results of Processing of Synchronous Photographic Observations of the Satellite «ECHO 1». Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

38. Roman N. G.: Le programme des satellites géodésiques des Etats — Unis. Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

39. Veis G.: The Deflection of the Vertical of Major Geodetic Datums and the Semimajor Axis of the Earth's Ellipsoid as Obtained from Satellite Observations. Space Research V, Proc. of the fifth Int. Space Sci. Symp., Florence, May 8—20, 1964, North-Holl, Publ. Co., Amsterdam, 1965 (Preprint Aug. 1964).

40. Veis G.: The Determination of Absolute Directions in Space with Artificial Satellites. Bull. Géod., N. 72, 1964.

41. Aardom L., Girnius A., Veis G. Determination of the Absolute Space Directions between Baker-Nunn Camera Stations. Smith. Inst., Spec. Rep. 186, Sept. 6, 1965.

42. Hirose H. Research on the Geodetic Uses of Artificial Satellites. J. of the Geod. Soc. of Japan, 8 (1962), 102.

43. Richards J. K. Accuracies Obtained on the First 900 Mile Triangle in the Coast and Geodetic Surveys Satellite Triangulation Program. Réseau géodésique

européen par observation de Satellites. Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

44. Gilchrist C. F. Results from Satellite (ANNA) Geodesy Experiments. Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

45. Dufour H. M. La jonction géodesique France—Afrique du Nord par photographies synchrones du satellite «ÉCHO 1». Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

46. Jenkins W. H. SECOR for Satellite Geodesy. Symp. de Paris 14—16 Décembre 1964, Paris, 1965.

47. COSPAR Information Bull. N. 25, Oct. 1965. Spec. issue.

48. Rinner K. Geometrie mit Raumstrecken. ZfV, 83, (1958), 3.

49. Veis G. Le réseau de tracking de, l'observatoire de Smithsonian et les résultats géodésiques. Symp. de Paris, viz (36).

50. Newton R. R. Mesures de la fréquence Doppler dans les transmissions satellite et leurs emplois en géodésie géométrique. Symp. de Paris, viz (36).

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДЕТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

51. Buchar E. Geodetická astronomie I., SNTL, Praha, 1963.

52. Жонголович И. Д., Амелин В. М., Сабанина Т. Б. Об определении эфемериды ИСЗ. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1959, № 5.

53. Жонголович И. Д. Системы координат, употребляемые при изучении движения ИСЗ. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1962, № 31.

54. Жонголович И. Д. Определение положения ИСЗ по синхронным наблюдениям его с 2-х известных пунктов на поверхности Земли. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1966, № 46.

55. Жонголович И. Д. Определение положения ИСЗ по синхронным наблюдениям направлений на него с известных пунктов поверхности Земли. Бюлл. ИТА, 1966, № 8.

56. Veis G. Geodetic Uses of Artificial Satellites. Smithsonian Contribution to Astrophysics, vol. 3, 1960, N 9.

57. Veis G. A Flashing Satellite for Geodetic Studies. Smith. Astr. Obs., Rep. N 19, 1958.

58. Veis G. Geodetic Applications of Observations of the Moon, Artificial Satellites, and Rockets. Thesis Ohio State Univ., 1958.

59. Veis G., Moore DOI—Jet Prop. Lab. Seminar Proceedings Tracking Program in Orbit Determination, 1960.

60. Veis G. Catalog of Precisely Reduced Observations N.P.—I. Smith. Astroph. Obs., Spec. Rep. N 82, 1961.

61. Veis G. The Positions of the Baker—Nunn Camera Stations. Smith Astroph. Obs., Spec. Rep. N 59, 1961.

62. Veis G., Whipple F. L. Experience in Precision Optical Tracking of Satellite for Geodesy. North-Holl, Publ. Co., Amsterdam, 1961.

63. Лонин Г. В. Съёмка небесных тел, фотограмметрия и дешифрирование снимков при космических исследованиях. Спец. вопросы фотограмметрии, М.—Л., изд-во «Наука», 1964.

64. Поттер Х. И. К вопросу об использовании наблюдений Луны в геодезических целях. Астр. журн., т. 35, вып. 4 (1958).

65. Разумов О. С. О возможности геодезического использования стационарного ИСЗ. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъёмка», 1963, № 6.

66. Фираго Б. А. Визуально-фотографические наблюдения слабых ИСЗ с помощью стандартного оборудования станций фотографического наблюдения ИСЗ. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1960, № 10.

67. Фираго Б. А. Методика астрономической обработки синхронных наблюдений ИСЗ. Наблюдения ИСЗ, № 2, 1963, Варшава, 1963.

68. Шеголев Д. Е. Геометрический способ обработки результатов наблюдений ИСЗ для целей космической триангуляции. Наблюдения ИСЗ, № 1, 1957—1962, М., 1962.

69. Юревич В. А. Определение дисторсии объектива камеры МК-75. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1962, № 29.

70. Anderle R. J. Doppler Observations of the «ANNA 1B» Satellite. Trans. Amer. Geophys. Union, 1965, 2.
71. Army's BC-4 Camera System Photographs «ANNA». Army Res. and Developm., 1963, 4, N 1.
72. Army Map Service. Flare Method of Determining Azimuth Between Two Non—intervisible Distant Points. Army Map Service, Techn. Rep., 10, 1952.
73. Veis G. Precise Aspects of Terrestrial and Geostical Reference Frames. Smith. Astroph. Obs., Spec. Rep. N 123, 1962.
74. Veis G. The Determination of Directions in Space. Smith. Astroph. Obs., Spec. Rep. N 133, 1963.
75. Veis G. The Precision Optical Satellite Tracking Net of the Smithsonian Astrophysical Observatory. The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Proc., Amsterdam, 1963.
76. Veis G. Optical Tracking of Artificial Satellites. Space Science Reviews, II, 1963, 250—296.
77. Veis G. On the Optimum Use of Satellites for Geodesy. Bull. Géod., 1964, N 74.
78. Амелин В. М. Методы использования Луны для геодезических целей. Бюлл. ИТА, 1958, т. 7, № 1.
79. Амелин В. М. Опыт обработки синхронных наблюдений ИСЗ. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1962, № 39.
80. Амелин В. М. Возможность установления связи между различными триангуляционными системами по наблюдениям ИСЗ. Бюлл. ст. оптич. набл. ИСЗ, 1962, № 31.
81. Батраков Ю. В. Определение взаимного положения наблюдательных станций при помощи ИСЗ. Астр. журн., 42 (1965), вып. 1.
82. Буткевич А. В. Современные средства и методы геодезических соединений материков. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», 1960, № 1.
83. Буткевич А. В. Об использовании наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) для некоторых целей высшей геодезии. Тр. НИИГАНК, т. XVII, 1963.
84. Воскресенский Л. Л. и др. Некоторые вопросы привязки момента фотографирования к времени при определении координат ИСЗ по методу опорных звезд. Изв. вузов, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, № 1.
85. Arnold K. Laplace—Azimute zwischen weit entfernten Stationen aus Satellitenbeobachtungen. Veröff. Geod. Inst. Potsdam, 1963, N 23.
86. Arnold K., Schoeps D. Zur Genauigkeit von Verfahren der Satellitengeodäsie. Gerlands Beitr. zur Geoph., 1964, N 4.
87. Arnold K., Schoeps D. Die Bestimmung des Azimutes Potsdam—Bukarest aus Beobachtungen des Satelliten «Echo 1.» Veröff. Geod. Inst. Potsdam, 1965, N 29.
88. Arnold K. Zur Bestimmung geodätischen Azimute aus Simultanbeobachtungen von Satelliten. Gerlands Beitr. Geophys., 1965, N 6.
89. Atkinson R. Surveying by Astrometry of Rocket Flashes. AIGY, 12, pp. 201—206, 1960.
90. Baldini A. A. Connection of Base Lines Using Star Field Photography and Developed Independently of Ellipsoidal Parameters. Prs. XIII th Gen. Ass. IUGG, Berkeley, Calif., 1963.
91. Baldini A. A. Formulas for Computing Atmospheric Refraction for Objects Inside or Outside the Atmosphere. GIMRADA Research Note, 8, 1963.
92. Beller W. S. Benchmarks in Space Can Aid Mapping. Missiles and Rockets 16, N 15, 1965.
93. Berroth A. Über kosmische Triangulationsmethode zur praktischen Anwendung in der Geodäsie. ZfV., 1949, 2.
94. Berroth A., Hofmann W. Kosmische Geodäsie. Vlg. G. Braun, Karlsruhe, 1960. Русский перевод. Изд. иностр. лит., М., 1963.
95. Bournazel J. et Vassy E. Etude experimentale de l'effet doppler des satellites artificiels. Space Res., Proceedings, Amsterdam, 1960.
96. Bowen P. J., and Newton A. C. The Development of a Photoelectric Satellite Tracker. Space Res. II, Proceedings, Amsterdam, 1961.

97. Brown D. C. A treatment of Analytical Photogrammetry. RCA Data Reduction Techn. Rep., 39, 1957.
98. Brown D. C. Photogrammetric Flare Triangulation. RCA, 46, 1958.
99. Brown D. C. A Solution of the General Problem of Multiple Station Analytical Stereotriangulation. RCA, 43 (1958).
100. Brown D. C. Results in Geodetic Photogrammetry I. RCA, 54, 1959.
101. Brown D. C. On the Potentialities of Geodetic Photogrammetry. Symposium: Geodesy in the Space Age, The Ohio State University, Columbus, Ohio, Feb. 6—8, 1961, IGPC, 15.
102. Brown D. C. Results in Geodetic Photogrammetry III. Photogrammetric Determination of Azimuth of Hiran Lies. Instrument Corp. of Florida, Scientific Rep., AFCRL—62—210, 1961.
103. Brown D. C. Notes on the Reduction of Stellar Plates for Determination of Directions of Flashing—light Beacons. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Proceedings, Amsterdam, 1963.
104. Carru H., Gendrin R. et Reyssat M. Effet doppler et dérive de fréquence des satellites 1958 β 2 et 1959 δ . Space Res., Proceedings, Amsterdam, 1960.
105. Case J. B. Atmospheric Refraction for Satellite Photography. Autometric Corp. Rep., 56—8, B—1, 1962.
106. Cichowicz L. Wzory trygonometryczne astronomii sferycznej satelitarnej. Geod. i kart., 1965, N 1.
107. Cichowicz L. Triangulacja satelitarna. Przegl. Geod. 1963, N 10.
108. Cichowicz L. Problemy triangulacji satelitarnej Europy. Biul. polsk. obserw. sztucz. satelitow, 1965, N 13.
109. Cichowicz L. Satellite Spherical Astronomy. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, N 129, 19, 1966.
110. Clark C. Arms Control and Space Weapons. Advances in the Astronomical Sciences, vol. 9, fourth Western Meeting (1—3 Aug., San Francisco, 1961).
111. Cohen C. J. Distorsion of Geodetic Signals from Satellite Observations. Use Artif. Satell. Geod., Amsterdam, 1963.
112. Cook A. H. Geodetic Uses of Artificial Satellites. The Chartered Surveyor 1962, N 12, 1963, N 6.
113. Corpacius A. J. Astrogeodetic Flare Triangulation and Missile Space Location with Ballistic Camera Observations. RCA Syst. Anal. Techn. Mem., 21, 1961, Patrick AFB, Florida, téz JGR, 67, 9, 1962.
114. Corpacius A. J. The Stellar Triangulation with Photographic Observations. Space Sci. Revs, 1965, 4, N 2.
115. Deker H. Die geometrische Satellitengeodäsie, ein modernes geodätisches Hilfsmittel. Veröff. Dtsch. geod. Kommiss. Bayer. Akad. Wiss., 1964, B. N., 120.
116. Deker H. Photogrammetrische Gesichtspunkte der Satelliten — geodäsie. Bildmess. u. Luftbildwes., 1964, N 3.
117. Deck M. Détermination de la position d'objets lumineux mobiles par photographie sur fond d'étoiles. Bull. Soc. franc. Photogramm., 1964, N 15—16.
118. Dufour H. M. Choix de formules de la réfraction atmosphérique pour les observations par chambres ballistiques. Bull. géod. 1964, N 73.
119. Eichhorn H. K. Flash Triangulation Without Timing. JGR, 67, 9, 1962.
120. Eichhorn H. K., Williams C. A. Investigations on Photographic Astrometric Technique. Van Vleck Obs., Middletown, Conn., Rep. on Contract AF 19 (604—)—7330, 1962.
121. Eichhorn H. K. The Relationship Between Standard Coordinates of Stars and the Measured Coordinates of Their Images. Applied Optics, January, 1963.
122. Freiesleben H. C. Navigational Aid from Other Satellites. J. Inst. Navig., 1962, 15, N 2.
123. Geodetic Studies with the Anna I B Satellite. Trans. Amer. Geophys. Union, 1963, 44, N 1.
124. Geodetic Satellites. Aircraft and Missiles, 1960, 3, N 7, 77.
125. Gobetz F. W. Satellite Networks for Global Coverage. Amer. Astronaut. Soc., 1961, N 78.

126. Good W. E., Berbert J. H. and Oosterhout J. D. Reduction of the Minitrack Astrographic Plates. *Photogr. Sci. and Eng.* Nov. Dec. 1962.
127. Gordon D. G. Satellite—star Occultations for Geodetic Determinations. *Use Artif. Satel. Geod.*, Amsterdam, N. Holl. Publ. Co., 1963.
128. Guier W. H. The Tracking of Satellites by Doppler Methods. *Space Res.*, Proceedings, Amsterdam, 1960.
129. Guier W. H. Recent Progress in Satellite Geodesy, Conf. Pros. 6th Winter Convent Milit. Electron. Vol. 4, Inst. Electr. and Electron. Engrs., 1965; 111B/41—111B/64.
130. Herrick S., Baker R. M. L. JR., Hilton C. G. Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation. Proceedings, VIII int. Astronoutical Congr., Barcelona, 1957.
131. Henriksen S. W. The Use of Artificial Satellites in Datum Connection. U. S. Army Map Service.
132. Henriksen S. W. Camera Design for Photography of Artificial Satellites. *Photogr. Sci., and Engng.* 1962, N 6.
133. Henriksen S. W. Electronic Tracking of Artificial Satellites. *Use Artif. Satel. Geod.*, Amsterdam, 1963.
134. Henriksen S. W. Mathematical Photogrammetry. *Photogramm. Engng.* 1965, 31, N 4.
135. Hewitt J. A Camera for Recording Satellite Positions with High Accuracy. *Space Res.*, Proceedings, Amsterdam, 1960.
136. Hirose H. Note on Simultaneous Observations of Artificial Satellites for Geodetic Purposes. *Space Res.* II, Proceedings, Amsterdam, 1961.
137. Hirose H. A Simple Method of Triangulation with the Use of Artificial Satellites. The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Proceedings, Amsterdam, 1963.
138. Honkasalo T. Stellartriangulation. *Veröff. Dtsch. Geod. Kommiss. Bayer. Akad. Wiss.*, 1961, A, N 38.
139. Hoffmann W. Erdnahe Satelliten im Dienste der Geodäsie—Ergebnisse und Möglichkeiten. *Zf. V.* 1963, N 2.
140. Hynek J. A. On the Accuracy of Satellite Tracking. Publ. of the Institute of Geodesy, *Photogr. and Cartography* N 7, The Ohio State University; Symposium Size and Shape of the Earth. Columbus, Ohio, 1957, 59.
141. Hynek J. A. On the Effects of Image Motion on the Accuracy of Measurement of a Flashing Satellite. *Smithsonian Contr. Astrophys.* 1963, 6.
142. Jefferys W. H. On Computational Technique for Photographic Astrometry with Overlapping Plates. *AJ*, 68, 2, 1963.
143. Jones B. L. Photogrammetric Refraction Angle: Satellite Viewed from Earth. *J. Geophys. Res.* 1961, 66, N 4.
144. Johns R. K. C. Geodetic Applications of Artificial Satellites. Lab. for Electronics, Boston, 1958.
145. Kahler H. R., Williams O. W. A long Azimuth Technique Compliments Hiran and Rockets—Flash Triangulation Technique and their Anticipated Effect Upon Geodesy. Press. at the XII. General Assembly, IUGG, Helsinki, 1960.
146. Kaula W. M., Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites. Nasa—TN, D—572, also GJ, 5, 2, 1961.
147. Kaula W. M. The Interaction Between Geodesy And the Space Sciences. Symposium: Geodesy in the Space Age, The Ohio State University, Columbus, Ohio, Feb. 6—8, 1961, IGPC, 15.
148. Kaula W. M. A Geoid and World Geodetic System Based on a Combination of Gravimetric, Astrogeodetic and Satellite Data. *JGR*, 66, 6, 1961.
149. Kaula W. M. Geodetic Studies Using Satellites. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1962, 43, N 4.
150. Kaula W. M. Comparison and Combination of Satellite with Other Results for Geodetic Parameters. The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Proceedings, Amsterdam, 1963.
151. Keats E. S. The Relative Position Technique for Determination of Geodetic Location by Use Satellites. XVth International Astronoutical Congress, Warszawa, 1964.

152. O'Keefe J. A. *Satellite Methods in Geodesy. Surveying and Mapping*, Washington, 1958, N 4.
153. Kelley R. A. *Applications of Photogrammetric Flash Triangulation to Global Surveys*. *Photogramm. Engng.* 1960, 26, N 4.
154. Kukkamäki T. J. *Stellar Triangulation*. *Bull. géod.*, N 54, 1959.
155. Курузов И. А. *Preliminary Reduction of Synchronous Photographic Observations of Satellite «Echo 1»*. *Space Research V, Proceedings, Amsterdam*, 1965.
156. Labrecque J. J., Tanner R. W. *Satellite Observations at the Dominion Observatory*. *J. Roy. Astron. Soc. Canada*, 1962, 56, N 1.
157. Lassoovsky K. *On the Accuracy Measurements Made Upon Films Photographed by Baker Nunn Satellite Tracking Cameras*. *Astr. J.* 1961, 66, N 7, 289. *Spec. Rep. Smith. Inst. Astr. Obs.* 1961, N 74.
158. Ledersteger K. *Die geodätische Probleme der künstlichen Satelliten*. *Schweiz. Z. Verm.*, 1962, 60, N 3, 5.
159. Markowitz W. *Use in Geodesy of the Results of Lunar Observations and Eventual Observations of Artificial Satellites*. *Bull. géod.* 1958, N 49.
160. Markowitz W. *Geocentric Coordinates from Lunar and Satellite Observations*. *Bull. géod.*, 1958, N 49.
161. Markowitz W. *Accurate Timing of Artificial Satellite Observations on a World Wide Scale*. *Symp. Geodesy in the Space Age, The Ohio State University*, Feb. 6—8, 1961.
162. Markowitz W. *Timing of Artificial Satellite Observations for Geodetic Purposes*. *Symp. Washington*, April 26—28, 1962.
163. Маннаус А. *Photographic Tracking of Artificial Satellites with a K-37 Aerial Camera*. *Mem. Soc. Astron. Ital.* 1961, 32, N 2—3.
164. Mancini A., Sheldon L. B., Kahler H. *Long Line Azimuth Solution*. *Journal of Geophysical Research*, 67, 9, 1962.
165. Масевич А. Г., Лозинский А. М. *Photographic Observations of Artificial Earth Satellites*. *Vistas astronomy*. Vol. 4, Oxford—London, New York—Paris Pergamon Press, 1961.
166. Масевич А. Г. *Optical Tracking of Satellites*. *Space Res. II, Proceedings, Amsterdam*, 1961.
167. Масевич А. Г. *Optical Observation Techniques. The Use of Artificial Satellites for Geodesy*. *Proceedings, Amsterdam*, 1963.
168. Маско S. *Satellite Tracking*. *John F. Rider, New York*, 1962.
169. *Missiles, Satellites and Survey, Accuracy*. *Canad. Surveyor* 1962, 16, N 2, Suppl., 1—2.
170. *Missile—Tracking Camera for C. and G. S. Surveying and Mapping*, 1962, N 1.
171. Mueller I. I. *Introduction to Satellite Geodesy*. *Frederic Ungar Publ. Co., New York* 1964. Русский перевод, изд-во «Мир», М., 1967.
172. Müller P. *Sur les limites de la precision des observations photographiques de satellites artificiels*. *C. r. Acad. sci.*, 1963, 257, N 18.
173. Newton R. R. *Geodetic Measurements by Analysis of the Doppler Frequency Received from a Satellite*. *Space Res., Proceedings, Amsterdam*, 1960.
174. Nita K. *Généralisation du problème concernant la réalisation d'un vaisseau orbital stationnaire au-dessus de n'importe quel point du globe terrestre*. 14 Congr. internat. astronaut., 1963, Paris.
175. Oterma L. *Computing the Refraction for the Väisälä Astronomical Method of Triangulation*. *Astr. Opt. Inst. Univ. Turku, Informo*, 20, Turku, Finland.
176. Plotkin H. H., Johnson T. S. *Reflection of Ruby Laser Radiation from Explorer XXII*. *Proc. Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1965, 53, N 3.
177. Поповици С. *Determinarea coordonatelor centrului de mäsă si Pământului*. *Rev. geod. si organiz. terit.*, 1964, 8, N 2.
178. Поповици С. *Some Geodetic Uses of Non—Simultaneous Observations of Satellites*. *Space Res., V, Proceedings, Amsterdam*, 1965.
179. Reid J. H. *The SECOR Approach to Coordinate Determination for Ships and Aircraft, Navigation*, 1964—65, N 4.

180. Reiss M. H. Guidance and Control Considerations for Guided Interceptor Vehicles in Space. Vol. 9, fourth Western Meeting 1—3 Aug., San-Francisco, 1961.

181. Richards D. A. Optical Tracking of Satellites Using a Rotating Camera. Space Res. Vol. 2, N. Hol. Publ. Co., Amsterdam, 1961.

182. Rosenberg P. Earth Satellite Photogrammetry. Photogrammetric Eng., 24, 353—360.

183. Rosenfield G. H. Geodetic Position Determination by Stellar Camera. Photogramm. Engng, 1965, 31, N 1.

184. Satellite Triangulation in the U. K. Space Res. U. K. Repts, 1964—65, London, Roy, Soc., 1966.

185. Schmid H. H. An Integrated Ballistic Camera System. Ballistic Research Laboratories. Aberdeen Proving Ground, Md., 1959.

186. Schmid H. H. A General Analytical Solution to the Problem of Photogrammetry. Ballistic Res. Lab. Rep., 1065, 1959.

187. Schmid H. H. The Influence of Atmospheric Refraction on Directions Measured to and from a Satellite. GIMRADA Res. Rep., 10, 1963.

188. Schmid H. H. Photogrammetry Applied to Three—dimensional Geodesy. Bull. Soc. Franc. Photogram., 1964, N 14.

189. Schmid H. H. Precision and Accuracy Considerations for the Execution of Geometric Satellite Triangulation. Trans. Amer. Geophys. Union, 1965, 46, N 1.

190. Schmid E. Transformation of Rectangular Space Coordinates. U. S. Dept. Commerce Coast and Geodet. Survey. Techn. Bull. 1960 (1961), N 15.

191. Snayder G. L., Hurst S. R. Satellite Laser Ranging Experiment Proc. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1965, 53, N 3.

192. Sodano E. M. Determination of Laplace Azimuth Between Non—Intervisible Distant Stations by Parachuted Flares and Light Crossings. Bull. géod., 49, 1958.

193. Sodano E. M. Optical Electronic Azimuth and Distance for Non—Intervisible Distant Stations. Pres. XIIIth Gen. Assembly of IUGG, Berkeley, Calif. 1963.

194. Stoddard L. G. Prediction of Eclipses of Earth Satellites, Advances in Astronautical Sciences. Vol. 9, fourth Western Meeting 1—3 Aug. 1961, San-Francisco.

195. Szabo B. The Significance of the World Geodetic Datum to Long—Range Navigation and Guidance Systems. Publ. of the Inst. of Geodesy Photogram. and Cartogr., N 7, The Ohio State University, 1957.

196. Tardi P. Satellites artificiels et géodésie. *Astronomie*, 1963, 77, juin, 213—227.

197. Татевян С. К. The Comparison of Different Theoretical Reduction Methods of Simultaneous Satellite Observations. Space Res. V Proceedings, Amsterdam, 1965.

198. Tavenner M. S., Swenson P. B. Operational Concepts of Photogrammetric Determination of Azimuth over Intermediate Distances. *J. of Geophys. Res.*, 67, 9, 1962.

199. Tavenner M. S., Swenson P. B. Photogrammetric Determination of Azimuth. *J. Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs*, 1963, 89, N 3.

200. Taylor E. A. Optical Tracking System for Space Geodesy. *JGR*, 67, 9, 1962.

201. Thomas P. D. Use of Near Earth Satellite Orbits for Geodetic Information. U. S. Coast and Geodet. Survey, Techn. Bull. 11, 1960.

202. Tsubokawa J. A Precise Satellite Tracking Camera with a Photoelectric Timing Device. Space Res. V. Proceedings, Amsterdam, 1965.

203. Väisälä Y. An Astronomical Method of Triangulation. *Sitz. Finn. Ak. Wiss.*, 99—107, 1946.

204. Williams O. W. The Role of Rocket—Flash Triangulation in World Geodesy. *Sympos. Geod. in the Space Age*, Columbus, Ohio, 1961.

205. Williams O. W. The Impact of Rocket—Flash Triangulation Upon Geodesy. *Ann. Ac. Scient. Fennicae. Series, A, III, Rev. cartogr.* 1962, 11.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Предисловие редактора перевода	5
Список обозначений.	7
Часть I. Геометрическая космическая геодезия	9
Глава 1. Предмет космической геодезии	9
Глава 2. Краткий исторический очерк	10
Глава 3. Разделение курса космической геодезии	13
Глава 4. Системы координат, используемые для определения положения тел в близком космическом пространстве	14
§ 1. Геоцентрические системы	14
§ 2. Референзные (геодезические) системы	16
§ 3. Топоцентрические системы	22
Глава 5. Преобразование координат, применяемых при решении задач космической геодезии	27
§ 4. Преобразование референчных координат в геоцентрические и наоборот	27
I. Прямоугольные пространственные системы	27
II. Экваториальные сферические системы	31
§ 5. Преобразование топоцентрических координат в геоцентрические и наоборот. Теория параллакса близких космических тел	34
§ 6. Преобразование топоцентрических координат в референчные и наоборот	38
Глава 6. Задачи космической геодезии преимущественно геометрического характера	41
§ 7. Классификация задач	41
Глава 7. Геометрические задачи космической геодезии, в которых не требуется знание элементов орбиты ИСЗ (задачи космической геодезии об относительном положении)	42
§ 8. Сущность решения и перечисление задач	42
§ 9. Основное уравнение в задачах космической геодезии об относительном положении	43
§ 10. Определение направлений линий, соединяющих станции наблюдений ИСЗ, по синхронным измерениям топоцентрических экваториальных координат спутника	45
I. Сущность решения	45
II. Определение направляющих косинусов (параметров)	45
III. Определение топоцентрических экваториальных координат, азимута и зенитного расстояния	48
§ 11. Определение разностей $(\bar{\alpha}_{ik} - \bar{A}_{ik})$ и $(\bar{z}_{ik} - \bar{Z}_{ik})$	50
§ 12. Основные элементы при уравнивании синхронных измерений направлений на ИСЗ и определение уравненного направления линии, соединяющей станции наблюдений ИСЗ	58

§ 13. Принцип обработки сети космической триангуляции. Определение относительных положений (разностей координат) станций наблюдений ИСЗ	61
§ 14. Определение положения спутника в референцной (геодезической) системе координат	64
I. Решение задачи при измерении направлений	64
1. Уравнивание по способу условных измерений	64
2. Уравнивание по способу посредственных измерений	66
II. Решение задачи при комбинированных измерениях направлений и расстояний и при измерении только расстояний	68
III. Применение изложенных способов для создания сети космической триангуляции	69
§ 15. Определение геодезических координат и высот квазигеоида для станций наблюдений ИСЗ по синхронным измерениям положений спутника	70
§ 16. Определение направления оси вращения геодезического референц-эллипсоида и направления нормали к плоскости основного геодезического меридиана	72
§ 17. Соединение отдельных, геодезически не связанных референцных систем	74
Глава 8. Основы определения элементов орбит близких спутников	79
§ 18. Законы Кеплера и их динамические следствия	80
I. Динамические следствия 1-го закона Кеплера	80
II. Динамические следствия 2-го закона Кеплера	83
III. Динамические следствия 3-го закона Кеплера	86
IV. Закон тяготения Ньютона	86
§ 19. Задача двух тел	87
I. Уравнения движения и уравнение орбиты в ее плоскости	87
II. Положение спутника в пространстве	92
III. Интегралы площадей	95
IV. Интеграл энергии	96
V. Обзор основных формул для решения задачи двух тел	98
VI. Применение изложенной теории для вычисления эфемерид ИСЗ	99
§ 20. Основы теории определения мгновенных элементов орбит близких спутников	100
I. Точная формулировка проблемы	100
II. Обработка квазисинхронных наблюдений на ИСЗ. Определение топоцентрического радиуса-вектора ИСЗ и составляющих скорости	101
III. Определение элементов орбиты спутника по его положению и составляющим скорости	106
IV. Изменения элементов орбиты, вызываемые несовпадением используемой геодезической (референцной) системы координат и геоцентрической системы	109
Глава 9. Орбитальные задачи (задачи космической геодезии преимущественно геометрического характера, в которых требуется знание элементов орбиты спутника)	111
§ 21. Сущность решения и перечень главных задач	111
§ 22. Определение положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли	112
§ 23. Создание всемирной геодезической системы с началом в центре масс Земли	114
§ 24. Определение геодезических координат и высот квазигеоида для станций наблюдений спутников в конкретной референцной системе (орбитальный спутниковый метод)	115
§ 25. Определение параметров общего земного эллипсоида	116
Литература	120