

## Тема 1: ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ.

Первый натиск и первые крики решают дело.

Тит Ливий (Римский историк)

Роль крика в драке - существенный вклад в теорию конфликтов. Но имеет ли он такое же значение при фильтрации данных - не очевидно, как и его место. Лично я предпочитаю воплем завершать этот процесс, а не начинать.

Эдуард Павелко (Новосибирский геофизик Уральской школы)

**Содержание:** Введение. 1.1. Цифровые фильтры. Общие понятия. Нерекурсивные фильтры. Рекурсивные фильтры. 1.2. Импульсная реакция фильтров. Функция отклика. Определение импульсной реакции. 1.3. Передаточные функции фильтров. Z-преобразование. Устойчивость фильтров. 1.4. Частотные характеристики фильтров. Общие понятия. Основные свойства. Фазовая и групповая задержка. 1.5. Фильтрация случайных сигналов. Математическое ожидание. Корреляционные соотношения. Спектр мощности выходного сигнала. Дисперсия выходного сигнала. Усиление шумов. Функция когерентности. 1.6. Структурные схемы цифровых фильтров. Структурные схемы. Графы фильтров. Соединения фильтров. Схемы реализации фильтров. Обращенные формы. Литература.

### ВВЕДЕНИЕ.

Предмет цифровой фильтрации данных (сигналов) является естественным введением в широкую и фундаментальную область цифровой обработки информации. Под фильтрацией будем понимать любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания, прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех).

Как известно, преобразование динамики сигналов (и данных, которые несут эти сигналы) осуществляется в системах. Соответственно, фильтры с любым целевым назначением являются частным случаем систем преобразования сигналов, в рамках теории которых они и будут рассматриваться.

В настоящем курсе рассматриваются, в основном, методы линейной обработки данных (носителей этих данных - сигналов) линейными дискретными системами. Линейными называют системы, которые осуществляют преобразование линейных комбинаций входных сигналов в суперпозицию выходных сигналов. Принцип реализации линейных систем, физический - в виде специальных микропроцессорных устройств, или алгоритмический - в виде программ на ЭВМ, существенного значения не имеет и определяет только их потенциальные возможности.

### 1.1. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ /Л2,Л24/.

**Общие понятия.** В одномерной дискретной линейной системе связь между входом и выходом (входной и выходной дискретными последовательностями значений сигнала – отсчетами), задается линейным оператором преобразования TL:

$$y(k\Delta t) = TL \{x(k\Delta t)\}.$$

Это выражение отображает краткую запись линейного разностного уравнения:

$$\sum_{m=0}^M a_m y(k\Delta t - m\Delta t) = \sum_{n=0}^N b_n x(k\Delta t - n\Delta t), \quad (1.1.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  - порядковый номер отсчетов,  $\Delta t$  - интервал дискретизации сигнала,  $a_m$  и  $b_n$  - вещественные или, в общем случае, комплексные коэффициенты. Положим  $a_0 = 1$ , что всегда может быть выполнено соответствующей нормировкой уравнения (1.1.1), и, принимая в даль-

нейшем  $\Delta t = 1$ , приведем его к виду:

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m). \quad (1.1.2)$$

Оператор, представленный правой частью данного уравнения, получил название цифрового фильтра (ЦФ), а выполняемая им операция - цифровой фильтрации данных (информации, сигналов). Если хотя бы один из коэффициентов  $a_m$  или  $b_n$  зависит от переменной  $k$ , то фильтр называется параметрическим, т.е. с переменными параметрами. Ниже мы будем рассматривать фильтры с постоянными коэффициентами (инвариантными по аргументу).

**Нерекурсивные фильтры.** При нулевых значениях коэффициентов  $a_m$  уравнение (1.1.2) переходит в уравнение линейной дискретной свертки функции  $x(k)$  с оператором  $b_n$ :

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n). \quad (1.1.3)$$

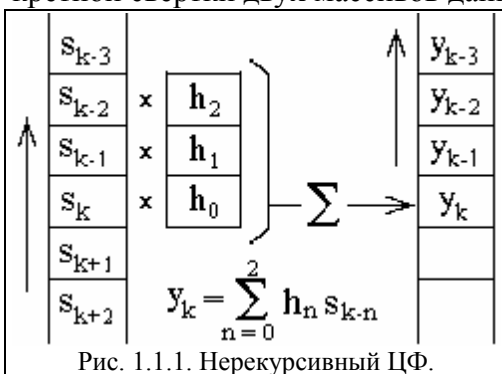
Значения выходных отсчетов свертки (1.1.3) для любого аргумента  $k$  определяются текущим и "прошлыми" значениями входных отсчетов. Такой фильтр называется нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ). Интервал суммирования по  $n$  получил название "окна" фильтра. Окно фильтра составляет  $N+1$  отсчет, фильтр является односторонним каузальным, т.е. причинно обусловленным текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала, и выходной сигнал не опережает входного. Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени. При  $k < n$ , а также при  $k < m$  для фильтра (1.1.2), проведение фильтрации возможно только при задании начальных условий для точек  $x(-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , и  $y(-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения или значения отсчета  $x(0)$ , т.е. продление отсчета  $x(0)$  назад по аргументу.

При обработке данных на ЭВМ ограничение по каузальности снимается. В программном распоряжении фильтра могут находиться как "прошлые", так и "будущие" значения входной последовательности отсчетов относительно текущей точки вычислений  $k$ , при этом уравнение (1.1.3) будет иметь вид:

$$y(k) = \sum_{n=-N'}^N b_n x(k-n). \quad (1.1.4)$$

При  $N' = N$  фильтр называется двусторонним симметричным. Симметричные фильтры, в отличие от односторонних фильтров, не изменяют фазы обрабатываемого сигнала.

Техника выполнения фильтрации не отличается от техники выполнения обычной дискретной свертки двух массивов данных.



Представим, что на одной полоске бумаги выписаны по порядку сверху вниз значения данных  $x(k) \equiv s_k$  (см. рис. 1.1.1). На второй полоске бумаги находятся записанные в обратном порядке значения коэффициентов фильтра  $b_n \equiv h_n$  (обозначение  $h$  для коэффициентов операторов НЦФ является общепринятым). Для вычисления  $y_k \equiv y(k)$  располагаем вторую полоску против первой таким образом, чтобы значение  $h_0$  совпало со значением  $s_k$ , перемножаем все значения  $h_n$  с расположенными против них значениями  $s_{k-n}$  и суммируем все

результаты перемножения. Результат суммирования является выходным значением сигнала  $y_k$ . Сдвигаем окно фильтра - полоску коэффициентов  $h_k$ , на один отсчет последовательности  $s_k$  вниз (или массив  $s_k$  сдвигаем на отсчет вверх) и вычисляем аналогично следующее значение выходного сигнала, и т.д.

Описанный процесс является основной операцией цифровой фильтрации и называется

сверткой в вещественной области массива данных  $x(k)$  с функцией (оператором) фильтра  $b_n$  (массивом коэффициентов фильтра). Для математического описания наряду с формулами (1.1.3-1.1.4) применяется также символическая запись фильтрации:

$$y(k) = b(n) * x(k-n).$$

Сумма коэффициентов фильтра определяет коэффициент передачи (усиления) средних значений сигнала в окне фильтра и постоянной составляющей в целом по массиву данных (с учетом начальных и конечных условий). Как правило, сумма коэффициентов фильтра нормируется к 1.

Имеется целый ряд методов обработки данных, достаточно давно и широко известных, которые по существу относятся к методам цифровой фильтрации, хотя и не называются таковыми. Например, методы сглаживания отсчетов в скользящем окне постоянной длительности. Так, для линейного сглаживания данных по пяти точкам с одинаковыми весовыми коэффициентами используется формула:

$$y_k = 0.2(x_{k-2} + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2}).$$

С позиций цифровой фильтрации это не что иное, как двусторонний симметричный нерекурсивный цифровой фильтр:

$$y_k = \sum_{n=-2}^2 b_n x_{k-n}, \quad b_n = 0,2. \quad (1.1.5)$$

Аналогично, при сглаживании данных методом наименьших квадратов (МНК) на основе кубического уравнения:

$$y_k = (-3x_{k-2} + 12x_{k-1} + 17x_k + 12x_{k+1} - 3x_{k+2})/35. \quad (1.1.6)$$

Это также НЦФ с коэффициентами:  $b_0 = 17/35$ ,  $b_1 = b_{-1} = 12/35$ ,  $b_2 = b_{-2} = -3/35$ .

**Пример.** Уравнение НЦФ:  $y_k = \sum_{n=-2}^2 b_n x_{k-n}$ ,  $b_n = 0,2$ . Начальные условия - нулевые.

Входной сигнал – скачок функции (ступень):  $x_k = \{0,0,0,0,0,10,10,10,10,\dots\}$ .

Выходной сигнал:  $y_k = \{0,0,0,0,2,4, 6, 8,10,10,10,10,\dots\}$ .

Результат фильтрации приведен на рис. 1.1.2(А). Проверьте результат (выполните фильтрацию, как это показано на рис. 1.1.1, с учетом четности фильтра).

*Заметим:* сумма коэффициентов сглаживающих НЦФ всегда должна быть равна 1, при этом сумма значений массива выходного сигнала равна сумме значений массива входного сигнала. Координатная деформация выходного сигнала ниже входного, резкие изменения входных сигналов "размазываются" по аргументу.

Повторите фильтрацию фильтром МНК на основе кубического уравнения. Сравните результаты фильтрации с результатами первого НЦФ (приведены на рис. 1.1.2(В)).

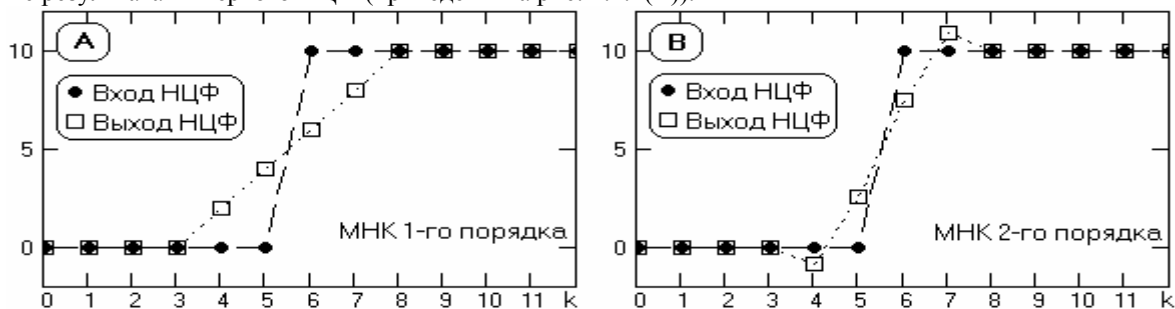


Рис. 1.1.2. Сглаживание МНК в скользящем окне по пяти точкам

Для операции фильтрации характерны следующие основные свойства:

1. Дистрибутивность:  $h(t) * [a(t) + b(t)] = h(t) * a(t) + h(t) * b(t)$ .

2. Коммутативность:  $h(t) * a(t) * b(t) = a(t) * b(t) * h(t)$ .

3. Ассоциативность:  $[a(t) * b(t)] * h(t) = h(t) * a(t) * b(t)$ .

Фильтрация однозначно определяет выходной сигнал  $y(t)$  для установленного значения входного сигнала  $s(t)$  при известном значении импульсного отклика фильтра  $h(t)$ .

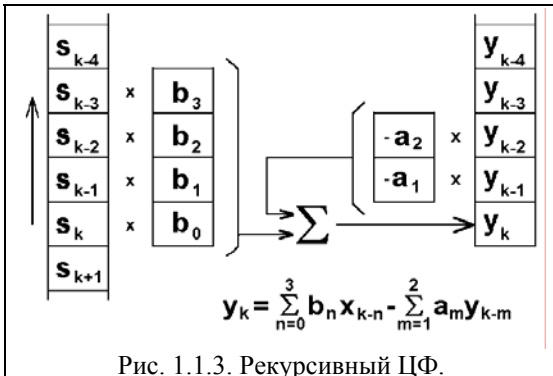


Рис. 1.1.3. Рекурсивный ЦФ.

зависимости от знака суммы коэффициентов  $a_m$ . По существу, полное окно рекурсивного фильтра состоит из двух составляющих: нерекурсивной части  $b_n$ , ограниченной в работе текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала (при реализации на ЭВМ возможно использование и "будущих" отсчетов сигнала) и рекурсивной части  $a_m$ , которая работает только с "прошлыми" значениями выходного сигнала. Техника вычислений для РЦФ приведена на рис. 1.1.3.

**Рекурсивные фильтры.** Фильтры, которые описываются полным разностным уравнением (1.1.2), принято называть рекурсивными цифровыми фильтрами (РЦФ), так как в вычислении текущих выходных значений участвуют не только входные данные, но и значения выходных данных фильтрации, вычисленные в предшествующих циклах расчетов. С учетом последнего фактора рекурсивные фильтры называют также фильтрами с обратной связью, положительной или отрицательной в

**Пример.** Уравнение РЦФ:  $y_k = b_0 x_k + a_1 y_{k-1}$ , при  $b_0 = a_1 = 0.5$ ,  $y_{-1} = 0$ .

Входной сигнал:  $x_k = \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots\}$

Расчет выходного сигнала:

$$y_0 = 0,5x_0 + 0,5y_{-1} = 0; \quad y_1 = 0,5x_1 + 0,5y_0 = 0; \quad y_2 = 0,5x_2 + 0,5y_1 = 0,5; \quad y_3 = 0,5x_3 + 0,5y_2 = 0,25;$$

$$y_4 = 0,5x_4 + 0,5y_3 = 0,125; \quad y_5 = 0,5x_5 + 0,5y_4 = 0,0625; \quad y_6 = 0,5x_6 + 0,5y_5 = 0,03125; \quad \text{и т.д.}$$

Выходной сигнал:  $y_k = \{0, 0, 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, 0,03125, 0,015625, \dots\}$

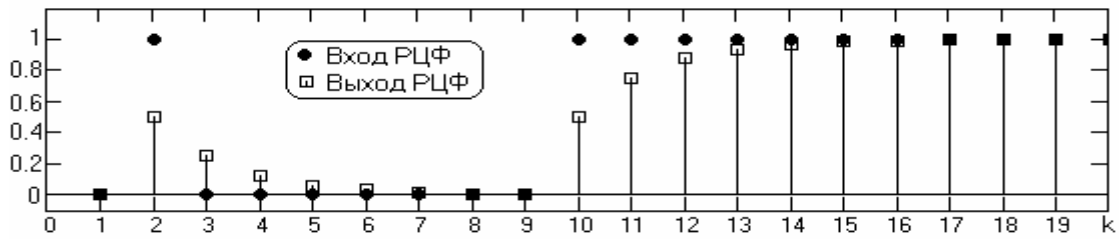


Рис. 1.1.4. Рекурсивная фильтрация.

Из примера можно видеть, что реакция РЦФ на конечный входной сигнал, в принципе, может иметь бесконечную длительность (в данном случае с близкими к нулю, но не нулевыми значениями), в отличие от реакции НЦФ, которая всегда ограничена количеством членов  $b_k$  (окном фильтра).

**Пример.** Уравнение РЦФ:  $y_k = b_0 x_k - a_1 y_{k-1}$ , при  $b_0 = 0.5$ ,  $a_1 = 1.1$ ,  $y_{-1} = 0$

Входной сигнал:  $x_k = \{0, 10, 0, 0, 0, \dots\}$ .

Выходной сигнал:  $y_k = \{0, 0,5, -5,5, 6,05, -6,655, 7,321, -8,053, 8,858, -9,744, 10,718, -11,79, \dots\}$  и т.д.

**Заметим:** коэффициент обратной связи больше 1 и выходной сигнал идет "в разнос".

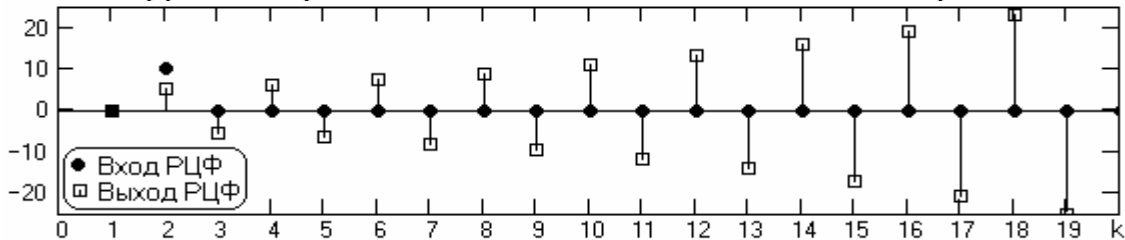


Рис. 1.1.5. Неустойчивый рекурсивный фильтр.

Операции, относящиеся к рекурсивной фильтрации, также известны в обычной практике, например - интегрирование. При интегрировании по формуле трапеций:

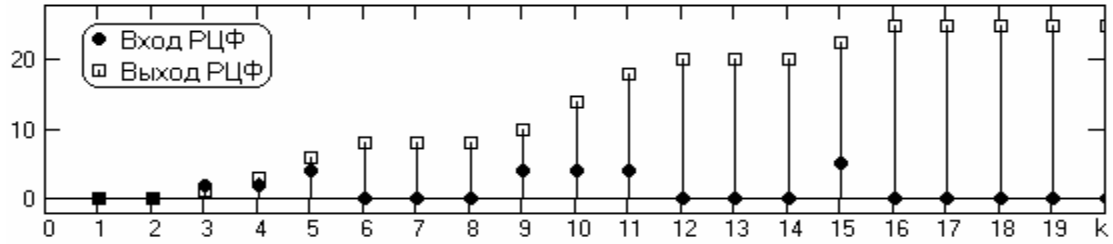
$$y_k = (x_k + x_{k-1})/2 + y_{k-1}, \quad (1.1.7)$$

т.е. здесь мы имеем РЦФ с коэффициентами:  $b_0 = b_1 = 0.5$ ,  $a_1 = 1$ .

**Пример.** Уравнение РЦФ:  $y_k = (x_k + x_{k-1})/2 + y_{k-1}$ , начальные условия - нулевые.

Входной сигнал:  $x_k = \{0, 0, 2, 2, 4, 0, 0, 4, 4, 4, 0, 0, 5, 0, 0, \dots\}$

Выполните фильтрацию. Контроль:  $y_k = \{0, 0, 0, 1, 3, 6, 8, 8, 8, 10, 14, 18, 20, 20, 20, 22.5, 25, 25, 25, \dots\}$



1.1.6. Интегрирующий рекурсивный фильтр.

## 1.2. ИМПУЛЬСНАЯ РЕАКЦИЯ ФИЛЬТРОВ.

**Функция отклика.** Если на вход фильтра подать единичный импульс (импульс Кронекера), расположенный в точке  $k = 0$ , то на выходе фильтра мы получим его реакцию на единичный входной сигнал, которая однозначно определяется оператором преобразования:

$$y(k) = TL[\delta(0)] = b_n * \delta(0-n) = h(k) \equiv b_n. \quad (1.2.1)$$

Функция  $h(k)$ , которая связывает вход и выход фильтра по реакции на единичный входной сигнал, получила название импульсного отклика фильтра (функции отклика).

Если произвольный сигнал на входе фильтра представить в виде линейной комбинации взвешенных импульсов Кронекера

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0 x(k-n),$$

то, с использованием функции отклика, сигнал на выходе фильтра можно рассматривать как суперпозицию запаздывающих импульсных реакций на входную последовательность взвешенных импульсов:

$$y(k) = \sum_n h(n) (\delta_0 x(k-n)) \equiv \sum_n h(n) x(k-n).$$

Пределы суммирования в последнем выражении устанавливаются непосредственно по длине импульсного отклика  $h(n)$ .

**Определение импульсной реакции** требуется, как правило, только для рекурсивных фильтров, так как импульсная реакция для НЦФ при известных значениях коэффициентов  $b(n)$ , как это следует из выражения (1.2.1), специального определения не требует:  $h(n) \equiv b(n)$ .

Если выражение для системы известно в общей форме (1.1.2), определение импульсной реакции производится подстановкой в уравнение системы импульса Кронекера с координатой  $k = 0$  при нулевых начальных условиях. В соответствии с выражением (1.2.1) сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы.

**Пример.** Уравнение РЦФ:  $y_k = x_k + 0.5y_{k-1}$ .

Входной сигнал:  $x_k = \delta_0 = \{1, 0, 0, \dots\}$ .

Расчет выходного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$y_0 = x_0 + 0.5 y_{-1} = 1 + 0 = 1 = h_0. \quad y_1 = x_1 + 0.5 y_0 = 0 + 0.5 = 0.5 = h_1. \quad y_2 = x_2 + 0.5 y_1 = 0 + 0.25 = 0.25 = h_2.$$

$$y_3 = x_3 + 0.5 y_2 = 0.125 = h_3. \quad y_4 = x_4 + 0.5 y_3 = 0.0625 = h_4, \quad \text{и т.д.}$$

Импульсный отклик фильтра:  $h_k = (0.5)^k, k = 0, 1, 2, \dots$

Определение импульсной реакции физической системы обычно производится подачей на вход системы ступенчатой функции (функции Хевисайда), которая равна  $u_0(k) = 1$  при  $k \geq 0$ , и  $u_0(k) = 0$  при  $k < 0$ :

$$g(k) = \sum_{n=0}^N h(n) u_0(k-n) = \sum_{n=0}^k h(n).$$

Отсюда:

$$h(k) = g(k) - g(k-1).$$

Функция  $g(k)$  получила название переходной характеристики системы (перехода из одного статического состояния в другое). Форму реакции фильтра на функцию Хевисайда можно видеть на рис. 1.1.4 (с точки  $k = 10$  и далее) в сопоставлении с реакцией на импульс Кронекера в точке  $k = 2$ .

### 1.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ФИЛЬТРОВ /Л7/.

**Z-преобразование.** Удобным методом решения разностных уравнений линейных систем является Z-преобразование. Применяя Z-преобразование к обеим частям равенства (1.1.1), с учетом сдвига функций ( $y(k-m) \Leftrightarrow z^m Y(z)$ ), получаем:

$$Y(z) \sum_{m=0}^M a_m z^m = X(z) \sum_{n=0}^N b_n z^n, \quad (1.3.1)$$

где  $X(z), Y(z)$ - соответствующие Z-образы входного и выходного сигнала. Отсюда, полагая  $a_0 = 1$ , получаем в общей форме функцию связи выхода фильтра с его входом - уравнение передаточной функции системы в Z-области:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n / (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^m). \quad (1.3.2)$$

Для НЦФ:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n. \quad (1.3.3)$$

При проектировании фильтров исходной, как правило, является частотная передаточная функция фильтра  $H(\omega)$ , по которой вычисляется ее Z-образ  $H(z)$  и обратным переходом в пространство сигналов определяется алгоритм обработки данных. В общей форме для выходных сигналов фильтра:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z). \\ Y(z) \cdot (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^m) &= X(z) \cdot \sum_{n=0}^N b_n z^n \\ Y(z) &= X(z) \cdot \sum_{n=0}^N b_n z^n - Y(z) \cdot \sum_{m=1}^M a_m z^m. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

После обратного Z-преобразования выражения (1.3.4):

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m). \quad (1.3.5)$$

При подаче на вход фильтра единичного импульса Кронекера  $\delta_0$ , имеющего Z-образ  $\delta(z) = z^0 = 1$ , сигнал на выходе фильтра будет представлять собой импульсную реакцию фильтра  $y(k) \equiv h(k)$ , при этом:

$$H(z) = Y(z)/\delta(z) = Y(z) = TZ[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k, \quad (1.3.6)$$

т.е. передаточная функция фильтра является Z-образом ее импульсной реакции. При обратном Z-преобразовании передаточной функции соответственно получаем импульсную характеристику фильтра:

$$h(k) \Leftrightarrow H(z). \quad (1.3.7)$$

Если функция  $H(z)$  представлена конечным степенным полиномом, что как правило характерно для НЦФ, то обратное Z-преобразование осуществляется элементарно идентификацией коэффициентов по степеням  $z$ . Передаточная функция РЦФ также может быть представлена степенным полиномом прямым делением числителя на знаменатель правой части выражения (1.3.2), однако результат при этом может оказаться как конечным, так и бесконечным, т.е. система может иметь либо конечную, либо бесконечную импульсную характеристику.

ку. Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой получили название БИХ-фильтров, с конечной импульсной характеристикой соответственно КИХ-фильтров. Нерекурсивные фильтры всегда являются КИХ-фильтрами, т.к. длительность импульсной реакции НЦФ определяется окном фильтра.

**Примеры.**

1. Передаточная функция РЦФ:  $H(z) = (1-z^5)/(1-z)$ .

Прямым делением числителя на знаменатель получаем:  $H(z) = 1+z+z^2+z^3+z^4$ .

$H(z) \Leftrightarrow h(n) = \{1,1,1,1,1\}$ . Фильтр РЦФ является КИХ-фильтром.

2. Передаточная функция:  $H(z) = 1/(1-2z)$ .

Методом обратного z-преобразования:  $h(n) = 2^n$ . Фильтр РЦФ является БИХ-фильтром.

**Устойчивость фильтров.** Фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие также ограничена. Критерием устойчивости фильтра является абсолютная сходимость отсчетов его импульсного отклика:

$$\sum_n |h(n)| < \infty. \quad (1.3.8)$$

Анализ устойчивости может быть проведен по передаточной функции. В устойчивой системе значение  $H(z)$  должно быть конечным во всех точках Z-плоскости, где  $|z| \leq 1$ , а, следовательно, передаточная функция не должна иметь особых точек (полюсов) на и внутри единичного круга на Z-плоскости. Полюсы  $H(z)$  определяются корнями многочлена знаменателя передаточной функции (1.3.2).

**Пример.**

Передаточная функция фильтра рис. 1.1.4:  $H(z) = b_0/(1-a_1z)$ . При  $a_1 = 0.5$  полюс знаменателя:  $z_p = 2$ .  $|z_p| > 1$ . Фильтр устойчив.

Передаточная функция фильтра рис. 1.1.5:  $H(z) = b_0/(1+a_1z)$ . При  $a_1 = 1.1$  полюс знаменателя:  $z_p = -0.909$ .  $|z_p| < 1$ . Фильтр неустойчив, что и подтверждает пример фильтрации.

Передаточная функция фильтра рис. 1.1.6:  $H(z) = 0.5(1+z)/(1-z)$ . Полюс знаменателя:  $z_p = 1$ . В принципе, фильтр неустойчив, но эта неустойчивость проявляется только при  $k = \infty$ . Импульсный отклик фильтра  $h(n) = \{0.5, 1, 1, 1, \dots\}$ , сумма которого равна  $\infty$  только при  $n = \infty$ , т.е. при интегрировании бесконечно больших массивов. При интегрировании конечных массивов результат всегда конечен.

Приведенный критерий устойчивости относится к несократимой дроби, т.к. в противном случае возможна компенсация полюса нулем передаточной функции и следует проверить наличие однозначных нулей и полюсов.

Проверка на устойчивость требуется только для рекурсивных цифровых фильтров (систем с обратной связью), нерекурсивные системы всегда устойчивы.

**1.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРОВ /Л2,Л13,Л24/.**

**Общие понятия.** От Z-образов сигналов и передаточных функций подстановкой  $Z = \exp(-j\omega\Delta t)$  в уравнение (1.3.2) можно перейти к Фурье-образам функций, т.е. к частотным спектрам сигналов и частотной характеристике фильтров, а точнее – к функциям их спектральных плотностей.

Можно применить и способ получения частотных характеристик непосредственно из разностного уравнения системы обработки данных. Так как цифровая фильтрация относится к числу линейных операций, то, принимая для сигнала на входе фильтра выражение  $x(k\Delta t) = B(\omega) \exp(j\omega k\Delta t)$ , мы вправе ожидать на выходе фильтра сигнал  $y(k\Delta t) = A(\omega) \exp(j\omega k\Delta t)$ . Подставляя эти выражения в разностное уравнение фильтра (1.1.1), получаем:

$$\sum_{m=0}^M a_m A(\omega) \exp(j\omega k\Delta t - j\omega m\Delta t) = \sum_{n=0}^N b_n B(\omega) \exp(j\omega k\Delta t - j\omega n\Delta t).$$

$$A(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) \sum_{m=0}^M a_m \exp(-j\omega m\Delta t) = B(\omega) \exp(j\omega k\Delta t) \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n\Delta t).$$

$$A(\omega) \sum_{m=0}^M a_m \exp(-j\omega m \Delta t) = B(\omega) \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n \Delta t). \quad (1.4.1)$$

Передаточная частотная функция (частотная характеристика при  $a_0=1$ ):

$$H(\omega) = A(\omega)/B(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n \Delta t) / \left[ 1 + \sum_{m=1}^M a_m \exp(-j\omega m \Delta t) \right]. \quad (1.4.2)$$

Нетрудно убедиться, что полученная частотная характеристика повторяет функцию (1.3.2) при  $z = \exp(-j\omega \Delta t)$ , что и следовало ожидать. Аналогично z-преобразованию (1.3.7), частотная характеристика фильтра представляет собой Фурье-образ его импульсной реакции, и наоборот. При  $\Delta t = 1$ :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n), \quad (1.4.3)$$

$$h(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) \exp(j\omega n) d\omega. \quad (1.4.4)$$

В общем случае  $H(\omega)$  является комплексной функцией, модуль которой  $R(\omega)$  называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а аргумент  $\varphi(\omega)$  - фазочастотной характеристикой (ФЧХ).

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 H(\omega) + \text{Im}^2 H(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(-\text{Im} H(\omega)/\text{Re} H(\omega)).$$

На рис. 1.4.1-1.4.3 приведены частотные характеристики фильтров (модули и аргументы спектральных плотностей), которые были рассмотрены выше в примерах и на рис. 1.1.4 – 1.1.6. Графики приведены в границах главных диапазонов спектров и получены непосредственной подстановкой  $z=\exp(-j\omega \Delta t)$  при  $\Delta t=1$  в уравнения передаточных функций  $H(z)$ .

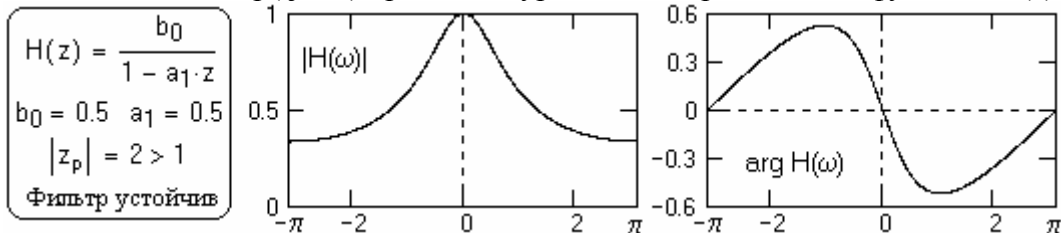


Рис. 1.4.1. Спектр не имеет особых точек.

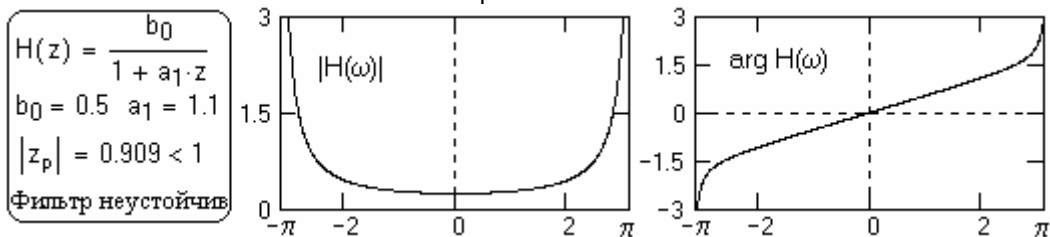


Рис. 1.4.2. Спектр имеет особые точки на границах диапазонов.

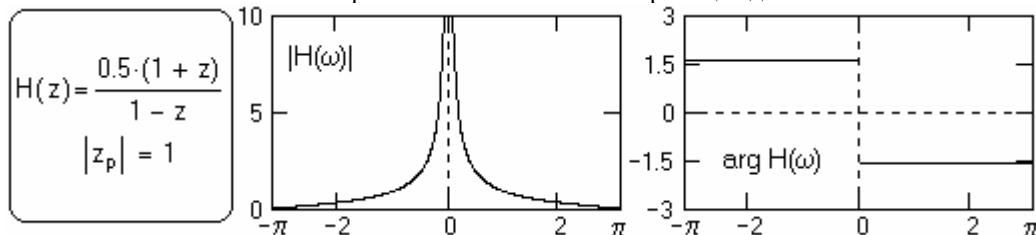


Рис. 1.4.3. Спектр интегрирующего фильтра. Особая точка на нулевой частоте.

При обработке ограниченных массивов амплитуда центрального пика равна количеству точек массива.

**Основные свойства** частотных характеристик фильтров:

1. Частотные характеристики являются непрерывными функциями частоты.
2. При дискретизации данных по интервалам  $\Delta t$  функция  $H(\omega)$  является периодиче-



ской. Период функции  $H(\omega)$  равен частоте дискретизации входных данных  $F = 1/\Delta t$ . Первый низкочастотный период (по аргументу  $\omega$  от  $-\pi/\Delta t$  до  $\pi/\Delta t$ , по  $f$  от  $-1/2\Delta t$  до  $1/2\Delta t$ ) называется главным частотным диапазоном. Граничные частоты главного частотного диапазона соответствуют частоте Найквиста  $\pm\omega_N$ ,  $\omega_N = \pi/\Delta t$ . Частота Найквиста определяет предельную частоту обработки данных.

3. Для фильтров с вещественными коэффициентами импульсной реакции  $h(n\Delta t)$  функция АЧХ является четной, а функция ФЧХ - нечетной. С учетом этого частотные характеристики фильтров обычно задаются только на интервале положительных частот  $0-\omega_N$  главного частотного диапазона. Значения функций на интервале отрицательных частот являются комплексно сопряженными со значениями на интервале положительных частот.

Как правило, при частотном анализе фильтров значение  $\Delta t$  интервала дискретизации принимают за 1, что соответственно определяет задание частотных характеристик на интервале  $(0, \pi)$  по частоте  $\omega$  или  $(0, 1/2)$  по  $f$ . При использовании быстрых преобразований Фурье (БПФ) вычисления спектров осуществляются в одностороннем варианте положительных частот в частотном интервале от 0 до  $2\pi$  (от 0 до 1 Гц), где комплексно сопряженная часть спектра главного диапазона (от  $-\pi$  до 0) занимает интервал от  $\pi$  до  $2\pi$  (для ускорения вычислений используется принцип периодичности дискретных спектров). Заметим, что при выполнении БПФ количество точек спектра равно количеству точек входной функции, а следовательно отсчет на частоте  $2\pi$ , комплексно сопряженный с отсчетом на частоте 0, отсутствует. При нумерации точек входной функции от 0 до  $N$  он принадлежит точке  $N+1$  - начальной точке следующего периода, при этом шаг по частоте равен  $2\pi/(N+1)$ . Современное программное обеспечение БПФ допускает любое количество точек входной функции, при этом для нечетного значения  $N$  частоте  $\pi$  соответствует отсчет на точке  $(N+1)/2$ , не имеющий сопряженного отсчета, а при четном значении  $N$  отсутствует отчет на частоте  $\pi$  (она располагается между отсчетами  $k=N/2$  и  $N/2 + 1$ ). Отсчетам с номерами  $k$  главного диапазона БПФ (за исключением точки  $k=0$ ) соответствуют комплексно сопряженные отсчеты  $N+1-k$  (за исключением точки  $k=(N+1)/2$  при нечетном  $N$ ).

**Фазовая и групповая задержка.** Задержка сигналов во времени относится к характерной особенности каузальных систем в целом, а, следовательно, рекурсивных и односторонних нерекурсивных фильтров.

Фазовая задержка, это прямая характеристика временной задержки фильтром гармонических колебаний. При подаче на вход фильтра гармоники  $\sin \omega t$ , сигнал на выходе каузального фильтра, без учета изменения его амплитуды, равен  $\sin(\omega t - \varphi)$ , при этом:

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega(t - t_p), \quad \omega t - \varphi = \omega(t - t_p).$$

Отсюда, фазовая задержка  $t_p$  на частоте  $\omega$  равна:

$$t_p = \varphi / \omega. \quad (1.4.5')$$

При распространении (1.4.5) в целом на спектральную передаточную функцию фильтра получаем:

$$t_p(\omega) = \varphi(\omega) / \omega. \quad (1.4.5)$$

Постоянство значения  $t_p(\omega)$  в определенном частотном диапазоне обеспечивает для всех гармоник сигнала такое же соотношение их фазовых характеристик, какое было на входе системы, т.е. не изменяет формы сигнала, если его спектр полностью сосредоточен в этом частотном диапазоне и значения АЧХ в этом диапазоне также имеют постоянное значение. Это условие является определяющим, например, для систем передачи данных, для сглаживающих и полосовых частотных фильтров.

Что касается каузальных фильтров, то они, как правило, имеют в рабочем диапазоне определенную зависимость значения  $t_p$  от частоты, которая характеризуется групповым временем задержки (ГВЗ).

Допустим, что сигнал на входе фильтра представляет собой сумму двух гармоник с близкими частотами:

$$s(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t.$$

Тождественная тригонометрическая запись:

$$s(t) = 2 \cos[0.5(\omega_1 + \omega_2)t] \cdot \cos[0.5(\omega_1 - \omega_2)t].$$

Эта запись показывает, что сумму двух гармоник с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  можно рассматривать, как амплитудную модуляцию гармоники с частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  гармоникой с частотой  $(\omega_1 - \omega_2)/2$ . При прохождении через фильтр каждая из гармоник  $\omega_1$  и  $\omega_2$  может получить различную задержку, при этом сигнал на выходе фильтра, без учета амплитудных изменений:

$$s(t) = \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \cos(\omega_2 t - \varphi_2).$$

Тождественная запись:

$$s(t) = 2 \cos[0.5((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1 + \varphi_2))] \cdot \cos[0.5((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2))].$$

Пульсацию колебаний выразим через групповую временную задержку  $t_g$ :

$$\cos[0.5((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2))] = \cos[0.5(\omega_1 - \omega_2) \cdot (t - t_g)].$$

Отсюда:

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot t_g = \varphi_1 - \varphi_2.$$

$$t_g = (\varphi_1 - \varphi_2) / (\omega_1 - \omega_2) = \Delta\varphi / \Delta\omega. \quad (1.4.6)$$

При распространении этого выражения на непрерывную частотную характеристику фильтра:

$$t_g(\omega) = d\varphi(\omega) / d\omega. \quad (1.4.7)$$

Для вычислений ГВЗ удобно использовать комплексный логарифм передаточной функции фильтра:

$$\text{Ln}(H(\omega)) = \ln |H(\omega)| + j \cdot \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = \text{Im}[\text{Ln}(H(\omega))].$$

$$t_g(\omega) = d\varphi / d\omega = \text{Im} \{ d[\text{Ln}(H(\omega))] / d\omega \} = \text{Im} \{ dH(\omega) / [H(\omega)d\omega] \}. \quad (1.4.8)$$

Приближение для дискретных спектральных функций:

$$t_g(k \cdot \Delta\omega) \approx (2 / \Delta\omega) \cdot \text{Im} \{ (H_{k+1} - H_k) / (H_{k+1} + H_k) \}. \quad (1.4.9)$$

### 1.5. ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ /Л4,Л15,Л24/.

Если сигнал на входе фильтра является детерминированным, то его соотношение с выходным сигналом однозначно определяется импульсным откликом фильтра. Таким же однозначным является соотношение входа - выхода и для случайных сигналов, однако в силу природы последних аналитическое представление как входного сигнала, так и отклика системы, не представляется возможным. Для описания реакции фильтра на случайный входной сигнал используется статистический подход. Если параметры входного сигнала специально не оговариваются, то по умолчанию принимается, что на вход фильтра поступает реализация случайного стационарного сигнала  $x(k \cdot \Delta t)$  с нулевым средним, которая вызывает сигнал  $y(k \cdot \Delta t)$  на выходе фильтра. Значение  $\Delta t$ , как обычно, принимаем равным 1.

Допустим, что фильтр имеет импульсный отклик  $h(n) = \exp(-a \cdot n)$ ,  $n \geq 0$ . Зададим на входе фильтра стационарный квазидетерминированный случайный сигнал, который не обладает свойством эргодичности, но имеет все свойства случайного сигнала и может быть описан в явной математической форме:

$$x(k) = A + \cos(2 \cdot k + \varphi),$$

где  $A$  и  $\varphi$  - взаимно независимые случайные величины, причем значение  $\varphi$  равномерно распределено в интервале  $[0, 2\pi]$ . При этом выходной сигнал определится выражением:

$$y(k) = h(n) * x(k-n) \equiv \sum_{n=0}^N h(n) \cdot x(k-n) = A/3 + [3 \cdot \cos(2k + \varphi) + 2 \cdot \sin(2k + \varphi)]/13.$$

Из этого выражения следует, что выходной сигнал фильтра также является случайным и содержит те же самые случайные параметры, что и входной сигнал, а, следовательно, для него существуют определенные статистические характеристики.

**Математическое ожидание** произвольного входного случайного стационарного сиг-

нала  $x(k)$  на выходе фильтра определится выражением:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= M\{y(k)\} = M\left\{\sum_n h(n) \cdot x(k-n)\right\} = \sum_n M\{x(k-n)\} \cdot h(n) = \\ &= \bar{x} \sum_n h(n) = \bar{x} \cdot K_{\text{пс}}.\end{aligned}\quad (1.6.1)$$

Отсюда следует, что математическое ожидание выходных сигналов фильтра равно математическому ожиданию входных сигналов, умноженному на коэффициент усиления фильтром постоянной составляющей. При  $K_{\text{пс}} = 1$  среднее значение выходных сигналов не изменяется и равно среднему значению входных сигналов. Если фильтр не пропускает постоянную составляющую сигналов (сумма коэффициентов импульсного отклика фильтра равна нулю), то случайный выходной сигнал всегда будет иметь нулевое математическое ожидание.

**Корреляционные соотношения.** Для центрированных входных сигналов  $x(k)$  размером  $(0-K)$  функция автокорреляции (ФАК) вычисляется по формуле:

$$R_x(n) = [1/(K+1-n)] \sum_{k=0}^{K-n} x(k) \cdot x(k+n).$$

По аналогичной формуле может быть вычислена и ФАК выходных сигналов. Для произведения выходных сигналов  $y(k)$  и  $y(k+n)$ , образующих функцию автокорреляции выходных сигналов, можно также записать:

$$y(k) \cdot y(k+n) = \sum_j \sum_i h(i)h(j) x(k-i)x(k+n-j).$$

Если взять математические ожидания от обеих частей этого равенства, то, с учетом соотношения в правой части под знаками сумм

$$M\{x(k-i) x(k+n-j)\} = -R_x(k-i-k-n+j) = R_x(n+i-j),$$

получим:

$$R_y(n) = \sum_i \sum_j h(i)h(j) R_x(n+i-j) \equiv R_x(n) * h(n+i) * h(n-j). \quad (1.6.2)$$

Таким образом, функция автокорреляции выходного сигнала равна ФАК входного сигнала, свернутой дважды, в прямом и обратном направлении, с импульсным откликом фильтра, что сохраняет четность ФАК выходного сигнала. Для нецентрированных процессов аналогичное заключение действительно и для ковариационных функций. На рис. 1.5.1 приведен пример ФАК входной и выходной случайных последовательностей при фильтрации RC-фильтром, форма импульсного отклика которого также приведена на рисунке.

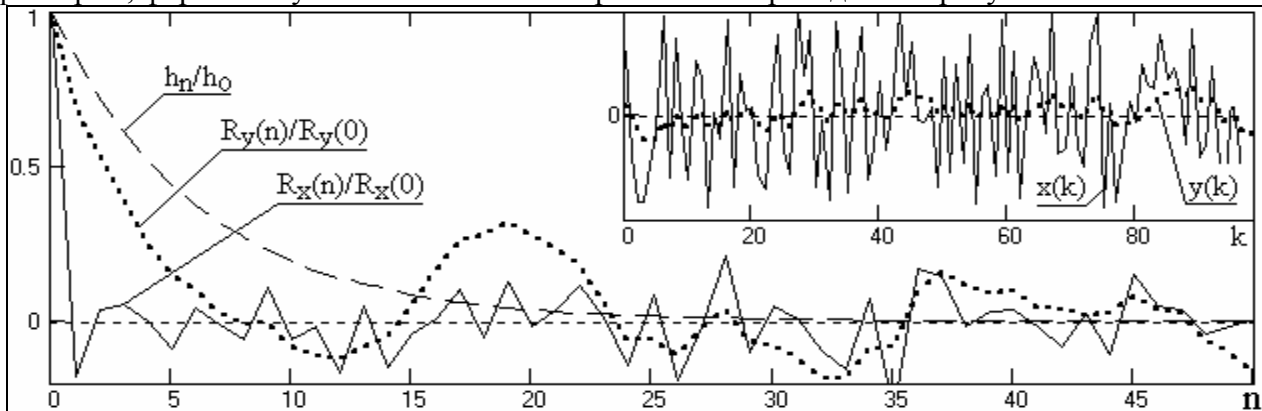


Рис. 1.5.1. Функции корреляционных коэффициентов.

Заметим, что для свертки импульсных откликов, производя замену  $n-j = m$ , мы имеем равенство:

$$h(n+i) * h(n-j) = h(m+i+j) * h(m) = h(m) * h(m+p) = K_h(m),$$

где  $K_h(m)$  - функция ковариации импульсного отклика фильтра. Отсюда:

$$R_y(n) = R_x(n) * K_h(m). \quad (1.5.2')$$

Это означает появление в случайном сигнале на выходе фильтра определенной корреляционной зависимости, определяемой инерционностью фильтра. Эффективный интервал  $\tau_k$  корреляции данных в сигнале тем меньше, чем выше верхняя граничная частота  $\omega_b$  его спек-

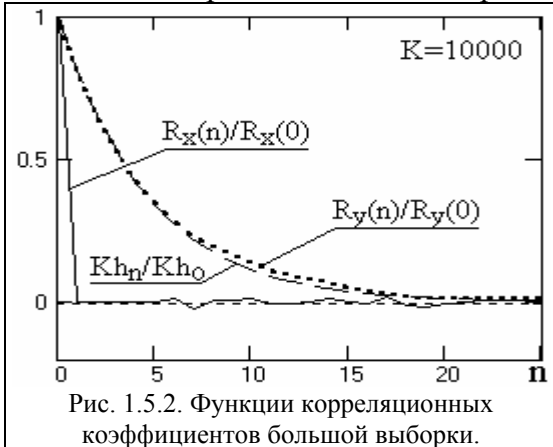
тра (по уровню 0.5):

$$\tau_k = \pi/\omega_B = 1/2f_B.$$

Оценка интервала корреляции для конечных (непериодических) функций, как правило, производится непосредственно по функциям автокорреляции  $R(n)$ :

$$\tau_k = 2 \cdot \sum_n |R(n)/R(0)| - 1,$$

где значение  $n$  ограничивается величиной 3-5 интервалов спада центрального пика до величины порядка  $0.1 \cdot R(0)$  (далее обычно начинаются статистические флуктуации значения  $R(n)$  около нулевой линии, вызванные ограниченностью выборки). Без такого ограничения за счет суммирования модуля флуктуаций, не несущих информации, значение  $\tau_k$  завышается относительно расчетного по спектральной характеристике сигнала.



Функция  $R_x(n)$  случайных статистически независимых отсчетов близка к  $\delta$ -функции, свертка которой с  $K_h(m)$  приведет к формированию на выходе выходного сигнала, форма ФАК которого будет стремиться к форме  $K_h(m)$ . При достаточно большой выборке случайных отсчетов входного сигнала это означает практически полное повторение функцией  $R_y(n)$  формы ковариационной функции импульсного отклика, как это можно видеть на рис. 1.5.2, который отличается от рис. 1.5.1 только количеством выборки  $K=10000$ . Соответственно, интервал корреляции выходных сигналов для случайной

входной последовательности можно определять непосредственно по функции ковариации импульсного отклика фильтра:

$$\tau_k = 2 \cdot \sum_n |Kh(n)/Kh(0)| - 1, \quad n \geq 0.$$

Для взаимной корреляционной функции (ВКФ)  $R_{xy}$  входного и выходного сигналов соответственно имеем:

$$x(k) * y(k+n) = \sum_i h(i) x(k) \cdot y(k+n-i).$$

$$R_{xy}(n) = \sum_i h(i) R_x(n-i) \equiv h(i) * R_x(n-i). \quad (1.6.3)$$

т.е. функция взаимной корреляции входного и выходного сигналов равна свертке ФАК входного сигнала с функцией импульсного отклика фильтра. Заключение действительно и для функций ковариации.

Другая взаимно корреляционная функция  $R_{yx}$  может быть получена из соотношения:

$$R_{yx}(n) = R_{xy}(-n) \equiv h(i) * R_x(n+i). \quad (1.5.3')$$

Отметим, что для статистически независимых случайных величин при одностороннем импульсном отклике ( $h(i) = 0$  при  $i < 0$ ) функция  $R_{xy}(n)$  также является односторонней и равна 0 при  $n < 0$ , а функция  $R_{yx}$  соответственно равна 0 при  $n > 0$ .

**Спектр мощности выходного сигнала.** Если на вход фильтра с импульсным откликом  $h(k) \Leftrightarrow H(f)$  поступает случайный стационарный эргодический сигнал  $x(k) \Leftrightarrow X_T(f)$ , имеющий на интервале  $T$  функцию автокорреляции  $R_x(n)$  и спектр мощности  $W_x(f)$ , то на выходе фильтра регистрируется стационарный эргодический сигнал  $y(k) \Leftrightarrow Y_T(f) = X_T(f)H(f)$ . Соответственно, энергетический спектр выходного сигнала на том же интервале:

$$|Y_T(f)|^2 = |X_T(f)|^2 |H(f)|^2. \quad (1.5.4)$$

Оценка спектра мощности (спектральной плотности энергии):

$$W_y(f) \approx (1/T) |X_T(f)|^2 |H(f)|^2 = W_x(f) |H(f)|^2. \quad (1.5.5)$$

Спектр мощности сигнала на выходе фильтра равен спектру мощности входного сигнала, умноженному на квадрат модуля частотной характеристики фильтра. С учетом четно-

сти корреляционных функций спектр мощности выходного сигнала также является четной действительной функцией и не имеет фазовой характеристики процесса.

Спектр мощности сигнала и его функция автокорреляции связаны преобразованием Фурье:

$$R_y(n) \Leftrightarrow |Y(\omega)|^2 = W_y(\omega).$$

**Дисперсия выходного сигнала** (средняя мощность) определяется с использованием формулы (1.5.5):

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) |H(f)|^2 df \equiv R_x(0) \sum_n h^2(n) = \sigma_x^2 \sum_n h^2(n). \quad (1.5.6)$$

Если сигнал нецентрированный и значение дисперсии входного сигнала неизвестно, то по аналогичным формулам вычисляется сначала *средний квадрат* выходного сигнала или так называемая *средняя мощность сигнала*:

$$\overline{y^2} = \overline{y^2(t)} = R_y(0) \equiv \overline{x^2} \sum_n h^2(n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) |H(f)|^2 df, \quad (1.5.7)$$

Вывод: средняя мощность выходного сигнала равна средней мощности входного сигнала, умноженной на сумму квадратов коэффициентов импульсного отклика фильтра. Для центрированных случайных сигналов средняя мощность равна дисперсии сигналов. Для нецентрированных выходных сигналов:

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 \equiv (\overline{x^2} - \overline{x}^2) \sum_n h^2(n). \quad (1.5.8)$$

**Взаимный спектр мощности** входного и выходного сигнала:

$$W_{xy}(f) \approx (1/T)X_T(f)Y_T(f) = (1/T)|X_T(f)|^2 H(f) = W_x(f)H(f). \quad (1.5.9)$$

Осуществляя преобразование Фурье левой и правой части выражения, получаем:

$$R_{xy}(n) = R_x(n) * h(n), \quad (1.5.10)$$

что повторяет формулу (1.5.3).

**Усиление шумов.** Критерием качества при использовании любого метода фильтрации информации можно считать выполнение целевого назначения с минимальным усилением шумов (максимальным их подавлением). Обозначим через  $\varepsilon(k)$  аддитивный шум во входном сигнале с математическим ожиданием  $M\{\varepsilon(k)\} = 0$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Значения  $\varepsilon(k)$  статистически независимы. С учетом помехи во входном сигнале значение сигнала на выходе:

$$y(k) = \sum_n h(n)[x(k-n) + \varepsilon(k-n)].$$

Математическое ожидание значений выходного сигнала:

$$M\{y(k)\} = \sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] = \sum_n h(n)x(k-n).$$

Вычислим дисперсию распределения отсчетов выходного сигнала:

$$\begin{aligned} D\{y(k)\} &= M\{[\sum_n h(n)[x(k-n) + \varepsilon(k-n)] - M\{y(k)\}]^2\} = \\ &= M\{[\sum_n h(n) \varepsilon(k-n)]^2\} = \sum_n h^2(n) M\{\varepsilon^2(k-n)\} = \sigma^2 \sum_n h^2(n). \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Отсюда следует, что сумма квадратов значений импульсного отклика цифрового фильтра представляет собой коэффициент усиления шумов, равномерно распределенных в главном частотном диапазоне фильтра, в процессе фильтрации сигнала. Это полностью соответствует прямому использованию выражения (1.5.7) при  $W_x(f) = \sigma^2$ :

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \equiv \sigma^2 \sum_n h^2(n). \quad (1.5.11')$$

Таким образом, коэффициент усиления фильтром дисперсии статистически распределенных шумов при расчете по импульсному отклику:

$$K_q = \sum_n h^2(n). \quad (1.5.12)$$

По дискретной передаточной функции фильтра:

$$K_q = [1/(N+1)] \sum_n H_n^2. \quad (1.5.12')$$

**Пример.** Сглаживающий фильтр:  $y(k) = 0.2 \sum_{n=-2}^2 x(k-n)$ .

Коэффициент усиления шумов:  $5(0,2^2) = 0,2$ . Дисперсия шумов уменьшается в  $1/0.2 = 5$  раз.

Выполните расчет коэффициента усиления шумов для пятиточечного фильтра МНК.

Контрольный ответ: 0.486.

**Функция когерентности** входного и выходного сигналов фильтра оценивается по формуле:

$$\gamma_{xy}^2(f) = |W_{xy}(f)|^2 / [W_x(f) \cdot W_y(f)]. \quad (1.5.12)$$

Если функции  $W_x(f)$  и  $W_y(f)$  отличны от нуля и не содержат дельта-функций, то для всех частот  $f$  значения функции когерентности заключены в интервале:

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1.$$

Для исключения дельта-функции на нулевой частоте (постоянная составляющая сигнала) определение функции когерентности производится по центрированным сигналам. Для фильтров с постоянными параметрами функция когерентности равна 1, в чем нетрудно убедиться, если в формулу (1.5.12) подставить выражения  $W_{xy}$  и  $W_y$ , определенные через  $W_x$ . Для совершенно не связанных сигналов функция когерентности равна нулю. Промежуточные между 0 и 1 значения могут соответствовать трем ситуациям:

1. В сигналах (или в одном из них) присутствует внешний шум (например, шум квантования при ограничении по разрядности).

2. Фильтр не является строго линейным. Это может наблюдаться, например, при определенном ограничении по разрядности вычислений, при накоплении ошибки в рекурсивных системах и т.п.

3. Выходной сигнал  $y(t)$  помимо  $x(t)$  зависит еще от каких-то входных или внутренних системных процессов.

Величина  $1 - \gamma_{xy}^2(f)$  задает долю среднего квадрата сигнала  $y(t)$  на частоте  $f$ , не связанную с сигналом  $x(t)$ .

Использование функций когерентности в практических методах анализа случайных данных подробно рассмотрено в работе /л4/.

### 1.6. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ /л8, л21/.

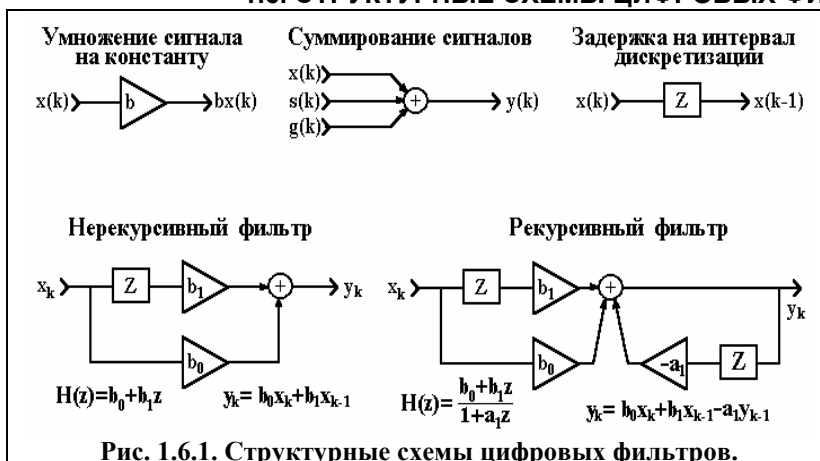
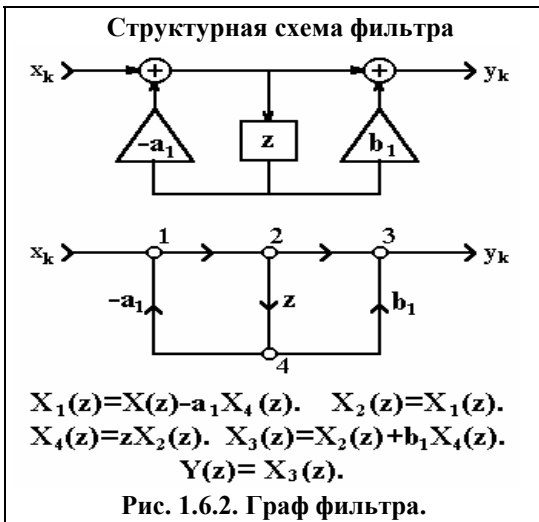


Рис. 1.6.1. Структурные схемы цифровых фильтров.

#### Структурные схемы.

Алгоритмы цифровой фильтрации сигналов (цифровых фильтров) представляются в виде структурных схем, базовые элементы которых показаны на рисунке 1.6.1 вместе с примерами структурных схем фильтров. Как правило, структурные схемы соответствуют программной реализации фильтров на ЭВМ, но не определяют аппаратной реализации в специальных радиотехнических устройствах, которая может существенно отличаться от программной реализации.

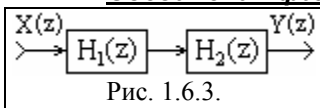
Алгоритмы цифровой фильтрации сигналов (цифровых фильтров) представляются в виде структурных схем, базовые элементы которых показаны на рисунке 1.6.1 вместе с примерами структурных схем фильтров. Как правило, структурные схемы соответствуют программной реализации фильтров на ЭВМ, но не определяют аппаратной реализации в специальных радиотехнических устройствах, которая может существенно отличаться от программной реализации.



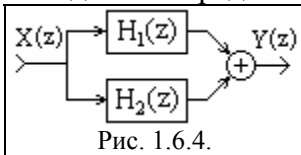
**Графы фильтров.** Наряду со структурной схемой фильтр может быть представлен в виде графа, который отображает диаграмму прохождения сигналов и состоит из направленных ветвей и узлов.

Пример структурной схемы фильтра с передаточной функцией  $H(z) = (1+b_1z)/(1+a_1z)$  и графа, ей соответствующего, приведен на рисунке 1.6.2. С каждым  $i$ -узлом графа связано значение сигнала  $x_i(k)$  или его образа  $X_i(z)$ , которые определяются суммой всех сигналов или Z-образов входящих в узел ветвей. В каждой  $ij$ -ветви (из узла  $i$  в узел  $j$ ) происходит преобразование сигнала в соответствии с передаточной функцией ветви, например задержка сигнала или умножение на коэффициент.

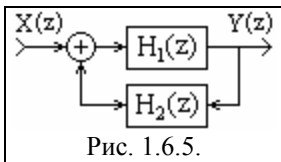
**Соединения фильтров.** Различают следующие соединения фильтров.



1. **Последовательное соединение** (рис. 1.6.3). Выходной сигнал предшествующего фильтра является входным для последующего. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна произведению передаточных функций фильтров, в нее входящих:  $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \dots \cdot H_N(z)$ .

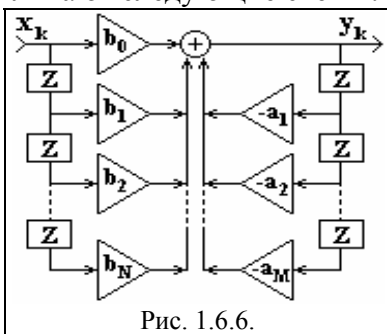


2. **Параллельное соединение** (рис. 1.6.4). Сигнал подается на входы всех параллельно соединенных фильтров одновременно, выходные сигналы фильтров суммируются. Эквивалентная передаточная функция общей системы равна сумме передаточных функций фильтров, в нее входящих:  $H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z)$ .



3. **Соединение обратной связи** (рис. 1.6.5). Выходной сигнал первого фильтра подается на выход системы и одновременно на вход фильтра обратной связи, выходной сигнал которого суммируется, со знаком плюс или минус в зависимости от вида связи (отрицательной или положительной), с входным сигналом системы. Эквивалентная передаточная функция системы:  $H(z) = H_1(z) / (1 \pm H_1(z)H_2(z))$ .

**Схемы реализации фильтров.** По принципам структурной реализации фильтров различают следующие схемы:



1. **Прямая форма** (рис. 1.6.6) реализуется непосредственно по разностному уравнению

$$y_k = \sum_{n=0}^N b_n x_{k-n} - \sum_{m=1}^M a_m y_{k-m},$$

или по передаточной функции

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n / (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^m).$$

2. **Прямая каноническая форма** содержит минимальное число элементов задержки. Передаточную функцию РЦФ можно представить в следующем виде:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = H_1(z)H_2(z),$$

$$H_1(z) = V(z)/X(z) = 1 / (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^m),$$

$$H_2(z) = Y(z)/V(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^n.$$

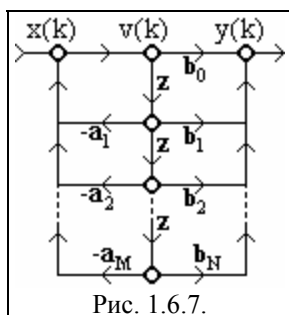


Рис. 1.6.7.

$$\text{Отсюда: } v(k) = x(k) - \sum_{m=1}^M a_m v(k-m), \quad (1.6.1)$$

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n v(k-n).$$

$$(1.6.2)$$

В разностных уравнениях (1.6.1-1.6.2) осуществляется только задержка сигналов  $v(k)$ . Граф реализации РЦФ в прямой канонической форме приведен на рисунке 1.6.7.

3. **Каскадная (последовательная) форма** соответствует представлению передаточной функции в виде произведения:

$$H(z) = \prod_{i=1}^k H_i(z).$$

$H_i(z)$  - составляющие функции вида  $(1-r_i z)/(1-p_i z)$  при представлении  $H(z)$  в факторизованной форме, где  $r_i$  и  $p_i$  - нули и полюсы функции  $H(z)$ . В качестве функций  $H_i(z)$  обычно используются передаточные функции биквадратных блоков - фильтров второго порядка:

$$H_i(z) = (b_{0i} + b_{1i} \cdot z + b_{2i} \cdot z^2) / (1 + a_{1i} \cdot z + a_{2i} \cdot z^2).$$

4. **Параллельная форма** используется много реже и соответствует представлению передаточной функции в виде суммы биквадратных блоков или более простых функций.

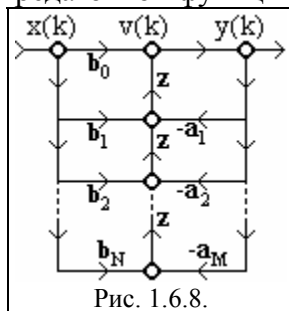


Рис. 1.6.8.

#### Обращенные формы.

В теории линейных направленных сигнальных графов существуют процедуры преобразования исходных графов с сохранением передаточных функций. Одна из таких процедур - обращение (транспозиция) графов, которая выполняется путем изменения направления всех ветвей цепи, при этом вход и выход графа также меняются местами. Для ряда систем такая транспозиция позволяет реализовать более эффективные алгоритмы обработки данных. Пример обращения графа прямой канонической формы рекурсивной системы (с перестроением графа на привычное расположение входа с левой стороны) приведен на рис. 1.6.8.

#### ЛИТЕРАТУРА

- л2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988. - 448 с.
- л4. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. - М.: Мир, 1989. - 540 с.
- л7. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 1985. - 312 с.
- л8. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1990. - 256 с.
- л13. Клаербоут Д.Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации с приложением к разведке нефти. - М.: Недра, 1981. - 304 с.
- л15. Купер Дж., Макгиллем А. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. - М.: Мир, 1989. - 376 с.
- л21. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978. - 848 с.
- л24. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. - М.: Недра, 1987. - 221 с.