

ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД

БДД.27
№ 52

6



Р+V 200052

622.27
УДК 52

Ю. П. ЖЕЛТОВ

ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД

ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА	2
Шифр _____	
Инв. № 14915	



ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА“
МОСКВА © 1966

Аннотация

В книге приведено систематическое изложение теории деформации горных пород в процессах добычи полезных ископаемых.

Подробно освещены: механическое взаимодействие горных пород и насыщающих их жидкостей, гидравлический разрыв пласта, неупругая деформация горных пород, деформация трещиноватых пород.

Книга предназначена для инженерно-технических работников нефтяных промыслов, научных сотрудников проектных и научно-исследовательских институтов, преподавателей и студентов старших курсов нефтяных вузов и факультетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Добыча полезных ископаемых неразрывно связана с механическим воздействием на горные породы. Для того чтобы извлечь из недр нефть, уголь, газ или руду, нужно вначале пробурить скважины или соорудить шахты и создать под землей систему горных выработок.

При последующей разработке полезных ископаемых также приходится иметь дело с механическими явлениями, происходящими в горных породах: деформацией, разрушением и движением пород. Выемка угля представляет собой разрушение угольных пластов, сопровождающееся посадкой пород, залегающих в кровле. Разработка нефтяных и газовых месторождений приводит к изменению давления жидкости и газа, содержащихся в пластах, и последующей деформации пород-коллекторов:

Вошедший в последние годы в практику нефтедобывающей, газовой, а затем и угольной промышленности метод гидравлического разрыва пластов представляет собой механическое воздействие на горные породы, заключающееся в создании в породах трещин.

В геологии возникает необходимость изучения механических явлений, происходивших в горных породах в отдаленные эпохи.

При интерпретации сейсмических данных нужно знать механизм распространения волн напряжений в горных породах и иметь сведения о деформационных свойствах пород.

Сказанное выше не охватывает всех областей практики, где требуется знание механизма деформации, разрушения или движения горных пород. Изучением механических процессов, происходящих в горных породах, занимается механика горных пород.

Предлагаемая читателю книга не является обобщением всей совокупности знаний в области механики горных пород. Автор ставил перед собой иную задачу — осветить, придерживаясь систематического изложения материала, ряд новых вопросов, связанных с деформацией горных пород. Особое внимание автор уделил механизму взаимодействия пород и насыщающих их жидкостей, образованию трещин в горных породах, деформации пород с природной трещиноватостью и неупругой деформации пород.

Большая заслуга в разработке упомянутых выше вопросов принадлежит С. А. Христиановичу, А. П. Крылову и Г. И. Баренблату, на труды которых автор опирался в своих исследованиях.

Автор выражает глубокую признательность проф. И. М. Муравьеву, проф. И. А. Чарному и проф. К. В. Руппенейту, сделавшим ценные замечания по работам автора, выполненным ранее и использованным в этой книге.

Ю. ЖЕЛТОВ

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СОСТОЯНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД В ЗЕМНОЙ КОРЕ

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О НАПРЯЖЕНИИ И ДЕФОРМАЦИИ

В этой книге речь будет идти о деформации горных пород, залегающих в самых верхних слоях земной коры, где в настоящее время ведется разработка полезных ископаемых — нефти, угля, газа и т. д. Наиболее часто встречаются здесь осадочные породы: песчаники, алевролиты, аргиллиты, известняки, глины, доломиты, гипсы, ангидриты и др. Однако имеются также изверженные и метаморфические горные породы: граниты, базальты, диориты, кварциты, мраморы и др.

Как и всякие реальные вещества, горные породы деформируются при воздействии на них нагрузок. Процессы деформации горных пород можно описать количественно при помощи представлений и методов механики сплошных сред. Вводя понятие «сплошной среды», полагают, что в произвольной точке тела можно выделить малый по сравнению с размерами области, в которой протекает данный процесс, элемент («бесконечно малый» элемент) и написать для него уравнение, математически описывающее изучаемый процесс. Таким образом, уравнение, справедливое для некоторого данного бесконечно-малого элемента тела, является справедливым и для элемента, выделенного в любой другой точке, в силу принятого понятия о сплошности среды. Горные породы обладают неоднородным строением. Однако если l — размер участка, на котором происходит процесс деформации пород, λ — средний размер неоднородностей среды, а δl — бесконечно-малый элемент, то, применяя методы механики сплошных сред, можно считать породы в среднем однородными на участке размером l при условии $l \gg \delta l \gg \lambda$. На рис. 1 показана увеличенная фотография кварцевого мелкозернистого песчаника. Размер зерен кварца в песчанике составляет

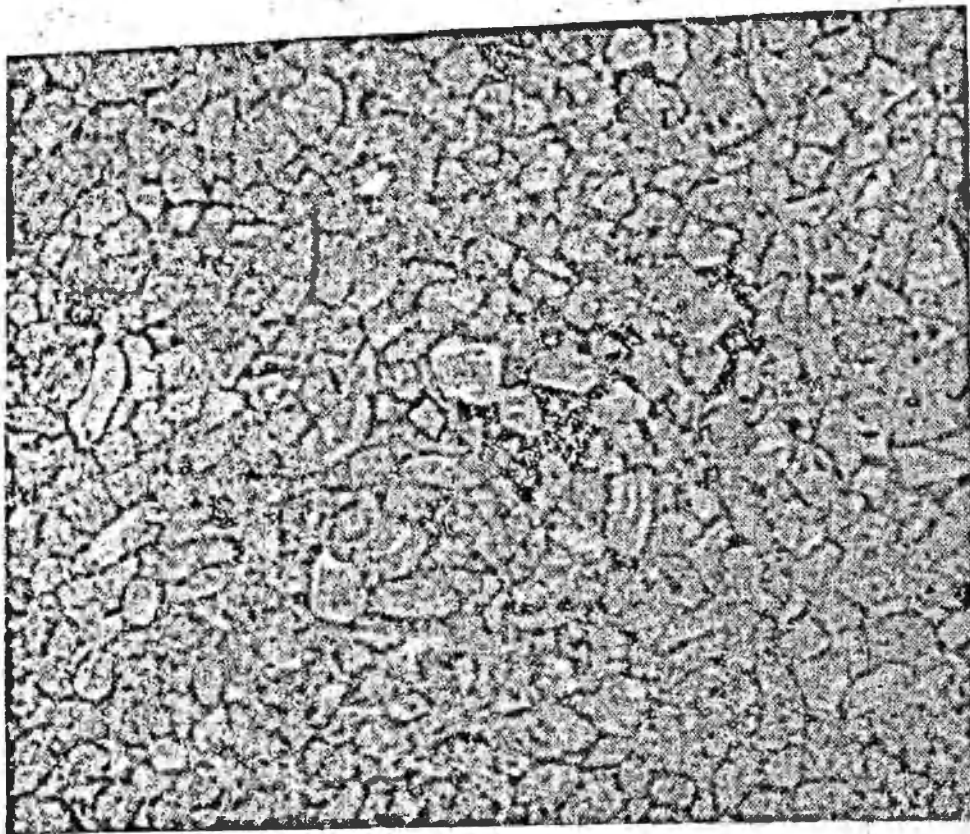


Рис. 1.
Фотография
песчаника.

0,11—0,18 мм ($\lambda \approx 10^{-2}$ см). Если рассматривать процесс деформации этого песчаника на участках l , величиной в несколько метров или десятков метров, то показанную на рис. 1 породу можно, по-видимому, считать однородной средой. В дальнейшем примем, что породы в целом однородны. Кроме того, допустим, что неоднородности распределены в среднем равномерно по разным направлениям внутри малого элемента, так что породы можно считать также и изотропными.

Рассмотрим теперь напряжение и деформацию — два важнейших понятия механики сплошных сред, которые понадобятся нам в дальнейшем. Для этого мысленно выделим в пласте или массиве породы достаточно малый элемент, имеющий форму куба, ребра которого равны соответственно dx , dy и dz (рис. 2). В результа-

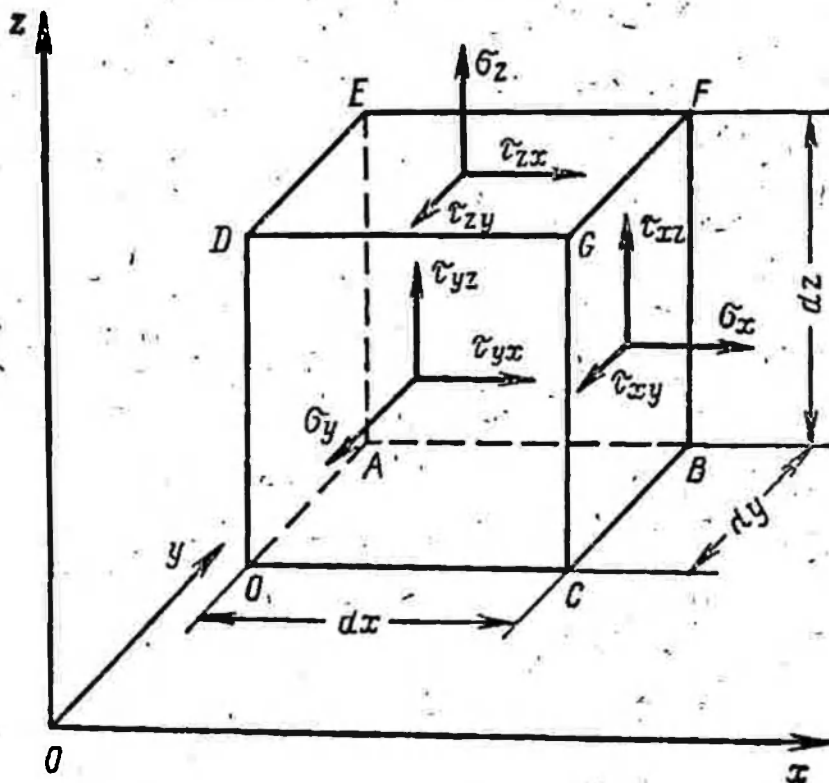


Рис. 2. Малый элемент деформирующейся сплошной среды.

те приложения внешних усилий к границам пласта или массива или действия сил, распределенных по всему объему породы, в любом произвольно выделенном малом кубе породы (в окрестности каждой точки породы) возникнет напряженное состояние. Оно будет характеризоваться нормальными напряжениями σ_x , σ_y и σ_z и касательными напряжениями τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} , приложенными к граням куба и действующими в соответствующих направлениях.

Напряжения σ_x , σ_y , σ_z называют также компонентами нормального напряжения, а τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy} — компонентами касательного напряжения на данной площадке.

Совокупность девяти компонент напряжений полностью характеризует напряженное состояние в малом элементе тела. Эта совокупность образует тензор напряжений, записываемый в виде:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Используя положение статики о равенстве нулю полного момента сил, действующих на малый элемент, можно показать, что всегда $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Таким образом, для описания напряженного состояния оказывается достаточным шести компонент напряжений.

Подробное описание напряженного состояния в точке тела и свойств тензора напряжений имеется в известных книгах Лява [69], С. П. Тимошенко [100], Н. Е. Кочина [55], Л. С. Лейбензона [65], Н. И. Мухелишвили [76], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [62], Рейнера [85] и др.

Ниже рассмотрим некоторые из основных особенностей напряженного состояния. Из теории напряжений известно, что в каждой точке нагруженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные площадки, по которым действуют одни только нормальные напряжения, а касательные равны нулю. Нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными нормальными напряжениями, а направления соответствующих нормалей образуют главные оси тензора напряжений. Главные нормальные напряжения будем обозначать через σ_1 , σ_2 , σ_3 , при этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Главные оси тензора напряжений можно принять за оси координат, и тогда тензор напряжений преобразуется к виду:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Плоскости, по которым действуют главные напряжения, также называются главными. На площадках, делящих углы между глав-

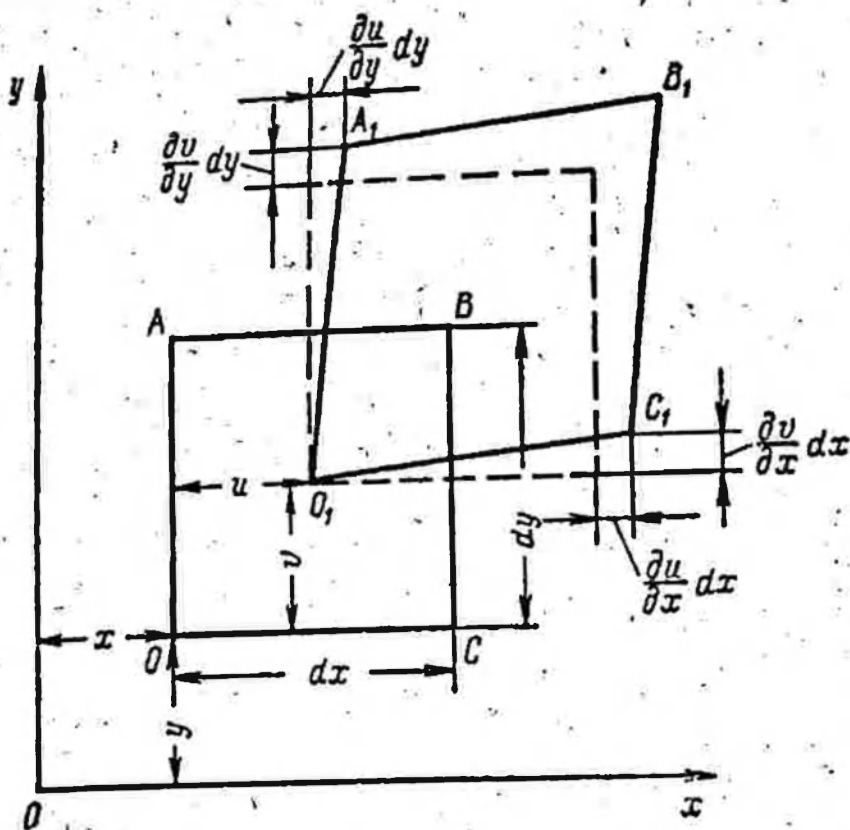


Рис. 3. Схема деформации грани элемента сплошной среды.

ными плоскостями пополам, действуют одни только касательные напряжения, определяемые формулами

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1.3)$$

Напряжения τ_1 , τ_2 и τ_3 называются главными касательными напряжениями.

Таким образом, получается, что в каждой точке тела можно создать любое напряженное состояние, задав определенным образом либо главные нормальные, либо главные касательные напряжения.

Приложение напряжения к элементарному объему тела вызывает его деформацию. Возьмем этот объем опять в виде куба. Действующие на куб напряжения вызовут смещение его граней и их искажение. На рис. 3 показано положение грани куба, находящейся в плоскости x, y , до и после деформации. Как видно из рисунка, грань куба, занимавшая первоначально положение $OABC$, деформируясь, займет положение $O_1A_1B_1C_1$, испытав не только перемещение, но и искажение. Компоненты смещения элементарного куба соответственно в направлениях x, y , и z будем обозначать через u, v и w . Относительные изменения длин соответствующих ребер грани $OABC$ определяются величинами $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

а угол сдвига — величиной $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Для других граней куба имеем соответственно:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Шесть величин: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ являются компонентами тензора деформации, полностью определяющими деформацию в данной точке тела. Смещение же в точке тела определяется вектором, имеющим компоненты u, v и w .

Тензор деформаций записывается в виде:

$$T_\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Тензор T_ϵ имеет главные относительные удлинения ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 и главные сдвиги $\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1, \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$. В тех случаях, когда приходится рассматривать скорости деформации, имеем тензор

$$T_\xi = \begin{vmatrix} \xi_x & \frac{1}{2} \eta_{xy} & \frac{1}{2} \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2} \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xz} & \frac{1}{2} \eta_{yz} & \xi_z \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

где $\xi_x = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_x, \eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{xy}$; t — время.

Деформация в каждой точке тела разлагается на всестороннее сжатие (или растяжение) и сдвиг. Поэтому удобно разложить каждый из приведенных выше тензоров на соответствующие части. Тогда тензор напряжений представится в виде:

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma; \quad (1.6)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (1.7)$$

где

$$T_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ — единичный тензор,}$$

и

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Тензор D_σ характеризует сдвиг и называется девиатором напряжений. Величина σ называется средним нормальным напряжением. Она не зависит от выбора осей координат, т. е. является инвариантом. Следовательно, $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$.

Девиаторы деформации и скорости деформации записываются в виде:

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{1}{3} \varepsilon \end{vmatrix}; \quad (1.9)$$

$$D_\xi = \begin{vmatrix} \xi_x - \frac{1}{3} \xi & \frac{1}{2} \eta_{xy} & \frac{1}{2} \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xy} & \xi_y - \frac{1}{3} \xi & \frac{1}{2} \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xz} & \frac{1}{2} \eta_{yz} & \xi_z - \frac{1}{3} \xi \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ — относительное изменение объема; $\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z$ — скорости относительного изменения объема, являющиеся также инвариантами.

Важное значение в теории напряжений и деформации, а также прочности материалов имеют величины

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (1.11)$$

и

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]}. \quad (1.12)$$

Величина S называется интенсивностью касательных напряжений, а Γ — интенсивностью сдвига.

Все приведенные выше соотношения, характеризующие отдельно напряжение и деформацию, справедливы для любой деформируемой сплошной среды — упругой; вязкой и т. д. Вид связи между тремя основными факторами, описывающими поведение деформируемого тела, — напряжением, деформацией и скоростью деформации, зависит в конечном счете от физических свойств рассматриваемого элементарного объема материала. Эти связи называются реологическими уравнениями состояния.

§ 2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

В предыдущем параграфе были описаны некоторые наиболее важные особенности напряженного состояния и деформации в точке деформируемой сплошной среды. Рассмотрим теперь более подробно вопрос о том, как изменяются напряжения и деформации при изменении направления координатных осей.

Сначала определим компоненты напряжения, приложенного к площадке, проходящей через данную точку тела наклонно по отношению к первоначальным координатам x, y, z . Для этого выделим около рассматриваемой точки малый элемент, ограниченный координатными плоскостями и наклонной плоскостью abc (рис. 4). Пусть площадь грани abc равна dS . Тогда площадь грани oac $S_{oac} = dS \cos(y, u)$, где знаком (y, u) помечен угол между направлением нормали к площадке abc и направлением оси y . Соответственно площади других граней призмы $ocab$ будут: $S_{boc} = dS \cos(x, u)$, $S_{oab} = dS \cos(z, u)$. Обозначим далее $\cos(x, u) = l_1$, $\cos(y, u) = m_1$ и $\cos(z, u) = n_1$.

Рассматривая равновесие сил, действующих на элемент $oabc$ в направлении x , получим.

$$\sigma_{ux} dS = \sigma_x S_{obc} + \tau_{xy} S_{oac} + \tau_{xz} S_{oab} = \sigma_x dS l_1 + \tau_{xy} dS m_1 + \tau_{xz} dS n_1. \quad (2.1)$$

Сокращая равенство (2.1) на dS , получаем

$$\sigma_{ux} = \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1. \quad (2.2)$$

Аналогично получаются выражения для других компонент напряжения, действующего на площадку abc . Имеем соответственно:

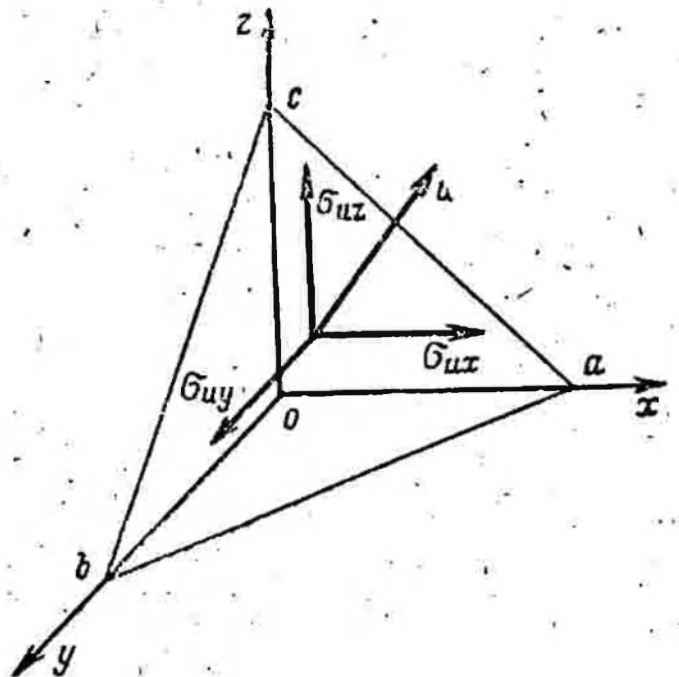
$$\begin{aligned} \sigma_{uy} &= \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1 + \tau_{xy} l_1; \\ \sigma_{uz} &= \sigma_z n_1 + \tau_{xz} l_1 + \tau_{zy} m_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Напряжения σ_{ux} , σ_{uy} и σ_{uz} являются компонентами напряжения σ_u , действующего по нормали к площадке abc .

Для этого напряжения имеем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_{ux} l_1 + \sigma_{uy} m_1 + \sigma_{uz} n_1 = \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + \\ &+ 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{xz} l_1 n_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рис. 4. Малый элемент с наклонной площадкой.



Можно взять еще две площадки, перпендикулярные к площадке abc с нормальными v и w . Обозначим аналогично предыдущему $\cos(x, v) = l_2, \dots, \cos(x, w) = l_3, \dots$. Тогда из выражений для направляющих косинусов между осями x, y, z и новыми направлениями u, v и w можно составить следующую таблицу:

	x	y	z
u	l_1	m_1	n_1
v	l_2	m_2	n_2
w	l_3	m_3	n_3

Из этой таблицы легко находятся выражения для любых направляющих косинусов. Например, $\cos(y, v) = m_2, \cos(z, v) = n_2, \cos(y, w) = l_3$ и т. д.

Для напряжений, действующих на площадках по нормальным v и w , получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{xz} l_2 n_2; \\ \sigma_w &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{xz} l_3 n_3. \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Легко также получают выражения для касательных напряжений на площадках с нормальными u, v и w . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uv} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (m_1 l_2 + l_1 m_2) + \\ &+ \tau_{yz} (n_1 m_2 + m_1 n_2) + \tau_{xz} (n_1 l_2 + l_1 n_2); \\ \tau_{vw} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (m_2 l_3 + \\ &+ l_2 m_3) + \tau_{yz} (n_2 m_3 + m_2 n_3) + \tau_{xz} (n_2 l_3 + l_2 n_3); \\ \tau_{uw} &= \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy} (m_1 l_3 + \\ &+ l_3 m_1) + \tau_{yz} (n_1 m_3 + m_1 n_3) + \tau_{xz} (n_1 l_3 + l_1 n_3). \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Величины $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w, \tau_{uv}, \tau_{vw}, \tau_{uw}$ являются компонентами тензора напряжений, существующего в той же точке пространства, что и тензор с компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, но уже не в системе координат x, y, z , а в системе u, v, w .

Допустим теперь, что в результате решения соответствующей задачи механики деформируемой среды определены компоненты тензора напряжений в системе координат x, y, z . Тогда возникает следующая задача: как определить главные нормальные напряже-

ния σ_1 , σ_2 и σ_3 и соответствующие направляющие косинусы l , m и n по известным компонентам тензора напряжений в координатах x , y , z ? Для решения этой задачи рассмотрим снова напряжения, существующие на наклонной площадке abc (см. рис. 4). Полное напряжение Σ , приложенное к этой площадке, выражается через нормальное напряжение σ_n и полное касательное напряжение τ следующим образом:

$$\Sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2. \quad (2.7)$$

Согласно определению, на главной площадке касательные напряжения должны отсутствовать и, следовательно, $\tau=0$ и $\Sigma=\sigma_n$.

Пусть одной из главных является площадка с нормалью u . В случае, если $\tau=0$ и полное напряжение направлено по нормали u , получается, что

$$\sigma_{ux} = \Sigma l_1, \quad \sigma_{uy} = \Sigma m_1, \quad \sigma_{uz} = \Sigma n_1. \quad (2.8)$$

Учитывая (2.2), (2.3), (2.8), а также условие

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

можно получить систему уравнений для определения Σ , l_i , m_i и n_i . Напишем эту систему уравнений, опуская индекс i :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \Sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \Sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \Sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Однородная система линейных уравнений (2.10) может иметь, как известно решение, отличающееся от решения $l=m=n=0$, в том случае, если ее определитель равен нулю. Используя это условие, приходим к следующему уравнению относительно Σ :

$$\Sigma^3 - I_1 \Sigma^2 + I_2 \Sigma - I_3 = 0, \quad (2.11)$$

где

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2; \quad I_3 = \\ = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

Величины I_1 , I_2 , I_3 являются инвариантами — они не изменяются при изменении осей координат.

Решая уравнение (2.11) при известных компонентах тензора напряжений в координатах x , y , z , получаем три корня — три главных нормальных напряжения: σ_1 , σ_2 и σ_3 . Далее, подставив в какие-либо два уравнения (2.10) одно из главных нормальных напряжений и используя соотношение (2.9), определим направляющие косинусы главных нормалей. Зная направления и абсолютные значения главных нормальных напряжений, можно очень

просто определить главные касательные напряжения по формулам, данным в § 1.

В качестве примера рассмотрим плоское напряженное состояние, когда $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Соотношения (2.10) в этом случае существенно упрощаются и принимают вид:

$$(\sigma_x - \Sigma)l + \tau_{xy}m = 0;$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \Sigma)m = 0.$$

- Для определения главных нормальных напряжений σ_1 и σ_2 имеем уже квадратное уравнение:

$$\Sigma^2 - (\sigma_y + \sigma_x)\Sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0. \quad (2.12)$$

Корнями этого уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 = \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \Sigma_2 = \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

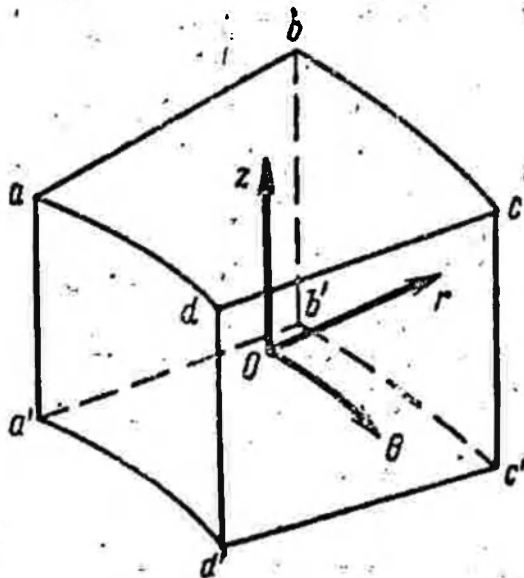
Учитывая, что при плоской задаче $l_1 = \cos \alpha$, $m_1 = -\sin \alpha$, $l_2 = \sin \alpha$, $m_2 = \cos \alpha$ (α — угол между наклонной площадкой и ось OX), получаем простое выражение для определения угла наклона α_1 площадки главного нормального напряжения σ_1 к оси OX :

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\sigma_x - \sigma_1}{\tau_{xy}}. \quad (2.14)$$

Выражения, в общем аналогичные формулам (2.4), (2.5) и (2.6), можно написать для компонент тензора деформаций в координатах u , v , w . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_u &= \epsilon_x l_1^2 + \epsilon_y m_1^2 + \epsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{xz} l_1 n_1; \\ \epsilon_v &= \epsilon_x l_2^2 + \epsilon_y m_2^2 + \epsilon_z n_2^2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{xz} l_2 n_2; \\ \epsilon_w &= \epsilon_x l_3^2 + \epsilon_y m_3^2 + \epsilon_z n_3^2 + \gamma_{xy} l_3 m_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{xz} l_3 n_3; \\ \gamma_{uv} &= 2\epsilon_x l_1 l_2 + 2\epsilon_y m_1 m_2 + 2\epsilon_z n_1 n_2 + \gamma_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \gamma_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{xz} (n_1 l_2 + l_1 n_2); \\ \gamma_{vw} &= 2\epsilon_x l_2 l_3 + 2\epsilon_y m_2 m_3 + 2\epsilon_z n_2 n_3 + \gamma_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \gamma_{yz} (n_2 m_3 + m_2 n_3) + \gamma_{xz} (n_2 l_3 + l_2 n_3); \\ \gamma_{uw} &= 2\epsilon_x l_1 l_3 + 2\epsilon_y m_1 m_3 + 2\epsilon_z n_1 n_3 + \gamma_{xy} (m_1 l_3 + l_1 m_3) + \gamma_{yz} (n_1 m_3 + m_1 n_3) + \gamma_{xz} (n_1 l_3 + l_1 n_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Рис. 5. Элементарный объем сплошной среды, выраженный в цилиндрических координатах.



Главные деформации и направления соответствующих нормалей к главным площадкам определяются способами, аналогичными описанным выше.

Выражения для компонент деформации в ортогональных криволинейных координатах имеются в монографиях Лява [69], Н. Е. Кочина [55] и др. Приведем здесь без вывода указанные выражения для наиболее часто встречающихся ортогональных криволинейных координат — цилиндрических и сферических.

Цилиндрические координаты. Элементарный объем деформирующейся среды в цилиндрических координатах имеет вид, показанный на рис. 5.

Смещения элемента $abcd a'b'c'd'$ вдоль координат будут u_r , u_θ и u_z . Для соответствующих деформаций элемента имеем выражения [69]:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Для объемной деформации ϵ цилиндрического элемента имеем формулу [69]

$$\epsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.17)$$

Сферические координаты. Элементарный объем среды в сферических координатах показан на рис. 6.

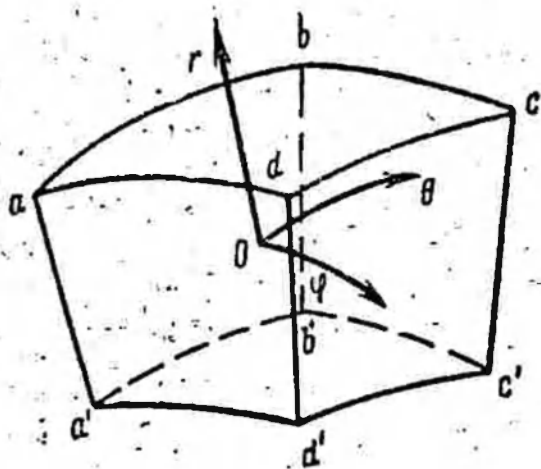


Рис. 6. Элементарный объем сплошной среды, выраженный в сферических координатах.

Для смещений элемента $abcda'b'c'd'$ в направлении координат, показанных на рис. 6, имеем формулы [69]:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ \gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} (2.18)$$

Объемная деформация элемента $abcda'b'c'd'$ (см. рис. 6) в данном случае зависит от смещений следующим образом:

$$\epsilon = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r u_\varphi) \right]. \quad (2.19)$$

§ 3. СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

При малых напряжениях и деформациях и малых длительностях процессов для многих твердых тел, в том числе и для горных пород, характерна упругость. Связь между напряжением и деформацией в этом случае выражается зависимостями

$$\epsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma \quad (3.1)$$

и

$$D_\sigma = \frac{E}{1+\nu} D_\epsilon, \quad (3.2)$$

где E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона.

Для того чтобы написать соотношения между напряжениями и деформациями в развернутом виде, необходимо приравнять соответствующие компоненты девиаторов напряжений и деформаций (1.8) и (1.9) с учетом коэффициентов пропорциональности (3.1)

и (3.2). Например, приравнивая верхние левые компоненты в (1.8) и (1.9) и учитывая (3.1), получаем $\sigma_x - \sigma = \frac{E}{1 + \nu} \left(\epsilon_x - \frac{\epsilon}{3} \right)$. откуда после преобразований имеем $\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$. Аналогично получаются соотношения и для других компонент. В результате имеем следующие соотношения для тела, деформирующегося упруго:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

При изучении деформации сильно увлажненных глинистых пород необходимо учитывать свойство пород течь подобно вязкой жидкости. В этом случае имеют значение скорости деформации.

Для вязкой жидкости существует следующая связь между девиатором напряжений и девиатором скоростей деформаций:

$$D_\sigma = 2\mu D_\epsilon, \quad \sigma = -p, \quad (3.4)$$

где μ — коэффициент вязкости жидкости; p — давление жидкости.

Жидкость, уравнением состояния которой является зависимость (3.4), называется ньютоновской. Зависимость (3.4), написанная в развернутой форме, принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - p, \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - p, \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - p; \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} (3.5)$$

У некоторых горных пород проявляются одновременно и свойства упругости, и свойства вязкости. Такие свойства наблюдаются у глин, алевролитов, глинистых сланцев; они могут быть, по-видимому, и у твердых пород деформирующихся в течение больших

промежутков времени или залегающих на больших глубинах в условиях повышенных температур и давлений: Реологическим уравнением состояния таких пород является зависимость

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{2K_M} \frac{dD_{\varepsilon}}{dt} + \frac{D_{\varepsilon}}{2\mu_M} \quad (3.6)$$

Среда, характеризующаяся уравнением состояния (3.6), называется средой, или телом, Максвелла. Входящие в это уравнение коэффициенты K_M и μ_M могут быть названы соответственно максвелловским модулем упругости и максвелловской вязкостью. При отсутствии изменения деформации со временем; т. е. при $D_{\varepsilon} = 0$, получаем

$$D_{\varepsilon} = [D_{\varepsilon}]_0 \exp\left(-\frac{K_M t}{\mu_M}\right),$$

где $[D_{\varepsilon}]_0$ — девиатор напряжений, существовавших при начальной деформации.

Таким образом, напряжение сдвига в максвелловской среде в рассматриваемом случае уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Это явление называется релаксацией напряжений.

Следует заметить, что для полного описания деформации элементарного объема среды Максвелла необходимо иметь, помимо уравнения (3.6), также связь между средней скоростью деформации ξ и средним нормальным напряжением σ . Укажем три возможных типа зависимости $\xi = \xi(\sigma)$.

В качестве одной из них может быть зависимость (3.1), принимаемая для упругого тела. Вторую зависимость естественно взять в таком же виде, как и у вязкой несжимаемой жидкости, т. е. считать, что $\sigma = -p$, $\xi = 0$.

Для некоторых пористых пород; по-видимому, можно считать, что средняя скорость деформации зависит от среднего нормального напряжения в виде:

$$\frac{1}{3} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{3} \xi = \frac{1}{2K_M} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\sigma}{2\mu_M} \quad (3.7)$$

Это — третья форма зависимости $\xi = \xi(\sigma)$ для среды Максвелла. В каждом из трех случаев деформация среды Максвелла будет происходить вообще различным образом.

Реологические уравнения состояния (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6) являются линейными. Известен и ряд других линейных уравнений состояния. Наиболее общее линейное уравнение состояния может быть выражено формулой

$$a_0 + a_1 D_{\varepsilon} + a_2 D_{\varepsilon}^2 + a_3 D_{\varepsilon}^3 + a_4 \frac{dD_{\varepsilon}}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

При $a_0 = a_2 = a_4 = 0$, $a_1 = \frac{F'}{i + \nu}$, $a_3 = -1$ из (3.8) получаем уравнение состояния упругого тела (3.2). Если положить $a_0 = a_1 = a_4 = 0$, $a_2 = 2\mu$, $a_3 = -1$, будем иметь уравнение состояния (3.4), а при $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{2K_M}$, $a_4 = -\frac{1}{2\mu_M}$ — уравнение состояния (3.6).

При $a_0 = a_4 = 0$ и $a_1 = 2K_K$, $a_2 = 2\mu_K$, $a_3 = -1$ имеем среду Кельвина (K_K , μ_K — соответственно кельвиновские модуль упругости и коэффициент вязкости). Она имеет следующую особенность. Если действие нагрузок на среду Кельвина в какой-то момент времени прекратится, то деформация не исчезает после этого мгновенно, а уменьшается по закону

$$D_\varepsilon = [D_\varepsilon]_0 \exp\left(-\frac{K_K}{\mu_K} t\right),$$

где $[D_\varepsilon]_0$ — девиатор деформации в момент прекращения действия на тело нагрузок (при $t=0$). Указанное свойство среды Кельвина называется упругим последствием. При $a_1 = a_4 = 0$ имеем среду Бингама.

Известно очень много реологических моделей, предназначенных для описания деформации и течения различных веществ. Наиболее близки к горным породам по химическому и минералогическому составу бетон и глинистые растворы, применяемые при бурении скважин. Для описания деформации бетона в качестве реологических уравнений состояния пользуются [5, 84] интегральными уравнениями. Эти же уравнения применяются [105] для описания деформации грунтов с учетом их старения, ползучести и разрушения структуры. Поведение глинистых растворов описывается [74] моделью вязко-пластичного тела [49, 50].

Для описания механических процессов, происходящих в горных породах, необходимо знать константы, входящие в приведенные выше уравнения состояния. Так, при изучении упругой деформации породы нужно знать ее модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для того чтобы определить указанные константы горных пород, в них создают обычно такое напряженное состояние, которое может быть описано достаточно простыми математическими зависимостями, что позволяет легко найти связь между напряжением и деформацией. Методы определения модуля Юнга и коэффициента Пуассона горных пород, а также соответствующие эксперименты описаны в работах К. В. Руппенейта [90, 91], Л. А. Шрейнера и др. [112, 113], Дон Уги [34] и др.

Допустим, что в горной породе удалось создать наиболее простое напряженное состояние — одноосное сжатие, так что $\sigma_x = \sigma_y =$

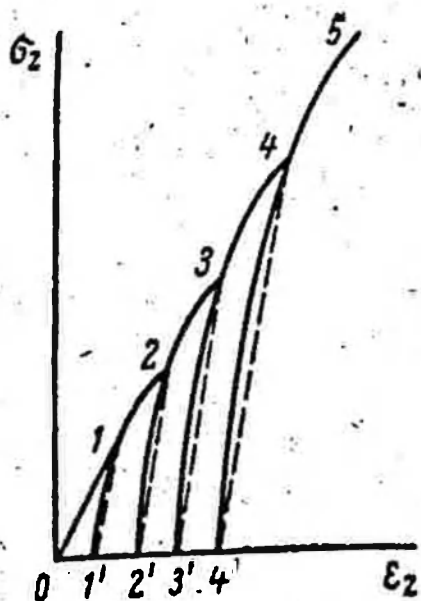


Рис. 7. Зависимость $\sigma_z = \sigma_z(\epsilon_z)$.

$= 0$ и $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Тогда $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$. Если по-
 степенно увеличивать нагрузку на гор-
 ную породу, то зависимость $\epsilon_z = \epsilon_z(\sigma_z)$
 или $\sigma_z = \sigma_z(\epsilon_z)$ будет выражаться кривой,
 показанной на рис. 7 (участок 0—1).

Для многих горных пород эту зависимость можно считать линей-
 ной, что соответствует закону Гука. Однако у ряда пород при
 механических испытаниях наблюдается следующая картина. При
 постепенном снятии нагрузки с горной породы ее деформация
 происходит по кривой 1—1' (пунктирная линия), не совпадающей
 с линией первоначального нагружения, т. е. деформация пород
 является необратимой. Участок 1'—1—2 (сплошная линия на
 рис. 7) соответствует новому нагружению породы и т. д.

Необратимость деформации горных пород связана с их уплот-
 нением и течением. При этом песчаники и плотные глинистые
 сланцы ведут себя, как реологические тела; деформация которых
 не возрастает безгранично с течением времени, а стремится к не-
 которой предельной величине. На рис. 8 показана зависимость
 деформации от времени для песчано-глинистого сланца, подня-
 того из шахт Донецкого бассейна. Эти зависимости взяты из кни-
 ги К. В. Руппенейта и Ю. М. Либермана [92]. Глины же деформи-
 руются, как среды Максвелла. На рис. 9 показана зависимость
 деформации от времени для глины Подмосковского бассейна, взя-
 тая из той же книги [92]. Как видно из рис. 8, для сланцев время,

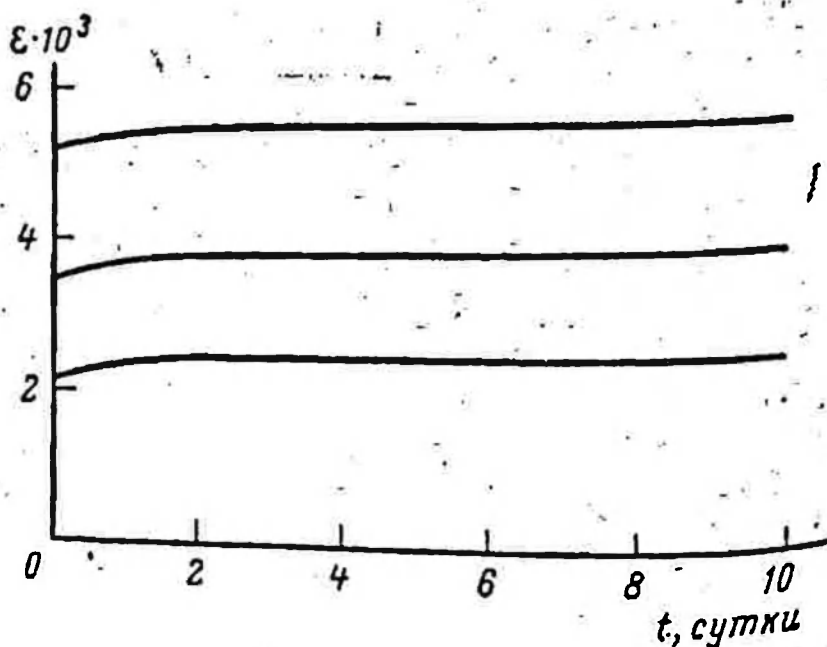
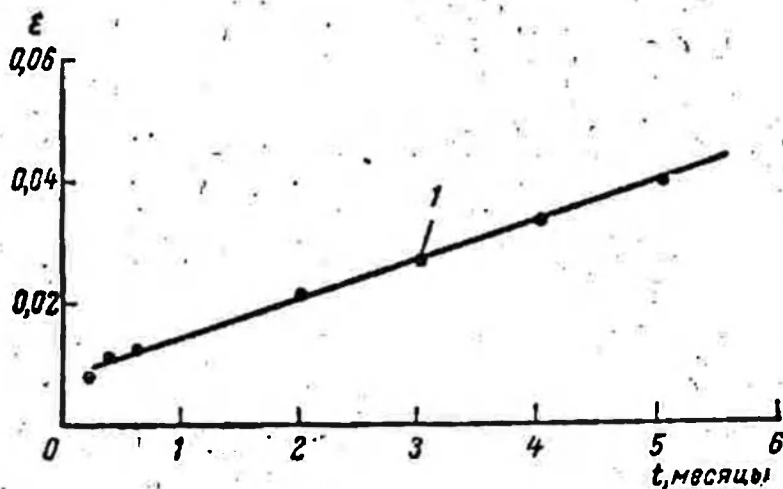


Рис. 8. Зависимость де-
 формации от времени
 для песчано-глинистого
 сланца [92].

Рис. 9. Зависимость деформации от времени для глины Подмосковного бассейна [92].

1 — экспериментальные точки.



в течение которого заметен рост деформации, составляет величину порядка суток и больше. При практическом изучении механических процессов в телах, имеющих предельную деформацию, можно не учитывать зависимость деформации от времени и пользоваться кривыми $\sigma_z = \sigma_z(\epsilon_z)$ в виде, показанном на рис. 7, считая, что при экспериментальном определении этих кривых образцы горных пород выдерживались под нагрузкой достаточно продолжительное время и что изучаемые механические процессы имеют длительность, превышающую характерное время установления предельной деформации.

Далее, согласно рис. 7 можно приближенно считать всю линию нагружения 0—5 прямой, а линии разгрузок 1—1', 2—2', и т. д. — параллельными прямыми и в связи с этим полагать, что деформация пород при нагружении происходит во всей области с модулем Юнга E_1 , а при разгрузке — с модулем E_2 . В работе ДонУги [34] приведены результаты многочисленных измерений модуля Юнга горных пород при нагружении E_1 и разгрузке E_2 . В этой работе [34] определялась величина $1 - \frac{E_1}{E_2}$. Она оказалась равной для глинистого сланца приблизительно 0,55 и для песчаника 0,1 ÷ 0,13 при создании в породах напряжения порядка 150 кг/см².

Следовательно, для глинистого сланца $\frac{E_2}{E_1} = 2,2$, а для песчаника

$\frac{E_2}{E_1} = 1,1 \div 1,2$. При этом как для глинистых сланцев, так и для

песчаников был замечен рост необратимой деформации при увеличении напряжения сжатия. Поэтому при более высоком среднем нормальном напряжении необратимая деформация пород будет, по-видимому, большей. Кроме того, нет полной уверенности в том, что при испытаниях горных пород, описанных в работе [34], образцы пород выдерживались под нагрузкой достаточно продолжительное время.

В табл. 1 и 2 приведены взятые из работ [90, 113] значения E и ν для пород, наиболее часто встречающихся в пределах нефтегазоносных горизонтов.

Таблица 1

Механические свойства горных пород Донецкого бассейна, определенные при испытаниях на сжатие [90]

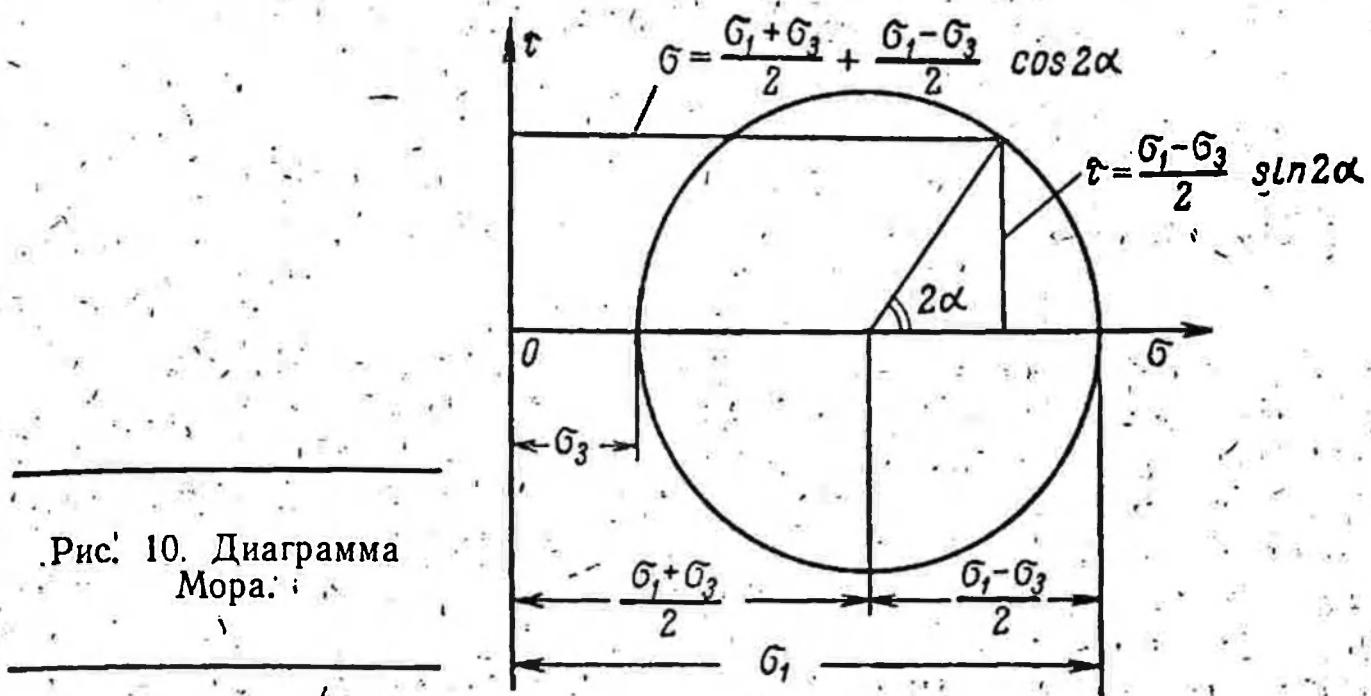
Породы	Модуль Юнга $E \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$		Коэффициент Пуассона ν	
	по слоям	перпендикулярно слоям	по слоям	перпендикулярно слоям
Глинистые сланцы	3,16	1,54	0,22	0,22
Песчаные сланцы	3,63	2,42	0,25	0,16
Песчаники	3,47	3,98	0,13	0,13
Известняки	6,36	7,25	0,28	0,30

Таблица 2

Модули Юнга горных пород нефтяных месторождений Татарии, Башкирии, Куйбышевской и Пермской областей, определенные методом вдавливания штампа [113]

Породы	Модуль Юнга $E \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$
Алевролиты кварцевые	0,56—0,83
Известняки пелитоморфные	2,0
глинистые	
Доломиты мелкозернистые	4,37
Аргиллиты	0,55
Песчаники кварцевые мелкозернистые	0,24—0,47
Песчаники кварцевые среднезернистые	1,76
Песчаники кварцевые	1,08—1,3

Если постепенно увеличивать нагружение горной породы, то при некоторой нагрузке в ней либо начнется пластическая деформация, либо порода разрушится. Эксперименты [90, 91] показывают, что при любом напряженном состоянии пластическая деформация или разрушение данной горной породы начинается при определенных предельных значениях S и σ . Физически это означает, что переход горной породы в состояние пластичности или ее разрушение осуществляются при достижении максимальными касательными напряжениями некоторых значений, а также зависят от величины всестороннего сжатия. Поэтому предельное напряженное состояние горных пород характеризуется в общем случае зависимостью $S_* = f(\sigma)$ (S_* — предельное значение S). Иногда для горных пород используют теорию прочности Мора, согласно



которой предельное напряженное состояние выражается огибающей кругов главных наибольших напряжений на диаграмме Мора:

$$\tau_* = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f(\sigma), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

При плоской задаче, когда имеется два главных нормальных напряжения, эта зависимость имеет вид:

$$\tau_* = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right).$$

Диаграмма Мора имеет вид, показанный на рис. 10. На рис. 11 представлена огибающая наибольших кругов Мора для песчаника [90].

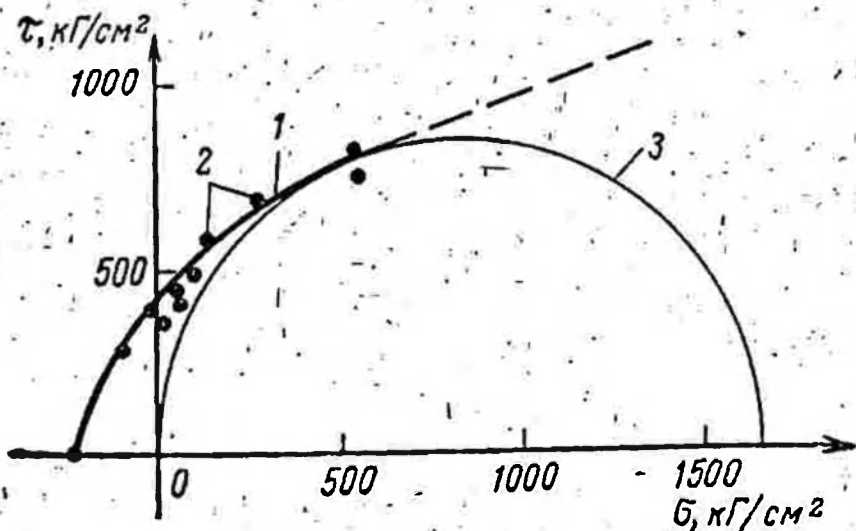


Рис. 11. Огибающая наибольших кругов Мора для песчаника.

1 — огибающая; 2 — экспериментальные точки; наибольший круг Мора.

§ 4. ГОРНОЕ ДАВЛЕНИЕ

В пластах или массивах горных пород существует естественное напряжение, возникшее в результате действия на породы силы тяжести, сил, связанных с тектоническими процессами, а также с образованием и физико-химическим превращением горных пород. Это напряжение называют горным давлением. Различают вертикальную и горизонтальную компоненты горного давления, которые можно назвать соответственно полным и боковым горным давлением. Величина каждой из компонент горного давления определяется удельным весом вышележащих горных пород, типом, интенсивностью и продолжительностью тектонических процессов, характером процессов образования и физико-химического превращения горных пород, а также механическими свойствами, которыми обладали породы во время протекания этих процессов. Иными словами, естественное напряжение в горных породах — горное давление — является продуктом всего процесса образования геологических структур.

Знание горного давления необходимо при исследовании и практическом осуществлении многих процессов в горных породах.

Можно указать два подхода к определению горного давления.

Первый подход состоит в прямом его измерении в пластах или массивах горных пород. Такие измерения осуществляются в горнодобывающей промышленности [31]. Известны также прямые геофизические методы измерения горного давления [87].

Большие возможности для измерений горного давления появляются в связи с использованием в нефтедобывающей, газовой и угольной промышленности гидравлического разрыва пласта. По давлению, при котором начинает образовываться трещина при гидравлическом разрыве, можно оценить горное давление на данном участке пласта. Для того чтобы знать, к какой компоненте горного давления относится измеренная величина давления жидкости, соответствующего началу раскрытия трещины, необходимо определить ориентацию образованной трещины.

Второй подход заключается в расчете горного давления методами механики сплошных сред. Следует отметить, что сложность геометрических форм реальных структур и протекающих в них процессов, неоднородность горных пород, отсутствие надежных данных о свойствах, которыми обладали породы в предшествующие геологические эпохи, значительно затрудняют расчеты горного давления. Тем не менее расчет оказывается во многих случаях единственно возможным способом определения горного давления и дает приемлемые для практики результаты.

Укажем ряд основных случаев, когда компоненты горного давления могут быть определены расчетным путем. Так, горное давление возникает прежде всего из-за действия силы тяжести и, следовательно, зависит от удельного веса пород и глубины залегания

пласта. При отсутствии значительных тектонических движений в горизонтальном направлении и при почти горизонтальном залегании пластов вертикальная компонента q горного давления равна сумме произведений удельного веса пород в каждом слое γ_i на мощность слоя h_i :

$$q = \sum_{i=0}^n \gamma_i h_i \quad (4.1)$$

Интересно отметить, что плотность горных пород может возрастать с глубиной. Так, Хабберт и Виллис [133] приводят следующие данные (табл. 3) об изменении плотности водонасыщенных пород с глубиной, полученные в результате измерения плотности 2200 образцов пород большей частью пенсильванского и пермского возраста, отобранных из скважин в Оклахоме и Техасе (США).

Таблица 3

Глубина, м	0	300	600	900	1200	1500
Плотность пород, г/см ³	2,26	2,41	2,52	2,59	2,62	2,64

Боковое горное давление q_∞ при отсутствии горизонтальных тектонических движений не может превосходить вертикального горного давления, т. е.

$$q_\infty = \alpha q, \quad \alpha \leq 1, \quad (4.2)$$

где α — коэффициент бокового давления.

Таким образом, вертикальная компонента горного давления будет наибольшей, а горизонтальная — наименьшей. Величина α в рассматриваемом случае зависит от коэффициента Пуассона, если породы являются только упругими, и от других реологических свойств горных пород, в более общем случае обуславливающих релаксацию напряжений в породах.

В природе имеются горные породы, релаксация напряжений в которых происходит медленнее, чем образование геологических структур. Существуют, например, породы с открытыми трещинами и кавернами, заполненными жидкостью со сравнительно низким давлением. Если бы релаксация напряжений происходила в этих породах быстро, то трещины и каверны либо полностью бы затекли, если жидкость имела возможность выхода из них, либо давление жидкости стало бы близким к полному горному давлению. К породам с большим периодом релаксации напряжений относятся известняки, прочные песчаники и т. д. Такие породы можно считать упругими. Если в упругом пласте отсутствовали значительные тектонические движения, то, учитывая, что деформация

каждого элемента пород в горизонтальном направлении равна нулю из-за подпора его со стороны соседних элементов, а можно определить по следующей простой формуле:

$$\alpha = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (4.3)$$

Для прочных песчаников $\nu=0,25$, тогда $\alpha=0,33$. Для алевролитов может быть $\nu=0,4$, отсюда $\alpha=0,66$. Эти значения в общем согласуются с данными Гаррисона, Кишника и Мак Гвайра [129] полученными в результате анализа гидравлического разрыва пласта. По этим данным, для прочных пород (песчаников) $\alpha=0,3-0,4$ и для менее прочных пород (алевролитов) $\alpha=0,6-0,7$.

Если пласт сложен несцементированным песком, но имеющим прочные зерна, или другими аналогичными рыхлыми породами, то боковое горное давление в этом пласте можно вычислить по теории предельного равновесия, поскольку для указанных материалов разность между вертикальной и горизонтальной компонентами естественного напряжения не может превышать величины, определяемой условием предельного равновесия, а прочность зерен породы настолько велика, что, однажды уплотнившись, она в дальнейшем практически не течет. Для таких пород имеем следующее уравнение предельного равновесия [96, 97]:

$$\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = F(\sigma), \quad (4.4)$$

откуда, учитывая, что $\sigma_2 = \sigma_3 = q_\infty$ и $\sigma_1 = q$, получаем формулу для определения q_∞ :

$$q_\infty = q - \sqrt{3} F\left(\frac{2q_\infty + q}{3}\right). \quad (4.5)$$

Для идеально-сыпучей среды, какой является несцементированный песок, $F(\sigma) = \sigma \operatorname{tg} \varphi$ и из (4.5), имеем

$$q_\infty = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3} + 2 \operatorname{tg} \varphi} q. \quad (4.6)$$

Если взять для песков $\varphi = 30^\circ$, получим $q_\infty = 0,4 q$.

Как показывают опытные данные, естественное напряжение в горных породах может иметь различные значения в отдельных точках одного и того же пласта. Это особенно относится к боковому горному давлению, которое может претерпевать большие изменения.

II.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены деформации пород, не имеющих внутри таких пустот, по которым могут перемещаться жидкости или газы. Эти породы можно считать сплошной средой — упругой, пластичной, вязкой и т. д. в зависимости от ее деформационного уравнения состояния.

При описании деформации сплошных сред используются дифференциальные уравнения движения, для получения которых вернемся снова к рассмотрению элементарного объема среды (см. рис. 2).

Полная сила dF_x , действующая на элемент среды согласно рис. 2, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 dF_x = & \left(\sigma_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \\
 & + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \\
 & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz. \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

В выражении (1.1) X — так называемая объемная сила, приложенная ко всему объему $dV = dx dy dz$. Согласно второму закону Ньютона,

$$dF_x = \rho_c dx dy dz a_x, \quad (1.2)$$

где ρ_c — плотность материала среды; a_x — ускорение элемента dV в направлении оси x .

Приравнявая (1.1) к (1.2), получаем после сокращения на dV :

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X - \rho_c a_x = 0. \quad (1.3)$$

Выражения для dF_y и dF_z получаем аналогичным образом. В результате имеем систему дифференциальных уравнений Коши, описывающих движение элемента сплошной среды:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X - \rho_c a_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y - \rho_c a_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + Z - \rho_c a_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Вывести уравнения движения можно также иным способом. Основное условие, используемое при выводе уравнений движения, заключается в том, что всякий произвольно выделенный объем тела V должен находиться в равновесии. Это условие можно написать в виде:

$$R_x = \int_V M_x dV + \int_S \sigma_{nx} dS = 0, \quad (1.5)$$

где R_x — равнодействующая сил, действующих на объем V в направлении x ; M_x — компонента массовой силы, приложенной к элементу V и действующей в направлении оси x ; σ_{nx} — напряжение, действующее по нормали к поверхности S рассматриваемого объема тела.

Используя соотношение (2.2) главы I и формулу Грина, можно написать

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_{nx} dS &= \int_S [\sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n)] dS = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На основе принципа Даламбера

$$M_x = X - \rho_c a_x. \quad (1.7)$$

Тогда, учитывая (1.5), (1.6) и (1.7), имеем

$$\int_V \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X - \rho_c a_x \right) dV = 0. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.8) справедливо при любом значении V . Это возможно в случае равенства нулю подынтегрального выражения. Отсюда получается первое из уравнений (1.4). Рассматривая равнодействующие сил, направленных по осям y и z , можно получить остальные уравнения (1.4).

При определении деформаций по известным компонентам напряжения необходимо использовать систему уравнений неразрывности или совместности деформаций. Эта система состоит из следующих шести уравнений, получающихся в результате последовательного дифференцирования соотношений, приведенных в главе I, определяющих деформацию, и соответствующих подстановок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \right\} (1.9)$$

Если же в результате решения соответствующей задачи определены смещения u , v и w , то надобность в уравнениях (1.9) отпадает и эти уравнения обращаются в тождества.

Большая часть изучаемых ниже процессов связана с упругой деформацией горных пород. Связь между компонентами напряжения и смещения в этом случае в соответствии с зависимостями (3.1), (3.2) главы I имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu' \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu' \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda \theta + 2\mu' \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \tau_{yz} &= \mu' \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu' \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu' \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu' = \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \right\} (1.10)$$

Подставляя (1.10) в уравнения (1.4) и записывая последние в векторной форме, можно получить уравнение [62], описывающее упругие смещения:

$$(\lambda + 2\mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \mu' \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + M - \rho_c a = 0, \quad (1.11)$$

где M — вектор массовой силы; u и a — векторы смещения и ускорения.

В ряде случаев можно описывать движение текучих горных пород, уподобляя их вязкой жидкости. Часто могут возникать также деформации горных пород под воздействием на них вязкой жидкости. Используя уравнения состояния вязкой жидкости — соотношения (3.5) главы I и подставляя их в (1.4), а также считая жидкость несжимаемой, получаем, при отсутствии массовых сил, следующие уравнения движения вязкой жидкости — уравнения Навье-Стокса:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x &= \rho_c a_x; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y &= \rho_c a_y; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z &= \rho_c a_z, \end{aligned} \right\} (1.12)$$

где v_x , v_y и v_z — компоненты скорости движения вязкой жидкости, причем согласно (1.5) главы I теперь уже $\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, ..., $\eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$ и т. д.

§ 2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

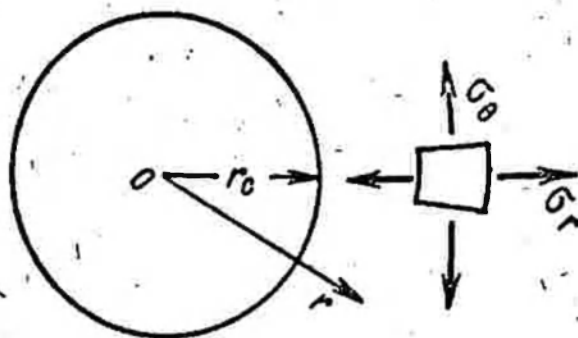
Рассмотрим вначале некоторые простые, но важные случаи упругой деформации горных пород.

Одними из наиболее распространенных видов выработок в горных породах являются скважины и шахты. Если эти выработки сравнительно неглубоки и проведены в твердых породах, деформацию пород можно считать упругой. Будем полагать, что напряженное состояние пород вокруг ствола шахты или скважины одинаково во всех горизонтальных сечениях пород, т. е. рассматривать плоскую задачу теории упругости.

Следует тут же отметить, что в теории упругости наиболее часто встречаются два типа плоских задач. К одному из них относятся задачи, в которых принимается гипотеза о так называемой плоской деформации, согласно которой считается, что вертикальная компонента смещения w всюду в плоскости x, y равна нулю, но существует вертикальная компонента напряжения $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu\sigma$. К другому типу относятся задачи, в которых используется гипотеза плоского напряженного состояния, в соответствии с которой всюду в плоскости x, y $\sigma_z = 0$, но $w \neq 0$. Однако обе гипотезы приводят к одной и той же (с точностью до коэффициентов) системе уравнений.

Приняв гипотезу плоской деформации, можно легко определить напряженное состояние пород вблизи ствола скважины. Напряжения в этом случае не зависят от угловой и вертикальной коор-

Рис. 12. Схема действия напряжений в породах вокруг скважины.



динат и одинаковы во всех сечениях пород плоскостью, перпендикулярной к оси скважины (рис. 12). Будем считать также, что породы распространяются по радиусу r до бесконечности. Уравнения (1.10), (1.11) принимают в рассматриваемом случае следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) = 0; \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu' \frac{du}{dr}; \quad \sigma_\theta = \lambda\theta + 2\mu' \frac{u}{r}; \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu'e;$$

$$\theta = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + e; \quad e = \text{const.}$$

Решением уравнения (2.1) является

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (2.2)$$

где C_1, C_2 — постоянные.

Для напряжений получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2(\lambda + \mu')C_1 - 2\mu' \frac{C_2}{r^2} + \lambda e; \\ \sigma_\theta &= 2(\lambda + \mu')C_1 + 2\mu' \frac{C_2}{r^2} + \lambda e; \\ \sigma_z &= 2\lambda C_1 + (\lambda + 2\mu')e. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Определим неизвестные постоянные C_1 и e из следующих условий:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = q_\infty \quad \text{при } r \rightarrow \infty; \quad \sigma_z = q. \quad (2.4)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2(\lambda + \mu')} \left[q_\infty - \lambda \frac{q(\lambda + \mu') - \lambda q_\infty}{2\mu'(\lambda + \mu')} \right]; \\ e &= \frac{q(\lambda + \mu') - \lambda q_\infty}{2\mu'(\lambda + \mu')}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для определения постоянной C_2 примем следующее условие на поверхности ствола шахты или скважины радиусом r_c :

$$\sigma_r = \sigma_c \text{ при } r = r_c. \quad (2.6)$$

Отсюда будем иметь

$$C_2 = \frac{q_\infty - \sigma_c}{2\mu'} r_c^2 \quad (2.7)$$

и для напряжений получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= q_\infty - (q_\infty - \sigma_c) \frac{r_c^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= q_\infty + (q_\infty - \sigma_c) \frac{r_c^2}{r^2}; \\ \sigma_z &= q. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

При определении же смещения необходимо иметь в виду, что, подставив в формулу (2.2) значения C_1 и C_2 из выражений (2.5) и (2.7), получим полное смещение, которое возникло бы, если первоначально ненагруженный пласт одновременно подвергнуть действию граничных напряжений q_∞ , q и σ_c .

Практический интерес имеет обычно дополнительное смещение в породах, возникающее при изменении напряжения вблизи шахты или скважины в результате их проводки. Это смещение можно определить, если в решении (2.2) отбросить первый член. Тогда, учитывая (2.7), получим

$$u = \frac{q_\infty - \sigma_c}{2\mu'} \frac{r_c^2}{r} = \frac{1 + \nu}{E} (q_\infty - \sigma_c) \frac{r_c^2}{r}. \quad (2.9)$$

На поверхности ствола шахты или скважины

$$u_c = \frac{1 + \nu}{E} (q_\infty - \sigma_c) r_c.$$

Пусть $E = 10^5$ кг/см², $\nu = 0,2$, $r_c = 10$ см, $q_\infty - \sigma_c = 100$ кг/см². Тогда $u_c = \frac{1,2}{10^5} \cdot 10^2 \cdot 10 = 0,012$ см.

В качестве второго случая простого напряженного состояния рассмотрим деформацию пород вокруг сферической полости радиусом r_0 .

Допустим, что напряжение, приложенное к внутренней поверхности полости, равно σ_0 , а породы распространяются по радиусу от центра полости до бесконечности.

Уравнение, определяющее смещение пород вдоль радиуса, имеет в данном случае следующий вид:

$$\frac{du}{dr} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) = 0, \quad (2.10)$$

а два напряжения σ_r и σ_θ определяются зависимостями

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu') \frac{du}{dr} + 2\lambda \frac{u}{r}; \quad \sigma_\theta = \lambda \frac{du}{dr} + 2(\lambda + \mu') \frac{u}{r},$$

$$\sigma = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\theta}{3}. \quad (2.11)$$

Интегралом уравнения (2.10) является выражение

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.12)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (3\lambda + 2\mu') C_1 - 4\mu' \frac{C_2}{r^3}; \\ \sigma_\theta &= (3\lambda + 2\mu') C_1 + 2\mu' \frac{C_2}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Определим только дополнительные напряжения и смещения, для чего примем первоначальное напряженное состояние пород за нулевое. Граничные условия тогда принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta \text{ при } r = r_0; \\ u &= \sigma_r = \sigma_\theta = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Окончательно получаем следующие выражения для напряжений и смещения:

$$\sigma_r = \sigma_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3; \quad \sigma_\theta = -\frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3;$$

$$u = \frac{\sigma_0 r_0^3}{4\mu'} \frac{1}{r^2}. \quad (2.15)$$

Существуют процессы деформации горных пород, возникающие в результате действия на горные породы жидкости, движущейся в породах по трещинам. Поэтому рассмотрим один очень важный случай движения — движение вязкой жидкости в прямолинейной щели с параллельными поверхностями (рис. 13). Это движение описывается уравнениями (1.12).

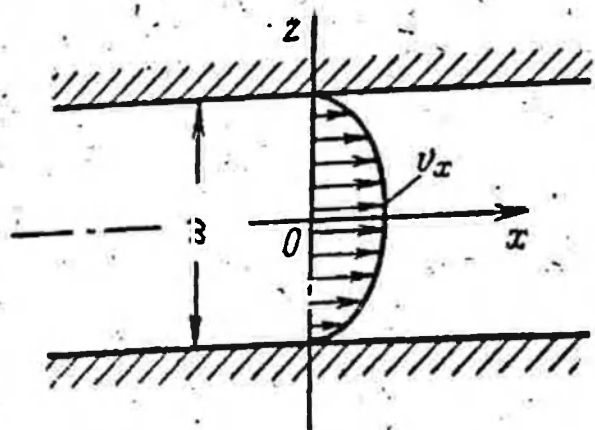


Рис. 13. Схема движения вязкой жидкости в щели с параллельными поверхностями.

Поскольку движение параллельно оси Ox (рис. 13), то $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_x(x, y, z)$, и уравнения (1.12) примут вид [54]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Из последнего уравнения (2.16) вытекает, что v_x может зависеть только от y и z . Однако, так как $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, то для выполнения первого уравнения (2.16) необходимо, чтобы было

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.} \quad (2.17)$$

Интегрируя уравнения (2.17) и выполняя граничные условия $v_x = 0$ при $z = \pm \frac{w}{2}$, получаем следующее уравнение для распределения скорости v_x по высоте трещины:

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{w^2}{4} - z^2 \right). \quad (2.18)$$

Средняя скорость жидкости в направлении оси Ox определяется по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{w} \int_0^{\frac{w}{2}} v_x dz = \frac{1}{w\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\frac{w}{2}} \left(\frac{w^2}{4} - z^2 \right) dz = -\frac{w^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Формула может быть обобщена на случай переменной ширины щели и записана в виде:

$$v_{\text{ср}}(x) = -\frac{w^2(x)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Как показывают эксперименты, такое обобщение оказывается возможным при числах Рейнольдса для течения жидкости в щели, не превышающих 1000, и при сравнительно малых углах наклона поверхностей щели.

Рассмотрим, наконец, ту же задачу о деформации горных пород вокруг ствола шахты или скважины, что и задача, приведенная в самом начале этого параграфа, но уже с учетом динамических усилий. Если допустить [95] возможность линеаризации члена $\rho_c \frac{d^2 u}{dt^2}$ в уравнении (1.11), то это уравнение для данного случая запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \omega^2 = \frac{\rho_c}{\lambda + 2\mu'} \quad (2.21)$$

Будем считать для простоты, что первоначальные напряжения в горных породах равны нулю, а условие на поверхности скважины радиусом r_c выражается в виде уравнения (2.6). Учитывая (2.1), можно записать условие (2.6) в следующей форме:

$$\sigma_r = A \frac{\partial u}{\partial r} + B \frac{u}{r} = \sigma_c \text{ при } r = r_c \quad (2.22)$$

где $A = \lambda + 2\mu'$, $B = \lambda$.

Примем также начальные условия

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0 \quad (2.23)$$

и условия на бесконечности

$$u = \sigma_r = \sigma_\theta = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Будем решать поставленную выше задачу операционным методом, применяя изображение смещения $u(r, t)$ по Лапласу в виде:

$$\bar{u}(r, s) = \int_0^\infty u(r, t) e^{-st} dt. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.21) записывается в изображениях следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r} \right) = \omega^2 s^2 \bar{u}. \quad (2.26)$$

Его решением, удовлетворяющим условию $u = 0$ при $r \rightarrow \infty$, будет выражение

$$\bar{u} = C \bar{K}_1(r\omega s). \quad (2.27)$$

где $K_1(r\omega s)$ — функция Макдональда первого порядка [61]. Граничное условие (2.22) переписывается в изображениях в виде:

$$A \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{B}{r_c} \bar{u} = \frac{\sigma_c}{s} \text{ при } r = r_c. \quad (2.28)$$

Учитывая, что согласно [61] $\frac{dK_1(z)}{dz} = -K_0(z) - \frac{1}{z} K_1(z)$, где $K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка, из (2.27) и (2.28) получаем

$$\bar{u}(r, s) = -\frac{\sigma_c}{s} \frac{K_1(r\omega s)}{A\omega s K_0(r_c\omega s) + \frac{A-B}{r_c} K_1(r_c\omega s)} \quad (2.29)$$

По формуле обращения имеем

$$u(r, t) = -\frac{\sigma_c}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\xi_0 - i\eta}^{\xi_0 + i\eta} \frac{1}{s} \frac{K_1(r\omega s) \exp(st) ds}{A\omega s K_0(r_c\omega s) + \frac{A-B}{r_c} K_1(r_c\omega s)}, \quad (2.30)$$

где $s = \xi + i\eta$, ξ_0 — некоторое фиксированное значение действительной переменной ξ . В. С. Кутляровым было показано с использованием метода Трантера [95], что уравнение $A\omega s K_0(r_c\omega s) + \frac{A-B}{r_c} K_1(r_c\omega s) = 0$ не имеет корней в области интегрирования, так что подынтегральное выражение (2.30) имеет лишь полюс и точку ветвления при $s = 0$. Им были найдены асимптотические формулы для $u(r, t)$ при малых и больших величинах t .

При больших t получается следующая формула для напряжения σ_r :

$$\sigma_r = \sigma_c \frac{r_c^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{r_c^2 \omega^2}{A-B} \left[0,5A \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) + B \left(\frac{r^2}{r_c^2} - 1 \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{[t - \omega(r - r_c)]^2} \right\}. \quad (2.31)$$

Эта формула справедлива при больших значениях величины $t = t - \omega(r - r_c)$, т. е. в области движения, удаленной от фронта волны напряжений.

Рассмотрим пример. Пусть $E = 10^5$ кГ/см², $\rho_c = 2,5$ Г/см³ $\approx 2,5 \cdot 10^{-6}$ кГ·сек²/см⁴, $\nu = 0,2$, $r_c = 10$ см.

Определим, насколько будет отличаться напряженное состояние пород от стационарного напряженного состояния при $r = 10r_c = 100$ см и $t = 10^{-2}$ сек. Для этого вычислим добавку к единице, стоящую в фигурных скобках выражения (2.31). Получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_c}{\lambda + 2\mu'}} = \sqrt{\frac{\rho_c (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E (1 - \nu)}} \approx 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ сек/см};$$

$A - B = 2\mu' \approx 0,8 \cdot 10^5$ кГ/см²; $A \approx 1,1 \cdot 10^5$ кГ/см²; $B \approx 0,3 \cdot 10^5$ кГ/см².

Тогда при $\frac{r}{r_c} = 10$ величина

$$\begin{aligned} & \frac{r_c^2 \omega^2}{A-B} \left[0,5A \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) + B \left(\frac{r^2}{r_c^2} - 1 \right) \right] \frac{1}{[t - \omega (r - r_c)]^2} = \\ & = \frac{10^2 \cdot 2,27 \cdot 10^{-11}}{0,8 \cdot 10^5} [0,5 \cdot 1,1 (1 - 100) \cdot 10^5 + 0,3 \cdot 10^5 (100 - 1)] \times \\ & \quad \times \frac{1}{[10^{-2} - 4,7 \cdot 10^{-6}]^2} \approx -0,7 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассмотренном случае напряженное состояние при $r = 10r_c$ уже при $t = 10^{-2}$ сек практически не отличается от стационарного.

§ 3. УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Напряженное состояние горных пород можно легко определить, если рассматриваемый случай сводится к плоской двумерной задаче теории упругости.

В двумерных статических задачах уравнения движения превращаются в уравнения равновесия, имеющие вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0; \\ \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu' \varepsilon_x; \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu' \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= 2\mu' \gamma_{xy}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu' = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где X и Y — компоненты статической объемной силы.

Условия совместности деформаций сводятся к одному соотношению:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) можно получить уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{2(\lambda + \mu')}{\lambda + 2\mu'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (3.3)$$

Рассмотрим вначале случаи, когда массовые силы отсутствуют, т. е. $X = Y = 0$.

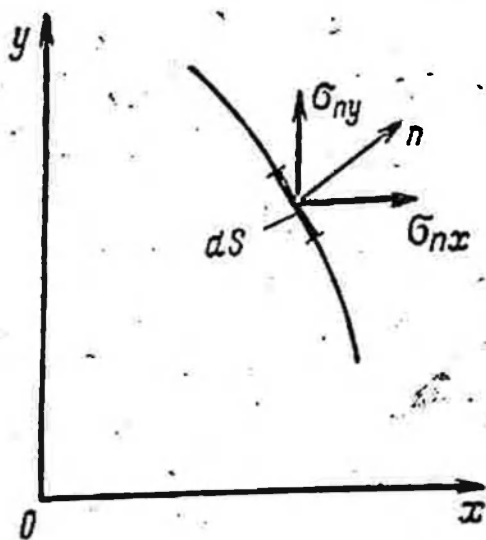


Рис. 14. Элемент дуги
в плоскости x, y .

Если ввести функцию $U(x, y)$ в виде:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (3.4)$$

то уравнения равновесия (3.1) будут удовлетворены.

Функция $U(x, y)$ называется функцией напряжений — функцией Эри.

Подстановка (3.4) в (3.3) дает бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0. \quad (3.5)$$

Смещения и напряжения в плоских задачах могут быть выражены через аналитические функции. Вывод представления напряжений и смещений аналитическими функциями дан в книге Н. И. Мусхелишвили [76]. Здесь будут приведены лишь окончательные формулы, которые понадобятся в дальнейшем.

Комплексное представление смещений u и v вдоль осей x и y имеет следующий вид:

$$2\mu'(u + iv) = \kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}), \quad (3.6)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$; $i = \sqrt{-1}$.

Чертой сверху помечаются сопряженные функции и сопряженные числа.

Для компонент нормального напряжения, действующего на произвольный элемент дуги ds (рис. 14) с нормалью n , имеем выражение

$$(\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds = -id [\varphi(z) + z \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]. \quad (3.7)$$

Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} представляются через аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ следующим образом:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]; \quad (3.8)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [z \bar{\varphi}''(\bar{z}) + \psi'(z)]. \quad (3.9)$$

В предыдущем параграфе были рассмотрены различные виды напряженного состояния вокруг скважины, когда нагрузки приложены к ее стенкам симметрично.

Используя общие методы плоской теории упругости [76], можно определить напряжения и смещения вокруг скважины и в тех случаях, когда нагрузки приложены к стенке скважины несимметрично или напряженное состояние массива пород, в котором пробурена скважина, неодинаково в различных направлениях.

Допустим, например, что скважина радиусом r_c находится в поле одностороннего сжимающего напряжения $\sigma_x = -q_x$, действующего вдоль оси Ox (рис. 15). Будем считать для простоты, что напряжение на поверхности ствола скважины равно нулю. Определим напряжения в массиве горных пород вокруг скважины.

При решении задачи применим метод Н. И. Muskhelishvili [76]. Для этого сделаем переход от физических переменных x, y к параметрическим переменным ρ, ϑ по формуле

$$z = \omega(\zeta) = r_c \zeta, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta} = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \quad (3.10)$$

Из (3.10) имеем $x = r_c \rho \cos \vartheta, y = r_c \rho \sin \vartheta$.

Рассматриваемую задачу можно решать двумя способами. Можно, например, считать, что напряжение приложено к упругой плоскости на бесконечности [76]. Однако можно применить следующий прием. Проводка скважины, т. е. выемка круга из упругой плоскости, равносильна приложению усилий к каждому элементу контура скважины $ds = r_c d\vartheta$ (см. рис. 15), $\sigma_{nx} = -q_x \cos \vartheta, \sigma_{ny} = 0$, направленных в сторону оси Ox .

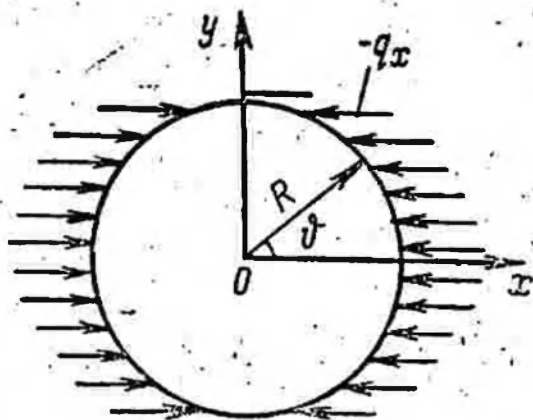
Приложение же к ободу кругового отверстия усилия

$$\sigma_{nx} = q_x \cos \vartheta, \quad \sigma_{ny} = 0, \quad (3.11)$$

восстанавливает первоначальное напряженное состояние $\sigma_x = -q_x$ (сжимающие напряжения берутся со знаком минус).

Поэтому, определив напряженное состояние упругой плоскости, соответствующее действию на контур ствола выемки усилий, выраженных формулой (3.11), и вычтя его из величины первоначального напряженного состояния $\sigma_x = -q_x, \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, получим искомые напряжения вокруг скважины. При вычислении напряженного состояния, соответствующего контурным усилиям (3.11), напря-

Рис. 15. Скважина в поле одностороннего сжимающего напряжения $-q_x$



жения на бесконечности можно считать равными нулю. Смещения при этом определяются выражениями [76]:

$$2\mu'(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}); \quad (3.12)$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f}{\sigma - \zeta} d\sigma; \quad (3.13)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\bar{f}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta}; \quad (3.14)$$

$$f(\sigma) = i \int_{\sigma} F_n ds = i \int (\sigma_{nx} + i\sigma_{ny}) ds. \quad (3.15)$$

В данном случае $\sigma = e^{i\theta}$. Интегралы (3.13), (3.14) являются интегралами типа Коши [76]. Для вычисления напряжений имеем формулы [76]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{\varphi}'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right]; \quad (3.16)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left\{ \frac{\bar{\omega}(\bar{r})}{\omega'(\bar{\zeta})} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]' + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.11) и (3.15) и полагая, что $ds = r_c d\theta$, получаем

$$f(\sigma) = i \int q_x \cos \theta r_c d\theta = \frac{q_x r_c}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.13), получаем

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{q_x r_c}{2} \int_0^{2\pi i} \frac{\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma \right)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{q_x r_c}{2\zeta}. \quad (3.19)$$

Поскольку на контуре скважины $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, имеем

$$\bar{f}(\sigma) = -\frac{q_x r_c}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right).$$

Тогда

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{q_x r_c}{2} \int_0^{2\pi i} \frac{\left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} = \frac{q_x r_c}{2\zeta} - \frac{q_x r_c}{2\zeta^3}. \quad (3.20)$$

Из формул (3.16) и (3.17) имеем

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]' - \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

Вычислим теперь величины, входящие в приведенное выше выражение.

Учитывая (3.10), (3.19) и (3.20), получаем

$$\varphi'(\zeta) = \frac{q_x r_c}{2\zeta^2}; \quad \omega'(\zeta) = r_c; \quad \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{q_x}{2\zeta^2};$$

$$\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} = \frac{q_x}{2\zeta^2}; \quad \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]' = -\frac{q_x}{\zeta^3}; \quad \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{q_x}{2\zeta^2} + \frac{3q_x}{2\zeta^4}$$

Вычислим σ_x на контуре скважины, т. е. при $\zeta = \sigma = e^{i\vartheta}$.

Принимая во внимание, что на контуре скважины $\overline{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -q_x + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \left[\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right]' - \frac{\psi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right\} = \\ &= -q_x \left(1 - \frac{3}{2} \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} \cos 4\vartheta \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из формулы (3.21) следует, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ $\sigma_x = 0$, а при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ $\sigma_x = -3q_x$. Этот результат был получен Киршем [76]. Решение рассмотренной выше задачи дано также Н. И. Мусхелишвили [76].

Используя метод решения задач теории упругости для плоскости с круговым отверстием, данный Н. И. Мусхелишвили [76], можно определить напряжения вокруг скважины и при более сложных первоначальных напряженных состояниях пласта, применяя указанный выше прием решения таких задач.

Рассмотрим теперь один важный случай деформации горных пород вокруг одиночной трещины длиной $2l$, расположенной в бесконечной упругой плоскости (рис. 16). Пусть на контур трещины действует в направлении, параллельном оси Oy , постоянная нагрузка p , расширяющая трещину. Определим напряженное состояние упругой плоскости вокруг этой трещины.

Применим, следуя Н. И. Мусхелишвили [76], конформное отображение области вне трещины комплексной переменной $z = x + iy$ на область вне круга единичного радиуса комплексной переменной $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$. Функция, реализующая это конформное отображение, имеет вид:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (3.22)$$

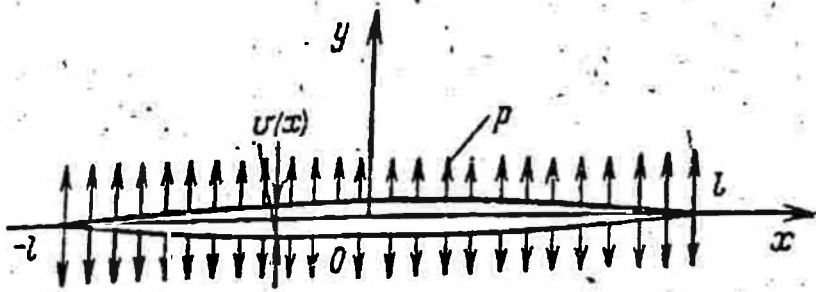


Рис. 16. Деформация горных пород с одиночной трещиной.

На контуре щели, т. е. при $\zeta = \sigma = e^{i\vartheta}$,

$$z = \frac{l}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) = l \cos \vartheta = x.$$

Из (3.15) имеем

$$f(\sigma) = i \int_{-l}^l F_n ds = ip \int_{-l}^l i ds = -p \int_{-l}^l dx = -px. \quad (3.23)$$

Тогда согласно [76]

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{pl}{2} \frac{\sigma + \frac{1}{\sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{pl}{2\zeta}; \quad (3.24)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pl}{2\zeta} \frac{\zeta + \frac{1}{\zeta}}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} = -\frac{pl\zeta}{\zeta^2 - 1}. \quad (3.25)$$

Вычислим теперь смещения стенок трещины.

Из формулы (3.12) получаем

$$2\mu'(u + iv) = x\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\bar{\zeta})} \varphi'(\zeta). \quad (3.26)$$

Тогда на контуре щели, где $\omega(\sigma) = \bar{\omega}(\bar{\sigma})$, имеем

$$2\mu'(u + iv) = x\varphi(\sigma) - \bar{\varphi}(\bar{\sigma}). \quad (3.27)$$

Подставляя (3.24) в (3.27), получаем, что на контуре трещины

$$2\mu'(u + iv) = -\frac{pl}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \sigma \right).$$

Отсюда

$$2\mu'v = \frac{pl}{2} (x + 1) \sin \vartheta$$

или

$$v = \frac{2(1-\nu^2)pl}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}. \quad (3.28)$$

При $x = 0$ $v = \frac{2(1-\nu^2)\rho l}{E}$. Полное раскрытие трещины в точке $x = 0$

$$2v = \frac{4(1-\nu^2)\rho l}{E}$$

Пусть $E = 10^5$ кГ/см², $\rho = 50$ кГ/см², $2l = 100$ см, $\nu = 0,2$. Тогда при $x = 0$

$$2v \approx \frac{4 \cdot 50 \cdot 50}{10^5} = \frac{10^4}{10^5} = 0,1 \text{ см};$$

при $2l = 10$ см $2v \approx 0,1$ мм.

Таким образом, если, например, в породе имеется естественная трещина длиной 10 см и шириной 0,1 мм, заполненная жидкостью, то снижение давления жидкости на 50 кГ/см² приведет к тому, что трещина начнет полностью смыкаться.

§ 4. ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Размеры объектов горных разработок — залежей руд, угольных и нефтяных месторождений и т. д. обычно составляют незначительную часть радиуса Земли. Поэтому при изучении деформации пластов горных пород вблизи горных выработок можно пренебрегать кривизной земной поверхности и считать всю область, находящуюся ниже дневной поверхности, полупространством. При малых деформациях это полупространство является упругим.

Л. А. Галин [22] на основе результатов исследований П. Ф. Папковича и Нейбера показал, что в случае, когда на границе полупространства $z=0$ касательные напряжения $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, то смещения u , v и w и компоненты напряжения σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} выражаются через гармоническую функцию $\varphi_1(x, y, z)$, где x , y , z — координаты. При этом для смещений имеем [22] следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u &= (1-2\nu) \int_z^\infty \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dz - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ v &= (1-2\nu) \int_z^\infty \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dz - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ w &= 2(1-\nu) \varphi_1 - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Компоненты же напряжения определяются формулами [22]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \sigma_x &= 2\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + (1-2\nu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}; \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_y &= 2\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + (1-2\nu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}; \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_z &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}; \\ \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} &= -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}; \\ \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} &= -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x}; \\ \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} &= (1-2\nu) \int_z^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} dz - z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Пусть к границе полупространства $z=0$ в области Ω приложено нормальное напряжение $p(x, y)$.

Тогда согласно (4.2)

$$(\sigma_z)_{z=0} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Таким образом, для определения гармонической функции $\varphi_1(x, y, z)$ имеем граничные условия задачи Неймана:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \begin{cases} -\frac{1+\nu}{E} p(x, y) & \text{внутри } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

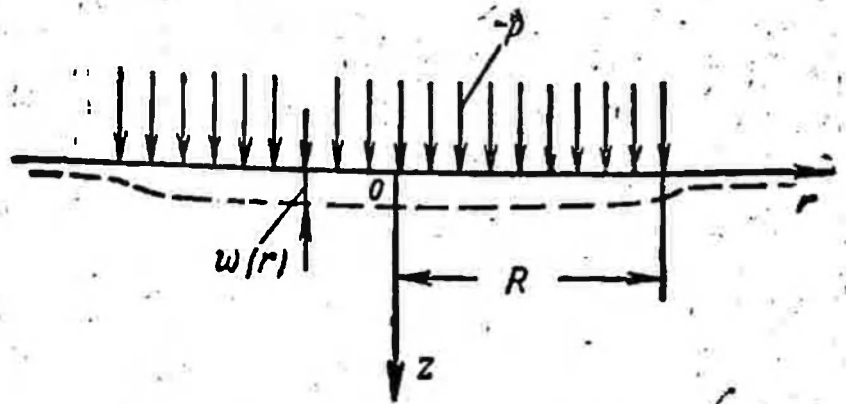
Решение этой задачи известно. Для функции $\varphi_1(x, y, z)$ получается следующее выражение:

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}. \quad (4.4)$$

Для дальнейшего изложения представляют интерес случаи деформации упругого полупространства, когда нагрузка, приложенная к его границе $z=0$, является симметричной относительно оси z . При этом имеет смысл перейти к осесимметричным координатам r, ϑ и z , определяемым формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \vartheta = \arctg \frac{y}{x}. \quad (4.5)$$

Рис. 17. Схема деформации полупространства.



В осесимметричном случае интеграл (4.4) преобразуется к виду:

$$\Phi_1(r, z) = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\rho) \rho d\rho d\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \vartheta + \rho^2 + z^2}}, \quad (4.6)$$

где R — радиус области приложения нагрузки $\rho(\rho)$ к поверхности $z=0$.

Рассмотрим случай постоянной нагрузки ρ , приложенной к поверхности $z=0$ в области $0 \leq r \leq R$ (рис. 17). Определим вначале перемещения w точек граничной поверхности полупространства. При $z=0$ из (4.1) и (4.6) получаем

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{\pi E} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \vartheta + \rho^2}} \quad (4.7)$$

или

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{\pi E} \Phi(r_1), \quad \Phi(r_1) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{\sqrt{r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2}}, \quad (4.8)$$

$$\rho_1 = \frac{\rho}{R}, \quad r_1 = \frac{r}{R}.$$

Показано [38], что функция $\Phi(r_1)$ может быть выражена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода и представлена в виде:

$$\Phi(r_1) = 2[(r_1 + 1)E(c^2) - (r_1 - 1)K(c^2)], \quad (4.9)$$

где $E(c^2)$, $K(c^2)$ — затабулированные [117] функции; $c^2 = \frac{4r_1}{(r_1 + 1)^2}$.

График функции $\Phi = \Phi(r_1)$ представлен на рис. 18.

Определим теперь напряжения в упругом полупространстве для указанного выше случая постоянной граничной нагрузки.

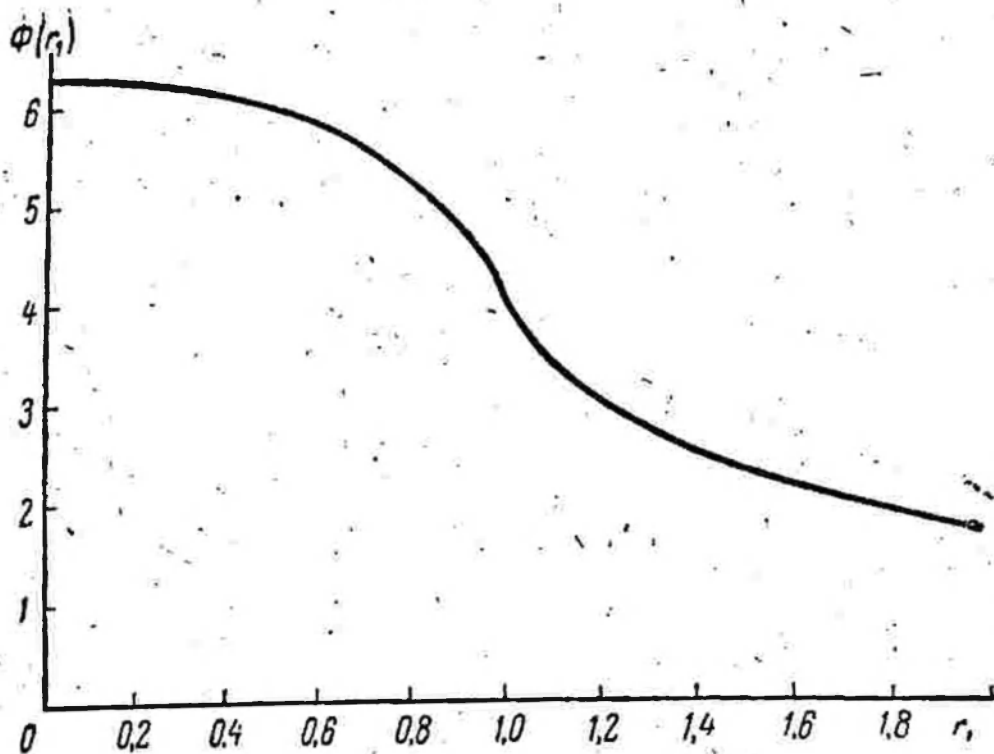


Рис. 18.
График
функции
 $\Phi = \Phi(r_1)$.

Подставляя (4.6) в (4.2), получаем выражения для напряжений. Для σ_z , например, имеем выражение:

$$\sigma_z = -\frac{3\zeta^3\rho}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}}, \quad (4.10)$$

где $\zeta = \frac{z}{R}$.

Обозначим $-\frac{\sigma_z}{\rho} = \psi(r_1, \zeta)$ и вычислим отношение $-\frac{\sigma_z}{\rho}$, существующее вдоль оси z , т. е. при $r_1 = 0$.

Из (4.10) имеем при $r_1 = 0$

$$\psi(0, \zeta) = 3\zeta^3 \int_0^1 \frac{\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}} = 1 - \frac{\zeta^3}{(1 + \zeta^2)^{3/2}}. \quad (4.11)$$

Из формулы (4.11) следует, что при $\zeta = 0$ $\psi(0, 0) = 1$ и $\sigma_z = -\rho$, а при $\zeta \rightarrow \infty$ $\psi(0, \infty) = 0$.

Значения функции $\psi(0, \zeta)$, вычисленные по формуле (4.11) для некоторых значений ζ , представлены в табл. 4.

Из табл. 4 видно, что вертикальная компонента напряжения σ_z довольно быстро уменьшается с ростом расстояния по вертикали от поверхности.

ζ	1	2	4	6	10
$\psi(0, \zeta)$	0,646	0,285	0,085	0,040	0,01

Пусть, например, радиус приложения равномерно распределенной нагрузки $R=100$ м. В этом случае при $z=100$ м $\left| \frac{\sigma_z}{p} \right| = 0,646$, при $z=200$ м $\left| \frac{\sigma_z}{p} \right| = 0,285$, при $z=500$ м $\left| \frac{\sigma_z}{p} \right| = 0,058$, а при $z=1000$ м $\left| \frac{\sigma_z}{p} \right| = 0,01$. При увеличении радиуса R приложения нагрузки — p глубина распространения напряжения σ_z увеличивается. Например, изменения атмосферного давления, охватывающие обычно значительные пространства поверхности Земли, вызывают изменение напряжения σ_z в большой толще пород.

Определим теперь напряжения σ_x и σ_y . Для этого требуется вначале найти выражения для производных $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}$.

Из (4.6) имеем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \bar{\rho} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{(1+\nu)p}{2\pi ER} \left\{ \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}} - 3 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(r_1^2 - 2r_1 \rho_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 \cos^2 \vartheta) \rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}} \right\}; \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{(1+\nu)p}{2\pi ER} \left\{ \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}} - 3 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta d\rho_1 d\vartheta}{(r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos \vartheta + \rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}} \right\}.$$

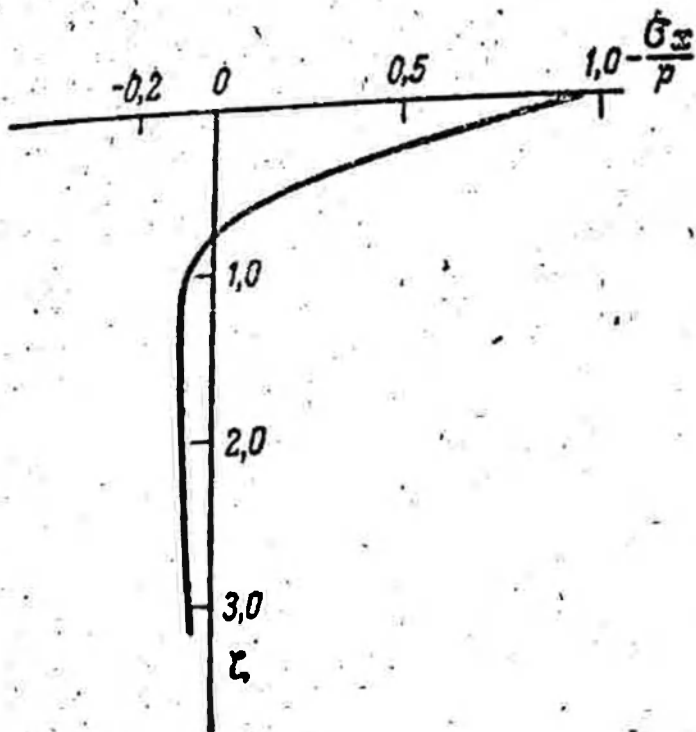


Рис. 19. График функции $-\frac{\sigma_x}{p} = f(\zeta)$.

Наиболее легко вычисляются напряжения на оси $r_1 = 0$, где

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{1+\nu}{E} p \zeta \int_0^1 \frac{\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{(1+\nu)p}{2\pi ER} \left\{ 2\pi \int_0^1 \frac{\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}} - 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^3 \cos^2 \vartheta d\rho_1 d\vartheta}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}} \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{(1+\nu)p}{2\pi ER} \left\{ 2\pi \int_0^1 \frac{\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{3/2}} - 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^3 \sin^2 \vartheta d\rho_1 d\vartheta}{(\rho_1^2 + \zeta^2)^{5/2}} \right\}. \quad (4.13)$$

Произведя интегрирование в формулах (4.13) и подставив (4.13) в (4.2), получим, что при $r_1 = 0$,

$$\sigma_x = \sigma_y = -p \left\{ 2\nu \left(1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right) + (1-2\nu) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{3/2}} - \frac{\zeta}{(1+\zeta^2)^{3/2}} \right\} = -p \left\{ 1 - \zeta \left[\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} + \frac{1}{(1+\zeta^2)^{3/2}} \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) имеем, что при $\zeta = 0$ $\sigma_x = \sigma_y = -p$, а при $\zeta \rightarrow \infty$ $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

График функции $-\frac{\sigma_x}{p} = f(\zeta)$ представлен на рис. 19. Как видно из рисунка, нагрузка $-p$, приложенная к границе $z = 0$ упругого полупространства, создает вблизи плоскости $z = 0$ растягивающие напряжения σ_x и σ_y , а примерно при $\zeta \geq 0,8$ — соответствующие сжимающие напряжения.

§ 5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ ПЛАСТА

Гидравлическим разрывом пласта можно назвать процесс образования и распространения трещин в горных породах под воздействием давления, которое оказывают на горные породы жидкость, газ или расплавленные магматические породы. Разрывом пласта можно считать расклинивание трещин глинистыми сланцами, каменной солью и другими пластичными веществами, внедряющимися в породы под действием тектонических сил. Таким образом, гидравлический разрыв пласта может происходить как при искусственном воздействии на горные породы, так и в естественных условиях. Наблюдающиеся в природе трещины, заполненные другим более пластичным материалом, возникли, по-видимому, в результате естественного разрыва пласта. Сказанное выше относится также к образованию интрузий расплавленных магматических пород в твердых горных породах.

При осуществлении искусственного гидравлического разрыва пласта в заранее выбранном интервале скважины создают высокое давление путем закачки в пласт вязкой жидкости. Когда давление нагнетаемой жидкости превысит некоторую величину, в пласте образуется начальная трещина. Эту трещину затем распространяют, т. е. удлиняют и расширяют путем закачки в нее жидкости и смеси жидкости с песком, применяемых для удержания трещины в раскрытом состоянии после прекращения закачки в нее жидкости. В пластах с естественной трещиноватостью наблюдаются следующие явления. При создании сравнительно небольшого перепада давления жидкости между скважиной и пластом происходит некоторое расширение, по-видимому, всех естественных трещин в призабойной зоне без нарушения первоначальной структуры пласта. Это расширение трещин можно назвать «первой стадией» деформации трещиноватого пласта. Следующее повышение давления жидкости в скважине приводит к возникновению разрывов в породах и соединению естественных трещин. При этом ввиду того, что блоки трещиноватой породы контактируют и, следовательно, механически взаимодействуют друг с другом, а расширение отдельных трещин происходит по-разному, образование наиболее широких трещин приводит к закрытию мелких трещин. Следовательно, в пласте создается несколько широких трещин большой протяженности, т. е. происходит гидравлический разрыв пласта. Поэтому гидравлический разрыв пласта в породах с первоначальной естественной трещиноватостью можно назвать «второй стадией» деформации трещиноватого пласта.

Искусственный гидравлический разрыв пласта применяется в нефтегазодобывающей промышленности обычно для того, чтобы повысить продуктивность нефтяных, нагнетательных или газовых скважин [40, 71, 82]. Однако могут преследоваться и другие, специальные цели, например создание экранов, препятствующих под-

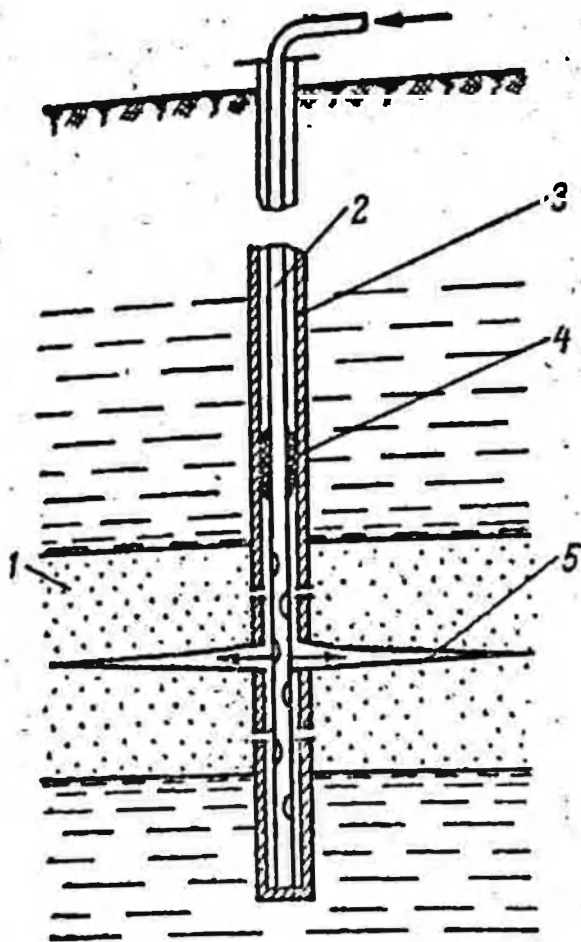


Рис. 20. Схема гидравлического разрыва пласта.

1 — пласт, 2 — насосно-компрессорные трубы, 3 — обсадная колонна, 4 — пакер, 5 — трещина.

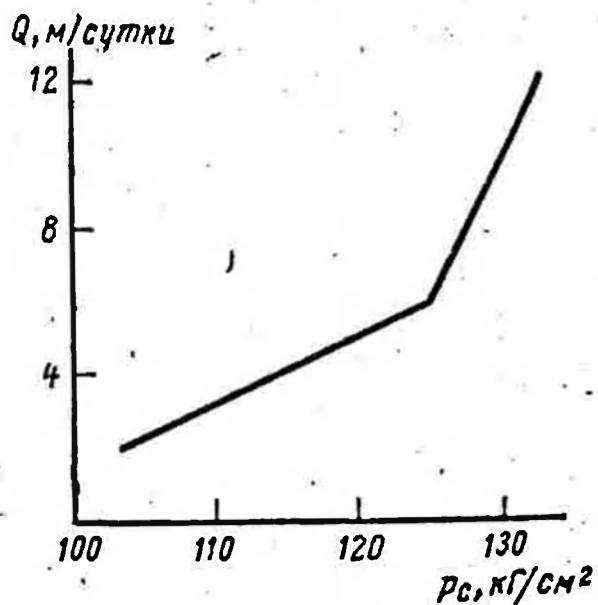
тягиванию конусов воды в скважины [56], сбойка скважин с целью подземной газификации углей [103], дегазации угольных пластов [78] и т. д.

Искусственный гидравлический разрыв пласта иногда может оказаться вредным явлением. Например, если при бурении скважин под действием бурового раствора в горных породах

образуются трещины, то возникает опасность «катастрофического ухода глинистого раствора». Гидравлический разрыв пласта может превратиться в такое же вредное явление и при создании подземных хранилищ газа. При чрезмерно высоких давлениях закачки газа в породах могут образоваться вертикальные трещины, по которым газ уйдет в вышележащие пласты и в атмосферу.

Искусственный гидравлический разрыв пласта протекает следующим образом. В пласт 1 (рис. 20) начинают закачивать жидкость, обычно по колонне насосно-компрессорных труб 2 с пакером 4, применяемым для того, чтобы не подвергать обсадную колонну 3 действию высокого давления. Если закачиваемая жидкость имеет ту же вязкость, что и насыщающая пласт жидкость, и фильтрация является установившейся, то давление на забое скважины изменяется прямо пропорционально расходу жидкости. Это будет наблюдаться до тех пор, пока давление жидкости на забое скважины не превзойдет некоторой величины. После превышения определенного давления прежняя зависимость давления p_c на забое скважины от расхода жидкости Q нарушится, причем при повышении расхода давление p_c начинает расти медленнее. Указанный эффект был известен еще задолго до того, как в промышленности стали применять гидравлический разрыв пласта. Так, во время освоения нагнетательных скважин при применении вторичных методов добычи нефти было обнаружено, что приемистость нагнетательных скважин резко возрастает при повышенных давлениях на забое скважин. Этот эффект описан Юстером и Калуном [116], Дики и Андрессеном [123] и др.

Рис. 21. Зависимость $Q=f(p_c)$,
взятая из работы [116].



Многочисленные факты изменения коэффициента продуктивности нагнетательных скважин при повышенных давлениях на забое скважин приведены в работах И. М. Муравьева и Ф. С. Абдуллина [1, 75] и др. На рис. 21 показана зависимость $Q=f(p_c)$ для нагнетательных скважин, взятая из работы Юстера и Калуна [116], на рис. 22 — зависимость $Q=f(p_y)$ (p_y — давление на устье для скв. 204 Ахтырско-Бугундырского месторождения) и на рис. 23 — зависимость $Q=f(\Delta p_c)$, $\Delta p_c = p_c - p_k$ (p_k — пластовое давление) для одной из скважин Бавлинского месторождения. Зависимость $Q=f(p_y)$ для скв. 204 взята из статьи А. Р. Гарушева [23], а зависимость $Q=f(\Delta p_c)$ из работы [38].

Из опыта гидравлического разрыва пласта известно, что при давлениях на забое скважин, меньших, чем давление, соответствующее точке перегиба кривых зависимостей расхода жидкости от давления, песок, закачиваемый вместе с жидкостью разрыва, обычно не входит в пласт, оставаясь на забое скважины. При давлениях, больших этого критического давления, песок свободно входит в пласт. Эти факты указывают на то, что при повышенных давлениях в пласте образуются трещины. Опыт гидравлического разрыва пласта показывает также, что на кривых зависимостей $Q=f(p_c, p_k)$ в большинстве случаев отсутствуют скачки давления. Другими словами, зависимости $p_c = p_c(t)$, показанные на рис. 24, встречаются редко. Отсюда можно сделать вывод о том, что при гид-

разрыва пласта показывает также, что на кривых зависимостей $Q=f(p_c, p_k)$ в большинстве случаев отсутствуют скачки давления. Другими словами, зависимости $p_c = p_c(t)$, показанные на рис. 24, встречаются редко. Отсюда можно сделать вывод о том, что при гид-

разрыва пласта показывает также, что на кривых зависимостей $Q=f(p_c, p_k)$ в большинстве случаев отсутствуют скачки давления. Другими словами, зависимости $p_c = p_c(t)$, показанные на рис. 24, встречаются редко. Отсюда можно сделать вывод о том, что при гид-

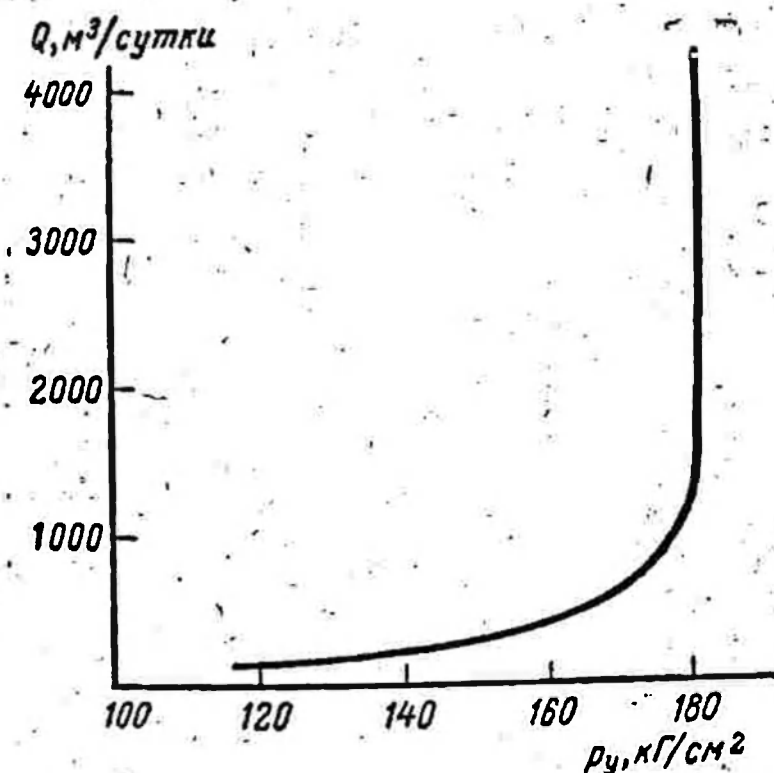


Рис. 22. Зависимость $Q=f(p_y)$,
взятая из работы [23].

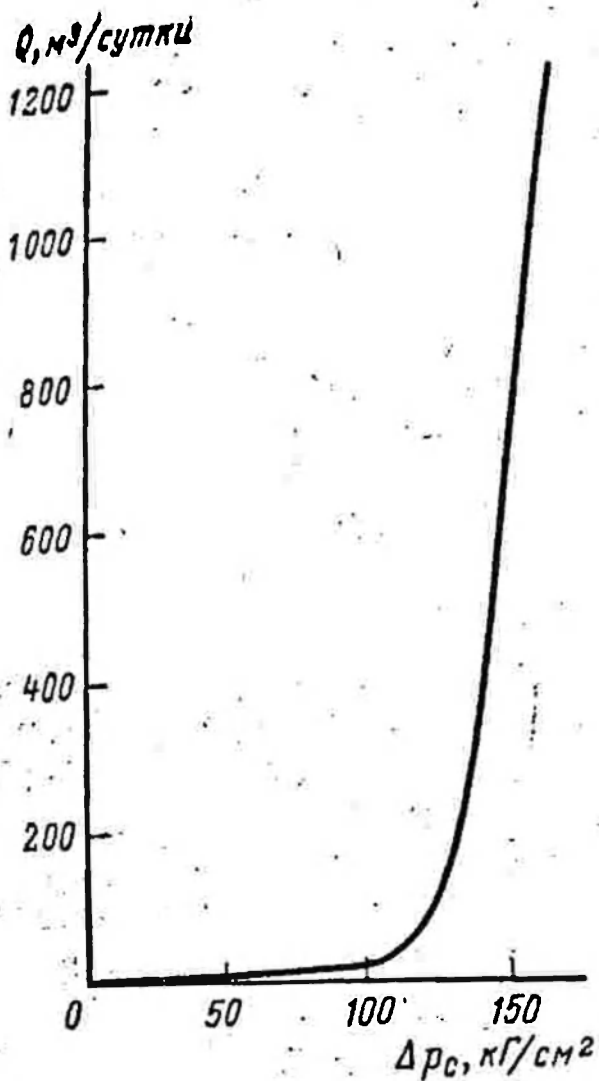


Рис. 23. Зависимость $Q=f(\Delta p_c)$.

равлическом разрыве в основном расширяются естественные поверхности нарушений сплошности пород.

Образование трещин в пласте под действием давления жидкости подтверждается также обширным опытом цементирования скважин под давлением и вообще бурения скважин. Такие случаи образования трещин описаны в работах Дики и Андрессена [123], Говарда и Фаста [131] и других авторов.

Следует отметить, что в тех случаях, когда разрыв проводится в скважинах, вскрывших трещиноватый пласт, содержащий первоначально открытые трещины, также будет наблюдаться искривление графика зависимостей дебита от давления. Пропускная способность трещин при изменении давления жидкости изменяется резко, и поэтому зависимость расхода жидкости от давления будет в общих чертах похожей на ту, какая наблюдается при гидравлическом разрыве пласта. Это обстоятельство отмечалось Г. К. Максимовичем [71], В. А. Блажевичем [19] и др. Следовательно, на кривых зависимостей $Q=f(p_c, p_k)$ для скважин, вскрывших пласты с открытыми естественными трещинами, можно ошибочно выделить точки перегиба и также ошибочно считать, что соответствующие им давления равны значениям местного

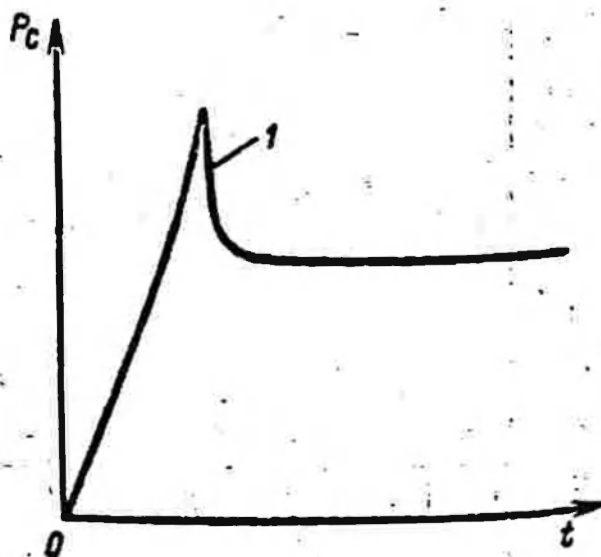


Рис. 24. Зависимость $p_c=p_c(t)$.
1 — скачок давления при образовании начальной трещины в пласте.

горного давления вблизи скважин. Однако случаи расширения первоначально открытых трещин можно отличить от расширения сомкнутых трещин. Так, при расширении первоначально открытых трещин зависимости $Q=f(p_c, p_k)$ изменяются плавно. При расширении же первоначально сомкнутых трещин наблюдается более резкий излом кривых этих зависимостей. Давление, соответствующее изгибу кривых зависимостей $Q=f(p_c, p_k)$ при расширении первоначально открытых трещин, будет для одного и того же пласта, как правило, меньше давления раскрытия первоначально сомкнутых трещин. Имеются и другие особенности расширения первоначально открытых трещин, рассматриваемые более подробно ниже.

Для выяснения механизма разрыва пласта представляет интерес сравнить величину критического давления, при котором начинают расширяться трещины, с величиной вертикального горного давления. Данные о критическом давлении приведены в многочисленных литературных источниках. Так, в работе И. В. Кривоносова [57] описываются результаты определения критического давления при гидравлических разрывах пласта в нефтяных скважинах Ромашкинского нефтяного месторождения. На рис. 25 показана

на в виде точек зависимость [57] величины $\frac{q-p_c^*}{q}$ от q (q — полное горное давление, p_c^* — критическое давление на забое скважины). При этом за критическое принималось то давление, которое соответствует резкому увеличению коэффициента приемистости скважины. Величина полного горного давления определялась по формуле $q=\gamma H$, в которой γ по данным треста Татнефтегеофизика был принят равным $2,5 \cdot 10^{-3}$ кг/см³. Средняя глубина залегания продуктивных горизонтов равна 1700 м. Определение критического давления было произведено по 73 скважинам, из которых в 39 скважинах (53% от общего числа скважин) $p_c^* < 0,8 q$.

Интересные данные о давлениях разрыва на месторождении Ключевое приведены в статье А. И. Акулинина и М. Е. Торяника [2]. Продуктивные нефтеносные горизонты на этом месторождении залегают на глубине 2100—2350 м и представлены тонкозернисты-

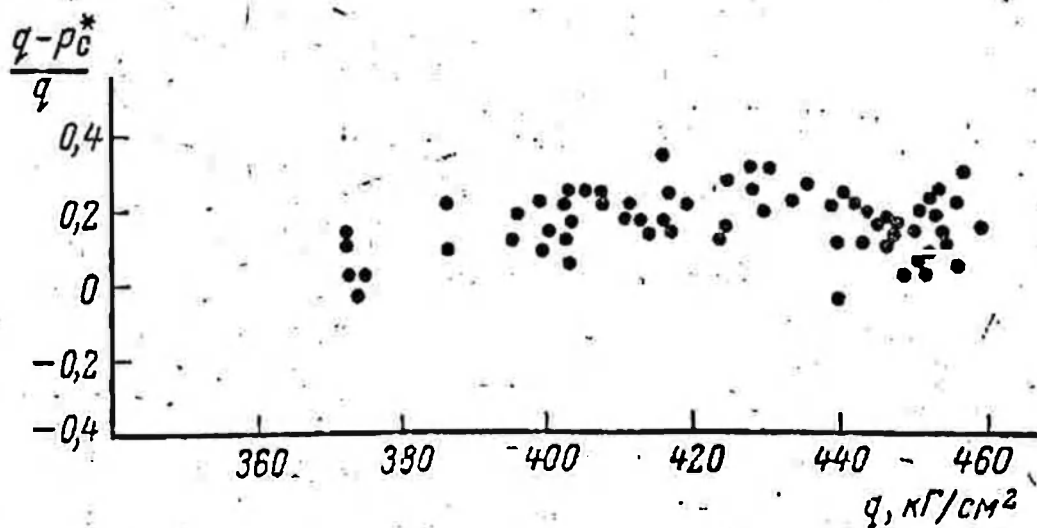


Рис. 25. Зависимость $\frac{q-p_c^*}{q}$ от q , взятая из работы [57].

ми песчаниками, часто чередующимися с глинами, алевролитами и глинистыми песчаниками с проницаемостью 20—40 мд. При определении полного горного давления q удельный вес горных пород принят в среднем равным $2 \cdot 10^{-3}$ кг/см³ ввиду того, что породы являются пористыми и пористое пространство, составляющее 20% полного объема породы, заполнено пластовой водой. В табл. 5 представлены данные о критических давлениях при первичных и повторных разрывах пласта с закачкой песка в трещины в одних и тех же скважинах. Из таблицы видно, что давление разрыва (критическое давление) при повторных разрывах меньше, чем при первичных.

Таблица 5

Давление разрыва в скважинах месторождения Ключевое

Номер скважины	Порядковый номер разрыва	Давление, кг/см ²	
		горное	разрыва
40	1	427	408
40	2	427	373
183	1	476	547
183	2	476	438
302	1	469	458
302	2	469	425
307	1	433	423
307	2	433	366

Авторы [2] объясняют этот факт тем, что при первичных гидравлических разрывах затрачивается дополнительное давление на нарушение сплошности горных пород. Однако уменьшение давления разрыва при повторном разрыве пласта можно объяснить также остаточной деформацией горных пород, поскольку трудно предположить, чтобы во всех скважинах, указанных в таблице, не имелось начальных трещин в пределах интервала, подвергаемого разрыву. Интересно также отметить, что за исключением первичного разрыва пласта в скв. 183 давление разрыва (критическое давление) было меньше величины полного горного давления, вычисленного при заниженном значении удельного веса горных пород.

В. А. Блажевичем [19] собраны и обработаны многочисленные данные о разрывах пласта в нагнетательных скважинах на Туймазинском нефтяном месторождении. При этом рассматривались только такие операции разрыва пласта, при проведении которых в трещины закачивался песок с тем, чтобы имелась гарантия сохранения трещин открытыми в процессе разрыва пласта.

Величина полного горного давления q определялась по формуле $q = \gamma H$. По данным треста Башнефтегеофизика величина средневзвешенной плотности пород разреза Туймазинского месторож-

дения составляет для угленосного горизонта C_1^{2h} $2,6 \text{ Г/см}^3$, а для девонских горизонтов D_I и D_{II} $2,56 \text{ Г/см}^3$. Данные о максимальном, минимальном и среднем давлении на забое скважин в процессе разрыва пласта помещены в табл. 6.

Таблица 6

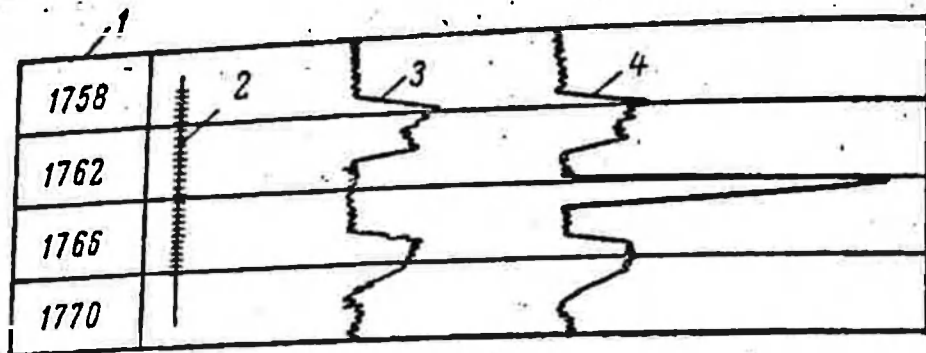
Давление разрыва в скважинах Туймазинского нефтяного месторождения

Продуктивные горизонты	Число гидравлических разрывов	Средняя глубина нижних перфорационных отверстий, м	Давление разрыва, кг/см^2			$\frac{P_c}{q}$		
			максимальное	минимальное	среднее	максимальное	минимальное	среднее
C_1^{2h}	7	1176	260	201	230	0,85	0,660	0,75
D_I	64	1683	381	227	289	0,89	0,53	0,67
D_{II}	6	1719	335	217	270	0,76	0,49	0,61

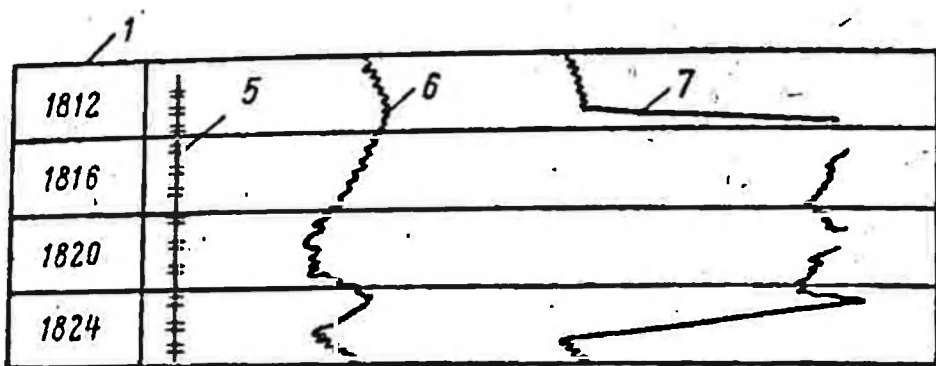
Как видно из таблицы, давление, при котором в трещины закачивается песок во время гидравлического разрыва пласта, также меньше полного горного давления.

Многочисленные данные о давлении разрыва для различных продуктивных горизонтов Азербайджана имеются в книге А. Д. Амирова [3]. Наиболее естественно можно объяснить явление разрыва пласта при давлении, меньшем полного горного давления, образованием вертикальных трещин, поскольку боковое горное давление очень часто может быть меньше полного горного давления. Такое объяснение выдвигалось Скоттом, Бирденом и Говардом [140]; Гаррисоном, Кишником и Мак-Гвайром [129], Хаббертом и Виллисом [133] и др. Однако имелись и другие объяснения. Так, согласно гипотезе С. А. Христиановича о разгрузке горного давления вблизи скважин из-за пластической деформации во время бурения скважин малопрочных глин и глинистых сланцев, залегающих обычно в кровле пластов, или сходных с ними пород, находящихся в самом пласте, могут образоваться горизонтальные трещины при давлении, меньшем полного горного давления. Имелись также предположения о том, что полное горное давление распределяется неравномерно в каждом пласте, что в одних местах оно больше; а в других меньше некоторой средней величины. Из изложенного видно, что вследствие отсутствия данных о величинах бокового и полного горного давления в каждом конкретном случае по давлению раскрытия трещин при гидравлическом разрыве пласта невозможно узнать ориентацию трещин.

С тех пор, как гидравлический разрыв пласта стал использоваться в нефтедобывающей промышленности, было предложено и в ряде случаев испытано несколько способов определения ориентации трещин гидроразрыва. Один из первых способов состоял



a



b

Рис. 26. Предполагаемые кривые радиокаротажа (РК) при образовании горизонтальной и вертикальной трещин.

1 — глубина в м, 2, 5 — интервалы перфорации, 3, 6 — кривые РК, полученные до гидравлического разрыва пласта, 4, 7 — кривые РК, полученные после гидравлического разрыва пласта.
 а — предполагаемая кривая РК при образовании горизонтальной трещины, б — предполагаемая кривая РК при образовании вертикальной трещины.

в закачке в скважину радиоактивных изотопов, нанесенных на зерна песка, закачиваемого в трещины при гидравлическом разрыве пласта, и в замере радиоактивности в пределах продуктивного интервала до и после гидроразрыва счетчиком радиоактивных излучений [21, 40, 99]. Предполагалось, что если трещина горизонтальная, то на кривой радиоактивности, снятой после гидроразрыва, будет наблюдаться увеличение радиоактивности в узком интервале пласта; если же трещина вертикальная, то рост радиоактивности будет замечен по всей мощности пласта (рис. 26). Аналогичный способ предлагался также для исследований скважин глубинными дебитомерами. В случае, если трещина является горизонтальной, будет наблюдаться резкое изменение расхода жидкости в узком интервале, а при вертикальной трещине расход жидкости будет постепенно изменяться вдоль продуктивного интервала. Однако эти способы интерпретации, позволяя обнаружить место образования трещины, не дают возможности определить с необходимой достоверностью ориентацию трещин гидроразрыва. Так, по существу вертикальная трещина (рис. 27) весьма часто может образоваться не в строго вертикальном направлении, а быть несколько наклонной (не по образующей цилиндрической поверхности скважины), и ввиду того, что счетчики могут регистрировать аномалию радиоактивности через сравнительно небольшую толщу породы (0,5—1,0 м), окажется, что трещину, показанную на рис. 27, можно по кривой радиоактивности считать горизонтальной, что не соответствует действительности. То же самое относится и к определению ориентации трещин при исследовании скважин глубинными дебитомерами или расходомерами. Имеются и другие источники погрешностей, связанные с прокачкой основ-

ной массы радиоактивного песка в более удаленные зоны и с оставлением небольшой его части в произвольных точках интервала пласта, что приводит к появлению ложных аномалий радиоактивности, и т. д. Конечно, не следует считать, что геофизические методы вообще бесполезны при определении ориентации трещин. Дальнейшие изыскания могут привести к разработке более эффективных геофизических методов определения ориентации трещин гидроразрыва.

С целью установления ориентации трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта, определения их ширины и протяженности, а также изучения других вопросов механизма разрыва пласта было осуществлено непосредственное визуальное обследование трещин гидроразрыва путем проходки подземных выработок в зону забоя скважины после проведения в ней гидравлического разрыва. Такое изучение трещин гидроразрыва было проведено на Ярегском нефтяном месторождении, где нефтеносные пласты разрабатываются шахтным способом [102].

Глубина залегания горизонта, подвергавшегося разрыву, равна 159 м. Этот горизонт представлен кварцевыми песчаниками, насыщенными нефтью и переслаиваемыми аргиллитами. Сверху песчаники перекрыты мощной пачкой аргиллитов. Лабораторный анализ керна, отобранного из подопытного интервала, показал, что песчаники, отвечающие интервалу, подвергнутому разрыву, обладают следующими свойствами: газопроницаемость изменяется от 1,4 до 6,5 д, пористость от 16 до 27%, временное сопротивление растяжению от 40 до 80 кг/см², временное сопротивление сжатию от 90 до 1050 кг/см², модуль Юнга от 1,4 · 10⁴ до 0,64 × 10⁵ кг/см². Песчаники, подвергавшиеся разрыву, разбиты частыми трещинами: тектоническими, трещинами отдельности и кливажа. Эти трещины ограничиваются глинистыми пластами.

В процессе разрыва пласта была определена зависимость $Q = f(\Delta p_c)$, показанная на рис. 28. При определении этой зависи-

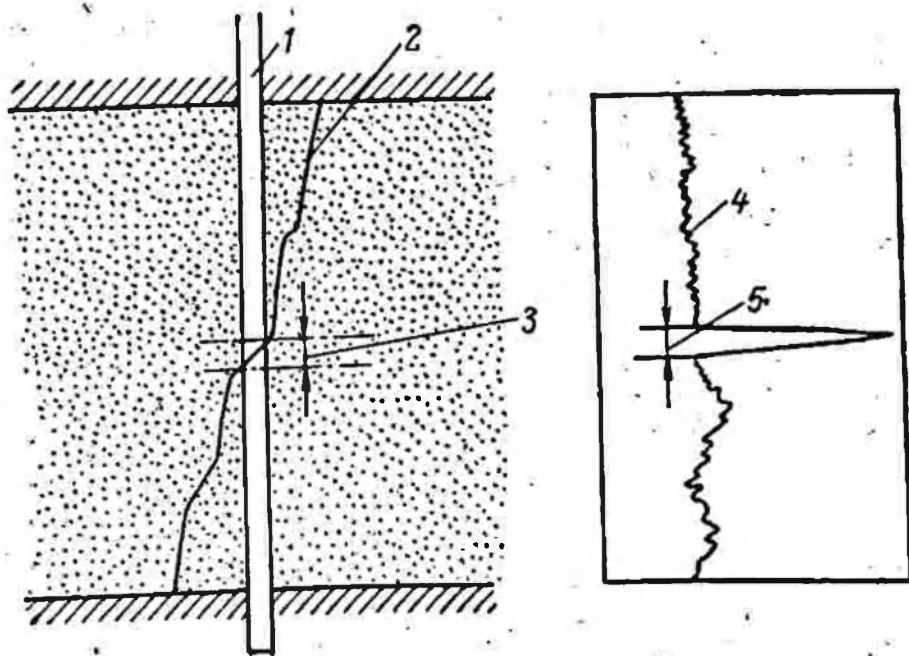


Рис. 27. Наклонная трещина.

1 — скважина, 2 — трещина, 3 — интервал пересечения трещиной ствола скважины, 4 — кривая РК, 5 — интервал повышения радиоактивности.

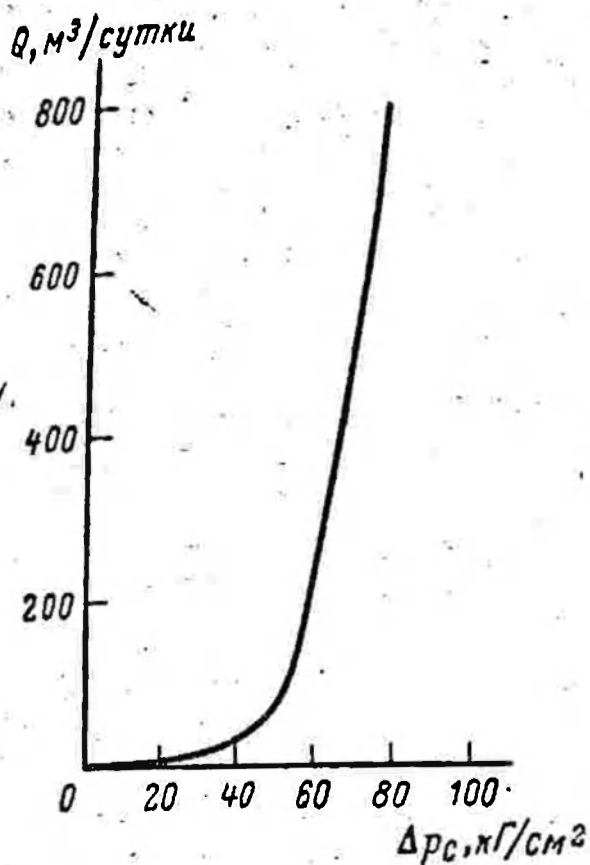


Рис. 28. Зависимость $Q=f(\Delta p_c)$, полученная при проведении эксперимента [102].

мости в пласт закачивалась ярегская нефть, вязкость которой была равна 125 *спз*. Трещины, образованные при снятии кривой $Q=f(\Delta p_c)$, закреплялись кварцевым песком в количестве 2200 кг (1500 кг фракции 0,5—0,7 мм и 700 кг фракции 1—2,3 мм). Песок был равномерно размешан в 10 м³ ярегской нефти.

В целях последующего прослеживания трещин в горных выработках закачиваемый песок был помечен радиоактивным изотопом Co^{60} . До проведения разрыва пласта в скважине был сделан контрольный замер радиоактивности при помощи гамма-каротажа (рис. 29, кривая а). После закачки радиоактивного песка в пласт в скважине была снята также кривая гамма-каротажа (рис. 29, кривая б). На кривой б можно наблюдать резкое изменение (пику) радиоактивности, которая на первый взгляд могла свидетельствовать об образовании горизонтальной трещины. Однако, как показало последующее подземное обследование, трещина оказалась близкой к вертикальной. Это еще раз указывает на то, что по данным радиокаротажа до и после закачки радиоактивного песка трудно определять ориентацию трещин. Для уточнения характера распространения трещин были пробурены три оценочные скважины, в которых, так же как и в основной скважине, проводился радиокартаж. Эти оценочные скважины должны были пересечь пласт на расстоянии от 3 до 8 м от основной скважины. В случае горизонтальной трещины на кривых радиокаротажа должны были наблюдаться пики радиоактивности. При вертикальной же трещине или наклонной с крутым углом падения резких аномалий радиоактивности на кривых радиокаротажа не должно быть, так как пересечение вертикальной трещины всеми тремя оценочными скважинами в пределах пласта, подвергшегося разрыву, считалось маловероятным. Как видно из рис. 29 (в, г и д), такие резкие аномалии на кривой действительно отсутствуют. Таким образом, бурение оценочных скважин позволило правильно определить ориентацию трещин.

Обследование трещин гидроразрыва после проводки подземных выработок в зону забоя основной скважины показало, что песок

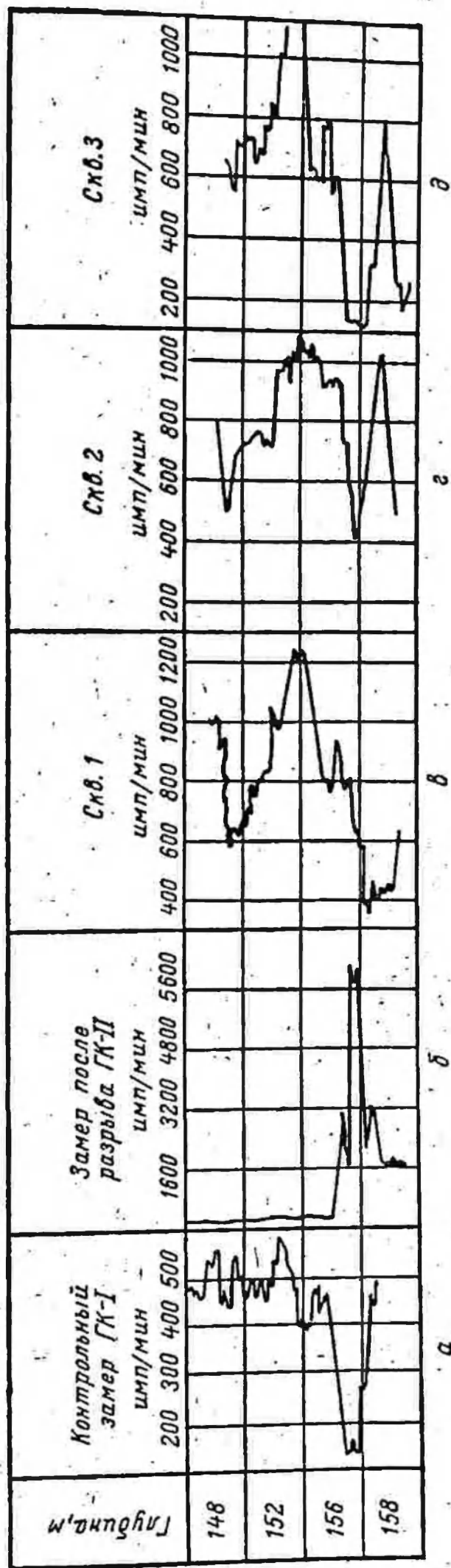


Рис. 29. Кривые радиоактивности, замеренной в скважинах при проведении эксперимента [102].

а, б — кривые гамма-каротажа (ГК), полученные в основной скважине, в, г, д — кривые ГК, полученные в оценочных скважинах.

а — индикатор 1BC-9, б — индикатор 1МС-11, в — индикатор 2BC-9, угол наклона скважины 29°, г — индикатор 2BC-9, угол наклона скважины 33°, д — индикатор 2BC-9, угол наклона скважины 29°.

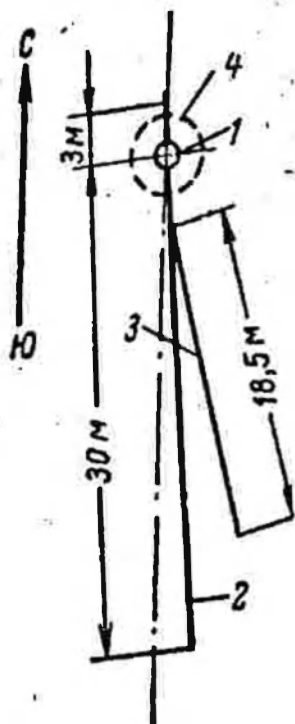


Рис. 30. Схема расположения трещин [102].

1 — основная скважина, 2 — трещина А (азимут 355° , угол наклона к горизонту $65-70^\circ$), 3 — трещина Б (азимут 315° , угол наклона к горизонту 70°), 4 — контур трещины В.

проник в основном по тектоническому разлому А и двум тектоническим трещинам, одна из которых Б — наклонная с крутым углом падения, а другая В — горизонтальная (рис. 30). На максимальное расстояние, равное 30 м, песок проник по трещине А в одну сторону от основной скважины; по трещине Б песок проник на расстояние 18,5 м от пересечения с трещиной А. После разрыва пласта микротрещины, имевшиеся в пласте, оказались раскрытыми только в прифильтровой зоне; максимальное проникновение песка по ним не превышает 0,5 м. Максимальная ширина трещины, заполненной радиоактивным песком, оказалась равной 2 см (трещина Б в 8—10 м от фильтра скважины), но песок был зарегистрирован и в более тонких трещинах, шириной 1—3 мм. Меченый радиоактивным изотопом песок был обнаружен в трещинах и на отметках горизонта, расположенного на 3 м глубже нижних дыр перфорации, так что жидкость разрыва и песок проникали и вниз по падению трещины.

По результатам проведенного опыта можно сделать некоторые обобщения. Конечно, не было неожиданностью то, что трещина гидроразрыва начала развиваться вдоль поверхностей естественных нарушений. Трещина получилась близкой к вертикальной. Однако интересно отметить, что, несмотря на многочисленные нарушения в пласте, при гидроразрыве стало развиваться ограниченное число трещин (одна-две). Ширина трещины довольно значительна — до 1 см, а иногда и до нескольких сантиметров.

Известно также промышленное исследование [139] распространения и ориентации трещин гидроразрыва, проведенное на месторождении Сакатоца в США (штат Техас). Подопытный пласт Сан Мижуэль № 1 сложен хорошо сцементированным плотным песчаником, имеющим среднюю пористость 23%. Проницаемость пласта изменяется от 0,1 до 10 мд, причем средняя проницаемость равна 2,3 мд, а мощность пласта равна 7 м. Пласт Сан Мижуэль № 1 залегает на глубинах от 350 до 520 м. Опытные работы по определению распространения и ориентации трещин гидроразрыва заключались в следующем.

Была пробурена скв. 37-1 до глубины 438 м и обсажена 141-мм колонной с цементированием ее до поверхности. Обсадная колон-

на была перфорирована на глубине 411 м при помощи особого ку- мулятивного перфоратора, предназначенного для инициирования трещины. Перфоратор имел шесть отверстий диаметром 11,1 мм, расположенных в одной горизонтальной плоскости двумя группа- ми по три отверстия в каждой, ориентированными в двух противо- положных направлениях. Перфоратор был применен с целью на- правленного инициирования трещины.

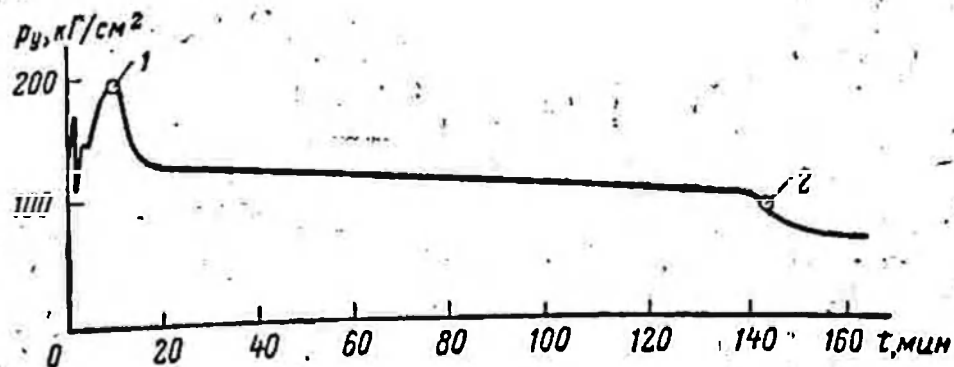
В дальнейшем в скв. 37-1 был произведен гидравлический раз- рыв пласта с применением в качестве жидкости разрыва сырой нефти. После образования начальной трещины, перед нагнетанием смеси жидкости с песком в трещину было закачено 3,75 м³ дизель- ного топлива, содержащего добавки, понижающие его фильтруе- мость. Эта же жидкость с теми же добавками применялась и в качестве песконосителя. В трещины было закачено 660 м³ жидко- сти-песконосителя вместе с 122 т песка «Потит», имеющего зерна размером 0,6—0,8 мм. Средний темп закачки смеси жидкости с песком во время гидравлического разрыва пласта составлял 80 л/сек.

Согласно данным, представленным в работе [139], при таком темпе закачки смеси жидкости с песком потеря давления в перфо- рационных отверстиях составляла 20 кг/см². Гидростатическое давление равнялось 32 кг/см². Следовательно, для того чтобы по- лучить истинное давление, передававшееся на пласт, необходимо к величине устьевого давления, изменение которого во время ги- дравлического разрыва пласта показано на рис. 31, прибавить 12 кг/см². Согласно рис. 31, максимальное давление на поверхно- сти пласта было равно 184 кг/см², среднее давление — 110 кг/см², а давление в конце закачки песка — около 100 кг/см².

Для определения характера распространения трещины и ее ориентации вокруг скв. 37-1 было пробурено 14 оценочных сква- жин с отбором керна и обломков выбуренной породы в пределах подопытного пласта. Керны и обломки выбуренной породы иссле- довались под микроскопом с целью обнаружения в них песка, при- менявшегося при гидроразрыве. Кроме того, жидкость и обломки породы отбирались из скважин при помощи испытателей пластов. Если количество зерен песка, обнаруженного в кернах, обломках выбуренной породы и других пластовых пробах, оказывалось выше средней величины, то считалось, что данная скважина вскры-

Рис. 31. Изменение устье- вого давления в скв. 37-1 [139].

1 — начало закачки смеси жидкости с песком, 2 — ко- нец разрыва пласта.



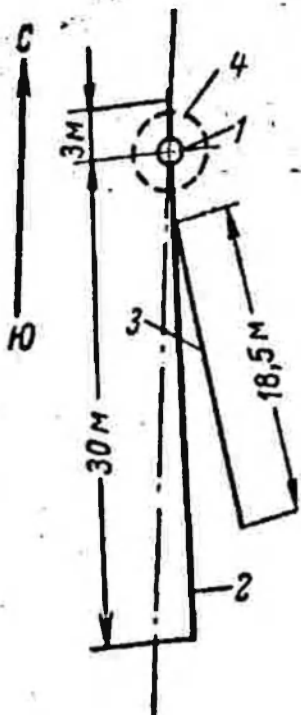


Рис. 30. Схема расположения трещин [102].

1 — основная скважина, 2 — трещина А (азимут 355° , угол наклона к горизонту $65-70^\circ$), 3 — трещина Б (азимут 315° , угол наклона к горизонту 70°), 4 — контур трещины Б.

проник в основном по тектоническому разлому А и двум тектоническим трещинам, одна из которых Б — наклонная с крутым углом падения, а другая В — горизонтальная (рис. 30). На максимальное расстояние, равное 30 м, песок проник по трещине А в одну сторону

от основной скважины; по трещине Б песок проник на расстояние 18,5 м от пересечения с трещиной А. После разрыва пласта микротрещины, имевшиеся в пласте, оказались раскрытыми только в прифильтровой зоне; максимальное проникновение песка по ним не превышает 0,5 м. Максимальная ширина трещины, заполненной радиоактивным песком, оказалась равной 2 см (трещина Б в 8—10 м от фильтра скважины), но песок был зарегистрирован и в более тонких трещинах, шириной 1—3 мм. Меченый радиоактивным изотопом песок был обнаружен в трещинах и на отметках горизонта, расположенного на 3 м глубже нижних дыр перфорации, так что жидкость разрыва и песок проникали и вниз по падению трещины.

По результатам проведенного опыта можно сделать некоторые обобщения. Конечно, не было неожиданностью то, что трещина гидроразрыва начала развиваться вдоль поверхностей естественных нарушений. Трещина получилась близкой к вертикальной. Однако интересно отметить, что, несмотря на многочисленные нарушения в пласте, при гидроразрыве стало развиваться ограниченное число трещин (одна-две). Ширина трещины довольно значительна — до 1 см, а иногда и до нескольких сантиметров.

Известно также промысловое исследование [139] распространения и ориентации трещин гидроразрыва, проведенное на месторождении Сакатоза в США (штат Техас). Подопытный пласт Сан Мижуэль № 1 сложен хорошо сцементированным плотным песчанником, имеющим среднюю пористость 23%. Проницаемость пласта изменяется от 0,1 до 10 мд, причем средняя проницаемость равна 2,3 мд, а мощность пласта равна 7 м. Пласт Сан Мижуэль № 1 залегает на глубинах от 350 до 520 м. Опытные работы по определению распространения и ориентации трещин гидроразрыва заключались в следующем.

Была пробурена скв. 37-1 до глубины 438 м и обсажена 141-мм колонной с цементированием ее до поверхности. Обсадная колон-

на была перфорирована на глубине 411 м при помощи особого ку- мулятивного перфоратора, предназначенного для инициирования трещины. Перфоратор имел шесть отверстий диаметром 11,1 мм, расположенных в одной горизонтальной плоскости двумя группа- ми по три отверстия в каждой, ориентированными в двух противо- положных направлениях. Перфоратор был применен с целью на- правленного инициирования трещины.

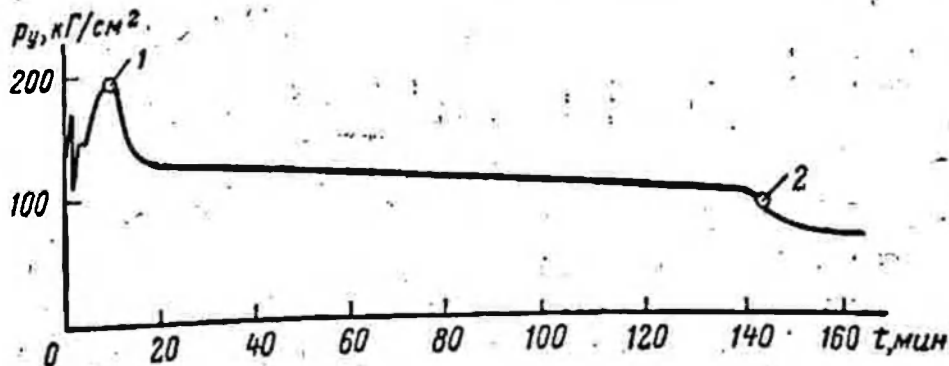
В дальнейшем в скв. 37-1 был произведен гидравлический раз- рыв пласта с применением в качестве жидкости разрыва сырой нефти. После образования начальной трещины, перед нагнетанием смеси жидкости с песком в трещину было закачено 3,75 м³ дизель- ного топлива, содержащего добавки, понижающие его фильтруе- мость. Эта же жидкость с теми же добавками применялась и в качестве песконосителя. В трещины было закачено 660 м³ жидко- сти-песконосителя вместе с 122 т песка «Потит», имеющего зерна размером 0,6—0,8 мм. Средний темп закачки смеси жидкости с песком во время гидравлического разрыва пласта составлял 80 л/сек.

Согласно данным, представленным в работе [139], при таком темпе закачки смеси жидкости с песком потеря давления в перфо- рационных отверстиях составляла 20 кг/см². Гидростатическое давление равнялось 32 кг/см². Следовательно, для того чтобы по- лучить истинное давление, передававшееся на пласт, необходимо к величине устьевого давления, изменение которого во время ги- дравлического разрыва пласта показано на рис. 31, прибавить 12 кг/см². Согласно рис. 31, максимальное давление на поверхно- сти пласта было равно 184 кг/см², среднее давление — 110 кг/см², а давление в конце закачки песка — около 100 кг/см².

Для определения характера распространения трещины и ее ориентации вокруг скв. 37-1 было пробурено 14 оцепочных сква- жип с отбором керна и обломков выбуренной породы в пределах подопытного пласта. Керны и обломки выбуренной породы иссле- довались под микроскопом с целью обнаружения в них песка, при- менявшегося при гидроразрыве. Кроме того, жидкость и обломки породы отбирались из скважин при помощи испытателей пластов. Если количество зерен песка, обнаруженного в кернах, обломках выбуренной породы и других пластовых пробах, оказывалось выше средней величины, то считалось, что данная скважина вскры-

Рис. 31. Изменение устье- вого давления в скв. 37-1 [139].

1 — начало закачки смеси жидкости с песком, 2 — ко- нец разрыва пласта.



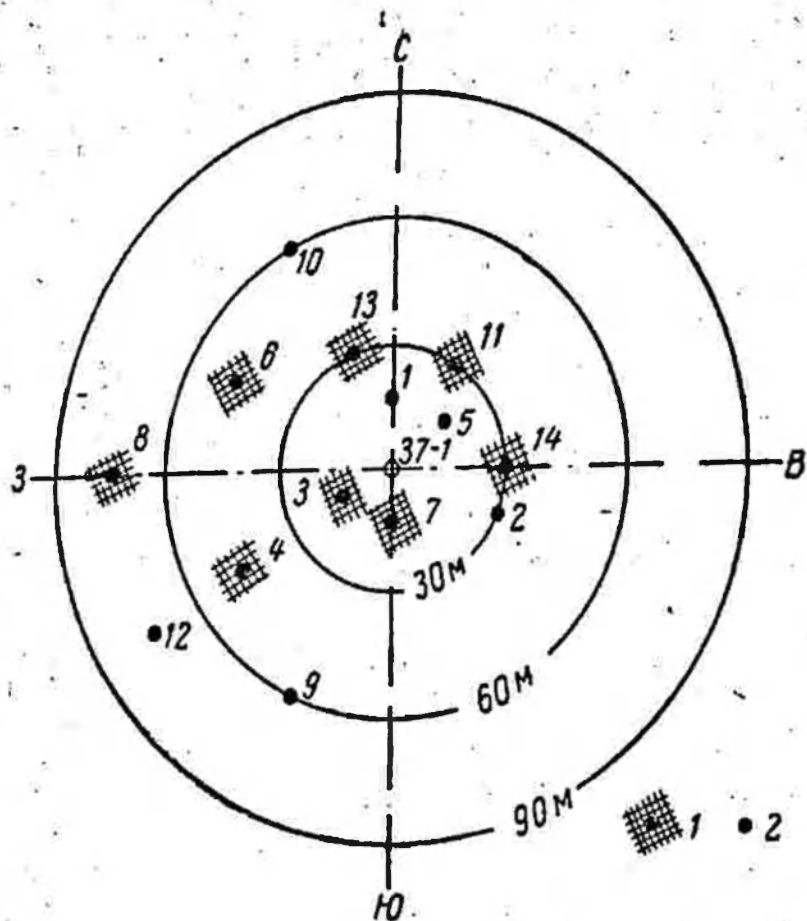


Рис. 32. Расположение основной и оценочных скважин в эксперименте [139]. 1 — скважина с положительными показателями наличия трещин, 2 — скважины с отрицательными показателями наличия трещин.

ла трещину гидроразрыва. Скважины, вскрывшие трещину гидроразрыва, отмечены на рис. 32 штриховкой; скважины, не вскрывшие трещину гидроразрыва, показаны без штриховки. Из рис. 32 видно, что трещина распространилась несимметрично по отношению к центральной скважине. На основе полученных данных авторы [139] сделали предположение о том, что трещина, получившаяся в результате гидравлического разрыва, горизонтальная. Такая ориентация трещины является вероятной. Подтверждают это предположение и данные о величине давления закачки смеси жидкости с песком во время гидравлического разрыва пласта. Так, давление на поверхности пласта вблизи забоя скважины не падало ниже 100 кг/см^2 . При глубине скважины в среднем 400 м и среднем удельном весе горных пород, равном $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$, вертикальное горное давление как раз и составляет 100 кг/см^2 . При исследовании некоторых оценочных скважин с испытателем пласта наблюдался большой вынос песка, что свидетельствует о том, что трещина в ряде мест имела большую ширину. Интересно отметить, что по мере закачки песка в трещину давление в скважине снижалось.

Результаты описанных выше промысловых опытов показали, что при гидравлических разрывах пласта могут образоваться трещины как вертикальной, так и горизонтальной ориентации в зависимости от естественного напряженного состояния пласта и способа осуществления разрыва. Конечно, такие опыты нельзя повсеместно и многократно использовать для определения ориентации трещин. Однако они дают наглядное представление о трещинах гидроразрыва. Следует подчеркнуть, что во втором промысло-

вом опыте трещина в оценочных скважинах обнаруживалась только в одном интервале пласта, что, как и в первом опыте, свидетельствует об образовании при разрыве пласта небольшого числа трещин (одной-двух) значительной протяженности (несколько десятков метров). Конечно, необходимо помнить, что трещина в последнем опыте была инициирована в горизонтальном направлении.

Выше были приведены фактические данные о размерах трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Первая попытка расчета ширины трещин гидроразрыва была сделана Юстером и Калуном [116]. Авторы [116] исходили из предположения, что при входе жидкости из скважины в трещину напор жидкости, существующий в скважине, полностью переходит в кинетическую энергию жидкости. Однако это предположение не было обоснованным и приводило при расчетах к большому занижению ширины трещин.

В работе Дэвиса, Рейпольдса и Коффера [121] дается метод определения радиуса горизонтальной трещины, основанный только на соображениях подземной гидравлики. Авторы [121] считают давление жидкости по всему радиусу горизонтальной трещины постоянным, а фильтрацию из трещин в верхнюю и нижнюю части пласта одномерной и принимают, что весь перепад давления при разрыве пласта теряется в области профильтровавшейся жидкости.

Методом, приведенным в работе [121], можно пользоваться для приближенной оценки радиуса горизонтальной трещины в тех случаях, когда, во-первых, можно считать, что объем самой трещины мал по сравнению с объемом закачанной в пласт жидкости и, во-вторых, сопротивлением трещины движению жидкости можно пренебречь. Очевидно, что при этом нельзя вычислить радиус трещины, если разрыв пласта ведется с применением нефилтратрующей жидкости.

Размеры трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта, могут быть определены по формулам, которые приведены в работах по механизму гидравлического разрыва пласта, выполненных в 1955—1959 гг. С. А. Христиановичем, Г. И. Баренблатом и автором [9, 38, 41, 106, 107]. В этих работах учитываются упругая деформация пласта, фильтрация жидкости в системе трещина — пласт и гидравлика движения жидкости в трещинах. Указанные работы основываются на положении о том, что при образовании трещин во время гидравлического разрыва в пласте возникает равновесное напряженное состояние — силы, разрывающие пласт (давление жидкости), находятся в равновесии с силами, препятствующими распространению трещины (горным давлением). Между этими двумя силами устанавливается строго определенное соотношение. Лишь при таком равновесии напряжение в конце трещины не будет бесконечно большим. Условие конечности напряжения в конце трещины (условие С. А. Христиановича

[8, 9, 38]) является важнейшим положением теории распространения трещин при гидравлическом разрыве пласта.

Определению размеров трещин гидроразрыва посвящена работа Перкинса и Керна [138]. Авторы рассматривают образование трещины в первоначально не нарушенном материале и поэтому учитывают поверхностную энергию, затрачиваемую на образование трещины. Как известно, создание в теле любой новой поверхности, в том числе поверхности трещины, требует затрат энергии. Трещина начинает распространяться не при любом малом превышении давления жидкости над горным давлением, а при некотором давлении жидкости, называемом «минимальным давлением распространения трещины». Авторы [138] используют решение Зака [95] для круглой трещины в бесконечном упругом теле, полученное на основе теории Гриффитса распространения трещин в хрупких телах. Основное положение теории Гриффитса, как известно, состоит в том, что с увеличением размеров трещины разность между поверхностной энергией трещины U и упругой энергией тела W , затраченной на образование трещины, не меняется. Таким образом, по теории Гриффитса, увеличение поверхностной энергии среды при образовании трещины происходит в результате уменьшения упругой энергии этой среды. Параметры трещины по теории Гриффитса находятся из условия $\frac{\partial(V - W)}{\partial l} = 0$ (l — длина трещины).

Подход Гриффитса к проблеме образования трещин в хрупких телах называется, в связи со сказанным выше, энергетическим.

В последние годы Г. И. Баренблаттом предложен иной подход к проблеме образования трещин в хрупких телах и развита теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении тел [10, 11, 12]. Г. И. Баренблатт рассматривал не баланс энергии в теле при образовании трещин, а силы, распространяющие трещины, и молекулярные силы, действующие на концах трещины и удерживающие ее от распространения. При условии конечности напряжения или плавности смыкания поверхностей трещины в ее концах система, состоящая из разрывающих и молекулярных сил, находится в равновесии и поэтому трещина называется «равновесной». Г. И. Баренблаттом установлена новая характеристика материала — модуль сцепления K , выражаемая через модуль Юнга E , удельную поверхностную энергию T и коэффициент Пуассона ν следующим образом: $K = \sqrt{\frac{\pi ET}{1 - \nu^2}}$.

Одновременно Г. И. Баренблаттом было показано, что данный им метод определения размеров трещин, образующихся в хрупких телах, не противоречит энергетическому методу Гриффитса, но при этом он значительно упрощает вычисления.

Перкинсом и Керном [138] были проведены эксперименты по распространению круглых в плане трещин в цементных блоках,

качественно подтвердившие теорию Гриффитса. Ввиду того, что размеры трещин, определенные по методу Гриффитса, должны совпадать с размерами трещин, вычисленными по теории Г. И. Баренблатта, если вместо удельной поверхностной энергии пользоваться модулем сцепления, можно сказать, что указанные эксперименты находятся в соответствии и с теорией Г. И. Баренблатта. Произведенные Перкинсом и Керном [138] расчеты показали, что минимальное давление распространения трещины оказывается сравнительно небольшим. Например, при радиусе горизонтальной трещины, равном 20 м, это давление составляет величину, лишь на 2 кг/см^2 превышающую горное давление, а максимальная ширина трещины равна всего около 0,075 мм. При такой ширине в трещине нельзя было бы ввести песок во время гидравлического разрыва. Перкинс и Керн [138] приходят к выводу, что из-за малой ширины трещины в ней возникнут большие гидравлические сопротивления, давление в трещине возрастет, в результате чего трещина расширится. Ее размеры в этом случае будут зависеть от гидравлического сопротивления, возникающего в трещине. Однако размеры трещин Перкинс и Керн [138] вычисляют без соблюдения условия конечности напряжения в конце трещины. Форма трещин, определенных Перкинсом и Керном [138], такова, что поверхности трещин в конце не смыкаются плавно.

Важной операцией при гидравлическом разрыве пласта является закрепление трещин, т. е. предотвращение их смыкания после снижения давления жидкости и, следовательно, предотвращение потери пропускной способности. В настоящее время известны три следующих способа сохранения высокой пропускной способности трещин: 1) закачка в трещины песка или других твердых частиц с целью их расклинивания; 2) обработка поверхностей трещин кислотой [73] или их размыв, после чего трещины полностью не смыкаются при снижении давления жидкости; 3) создание высокого давления (при помощи насосов или пороховых генераторов давления [67, 136]) и образование остаточных трещин за счет необратимой деформации горных пород. Наиболее широко применяется первый способ.

Удовлетворительное закрепление трещин песком или другими твердыми частицами зависит от двух факторов: 1) степени заполнения трещины твердыми частицами; 2) пропускной способности слоя частиц, сдавленного между поверхностями трещин.

Первый фактор обуславливается характером движения смеси твердых частиц с жидкостью в трещинах. Вопросы движения смесей частиц с жидкостью рассмотрены в работах [35, 109, 135]. Вторым фактором определяется прочность частиц, применяемых для расклинивания трещин, и возможностью их вдавливания в породы. При этом важно различать случай однослойного и многослойного расположения твердых частиц в трещине. При многослойном расположении частиц в трещине каждая частица испытывает давление со стороны соседних частиц, ввиду чего слой частиц выдер-

[8, 9, 38]) является важнейшим положением теорий распространения трещин при гидравлическом разрыве пласта.

Определению размеров трещин гидроразрыва посвящена работа Перкинса и Керна [138]. Авторы рассматривают образование трещины в первоначально не нарушенном материале и поэтому учитывают поверхностную энергию, затрачиваемую на образование трещины. Как известно, создание в теле любой новой поверхности, в том числе поверхности трещины, требует затрат энергии. Трещина начинает распространяться не при любом малом превышении давления жидкости над горным давлением, а при некотором давлении жидкости, называемом «минимальным давлением распространения трещины». Авторы [138] используют решение Зака [95] для круглой трещины в бесконечном упругом теле, полученное на основе теории Гриффитса распространения трещин в хрупких телах. Основное положение теории Гриффитса, как известно, состоит в том, что с увеличением размеров трещины разность между поверхностной энергией трещины U и упругой энергией тела W , затраченной на образование трещины, не меняется. Таким образом, по теории Гриффитса, увеличение поверхностной энергии среды при образовании трещины происходит в результате уменьшения упругой энергии этой среды. Параметры трещины по теории Гриффитса находятся из условия $\frac{\partial(V - W)}{\partial l} = 0$ (l — длина трещины).

Подход Гриффитса к проблеме образования трещин в хрупких телах называется, в связи со сказанным выше, энергетическим.

В последние годы Г. И. Баренблаттом предложен иной подход к проблеме образования трещин в хрупких телах и развита теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении тел [10, 11, 12]. Г. И. Баренблатт рассматривал не баланс энергии в теле при образовании трещин, а силы, распространяющие трещины, и молекулярные силы, действующие на концах трещины и удерживающие ее от распространения. При условии конечности напряжения или плавности смыкания поверхностей трещины в ее концах система, состоящая из разрывающих и молекулярных сил, находится в равновесии и поэтому трещина называется «равновесной». Г. И. Баренблаттом установлена новая характеристика материала — модуль сцепления K , выражаемая через модуль Юнга E , удельную поверхностную энергию T и коэффициент Пуассона ν следующим образом:
$$K = \sqrt{\frac{\pi E T}{1 - \nu^2}}$$

Одновременно Г. И. Баренблаттом было показано, что данный им метод определения размеров трещин, образующихся в хрупких телах, не противоречит энергетическому методу Гриффитса, но при этом он значительно упрощает вычисления.

Перкинсом и Керном [138] были проведены эксперименты по распространению круглых в плане трещин в цементных блоках,

качественно подтвердившие теорию Гриффитса. Ввиду того, что размеры трещин, определенные по методу Гриффитса, должны совпадать с размерами трещин, вычисленными по теории Г. И. Баренблатта, если вместо удельной поверхностной энергии пользоваться модулем сцепления, можно сказать, что указанные эксперименты находятся в соответствии и с теорией Г. И. Баренблатта. Произведенные Перкинсом и Керном [138] расчеты показали, что минимальное давление распространения трещины оказывается сравнительно небольшим. Например, при радиусе горизонтальной трещины, равном 20 м, это давление составляет величину, лишь на 2 кг/см^2 превышающую горное давление, а максимальная ширина трещины равна всего около 0,075 мм. При такой ширине в трещине нельзя было бы ввести песок во время гидравлического разрыва. Перкинс и Керн [138] приходят к выводу, что из-за малой ширины трещины в ней возникнут большие гидравлические сопротивления, давление в трещине возрастет, в результате чего трещина расширится. Ее размеры в этом случае будут зависеть от гидравлического сопротивления, возникающего в трещине. Однако размеры трещин Перкинс и Керн [138] вычисляют без соблюдения условия конечности напряжения в конце трещины. Форма трещин, определенных Перкинсом и Керном [138], такова, что поверхности трещин в конце не смыкаются плавно.

Важной операцией при гидравлическом разрыве пласта является закрепление трещин, т. е. предотвращение их смыкания после снижения давления жидкости и, следовательно, предотвращение потери пропускной способности. В настоящее время известны три следующих способа сохранения высокой пропускной способности трещин: 1) закачка в трещины песка или других твердых частиц с целью их расклинивания; 2) обработка поверхностей трещин кислотой [73] или их размыв, после чего трещины полностью не смыкаются при снижении давления жидкости; 3) создание высокого давления (при помощи насосов или пороховых генераторов давления [67, 136]) и образование остаточных трещин за счет необратимой деформации горных пород. Наиболее широко применяется первый способ.

Удовлетворительное закрепление трещин песком или другими твердыми частицами зависит от двух факторов: 1) степени заполнения трещины твердыми частицами; 2) пропускной способности слоя частиц, сдавленного между поверхностями трещин.

Первый фактор обуславливается характером движения смеси твердых частиц с жидкостью в трещинах. Вопросы движения смесей частиц с жидкостью рассмотрены в работах [35, 109, 135]. Вторым фактором определяется прочность частиц, применяемых для расклинивания трещин, и возможностью их вдавливания в породы. При этом важно различать случаи однослойного и многослойного расположения твердых частиц в трещине. При многослойном расположении частиц в трещине каждая частица испытывает давление со стороны соседних частиц, ввиду чего слой частиц выдер-

живает большие нагрузки, не разрушаясь полностью. Как показывают эксперименты, частицы вдавливаются в слой незначительно. Изменение пропускной способности большого слоя твердых частиц происходит вследствие деформации и разрушения некоторых частиц. В работе [79], например, показано, что при давлении 400 кг/см^2 , действующем на слой песка, проницаемость песка составляет 30% проницаемости, замеренной при внешнем давлении на слой, равном 50 кг/см^2 . Если же в трещине имеется слой песка в одну песчинку, то даже при внешнем давлении на слой, составляющем несколько десятков кг/см^2 , происходит полное разрушение песчинок с практически полной потерей пропускной способности слоя. Однако можно выбрать достаточно прочные частицы, которые не будут разрушаться, так что потеря пропускной способности трещины может произойти только из-за вдавливания твердых частиц в породы. Пропускная способность трещины, заполненной одним слоем твердых частиц, изучалась авторами работ [120, 122]. Интересно отметить, что пропускная способность трещины в данном случае имеет максимум, получающийся при определенном количестве твердых частиц, приходящемся на единицу площади поверхности трещины. Существование максимума связано с тем, что при малом количестве твердых частиц на единицу площади они вдавливаются в породы и происходит смыкание трещины; при большой же концентрации твердых частиц в трещине уменьшается ее свободное сечение и поэтому также снижается пропускная способность.

§ 6. ОБРАЗОВАНИЕ ТРЕЩИН В НЕПОРИСТЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЫВЕ ПЛАСТА

При образовании трещин в естественных массивах горных пород основной силой, противостоящей силам, которые распространяют трещину, является горное давление. Ниже будут рассмотрены случаи, когда силы, распространяющие трещину, передаются горным породам через жидкость, как это происходит при гидравлическом разрыве пласта.

Пусть в массиве непористых горных пород, которые являются в среднем однородными и изотропными, образовалась горизонтальная трещина, имеющая в плане форму круга. Трещину затем распространяют путем закачки в нее жидкости, которая остается в трещине. Тот же самый процесс будет происходить и в условиях, когда породы являются пористыми и проницаемыми, а жидкость — нефилтрующей.

По мере удаления от скважины движущейся по трещине жидкости ее давление уменьшается в результате действующего на нее гидравлического сопротивления. Самое резкое падение давления будет наблюдаться вблизи конца трещины, так как ее ширина здесь быстро уменьшается.

При изучении рассматриваемого процесса необходимо решить задачу теории упругости об образовании трещины в породах под действием давления жидкости, изменяющегося вдоль трещины из-за сопротивления, которое оказывает сама трещина движению жидкости. Применим приближенный метод [38], согласно которому будем считать, что форма трещины не изменится, если истинную эпюру давления жидкости в трещине заменить эквивалентной ей эпюрой, показанной на рис. 33, причем таким образом, чтобы равнодействующие и моменты относительно оси z обеих эпюр были равны. Математически точное решение задачи теории упругости об образовании горизонтальной трещины под действием постоянной нагрузки P , приложенной к поверхности трещины на участке (см. рис. 33) $0 \leq r \leq aR$ (r — текущий радиус, R — радиус трещины), получено Г. И. Баренблаттом [9]. Эта же задача решена приближенным методом в работе [39].

Изложим вначале вкратце точное решение упомянутой выше задачи теории упругости.

Уравнения теории упругости в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= -\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где σ_r , τ_{rz} , σ_θ и σ_z — компоненты напряжения; γ — удельный вес горных пород.

Имеем также следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = \tau_{rz} &= 0 \quad \text{при } z = H; \\ \sigma_z = \tau_{rz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \quad R \geq r \geq R_1; \\ \sigma_z = -p, \quad \tau_{rz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \quad R_1 > r \geq 0, \quad R_1 = aR, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где H — глубина залегания пласта (точнее, — местоположения трещины).

В ненарушенном массиве существует напряженное состояние

$$\sigma_z^0 = -(q - \gamma z), \quad \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = -\alpha(q - \gamma z), \quad \tau_{rz}^0 = 0, \quad (6.3)$$

где α — коэффициент бокового давления.

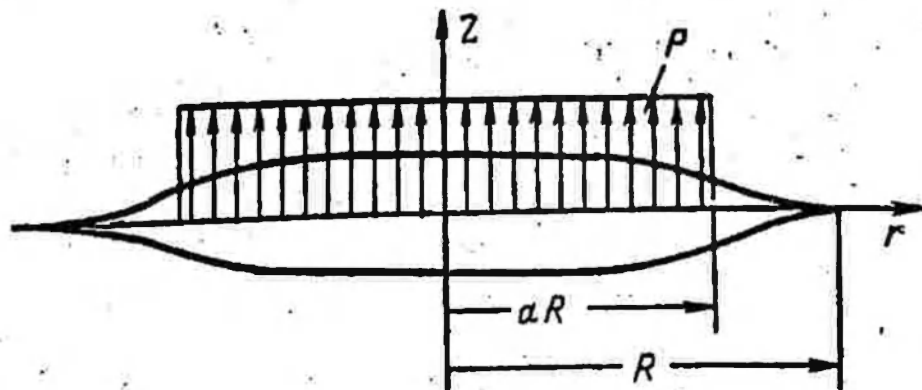


Рис. 33. Схема горизонтальной трещины при действии на ее поверхности постоянной нагрузки P .

Напряженное состояние, определяемое формулами (6.3), удовлетворяет уравнениям равновесия (6.1) и условиям совместности (1.9).

Если положить

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^0 + \sigma_z^1; & \sigma_r &= \sigma_r^0 + \sigma_r^1; \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz}^1; & \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\sigma_r^1, \sigma_z^1, \tau_{rz}^1, \sigma_\theta^1$ — компоненты добавочного напряжения, то задача сформулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^1}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^1}{\partial z} + \frac{\sigma_r^1 - \sigma_\theta^1}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^1}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^1}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}^1}{r} &= 0; \\ \sigma_z^1 = \tau_{rz}^1 &= 0 \quad \text{при } z = H; \\ \tau_{rz}^1 &= 0 \quad \text{при } z = 0, \quad 0 \leq r \leq R; \\ \sigma_z^1 &= q \quad \text{при } z = 0, \quad R \geq r \geq R_1; \\ \sigma_z^1 &= -(p - q) \quad \text{при } z = 0, \quad R_1 > r \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Ввиду того что глубина залегания пластов, подвергаемых разрыву, обычно велика, влиянием свободной поверхности на деформацию пород вблизи трещины можно пренебречь и рассматривать задачу об образовании трещины не в полупространстве, а во всем пространстве. Г. И. Баренблаттом было использовано [9] решение задачи теории упругости для круглой трещины в пространстве, данное И. Снеддоном [95]. Выражение для вертикального смещения точек поверхности трещины $v(r)$ при произвольном осесимметричном распределении добавочного нормального напряжения по трещине в форме И. Снеддона [95] имеет вид:

$$v(r) = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \int_0^1 \frac{\mu_* d\mu_*}{\sqrt{\mu_*^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{xg(x\mu_*R)dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (6.6)$$

где $\rho = \frac{r}{R}$; E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона.

В рассматриваемом случае функция $g(r)$ определяется следующим образом:

$$g(r) = \begin{cases} -(p - q) & \text{при } R_1 \geq r \geq 0 \\ q & \text{при } R \geq r \geq R_1. \end{cases} \quad (6.7)$$

В результате подстановки (6.7) в (6.6), интегрирования и выполнения условия конечности напряжений в точке $\rho=1$ (условия

С. А. Христиановича) получаются следующие выражения [9] для ширины трещины:

при $\rho \geq a$

$$\omega(r) = 2v(r) = \frac{8(1-\nu^2)\rho R}{\pi E} \rho \left\{ E\left(\frac{a}{\rho}\right) - E\left(\frac{a}{\rho}, \arcsin a\right) - \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left[K\left(\frac{a}{\rho}\right) - F\left(\frac{a}{\rho}, \arcsin \rho\right) \right] \right\}; \quad (6.8)$$

при $\rho \leq a$

$$\omega(r) = \frac{8(1-\nu^2)\rho R}{\pi E} a \left[E\left(\frac{\rho}{a}\right) - E\left(\frac{\rho}{a}, \arcsin a\right) \right], \quad (6.9)$$

где $E(k)$, $E(k, \varphi)$, $K(k)$ и $F(k, \varphi)$ — обычные обозначения эллиптических интегралов [117].

Выполнение условия С. А. Христиановича при $\rho=1$ дает [9]:

$$1 - \frac{q}{\rho} = \sqrt{1 - a^2}. \quad (6.10)$$

Из (6.9) имеем

$$\omega_0 = \omega(0) = \frac{8(1-\nu^2)\rho R}{\pi E} a \arccos a. \quad (6.11)$$

На рис. 34 показана форма трещины при различных a в виде зависимости $\frac{\omega}{\omega_0} = \Phi(\rho, a)$.

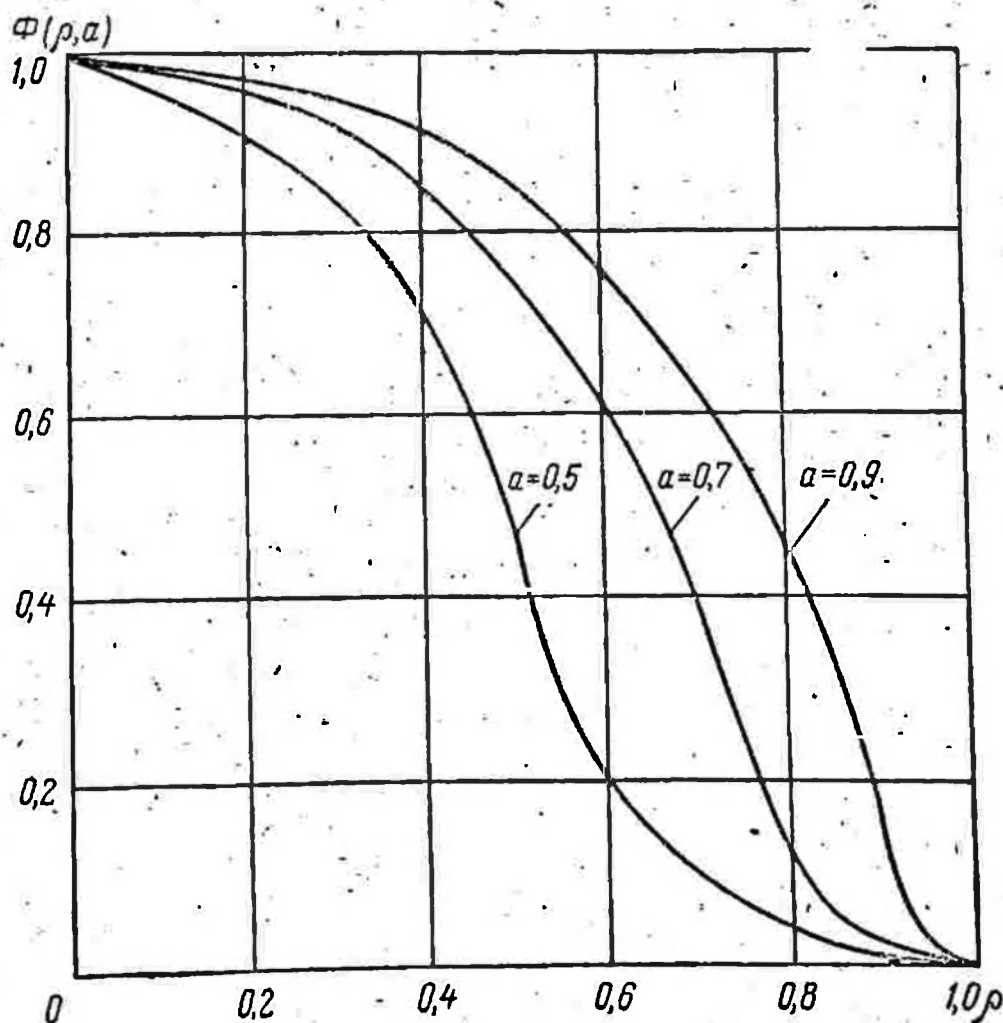


Рис. 34. Зависимость $\frac{\omega}{\omega_0} = \Phi(\rho, a)$.

Г. И. Баренблаттом [9] дана также следующая формулировка условия С. А. Христиановича для круглой трещины, образующейся в тяжелом упругом пространстве под действием произвольной нагрузки $p(r) = g(r) + q$.

$$\int_0^1 \frac{rp(Rp) dp}{\sqrt{1-p^2}} + q = 0. \quad (6.12)$$

Изложенное выше решение задачи теории упругости об образовании круглой трещины было использовано в работе [36] для расчета процесса распространения горизонтальной трещины, образующейся при гидравлическом разрыве пласта, приближенным методом [38]. Согласно этому методу, заменим в приведенном выше решении величины давления жидкости p и горного давления q соответственно величинами $\Delta p_c^e = p_c^e - p_k$ (p_c^e — эквивалентное давление жидкости в скважине, p_k — давление жидкости в пласте) и $q^e = q - p_k$. Из рис. 33 для равнодействующей N_1 эквивалентной эпюры имеем

$$N_1 = \int_0^a 2\pi \Delta p_c^e r dr = \pi a^2 R^2 \Delta p_c^e. \quad (6.13)$$

Обозначим $\Delta p(r)$ — распределение истинного давления вдоль трещины, избыточного над пластовым. Тогда для равнодействующей N_2 истинного избыточного давления получим

$$N_2 = \int_{r_c}^{R_0} 2\pi \Delta p(r) r dr = -2\pi \int_{r_c}^{R_0} \left[\Delta p_c - \frac{6Q\mu}{\pi} \int_{r_c}^r \frac{dr}{r\omega^3(r)} \right] r dr, \quad (6.14)$$

где Δp_c — истинный перепад давления между скважиной и пластом; Q — расход жидкости; μ — вязкость жидкости; ω — ширина трещины; R_0 — истинный радиус проникновения жидкости по трещине; r_c — радиус скважины.

Согласно приближенному методу [38], $N_1 = N_2$. Тогда получаем соотношение

$$a^2 \frac{\Delta p_c^e}{\Delta p_c} = -2 \int_{p_c}^{\beta} \left[1 - A \int_{p_c}^p \frac{dp}{p\Phi^3(p, a)} \right] p dp, \quad (6.15)$$

где $p = \frac{r}{R}$; $\beta = \frac{R_0}{R}$; $A = \frac{6Q\mu}{\pi \Delta p_c \omega_0^3}$; $\Phi(p, a) = \frac{\omega(p)}{\omega_0}$; $p_c = \frac{r_c}{R}$;
 ω_0 — ширина трещины у ствола скважины.

Для моментов эквивалентной и истинной эпюр давления имеем соответственно

$$M_1 = \frac{2}{3} \pi a^3 R^3 \Delta p_c^e; \quad (6.16)$$

$$M_2 = -2\pi R^3 \Delta p_c \int_{\rho_c}^{\beta} [1 - AI(\rho, \rho_c)] \rho^2 d\rho, \quad I(\rho, \rho_c) = \int_{\rho_c}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho \Phi^3(\rho, a)}. \quad (6.17)$$

В соответствии с приближенным методом [38] должно быть

$$M_1 = M_2.$$

Получаем

$$\frac{1}{3} a^3 \frac{\Delta p_c^e}{\Delta p_c} = - \int_{\rho_c}^{\beta} [1 - AI(\rho, \rho_c)] \rho^2 d\rho. \quad (6.18)$$

Из (6.15) и (6.18) имеем

$$\frac{2}{3} a \int_{\rho_c}^{\beta} [1 - AI(\rho, \rho_c)] \rho d\rho = \int_{\rho_c}^{\beta} [1 - AI(\rho, \rho_c)] \rho^2 d\rho. \quad (6.19)$$

Поскольку $\Delta p(r) = 0$ при $R_0 \leq r \leq R$, получим следующую формулу:

$$\frac{1}{A} = I(\beta, \rho_c), \quad I(\beta, \rho_c) = \int_{\rho_c}^{\beta} \frac{d\rho}{\rho \Phi^3(\rho, a)}. \quad (6.20)$$

Подставляя (6.20) в (6.19), находим окончательно

$$\frac{2}{3} a \int_{\rho_c}^{\beta} \left[1 - \frac{I(\rho, \rho_c)}{I(\beta, \rho_c)} \right] \rho d\rho = \int_{\rho_c}^{\beta} \left[1 - \frac{I(\rho, \rho_c)}{I(\beta, \rho_c)} \right] \rho^2 d\rho. \quad (6.21)$$

Задавая различные a и соответствующие им $\Phi(\rho, a)$ из решения [9], можно из соотношения (6.21) определить β .

В соотношении (6.21) входит ρ_c , что вызывает затруднения при расчетах, так как при каждом a и $\Phi(\rho, a)$ нужно производить расчеты еще и для ряда значений ρ_c . Для того чтобы устранить указанную трудность, примем следующие допущения: положим $\rho_c = 0$ и будем считать, что на участке $0 \leq \rho \leq 0,01$ перепад давления жидкости является практически постоянным, равным Δp_c . Это означает, что, например, при радиусе трещины $R = 15$ м на расстоянии от оси скважины, изменяющемся в пределах от 0

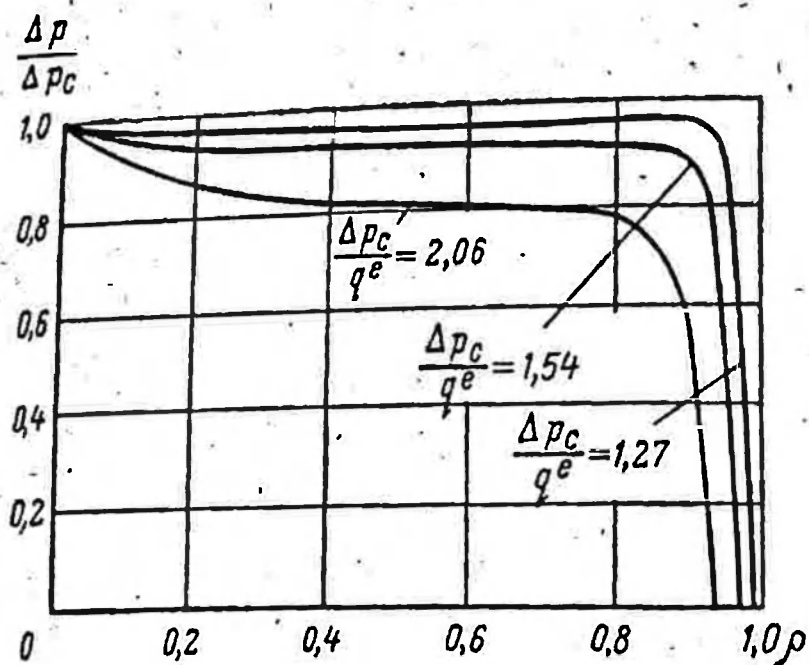


Рис. 35. Эпюры давления жидкости в горизонтальной трещине для некоторых значений $\frac{\Delta P_c}{q^e}$.

до 15 см, перепад давления принимается постоянным. При радиусе трещины $R=150$ м перепад давления жидкости принимается постоянным при расстоянии от оси скважины в пределах от 0 до 1,5 м. Возникающая при этом допущении погрешность незначительна, так как разница в перепадах давления на небольшом участке вблизи скважины мало влияет на величину равнодействующей эпюры давления жидкости и тем более на величину ее момента относительно оси скважины. Объем жидкости в трещине определяется формулой

$$V_{ж} = \int_0^{\beta} 2\pi\omega r dr = 2\pi\omega_0 R^2 \tau_{ж}; \quad \tau_{ж} = \int_0^{\beta} \Phi(\rho, a) \rho d\rho. \quad (6.22)$$

Значения параметров A , β , $\frac{\Delta P_c^e}{\Delta P_c}$ и $\tau_{ж}$, определенные численным методом на основе приведенных выше соотношений, даны для некоторых значений a в табл. 7.

Таблица 7

Параметры горизонтальной трещины

a	β	$\frac{\Delta P_c^e}{\Delta P_c}$	A	$\tau_{ж}$
0,80	0,850	0,689	7,679	0,2424
0,90	0,931	0,858	3,974	0,2924
0,95	0,969	0,940	1,609	0,3176
0,98	0,989	0,980	0,4358	0,3316

На рис. 35 представлены эпюры давления жидкости для некоторых значений $\frac{\Delta P_c}{q^e}$. Как показывают расчеты, процесс распрост-

рашения трещин в непористых породах или при помощи нефил-
 трующейся жидкости протекает таким образом, что спустя неко-
 торое время после начала закачки жидкости в трещину фронт
 жидкости очень близко подходит к концу трещины, но никогда
 не достигает его. Следовательно, величина β в этом случае близка
 к единице. Из табл. 7 для $\beta \rightarrow 1$ имеем

$$V_{\text{ж}} \approx 2\pi\omega_0 R^2 \cdot 0,33 \approx 2\omega_0 R^2. \quad (6.23)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow 1$ $a \rightarrow 1$. Формулу (6.11) можно пред-
 ставить в виде:

$$\omega_0 = \frac{8(1-\nu^2) \Delta p_c^e R}{\pi E} a \operatorname{arccos} a, \quad (6.24)$$

а формула (6.10) переписывается следующим образом:

$$1 - \frac{q - p_k}{\Delta p_c^e} = \sqrt{1 - a^2}. \quad (6.25)$$

При $a \rightarrow 1$ имеем

$$a \operatorname{arccos} a \approx a \sqrt{2(1-a)}; \quad 1 - \frac{q - p_k}{\Delta p_c^e} \approx \sqrt{2(1-a)}. \quad (6.26)$$

Из (6.24) и (6.26) находим

$$\omega_0 = \frac{8(1-\nu^2) \Delta p_c^e R}{\pi E} \zeta \left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right), \quad \zeta = \frac{p_c^e - q}{\Delta p_c^e}. \quad (6.27)$$

При значениях a , очень близких к единице, можно, согласно
 табл. 7, положить $\Delta p_c^e \approx \Delta p_c$. Кроме того, величина ζ будет очень
 малой; следовательно, можно пренебречь величиной $\frac{\zeta^2}{2}$ по сравнению
 с единицей. В результате этого получим для малых $p_c - q$ выраже-
 ние

$$\omega_0 \approx \frac{8(1-\nu^2)(p_c - q)R}{\pi E}. \quad (6.28)$$

При $a \rightarrow 1$ имеем также

$$A \approx 25(1-a) = 12,5 \left(\frac{p_c - q}{\Delta p_c}\right)^2, \quad (6.29)$$

так как согласно (6.26) и принятому выше значению $\Delta p_c^e \approx \Delta p_c$

$$1 - a \approx \frac{1}{2} \left(\frac{p_c - q}{\Delta p_c}\right)^2 \quad (6.30)$$

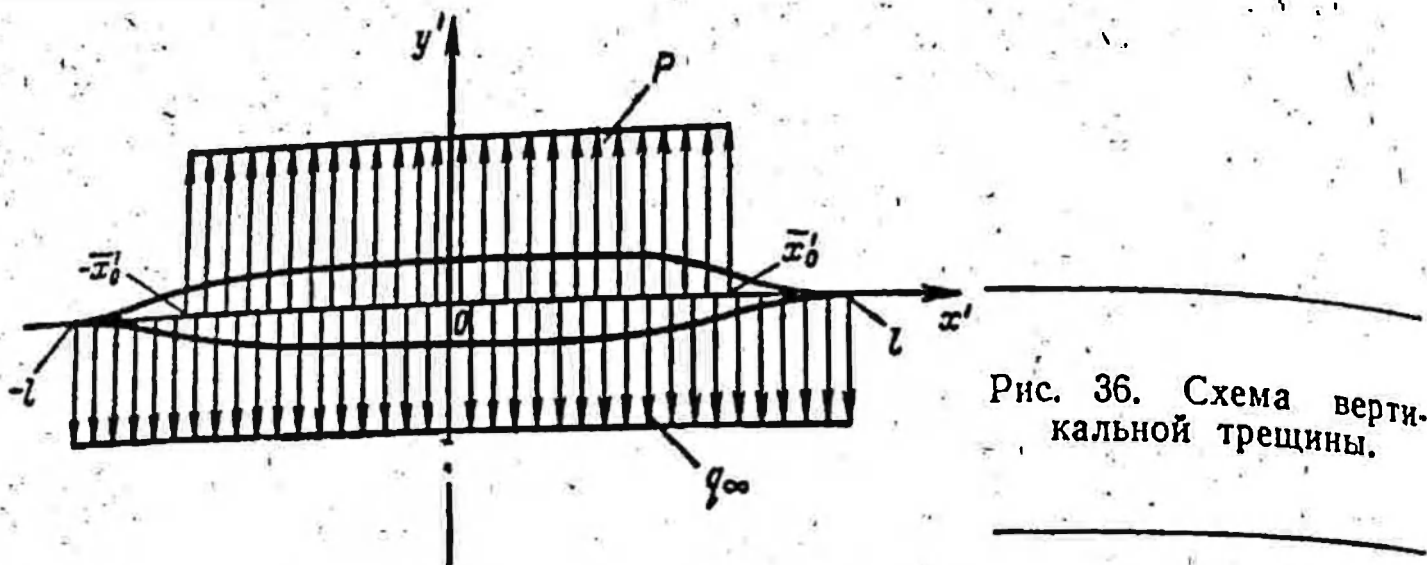


Рис. 36. Схема вертикальной трещины.

В соответствии с (6.15), (6.23) и (6.28) имеем

$$V_{ж} = \frac{5(1-\nu^2)(p_c - q)}{E} R^3. \quad (6.31)$$

Подставляя (6.28) и (6.29) в (6.31), а также учитывая (6.15), получаем

$$\left(\frac{p_c - q}{E}\right)^3 \frac{p_c - q}{\Delta p_c} = 0,0463 \frac{(1 + \nu^2)^2}{E} \frac{Q_{12}}{V_{ж}} \quad (6.32)$$

или при постоянном расходе Q , когда можно положить $V_{ж} = Qt + v_0$ (t — время, v_0 — начальный объем жидкости в трещине при $t=0$), имеем

$$\left(\frac{p_c - q}{E}\right)^3 \frac{p_c - q}{\Delta p_c} = 0,0463 \frac{(1 + \nu^2)^2}{E} \frac{Q_{12}}{Qt + v_0}. \quad (6.33)$$

В случае, если $Q = \text{const}$, $v_0 = 0$, изменение давления жидкости, при помощи которой распространяется горизонтальная трещина, не зависит от расхода жидкости.

Опишем теперь процесс образования вертикальной трещины при гидравлическом разрыве пласта в непористых породах или при закачке в них нефилтующейся жидкости.

Пусть в горизонтально залегающем пласте в результате закачки жидкости в скважину образовалась вертикальная трещина. Она распространяется одинаково в обе стороны от скважины, находящейся в центре $x' = 0$ (рис. 36).

Вертикальная трещина, образуемая в каком-либо отдельном пласте, должна во многих случаях ограничиваться по вертикали кровлей и подошвой пласта, которые препятствуют распространению трещины по вертикали. Поэтому задача об образовании вертикальной трещины в пласте является, как это было отмечено Ю. Н. Васильевым [20], сложной пространственной задачей. Однако при длине вертикальной трещины, сравнимой с мощностью пласта, задача об образовании такой трещины может быть сведена к соответствующей плоской задаче теории упругости.

При решении задачи о распространении вертикальной трещины путем закачки в нее нефилтующейся жидкости применим приближенный метод [38], согласно которому истинное распределение давления жидкости $\Delta p(x)$ заменяется равномерно распределенной нагрузкой \bar{P} , распространяющейся на некоторое расстояние по трещине так, что равнодействующие и моменты обеих нагрузок относительно оси, перпендикулярной простиранию трещины, равны между собой. Этот метод подробно описан выше при рассмотрении процесса распространения горизонтальной трещины.

Соответствующая задача теории упругости формулируется следующим образом. Трещина, образованная в неограниченной упругой плоскости, находится под действием нагрузки P , равномерно распределенной на участке $-\bar{x}_0 \leq x' \leq \bar{x}_0$ (см. рис. 36). Пласт сжимается со всех сторон боковым горным давлением q_∞ . Необходимо определить деформацию пласта. Обозначим через u и v смещения, параллельные соответственно осям x' и y' (см. рис. 36). Для удобства физические размерные переменные x' и y' помечены штрихами. Длина половины трещины равна l .

Выражения для смещений и напряжений получаются в рассматриваемой задаче методом Н. И. Muskhelishvili [76]. В этом случае применяется конформное отображение области вне трещины на область вне круга, а функции $f(\sigma)$, $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ вычисляются по формулам, приведенным в § 3 этой главы. В результате получается [38] следующее выражение для функции $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{P}{2\pi i} \left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \ln \frac{\zeta^2 - e^{2i\vartheta_0}}{\zeta^2 - e^{-2i\vartheta_0}} + i \frac{\pi - 2\vartheta_0}{\zeta} + \cos \vartheta_0 \ln \frac{\zeta^2 + 2i\zeta \sin \vartheta_0 - 1}{\zeta^2 - 2i\zeta \sin \vartheta_0 - 1} - \frac{i\pi}{P} \frac{q_\infty}{\zeta} \right]; \quad (6.34)$$

$$z = x + iy = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right); \quad x = \frac{x'}{l}; \quad y = \frac{y'}{l};$$

$$\vartheta_0 = \arccos \bar{x}_0; \quad \nu = 3 - 4\nu.$$

Выполнение условия С. А. Христиановича в этом случае приводит к соотношению [38]

$$\frac{P}{q_\infty} = \frac{1}{1 - \frac{2\vartheta_0}{\pi}}. \quad (6.35)$$

Ширина трещины определяется формулой

$$\omega = \frac{4(1-\nu^2)lq_\infty}{E} \alpha_1; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\pi - 2\vartheta_0} \left[\cos \vartheta \ln \frac{\sin |(\vartheta - \vartheta_0)|}{\sin (\vartheta + \vartheta_0)} + \right.$$

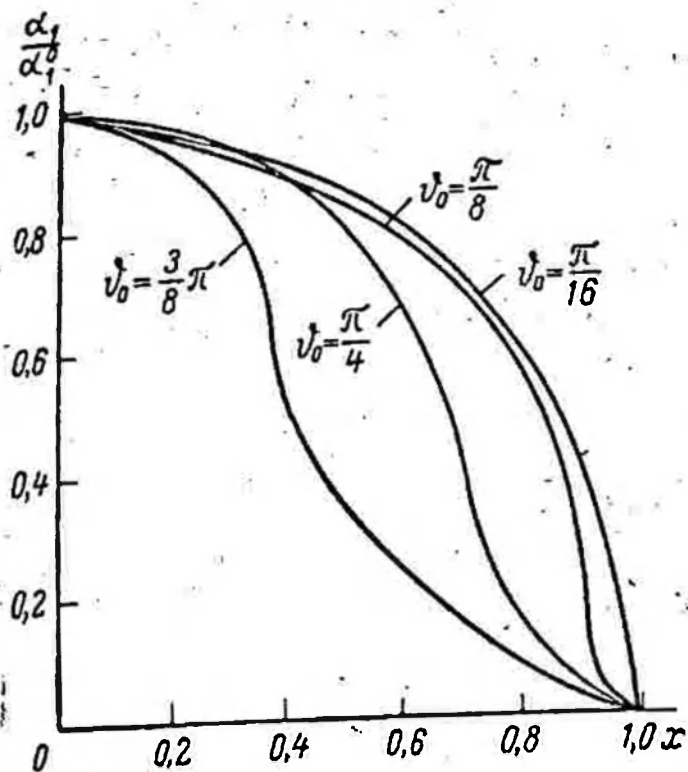


Рис. 37. Зависимость $\frac{\alpha_1}{\alpha_1^0}$ от x для различных ϑ_0 .

$$+ \cos \vartheta_0 \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}}{\operatorname{tg} \left| \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \right|} \right];$$

$$\vartheta = \arccos x. \quad (6.36)$$

Для ширины трещины вблизи скважины имеем выражение

$$\omega_0 = \frac{4(1-\nu^2) l q_\infty}{E} \alpha_1^0; \quad \alpha_1^0 = \frac{\cos \vartheta_0}{\pi - 2\vartheta_0} \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_0}{2} \right) \right|}. \quad (6.37)$$

Зависимости $\frac{\alpha_1}{\alpha_1^0} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^0}(x)$ представлены для ряда ϑ_0 на рис. 37.

Объем нефилтующейся жидкости, закачанной в двустороннюю трещину, определяется формулой

$$V_{\text{ж}} = 2\omega_0 h l \tau_{\text{ж}}; \quad \tau_{\text{ж}} = \int_0^{x_0} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^0} dx. \quad (6.38)$$

В табл. 8 даны величины основных параметров, определяющих процесс распространения вертикальной трещины при помощи нефилтующейся жидкости, для некоторых значений ϑ_0 .

На рис. 38 представлены эпюры давления жидкости для некоторых значений ϑ_0 . Как видно из таблицы, при малых ϑ_0 жидкость очень близко подходит к концу трещины ($x_0 \rightarrow 1$). При $\vartheta_0 \rightarrow 0$ можно получить простую формулу, определяющую изменение с течением времени истинного давления жидкости на забое скважины p_c , верную при $\Delta p_c < 1,35 q_\infty$:

$$\frac{\Delta p_c}{q_\infty} \left(\frac{\Delta p_c}{q_\infty} - 1 \right)^3 = 5,25 \frac{1}{(1-\nu^2)^2} \left(\frac{E}{q_\infty} \right)^2 \frac{Q_{\text{л}}}{q_\infty V_{\text{ж}}}; \quad (6.39)$$

$$V_{\text{ж}} = Qt + V_0, \quad (6.40)$$

где l — время и V_0 — объем жидкости, существовавший в трещине в момент $t=0$; Q — расход жидкости. При $V_0=0$ находим, что изменение давления жидкости на забое скважины не зависит от расхода.

Параметры вертикальной трещины

Таблица 8

ϑ_0	$\frac{P}{\Delta P_c}$	$\frac{\Delta P_c}{q_\infty}$	x_0	A	α_1^0	$\tau_{ж}$
$\frac{3\pi}{8}$	0,890	4,50	0,465	0,787	1,580	0,328
$\frac{\pi}{4}$	0,920	2,18	0,770	0,250	0,780	0,622
$\frac{\pi}{8}$	0,985	1,35	0,938	0,0264	0,315	0,712
$\frac{\pi}{16}$	0,990	1,155	0,989	0,013	0,150	0,706

Ширина трещины у забоя скважины и ее длина при $\Delta p_c < 1,35 q_\infty$ определяются формулами

$$\omega_0 = \frac{4(1-\nu^2)l}{E} (\Delta p_c - q_\infty); \quad (6.41)$$

$$l = \sqrt{\frac{V_{ж}E}{5,6(1-\nu^2)h(\Delta p_c - q_\infty)}} \quad (6.42)$$

Выше были рассмотрены случаи, когда единственным фактором, препятствующим неограниченному распространению трещины, является горное давление. Однако при распространении трещины в первоначально не нарушенных горных породах таким фактором, помимо горного давления,

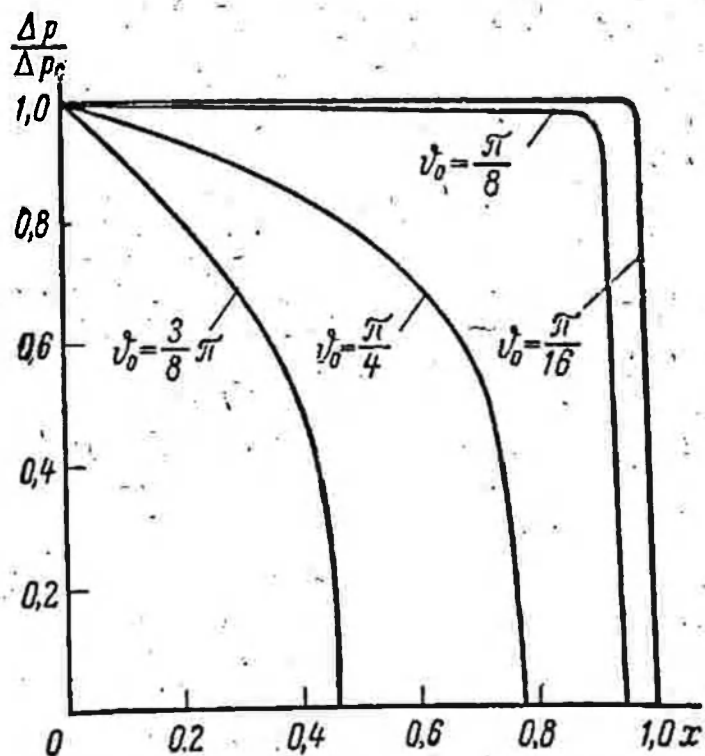


Рис. 38. Эпюры давления жидкости в вертикальной трещине для различных ϑ_0 .

являются молекулярные силы сцепления. Рассмотрим теперь ту же задачу об образовании вертикальной трещины в пласте, но с учетом того, что, кроме бокового горного давления, распространение трещины ограничивают еще и силы сцепления. При этом будем основываться на представлениях, развитых Г. И. Баренблаттом [10, 11].

Соотношение (6.35), полученное в результате выполнения условия С. А. Христиановича для вертикальной трещины, образованной в породе, сжатой горным давлением, без учета сил сцепления, можно переписать в виде:

$$\arcsin \frac{\bar{x}_0}{l} = \frac{\pi}{2} \frac{q_\infty}{P} \quad (6.43)$$

В случае же действия на концах трещины, помимо напряжений, возникающих от горного давления, еще и сил сцепления, имеем

$$\arcsin \frac{\bar{x}_0}{l} = \frac{\pi}{2} \frac{q_\infty}{P} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Kl^{-\frac{1}{2}}}{P}, \quad (6.44)$$

где K — модуль сцепления [10, 11].

Из сопоставления (6.43) и (6.44) следует, что при действии на породу сил сцепления, помимо горного давления, форма трещины зависит не только от отношения давления жидкости к горному давлению, но и от величины $\frac{Kl^{-1/2}}{P}$, т. е. еще и от самой длины трещины. Как следует из формулы (6.44), с увеличением полудлины трещины l влияние сил сцепления на распространение трещин уменьшается.

Определим теперь влияние сил сцепления на процесс распространения вертикальной трещины. Пусть, например, $q_\infty = 100 \text{ кг/см}^2$, $P = 120 \text{ кг/см}^2$. Согласно [11] $K \approx 10^2 \text{ кг/см}^{1/2}$. Тогда имеем

$$\frac{\pi q_\infty}{2P} = \frac{100 \cdot 3,14}{2 \cdot 120} = 1,31, \quad (6.45)$$

а величина

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Kl^{-\frac{1}{2}}}{P} = 0,71 \frac{10^2 l^{-\frac{1}{2}}}{120}. \quad (6.46)$$

При $l = 10 \text{ м} = 10^3 \text{ см}$ $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Kl^{-\frac{1}{2}}}{P} \approx 0,019$, а при $l = 1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$ $\varepsilon \approx 0,06$. Как видно из этих расчетов, силы сцепления при реальных разрывах пласта, по-видимому, не играют существенной роли.

Как уже было отмечено, приведенные выше формулы для определения размеров вертикальной трещины пригодны в случае сравнительно малых длин трещин. Если полудлина вертикальной трещины l значительно превышает мощность пласта, то формулами (6.41) и (6.42) пользоваться нельзя. Ширину трещины вблизи скважины можно определять приближенно по формуле (3.28) этой главы.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Изложенная в предыдущем параграфе задача теории упругости об образовании осесимметричной трещины в упругом пространстве может быть решена также приближенным методом [39]. Опишем основные положения этого метода.

Пусть на границы трещины (рис. 39) действует нормальная нагрузка, распределенная по закону $\varphi(r)$. В ненарушенном пространстве имеется напряженное состояние, обусловленное горным давлением $q = \gamma(H - z)$, где γ — удельный вес горных пород, H — глубина залегания пласта.

Будем считать, что плоскость трещины совпадает с плоскостью $z = 0$. Дополнительные напряжения, возникающие в упругом пространстве вследствие образования в нем трещины, симметричны относительно плоскости $z = 0$. Поэтому вертикальные перемещения границ трещины $w(r)$ при $z = 0$ можно представить себе как перемещение границ полупространства под действием нагрузок, подобранных таким образом, что всюду вне трещины $w(r) = 0$. Так, можно считать, что нагрузка $\varphi(r)$, действующая в пределах $0 \leq r \leq R_1$ (рис. 40), вызывает перемещение границ трещины в одном направлении, а какая-то нагрузка $f(r)$, действующая на полупространство на участке $r \geq R$ (R — радиус границы трещины), вызывает обратные перемещения так, что $w(r) = 0$ при $r \geq R$.

Таким образом, задача со смешанными граничными условиями заменяется задачей с однородными граничными условиями. Далее, нагрузку $\varphi(r)$ можно приближенно заменить несколькими эквивалентными по площади и моментам равномерно распределен-

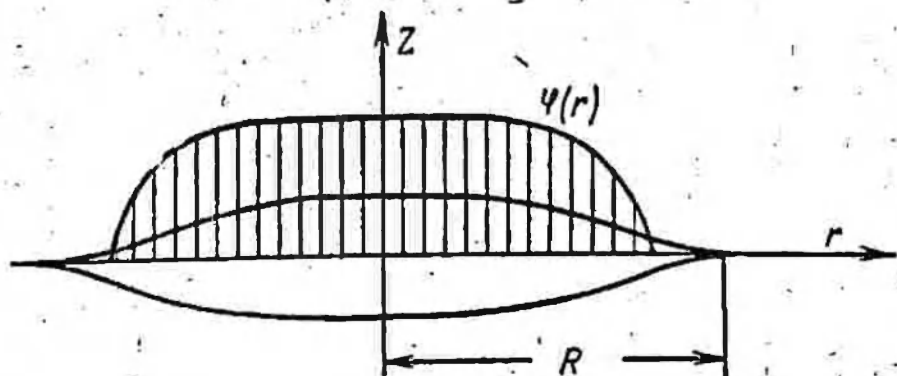


Рис. 39. Схема горизонтальной трещины, на которую действует нагрузка, распределенная по закону $\varphi(r)$.

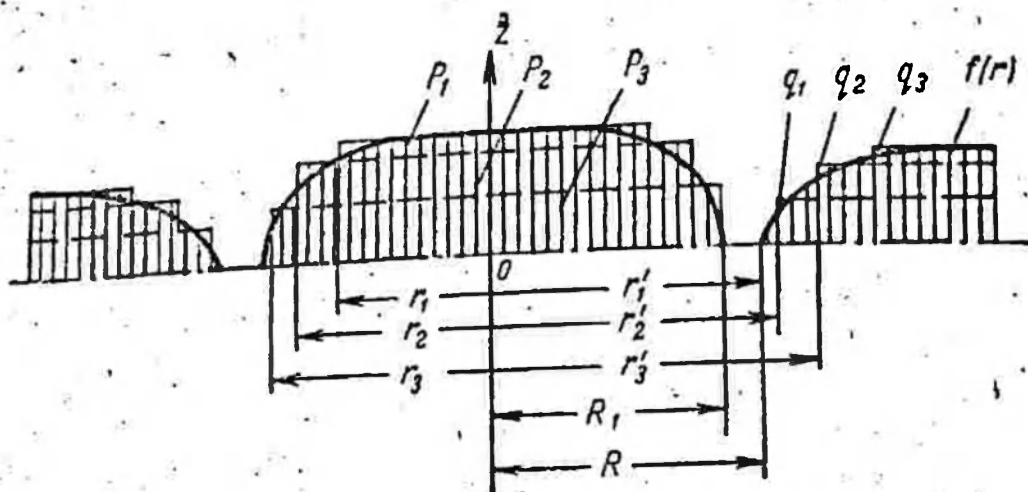


Рис. 40. Схема действия нагрузок на плоскость $z=0$ при образовании горизонтальной трещины.

ными нагрузками P_1, P_2, P_3, \dots , а нагрузку $f(r)$ представить рядом равномерно распределенных нагрузок q_1, q_2, q_3, \dots (см. рис. 40). Из формулы (4.8) получаем

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} r_i \rho_i \Phi\left(\frac{r}{r_i}\right); \\ \Phi\left(\frac{r}{r_i}\right) &= \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1 d\rho_1 d\theta}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_i}\right)^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \frac{r}{r_i} \cos \theta}}, \end{aligned} \right\} (7.1)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ_1 — переменная интегрирования.

Выше уже было сказано, что функция Φ может быть выражена через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, т. е. записана в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi\left(\frac{r}{r_i}\right) &= 2 \left[\left(\frac{r}{r_i} + 1\right) E(c^2) - \left(\frac{r}{r_i} - 1\right) K(c^2) \right]; \\ c^2 &= \frac{4 \frac{r}{r_i}}{\left(\frac{r}{r_i} + 1\right)^2}. \end{aligned} \right\} (7.2)$$

В случае образования горизонтальных трещин при гидравлическом разрыве пласта нагрузка $f(r)$ должна на бесконечности стремиться к горному давлению. Далее заметим, что при прибавлении ко всему полупространству какой-либо равномерно распределенной нагрузки величина перемещений изменится лишь на постоянную величину. Поэтому прибавим ко всему полупространству нагрузку q . Тогда получим распределение нагрузок по трещине, показанное на рис. 41.

В этом случае, положив $r_i = \alpha_i R$, $r'_i = \alpha'_i R$ и заметив, что

$$\int_0^{\alpha R} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = \alpha R \Phi(R), \quad (7.3)$$

получим

$$\frac{\pi}{2(1-\nu^2)} \omega = \frac{R}{E} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \Phi\left(\frac{R}{\alpha_i}\right) - \sum_{i=1}^m q_i \alpha'_i \Phi\left(\frac{R}{\alpha'_i}\right) \right]. \quad (7.4)$$

Из формулы (7.2) имеем, что примерно при $R > 2$

$$\Phi(R) \approx \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\varphi d\varphi d\theta}{R} = \frac{\pi}{R}. \quad (7.5)$$

Поэтому можно считать, что в случае n нагрузок q_i при удовлетворении условия $\omega(r) = 0$ на расстоянии, в два раза большем r'_n , перемещения $\omega(r)$ будут пренебрежимо малы всюду при $r \geq 2r'_n$.

Для определения величин нагрузок q_i выполним условие $\omega(r) = 0$ в соответствующем числе точек при $R \geq r \geq 2r'_n$. Радиусы приложения нагрузок q_i выберем произвольно, хотя их можно выбирать, разбив расстояние $R \geq r \geq 2r'_n$ на равные отрезки. Выполняя условие $\omega(r) = 0$ в указанных точках и считая, что оно будет приближенно выполнено при $r > 2r'_n$, получим систему линейных уравнений для определения q_i . Заметим, что при данном методе решения указанной задачи условие конечности напряжений на конце трещины выполняется приближенно.

Рассмотрим теперь образование горизонтальной трещины под действием равномерно распределенной нагрузки. Пусть на некотором участке $0 \leq r \leq R_1$ на границы трещины действует равно-

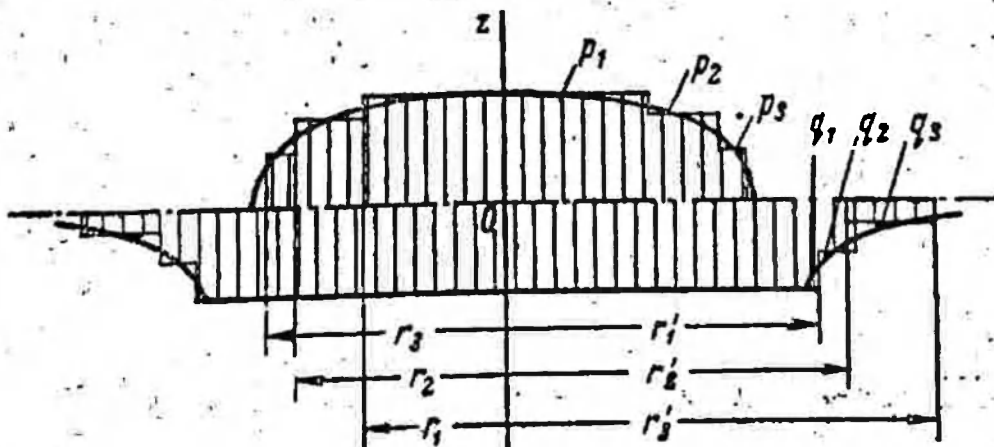


Рис. 41. Распределение нагрузок, действующих на плоскость $z=0$.

мерно распределенная нагрузка P . Горное давление равно q . Определим перемещение границ трещины.

Согласно изложенному выше приближенному методу, выберем три нагрузки: q_1 , q_2 и q_3 с радиусами приложения $r'_1 = 1,1R$, $r'_2 = 1,5R$ и $r'_3 = 2R$. Следовательно, $\alpha'_1 = 1,1$, $\alpha'_2 = 1,5$, $\alpha'_3 = 2,0$. Выполним условие $w(r) = 0$ в точках $r = R$, $r = r'_2$, $r = 2r'_3$. Выполнение условия $w(R) = 0$ является обязательным, условие $w(2r'_3) = 0$ необходимо для приближенного выполнения условия $w(\infty) = 0$. Выполнение условий равенства нулю перемещений в промежуточных точках при $R \leq r \leq 2r'_3$ зависит от выбора числа q_i , т. е. от степени приближения. Для указанных выше q_i и r'_i , выполняя условие $w(r) = 0$ в указанных выше точках и полагая $\frac{R_1}{R} = \alpha$ и $\frac{q_i}{P} = \beta_i$, получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 5,11\beta_1 + 8,28\beta_2 + 11,80\beta_3; \\ \alpha \Phi\left(\frac{4}{\alpha}\right) &= 0,95\beta_1 + 1,77\beta_2 + 3,14\beta_3; \\ \alpha \Phi\left(\frac{1,5}{\alpha}\right) &= 2,73\beta_1 + 6,0\beta_2 + 10\beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta = \frac{q}{P}. \quad (7.7)$$

Приводим в табл. 9 значения β_1 , β_2 , β_3 и β , полученные на основании решения системы уравнений (7.6) и уравнения (7.7) для некоторых значений α .

Таблица 9

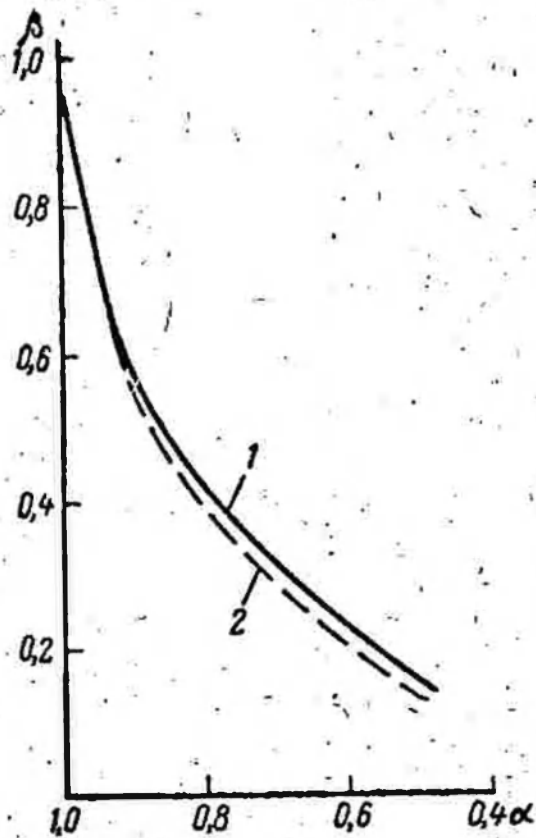
α	β_1	β_2	β_3	β
0,5	0,269	-0,224	0,108	0,153
0,6	0,403	-0,314	0,145	0,234
0,7	0,525	-0,382	0,179	0,322
0,8	0,642	-0,411	0,197	0,428
0,9	0,773	-0,398	0,191	0,571

Ширина горизонтальной трещины определяется из формулы

$$w = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} RP\Psi(\rho, \alpha), \quad (7.8)$$

Рис. 42. Зависимость $\beta = f_1(\alpha)$.

1 — приближенный метод,
2 — точное решение.



где

$$\Psi(\rho, \alpha) = \alpha \Phi\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) - \left[1,1\beta_1 \Phi\left(\frac{\rho}{1,1}\right) + 1,5\beta_2 \Phi\left(\frac{\rho}{1,5}\right) + 2\beta_3 \Phi\left(\frac{\rho}{2}\right) \right],$$

$$\rho = \frac{r}{R}.$$

На рис. 42 даны зависимость $\beta = f_1(\alpha)$ и ее сравнение с точным решением [9] для указанного случая.

§ 8. ОБРАЗОВАНИЕ НЕОБРАТИМЫХ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Многочисленные практические данные показывают, что гидравлический разрыв пласта иногда может быть эффективным и без применения песка для расклинивания трещин. Это в основном возможно при размыве поверхностей трещин жидкостью и смесью жидкости с песком, разъедании пород пласта кислотой, если она применяется в качестве жидкости разрыва, и, наконец, при необратимой деформации горных пород. Успешные результаты применения метода разрыва пласта при помощи кислоты без закрепления трещин песком описаны, например, А. С. Мелнкбековым [73]. Из практики заводнения нефтяных месторождений известно, что приемистость многих нагнетательных скважин была существенно повышена путем увеличения давления нагнетания. Многие гидравлические разрывы пласта без закрепления трещин песком также дают хорошие результаты. Как указывает Гаури [127], еще лучшие результаты получаются при дальнейшем повышении расходов жидкости разрыва (до 100 л/сек и выше). Все эти факты свидетельствуют о размыве поверхности трещин при высоких скоростях и необратимой деформации горных пород. Оба фактора действуют в одном направлении, способствуя появлению остаточных трещин. Рассмотрим лишь необратимую деформацию горных пород. Используя это свойство пород, можно в принципе образовать в пласте остаточную трещину, которую не

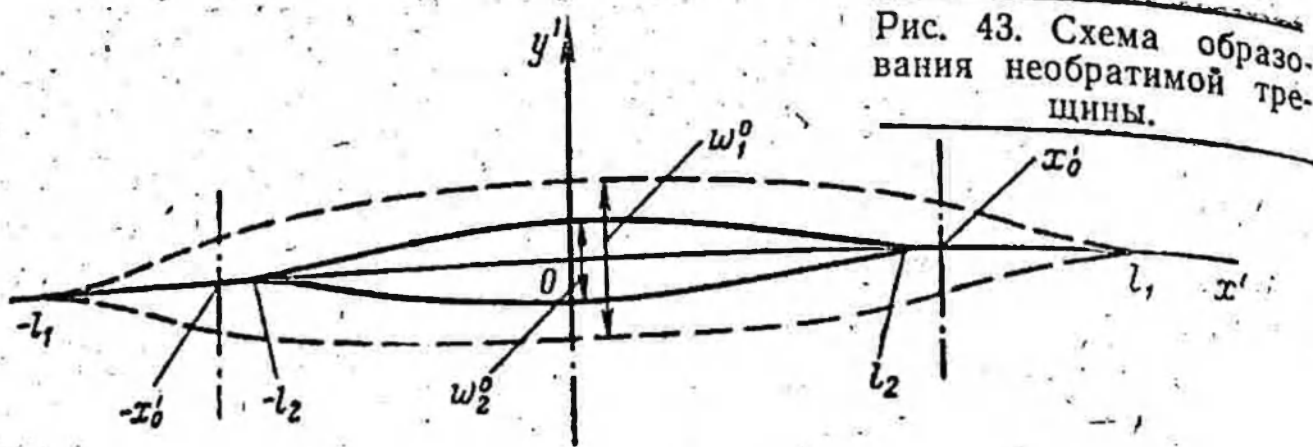


Рис. 43. Схема образования необратимой трещины.

нужно закреплять песком. Для этого необходимо создать на забое скважины давление, значительно превышающее горное давление, и распространить достаточно далеко в пласт область действия на горные породы высокого давления. Осуществить эти условия можно двумя путями: или применять при гидравлическом разрыве пласта высоковязкую жидкость и высокие темпы закачки, т. е. использовать мощные насосные агрегаты, или сравнительно кратковременно увеличивать давление, применяя, например, метод разрыва пласта при помощи пороховых генераторов давления [67, 136]. Последний метод заключается в воздействии на пласт жидкостью, задавливаемой в трещины за счет сжигания заряда пороха, помещенного предварительно на забое скважины. Время действия давления пороховых газов на жидкость и горные породы составляет около 0,01—1 сек, что существенно больше, чем при торпедировании скважины взрывчатыми веществами. Таким образом, исключается дробление породы вблизи скважины и образуется ограниченное число достаточно длинных трещин. При использовании пороховых генераторов давления отпадает необходимость в закачке в трещину больших объемов жидкости, так как пороховые газы расширяют трещину подобно механическому домкрату. Правда, применение этого метода пока вызывает технические трудности, связанные с созданием в скважине значительного давления (в пределах 1000 кг/см^2).

Рассмотрим задачу об образовании вертикальной трещины при гидравлическом разрыве пласта с учетом необратимости деформаций при нагружении горной породы и ее разгрузке. Решение этой задачи получено в работе [43]. Будем основываться на зависимости напряжения от деформации, показанной на рис. 7 (см. глава I), и в соответствии с ней полагать, что деформация пород при нагружении происходит во всей области с модулем Юнга E_1 , а при разгрузке — с модулем Юнга E_2 . При известных предположениях эта задача может быть сведена к следующей плоской задаче теории упругости.

Пусть в неограниченной упругой плоскости образовалась трещина (рис. 43) длиной $2l_1$ под действием первоначальной нагрузки P , равномерно распределенной на участке $-x'_0 \leq x' \leq x'_0$. На

бесконечности имеется равномерное сжимающее напряжение $-q_\infty$ (боковое горное давление), которое для удобства вычислений перенесем на контур щели. Естественно ожидать, что при определенных значениях $\frac{P}{q_\infty}$ и $\frac{E_2}{E_1}$ трещина после снятия с ее контура нагрузки не сомкнется полностью и таким образом возникнет остаточная трещина длиной $2l_2$ (см. рис. 43).

Общее решение задачи об образовании остаточной вертикальной трещины разобьем на три части: 1) задачу об образовании вертикальной трещины при первоначальном нагружении горной породы; 2) задачу об определении остаточного напряженного состояния и, наконец, 3) задачу об определении остаточных смещений.

Решение первой задачи, полученное методом Н. И. Мусхелишвили в работе [38], приведено в § 6 настоящей главы. Смещения на контуре щели u_1 и v_1 в этом случае определяются формулами (3.12) и (6.34), в которых следует положить

$$\left. \begin{aligned} u = u_1, \quad v = v_1, \quad z = z_1 = \frac{1}{l_1} (x' + iy') = \\ = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) = \omega(\zeta_1); \\ \vartheta_0 = \vartheta_1^0 = \arccos \frac{x_0'}{l_1}; \quad \mu' = \mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}, \\ \kappa = \kappa_1 = 3 - 4\nu_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

В результате выполнения условия С. А. Христиановича в концах щели получается соотношение (6.35), в котором нужно положить $\hat{v}_0 = \hat{v}_1^0$.

В дальнейшем применим следующий прием. Определим то напряженное состояние, которое возникнет в горной породе, если мысленно закрыть трещину; т. е. уничтожить смещения u_1 и v_1 , образовавшиеся при первоначальном нагружении породы (вторая задача). В этом случае нужно уже считать, что горная порода во всей области деформируется с модулем Юнга E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 . Решим в связи с этим вторую основную задачу плоской теории упругости. Согласно [76] имеем

$$\varphi_2(\zeta_1) = -\frac{2\nu_2'}{\kappa_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1} \frac{g_1 d\sigma_1}{\sigma_1 - \zeta_1}. \quad (8.2)$$

В формуле (8.2)

$$g_1 = u_1 + iv_1 = \frac{1}{2\nu_1'} [x_1 \varphi_1(\sigma_1) - \bar{\varphi}_1(\bar{\sigma}_1)]. \quad (8.3)$$

Из (8.2) и (8.3) получаем

$$\varphi_2(\zeta_1) = -\frac{2\mu_2'}{\kappa_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1} \frac{[\kappa_1 \varphi_1(\sigma_1) - \bar{\varphi}_1(\bar{\sigma}_1)]}{2\mu_1(\sigma_1 - \zeta_1)} d\sigma_1 = \frac{\mu_2 \kappa_1}{\kappa_2 \mu_1'} \varphi_1(\zeta_1). \quad (8.4)$$

Отсюда результирующее (остаточное) напряженное состояние определяется функцией

$$\varphi_3(\zeta_1) = (1 - \xi) \varphi_1(\zeta_1), \quad \xi = \frac{\mu_2 \kappa_1}{\mu_1' \kappa_2}. \quad (8.5)$$

Соответствующее (8.5) распределение нагрузок на поверхности щели будет

$$-(1 - \xi) q_\infty \quad \text{при} \quad |l_1| \leq |x| \leq |x_0|; \quad (8.6)$$

$$-(1 - \xi) q_\infty + (1 - \xi) P \quad \text{при} \quad -x_0 \leq x \leq x_0. \quad (8.7)$$

В случае, когда в пласте образуется раскрытая (остаточная) трещина, напряжения на ее поверхностях должны быть равны $-q_\infty$. При напряженном состоянии (8.6), (8.7) смещения на контуре щели равны нулю. Если теперь к некоторой части прежнего контура $-l_2 \leq x \leq l_2$, $|l_2| \leq |l_1|$ добавить такое напряжение, чтобы результирующая нагрузка на новом контуре щели была равна $-q_\infty$, получим смещения, которые и будут остаточными (третья задача).

Таким образом, нужно добавить к контуру щели следующее напряжение:

$$-\xi q_\infty \quad \text{при} \quad |l_2| \leq |x| \leq |x_0|; \quad (8.8)$$

$$-(1 - \xi) P - \xi q_\infty \quad \text{при} \quad -x_0 \leq x \leq x_0. \quad (8.9)$$

Из (8.8) и (8.9) следует, что $|x_0| \leq |l_2|$. Решение задачи для распределения нагрузок на контуре щели (8.8), (8.9) получается аналогично решению соответствующей задачи о нагружении породы.

Аналогично (6.35) получаем

$$\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{P}{q_\infty} = \frac{1}{1 - \frac{2\vartheta_2^0}{\pi}}; \quad \vartheta_2^0 = \arccos \frac{x_0}{l_2}. \quad (8.10)$$

Из (8.10) имеем

$$\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\pi - 2\vartheta_2^0) = \pi - 2\vartheta_1^0. \quad (8.11)$$

Смещения на контуре щели выражаются следующим образом:

$$2\mu_2' (u_2 + iv_2) = \kappa_2 \varphi_4(\sigma_2) - \bar{\varphi}_2(\bar{\sigma}_2), \quad (8.12)$$

где функция $\varphi_4(\sigma_2)$ определяется в результате решения задачи с нагрузкой на контур щели, определяемой равенствами (8.8) и (8.9).

Из (8.12) получается следующее выражение для ширины w_2 остаточной трещины:

$$w_2 = \frac{(\kappa_2 + 1)(\xi - 1)Pl_2}{2\pi\mu_2'} \left[\cos \vartheta_2 \ln \frac{\sin |(\vartheta_2 - \vartheta_2^0)|}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_2^0)} + \right. \\ \left. + \cos \vartheta_2^0 \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_2 + \vartheta_2^0}{2} \right)}{-\operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_2^0}{2} \right)} \right]; \quad \vartheta_2 = \arccos \frac{x}{l_2}. \quad (8.13)$$

В случае, когда $\nu_1 = \nu_2$, из формулы (8.10) следует, что при $\vartheta_2^0 = 0$, что соответствует началу образования остаточной трещины, величина

$$\frac{P}{q_\infty} = \frac{\frac{E_2}{E_1}}{\frac{E_2}{E_1} - 1} \quad (8.14)$$

Значения $\frac{P}{q_\infty}$, соответствующие $\frac{E_2}{E_1}$, вычисленные по формуле (8.14), даны в табл. 10.

Таблица 10

$\frac{E_2}{E_1}$	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
$\frac{P}{q_\infty}$	∞	3,0	2,0	1,5	1,25	1,10

Отношение длины остаточной трещины l_2 к длине l_1 первоначальной трещины определяется формулой

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{q_\infty}{P} \right) \right]}{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{q_\infty}{P} \frac{1}{1 - \frac{E_1}{E_2}} \right) \right]} \quad (8.15)$$

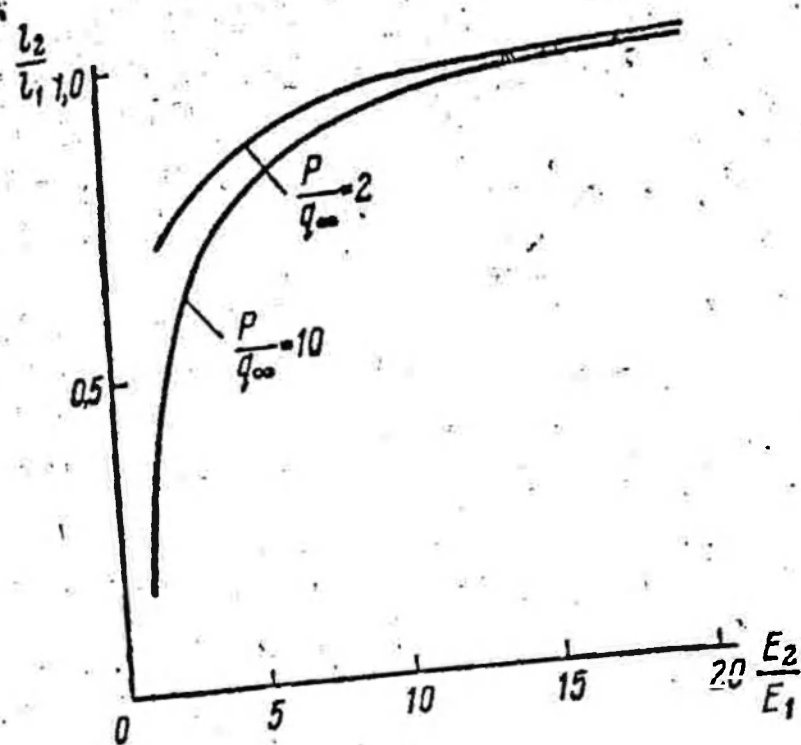


Рис. 44. Зависимость $\frac{l_2}{l_1}$ от $\frac{E_2}{E_1}$ при различных $\frac{P}{q_\infty}$

На рис. 44 дана зависимость $\frac{l_2}{l_1}$ от $\frac{E_2}{E_1}$ при различных величинах $\frac{P}{q_\infty}$.

Для определения максимальной ширины остаточной трещины, т. е. ее ширины вблизи скважины, имеем выражение

$$\omega_2^0 = \frac{4(1 - \nu_2^2) \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right) P l_2}{\pi E_2} \cos \vartheta_2^0 \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_2^0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_2^0}{2} \right) \right|}; \quad (8.16)$$

$$\vartheta_2^0 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{q_\infty}{P} \frac{1}{1 - \frac{E_1}{E_2}} \right),$$

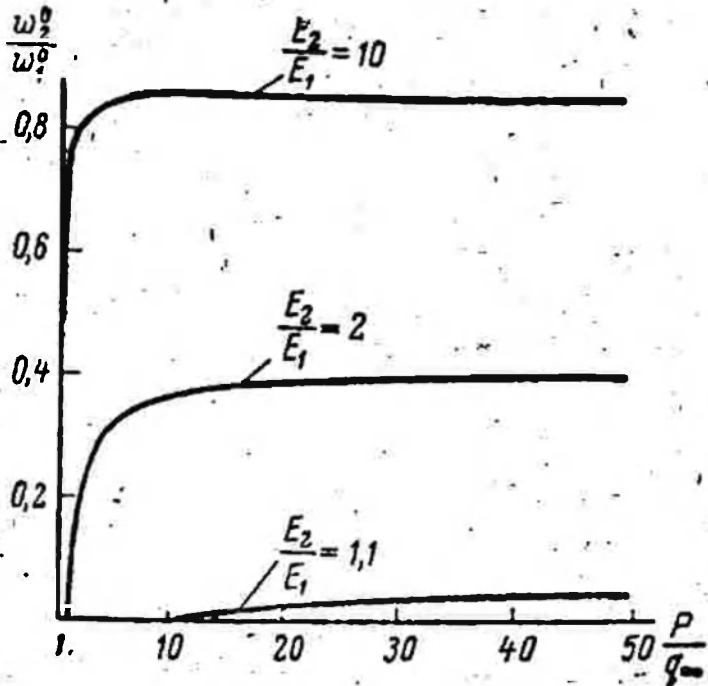
а для отношения ширины трещины ω_2^0 к ширине первоначальной трещины ω_1^0 получим

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} = \frac{\frac{E_2}{E_1} - 1}{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_2^0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_2^0}{2} \right) \right|}}{\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_1^0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_1^0}{2} \right) \right|}}; \quad \vartheta_1^0 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{q_\infty}{P} \right). \quad (8.17)$$

Как видно из (8.15), (8.16) и (8.17),

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} = f \left(\frac{P}{q_\infty}, \frac{E_2}{E_1} \right). \quad (8.18)$$

Рис. 45. Зависимости $\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} = \frac{\omega_2^0}{\omega_1^0}$
 $= f\left(\frac{P}{q_\infty}, \frac{E_2}{E_1}\right)$



На рис. 45 показаны зависимости (8.18). Оценим размеры остаточной трещины, получающейся в случае применения пороховых генераторов давления [67]. Пусть $q_\infty = 150 \text{ кг/см}^2$, $E_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $E_2 = 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$, $P = 1500 \text{ кг/см}^2$, $x_0 = 5 \text{ м}$.

По формуле (6.34) имеем $l_1 = 32 \text{ м}$. Из (8.10) получаем $l_2 = 16,2 \text{ м}$. Отсюда по формуле (8.16) $\omega_2^0 = 3,4 \text{ см}$.

Таким образом, при соответствующих условиях можно образовать в породах остаточные трещины.

§ 9. ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Некоторые породы, окружающие горные выработки, — глины, алевролиты, аргиллиты, сланцы и т. д., имеющие сравнительно низкий предел текучести, могут деформироваться пластически, если давление, приложенное к поверхностям выработок, значительно ниже горного давления. В ряде случаев, как это было показано С. А. Христиановичем, пластическая деформация малопрочных горных пород приводит к уменьшению местных напряжений (горного давления) вблизи скважин, что влияет на последующее проведение гидравлического разрыва пласта, снижая давление разрыва.

Рассмотрим пластическую деформацию горных пород вблизи скважин или шахт.

Пусть имеется такое расположение пластически деформирующегося глинистого пласта, какое показано на рис. 46. Будем считать деформацию глинистого пласта плоской. В этом случае напряжения в пластическом слое будут описываться уравнением равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (9.1)$$

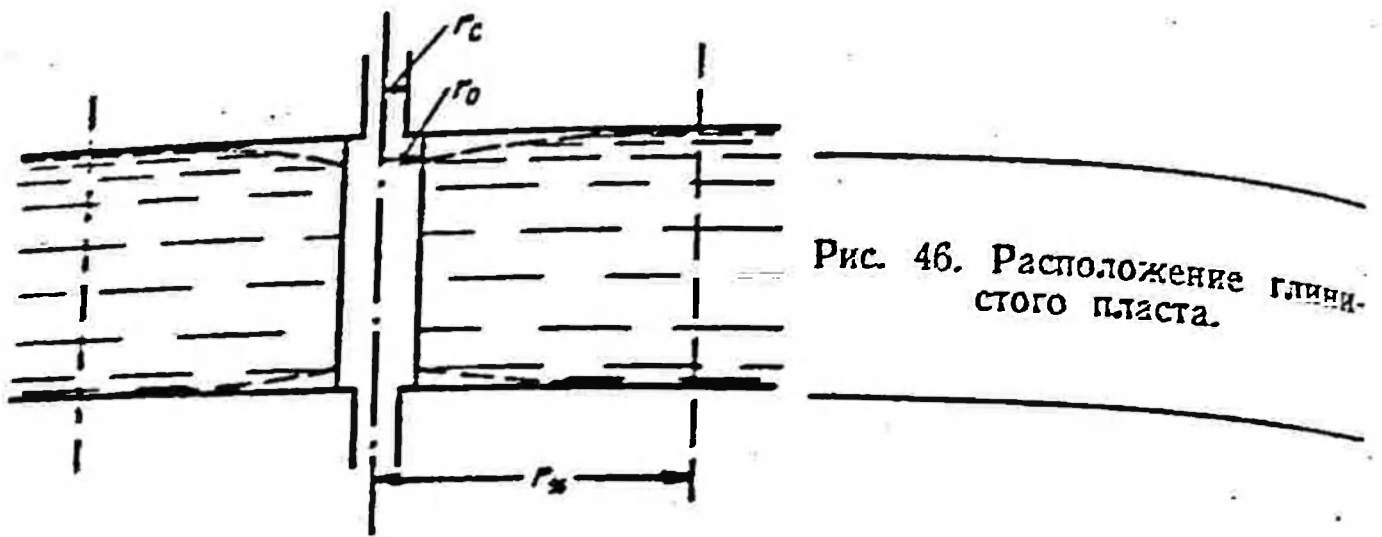


Рис. 46. Расположение глинистого пласта.

Уравнение состояния слоя пород, деформирующегося пластически, можно представить в виде [77, 90, 96];

$$\tau_* = F(\sigma), \quad (9.2)$$

где $\sigma = -\sigma_z = -\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$; τ_* — предельное касательное напряжение; $\sigma = -\sigma_z$ — среднее нормальное напряжение.

В ряде случаев вместо зависимости (9.2) используют зависимость

$$S_* = F_I(\sigma),$$

где $S_* = \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

При плоской деформации:

$$\tau_* = S_*$$

Из формул (1.3) главы I имеем

$$\tau_* = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.2) и (9.3) в (9.1), получаем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} F(\sigma) \quad (9.4)$$

Если принять зависимость (9.2) в виде (9.5), то получается

$$\sigma - \sigma_0 = 2K_{\Pi} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (9.6)$$

Для главных нормальных напряжений имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = -\sigma_2 &= \sigma_0 + 2K_{\Pi} \ln \frac{r}{r_0}; \\ -\sigma_r &= \sigma_0 - K_{\Pi} + 2K_{\Pi} \ln \frac{r}{r_0}; \\ -\sigma_\theta &= \sigma_0 + K_{\Pi} + 2K_{\Pi} \ln \frac{r}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Образовавшаяся вблизи скважины пластическая область находится вокруг скважины в пределах области $r_0 \leq r \leq r_*$. Величина r_* является радиусом распространения пластической области или, в соответствии с гипотезой С. А. Христиановича о разгрузке горного давления вследствие пластической деформации глин, — радиусом разгрузки.

При $r = r_*$ будем считать, что σ равно вертикальному или полному горному давлению q . Если принять, что во время проводки скважины давление жидкости в скважине против продуктивного пласта было равно в среднем гидростатическому давлению, то

$$\sigma_0 = \gamma_{\text{в}} H + K_{\Pi}, \quad (9.8)$$

где $\gamma_{\text{в}}$ — удельный вес воды; H — глубина залегания глинистого пласта.

Радиус пластической зоны определяется формулой

$$r_* = 0,61 r_0 \exp \left[\frac{(\gamma - \gamma_{\text{в}}) H}{2K_{\Pi}} \right], \quad (9.9)$$

где γ — удельный вес вышележащих пород (при этом принимается, что $q = \gamma H$).

На рис. 47 дана зависимость $\ln \frac{r_*}{r_0}$ от $\frac{(\gamma - \gamma_{\text{в}}) H}{2K_{\Pi}}$. Размеры области пластической деформации, вычисленные на основе закона (9.5) для некоторых значений H и K_{Π} , приведены в табл. 11. При этом было принято, что средний удельный вес горных пород $\gamma = 2,5 \text{ Г/см}^3$, а удельный вес воды $\gamma_{\text{в}} = 1 \text{ Г/см}^3$.

Из данных, приведенных в табл. 11, видно, что с уменьшением глубины залегания пласта и увеличением коэффициента K_{Π} область пластической деформации резко уменьшается и, наоборот, при малом K_{Π} и большой глубине залегания пласта пластическая область становится очень большой. Так, при $K_{\Pi} = 30 \text{ кГ/см}^2$, $H =$

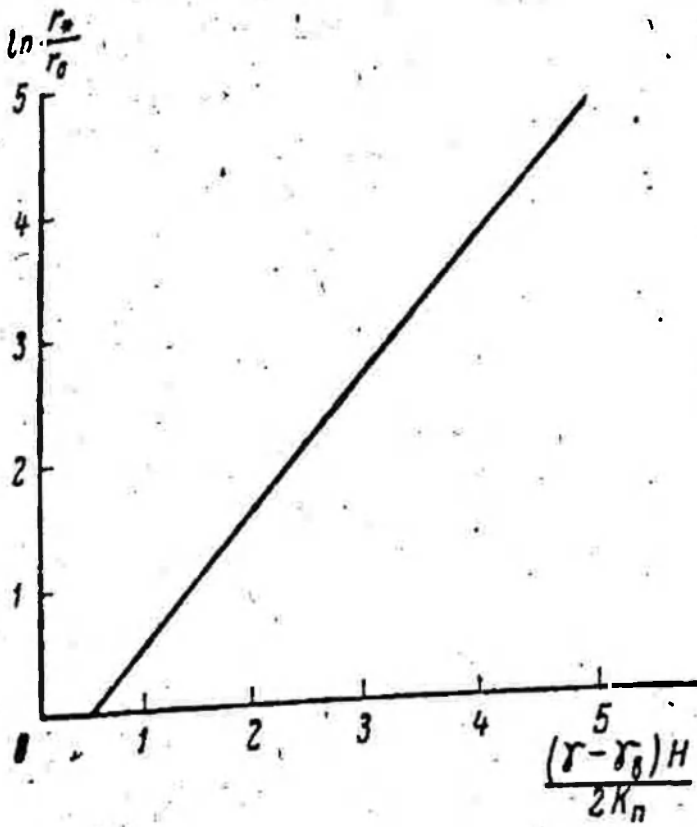


Рис. 47. Зависимость $\ln \frac{r_*}{r_0}$ от $\frac{(\gamma - \gamma_v) H}{2K_p}$

= 2000 м и $r_0 = 1$ м радиус зоны пластической деформации $r_* = 150$ м.

Как показано в опытах [6], для некоторых более прочных глин и глинистых сланцев зависимость октаэдрического напряжения $\tau_{окт} = \sqrt{\frac{2}{3}} S_* = F_1(\sigma)$ имеет вид, показанный на рис. 48.

Таблица !!

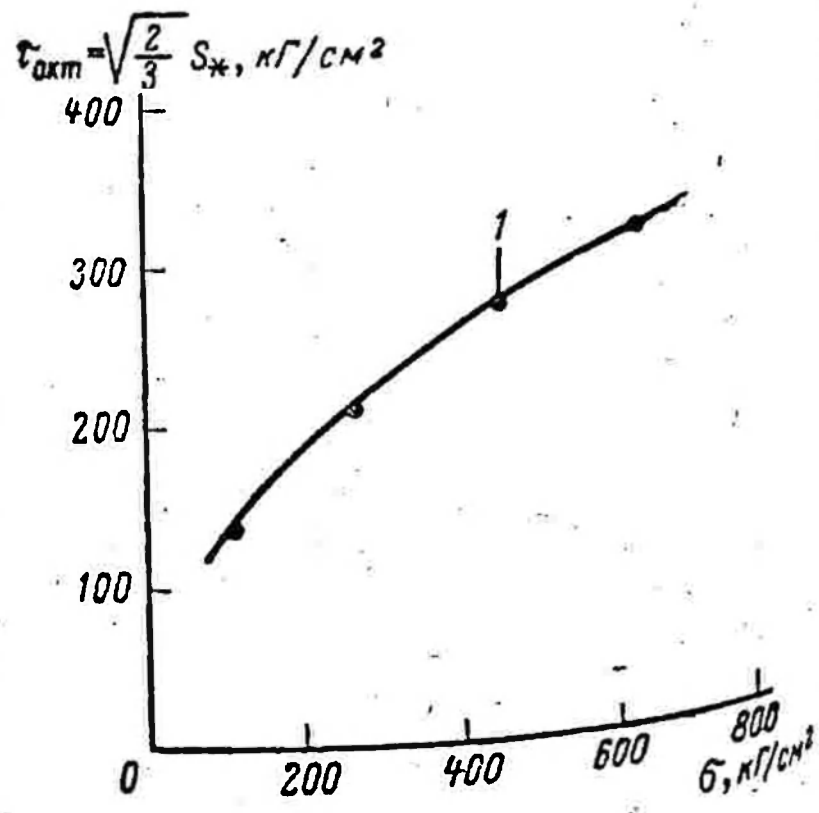
$K_p, \text{ кг/см}^2$	$\frac{r_*}{r_0}$			
	$H=500 \text{ м}$	$H=1000 \text{ м}$	$H=1500 \text{ м}$	$H=2000 \text{ м}$
30	2,0	7,0	25,0	150,0
40	1,0	3,0	10,0	25,0
60	1,0	2,0	3,0	7,0
80	1,0	2,0	2,5	3,0
100	1,0	1,5	2,0	2,5

Для сжимающих средних нормальных напряжений зависимости указанного выше вида могут быть представлены выражением

$$S_* = F_1(\sigma) = K_0 + b \left(\frac{\sigma}{K_0} \right)^n, \quad (9.10)$$

где b, n — эмпирические коэффициенты.

Рис. 48. Зависимость $S_* = F_1(\sigma)$ для прочных глин.
1 — экспериментальные точки



Подставляя (9,10) в (9.4), получаем

$$\ln \frac{r}{r_0} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1 - \frac{bn}{K_0} \left(\frac{\sigma}{K_0} \right)^{n-1}}{2 \left[K_0 + b \left(\frac{\sigma}{K_0} \right)^n \right]} d\sigma. \quad (9.11)$$

Рассмотрим пример. Согласно [6], для некоторых глинистых пород, залегающих в девонских горизонтах Татарии и Башкирии, $K=90$ кГ/см², $b=113$ кГ/см², $n=0,5$, $q=\gamma H=450$ кГ/см², $\gamma_{в}H=180$ кГ/см². Подставляя $n=0,5$ в (9.11) и интегрируя, получаем

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{1}{2A} \left[\sqrt{\frac{\sigma}{K_0}} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{K_0}} - \left(A + \frac{1}{A} \right) \ln \frac{1 + 2A \sqrt{\frac{\sigma}{K_0}}}{1 + 2A \sqrt{\frac{\sigma_0}{K_0}}} \right]$$

$$A = \frac{b}{K_0} \quad (9.12)$$

Величина отношения $\frac{r}{r_0}$ для приведенных выше условий равна 1,06. Пластическая деформация таких пород будет, по-видимому, более существенной, если они залегают на больших глубинах.

ДЕФОРМАЦИЯ ПОРИСТЫХ И ПРОНИЦАЕМЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

III

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПОРИСТЫХ И ПРОНИЦАЕМЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Интенсивное изучение деформации пористых, насыщенных жидкостями или газами горных пород началось в связи с развитием механики грунтов, основы которой были заложены трудами К. Терцаги [98], Н. М. Герсеванова [24, 25], Био [118]. Важные работы в этой области были затем выполнены В. А. Флориным [104], Фаттом [124], Хаббертом и Раби [134] и другими исследователями. Ниже используются представления, развитые в упомянутых выше работах.

Для полного описания деформации пористых горных пород необходимо рассматривать не одну, а несколько систем напряжений. Дело в том, что наблюдаемые и измеряемые напряжения и деформации в пористой среде в целом существенно отличаются от напряжений и деформаций зерен среды и связующего зерна материала.

Следуя терминологии К. Терцаги, будем называть напряжения и деформации, существующие в пористой среде в целом, эффективными напряжениями и деформациями. Напряжения и деформации, имеющиеся в скелете пористой среды, назовем истинными. Эффективные напряжения определяются как соответствующие усилия, отнесенные к полной поверхности пористой среды, включая и пустоты. При этом элементарный объем пористой среды, для которого определены эффективные напряжения, должен, естественно, заключать в себе достаточно большое количество пор. Подобным же образом определяются и эффективные деформации. Эффективные напряжения и деформации становятся обычными напряжениями и деформациями, если пористую горную породу принять за некоторую монолитную среду.

Зная истинные напряжения и деформации в скелете пористой среды, теоретически возможно найти компоненты эффективного напряжения и эффективной деформации. Однако ввиду сложности структур реальных пористых горных пород и трудности измерения истинных напряжений и деформаций определять эффективные напряжения и деформации по истинным практически не представляется возможным. Поэтому при экспериментальных исследованиях деформационных свойств пористых горных пород обычно измеряют эффективные напряжения и деформации.

Следует заметить, что отсутствие в теле тех или иных компонент эффективного напряжения не свидетельствует об отсутствии соответствующих компонент истинного напряжения и наоборот. Например, если образец пористой породы, покрытый гибкой непроницаемой оболочкой и не содержащий в порах жидкости, поместить в бомбу с давлением жидкости p , то эффективное напряженное состояние образца будет описываться выражениями

$$\sigma_x^e = \sigma_y^e = \sigma_z^e = p; \quad \tau_{xy}^e = \tau_{yz}^e = \tau_{xz}^e = 0. \quad (1.1)$$

Индексом e помечены компоненты эффективного напряжения. Эффективные напряжения сдвига в случае (1.1) отсутствуют, а истинные напряжения сдвига, как показывают опыты, существуют. Так, при определенных внешних давлениях на покрытый непроницаемой оболочкой образец произойдет разрушение породы образца. Если же в пористом образце создать напряженное состояние типа (1.1) для истинных напряжений, имеющее вид:

$$\sigma_x^c = \sigma_y^c = \sigma_z^c = p; \quad \tau_{xy}^c = \tau_{yz}^c = \tau_{xz}^c = 0, \quad (1.2)$$

путем помещения в бомбу с тем же давлением не покрытого оболочкой образца, то ничего подобного не произойдет — порода выдержит, не разрушаясь, огромное давление. Далее, эффективное среднее нормальное напряжение в случае (1.1) равно p , а истинное осредненное напряжение этого рода может быть близко к нулю, так как сжатие пористой среды в целом может быть обусловлено в основном сдвиговыми истинными напряжениями.

Напряженное состояние (1.2) представляет собой всестороннее сжатие пористой среды, получающееся в результате приложения к внутренней поверхности пористой породы давления жидкости или газа, насыщающих поровое пространство. Будем называть его в дальнейшем нейтральным напряжением, также следуя терминологии К. Терцаги. Напряжения (1.2) и соответствующую им деформацию сжатия целесообразно выделить из истинного напряженного состояния и рассматривать особо. Остальная часть истинных напряжений будет входить в эффективное напряженное состояние.

Подчеркнем еще раз, что всестороннее сжатие зерен и связующего материала пористой породы возникает не только от давле-

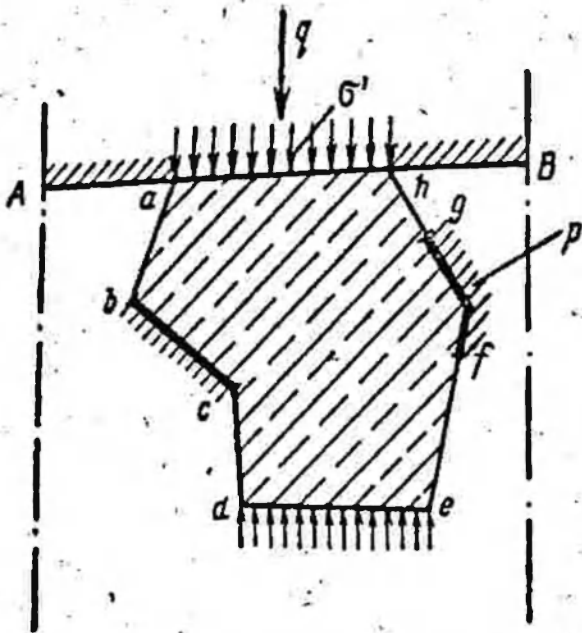


Рис. 49. Схема контакта пористого пласта с кровлей.

напряжение сжатия. Поэтому всестороннее сжатие, определяемое выражениями (1.2), т. е. нейтральное напряжение, не является полным всесторонним сжатием скелета пористой породы.

Пористые горные породы в реальных пластах обычно бывают насыщены жидкостями и газами, находящимися под давлением. Возникает вопрос, что произойдет с напряженным состоянием таких пород и как они будут деформироваться при изменении давления жидкости или газа, насыщающих поровое пространство?

Пусть, например, пласт пористой горной породы полностью насыщен жидкостью (рис. 49). Сверху пласт ограничивается непроницаемым перекрытием, которое, например, в искусственных сооружениях может быть фундаментом, а в природных условиях — кровлей, сложенной непористыми и непроницаемыми породами. Со стороны перекрытия, сверху, на пласт передается горное давление, действующее в вертикальном направлении и равное q . Давление жидкости равно p . Допустим, что на участке контакта кровли с пористой средой длиной AB , равной единице, находится зерно пористой среды. На участках контура зерна ab , cd , ef и gh оно смачивается жидкостью под давлением p , на участках ah и de действует напряжение σ' , а участки bc и fg не испытывают смещения в результате подпора их другими зернами среды. Будем считать, что на участках bc и fg фактически приложены напряжения σ_1 . Тогда получается, что вся «сдвиговая» часть истинного напряженного состояния зерна обусловлена действием на зерно граничных напряжений $\sigma' - p$ и $\sigma_1 - p$. В самом деле, рассмотрим монолитное тело произвольной формы (рис. 50), к поверхности которого на отдельных участках приложено напряжение σ' , а на остальных участках — давление жидкости p . Очевидно, что напряжение сдвига в этом теле, а следовательно, и все искажающие деформации обусловлены действием на тело контактных напряжений $\Delta = \sigma' - p$. Деформации искажения зависят только от дополнительного контактного напряжения $\Delta = \sigma' - p$ и не зависят от давления жидкости p и создаваемого им в теле всестороннего сжатия (1.2).

Из схемы действия усилий на тело (см. рис. 50) можно, кстати, увидеть, что всестороннее сжатие, создаваемое в теле только нейтральным напряжением, не является полным, так как всестороннее сжатие возникает и в результате действия на тело контактного напряжения $\Delta = \sigma' - p$. Поскольку напряженному состоянию (1.2) соответствует нулевое эффективное напряженное состояние, можно утверждать, что эффективное напряженное состояние определяется исключительно величиной $\Delta = \sigma' - p$.

Рассматривая равновесие сил на контакте AB (см. рис. 49), получаем

$$q = m'p + (1 - m')\sigma', \quad (1.3)$$

где m' — доля смачиваемой поверхности в общей площади контакта AB .

Учитывая, что $\sigma' = \Delta + p$, имеем на основе (1.3)

$$q = m'p + (1 - m')(\Delta + p) = (1 - m')\Delta + p. \quad (1.4)$$

Обозначая $(1 - m')\Delta = \sigma$, получаем

$$q = \sigma + p. \quad (1.5)$$

Таким образом, изменение давления жидкости в порах p при постоянном q приводит к такому же по абсолютной величине изменению напряжения σ , т. е. изменению эффективных напряжений. То же самое изменение эффективных напряжений можно получить, оставив неизменным давление p и изменив величину q .

Напряжения сдвига вызывают разрушение пород. Поэтому разрушающее напряжение для пористой породы не зависит от p , а только от $q - p$. Этот теоретический вывод очень хорошо подтверждается экспериментальными данными. Рассмотрим, например, эксперименты Мак-Генри и Хэндина, описание и анализ которых даны Хаббертом и Раби [134].

Эксперименты Мак-Генри заключались в следующем. Брлись образцы цилиндрической формы диаметром 15 см, изготовленные из искусственного пористого материала (бетона). Эти образцы в одном случае покрывались непроницаемой гибкой оболочкой, в других случаях оставались

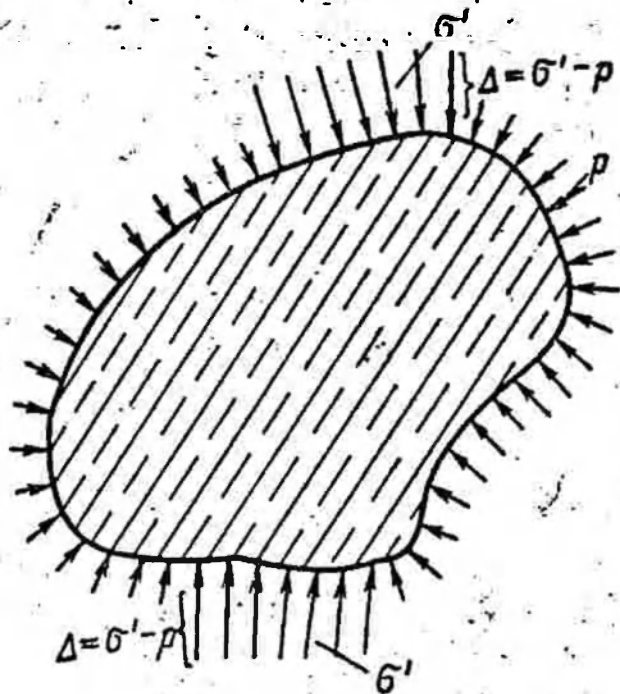


Рис. 50. Монолитное тело произвольной формы.

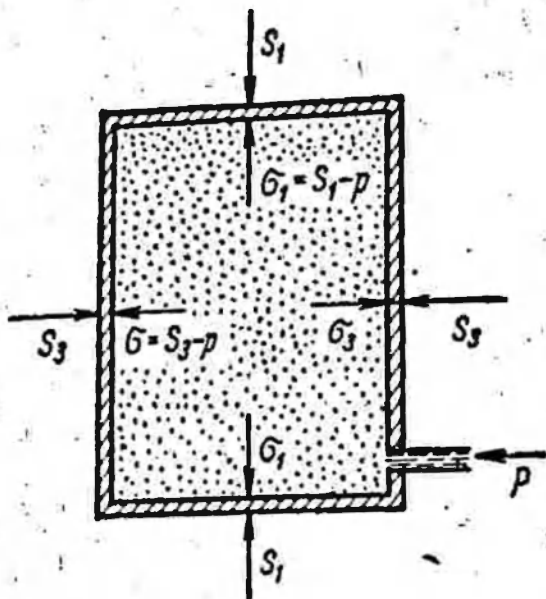


Рис. 51. Схема эксперимента по разрушению пористых образцов пород.

непокрытыми. Аксиальная нагрузка на покрытые оболочкой образцы создавалась механическим путем (от прессы), а радиальная — при помощи давления жидкости. Кроме того, внутри об-

разца также создавалось давление жидкости. Образцы нагружались вплоть до разрушения. Аксиальная компонента эффективного напряжения являлась одним из главных напряжений, а радиальная — вторым главным напряжением. Схема эксперимента и распределение напряжений в образце показаны на рис. 51. Конечно, в данном случае имелось и третье главное напряжение — тангенциальное, равное радиальному, так что при рассмотрении разрушения напряженное состояние следовало считать трехмерным. Однако для описания разрушения образцов, по-видимому, в целях упрощения использовалась теория прочности Мора, в которой существенны только два главных напряжения — максимальное и минимальное. Поскольку основным вопросом, который важен в рассматриваемых экспериментах, является выяснение справедливости соотношения (1.5), не имеет особого значения, как представлялось напряженное состояние. Эксперименты Мак-Генри показали, что зависимость предельного касательного напряжения $\tau_* = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, при котором происходило разрушение образца, от среднего нормального напряжения $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ (огнибающая наибольших кругов Мора) выражается прямой линией (рис. 52). Согласно рис. 52, для этой огнибающей имеем выражение

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\tau_0}{\operatorname{tg} \psi} \right) \sin \psi. \quad (1/6)$$

После преобразований из (1.6) получаем

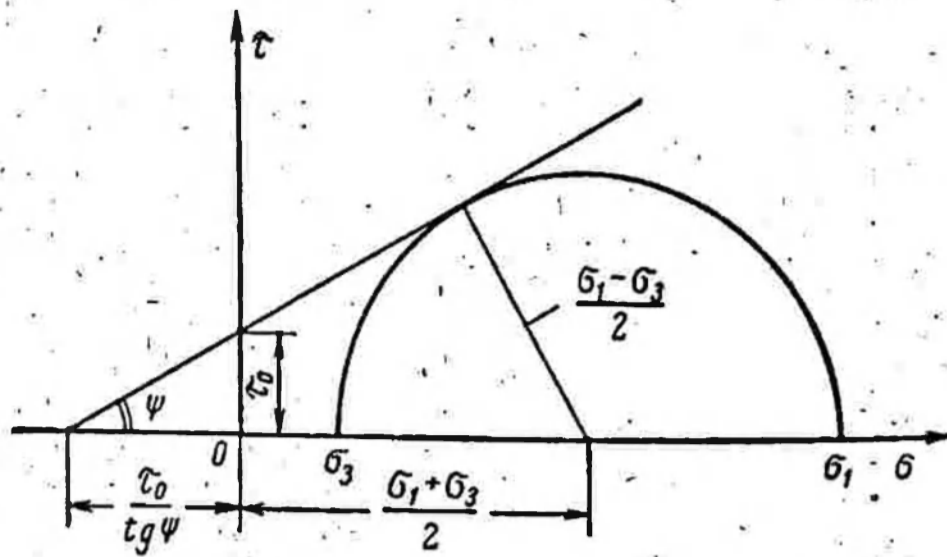
$$\sigma_1 = a + b\sigma_3, \quad (1.7)$$

где

$$a = 2\tau_0 \sqrt{b}; \quad b = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}.$$

На рис. 53 в виде зависимости (1.7) показано предельное напряженное состояние образцов бетона, покрытых гибкой оболочкой, при давлении жидкости внутри образца, равном нулю.

Рис. 52. Огибающая наибольших кругов Мора.



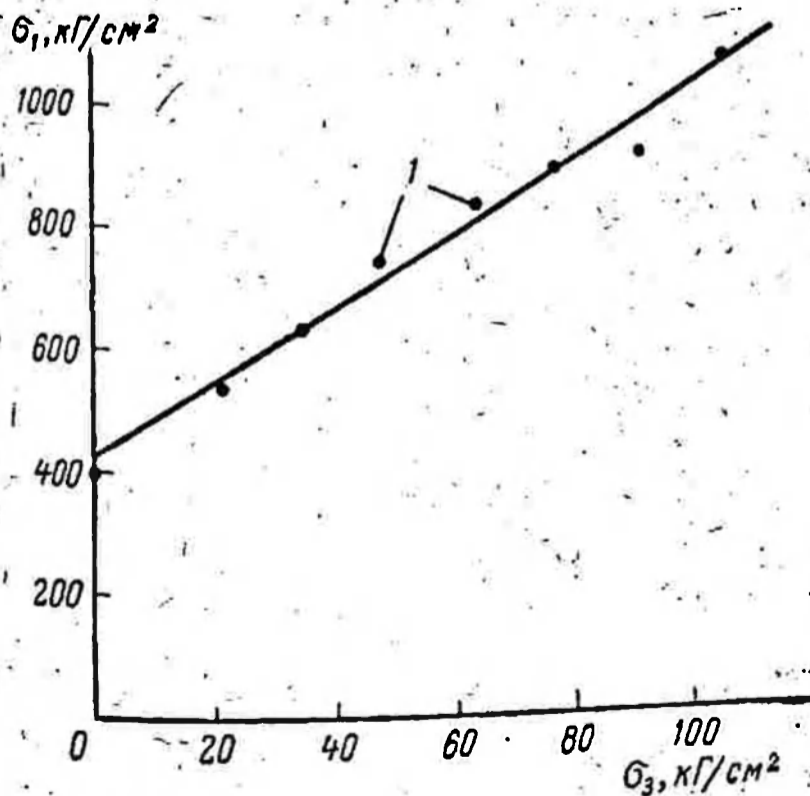
При экспериментах с образцами, не покрытыми оболочкой, внутреннее пространство образцов заполнялось азотом с давлением от 0 до 110 кг/см^2 . Введем теперь по аналогии с (1.5) следующие выражения:

$$S_1 = \sigma_1 + p, \quad S_3 = \sigma_3 + p, \quad (1.8)$$

где S_1, S_3 — так называемые полные напряжения, равные усилиям, действующим на гибкую оболочку образцов.

Значения предельного напряжения $\sigma_1 = S_1 - p$, при котором происходило разрушение образцов, представлены на рис. 54, из которого видно, что независимо от давления азота не покрытые оболочкой образцы разрушались в среднем при одном и том же давлении, равном 348 кг/см^2 .

Для тех экспериментов, в которых внутри образцов, покрытых гибкой оболочкой, создавалось давление жидкости, предельная зависимость $\sigma_1 = S_1 - p$ от $\sigma_3 = S_3 - p$ показана на рис. 55. Давление жидкости изменялось от 0 до 80 кг/см^2 . Как видно из рис. 55, точки, соответствующие опытам с различным давлением p , практически ложатся на одну прямую, что свидетельствует о справедливости



Давление жидкости изменялось от 0 до 80 кг/см^2 . Как видно из рис. 55, точки, соответствующие опытам с различным давлением p , практически ложатся на одну прямую, что свидетельствует о справедливости

Рис. 53. Зависимость σ_1 от σ_3 , характеризующая предельное напряженное состояние покрытых оболочкой образцов бетона при $p=0$.

1 — экспериментальные точки.

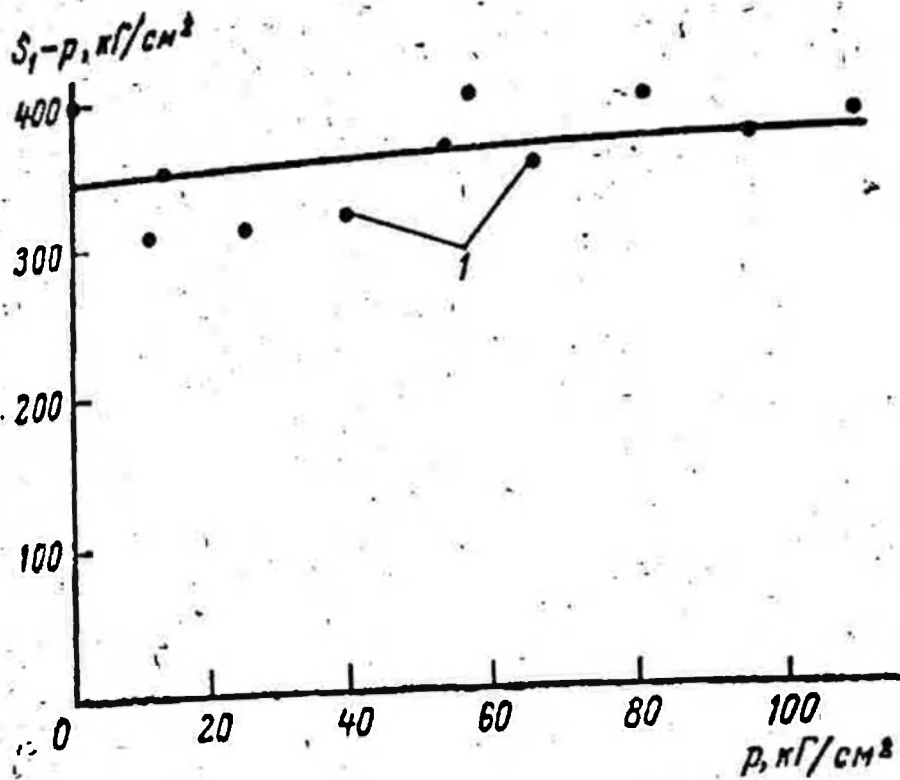


Рис. 54. Значения предельного эффективного напряжения $\sigma_1 = S_1 - p$ при различных p для не покрытых оболочкой образцов.

1 — экспериментальные точки

ности соотношения (1.5). Обобщение результатов опытов Мак-Генри, проведенных на 337 образцах бетона с пористостью до 15%, показало, что отклонения от соотношения (1.5) составляют в среднем 2%.

Эксперименты Хэндина были в общем аналогичны экспериментам Мак-Генри, за исключением того, что они проводились при большем диапазоне изменения давлений и напряжений, а также на естественных образцах пород. Некоторые результаты экспериментов Хэндина показаны на рис. 56, из которого видно, что соотношение (1.5) также подтверждается.

Соотношение между компонентами полного и эффективного напряжений и нейтральным напряжением или давлением жидкости вида (1.5) справедливо для пород с произвольной конфигурацией пор, каверн, пустот, трещин и т. д. Это соотношение может быть использовано при изучении явлений, в которых существенны эффективные напряжения. В других случаях, например при изучении сжимаемости пористых горных пород, имеет значение также и нейтральное напряжение. Объем порового про-

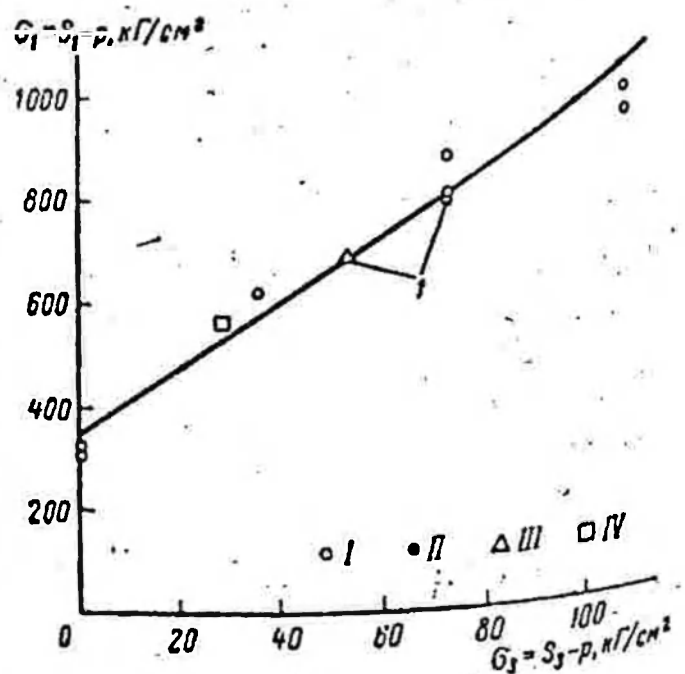


Рис. 55. Зависимость предельного напряжения σ_1 от предельного напряжения σ_3 для покрытых оболочкой образцов пород при различных значениях p .

1 — экспериментальные точки.
I — $p=0$, II — $p=26.5$ кг/см², III — $p=53$ кг/см², IV — $p=80$ кг/см².

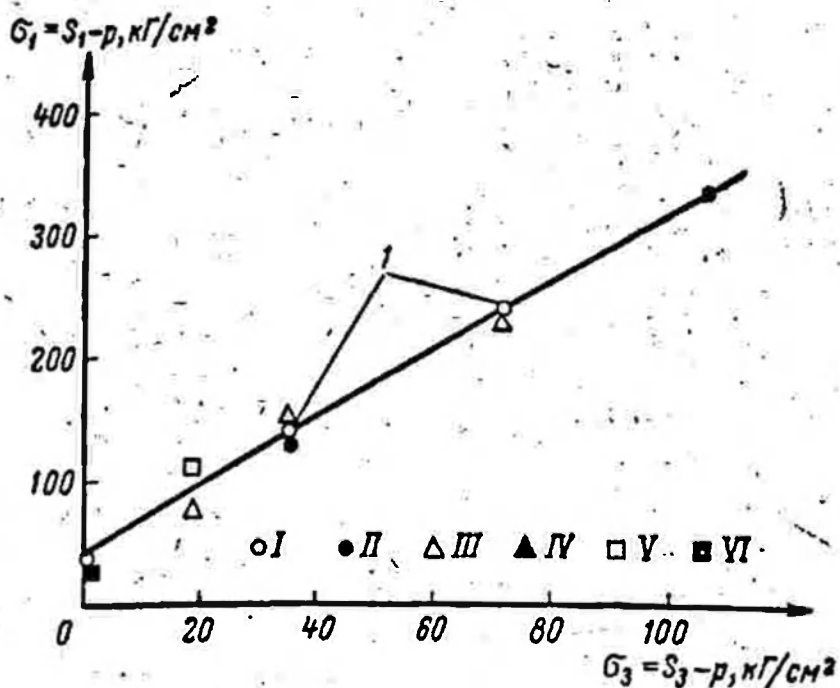
странства пород зависит как от эффективного, так и от нейтрального напряжения. Изменения порового объема от этих двух напряжений противоположны по знаку. Так, уменьшение нейтрального напряжения приводит к расширению материала скелета пористой среды и увеличению объема среды. В то же время уменьшение нейтрального напряжения (давления, жидкости) приводит к увеличению эффективного напряжения и уменьшению объема пористой среды. Поэтому величина порового объема пород зависит от давления жидкости двояким образом, и, следовательно, нельзя считать, что поровой объем зависит только от эффективного напряжения или только от давления жидкости. Например, Фатт в своей работе [124] принимал, что поровой объем зависит только от эффективного напряжения, т. е. от разности между полным напряжением и давлением жидкости, и поскольку сжимаемости порового объема от эффективного и нейтрального напряжений противоположны по знаку и сжимаемость порового объема от нейтрального напряжения меньше, чем от эффективного напряжения, получил, что сжимаемость пористой породы зависит от величины $S = 0,85p$. Такая обработка экспериментальных данных может привести к неверному выводу о том, что давление жидкости полностью «противостоит» внешнему напряжению, действующему на пористую среду.

Соотношение (1.5) оказывается верным и для случая движения вязкой жидкости в пористой среде. Так, если в элементе пористой среды происходит движение вязкой жидкости, причем перепад давления на длине элемента Δx равен $\Delta p = p_1 - p_2$ (рис. 57), то в силу вязкости жидкости перепад давления должен восприниматься скелетом пористой среды.

На первый взгляд может показаться, что усилие, передающееся на элемент пористой среды в результате изменения давления на величину Δp , должно быть равно $-m'\Delta p$ (m' — средняя «просветность» пористой среды), поскольку жидкость, в которой изменяется

Рис. 56. Зависимость предельного напряжения σ_1 от предельного напряжения σ_3 для покрытых оболочкой образцов пород при различных значениях p .

I — экспериментальные точки.
Значения p в кг/см^2 : I —0, II —35,2,
 III —70,5, IV —106, V —123,
 VI —141.



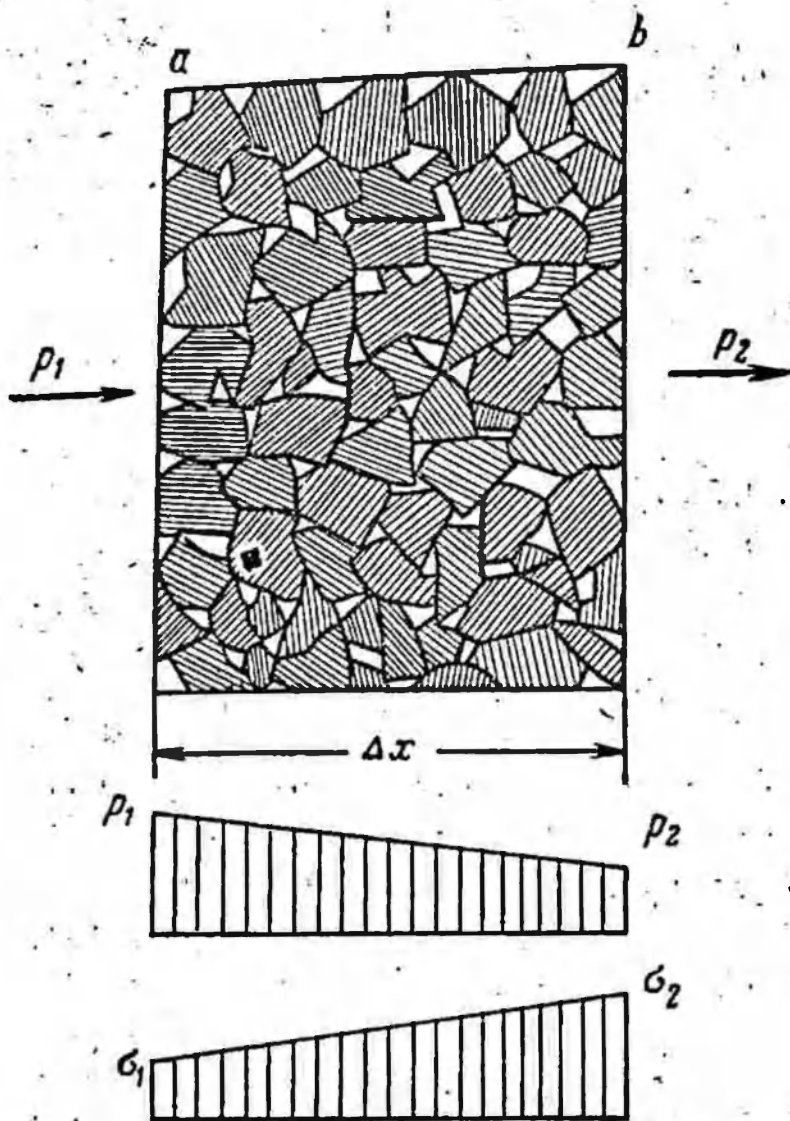


Рис. 57. Схема действия на пористую среду давления фильтрующейся в среде жидкости.

ся давление, занимает в среднем долю m' в полном сечении элемента пористой среды. На эту же величину должно было бы измениться эффективное напряжение. Однако ввиду того, что всестороннее сжатие на длине Δx изменяется на величину $-(1-m')\Delta p$, а это изменение всестороннего сжатия равносильно приложению к элементу пористой среды такого же эффективного напряжения, получается, что суммарное изменение эффективного напряжения в элементе пористой среды будет

эффективного напряжения, получается, что суммарное изменение эффективного напряжения в элементе пористой среды будет

$$\Delta \sigma^e = -m' \Delta p - (1 - m') \Delta p = -\Delta p \quad (1.9)$$

или

$$\frac{\Delta \sigma^e}{\Delta x} = -\frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Как видно, передача на пористую среду перепада давления вязкой жидкости, движущейся в среде, зависит от всестороннего сжатия среды. Выше указывалось, что всестороннее сжатие скелета среды вызывается не только нейтральным, но и эффективным напряжением. Можно представить себе пористые среды (точнее, среды с пустотами), у которых полное всестороннее сжатие, вызываемое действием на среду давления жидкости, насыщающей среду, будет незначительным.

Например, возьмем среду, пустотное пространство которой представляет собой цилиндрические параллельные трубки. Разрез такой среды представлен на рис. 58. В трубках движется жидкость, а вся среда находится под напряжением q . Пусть объем трубок очень мал по сравнению с объемом породы в целом. Вырезав из породы трубку радиусом R и считая, что напряжение на внешнем контуре этой трубки приближенно равно q , получим, ис-

пользуя формулу Ламе, следующее выражение для полного всестороннего сжатия породы:

$$\sigma = p + (q - p) \left(1 + \frac{1}{\frac{R}{r} - 1} \right) \quad (1.11)$$

где σ — полное всестороннее сжатие; r — радиус цилиндрической трубки; p — давление жидкости в рассматриваемом сечении.

Если $R \gg r$, то из (1.11) имеем $\sigma = q(1 + \varepsilon) - p\varepsilon$ (ε — малая величина). Следовательно, изменение p будет мало сказываться на изменении σ , так что перепад давления будет в незначительной степени передаваться породе вследствие изменения ее всестороннего сжатия. Давление жидкости будет действовать на породу в основном лишь на границе породы.

Однако ниже будут рассматриваться породы с развитой системой пустот — обычные породы с межзерновой пористостью и трещиноватые породы с сильно развитой трещиноватостью. Для таких пород справедливы формулы (1.5) и (1.9). Обобщая эти формулы, напишем следующее соотношение между тензором полного напряжения T_s , тензором эффективного напряжения T_σ и тензором нейтрального напряжения T_p :

$$T_s = T_\sigma + T_p \quad (1.12)$$

Для T_s и T_p имеем выражения

$$T_s = \begin{vmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z \end{vmatrix}; \quad (1.13)$$

$$T_p = pT_1, \quad (1.14)$$

где T_1 — единичный тензор.

Если считать сжимающие напряжения отрицательными, формула (1.12) примет вид:

$$T_s = T_\sigma - T_p \quad (1.15)$$

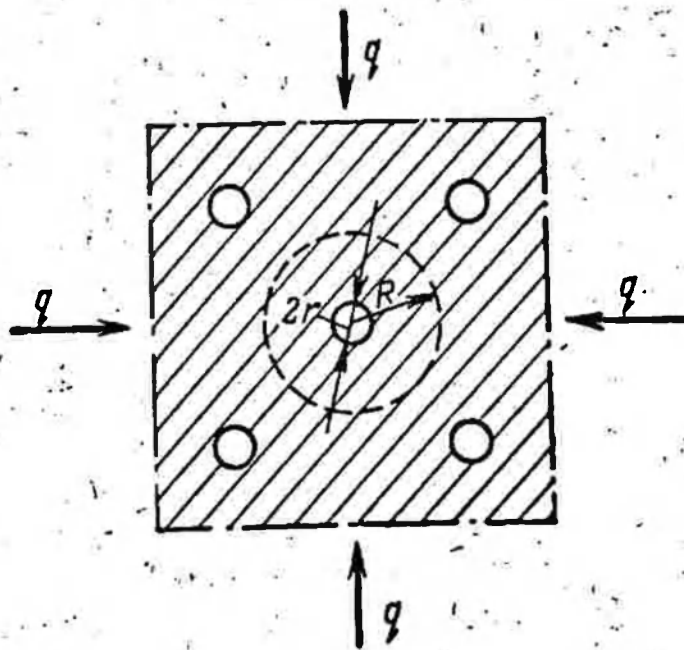


Рис. 58. Разрез гипотетической пористой среды.

Формулы (1.12) и (1.15) являются основными соотношениями, используемыми ниже при изучении механического взаимодействия горных пород и насыщающих их жидкостей.

§ 2. НАПРЯЖЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ В ПЛАСТЕ ВОКРУГ СКВАЖИНЫ В ПРОЦЕССЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

При фильтрации вязкой жидкости в пористой среде градиенты давления жидкости действуют на пористую среду, создавая в ней напряжения. В этой главе будут рассматриваться эффективные напряжения. Давление жидкости, а следовательно, и нейтральное напряжение будет считаться либо заданным, либо определяться из решения задач фильтрации или совместных задач теории упругости и фильтрации.

Градиенты давления являются для пористой среды объемными силами. В механике сплошных сред применяются следующие два способа учета действия объемных сил на среду. Первый, способ состоит во введении в уравнения, описывающие процессы, дополнительных членов, характеризующих влияние объемных сил на процесс. Второй способ заключается в том, что действие объемных сил на среду учитывается непосредственно, путем приложения к каждому бесконечно малому элементу соответствующей силы, определения возникающих при этом в среде напряжений и последующего суммирования напряжений. Выше имелась в виду в основном теория упругости. Однако аналогичные способы учета действия на среду объемных факторов имеются и в других областях механики сплошных сред. Например, в теории фильтрации действие объемных факторов можно учитывать либо путем введения соответствующих членов в уравнения, либо путем суммирования действия источников или стоков, распределенных известным образом по объему пласта.

Первый способ является более общим, так как он позволяет в принципе учитывать действие на процесс объемных факторов независимо от того, являются ли уравнения, описывающие процессы, линейными или нелинейными. Применение второго способа ограничивается случаями линейных уравнений.

Согласно первому способу, подставляя в уравнения (1.4) главы II выражения $X = -\frac{\partial p}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial p}{\partial z}$ и пренебрегая инерционными членами, получаем систему уравнений равновесия, описывающих деформацию пласта при фильтрации в нем жидкости. Вводя полные напряжения $S_x = \sigma_x - p$, $S_y = \sigma_y - p$, $S_z = \sigma_z - p$, т. е., считая сжимающие напряжения отрицательными, и оставляя прежними касательные напряжения, приходим к системе уравнений равновесия без объемных сил. Для того чтобы система уравнений для компонент напряжения была замкнутой, к уравнениям равновесия нужно присоединить условия совместности, выраженные в компонентах напряжения (условия Бельтрами-

Мичелла [65, 76]. Полную систему уравнений для компонент напряжения, описывающих упругую деформацию пласта при фильтрации в ней жидкости, нельзя привести к системе уравнений без объемных сил путем перехода к полным напряжениям, так как не приводятся к случаю отсутствия объемных сил условия Бельтрами-Мичелла. Однако, например, в плоском случае и к тому же при установившейся фильтрации, когда $\nabla^2 p = 0$, имеем [41]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 (\tau_x + \tau_y) &= -\frac{2(\lambda + \mu')}{\lambda + 2\mu'} \nabla^2 p, \end{aligned} \right\} (2.1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Поскольку, $\nabla^2 p = 0$, из (2.1) получаем.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 (S_x + S_y) &= 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Таким образом, имеем систему из трех уравнений для определения трех функций: S_x , S_y и τ_{xy} .

Общее уравнение для компонент смещения, возникающего при фильтрации в породах жидкости, можно получить, подставляя приведенные выше выражения для X , Y и Z в уравнение (1.11) главы II. Имеем

$$(\lambda + 2\mu') \text{grad div } \mathbf{u} - \mu' \text{rot rot } \mathbf{u} - \text{grad } p = 0. \quad (2.3)$$

Используя известную формулу векторного анализа

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

получаем из (2.3) уравнение

$$(\lambda + \mu') \text{grad div } \mathbf{u} + \mu' \nabla^2 \mathbf{u} - \text{grad } p = 0. \quad (2.5)$$

Применяя к нему операцию div , получаем

$$(\lambda + \mu') \nabla^2 \text{div } \mathbf{u} + \mu' \text{div } \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla^2 p = 0. \quad (2.6)$$

Учитывая, что из (2.4) $\nabla^2 \text{div } \mathbf{u} = \text{div } \nabla^2 \mathbf{u}$, $\nabla^2 p = 0$, имеем

$$\text{div } \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

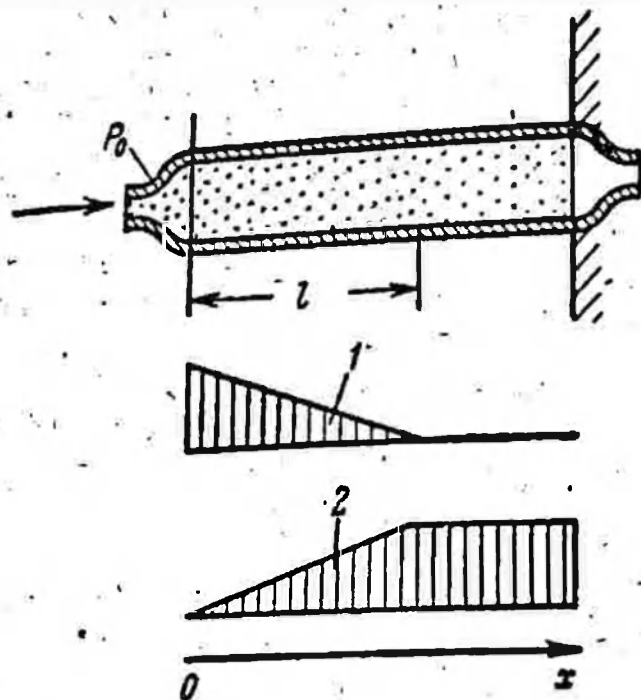


Рис. 59. Схема действия давления фильтрующей жидкости на образец пористой среды.
1 — эпюра давления жидкости, 2 — эпюра напряжения.

бензона [65]), бигармоническое уравнение для вектора смещения

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, компоненты смещения, возникающего при установившейся фильтрации жидкости в пластах, описываются, как и при отсутствии объемных сил, бигармоническими уравнениями (2.9).

Остановимся теперь на граничных условиях. Для того чтобы более ясно представить себе, какое условие следует принимать для нормального напряжения на свободной границе области, через которую профильтровывается жидкость, рассмотрим следующий простой пример. Пусть образец пористой среды, имеющий форму цилиндра или параллелепипеда, с одного конца закреплен, а с другого конца к нему присоединена эластичная труба, по которой к образцу подается однородная жидкость под давлением p_0 (рис. 59). Допустим, что к некоторому моменту времени жидкость успела профильтроваться в образец на расстояние l . Тогда, считая фильтрацию жидкости в каждый момент времени установившейся, пористость и проницаемость образца в первом приближении неизменными, а также принимая, что эластичная труба не оказывает влияния на деформацию образца, будем иметь согласно закону Дарси следующее распределение давления жидкости в образце:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ при } 0 \leq x \leq l;$$

$$p = 0 \text{ при } x \geq l.$$

Рассматривая равновесие любой части образца, нетрудно показать, что в этом случае напряжение σ_x в образце вдоль оси x (см. рис. 59) будет распределяться следующим образом:

$$-\sigma_x = \frac{p_0}{l} x \text{ при } 0 \leq x \leq l;$$

$$-\sigma_x = p_0 \text{ при } x \geq l.$$

В нижней части рис. 59 показаны эпюры давления жидкости и эпюры напряжения, возникшего в пористой среде в результате действия на нее фильтрующейся жидкости. На границе пласта, т. е. при $x=0$, величина $-\sigma_x=0$. Хотя на частицы скелета пласта вблизи его границы и действуют фильтрационные силы, вызывающие напряжение в частицах, однако ввиду того, что размер частиц обычно мал по сравнению с размерами областей, где теряется перепад давления жидкости и происходит «накапливание» напряжения в скелете пласта, будем полагать во всех случаях, что нормальное напряжение, возникающее в скелете пласта в результате фильтрации жидкости, равно нулю на границе пласта. Касательное напряжение в скелете пласта, вызванное фильтрацией жидкости, будем принимать во всех рассматриваемых ниже случаях также равным нулю на свободной границе области. Для того чтобы пояснить возможность этого допущения, возьмем, например, случай гидравлического разрыва пласта, когда по трещине, образованной в горных породах, движется вязкая жидкость, профильтровывающаяся в пласт. Из решения задачи о движении вязкой жидкости в прямолинейной щели имеем [54] выражение для касательного напряжения на границе щели $\tau_r = 6 \frac{\mu v}{\omega}$ (v — средняя скорость движения жидкости в щели, ω — ширина щели). Даже при очень большой вязкости жидкости $\mu = 10 \text{ пз} = 10^{-5} \text{ кгсек/см}^2$ и большой скорости движения жидкости $v = 10 \text{ м/сек}$ при $\omega = 1 \text{ см}$ имеем $\tau_r \approx 10^{-1} \text{ кг/см}^2$, что составляет незначительную величину по сравнению с напряжениями, обычно возникающими в пласте при протекании искусственных механических процессов.

Выше шла речь лишь о напряжениях на свободной границе. Напряжения на заземленных границах пласта должны определяться особо, из соответствующих совместных решений задач для различных областей.

Рассмотрим теперь задачу о действии на пористую среду потока жидкости, отфильтровываемой из скважины в пласт. Фильтрацию жидкости в пласте будем считать плоско-радиальной, в связи с чем и задача теории упругости будет осесимметричной. Пусть в пласт через скважину закачивается жидкость, вязкость которой намного превышает вязкость пластовой жидкости. К моменту времени t жидкость профильтровалась на расстояние r_b от центра скважины радиусом r_c (рис. 60). Если считать, что вязкая жидкость полностью вытесняет пластовую жидкость из пористой среды, имеем

$$r_b = \sqrt{r_c^2 + \frac{Qt}{m\pi h}} \quad (2.10)$$

где Q — расход жидкости; m и h — соответственно пористость и мощность пласта.

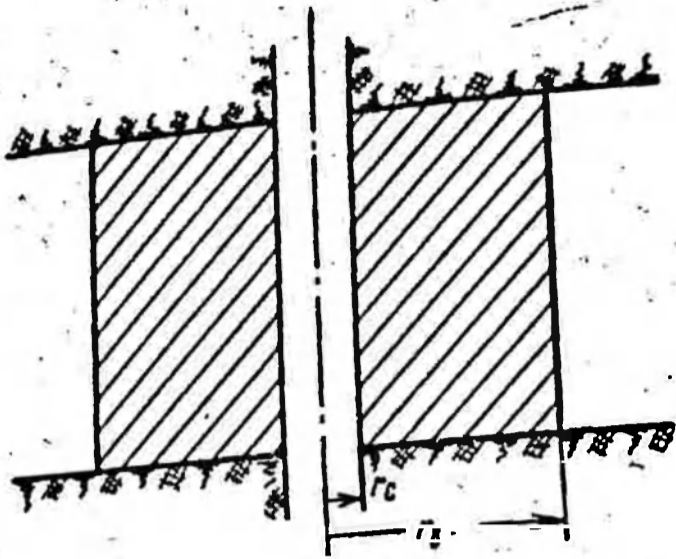


Рис. 60. Схема действия фильтрующейся жидкости на пористую среду вокруг скважины.

Если вязкость закачиваемой в пласт жидкости намного превышает вязкость пластовой жидкости, перепадом давления жидкости в области $r \geq r_w$ можно пренебречь ввиду его незначительности по сравнению с перепадом давления в области $r_c \leq r \leq r_w$, а движение вязкой жидкости можно считать установившимся. Тогда имеем

$$p = p_c - \frac{\Delta p_c}{\ln \frac{r_w}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} \quad \text{при } r_c \leq r \leq r_w; \quad (2.11)$$

$$p = p_k = \text{const} \quad \text{при } r \geq r_w. \quad (2.12)$$

Учитывая осевую симметрию и считая деформацию пласта плоской, получаем согласно первому способу решения задач о действии массовых сил на среду следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (2.13)$$

Компоненты напряжения σ_r , σ_θ и σ_z и соответствующие компоненты деформации связаны зависимостями

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2\mu' \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \sigma_\theta = \lambda \theta + 2\mu' \frac{u}{r}; \quad (2.14)$$

$$\sigma_z = \lambda \theta + 2\mu' e; \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + e; \quad e = \text{const},$$

где u — радиальное смещение.

Подставляя (2.11), (2.12) и (2.14) в (2.13), получаем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) = - \frac{\omega}{r}, \quad (2.15)$$

где

$$\omega = \frac{\Delta p_c}{\ln \frac{r_w}{r_c}} \frac{1}{\lambda + 2\mu'}. \quad (2.16)$$

Интегрируя уравнение (2.15), имеем в области $r_c \leq r \leq r_B$

$$u'_i = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{\omega}{2} r \ln \frac{r}{r_c}, \quad (2.17)$$

где C_1 и C_2 — величины, зависящие от времени.
Подставляя (2.17) в (2.14), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left(2C_1 - \omega \ln \frac{r}{r_c} - \frac{\omega}{2} \right) + 2\mu' \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{\omega}{2} \ln \frac{r}{r_c} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{2} \right) + \lambda e; \\ \sigma_\theta &= \lambda \left(2C_1 - \omega \ln \frac{r}{r_c} - \frac{\omega}{2} \right) + 2\mu' \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{2} \ln \frac{r}{r_c} \right) + \lambda e; \\ \sigma_z &= \lambda \left(2C_1 - \omega \ln \frac{r}{r_c} - \frac{\omega}{2} \right) + (\lambda + 2\mu') e. \end{aligned} \right\} (2.18)$$

Будем учитывать вначале только то напряжение, которое возникает в пласте в результате действия на него потока фильтрующей жидкости. Компонентами этого напряжения являются σ_r , σ_θ и σ_z . Фактическое напряжение найдем, прибавив к компонентам σ_r , σ_θ и σ_z компоненты напряжения, которое существовало в пласте до того, как на него начал действовать поток фильтрующей жидкости. Выражения (2.18) для компонент напряжения справедливы в области $r_c \leq r \leq r_B$. В области $r \geq r_B$ распределение напряжения определяется из решения Ламе для круглого полубесконечного цилиндра, так что

$$\sigma_r^0 = -\frac{B}{r^2}; \quad \sigma_\theta^0 = \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_z^0 = 0, \quad (2.19)$$

где σ_r^0 , σ_θ^0 и σ_z^0 — соответствующие компоненты напряжения в области $r \geq r_B$; B — величина, зависящая от времени.

Из (2.19) видно, что при $r \rightarrow \infty$ σ_r^0 и σ_θ^0 стремятся к нулю. Величины C_1 , C_2 , e и B определим из следующих условий:

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r = r_c; \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } r = r_B.$$

Выполняя условия (2.20), получаем

$$C_1 = \frac{\omega}{2} \ln \frac{r_B}{r_c} + \frac{\omega}{4};$$

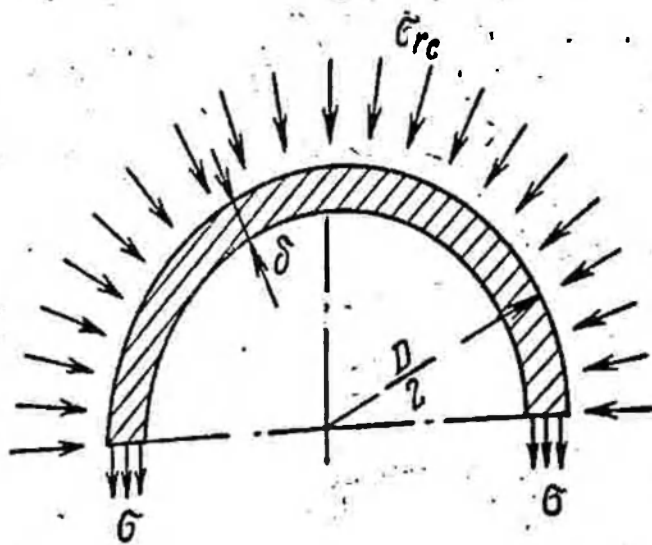


Рис. 61. Схема действия сил на обсадную трубу.

$$C_2 = \frac{r_c^2}{2\mu'} \left[(\lambda + \mu') \omega \ln \frac{r_B}{r_c} - \frac{\mu' \omega}{2} \right]; \quad (2.21)$$

$$e = 0;$$

$$B = r_c^2 \left[(\lambda + \mu') \omega \ln \frac{r_B}{r_c} - \frac{\mu' \omega}{2} \right] + r_B^2 \frac{\mu' \omega}{2}.$$

На поверхности скважины, т. е. при $r = r_c$, из (2.18) и (2.21) имеем

$$\sigma_{rc} = 0; \quad \sigma_{\theta c} = \frac{\Delta p_c}{1 - \nu}; \quad \sigma_{z_c} = \frac{\nu}{1 - \nu} \Delta p_c. \quad (2.22)$$

Во многих случаях на практике скважины обсаживаются трубами — обсадными колоннами. Эти колонны цементируют и перфорируют для того, чтобы сообщить скважину с пластом. Поэтому представляет интерес рассмотреть действие фильтрационного потока на пласт, обсаженный колонной. Будем считать для простоты, что цемент обладает теми же модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, что и породы, слагающие пласт, а обсадная колонна, естественно, имеет другие упругие характеристики. Будем также считать, что обсадная колонна жестко связана с породами пласта через цемент. В этом случае нормальная компонента σ_{rc} напряжения на стенке скважины равна нормальной компоненте внешнего напряжения, действующего на обсадную колонну. Давление жидкости не оказывает практически никакого действия на колонну, поскольку последняя перфорирована, а в перфорационных отверстиях теряется ничтожно малый перепад давления.

Ввиду упругости обсадной колонны каждому изменению σ_{rc} будет отвечать определенное значение смещения на стенке скважины u_c . Приближенную зависимость u_c от σ_{rc} найдем из следующих соображений. Согласно рис. 61 $\sigma_{rc} D = 2\delta\sigma$ (D — внешний диаметр и δ — толщина обсадной трубы; σ — нормальное напряжение в сечении стенки трубы). Увеличение периметра трубы по среднему диаметру $\Delta l = \pi D \frac{\sigma}{E_T}$ (E_T — модуль Юнга материала трубы). Имеем также $2\pi u_c = \Delta l$. Отсюда

$$u_c = K_0 \sigma_{rc}; \quad K_0 = \frac{D^2}{4\delta E_T}. \quad (2.23)$$

Поэтому решим рассмотренную выше задачу, когда вместо первого из условий (2.20) существует условие (2.23). Остальные условия (2.20) и распределение напряжения (2.19) в области $r \geq r_B$ остаются прежними. Получаем те же самые выражения (2.18) и (2.19) для компонент напряжения. Входящие в них величины C_1 , C_2 , e и B теперь определяются следующим образом:

$$C_1 = \frac{\omega}{2} \ln \frac{r_B}{r_c} + \frac{\omega}{4};$$

$$C_2 = \frac{(\lambda + \mu') \omega \ln \frac{r_B}{r_c} - \frac{\mu' \omega}{2} - \frac{r_c}{K_0} \left(\frac{\omega}{2} \ln \frac{r_B}{r_c} + \frac{\omega}{4} \right)}{\frac{1}{K_0 r_c} + \frac{2\mu'}{r_c^2}}$$

$$e = 0; \quad (2.24)$$

$$B = r_B^2 \mu' \left(\frac{2C_2}{r_B^2} + \frac{\omega}{2} \right).$$

Из этого решения легко получить решение предыдущей задачи. В самом деле, при $K_0 \rightarrow \infty$, что соответствует $E_T \rightarrow 0$,

$$C_2 = \frac{r_c^2}{2\mu'} \left[(\lambda + \mu') \omega \ln \frac{r_B}{r_c} - \frac{\mu' \omega}{2} \right]$$

и таким образом выражения (2.24) полностью совпадают с выражениями (2.21). Из полученного выше решения можно получить также решение задачи в другом предельном случае, когда $K_0 \rightarrow 0$, что соответствует $E_T \rightarrow \infty$, т. е. абсолютно жесткой трубе.

Приравняв K_0 нулю в выражении для C_2 (2.24), получаем

$$C_2 = -r_c^2 \left(\frac{\omega}{2} \ln \frac{r_B}{r_c} + \frac{\omega}{4} \right). \quad (2.25)$$

Отсюда :

$$\sigma_{rc} = (\lambda + 2\mu') \omega \ln \frac{r_B}{r_c} = \Delta P_c. \quad (2.26)$$

Для промежуточных значений K_0 имеем,

$$\sigma_{rc} = \Delta P_c \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\ln \frac{r_B}{r_c}} - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{\frac{r_c}{K_0 E} + \frac{1}{1+\nu}} \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2(1-\nu)} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{1}{\ln \frac{r_B}{r_c}} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{r_c}{K_0 E} \right] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2 \ln \frac{r_B}{r_c}} \right) \quad (2.27)$$

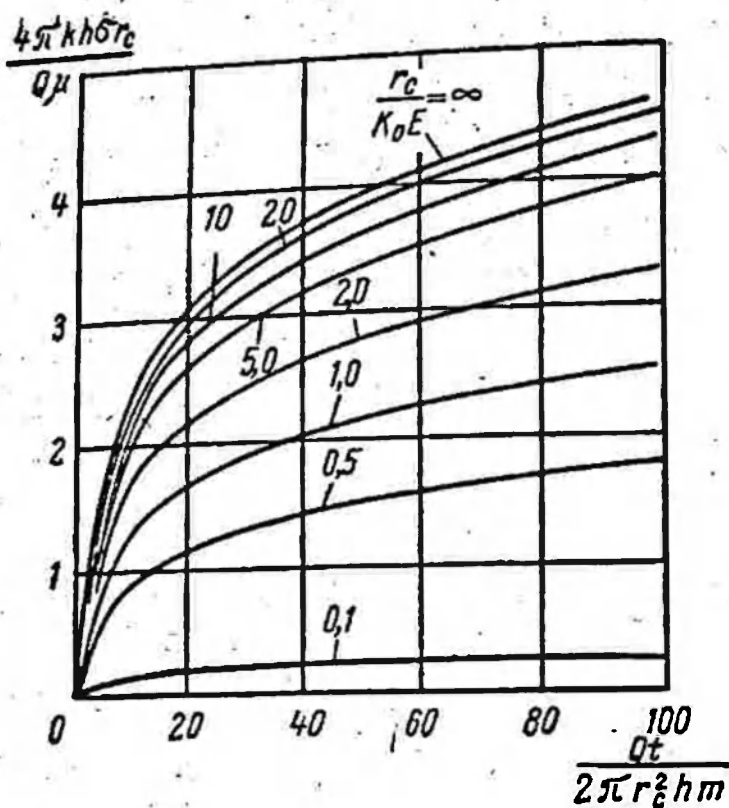


Рис. 62. Зависимость $\frac{4\pi kh\Delta r_c}{Q\mu}$ от $\frac{Qt}{2\pi r_c^2 hm}$.

Из (2.27) видно, что при $r_w - r_c \rightarrow 1$ σ_{r_c} безгранично возрастает, если Δp_c при этом будет отличаться от нуля. Однако осуществить это невозможно, так как при принятых выше предположениях для этого потребуется безгранично увеличить расход жидкости в начальный момент времени. Будем считать, что в процессе закачки вязкой жидкости в пласт расход жидкости Q является постоянным. Тогда, учитывая (2.10), получим

$$\Delta p_c = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \left(1 + \frac{Qt}{2\pi r_c^2 hm} \right), \quad (2.28)$$

где μ — вязкость жидкости; k , h и m — соответственно проницаемость, мощность и пористость пласта; t — время.

Подставляя (2.28) в (2.27), получаем

$$\frac{4\pi kh\Delta r_c}{Q\mu} = \ln \left(1 + \frac{Qt}{2\pi r_c^2 hm} \right) \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} - \frac{1}{\frac{r_c}{K_0 E} (1+\nu) + 1} - \frac{1}{2(1-\nu)} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - (1+\nu)(1-2\nu) \frac{r_c}{K_0 E} \right] \right\}. \quad (2.29)$$

На рис. 62 показана зависимость $\frac{4\pi kh\Delta r_c}{Q\mu}$ от величины $\frac{Qt}{2\pi r_c^2 hm}$ при $\nu = 0,2$ и различных значениях параметра $\frac{r_c}{K_0 E}$, из которой видно, что при $\frac{r_c}{K_0 E} \approx 20$ труба практически не оказывает никакого влияния на деформацию пласта, а при $\frac{r_c}{K_0 E} \approx 0,1$

можно считать трубу абсолютно жесткой. Посмотрим, каким значениям параметров трубы, пласта и скважины это соответствует. Полагая $D=2r_c$, получим $\frac{r_c}{K_0 E} = \frac{\delta E_T}{r_c E}$. Пусть, например, $r_c=10$ см, $E_T=10^6$ кг/см². Тогда при $\delta=0,8$ см и в условиях, когда пласт сложен плотными известняками ($E=5 \cdot 10^5$ кг/см²), $\frac{r_c}{K_0 E} = 0,16$.

Следовательно, в данном случае практически труба оказывает малое влияние на деформацию пласта. Величина компоненты напряжения σ_{r_c} , отрывающей трубу от породы пласта, будет незначительной. В условиях более мягких пород, например алевролитов ($E=5 \cdot 10^4$ кг/см²), и при тех же остальных параметрах $\frac{r_c}{K_0 E} = 1,6$. В этом случае труба оказывает более существенное влияние на деформацию системы труба — пласт. Для того чтобы определить фактическую величину компонент напряжения, необходимо знать начальную величину напряжения, существовавшего в пласте до воздействия на него потока фильтрующейся жидкости. Определим это напряжение следующим образом. Пусть во время цементирования скважины было $\sigma_{r_c}^1 = -p_c$. Боковое горное давление равно $-q_\infty$. Результирующее вертикальное горное давление составляет $q_* = \gamma H - p_k$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 &= -q_\infty - (p_c - q_\infty) \frac{r_c^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta^1 &= -q_\infty + (p_c - q_\infty) \frac{r_c^2}{r^2}; \\ \sigma_z^1 &= -q_* = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Отметим, что задача о действии на пласт жидкости, фильтрующейся от скважины или к скважине, рассматривалась в работе [38]. Эта же задача рассматривалась Д. Н. Кузьмичевым [60].

Рассмотрим теперь задачу о действии фильтрующейся жидкости на упругую пористую среду в случае центральной симметрии. Эта задача возникает, например, в условиях, когда закачивается вязкая жидкость в очень узкий интервал пласта большой мощности (рис. 63) или при движении жидкости в пласт от перфорационных отверстий. Приближенно можно принять, что вскрытая часть пласта имеет сферическую поверхность, центр которой находится на оси скважины. Если при этом закачивать в пласт вязкую жидкость, то ее контур будет также представлять собой сферическую поверхность.

Так же, как и выше, вычислим вначале только те напряжения, которые возникают в пласте в результате действия на него фильтрующейся жидкости. Компоненты же начального напряжения можно приближенно определить по формулам (2.30). Согласно

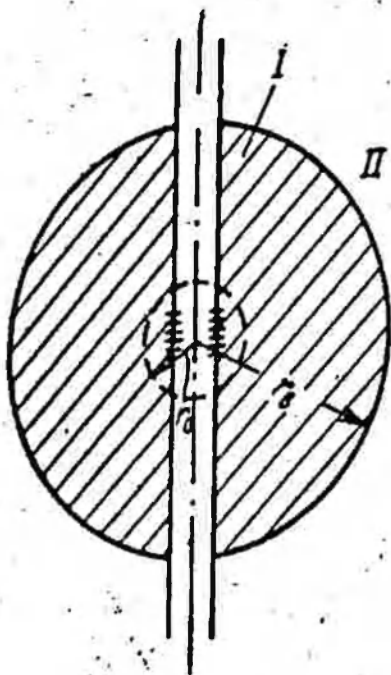


Рис. 63. Схема действия фильтрующей жидкости на пористую среду при центрально-симметричной фильтрации.

рис. 63, область, занятую вязкой жидкостью, т. е. при $r_0 \leq r \leq r_b$, обозначим цифрой I, а остальную часть пласта — цифрой II. При центрально-симметричной фильтрации имеем

$$\Delta p_0 = p_c - p_b = \frac{Q\mu}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_b} \right), \quad (2.31)$$

где p_c — давление жидкости на забое скважины; p_b — давление жидкости на границе областей I и II; Q — расход жидкости; μ — вязкость жидкости; k — проницаемость пласта.

При закачке в пласт жидкости, вязкость которой намного превышает вязкость пластовой жидкости, и при большой мощности пласта можно считать, что во всей области II $p = p_b$ и эта область простирается бесконечно. Уравнения теории упругости имеют в этом случае вид:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} &= 0; \\ \sigma_r &= (\lambda + 2\mu') \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}; \\ \sigma_\theta &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu') \frac{u}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

где p — давление жидкости, а остальные обозначения те же, что и в предыдущих формулах.

При центрально-симметричной фильтрации имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{Q\mu}{4\pi k} \frac{1}{r^2}. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в (2.32), получаем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) = - \frac{\beta}{r^2}, \quad (2.34)$$

где

$$\beta = \frac{Q\mu}{4\pi k} \frac{1}{\lambda + 2\mu'}. \quad (2.35)$$

Определим сначала напряжение, возникающее в упругом пласте только от действия на него фильтрационных сил (без горного дав-

ления). При этом будем считать, что напряжение на бесконечности равно нулю. Должны быть выполнены следующие условия:

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r = r_0;$$

$$\left. \begin{aligned} u_I &= u_{II} \\ \sigma_{rI} &= \sigma_{rII} \end{aligned} \right\} \text{ при } r = r_B. \quad (2.36)$$

В результате вычислений получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rI} &= (\lambda + 2\mu') \left(C - \frac{2C_1}{r^3} \right) + 2\lambda \left(\frac{\beta}{2r} + C + \frac{C_1}{r^3} \right); \\ \sigma_{\theta I} &= \lambda \left(C - \frac{2C_1}{r^3} \right) + 2(\lambda + \mu') \left(\frac{\beta}{2r} + C + \frac{C_1}{r^3} \right); \\ \sigma_{rII} &= (\lambda + 2\mu') \left(A - 2 \frac{B}{r^3} \right) + 2\lambda \left(A + \frac{B}{r^3} \right); \\ \sigma_{\theta II} &= \lambda \left(A - 2 \frac{B}{r^3} \right) + 2(\lambda + \mu') \left(A + \frac{B}{r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

В результате выполнения условий (2.36) имеем

$$\left. \begin{aligned} A &= 0; \\ B &= r_B^2 \left\{ \frac{\beta}{6} + \frac{r_0^3}{4\mu' r_B^2} \left[\frac{\lambda\beta}{r_0} - (3\lambda + 2\mu') \frac{\beta}{3r_B} \right] \right\}; \\ C &= - \frac{\beta}{3r_B}; \\ C_1 &= \frac{r_0^3}{4\mu'} \left[\frac{\lambda\beta}{r_0} - (3\lambda + 2\mu') \frac{\beta}{3r_B} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Для тангенциального напряжения на границе $r=r_0$ из (2.36) и (2.38) получаем

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_0} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta p_0. \quad (2.39)$$

Аналогичным образом могут быть решены также задачи о действии фильтрующегося газа на пласт.

§ 3. ОБРАЗОВАНИЕ ТРЕЩИН В ПЛАСТЕ ПРИ ПОМОЩИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Если для распространения трещин в пористых и проницаемых горных породах применить фильтрующуюся жидкость, вязкость которой значительно (на один или несколько порядков) превышает вязкость пластовой жидкости, то эта жидкость спустя неко-

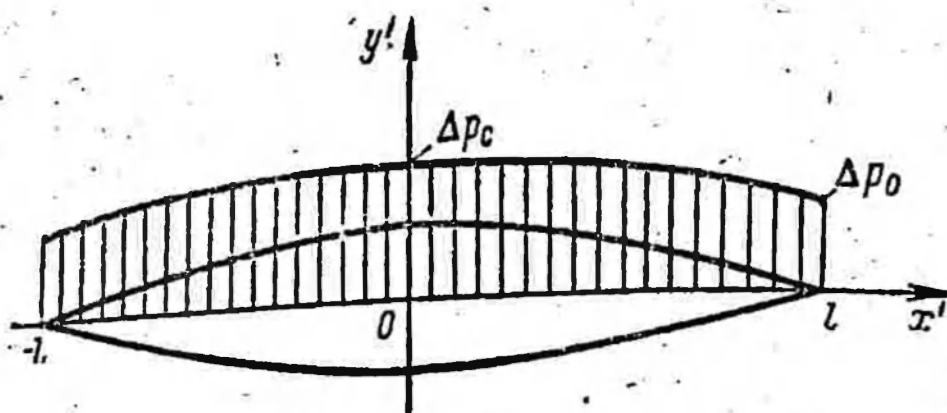


Рис. 64. Схема вертикальной трещины, образованной в породах при помощи фильтрующейся жидкости.

торое время проникнет до конца трещины, т. е. полностью «смочит» ее поверхности. Давление жидкости в конце трещины будет выше пластового давления.

Пусть в пласте путем закачки в скважину жидкости образовалась вертикальная трещина, показанная в плане на рис. 64. Будем считать, что образуются одновременно две половины вертикальной трещины $(l, -l)$, расположенные симметрично относительно скважины. Предполагается, что скважина находится в начале координат. Трещину распространяют путем закачки в нее фильтрующейся жидкости. Будем рассматривать только позднюю стадию процесса распространения трещины, когда жидкость проникла до самого конца трещины и фильтруется в пласт по всей поверхности трещины. Пусть A —область, занятая жидкостью, при помощи которой распространяется трещина, а B —область, занятая пластовой жидкостью. В этих областях на пласт действуют объемные силы, являющиеся градиентами давления фильтрующейся жидкости.

Как и в случае образования вертикальной трещины нефилтующейся жидкостью, будем рассматривать только плоскую задачу. В условиях, когда вязкость жидкости, применяющейся для распространения трещины, на один или несколько порядков выше вязкости пластовой жидкости, можно считать, что практически весь перепад давления теряется в области A , а в области B , простирающейся до бесконечности, давление жидкости постоянно и равно p_k . Вязкая жидкость обычно профильтровывается на не большое расстояние от поверхностей трещины. Поэтому можно было бы без большой погрешности считать, что давление фильтрующейся жидкости приложено к поверхности трещины, как и в случае нефилтующейся жидкости, тем более что уменьшение напряжений вблизи поверхностей трещины при фильтрующейся жидкости компенсируется повышением напряжений в более отдаленных областях. Однако жидкость разрыва может иметь ту же вязкость, что и пластовая жидкость. Тогда область A велика и простирается до контура питания. Поэтому рассмотрим общую постановку задачи об образовании вертикальных трещин фильтрующейся жидкостью.

Как следует из изложенного в § 2, рассматриваемая задача об образовании вертикальной трещины при помощи фильтрующейся жидкости приводится к соответствующей граничной задаче

плоской теории упругости для полных напряжений $S_x = \sigma_x - \Delta p$, $S_y = \sigma_y - \Delta p$, $\Delta p = p - p_0$.

На участке $0 \leq |x'| \leq |l|$, $x' = xl'$ (см. рис. 64) жидкость движется из скважины по трещине, постепенно отфильтровываясь в пласт. Из-за гидравлического сопротивления, обусловленного движением жидкости по трещине, происходит падение давления вдоль трещины, так что в скважине давление равно p_c , а в конце трещины $p_0 < p_c$. На контуре, разграничивающем области A и B , давление жидкости равно p_k . В бесконечной области B $p = p_k = \text{const}$. В горизонтальном направлении пласт сжат боковым горным давлением. Для удобства можно считать, не искажая сущности рассматриваемой задачи, что оно приложено к контуру трещины. Таким образом, имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_y = q_\infty; \quad S_y = q_\infty - \Delta p; \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq |x'| \leq |l|. \quad (3.1)$$

Легко убедиться в необходимости учета изменения давления вдоль трещины из-за гидравлического сопротивления; так как в противном случае, т. е. при $\Delta p = \text{const}$ на участке $0 \leq |x'| \leq |l|$ и выполнении условия С. А. Христиановича, смещения на контуре щели получаются равными нулю.

Истинное давление жидкости в трещине $\Delta p(x)$ определяется из следующих соотношений. Для расхода жидкости $q(x)$ в любом поперечном сечении трещины при $0 \leq |x'| \leq |l|$ имеем выражение

$$q(x') = \frac{Q}{2} - 2 \int_0^{x'} v_{y'} dx', \quad (3.2)$$

где Q — полный расход жидкости, закачиваемой в двустороннюю трещину; $v_{y'}$ — скорость фильтрации в направлении y' .

При движении жидкости по щели переменного сечения имеем

$$q(x') = - \frac{\omega^3(x')}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'}, \quad (3.3)$$

где $\omega(x')$ — ширина трещины, μ — вязкость жидкости.

Из (3.2) и (3.3) получаем

$$\frac{Q}{2} - 2 \int_0^{x'} v_{y'} dx' = - \frac{\omega^3(x')}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'}. \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.4), имеем

$$\Delta p = \Delta p_c - 6Q\mu \int_0^{x'} \frac{d\xi}{\omega^3(\xi)} + 24\mu \int_0^{x'} \frac{1}{\omega^3(\xi)} \int_0^\xi v_{y'}(\lambda) d\lambda d\xi. \quad (3.5)$$

Как видно из (3.5), $\Delta p(x')$ зависит от формы и размеров трещины, которые, очевидно, в свою очередь зависят от $\Delta p(x')$. Один из методов, при помощи которого можно приближенно решить рассматриваемую задачу, состоит в следующем. Согласно Ю. М. Шехтману [111], можно считать, что по крайней мере в конце щели в соответствии с законом Дарси

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{v_{x'} \mu}{k}, \quad (3.6)$$

где $v_{x'}$ — скорость фильтрации в направлении x' ; k — проницаемость пористой среды.

Тогда, подставляя (3.6) в (3.4), получаем

$$\frac{Q}{2} - 2 \int_0^{x'} v_{y'} dx' = \frac{\omega^3(x')}{12k} v_{x'}. \quad (3.7)$$

Аппроксимируем истинное распределение давления (3.5) параболической зависимостью

$$\Delta p^0(x) = \Delta p_c^0 - (\Delta p_c^0 - \Delta p_0^0) x^2, \quad (3.8)$$

где $\Delta p_c^0 = p_c^0 - p_k$; $\Delta p_0^0 = p_0 - p_k$ (p_0 — истинное давление в конце трещины), и найдем сначала решение задачи теории упругости для распределения давления (3.8). Затем полученную из этого решения задачи теории упругости величину $\omega(x)$ подставим в условие (3.7) и решим задачу теории фильтрации при этом условии. Введенный параметр Δp_c^0 найдем из следующего условия:

$$\int_0^l \Delta p(x') dx' = \int_0^l \Delta p^0(x') dx'. \quad (3.9)$$

При расчете истинного распределения давления требуется использовать для определения введенных параметров большее число условий вида (3.9).

Задача об образовании вертикальной трещины при помощи фильтрующейся жидкости решена описанным выше методом в работе [41] для случая, когда вязкость жидкости разрыва равна вязкости жидкости, насыщающей пласт, т. е. область A распространяется до контура питания, а движение в области B — установившееся.

Выполненные в работе [41] расчеты показывают, что параболическая зависимость (3.8) достаточно хорошо аппроксимирует истинное распределение давления в трещине. Давления $\Delta p^0(x)$ и $\Delta p(x)$ для условий, когда модуль Юнга пород пласта $E = 5 \cdot 10^5$ кг/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, проницаемость $k =$

$=0,1 \delta$, боковое давление $q_{\infty} = 100$ кг/см² вязкость пластовой жидкости и жидкости разрыва $\mu = 1$ спз, $Q = 2600$ м³/сутки, показаны на рис. 65.

Однако изложенный выше метод является слишком сложным для практического использования. Кроме того, как и при образовании трещин нефилтующейся жидкостью, гидравлическое сопротивление в трещине в реальных случаях определяется не только шириной трещины, но и наличием в ней песка, обломочного материала и т. д. Поэтому при оценках размеров трещин, образуемых при помощи фильтрующей жидкости, можно использовать более упрощенную схему расчета, основанную на том, что сопротивление движению жидкости не вычисляется, а в качестве дополнительного исходного параметра используется фактическое давление на забое скважин в процессе разрыва пласта p_c .

В этой схеме используются точные решения соответствующих задач теории упругости и теории фильтрации. Принимается, что при вертикальной трещине изменение перепада давления по трещине выражается законом

$$\Delta p(x) = \Delta p_c - (\Delta p_c - \Delta p_0) x^2. \quad (3.10)$$

Величина Δp_c , как указывалось выше, определяется на основе фактических данных, получаемых при разрыве пласта. Ширину трещины w определим из соответствующего решения [41] плоской задачи теории упругости. Имеем [41]

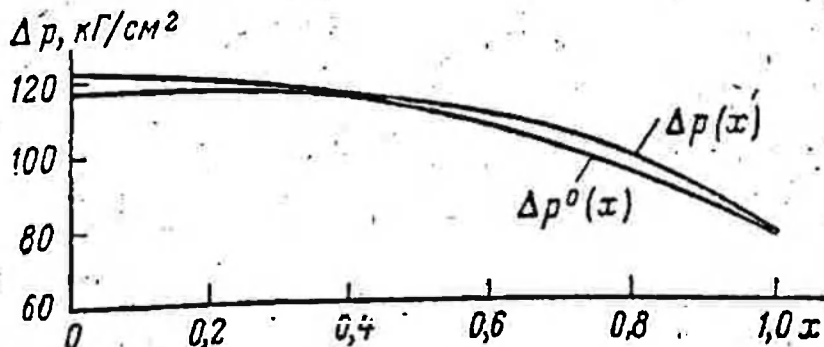
$$w = \frac{\Delta p_c l (1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \left(1 - \frac{q_{\infty}}{\Delta p_c}\right) \left(\sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin 3\vartheta\right); \quad (3.11)$$

$$\vartheta = \arccos x;$$

$$w_0 = \frac{4}{3} \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu) \Delta p_c l}{E} \left(1 - \frac{q_{\infty}}{\Delta p_c}\right). \quad (3.12)$$

В формулы (3.11) и (3.12) входит полудлина вертикальной трещины l , которую определим из решения задачи теории фильтрации. Для упрощения расчетов заменим параболическое распределение давления жидкости в трещине постоянным перепадом давления, равным среднему перепаду давления $\frac{\Delta p_c + \Delta p_0}{2} = q_{\infty}$.

Рис. 65. Распределение истинного и эквивалентного давлений в трещине.



Такая замена допустима при Δp_c , близких к q_∞ . Будем считать также, что вне контура профильтровавшейся в пласт жидкости давление постоянно и равно контурному.

Решение соответствующей задачи теории фильтрации имеет вид:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \zeta; \quad z' = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right); \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (3.13)$$

где Φ — комплексный фильтрационный потенциал.

Отсюда

$$q_r = \frac{Q}{2\pi kh} \ln \rho_{r_2}, \quad (3.14)$$

где ρ_r — радиус области, занятой профильтровавшейся в пласт жидкостью в плоскости ζ ; Q — полный расход жидкости в двустороннем течении; h — мощность пласта; k — проницаемость. Очевидно, что контур области, занятой профильтровавшейся в пласт жидкостью, в плоскости x, y имеет форму эллипса с полуосями $a = \frac{l}{2} \left(\rho_{r_2} + \frac{1}{\rho_{r_2}} \right)$, $b = \frac{l}{2} \left(\rho_{r_2} - \frac{1}{\rho_{r_2}} \right)$, откуда $a - b = l \rho_{r_2}$. Поскольку $a - b = \frac{l}{\rho_{r_2}}$, получаем

$$a^2 - b^2 = l^2 \left(\rho_{r_2}^2 - \frac{1}{\rho_{r_2}^2} \right). \quad (3.15)$$

Объем профильтровавшейся в пласт жидкости

$$V_{\text{к}} = \pi a b h = \frac{\pi h}{l} F \left(\rho_{r_2}^2 - \frac{1}{\rho_{r_2}^2} \right). \quad (3.16)$$

Из (3.14) и (3.16) получаем соотношение для коэффициента λ :

$$\lambda = \frac{V_{\text{к}}}{Q a} = \frac{\pi h}{2 Q a} F \left(\rho_{r_2}^2 - \frac{1}{\rho_{r_2}^2} \right). \quad (3.17)$$

Для малых λ это соотношение имеет вид

$$\lambda \approx \frac{\pi h}{2 Q a} \left(\rho_{r_2}^2 - \frac{1}{\rho_{r_2}^2} \right). \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) для малых λ можем получить формулу для коэффициента λ

$$\lambda = \frac{V_{\text{к}}}{Q a} = \frac{\pi h}{2 Q a} \left(\rho_{r_2}^2 - \frac{1}{\rho_{r_2}^2} \right). \quad (3.19)$$

Для определения максимальной ширины вертикальной трещины получаем формулу

$$w_0 = \frac{4(1-2\nu)(1+\nu)(\Delta p_c - q_\infty)}{3E} \sqrt{\frac{V_{ж} Q \mu}{2\pi^2 h^2 m k q_\infty}} \quad (3.20)$$

Аналогичный способ применим для расчета процесса распространения круглой горизонтальной трещины при помощи фильтрующейся жидкости. Однако для этого нам нужно сначала решить задачу теории упругости, когда добавочное напряжение $g(r)$ (см. § 6 главы II), действующее на поверхности трещины, изменяется по закону

$$g(r) = q - p_c + (p_c - p_0) \rho^2; \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad (3.21)$$

где R — радиус трещины.

Подставляя (3.21) в соотношение (6.12) главы II, получаем

$$(q - p_c) \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + (p_c - p_0) \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + q = 0 \quad (3.22)$$

или

$$p_c - q = \frac{2}{3} (p_c - p_0). \quad (3.23)$$

Подставляя (3.21) в формулу (6.6) главы II, имеем

$$w(r) = \frac{8(1-\nu^2)R}{\pi E} \left[(q - p_c) \int_p^1 \frac{\mu_* d\mu_*}{\sqrt{\mu_*^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + (p_c - p_0) \int_p^1 \frac{\mu_*^3 d\mu_*}{\sqrt{\mu_*^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] \quad (3.24)$$

Вычисляя интегралы (3.24) и используя (3.23), получаем окончательно

$$w(r) = \frac{16}{3} \frac{(1-\nu^2)(p_c - q)R}{\pi E} (1 - \rho^2)^{3/2}. \quad (3.25)$$

При $\rho=0$ имеем

$$w_0 = \frac{16}{3} \frac{(1-\nu^2)(p_c - q)R}{\pi E}. \quad (3.26)$$

Форма трещины, определяемая зависимостью $w/w_0 = f(\rho)$, представлена на рис. 66. При рассмотрении процесса фильтрации

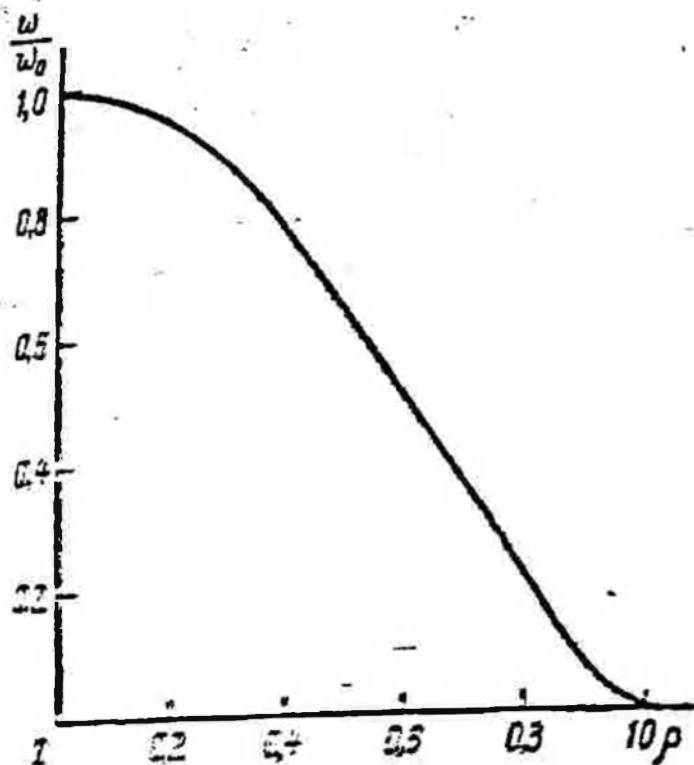


Рис. 66. Зависимость $\frac{w}{w_0} = f(\rho)$.

визкой жидкости от трещины в пласт будем полагать, так же как и в случае вертикальной трещины, что давление жидкости в трещине приближенно равно горному давлению q , а весь перепад давления теряется в области профильтровавшейся жидкости разрыва, вне которой давление постоянно и равно пластовому. Принятое выше предположение справедливо при r_c , близких к q . В такой постановке задача теории фильтрации вполне аналогична задаче о поле создаваемом наэлектризованным проводящим диском в неограниченном пространстве. Решение этой задачи приведено в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [63]. Потенциал в рассматриваемом решении выражается формулой [63]

$$\varphi = \frac{A}{R} \operatorname{arctg} \left[\frac{2R^2}{r^2 + z^2 - R^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - R^2)^2 + 4R^2 z^2}} \right]^{\frac{1}{2}} + C, \quad (3.27)$$

где A и C — постоянные, подлежащие определению.

При определении постоянных A и C поступим следующим образом. Рассмотрим сначала течение жидкости из круглой трещины в бесконечный пласт. При больших значениях $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ из (3.27) получаем

$$\varphi \approx \frac{A}{R} \operatorname{arctg} \frac{R}{\rho} + C \approx \frac{A}{\rho} + C. \quad (3.28)$$

Смыслом при больших ρ решение (3.27) должно соответствовать потенциалу для точечного источника в пространстве, выражающемуся в виде

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\rho} + C, \quad (3.29)$$

где Q — дебит жидкости или ее расход.

Из сравнения (3.28) и (3.29) получаем $A = \frac{Q}{4\pi}$. Расход профильтровавшейся в пласт жидкости представляется собой перепад

ность сплюснутого эллипсоида вращения и совпадает с изобарой, на которой $\varphi = \varphi_k$. Будем считать, что в плоскости $z=0$ радиус контура профильтровавшейся жидкости равен r_k . Тогда имеем

$$C = \varphi_k - \frac{Q}{4\pi R} \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{r_k^2 - R^2}} \quad (3.30)$$

Поскольку было принято, что в трещине давление жидкости равно q , из (3.27) и (3.30) получаем

$$q - p_k = \frac{Q\mu}{4\pi kR} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{r_k^2 - R^2}} \right] \quad (3.31)$$

Отсюда для дебита (расхода) имеем выражение

$$Q = \frac{4\pi kR (q - p_k)}{\mu \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{r_k^2 - R^2}}} \quad (3.32)$$

Объем $V_{ж}$ профильтровавшейся в пласт жидкости определяется формулой

$$V_{ж} = \frac{4\pi m}{3} r_k^2 \sqrt{r_k^2 - R^2} \quad (3.33)$$

На рис. 67 представлена зависимость

$$\frac{Q^3 \mu^3}{48\pi^2 k^3 (q - p_k)^3 V_{ж}} = f \left(\frac{3V_{ж}}{4\pi m R^3} \right),$$

$$\frac{Q^3 \mu^3}{48\pi^2 k^3 (q - p_k)^3 V_{ж}}$$

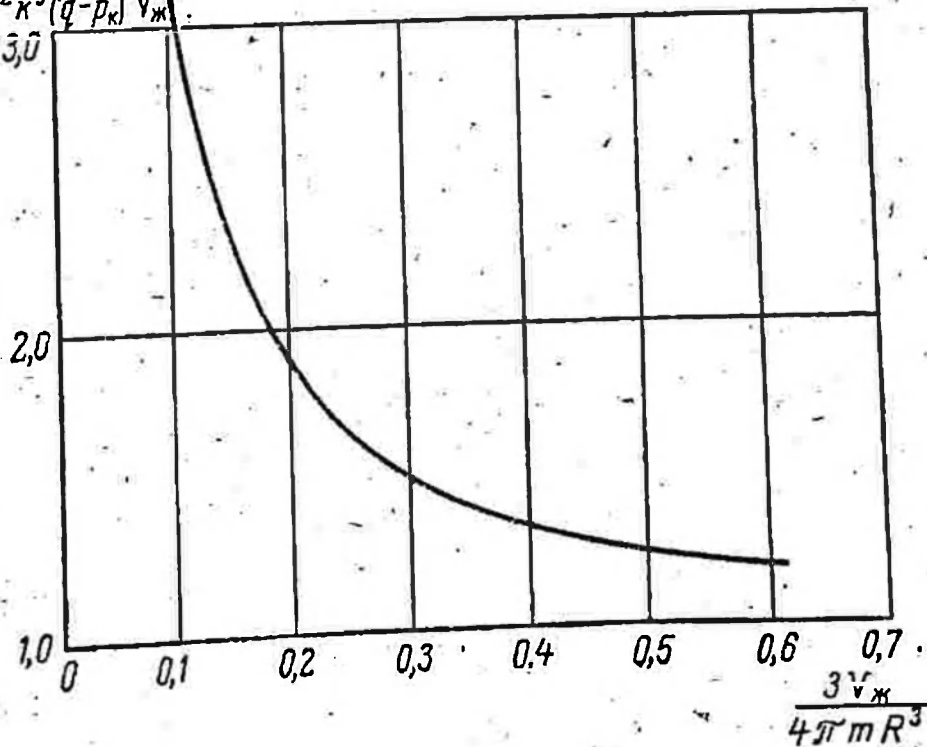


Рис. 67. Зависимость $\frac{Q^3 \mu^3}{48\pi^2 k^3 (q - p_k)^3 V_{ж}}$ от $\frac{3V_{ж}}{4\pi m R^3}$.

построения на основе (3.32) и (3.33) и служащая для определе-
ния K . Зная K , можно по формулам (3.25), (3.26) определить все
размеры трещины, если будет известна величина p_c в процессе
разрыва пласта.

§ 4. МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГОРНЫХ ПОРОД И ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ В НИХ ЖИДКОСТЕЙ

Жидкости, газы и их смеси, фильтрующиеся по порам, тре-
щинам или кавернам, имеющимся в горных породах, создают в
породах напряжения, вызывающие изменение коллекторских
свойств самих горных пород — удельного порового объема, про-
ницаемости, плотности. Процесс фильтрации в свою очередь
зависит от коллекторских свойств горных пород. Таким образом,
в реальных пластах существует механическое взаимодействие
горных пород и фильтрующихся в них жидкостей.

Обычное неинтенсивное извлечение жидкостей и газов из пла-
стов во время их разработки или слабое воздействие на пласты
вызывает слабую деформацию пород, которую во многих случаях
можно считать линейно-упругой. Одной из причин появления не-
линейной упругости у пористой среды является увеличение при
сжатии среды площади контактов зерен. Однако при малых де-
формациях можно, по-видимому, не учитывать это явление. Сжи-
маемость насыщающих породы жидкостей также часто можно
полагать упругой.

Поведение пласта в условиях упруго деформирующихся гор-
ных пород и упругих жидкостей, насыщающих породы, называют
упругим режимом. Сам факт существования влияния сжимаемости
горных пород на фильтрацию жидкостей был известен давно.
Однако теория упругого режима нефте-водоносных пластов полу-
чила наиболее полное развитие в работах В. Н. Щелкачева (114,
115). Необходимо также дальнейшее изучение вопроса об учете
сжимаемости горных пород в теории упругого режима.

При выводе уравнения движения упругой однородной жидко-
сти в упругой пористой среде используется уравнение сохранения
массы жидкости в элементарном объеме пористой среды

$$\frac{\partial m \rho_{ж}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{ж} \mathbf{v} = 0, \quad (4.1)$$

где m — пористость; $\rho_{ж}$ — плотность жидкости; \mathbf{v} — вектор скоро-
сти фильтрации.

Используются также [114] зависимости плотности жидкости и
пористости от давления. Однако, как это следует из сказанного
в § 1 этой главы, пористость не зависит непосредственно от ней-
трального напряжения — давления жидкости. Существует лишь
зависимость пористости от эффективного среднего нормального
напряжения, которое создается в пористой среде в результате
фильтрации жидкости.

В то же время объем порового пространства зависит от нейтрального напряжения, если учитывать сжимаемость материала скелета пористой среды. Поэтому в уравнении неразрывности, написанном для элементарного объема пористой среды, в принципе невозможно учесть сжимаемость скелета пористой среды от нейтрального напряжения. Для того чтобы учесть этот фактор, необходимо использовать уравнение неразрывности, выписанное для элемента массы пористой среды, поскольку масса пористого пласта не изменяется при деформации. Если пласт плоский, то можно, например, использовать уравнение для элементарного объема, но при этом нужно учитывать изменение мощности пласта при деформации. Уравнение неразрывности для элемента массы пористой среды получается аналогично уравнению (4.1) и имеет вид:

$$\rho_{\text{п}} \frac{\partial \delta \rho_{\text{ж}}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{\text{ж}} \mathbf{v} = 0, \quad (4.2)$$

где $\delta = \frac{m}{\rho_{\text{п}}}$; $\rho_{\text{п}}$ — плотность пористой среды в целом.

Производя дифференцирование в уравнении (4.2), получаем

$$\frac{\partial m}{\partial t} \rho_{\text{ж}} - \frac{m}{\rho_{\text{п}}} \rho_{\text{ж}} \frac{\partial \rho_{\text{п}}}{\partial t} + m \frac{\partial \rho_{\text{ж}}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{\text{ж}} \mathbf{v} = 0. \quad (4.3)$$

Второй член в уравнении (4.3) позволяет учитывать изменение порового объема пласта от нейтрального напряжения, т. е. давления жидкости p .

Зависимости пористости от среднего нормального напряжения, плотности пород и жидкостей от давления можно получить экспериментальным путем при исследовании сжимаемости образцов пород и насыщающих их жидкостей. Такие эксперименты проводились рядом авторов. В сравнительно недавнее время эксперименты по сжимаемости пород были проведены Д. А. Антоновым [4], Фаттом [124] и В. М. Добрыниным [33]. При проведении экспериментов, например, Д. А. Антоновым [4], образцы пористой среды, обычно цилиндрической формы, помещали в тонкий футляр из свинца. От футляра отходила трубка, соединявшая поровое пространство образца с внешней средой или регистратором давления и объема вышедшей из образца жидкости. Образец, заделанный таким способом в футляр, помещали в камеру высокого давления с жидкостью (рис. 68). Если считать, что давление жидкости в камере равно q , а в порах образца p , то $q = \sigma - p$. Образец в камере подвергался всестороннему обжатию, так что во всем его объеме напряжение σ было постоянным. Таким образом, видно, что в результате экспериментов, проводимых по описанной выше схеме, можно определить зависимость пористости от среднего нормального напряжения. Для этого нужно, следуя Д. А. Антонову [4], сохранять давление жидкости внутри пор образца постоянным

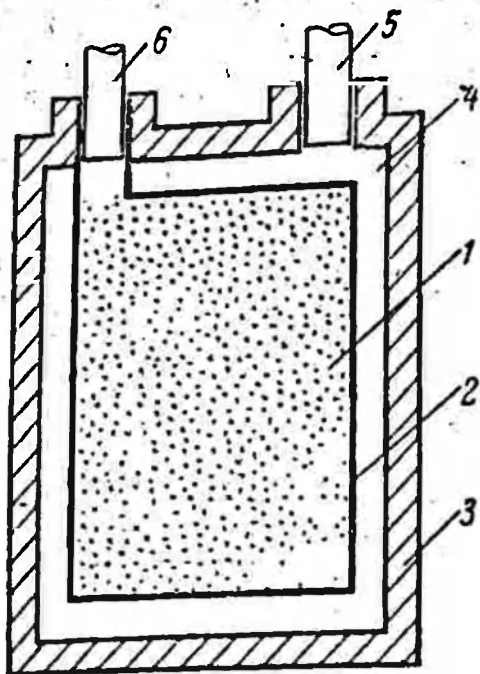


Рис. 68. Схема опытов [4] по определению сжимаемости пористых пород.

1 — пористый образец, 2 — свинцовая оболочка, 3 — пьезометрический сосуд, 4 — камера, заполненная жидкостью, 5, 6 — измерительные поршни.

и изменять внешнее давление на образец. Можно также оставлять внешнее давление на образец постоянным и изменять давление жидкости внутри пор образца. Тогда непосредственно определится суммарная величина

упругоэластичности пласта, в которой одновременно учитывается и зависимость пористости от эффективного среднего нормального напряжения, и изменение порового объема от давления жидкости, и сжимаемость жидкости, заключенной в порах.

Из предыдущего рассуждения следует, что все члены уравнения (4.3), кроме первого, можно выразить через соответствующие дифференциальные операторы от давления жидкости. Входящая в первый член величина пористости зависит от эффективного среднего нормального напряжения σ . Следовательно, для получения уравнения упругого режима в окончательном виде остается рассмотреть вопрос о том, каким образом в пористой среде создается эффективное среднее нормальное напряжение при фильтрации жидкости, т. е. найти зависимость $\sigma = \sigma(p)$. Так как пласты залегают среди других окружающих их пород и механически связаны с ними, очевидно, что деформация пласта будет зависеть от деформации окружающих пласт пород. Это обстоятельство отмечалось в работе Гертсма [125] как зависимость сжимаемости от «граничных условий», а также в работе В. М. Шестакова [110].

Для выяснения поставленного выше вопроса рассмотрим один пример [48]. Пусть фильтрация жидкости происходит от двух галерей нагнетательных скважин к одной галерее эксплуатационных скважин в горизонтально залегающем пласте мощностью h . Сечение пласта вертикальной плоскостью показано на рис. 69. Примем, что пласт залегают на значительной глубине (на значительном удалении от дневной поверхности). Поэтому можно полагать, что вертикальное сечение пласта (см. рис. 69) представляет собой неограниченную плоскость. Галереи нагнетательных скважин находятся на расстояниях $x = \pm L$, где давление жидкости равно p_k , а эксплуатационная галерея, из которой производится отбор жидкости, — в сечении $x = 0$, где давление жидкости составляет величину p_c . Нагнетание жидкости из галерей таково, что при $|x| > |L|$ $p = p_k$. В начальный момент времени давление

во всем пласте было равно p_k . Давление жидкости в пределах $0 \leq |x| \leq |L|$ изменяется по закону

$$p = p_c + \frac{p_k - p_c}{L} x. \quad (4.4)$$

Изменение давления жидкости приводит к нарушению прежнего равновесия между пластом и окружающими породами и равносильно тому, что к каждому участку контакта кровли и подошвы с пластом длиной Δx_0 (Δx_0 — малая величина) прилагаются в пределах $0 \leq |x_0| \leq |L|$ дополнительные силы, равные $(p_k - p_c)\Delta x_0$ (если считать толщину пласта перпендикулярно плоскости чертежа рис. 69 равной единице) и направленные в сторону пласта (см. рис. 69). Распределение дополнительного контактного напряжения $\Delta \sigma_*$ определяется формулой

$$\Delta \sigma_* = p_k - p_c - \frac{p_k - p_c}{L} x_0. \quad (4.5)$$

Определим эффективное среднее нормальное напряжение σ_0 , которое возникает в пласте от действия этих дополнительных сил, приложенных к контактам кровли и подошвы с пластом, считая приближенно механические свойства пород во всей неограниченной плоскости (вертикальном разрезе пород, см. рис. 69) одинаковыми. Деформацию пород будем считать упругой. В такой постановке наша задача сводится к определению напряженного состояния в плоскости от действия сил, распределенных по линиям кровли и подошвы. Эти силы могут рассматриваться как объемные. Ниже будет применяться второй способ учета действия объемных сил на среду, так как в данном случае он является более удобным.

Решение задачи теории упругости для единичной силы, приложенной в точке неограниченной плоскости $x=0, y=0$, дано в книге Н. И. Мусхелишвили [76], из которой возьмем лишь формулу, определяющую среднее нормальное напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}; \quad (4.6)$$

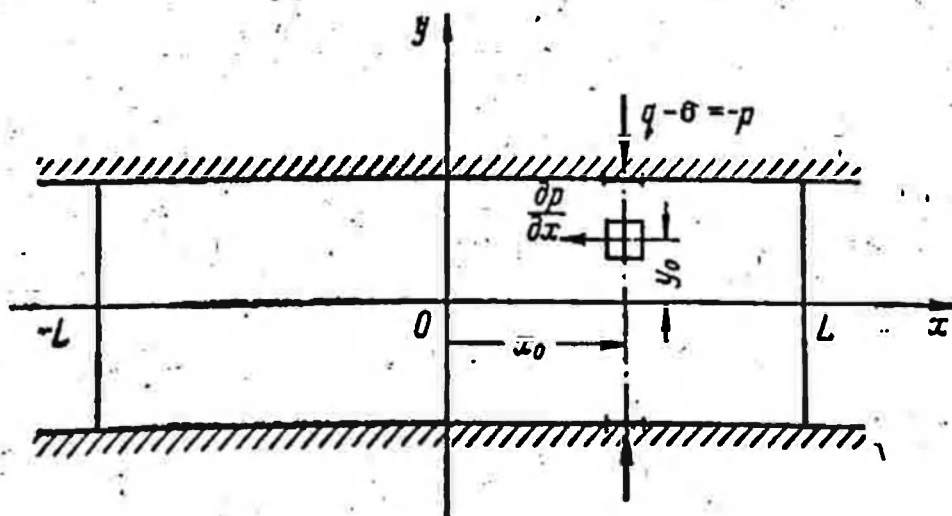


Рис. 69. Сечение пласта вертикальной плоскостью.

$$\Phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+z)} \frac{1}{z}, \quad (4.7)$$

где X и Y — компоненты сил, направленные соответственно по осям x и y ;

$$x = 3 - 4v; \quad z = x + iy.$$

Подставляя (4.7) в (4.6), получаем

$$\sigma_0 = -\frac{1}{\pi(1+z)} \frac{Xx + Yy}{x^2 + y^2}. \quad (4.8)$$

В рассматриваемом случае $X = 0$ и силы приложены в точках $x_0, \pm \frac{h}{2}$ (см. рис. 69). Полагая $Y = \Delta\sigma_* \Delta x_0$, учитывая (4.5) и считая силу Y , действующую снизу вверх, положительной и, а действующую сверху вниз — отрицательной, имеем

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta p_c}{\pi(1+z)} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) \left[\frac{y - \frac{h}{2}}{(x - x_0)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2} - \frac{y + \frac{h}{2}}{(x - x_0)^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2} \right] \Delta x_0; \quad \Delta p_c = p_k - p_c \quad (4.9)$$

или, приравняв Δx_0 нулю и интегрируя, получаем

$$\sigma_1 = \frac{\Delta p_c}{\pi(1+z)} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) \left[\frac{y - \frac{h}{2}}{(x - x_0)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2} - \frac{y + \frac{h}{2}}{(x - x_0)^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2} \right] dx_0. \quad (4.10)$$

Вычисляя интеграл (4.10), имеем

$$\sigma_1 = \frac{\Delta p_c}{\pi(1+z)} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{L+x}{y - \frac{h}{2}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{L-x}{y - \frac{h}{2}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{y - \frac{h}{2}}{2L} \ln \frac{(x+L)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2}{(x-L)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2} - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\operatorname{arctg} \frac{L+x}{y + \frac{h}{2}} + \right. \\
 & \left. + \operatorname{arctg} \frac{L-x}{y + \frac{h}{2}} \right) - \frac{y + \frac{h}{2}}{2L} \ln \frac{(x+L)^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2}{(x-L)^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Из (4.8) следует, что при $x \ll L$, $L \gg h$

$$\sigma_1 \approx - \frac{\Delta p_c}{\pi(1+x)} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) 2\pi \right] = - \frac{2\Delta p_c}{1+x} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.12)$$

или

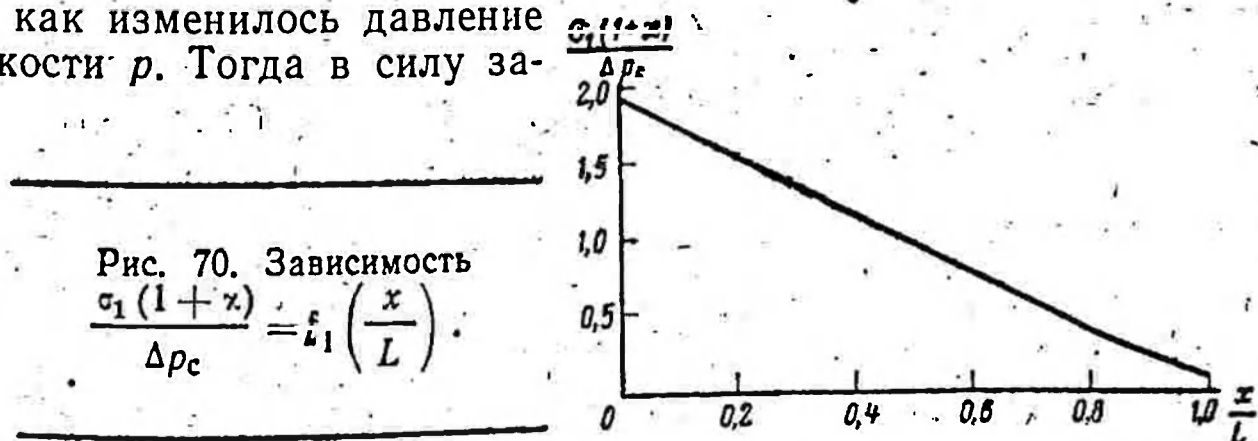
$$\sigma_1 \approx C_1 + C_p, \quad (4.13)$$

где

$$C_1 = - \frac{2p_c}{1+x}; \quad C = \frac{2}{1+x}.$$

На рис. 70 представлена зависимость $\frac{\sigma_1(1+x)}{\Delta p_c} = f_1\left(\frac{x}{L}\right)$ при $\frac{h}{L} = 0,1$ на оси $y=0$, а на рис. 71 — зависимость $\frac{\sigma_1(1+x)}{\Delta p_c} = \bar{f}_1\left(\frac{y}{L}\right)$ в самом крайнем сечении пласта $\frac{x}{L} = 1$ и при $\frac{h}{L} = 0,1$.

Однако эффективное среднее нормальное напряжение, определяемое формулой (4.11), является неполным. Дело в том, что при изменении давления жидкости на пласт начинают действовать не только силы, приложенные в местах контактов кровли и подошвы с пластом, но и силы, возникающие в результате передачи на скелет пласта градиентов давления фильтрующейся жидкости. Легко убедиться в том, что это — различные силы. Так, кровлю пласта можно считать абсолютно гибкой и мысленно приложить к неограниченной плоскости такую систему сил, чтобы горное давление q изменилось таким же образом, как изменилось давление жидкости p . Тогда в силу за-



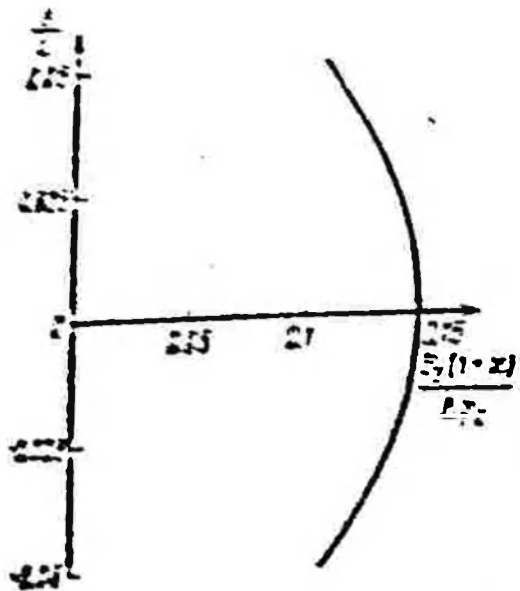


Рис. 71. Зависимость $\frac{\sigma_1(1+x)}{\Delta p_c} = f_1\left(\frac{y}{L}\right)$.

конец $\sigma - p = q$ величина эффективного напряжения σ останется неизменной, и дополнительные контактные усилия не возникнут. Однако действие на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости, которые будут передаваться на скелет пласта, не прекратится. Наоборот, в условиях, когда движения жидкости нет, а давление в ограниченном пласте снизилось, на пласт будут действовать только контактные силы.

Рассматриваемый случай можно представить себе, еще и следующим образом. Пусть породы кровли и подошвы пласта являются абсолютно гибкими, так что на каждый элемент пласта со стороны кровли и подошвы как будто действует пружина. Например, при уменьшении давления в некотором элементе пласта напряжение в скелете пласта увеличивается, так как сила действия пружин остается постоянной. Однако силу действия пружин на элемент пласта можно уменьшить в такой же степени, в какой уменьшилось давление жидкости. Тогда усилия, передающиеся на скелет пласта, не изменятся. Однако усилия, возникающие в результате передачи на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости, будут продолжать действовать на скелет пласта. Приведенный пример дает возможность лучше понять тот факт, что усилия, создаваемые в скелете пласта градиентами давления фильтрующейся жидкости, являются дополнительными к контактным усилиям. Можно привести различные случаи, когда проявляются только контактные силы или только силы, обусловленные действием на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости.

При вычислении напряжения, возникающего в пласте в результате действия на него градиентов давления фильтрующейся жидкости, в формуле (4.8) нужно принять $Y=0$. Поступая так же, как и выше, получаем для среднего нормального напряжения σ_1 возникающего от действия на скелет пласта градиентов давления фильтрующейся жидкости, следующее выражение:

$$\sigma_1 = - \frac{\Delta p_c}{\sigma_1(1+x)} \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx_0 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(x-x_0) dy_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (4.14)$$

Вычисляя интеграл (4.14), получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= -\frac{\Delta p_c}{\pi(1+x)} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{h}{2} + y}{x-x_0} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{h}{2} - y}{x-x_0} \right) dx_0 = \\
 &= -\frac{\Delta p_c}{\pi(1+x)} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{\frac{h}{2} + y} - \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{\frac{h}{2} - y} \right) dx_0 = \\
 &= -\frac{\Delta p_c}{\pi(1+x)} \frac{1}{L} \left[2\pi L - (x+L) \operatorname{arctg} \frac{x+L}{\frac{h}{2} + y} + \right. \\
 &+ (x-L) \operatorname{arctg} \frac{x-L}{\frac{h}{2} + y} + \frac{\frac{h}{2} + y}{2} \ln \frac{(x+L)^2 + \left(\frac{h}{2} + y\right)^2}{(x-L)^2 + \left(\frac{h}{2} + y\right)^2} - \\
 &- (x+L) \operatorname{arctg} \frac{x+L}{\frac{h}{2} - y} + (x-L) \operatorname{arctg} \frac{x-L}{\frac{h}{2} - y} + \\
 &\left. + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \ln \frac{(x+L)^2 + \left(\frac{h}{2} - y\right)^2}{(x-L)^2 + \left(\frac{h}{2} - y\right)^2} \right] \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

При $x \ll L$, $L \gg h$ имеем

$$\sigma_2 \approx -\frac{2\Delta p_c}{1+x} \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \sigma_1 \quad (4.16)$$

Суммарное напряжение при $x \ll L$, $L \gg h$ будет

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{4p_k}{1+x} + \frac{4}{1+x} p \quad (4.17)$$

На рис. 72 показана зависимость $\frac{\sigma_2(1+x)}{\Delta p_c} = f_2\left(\frac{x}{L}\right)$ при $\frac{h}{L} =$

$= 0,1$ на оси $y=0$. На рис. 73 дана зависимость $\frac{\sigma_2(1+x)}{\Delta p_c} = f_2^*\left(\frac{y}{L}\right)$

в самом крайнем вертикальном сечении $\frac{x}{L} = 1$ и $\frac{h}{L} = 0,1$, а на

рис. 74 представлена зависимость $\frac{\sigma(1+x)}{\Delta p_c} = f_0\left(\frac{x}{L}\right)$ на оси $y =$

$= 0$ при том же значении $\frac{h}{L}$.

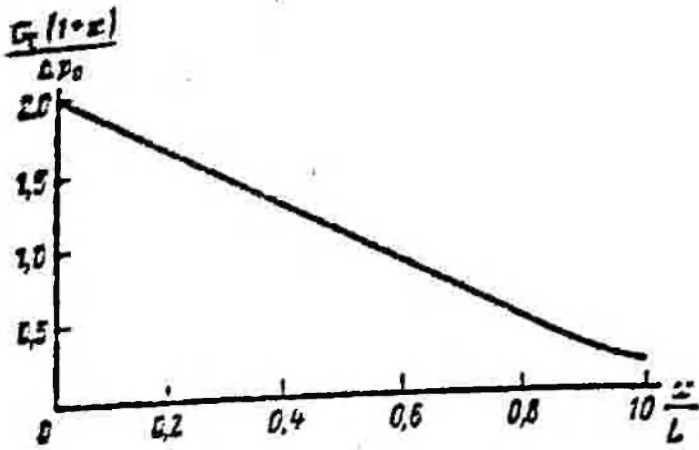


Рис. 72. Зависимость $\frac{\sigma_e(1+\alpha)}{\Delta p_c} = I_2^* \left(\frac{x}{L} \right)$.

Из асимптотических формул (4.13) и (4.17) и приведенных выше графиков следует, что зависимость между суммарным эффективным средним нормальным напряжением σ и давлением жидкости p для рассмотренного примера вблизи эксплуатационной галереи получается довольно близкой к линейной. Можно предположить, что и во многих других случаях фильтрации жидкости такая зависимость будет справедливой. В рассмотренном примере при $x \ll L, h \ll L$

$$\sigma = -\frac{4p_k}{1+\alpha} + \frac{4p}{1+\alpha} = -\frac{\epsilon p_k}{1-\nu} + \frac{p}{1-\nu}. \quad (4.18)$$

Выше был рассмотрен частный пример деформации пористых пород при фильтрации в них жидкости. Рассмотрим теперь вопрос о том, какое эффективное среднее нормальное напряжение получается в пористой среде в результате действия на нее градиентов давления фильтрующейся жидкости в общем случае. Уравнения теории упругости с объемными силами, равными градиентам давления фильтрующейся жидкости (2.3), можно написать, внося под знак град величину p_k . Тогда из (2.3) имеем

$$(\lambda + 2\mu') \text{grad div } \mathbf{u} - \mu' \text{rot rot } \mathbf{u} - \text{grad } (p - p_k) = 0. \quad (4.19)$$

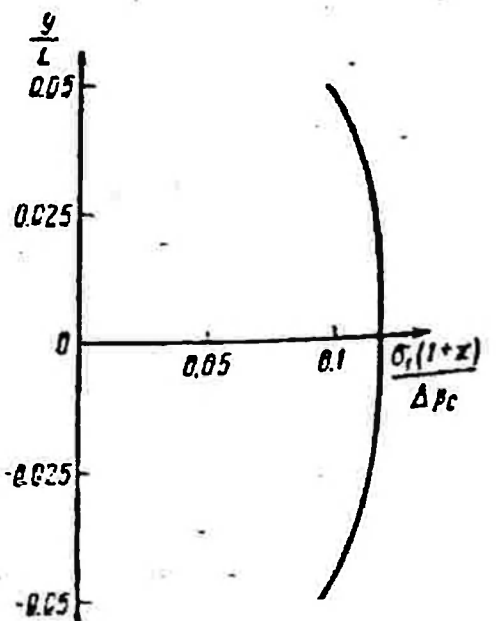
Подвергая уравнение (4.19) операции rot, получаем

$$\text{rot rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (4.20)$$

Таким образом, можно считать, что

$$\text{rot rot } \mathbf{u} = \text{grad } \varphi_0, \quad (4.21)$$

Рис. 73. Зависимость $\frac{\sigma_s(1+\alpha)}{\Delta p_c} = I_2^* \left(\frac{y}{L} \right)$.



где $\varphi_0 = \varphi_0(x, y, z, t)$ — гармоническая функция, в которую время t входит как параметр.
Из (4.19) и (4.21) получаем

$$\text{grad} \left(\text{div } u - \frac{\mu'}{\lambda + 2\mu'} \varphi_0 - \frac{p - p_R}{\lambda + 2\mu'} \right) = 0 \quad (4.22)$$

или, используя известное соотношение [76]

$$\text{div } u = \frac{3}{3\lambda + 2\mu'} \sigma_2, \quad (4.23)$$

имеем

$$\text{grad} \left[\sigma_2 - \frac{E}{6(1-\nu)} \varphi_0 - \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} (p - p_R) \right] = 0. \quad (4.24)$$

Если при $r \rightarrow \infty$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) $\sigma_2 \rightarrow 0$, $p \rightarrow p_R$, то из (4.24) получаем

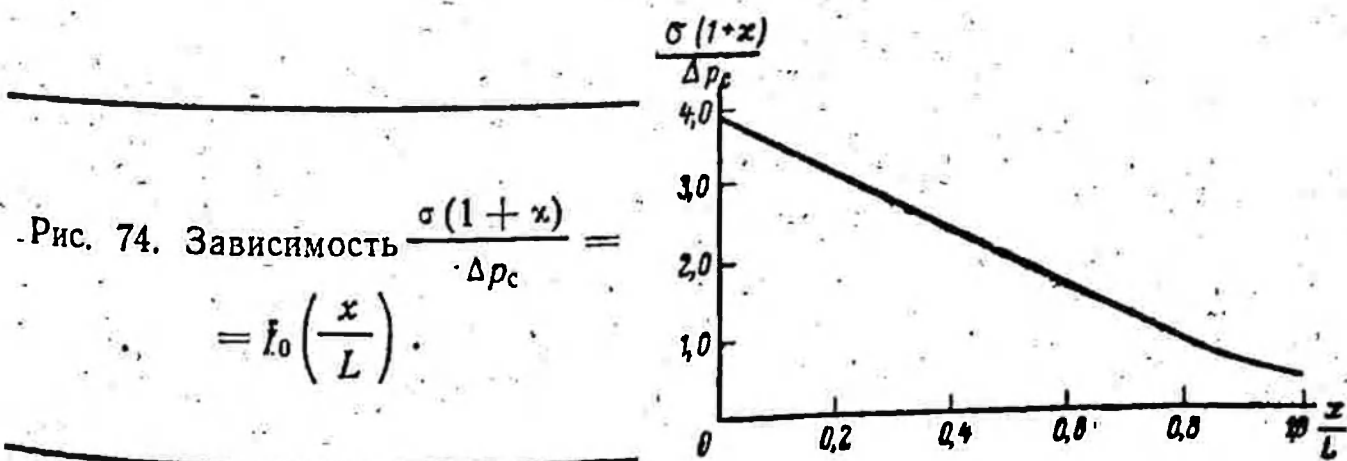
$$\sigma_2 - \varphi_2 - \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} (p - p_R) = 0, \quad \varphi_2 = \frac{E}{6(1-\nu)} \varphi_0. \quad (4.25)$$

При центральной или осевой симметрии, но плоской деформации $\text{rot } u = 0$. Тогда на основании (4.19) и (4.23) имеем

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} (p - p_R). \quad (4.26)$$

Пусть, как и прежде, σ — суммарное эффективное среднее нормальное напряжение в пласте, появившееся при фильтрации в нем жидкости, σ_1 и σ_2 — эффективные средние нормальные напряжения, возникающие соответственно в результате действия усилий на контактах кровли и подошвы пласта с самим пластом и в результате действия на скелет пласта градиентов давления фильтрующейся жидкости. Тогда

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (4.27)$$



В рассматриваемом случае σ_z может быть равно нулю, так что доминирующее эффективное среднее нормальное напряжение σ_z обусловлено лишь действием на пласт градиентов давления $\frac{\partial p}{\partial z}$ и $\frac{\partial p}{\partial r}$. Это может быть, например, в случае течения в пористой среде в сухой пласт большой мощности из скважины в направлении радиально-симметричному.

Среднее значение выше

$$\sigma_z = \sigma_z(t) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \frac{1}{K_c}; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \frac{1}{K_c} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{K_c} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{K_c}; \quad \frac{1}{K_x} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{K_x}. \quad (4.29)$$

Итак

$$\frac{1}{K_c} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{m}{K_c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{m}{K_x} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \quad (4.30)$$

Представляя выражения для эффективных средних нормальных напряжений в общем случае в виде:

$$\sigma_1 = \lambda^* p + \varphi_1(x, y, z, t); \quad (4.31)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} p + \varphi_2(x, y, z, t); \quad (4.32)$$

где λ^* — коэффициент, зависящий от геометрии скважины, пористости пласта и механических свойств пород, φ_1 и φ_2 — функции, зависящие от неустановившегося фильтрационного течения в рассужаемом пласте, залегающем среди пород пласта.

$$\left(\frac{1}{K_c} + \frac{m}{K_x} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{K_c} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p. \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_c} \left(\lambda^* + \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{m K_c}{K_c} \right) = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p.$$

Заметим, что коэффициент λ^* зависит от геометрии скважины и выражается через $\frac{m}{K_c} \frac{\partial p}{\partial t}$ в уравнении (4.33).

Таким образом, имеем

$$\left(\frac{m}{K_x} + \frac{1}{K_c} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p. \quad (4.34)$$

Породы кровли и подошвы пласта обычно бывают более гибкими, чем породы самого пласта. Тогда можно считать, что окружающие пласт породы мало влияют на деформацию пласта. Если к тому же учесть, что при действии на пласт контактных усилий каждый элемент пласта — вертикальный столбик с площадью основания $dx \, dy$ — не деформируется в горизонтальном направлении из-за подпора со стороны других столбиков, то $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu} \Delta\sigma_z$ и, следовательно,

$$\lambda^* = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (4.35)$$

Тогда, помня, что $\sigma_1 = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} p$ и, как правило, $K'_c \gg K_c$, имеем

$$\frac{1}{K'_c} = \frac{\alpha_*}{K_c}; \quad \alpha_* = \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (4.36)$$

При $\nu=0,2$ $\alpha_* = 1$, при $\nu=0,3$ $\alpha_* = 1,25$, а при $\nu=0,5$ $\alpha_* = 2$ и лишь при $\nu < 0,2$ $\alpha_* < 1$. Таким образом, эффективная сжимаемость пород в реальных пластах может отличаться от сжимаемости пород, определенной в экспериментах по сжатию пористых образцов пород. Это объясняется тем, что в экспериментах по определению сжимаемости пористых пород обычно не моделируются реальные условия.

На основании изложенного выше можно сделать следующие обобщения.

1. Дополнительное эффективное среднее нормальное напряжение, возникающее в пласте при фильтрации в нем жидкости, складывается из двух составных частей, одна из которых обусловлена появлением усилий на контактах пласта с кровлей и подошвой, а вторая — действием на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости. В некоторых случаях это дополнительное среднее нормальное напряжение может быть обусловлено одним лишь действием на пласт градиентов давления фильтрующейся жидкости.

2. На процесс фильтрации жидкости в пласте оказывает влияние не только деформация пород самого пласта, но и пород, его окружающих. Однако, как показывают приведенные выше оценки, зависимость дополнительного эффективного среднего нормального напряжения от давления жидкости в том случае, если окружающие пласт породы не обладают существенно большей жесткостью, чем породы самого пласта, мало отличается от линейной при значительном распространении волны давления жидкости. Входящий в уравнение упругого режима коэффициент упругости вообще не равен коэффициенту упругости, получаемому на основе экспериментов по всестороннему сжатию образцов пород. Наилучшим путем было бы определение эффективной

упругости по данным гидродинамических исследований реальных пластов. Если же имеются основания считать, что окружающие пласт породы являются более гибкими, чем породы самого пласта, можно при определении сжимаемости пород пользоваться формулой (4.36).

§ 5. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ, РЕОЛОГИЧЕСКИЙ И НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ РЕЖИМЫ ПЛАСТОВ

Деформация многих горных пород сопровождается их уплотнением и течением, в результате чего порода при снятии с нее напряжения не возвращается к первоначальному состоянию. Пористость деформирующейся горной породы в этих условиях зависит не только от существующего в ней в данный момент напряжения, но и от времени, в течение которого происходит деформация. Поэтому зависимость пористости от давления жидкости неодинакова при нагружении породы и ее разгрузке, т. е. деформация породы является необратимой. Для ряда горных пород можно, по-видимому, не принимать во внимание фактор времени при деформации, но обязательно нужно учитывать неодинаковый характер зависимости пористости породы от напряжения при нагружении и разгрузке. В результате получается зависимость, аналогичная кривой $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ (см. рис. 7).

Неодинаковый характер изменения пористости породы в процессе ее нагружения и разгрузки был учтен А. П. Крыловым и Г. И. Баренблаттом [58] в теории упруго-пластического режима нефтяного пласта. Авторы [58] основывались на зависимостях вида, показанного на рис. 7, без учета фактора времени при деформации породы.

Принимая зависимости пористости от среднего нормального напряжения при нагружении и разгрузке в первом приближении линейными, авторы [58] получают

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \sigma}\right)_H = \frac{1}{K_1}, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial \sigma}\right)_D = \frac{1}{K_2}, \quad (5.1)$$

где K_1, K_2 — модули упругости пород соответственно при нагружении и разгрузке, причем $K_2 \geq K_1$.

Используя зависимость между эффективным напряжением и давлением жидкости согласно [58] в виде $\sigma + p = \varphi(x, y, z)$ и уравнение неразрывности, а также пренебрегая сжимаемостью самого скелета пористой среды, получаем систему уравнений А. П. Крылова — Г. И. Баренблатта, описывающих фильтрацию жидкости при упруго-пластическом режиме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= a_1^2 \nabla^2 p && \text{при } \frac{\partial p}{\partial t} \leq 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= a_2^2 \nabla^2 p && \text{при } \frac{\partial p}{\partial t} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где

$$a_1^2 = \frac{k}{\mu \left(\frac{m}{K_{ж}} + \frac{1}{K_1} \right)}; \quad a_2^2 = \frac{k}{\mu \left(\frac{m}{K_{ж}} + \frac{1}{K_2} \right)}$$

μ — вязкость жидкости; k — проницаемость пород; t — время.

Если в пласте происходило и снижение, и повышение давления, то в некоторых точках пласта будет $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$. Очевидно, эти точки со временем передвигаются, т. е. существует волна разгрузки, на фронте которой давление достигает минимальной для данной точки пласта величины. В работе [15] имеется решение задач о падении и восстановлении давления при фильтрации жидкости к дренажной галерее и к одиночной скважине. На рис. 75 показана зависимость [15] величины $\frac{p-p_0}{P-p_0}$ от $\ln \frac{t}{t_0}$. Здесь P — начальное давление в пласте в момент $t=0$, p_0 — давление на границе галереи в момент $t=t_0$, причем при $t \leq t_0$ происходило падение давления на границе галереи, а при $t \geq t_0$ — восстановление давления; $\lambda = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2}$.

Из рис. 75 видно, что необратимость деформации пород может существенно сказываться на процессах фильтрации жидкости.

Деформация таких пород, как алевролиты и глинистые сланцы, может характеризоваться фактором времени, т. е. при рассмотрении деформации этих пород необходимо учитывать их реологические свойства. На это обстоятельство обращал внимание Гертсма [125].

У пород, залегающих на глубинах свыше 3000—3500 м в усло-

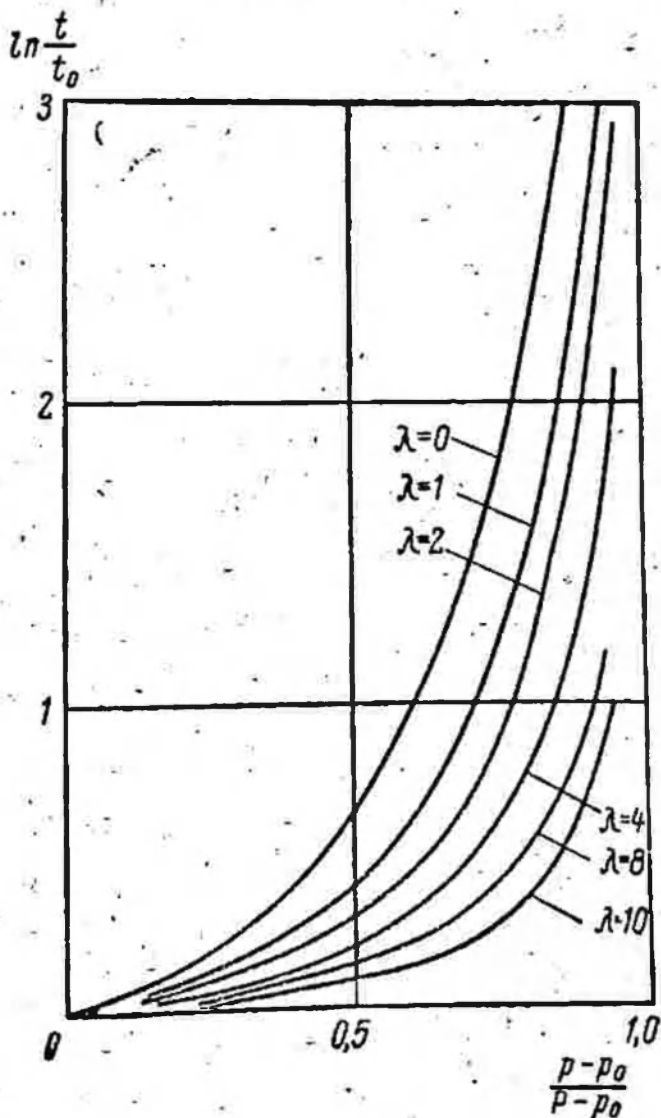


Рис. 75. Зависимость $\ln \frac{t}{t_0}$ от

$$\frac{p-p_0}{P-p_0}$$

влиях высоких сжимающих напряжений и температуры, реологические свойства будут проявляться значительно заметнее. Кроме того, в настоящее время хорошо известно, что очень многие пласты, залегающие на глубинах свыше 3500 м, характеризуются аномально высоким пластовым давлением, часто близким к полному горному давлению. В таких условиях все давление калужащих пород воспринимается жидкостью, а скелет вышеле- остается практически ненагруженным и, следовательно, пласта- лотненным. В процессе извлечения жидкости или газа из пласта давление насыщающих его флюидов будет снижаться, и ранее не уплотненный скелет пласта будет уплотняться, проявляя при этом реологические свойства.

Рассмотрим процесс неустановившейся фильтрации в горных породах, являющихся средой Максвелла. Будем предполагать, что для этого тела существует зависимость вида (3.7) главы I между эффективным средним нормальным напряжением σ и эффективной средней деформацией ϵ , т. е.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{K'_M} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'_M}, \quad (5.3)$$

где K'_M и μ'_M — реологические константы пород.

Считая, что $\sigma = p - P$ (p и P — соответственно текущее и начальное давление), по аналогии с (5.3) можно написать [47]

$$\frac{dm}{dt} = \beta'_c \frac{dp}{dt} + \frac{p - P}{\mu'_M}; \quad \beta'_c = \frac{1}{K'_M}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в уравнение неразрывности, получаем [47] уравнение фильтрации жидкости в среде Максвелла:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \omega' P_1 = a^2 \nabla^2 P_1, \quad (5.5)$$

$$\text{где } P_1 = p - P; \quad \omega' = \frac{1}{\mu'_M (m\beta_{ж} + \beta'_c)}; \quad a^2 = \frac{k}{\mu (m\beta_{ж} + \beta'_c)}.$$

Уравнение (5.5) аналогично уравнению распространения тепла в пространстве с источниками поглощения или излучения [51].

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть в полубесконечном пласте при $t > 0$ давление жидкости p на границе $x = 0$ (рис. 76) стало равным p_1 . В начальный момент времени оно было равно P .

Распределение давления жидкости описывается уравнением (5.5).

Введем функцию $f = \frac{p - P}{p_1 - P}$. Тогда эта задача будет формироваться следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega' f = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad (5.6)$$

$$f(x, 0) = 0; \quad f(\infty, t) = 0; \quad f(0, t) = 1. \quad (5.7)$$

При решении задачи применим операционный метод. Вводя изображение Лапласа-Карсона функции f в виде:

$$F(s, x) = s \int_0^{\infty} f(x, t) \exp(-st) dt, \quad (5.8)$$

получаем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{s + \omega'}{a^2} F; \quad (5.9)$$

$$F(s, \infty) = 0; \quad F(s, 0) = 1. \quad (5.10)$$

Решение уравнения (5.9) при условиях (5.10) имеет вид:

$$F(s, x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{s + \omega'}{a^2}} x\right). \quad (5.11)$$

Переходя к оригиналу и используя [32], получаем

$$f(x, t) = \frac{p - P}{p_1 - P} = \frac{1}{2} \left[\exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega'}{a^2}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \frac{x}{a \sqrt{t}} - \sqrt{\omega' t}\right) + \exp\left(x \sqrt{\frac{\omega'}{a^2}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \frac{x}{a \sqrt{t}} + \sqrt{\omega' t}\right) \right]. \quad (5.12)$$

При $\omega' \rightarrow 0$ имеем известное решение задачи о притоке жидкости к галерее из полубесконечного пласта при чисто упругом режиме:

$$\frac{p - P}{p_1 - P} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a \sqrt{t}}\right). \quad (5.13)$$

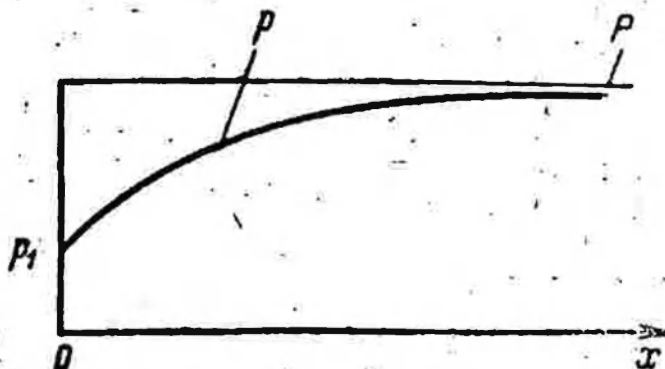


Рис. 76. Схема изменения давления в прямолинейном пласте.

Как показывают экспериментальные данные, пористость и проницаемость некоторых пород зависят от эффективного напряжения нелинейным образом, оставаясь, однако, почти полностью обратимыми. Следовательно, у этих пород проявляется нелинейная упругость в результате чего, приняв $\sigma + p = \text{const}$, имеем следующие зависимости:

$$-\frac{\partial m}{\partial \sigma} = \frac{\partial m}{\partial p} = \varphi(p); \quad -\frac{\partial k}{\partial \sigma} = \frac{\partial k}{\partial p} = k(p). \quad (5.14)$$

Функции $\varphi(p)$ и $k(p)$ можно построить, используя экспериментальные данные Фатта [124], Н. С. Гудок и М. М. Кусакова [29] и В. М. Добрынина [33]. Подстановка (5.14) в уравнение неразрывности (4.3) приводит в случае пренебрежения сжимаемостью скелета среды к следующему уравнению нелинейно-упругого режима:

$$\mu [\varphi(p) + m\beta_{ж}] \frac{\partial p}{\partial t} = \text{div } k(p) \text{ grad } p. \quad (5.15)$$

Аппроксимируя функции $\varphi(p)$ и $k(p)$ удобными для расчета зависимостями и решая уравнение (5.15), можно определить распределение давления жидкости, фильтрующейся в породах, обладающих нелинейной упругостью.

Эти функции можно аппроксимировать линейными [7] или экспоненциальными [72] зависимостями.

§ 6. ДЕФОРМАЦИЯ ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОД ПРИ ДВИЖЕНИИ В НИХ ЖИДКОСТИ

Существование открытых трещин и каверн в горных породах, слагающих кору Земли, можно считать в настоящее время хорошо известным фактом. Открытые трещины имеются как в пористых, так и в монолитных породах, не содержащих макроскопических пустот. Многие пласты или массивы горных пород разбиты густой сеткой открытых трещин, образующих единую гидравлическую систему. Горные породы, имеющие разветвленную сеть открытых трещин, считаются трещиноватыми коллекторами.

Известно значительное число нефтяных месторождений, продуктивные горизонты которых сложены породами, содержащими нефть практически только в трещинах. Как указывает А. А. Трофимук [101], в СССР нефтяные месторождения этого типа были открыты в 1940—1943 гг. в башкирском Приуралье. Нефтеемещающими породами этих месторождений являются известняки и мергели, целики которых имеют низкую пористость, равную около 1%, и практически нулевую проницаемость. Однако дебиты скважин, вскрывших такие породы, велики и составляют нередко 50—100 м³/сутки, а в отдельных случаях и несколько

ко тысяч $m^3/сутки$. При бурении трещиноватых горизонтов наблюдаются сильные поглощения глинистого раствора, по которым можно судить о наличии трещин в пределах интервала пласта, вскрытого скважиной. А. А. Трофимуком [101] на основе фактических данных о первоначальной емкости коллектора в пределах нефтенасыщенной части и об объеме в пластовых условиях нефти, добытой к концу разработки залежей, было подсчитано примерное отношение емкости трещин к емкости всего коллектора (трещинной пористости). Эта величина у рассмотренных в работе [101] пород не превышает 1,8%.

Описание трещиноватых коллекторов нефти и газа можно найти в многочисленных литературных источниках. Характерным примером трещиноватых нефтяных коллекторов являются, как указывают Гибсон [126] и Бейкер [17], некоторые известняковые пласты среднего Востока. Бейкер [17] считает, что трещинная пористость составляет около 1%. Трещиноватые коллекторы СССР описаны, например, в работе Е. М. Смехова, Л. П. Гмид, М. Г. Ромашовой и Е. С. Ромма [94], где также отмечается, что известны случаи, когда, например, из пласта, сложенного трещиноватым известняком мощностью 3 м, получали дебиты нефти свыше $6000 m^3/сутки$; в то же время встречаются скважины, вскрывшие этот же пласт, с нулевым дебитом. Данные о трещиноватости пластов мелового возраста в районах Северного Кавказа приведены в работе В. Н. Майдебора [70].

Открытые трещины имеются не только в известняках и мергелях, но и в пористых песчаниках.

В дальнейшем будем различать чисто трещиноватые и трещиновато-пористые породы.

Важными характеристиками трещиноватых пластов являются густота [53] и средняя ширина трещин.

Густота трещин Γ определяется как отношение полной длины $\sum l_i$ всех трещин, имеющих в некотором осредненном сечении трещиноватого пласта, к удвоенной площади сечения ΔS , т. е. $\Gamma = \frac{\sum l_i}{2\Delta S}$. Если сетка трещин квадратная, то согласно рис. 77

$\Gamma = \frac{1}{l}$. Обобщая это соотношение, мож-

но полагать, что $\Gamma = \frac{1}{l_*}$ (l_* — осредненный размер блока породы).

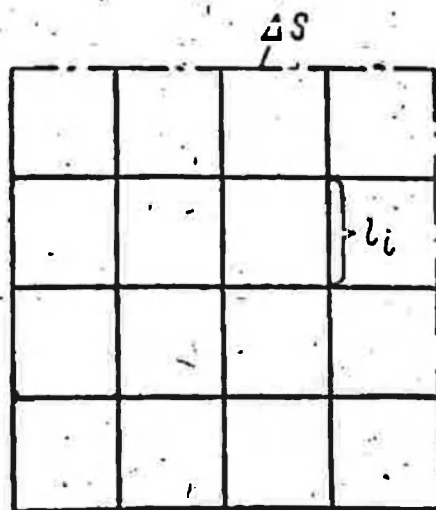


Рис. 77. Квадратная сетка трещин.

Среднюю физическую ширину трещин $w_{\text{ср}}$ можно определить как $w_{\text{ср}} = \frac{\sum w_i}{N}$ (w_i — ширина i -той трещины, N — число трещин в сечении ΔS). Отметим, что средняя физическая ширина трещин, конечно, не равна средней гидравлической.

Имеющиеся в литературе данные о густоте трещин получены главным образом на основании анализа кернов и изучения обнажений трещиноватых пород на поверхности, в шурфах, шахтах, карьерах, толщелях. Изучение трещиноватости в обнажениях пород позволяет получить лишь общее представление о трещинах в горных породах. Даже на основе керна материала трудно судить о фактической густоте тех трещин, которые являются основными проводящими каналами в трещиноватых коллекторах, залегающих на значительной глубине. Глубинное фотографирование, по-видимому, дает несколько более достоверное представление о фактической трещиноватости глубоко залегающих пород по сравнению с изучением кернов. Литературные данные о ширине естественных трещин также получены в основном в результате изучения кернов и обнажений. Е. С. Ромм [88] на основе этих данных и гидродинамических соображений относительно проводимости трещин приходит к выводу, что ширина естественных трещин обычно имеет в среднем порядок 100 микрон.

В настоящее время не существует обладающих приемлемой точностью методов определения размеров трещин в реальных глубоко залегающих пластах. Тем не менее такие осредненные характеристики трещиноватых пластов, как проницаемость и пьезопроводность, могут быть определены при помощи гидродинамических исследований пластов.

Важные свойства трещиноватых пластов обнаруживаются при изучении деформации трещиноватых пород. Примем в качестве модели трещиноватого пласта среду с сильно развитой, равномерно распределенной по пласту трещиноватостью [13, 14]. При использовании такой модели трещиноватый пласт считается однородным и изотропным на участках, существенно превышающих размер отдельных трещин, т. е. пласт рассматривается как сплошная среда, обладающая определенными свойствами. Схема такой трещиноватой среды показана на рис. 78. Блоки породы могут быть пористыми и проницаемыми или практически непористыми и непроницаемыми.

В общем случае среду с сильно развитой трещиноватостью можно представить в виде двух пористых сред с порами разных масштабов [13]: среда 1 может быть уподоблена некоторой пористой среде, где роль поровых каналов играют трещины, а роль зерен — блоки породы; среда 2 является обычной пористой средой. Используя при изучении движения жидкости в таких трещиноватых породах методы механики сплошных сред, необходимо считать, что каждый физически бесконечно малый объем охватывает достаточно большое число блоков. Можно по-

лагать, что в каждой точке пространства в общем случае существуют два давления и две скорости фильтрации жидкости: давление p_1 и скорость v_1 жидкости в среде 1 и давление p_2 и скорость v_2 жидкости в среде 2. При этом p_1 представляет собой среднее давление жидкости в трещинах в окрестности данной точки, а p_2 — среднее давление в блоках в окрестности данной точки. Величина v_2 представляет собой вектор скорости фильтрации в блоках породы.

Будем считать, что движение жидкости в средах 1 и 2 является безынерционным. Тогда для среды 2 справедлив закон Дарси

$$v_2 = - \frac{k_2}{\mu} \text{grad } p_2. \quad (6.1)$$

Для среды 1 в качестве закона движения примем известную [54, 68] формулу Буссинеска, которую согласно рис. 78 для расхода жидкости ΔQ , проходящего через систему трещин между двумя сечениями трещиноватого пласта площадью ΔS , расположенными друг от друга на расстоянии Δn перпендикулярно направлению n , можно представить в виде [46]:

$$\Delta Q = - \frac{1}{12\mu} \sum_{\Delta S} \omega_i^3 l_i \lambda_i \cos \alpha_i \frac{\Delta p_1}{\Delta n}, \quad \Delta n \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

где μ — вязкость жидкости; ω_i — ширина, а l_i — длина отдельной трещины в сечении ΔS ; $\lambda_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ в зависимости от проточности [81]; α_i — угол между плоскостью i -той трещины и направлением n (поверхности трещин принимаются параллельными на малой длине Δn).

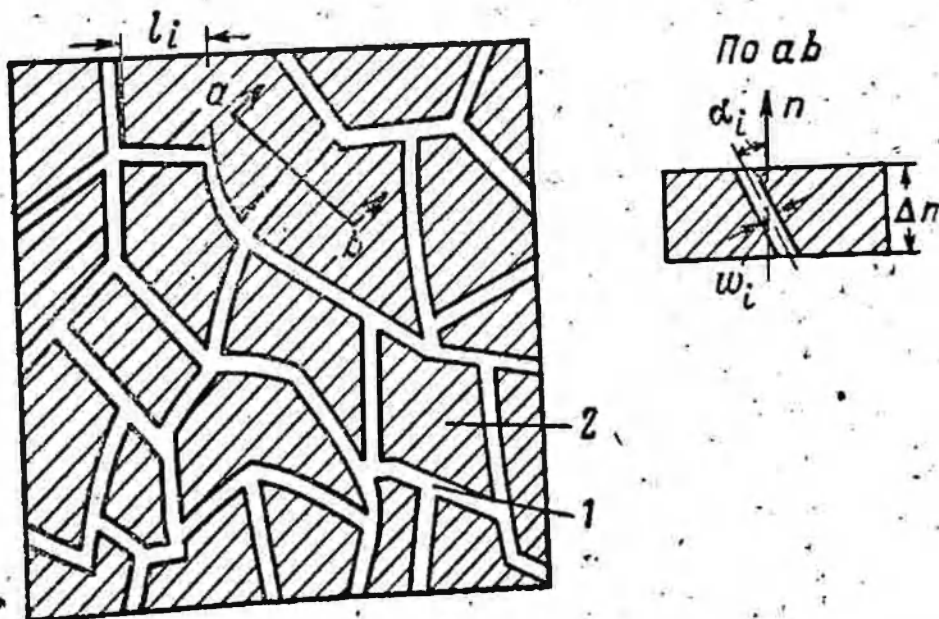


Рис. 78. Сечение трещиноватого пласта.
1 — трещины, 2 — блоки.

Произведя осреднение ширины трещины в пределах ΔS , получим

$$\sum_{\Delta S} w_i^3 l_i \cos \alpha_i \lambda_i \approx w_*^3 \sum_{\Delta S} l_i \cos \alpha_i \lambda_i, \quad (6.3)$$

где w_* — средняя (гидравлическая) ширина трещин.
Обозначая

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{\Delta S} l_i \cos \alpha_i \lambda_i}{\Delta S}, \quad (6.4)$$

$\Delta S \rightarrow 0$

и считая ΔS достаточно большой величиной по сравнению с размерами блоков породы и в то же время малой по сравнению с рассматриваемыми размерами пласта в целом, получаем, приравнявая ΔS нулю, следующее выражение для скорости фильтрации в среде 1:

$$v_1 = - \frac{w_*^3 \sigma_0}{12\mu} \text{grad } p_1 \quad (6.5)$$

или, полагая

$$w_* = w_{*0} f(p_1, p_2),$$

имеем

$$v_1 = - \frac{w_{*0}^3 \sigma_0}{12\mu} f^3(p_1, p_2) \text{grad } p_1, \quad (6.6)$$

где w_{*0} — начальная средняя ширина трещин в сечении ΔS .

Так как давления в средах 1 и 2 различны, то между ними будет происходить обмен жидкостью. Процесс обмена жидкостью между системами трещин и блоков происходит при достаточно плавном изменении давления, за исключением начального момента времени, поэтому можно считать этот процесс квазистационарным, т. е. не зависящим явно от времени.

В работе [13] дано следующее выражение для объема V жидкости, вытекающей из блоков в трещины (или наоборот) за единицу времени на единицу объема породы:

$$V = \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (6.7)$$

где α_0 — некоторый безразмерный параметр трещиноватой породы [13], характеризующий обмен жидкостью между системой блоков и системой трещин.

Для массы q_0 жидкости, вытекающей из пор в трещины за единицу времени на единицу объема породы, получаем [13]

$$q_0 = \frac{\alpha_0 \rho_{ж}}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (6.8)$$

где $\rho_{ж}$ — плотность жидкости.

Заметим, что выражение для перетока жидкости из одной системы в другую в форме (6.8) применялось Гуднайтом, Клыко-жидкости в породах с тупиковыми порами. Подобные выражения использовались также в теории теплопроводности [89].

Сжимаемостью материала трещиновато-пористой среды будем пренебрегать. Тогда закон сохранения массы жидкости, находящейся в трещинах, можно записать для элементарного объема среды в виде:

$$\frac{\partial m_1 \rho_{ж}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{ж} v_1 - q_0 = 0. \quad (6.9)$$

Уравнение сохранения массы жидкости в порах имеет вид:

$$\frac{\partial m_2 \rho_{ж}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{ж} v_2 + q_0 = 0. \quad (6.10)$$

Прежде чем перейти к последней части вывода уравнений движения однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах, рассмотрим вопрос о деформации трещиноватого пласта при фильтрации в нем жидкости. Пусть, например, давление p_1 в окрестности некоторой точки трещиноватого пласта понизилось и стало меньше p_2 . Тогда каждый блок породы вблизи контакта кровли с пластом (рис. 79) будет поддерживаться со стороны пласта меньшим давлением и равновесие, существовавшее на контакте кровли с пластом, нарушится. Приблизительно можно полагать, что $\sigma_1 + p_1 = \text{const}$. При уменьшении p_1 блоки будут сильнее прижиматься друг к другу, а контакты β (см. рис. 79) будут вдавливаться в блоки и пористость m_1 уменьшится. Очевидно, что давление жидкости p_2 в блоках не влияет на величину $\sigma_1 + p_1 = \text{const}$. Давление p_2 как бы подпирает кровлю пласта (см. например, блок А на рис. 79). Однако оно действует и на нижний край блока, в результате чего действие давления p_2 на кровлю сводится к нулю. С другой стороны, поскольку $p_1 < p_2$, будет происходить фильтрация жидкости из блоков в трещины и на блоки будут действовать градиенты давления фильтрующейся жидкости. Как показано в § 4 этой главы, дополнительное среднее нормальное напряжение, возникающее в результате действия на пористую среду градиентов давления фильтрующейся жидкости, равно $\sigma \approx \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} (p_2 - p_1)$ (ν — коэффициент Пуассона). Таким образом, при возрастании величины $p_2 - p_1$ пористость m_1 уменьшается.

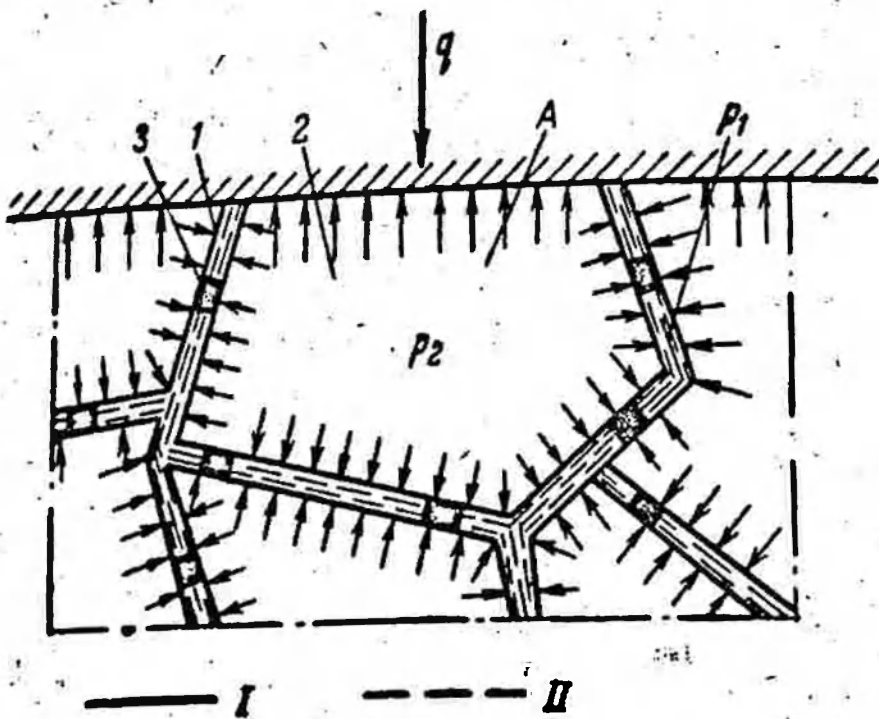


Рис. 79. Схема деформации трещиноватого пласта.

1 — трещины, 2 — блоки, 3 — контакты.
I — расположение блоков до деформации, II — расположение блоков после деформации.

По этой же причине от значения $p_2 - p_1$ зависит и пористость блоков m_2 , только она с увеличением $p_2 - p_1$ увеличивается, потому что блоки «раздуваются». В свою очередь пористость m_2 зависит от p_1 поскольку, например, при уменьшении p_1 величина σ_1 увеличивается и блоки сжимаются. Окончательно можно написать следующие выражения для m_1 , m_2 и $f(p_1, p_2)$:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_1(p_1, p_1 - p_2); & m_2 &= m_2(p_1, p_2 - p_1), \\ f &= f(p_1, p_1 - p_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Из выражений (6.1), (6.6), (6.9), (6.10) и (6.11) при известных допущениях и пренебрежении членом $m_1 \beta_{ж} \frac{\partial p_1}{\partial t}$ ввиду малости m_1 получаем следующую систему уравнений, описывающих движение однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых пластах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{\mu} \operatorname{div} f^3(p_1, p_1 - p_2) \operatorname{grad} p_1 &= \\ &= (\beta_{c1} + \beta_{c1}^*) \frac{\partial p_1}{\partial t} - \beta_{c1}^* \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1); \\ \frac{k_2}{\mu} \nabla^2 p_2 &= \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} + \beta_{c2}^* \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1); \\ k_1 &= \frac{\sigma_0 w_0^3}{12}; & \beta_{c1} &= \frac{\partial m_1}{\partial p_1}; & \beta_{c1}^* &= \frac{\partial m}{\partial (p_1 - p_2)}; \\ \beta_2 &= \frac{\partial m_2}{\partial (p_2 - p_1)} + m_2 \beta_{ж}; & \beta_{c2}^* &= \frac{\partial m_2}{\partial p_1} - \frac{\partial m_2}{\partial (p_2 - p_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

где $\beta_{ж}$ — сжимаемость жидкости.

При рассмотрении неустановившихся переходных процессов в работах [13, 14] предполагалось, что движением жидкости по по-

рам через границы элемента трещиновато-пористой среды можно пренебречь. Другими словами, считалось, что жидкость поступает в трещины, находящиеся в данном элементе трещиноватого пласта, в основном за счет притока по трещинам из других участков пласта и притока из блоков.

Пренебрегая перетоком жидкости по блокам, исключая p_2 из системы уравнений (6.12) и осредняя функцию $f(\bar{p}_1, p_1 - p_2)$, приходим к одному уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{k_1}{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p_1 + \frac{k_1}{\mu \beta_2} \nabla^2 p_1 = \\ & = \frac{\mu}{\alpha_0} \left(\beta_{c1} + \beta_{c1}^* + \beta_{c1}^* \frac{\beta_{c2}^*}{\beta_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\beta_{c1} + \beta_{c2}^* + \beta_2}{\beta_2} \right) \frac{\partial p_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.13)$$

или, пренебрегая инерционным членом и обозначая $\theta = \frac{\beta_{c1} + \beta_{c2}^* + \beta_2}{\beta_2}$, получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t_1} - \eta \frac{\partial}{\partial t_1} \nabla^2 p_1 = x \nabla^2 p_1, \quad (6.14)$$

где

$$x = \frac{k_1}{\mu \beta_2}; \quad \eta = \frac{k_1}{\alpha_0 \theta}; \quad t_1 = \frac{t}{\theta}.$$

Сжимаемость β_{c1} может значительно отличаться от сжимаемости β_{c2}^* и β_2 . В самом деле, при малых площадках контактов блоков друг с другом или, что то же самое, при малых ширинах трещин по сравнению с их длинами увеличение напряжения в блоках может приводить к значительному вдавливанию контактов в блоки и уменьшению ширины трещин. При уменьшении напряжения будет наблюдаться обратная картина, т. е. расширение трещин. Ниже поясним этот эффект несколько более подробно. Однако прежде всего сделаем следующие предположения. Во-первых; будем считать, что пористость m_1 изменяется в зависимости от давления жидкости линейно. Это предположение справедливо, по-видимому, при сравнительно малых перепадах давления. В таком случае имеем

$$\beta_{c1} = \frac{\partial m_1}{\partial p_1} = \frac{d\Delta v_1}{\Delta V dp_1} = \frac{\Delta v_{10}}{\Delta v_{10}} \frac{d\Delta v_1}{\Delta V dp_1} = m_1 \frac{d\Delta v_1}{\Delta v_{10} dp_1}, \quad (6.15)$$

где Δv_1 — объем трещин, приходящийся на элементарный объем породы ΔV ; v_{10} — начальный объем трещин, соответствующий $p_1 = p_{10}$. Во-вторых, примем, что при изменении давления жидкости изменяются в основном ширины трещин w_1 , а не их длины l_1 , т. е. что площадь поверхности контактов блоков изменяется незна-

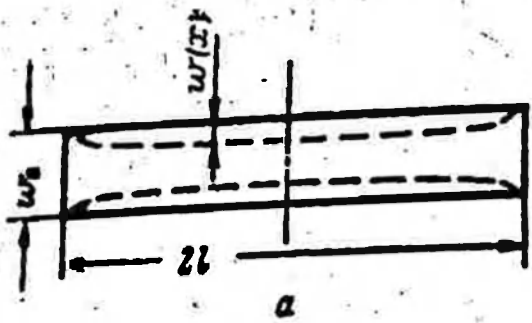


Рис. 80. Схемы деформации трещины и круглой полости.

чительно по сравнению с ширинами трещин. При этом предположении получаем

$$\frac{d\Delta v_1}{\Delta v_{1_0} dp_1} \approx \frac{dw_*}{w_{*0} dp_1} \quad (6.16)$$

Если обозначить сжимаемость в системе трещин, отнесенную к объему трещин, в виде $\beta_* = \frac{d\Delta v_1}{\Delta v_{1_0} dp_1}$, то, очевидно, $\beta_* = \frac{\beta_{c1}}{m_1}$. Отметим, что такие же предположения относительно деформации трещиноватых пород высказывались Ф. И. Котяховым.

Характерной особенностью трещиноватых пород является значительное влияние структуры трещиноватых пород на сжимаемость трещин. Чтобы лучше понять эту особенность, рассмотрим следующий пример. Пусть в достаточно большом блоке породы существует трещина, имеющая длину $2l$ и начальную ширину w_0 (рис. 80, а). При изменении давления жидкости на величину Δp_1 плоскости трещины вследствие деформации пород принимают положение, показанное на рис. 80, а пунктиром. Для оценки величины смещений поверхностей трещины используем решение плоской задачи теории упругости для щели, расположенной в безграничной упругой плоскости, данное Н. И. Мусхелишвили [76] и изложенное в § 3 главы II. Эти смещения выражаются формулой

$$w(x) = \frac{2\Delta p_1 l (1 - \nu^2)}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \quad (6.17)$$

Изменение объема трещины $\delta\Delta v_1$ при снижении давления на величину Δp_1 определяется как

$$\delta\Delta v_1 = \int_{-l}^l \frac{4\Delta p_1 l (1 - \nu^2)}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} dx = \frac{2\pi\Delta p_1 l^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (6.18)$$

Тогда

$$\beta_* = \frac{\delta\Delta v_1}{\Delta v_1 \Delta p_1} = \frac{2\pi\Delta p_1 l^2 (1 - \nu^2)}{2lw_0 E \Delta p_1} = \frac{\pi (1 - \nu^2)}{E} \frac{l}{w_0} \quad (6.19)$$

Следовательно, $\beta_* \approx \frac{1}{E} \frac{l}{w_0}$. При $l = 1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$, $w_0 = 100 \text{ мик}$.

рон = 10^{-2} см $\beta_* \approx \frac{1}{E} \cdot 10^4$, т. е. сжимаемость трещин будет на четыре порядка превосходить сжимаемость материала блоков. Явление высокой сжимаемости («сверхсжимаемости») трещин обусловлено структурой трещин, т. е. их малой шириной по сравнению с длиной. Его нельзя объяснить малостью трещинной пористости трещиноватого пласта в целом. Пусть, например, имеем два одинаковых блока породы, в одном из которых находится трещина (см. рис. 80, а), а в другом — круглая полость (см. рис. 80, б). Отношение объемов трещины и полости к объему блоков в обоих случаях одинаковы. Используя формулы (2.9) главы II, можно показать, что сжимаемость круглой полости

$$\beta_*^n = \frac{\delta \Delta v_1}{\Delta v_1 \Delta p_1} = \frac{2\pi \Delta p_1 r^2 (1 + \nu)}{E \pi r^2 \Delta p_1} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \approx \frac{1}{E}. \quad (6.20)$$

При значениях l , мало отличающихся от значений w_0 , сжимаемость трещин будет сравнительно мало отличаться от сжимаемости материала породы.

Трещиноватые породы с малым отношением $\frac{l}{w_0}$ можно скорее назвать кавернозными породами.

Если для трещиноватых пластов β_* больше сжимаемости материала пород $\frac{1}{E}$, то сжимаемость β_{c1} может существенно отличаться от $\frac{1}{E}$ в ту и другую сторону. Можно показать, что при малой густоте трещин (больших расстояниях между трещинами) β_{c1} будет меньше $\frac{1}{E}$. Наоборот, при малых площадках контакта блоков друг с другом β_{c1} будет больше $\frac{1}{E}$. Так, будем считать, что к поверхности II некоторого среднего блока породы приложено напряжение σ_1 , определяемое из соотношения $\sigma_1 + p_1 = \text{const}$. Очевидно, имеем

$$\sigma^c \delta = \sigma_1 \Pi, \quad (6.21)$$

где σ^c — истинное напряжение в контактах блока с другими блоками; δ — суммарная площадь контактов блока с другими блоками.

При малых $\frac{\delta}{\Pi}$ можно пренебрегать взаимным влиянием перемещений различных контактов. Тогда для перемещения w контактов соприкасающихся тел имеем выражение

$$w \approx \beta_{c1} \sigma^c \sqrt{\delta},$$

где β_{c1} сжимаемость материала блоков.

Величины удвоенных перемещений контактов примерно равны величинам изменения ширины трещин, так что

$$w_{*0} - w_* \approx \beta_{c_1} \sigma^c \sqrt{\delta} = \beta_{c_1} \sigma_1 \frac{\Pi}{\sqrt{\delta}} \quad (6.22)$$

или

$$\frac{dw_*}{w_{*0} dp_1} \approx \frac{\beta_{c_1} \Pi}{w_{*0} \sqrt{\delta}} \quad (6.23)$$

Из (6.23) видно, что при малых $\frac{\delta}{\Pi}$ сжимаемость в системе трещин может быть высока. Пусть, например $\Pi = 10^5 \text{ см}^2$ (примерно блок в 1 м^3), $\delta = 10^4 \text{ см}^2$, $w_{*0} = 100 \text{ микрон} = 10^{-2} \text{ см}$, $m_1 = 10^{-3}$. Тогда $\frac{dw_*}{w_{*0} dp_1} \approx 10^5 \beta_{c_1}$ и, следовательно, $\beta_{c_1} = m_1 \frac{dw_*}{w_{*0} dp_1} = 10^2 \beta_{c_1}$.

При $\beta_{c_1} \gg \beta_{c_2}$, $\beta_{c_1}^*$, β_2 будет малой также и величина $\frac{\sigma_0}{\mu (p_2 - p_1)}$ по сравнению с остальными членами первого из уравнений (6.12). Тогда

$$\frac{k_1}{\mu} \nabla^2 p_1 = \beta_{c_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (6.24)$$

Из уравнения (6.24) следует, что при высокой сжимаемости в системе трещин распространение волны давления в трещиноватых породах с проницаемыми блоками будет происходить так, как будто блоки совершенно непроницаемы.

Интересно, что сжимаемость трещинного пространства может достичь величины порядка сжимаемости газа.

Пусть, например, в трещинах заключен некоторый объем V_0 газа при начальном давлении $p_0 = 100 \text{ кг/см}^2$. Тогда согласно закону Бойля-Мариотта $pV = p_0 V_0$, откуда $\beta_T = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dp} = \frac{p_0}{p^2}$. Если начальное давление газа снизилось до $p = 95 \text{ кг/см}^2$, то $\beta_T = \frac{100}{95^2} \approx 10^{-2} \text{ 1/кг/см}^2$. Пусть $\beta_{c_2} = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{кг}$. Тогда $\beta_{c_1} = 10^2 \beta_{c_2} = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{кг}$.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОДАХ

Установившееся движение. Рассмотрим вначале установившееся движение жидкости в деформируемых трещиноватых породах. Очевидно, в данном случае во всей области, где происходит движение жидкости, будем иметь одно поле давления $p = p_1 = p_2$. Рассмотрим вначале такие трещиноватые породы, для кото-

рых $k_1 \gg k_2$, т. е. движение жидкости описывается одним уравнением, получающимся из первого уравнения (6.12):

$$\operatorname{div} f^3(p) \operatorname{grad} p = 0. \quad (7.1)$$

Исследуем установившийся приток жидкости к скважине радиусом r_c , расположенной в круговом пласте мощностью h с радиусом контура питания R_k . Очевидно, для дебита скважины Q можно написать следующее выражение:

$$Q = 2\pi \frac{k_1}{\mu} r h f^3(p) \frac{\partial p}{\partial r}; \quad k_1 = \frac{\omega_*^3 \sigma_0}{12}, \quad (7.2)$$

или, разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln r = \int f^3(p) dp + \text{const}. \quad (7.3)$$

Из (6.15) и (6.16) имеем

$$\beta_{c1} \approx m_1 \frac{dw_*}{w_{*0} dp}. \quad (7.4)$$

Интегрируя (7.4), получаем

$$w_* = w_{*0} [1 - \beta_* (p_k - p)]; \quad \beta_* = \frac{\beta_{c1}}{m_1}, \quad (7.5)$$

где p_k — пластовое давление.

Отсюда

$$f(p) = a + bp; \quad a = 1 - \beta_* p_k; \quad b = \beta_*. \quad (7.6)$$

Подставляя (7.6) в (7.3), вычисляя интеграл и выполняя условия $p = p_k$ при $r = R_k$, $p = p_c$ при $r = r_c$, получаем

$$\frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln \frac{R_k}{r_c} = \frac{(a + bp_k)^4 - (a + bp_c)^4}{4b}. \quad (7.7)$$

В случае, когда блоки породы являются пористыми и проницаемыми и, следовательно, часть жидкости из общего потока, проходящего через какое-либо сечение трещиноватого пласта, фильтруется через блоки породы, имеем следующее выражение для дебита скважины:

$$Q = 2\pi h \frac{k_1}{\mu} r f^3(p) \frac{\partial p}{\partial r} + 2\pi h \frac{k_2}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7.8)$$

или

$$[1 + \varepsilon f^3(p)] dp = \frac{Q\mu}{2\pi k_2 h} \frac{dr}{r}; \quad \varepsilon = \frac{k_1}{k_2}. \quad (7.9)$$

Интегрируя (7.9) и выполняя те же условия, что и выше, получаем окончательно

$$\frac{Q\mu}{2\pi k_2 h} \ln \frac{R_K}{r_c} = \frac{a^4 \varepsilon}{4b} \left[\left(1 + \frac{b}{a} p_K \right)^4 - \left(1 + \frac{b}{a} p_c \right)^4 \right] + (p_K - p_c) \quad (7.10)$$

или

$$Q = \frac{\pi a^4 k_1 h}{2b \mu \ln \frac{R_K}{r_c}} \left[\left(1 + \frac{b}{a} p_K \right)^4 - \left(1 + \frac{b}{a} p_c \right)^4 \right] + \frac{2\pi k_2 h (p_K - p_c)}{\mu \ln \frac{R_K}{r_c}}, \quad (7.11)$$

Как видно из предыдущего, движение жидкости в трещиноватых породах приводит к деформации трещин, которая в некотором диапазоне изменения давления жидкости вызывает в основном лишь изменение ширины трещин. При значительном повышении давления в скважине, вскрывшей пласт с открытыми трещинами, порода начнет разрываться и некоторые трещины (по-видимому, немногие из-за взаимодействия трещин), расположенные вблизи скважины, начнут соединяться с более удаленными трещинами. Таким образом произойдет гидравлический разрыв пласта.

Выше рассматривалось движение жидкости в породах с первоначально открытыми трещинами. Однако существуют пласты, содержащие разветвленную сеть нарушений сплошности, т. е. первоначально закрытых трещин, которые при закачке жидкости в пласт расширяются. Это явление во многих случаях предшествует гидравлическому разрыву.

Пусть пласт рассечен системой разветвленных вертикальных трещин, проходящих через всю его толщину, от кровли до подошвы. Трещины вначале сомкнуты под действием бокового горного давления q_∞ .

Для трещины средней ширины, образованной при закачке жидкости в пласт, в этом случае можно написать выражение

$$w_* = l_* \beta_* (p - q_\infty),$$

где w_* — средняя длина трещин; β_* — сжимаемость в системе трещин. Считая $q_\infty = \text{const}$, для расхода жидкости Q имеем выражение

$$Q = - 2\pi r h \frac{\sigma_0}{12\mu} \beta_* \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Обозначим $\rho = \frac{r}{r_c}$. Тогда получим

$$\frac{6Q\mu}{\pi h \sigma_0 \beta_*^3} \int \frac{dp}{\rho} = - \int (\bar{p} - q_\infty)^3 dp + \text{const}.$$

Приняв движение жидкости в той области пласта, куда она проникла при гидравлическом разрыве, установившимся, а также вы-

числив интеграл и выполнив граничные условия $p = p_c$ при $\rho = i$ и $p = q_\infty = 0$ при $\rho = r_B$, получим следующее выражение:

$$p - q_\infty = \sqrt[4]{\frac{24Q\mu}{\pi h \sigma_0 \beta_*^3} \ln \frac{r_B}{\rho}}$$

где $\rho_B = \frac{r_B}{r_c}$ (r_B — радиус контура проникшей в пласт жидкости).

$$\text{Можно положить } \sigma_0 = \frac{\sum l_i}{\Delta S} \approx \frac{1}{l_*};$$

$$\Delta S \rightarrow 0.$$

Величину β_* определим как $\beta_* = \frac{1}{2E}$. Тогда

$$p - q_\infty = \sqrt[4]{\frac{192Q\mu E^3}{\pi h l_*^2} \ln \frac{r_B}{\rho}}$$

Давление в скважине.

$$p_c - q_\infty = \sqrt[4]{\frac{192Q\mu E^3}{\pi h l_*^2} \ln \frac{r_B}{r_c}} \quad (7.11a)$$

Трещинная пористость в рассмотренном выше случае определяется отношением объема ΔV_T , трещин, образовавшихся в некотором элементе пласта, к объему элемента пласта ΔV . Считая, что в элементе ΔV содержится N трещин, имеющих среднюю длину l_* и среднюю ширину w_* , получаем

$$m_1 = \frac{\Delta V_T}{\Delta V} \approx \frac{N w_* l_* h}{N l_*^2 h} = \frac{w_*}{l_*}$$

Тогда для элементарного объема жидкости в трещинах $dV_{ж}$ имеем выражение

$$dV_{ж} = 2\pi r h m_1(r) dr = 2\pi h \frac{w_*}{l_*} r dr = 2\pi h \times \\ \times \frac{\beta_* (p - q_\infty)}{l_*} r dr = \pi h r_c^2 \frac{p - q_\infty}{E} \rho d\rho.$$

Интегрируя, имеем

$$V_{ж} = \pi h r_c^2 \sqrt[4]{\frac{192Q\mu}{\pi h l_*^2 E}} \int_1^{\rho_B} \rho \sqrt[4]{\ln \frac{\rho_B}{\rho}} d\rho.$$

Ю. Н. Васильев [20] считает, что и при гидравлическом разрыве пласта справедлива зависимость вида (7.11a). Это, по-видимому

му, верно либо для самой начальной стадии разрыва пласта с естественными открытыми трещинами, либо для конечной стадии разрыва первоначально не нарушенного пласта, когда вертикальная трещина, ограниченная сверху и снизу кровлей и подошвой пласта, распространилась настолько далеко в пласт, что вертикальное значение приобретает гидравлическое сопротивление всей трещины, а не только ее концевой части.

Неустановившееся движение. Неустановившееся движение однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах описывается нелинейной системой уравнений (6.12). Покажем, в каких условиях эту систему можно линеаризовать. Величина сжимаемости пород, содержащих трещины, имеет порядок $10^{-5} - 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}$. Пористость $m_1 = 0,01 - 0,001$. Тогда коэффициент сжимаемости в системе трещин $\beta_* = \frac{\beta_{c1}}{m_1}$ при $m_1 = 0,01$ $\beta_* = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{кг}$.

Пусть максимальный перепад давления $p_k - p_1$ равен $30 \text{ кг}/\text{см}^2$. Тогда согласно формулам (6.12), (7.4) и (7.6) получаем

$$f(p_1, p_1 - p_2) = 1 - \beta_* (p_k - p_1) - \frac{\beta_{c1}^*}{m_1} (p_1 - p_2)$$

или, приближенно полагая

$$\frac{\beta_{c1}^*}{m_1} = \beta_*, \quad p_2 = p_k,$$

имеем

$$f(p_1, p_1 - p_2) = 1 - 2\beta_* (p_k - p_2) = 0,97^3, \quad f^3 = 0,91.$$

Следовательно, величина проводимости системы трещин изменится всего на 9%, и таким образом уравнения (6.12) можно с известным приближением линеаризовать. Производя подобные оценки, можно установить возможность линеаризации системы (6.12). Тогда из (6.12) получим

$$\frac{k_1}{\mu} \nabla^2 p_1 = (\beta_{c1} + \beta_{c1}^*) \frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{c1}^* \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1); \quad (7.12)$$

$$\frac{k_2}{\mu} \nabla^2 p_2 = \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} + \beta_{c2}^* \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (7.13)$$

где обозначения те же, что и в § 6.

Исключая p_2 из (7.12), (7.13) и делая те же допущения, что и в § 6, получаем уравнение (6.14), описывающее неустановившееся движение однородной жидкости в трещиновато-пористых породах.

Интересно отметить, что коэффициент пьезопроводности в уравнении (6.14) зависит от проницаемости системы трещин k_1

и от пористости и сжимаемости блоков породы. Коэффициент η является характеристикой, присущей трещиноватой пористой среде. Когда η стремится к нулю, что соответствует уменьшению размеров блоков и возрастанию густоты трещин, уравнение (6.14) переходит в обычное уравнение фильтрации жидкости при упругом режиме. Оценки [14] показывают, что значения параметра η для разных пород изменяются в весьма широких пределах — от нескольких см^2 до величины порядка 10^{10} см^2 .

В работе [14] решены две основные задачи движения жидкости в трещиновато-пористых пластах: о притоке жидкости из бесконечного пласта к галерее и к скважине нулевого радиуса. Дадим теперь решение задачи о движении жидкости в прямолинейном трещиновато-пористом пласте конечных размеров. Пусть в начальный момент времени движение жидкости в пласте было установившимся, так что на конце $x=l$ (рис. 81) давление жидкости равно P_0 , а на конце $x=0$ оно равно P_1 ($P_0 > P_1$).

Таким образом, движение жидкости происходит справа налево (рис. 81). В момент времени $t_1=0$ отбор жидкости с конца $x=0$ прекращается; а на конце $x=l$ при $t_1 \geq 0$ давление остается постоянным и равным P_0 . Движение жидкости в пласте удовлетворяет уравнению (6.14). Введем безразмерные координаты

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{\eta t_1}{l^2}. \quad (7.14)$$

Тогда уравнение (6.14) принимает вид:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} - \frac{\eta}{l^2} \frac{\partial^3 p_1}{\partial \tau \partial \xi^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi^2}. \quad (7.15)$$

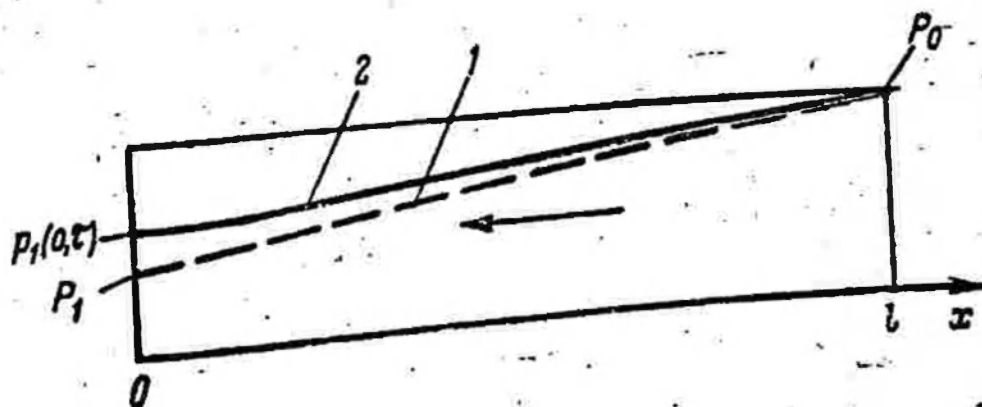
Начальное и граничные условия задачи записываются в виде:

$$p_1 = P_1 + (P_0 - P_1) \xi \quad \text{при } \tau = 0; \quad (7.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_1(\tau, 0)}{\partial \xi} &= 0 \\ p_1(\tau, 1) &= P_0 \end{aligned} \right\} \text{при } \tau > 0. \quad (7.17)$$

Рис. 81. Схема движения жидкости в прямолинейном трещиновато-пористом пласте конечной длины.

1 — распределение давления при $\tau=0$.
2 — распределение давления при $\tau>0$.



Представим решение задачи в виде:

$$p_2 = P_1 + (P_0 - P_1)\xi + u_2(\xi, \tau). \quad (7.18)$$

Тогда на основе (7.16) и (7.17) получаем

$$u_2(\xi, 0) = 0; \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial u_2(0, \tau)}{\partial \xi} = -(P_0 - P_1); \quad (7.20)$$

$$u_2(1, \tau) = 0, \quad (7.21)$$

причем $u_2(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \frac{\eta}{l^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \tau \partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2}. \quad (7.22)$$

Решение задачи (7.19) — (7.22) имеет вид:

$$u_2(\xi, \tau) = (P_0 - P_1)(1 - \xi) - (P_0 - P_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 \frac{\eta}{l^2}} \tau} \cos \lambda \xi; \quad (7.23)$$

$$\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad a_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Начальное условие (7.19) выполняется, поскольку имеем

$$1 - \xi = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \xi. \quad (7.24)$$

Согласно граничному условию (7.20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(0, \tau)}{\partial \xi} &= -(P_0 - P_1) + (P_0 - P_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \times \\ &\times e^{-\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 \frac{\eta}{l^2}} \tau} \lambda \sin \lambda \xi = -(P_0 - P_1) \end{aligned} \quad (7.25)$$

и согласно (7.21) $u_2(1, \tau) = 0$, поскольку

$$\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Полное решение задачи имеет вид:

$$p_1 = P_0 - \frac{8(P_0 - P_1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\tau}{l^2}} \times \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \xi. \quad (7.26)$$

На конце $\xi = 0$ имеем

$$p_1(0, \tau) = P_0 - (P_0 - P_1) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \frac{\tau}{l^2}}. \quad (7.27)$$

При $\eta = 0$ распределение давления p_1 совпадает с соответствующим распределением давления в обычной нетрещиноватой пористой среде. Оценим различие, которое получается при движении жидкости в трещиноватой пористой среде по сравнению со случаем $\eta = 0$. Будем при грубой оценке считать, что пористые блоки трещиноватой породы имеют форму куба со стороной a . Тогда, удельная поверхность $S_v = \frac{S_{\pi}}{V} = \frac{6}{a} (S_{\pi} - \text{полная поверхность куба, } V - \text{объем куба})$. Подставляя это соотношение в формулу (6.14) и учитывая, согласно [14], что $\alpha_0 \approx k_2 S_v^2$, имеем

$$\eta \approx \frac{k_1}{k_2 S_v^2 \theta} \approx \frac{k_1 a^2}{100 k_2}; \quad \theta = 2,8.$$

Пусть $k_1 = 100 \partial$, $k_2 = 0,01 \partial$, $a = 10 \text{ м} = 10^3 \text{ см}$. Следовательно

$$\eta = \frac{100 \cdot 10^{-8} \cdot 10^8}{100 \cdot 10^{-10}} = 10^8 \text{ см}^2. \text{ Пусть } l = 100 \text{ м} = 10^4 \text{ см}.$$

Тогда $\frac{\eta}{l^2} = \frac{10^8}{10^8} = 1$. При $k_2 = 0,001 \partial$ и тех же остальных данных $\frac{\eta}{l^2} = 10$. На рис. 82 показано изменение давления $p_1(0, \tau)$ от τ для случаев $\frac{\eta}{l^2} = 1$, $\frac{\eta}{l^2} = 5$ и $\frac{\eta}{l^2} = 10$. Если породы обладают чисто трещинной пористостью, то из уравнений (6.12), полагая $p_1 = p$ и учитывая для общности член $m_1 \beta_{ж} \frac{\partial p_1}{\partial t}$ в этих уравнениях, получаем

$$\frac{k_1}{\mu} \operatorname{div} f^3(p) \operatorname{grad} p = \beta \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \beta = \beta_{c1} + m_1 \beta_{ж}. \quad (7.28)$$

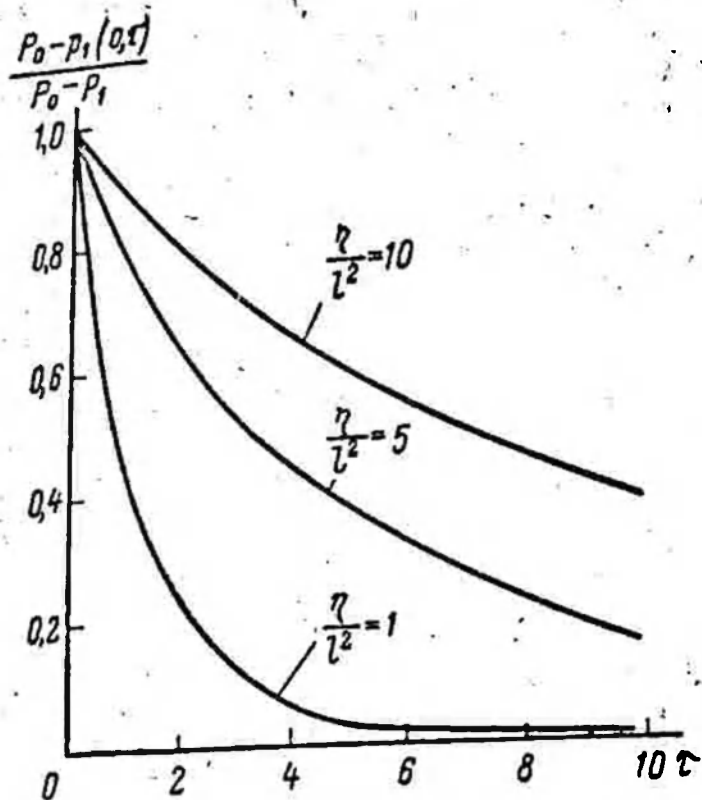


Рис. 82. Изменение давления $p_1(0, \tau)$ при различных $\frac{\eta}{l^2}$.

Введя новую переменную

$$P = p + \psi, \quad \psi = \frac{1 - \beta_* p_k}{\beta_*}, \quad (7.29)$$

преобразуем уравнение (7.28) к виду:

$$x_* \nabla^2 P^4 = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad x_* = \frac{k_1 \beta_*^3}{4\mu\beta}. \quad (7.30)$$

Нелинейное уравнение (7.30) аналогично уравнению фильтрации в обычной пористой среде газов, подчиняющихся политропическому закону. Это уравнение было получено Л. С. Лейбензоном [64]. Г. И. Баренблаттом [16] было показано, что в задачах плоского радиального потока уравнение изотермической фильтрации газа может быть с высокой степенью точности линеаризовано. Этот вывод справедлив и по отношению к уравнению (7.30). Покажем это на примере движения жидкости из неограниченного пласта к скважине пренебрежимо малого радиуса (или из скважины в пласт) с постоянным расходом Q .

Задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$x_* \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P^4}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.31)$$

при начальном и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} P(r, 0) = P_k; \quad P(\infty, t) = P_k; \\ \left(r \frac{\partial P^4}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = -\lambda P_k^4; \quad \lambda = \frac{2Q\mu}{\pi h k_1 \beta_*^3 P_k^4} \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Решение этой задачи является автомодельным, так что, вводя безразмерные переменные $\bar{r}(\bar{\xi}) = \frac{r}{P_k}$, $\bar{\xi} = \frac{r}{\sqrt{x_* P_k^3 t}}$ и учитывая (7.32), получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\bar{\xi} \frac{d\varphi}{d\bar{\xi}} &= \frac{8}{\bar{\xi}} \varphi^{3/4} \frac{d}{d\bar{\xi}} \left(\bar{\xi} \frac{d\varphi}{d\bar{\xi}} \right); \quad \varphi = \bar{r}^4; \\ \left(\bar{\xi} \frac{d\varphi}{d\bar{\xi}} \right)_{\bar{\xi} \rightarrow 0} &= -\lambda; \quad \varphi(\infty, \lambda) = 1. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Решение задачи (7.33) было получено автором совместно с П. П. Золотаревым численным путем на электронной вычислительной машине. Программирование задачи осуществлялось Г. С. Пашенковой. Это решение сравнивалось с решением соответствующей задачи для линеаризованного уравнения, имеющего вид:

$$-\xi \frac{d\varphi_1}{d\xi} = \frac{\varphi}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\varphi_1}{d\xi} \right) \quad (7.34)$$

Сравнение показало очень хорошее совпадение значений φ и φ_1 для величин λ , не превышающих 0,1. Значения φ и φ_1 для $\lambda=0,1$ и $\lambda=0,01$ даны в табл. 12.

Таблица 12

ξ	$\lambda=0,01$		$\lambda=0,1$	
	φ	φ_1	φ	φ_1
0,1	1,0340	1,0342	1,3425	1,3421
0,2	1,0271	1,0271	1,2732	1,2708
0,3	1,0231	1,0231	1,2328	1,2307
0,4	1,0202	1,0202	1,2042	1,2019
0,6	1,0162	1,0162	1,1642	1,1620
0,8	1,0134	1,0134	1,1362	1,1341
1,0	1,0113	1,0113	1,1148	1,1128
2,0	1,0052	1,0052	1,0535	1,0522
3,0	1,0024	1,0024	1,0253	1,0245

Оценим величину λ для реальных условий: Пусть $Q=1$ л/сек = 10^3 см³/сек, $\mu=10^{-8}$ кг·сек/см², $k=0,1$ д = 10^{-9} см², $P_k=100$ кг/см², $\beta_*=10^{-2}$ см²/кг, $h=10^3$ см. Тогда $\lambda \approx 0,06$.

При значениях λ , не превышающих 0,1, уравнение [7.31] может быть линеаризовано. Это позволяет применять при расчетах радиального движения жидкости в трещиноватых пластах известные методы, пригодные для линейных уравнений.

IV.

§ 1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДЕФОРМАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Методы теории подобия и моделирование в настоящее время довольно часто используются при решении многих вопросов геологии, геофизики, механики грунтов, строительной механики, горного дела и т. д.

Прежде чем приступить к созданию модели, воспроизводящей некоторый процесс в горных породах, необходимо отчетливо представить себе, какие свойства пород проявляются в данном процессе. Это положение, относящееся к моделированию явлений в любых телах, оказывается особенно важным при моделировании явлений, происходящих в горных породах, поскольку свойства пород, которые необходимо учитывать при создании моделей, могут быть весьма разнообразными в зависимости от размера области, в которой протекает данный процесс, длительности и интенсивности процесса, а также тех последствий, к которым он приводит. Например, при распространении волн напряжений сравнительно небольшой интенсивности можно считать породы упругими; в области же значительных напряжений в горных породах может появиться пластическая зона, и необходимо учитывать свойства пород, характеризующие их пластичность. Многие горные породы обычно считаются «твердыми», проявляющими свойства упругости или пластичности. Однако в процессах, протекающих за геологические периоды времени (порядка 10^6 лет), эти же породы ведут себя, как реологические среды, обладающие вязкостью. Так, Шейдеггер [141] отмечает, что при протекании процессов малой длительности (до 4 часов) земная кора на глубине до 2900 км от дневной поверхности проявляет себя, как упругое тело с модулем Юнга $E = 4 + 5 \cdot 10^5$ кг/см² и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$. Это утверждение

основывается на наблюдениях за прохождением сейсмических волн при землетрясениях. В процессах средней длительности (от 4 до 15 000 лет по Шейдеггеру) горные породы ведут себя как среда Кельвина, обладающая вязкостью порядка $3 \cdot 10^{17}$ нз. Указанная величина вязкости определена по данным о движениях земной коры при годовых перемещениях масс воздуха, а также о деформациях пород после землетрясений (упругом последствии). При медленных же движениях, имеющих продолжительность порядка миллиона лет, горные породы ведут себя, как среды Бингама, имеющие вязкость 10^{22} нз и напряжение сдвига $4 \cdot 10^3$ кг/см². Указанное значение вязкости определено на основе данных по поднятию Фенно-Скандинавского щита после ледникового периода, а напряжение сдвига — по данным об устойчивости гор. Примерно такое же значение вязкости горных пород в процессах большой длительности указано ранее Хаббертом [132] и принимается М. В. Гзовским [26, 27, 28].

По данным К. В. Руппенейта и Ю. М. Либермана [92], такие породы, как глины, ведут себя, как максвелловские среды вязкостью порядка 10^{16} нз, а песчаники и песчано-глинистые сланцы — как среды, деформация которых не увеличивается безгранично с течением времени t , а стремится к некоторой конечной величине при $t \rightarrow \infty$. Это, по-видимому, соответствует действительности, поскольку в природе известны пласты с открытыми трещинами и пластовым давлением ниже вертикального горного давления; трещины в них не «затекли» за геологические периоды времени.

Причины, приводящие к возникновению деформации горных пород, т. е. силы, могут быть двоякого характера — внешние, прилагаемые извне к поверхности пород, и массовые или объемные, действующие на каждый элемент во всем теле или в некоторой его области. Можно привести многочисленные примеры внешних сил (силы, возникающие в результате действия механических инструментов на породы; тектонические силы и т. д.). Примерами массовых сил являются сила тяжести, фильтрационные, магнитные силы и т. д. В строительном и горном деле очень важным фактором является сила тяжести, например при исследовании прочности зданий под действием собственного веса, горных выработок от действия горного давления и т. д. Распределение напряжения σ в горных породах в данном случае зависит от величины вертикального горного давления $q = \gamma H$, бокового горного давления $q_{\infty} = aq$, линейного размера данного объекта L (например, высоты горной выработки по вертикали), времени t и механических свойств пород.

Всякий процесс характеризуется соответствующими параметрами. Так, например, хорошо известный в технике процесс ламинарного движения вязкой жидкости в трубе круглого сечения (течение Пуазейля) характеризуется расходом и вязкостью жидкости, диаметром трубы и ее длиной, изменением давления по длине трубы и распределением скоростей жидкости в трубе. В лю-

бом случае часть параметров являются задаваемыми исследователем, а другая часть — производными, которые получаются в опыте и выражаются через задаваемые параметры. В указанном выше примере ламинарного течения вязкой жидкости в трубе расход и вязкость жидкости, а также диаметр и длину трубы можно считать задаваемыми параметрами, а давление жидкости — производным параметром. Конечно, такое деление параметров в известной степени условно и зависит от специфики процесса. Могут быть случаи, когда перепад давления является задаваемым параметром, тогда расход жидкости будет производным параметром. Задаваемые параметры в дальнейшем будут называться определяющими.

Первой задачей, возникающей при изучении какого-либо неисследованного процесса, является выделение определяющих параметров. Следует отметить, что эта задача может оказаться самой трудной, — для того чтобы выделить определяющие параметры, необходимо не только понять физическую сущность происходящего процесса, но и использовать или принять соответствующие предположения, схематизирующие процесс и позволяющие, пренебрегая несущественными факторами, выделить наиболее существенные. Например, зависимость деформации твердых тел от напряжения вообще может не быть линейной, однако для практических целей в ряде случаев можно с высокой степенью точности считать ее линейной. Это является предположением, схематизирующим процесс, но позволяющим выделить один существенный параметр — модуль Юнга. То же самое можно сказать и в отношении, например, закона фильтрации вязкой жидкости в пористой среде — закона Дарси. В других случаях необходимо более полно характеризовать некоторое явление и, следовательно, вводить в рассмотрение дополнительные определяющие параметры.

Форма функциональной зависимости каждого изучаемого параметра процесса от определяющих параметров дается П-теоремой подобия [93], заключающейся в следующем. Допустим, что некоторый изучаемый параметр a , характеризующий процесс, является функцией n определяющих параметров, т. е.

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (1.1)$$

Входящие в (1.1) k параметров нельзя выразить друг через друга. О таких параметрах говорят, что они имеют независимую размерность. Например, длина l , скорость v и давление p имеют независимую размерность. В самом деле,

$$[l] = L, [v] = LT^{-1}, [p] = MT^{-2}L^{-1}. \quad (1.2)$$

Квадратные скобки в выражениях (1.2) являются символом размерности заключенной в них величины, L, T, M — соответственно обозначения размерностей длины, времени и массы. Из (1.2)

видно, что ни один из рассмотренных параметров нельзя выразить через любую комбинацию других параметров. Длина, скорость и ускорение g имеют, наоборот, зависимую размерность. Так, $g = v^2 l^{-1}$. Взаимную зависимость или независимость параметров можно обнаружить при помощи следующего математического приема. Допустим, имеются те же параметры l , v и p . Тогда можно написать

$$[l] = L = [v]^x [p]^y = L^x T^{-x} M^y T^{-2y} L^{-y} = L^{x-y} T^{-x-2y} M^y.$$

Приравнивая показатели степени у соответствующих величин в левой и правой частях приведенного выше выражения, получаем систему уравнений $x-y=1$, $y=0$, $x+2y=0$. Эта система, очевидно, является несовместной. Следовательно, размерность l нельзя выразить ни через какую комбинацию v и p . В то же время для l , v и g имеем

$$[l] = L = [v]^x [g]^y = L^{x+y} T^{-x-2y}.$$

Получаем систему уравнений $x+y=1$, $x+2y=0$; откуда $x=2$, $y=-1$ и, следовательно, $l = \frac{v^2}{g}$.

Итак, требуется найти связь между параметром a и параметрами a_i (1.1) в безразмерной форме. Допустим, что k параметров с независимой размерностью имеют следующую размерность:

$$[a_1] = A_1, [a_2] = A_2, \dots, [a_k] = A_k. \quad (1.3)$$

Тогда размерность остальных величин в выражении (1.1) имеет вид:

$$[a] = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}.$$

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k}; \quad (1.4)$$

$$[a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k},$$

где m_i , p_i , q_i ($1 \leq i \leq k$) — показатели степени при соответствующих размерностях.

П-теорема подобия утверждает, что зависимость (1.1) может быть представлена с учетом (1.3) и (1.4) в виде:

$$\Pi = \Pi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}); \quad (1.5)$$

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}; \quad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}; \quad \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}$$

В приведенном выше примере течения Пуазейля градиент дав-

ления $\frac{\Delta p}{l}$ зависит от диаметра трубы a , вязкости жидкости μ и скорости жидкости v , т. е.

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\Delta p}{l}(d, \mu, v).$$

Имеем $[a] = L$, $[\mu] = pT$, $[v] = LT^{-1}$. Параметры a , μ и v имеют независимую размерность. Следовательно, $\Pi_1 = \Pi_2 = \dots = \Pi_{n-k} = 0$ и согласно (1.5) $\Pi = \frac{\Delta p d^2}{l \mu v} = \text{const.}$

Π -теорема подобия устанавливает общую форму функциональной связи между исследуемым параметром и определяющими параметрами, независимо от того, имеются ли соотношения, описывающие эту связь математически (дифференциальные уравнения, уравнения состояния, граничные и начальные условия).

Из Π -теоремы вытекает основное правило моделирования: для того чтобы воспроизвести какой-либо процесс в модели, необходимо обеспечить одинаковость в натуре и модели безразмерных параметров $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$. Эти параметры называются параметрами подобия. В тех случаях, когда рассматриваемый процесс может быть описан математически, параметры подобия устанавливаются из дифференциальных уравнений, уравнений состояния, начальных и граничных условий путем приведения их к безразмерной форме. Если система уравнений при заданных начальных и граничных условиях адекватно описывает рассматриваемый процесс, то при одинаковых численных значениях входящих в нее безразмерных коэффициентов в модели и в натуре эта система, будучи приведенной к безразмерной форме, будет одинаковой для модели и природы. Следовательно, функциональная зависимость изучаемого параметра от определяющих параметров также будет одинаковой в модели и в натуре и соответствующие процессы будут подобными.

Безусловно, при установлении параметров подобия желательно описать изучаемый процесс математически. Это, в частности, позволяет во многих случаях обнаружить, что определяющими параметрами являются не отдельные физические величины, а их комплексы, имеющие вид степенного многочлена, что может привести к сокращению числа параметров подобия и значительному облегчению моделирования процесса. Например, пусть нужно моделировать процесс движения жидкости, фильтрующейся в прямолинейном пласте длиной l (рис. 83). Сверху на пласт действует постоянная нагрузка (горное давление). Давление жидкости при $t=0$ (t — время) было равно p_0 во всем пласте. При $t>0$ давление при $x=0$ становится равным нулю. Определим изменение давления, например, в точке $x=l$ (см. рис. 83). Допустим, неизвестно, что неустановившаяся фильтрация определяется таким комплексом, как пьезопроводность $\kappa = \frac{k}{\mu(m\rho_{ж} + \beta_c)}$ (см. главу III).

Поэтому принимается зависимость p при $x=l$ от следующих параметров:

$$k, l, \mu, \beta_c, \beta_{ж}, t, p_0, m,$$

где k — проницаемость пласта; μ — вязкость жидкости, β_c — сжимаемость пористой среды; $\beta_{ж}$ — сжимаемость жидкости; m — пористость пласта. Тогда в соответствии с анализом размерности

$$\frac{p_{x=l}}{p_0} = f \left(\frac{\sqrt{k}}{l}, \frac{p_0 \mu}{t}, \beta_c p_0, \beta_{ж} p_0, m \right). \quad (1.6)$$

Однако анализ уравнения, описывающего процесс неустановившейся фильтрации, позволяет установить, что p зависит от k, l, t, p_0 . Следовательно,

$$\frac{p_{x=l}}{p_0} = f_1 \left(\frac{xt}{l^2} \right). \quad (1.7)$$

Моделирование процесса по параметрам (1.6) является крайне затруднительным, так как при уменьшении l в модели трудно подобрать материал с меньшей проницаемостью, но той же пористостью. Моделирование же по параметру (1.7) сводится лишь к пересчету времени.

Итак, перейдем к изложению вопросов моделирования деформации горных пород. Вначале рассмотрим такой процесс, при котором проявляются лишь упругие свойства пород. Породы считаются однородными и изотропными. Не принимаются никакие условия в отношении деформации пласта, которая в модели может быть произвольной, лишь бы она происходила в пределах упругости. Тогда на основе анализа размерности получаем

$$\frac{\sigma}{\gamma H} = f \left(\frac{L}{H}, \alpha \right). \quad (1.8)$$

Первый параметр означает геометрическое подобие в модели и в натуре. Кроме того, должно быть выполнено условие постоянства коэффициента бокового давления α . При решении техниче-

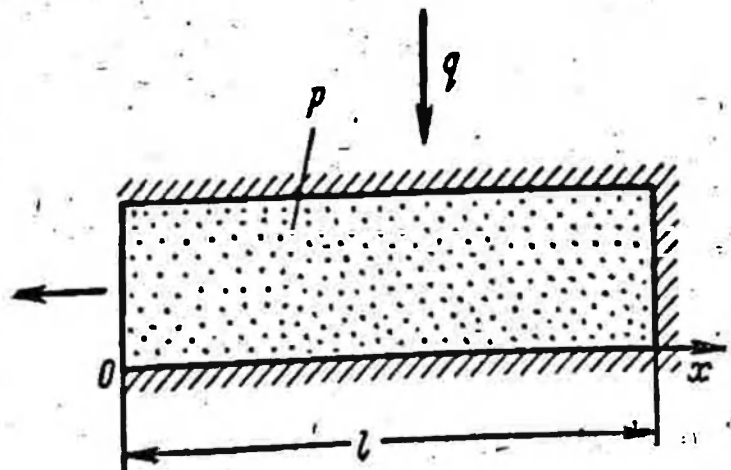


Рис. 83. Схема фильтрации в пласте конечной длины.

ских вопросов часто бывает необходимо исследовать прочность здания или подземного сооружения. Пусть материал, из которого построено здание, или горные породы, окружающие подземное сооружение, деформируются упруго вплоть до разрушения, и их прочность можно характеризовать величиной предельного напряжения на разрушение σ_* . Тогда σ зависит от σ_* , γ , L , H , α , и из анализа размерности получаем

$$\frac{\sigma}{\gamma H} = f_1 \left(\frac{L}{H}, \alpha, \frac{\sigma_*}{\gamma H} \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, кроме выполнения условий геометрического подобия и постоянства α , необходимо еще обеспечить равенство в модели и в натуре параметра $\frac{\sigma_*}{\gamma H}$. Это можно осуществить двумя различными путями, имея в виду, что величина H должна быть меньше в модели, чем в натуре: либо увеличением γ , либо уменьшением σ_* . Первый путь привел к созданию метода центробежного моделирования [30, 83], осуществляемого посредством увеличения эффективного γ за счет вращения модели на центрифуге, а второй — к разработке метода эквивалентных материалов [59], основанного на применении в модели «эквивалентных материалов» — веществ с пониженной прочностью. При практическом осуществлении моделирования методом эквивалентных материалов [59] модель горного массива и горной выработки изготавливается из искусственных материалов, таких, например, как смесь парафина с песком, гипсо-песчаных растворов и др., механические свойства которых предварительно точно определяются. Напряжения и деформации в моделях измеряются обычно при помощи тензометров. Применение метода эквивалентных материалов позволяет изучать прочность подземных сооружений (шахт, штреков и т. д.), устойчивость крепления, характер обрушения горных выработок и другие вопросы, связанные с разработкой рудных и угольных месторождений. В том случае, когда принимаются особые условия в отношении деформации пород или материалы обладают различными упругими характеристиками на различных участках, необходимо выполнение, кроме того, условий

$$\left(\frac{E}{\gamma H} \right)_n = \left(\frac{E}{\gamma H} \right)_m, \quad \left(\frac{E_i}{E_k} \right)_n = \left(\frac{E_i}{E_k} \right)_m, \quad (\nu_i)_n = (\nu_i)_m, \quad i \neq k,$$

где i, k — номера участков, а индексы «н» и «м» относятся соответственно к натурным условиям и модели. Во многих случаях прочностные свойства пород нельзя характеризовать одним предельным напряжением σ_* , а нужно описывать зависимость между интенсивностью касательных напряжений и средним нормальным напряжением, что приводит к необходимости подобия в модели и в натуре соответствующих зависимостей. Заметим, что при

моделировании многих процессов соблюдение условия $(v_i)_n =$
 $= (v_i)_m$ не является жестким требованием.

Метод эквивалентных материалов может быть применен к решению различных задач нефтепромышленного дела, что было отмечено, например, в статье Н. П. Лесика, Г. Г. Овнатанова, К. В. Руппенейга и Е. Я. Солохина [66].

Еще в конце прошлого столетия делались попытки проведения экспериментов, воспроизводящих тектонические движения земной коры. Однако теория подобия при моделировании тектонических процессов была применена впервые, по-видимому, Хаббертом [132]. Моделирование тектонических процессов в земной коре проводилось М. В. Гзовским [27, 28], Клоосом [119], Паркером и Макдауэллом [137] и др. При моделировании этих процессов учитываются реологические свойства пород. Если горные породы являются, например, средой Максвелла, то напряжение σ зависит от

$$\sigma_*, \gamma, L, H, P, K_M, \mu_M, t, \quad (1.10)$$

где P — тектоническое напряжение.

Величину α в данном случае считаем функцией указанных параметров.

На основе анализа размерности получаем

$$\frac{\sigma}{K_M} = f_2 \left(\frac{\gamma H}{K_M}, \frac{\sigma_*}{K_M}, \frac{P}{K_M}, \frac{\mu_M t}{K_M}, \frac{L}{H} \right). \quad (1.11)$$

Модели, на которых изучаются тектонические процессы, изготавливаются из растворов этилцеллюлозы в бензиловом спирте, студней желатины и других веществ [80]. По условиям моделирования эти вещества обладают следующими механическими характеристиками: модуль Юнга в пределах $0,1-1,0 \text{ кг/см}^2$, вязкость от 10^4 до 10^6 нз , предел прочности на сдвиг $10^{-3}-10^{-1} \text{ кг/см}^2$.

При изучении тектонических процессов путем моделирования считается обязательным определение не только деформации моделей пород, но и возникающих в них напряжений. Напряжения изучаются [28] методом фотоупругости, поэтому модели горных пород делаются прозрачными.

Применение метода моделирования в тектонофизике позволило [18, 26, 28] выяснить ряд существенных положений, касающихся механизма образования различного типа складок, сбросов, тектонических разрывов, трещин и т. д. Моделирование применялось также для изучения причин землетрясений.

Выше не учитывались инерционные силы; однако в определенных случаях, например при изучении на моделях сейсмических волн, такой учет необходим. При учете инерционных сил, помимо указанных выше параметров, должно соблюдаться постоянно во в модели и в натуре параметра $\frac{\rho L^2}{Et^2}$ (ρ — плотность пород).

Моделирование сейсмических волн рассматривалось Ю. В. Ризниченко, Б. Н. Ивакиным и В. Р. Бугровым [86].

§ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

При изучении ряда практически важных вопросов возникает необходимость исследования деформации материала не только до достижения в некоторой его точке предела прочности, но и исследования характера разрушения материала. Важно также знать, как выглядит изучаемый участок материала после того, как в нем закончился процесс разрушения. Особенный интерес при этом представляет исследование процессов образования и распространения трещин. В горном деле изучение этих процессов необходимо для понимания характера обрушения горных выработок, определения прочности различных горных сооружений и т. д. В геологии возникает обратная задача: по общему виду деформаций и разрушения горных пород на исследуемом участке определить величину действовавших на породы сил и характер их изменения во времени. Однако представляет интерес и прямая задача — определение вида разрушений в массиве горных пород при известном характере действия естественных или искусственных сил.

Эти же задачи возникают и при изучении трещиноватости коллекторов нефти и газа. Например, зная на основе геологических и геофизических данных (структурных карт, профилей, скорости распространения упругих волн, стратиграфии, литологии, абсолютного возраста пород, скорости осадконакопления и т. д.) общий характер деформации земной коры в изучаемом районе, продолжительность деформации, а также свойства пород, слагающих земную кору, можно изучить характер действия тектонических сил и оценить тип разрушений, т. е. среднюю густоту, ориентацию и ширину естественных трещин. Ввиду сложности деформации пород в естественных массивах эту задачу трудно решать аналитическим путем. Поэтому целесообразно применять методы теории подобия и моделирование.

Особый интерес представляет процесс образования трещин в горных породах под действием давления жидкости, т. е. при гидравлическом разрыве пласта. При этом оказывается важным изучить не только общий характер искусственной трещиноватости, созданной в пласте в результате гидравлического разрыва, но и сам процесс распространения трещин.

Попытки воспроизведения гидравлического разрыва пласта в лабораторных условиях делались [140] с самого начала широкого использования этого процесса в нефтедобывающей промышленности. Тогда еще не было достаточно ясного представления о том, что в действительности происходит в пласте при гидравлическом разрыве, и поэтому все лабораторные опыты были направлены на изучение процесса образования начальной трещины в пласте, т. е. самого разрыва пород, для чего производились многочисленные разрывы естественных или искусственных образцов пород в лабораторных условиях. Однако после накопления соответствующего опыта стало ясным, что практически начального разрыва по-

род не происходит ввиду существования в пластах естественных нарушений, и основным является процесс распространения трещин путем закачки в них жидкости. Существенным в понимании механизма образования трещин при гидравлическом разрыве пласта явилось положение о конечности напряжений на концах трещин, сформулированное С. А. Христиановичем (условие С. А. Христиановича).

Из теории упругости известно [76], что при приложении поверхностных или объемных сил к твердому телу, содержащему остроконечную трещину, на концах этой трещины возникает бесконечно большое напряжение. Породы, как и всякие реальные тела, могут противостоять, не разрушаясь, лишь определенному конечному напряжению. Если к породе с трещиной приложены силы, стремящиеся разорвать ее, а силы, сдвигающие породу, отсутствуют, то трещина будет распространяться до тех пор, пока данный пласт или массив породы не разорвется полностью.

Однако этот процесс происходит иначе, если на рассматриваемый пласт или массив горных пород действуют не только силы, разрывающие породы, но и силы, препятствующие распространению трещины. Действие этих сил приводит к тому, что распространение трещины, достигшей некоторых размеров, останавливается. Таким образом, в породах устанавливается равновесное напряженное состояние. Форма и размеры образовавшейся трещины в данном случае зависят от соотношения этих противоположных сил. Напряжения на концах трещины не будут бесконечными, а поверхности трещины на ее конце будут плавно смыкаться. Это состояние и отражает условие С. А. Христиановича [8, 9, 38].

Горное давление, конечно, не является единственным фактором, противостоящим силам, распространяющим трещины в горных породах. Молекулярные силы сцепления, существующие на концах трещины, действуют в том же направлении, что и горное давление. Однако, как показывают оценки, приведенные, например, в § 6 главы II, действием этих сил при распространении трещин в реальных массивах или пластах горных пород можно пренебречь по сравнению с действием на породы горного давления. Поэтому будем считать, что практически единственным фактором, препятствующим распространению трещины, является горное давление. Тогда получаем, что процесс распространения трещин при гидравлическом разрыве определяется отношением давления жидкости к горному давлению и не зависит от прочности породы. Подобными будут два таких процесса распространения трещин, в которых форма трещины, т. е. $\frac{\omega}{\omega_0}$ (ω_0 — максимальная ширина трещины, ω — текущая ширина трещины), будет одинаковой в каждый момент времени (при двух одинаковых значениях безразмерного времени).

Покажем, какие условия при этом надо выполнить. При рас-

пространении трещин во время гидравлического разрыва пласта происходят в общем случае три явления: упругая деформация горных пород, движение вязкой жидкости или суспензии по трещине и фильтрация жидкости в горных породах.

Если рассматривать только деформацию пород, которая в данном случае вызывается действием на породы объемных сил, обусловленных передачей на породы градиентов давления фильтрующейся жидкости, то получим, что σ зависит от параметров

$$\Delta p_c, \gamma, L, H, \alpha, \nu, \quad (2.1)$$

где

$$\Delta p_c = p_c - p_k$$

(p_c — давление жидкости в центре трещины, например в скважине, p_k — давление на контуре, ограничивающем область профильтровавшейся в пласт жидкости).

На основании анализа размерности имеем:

$$\frac{\sigma}{\Delta p_c} = f \left(\frac{\gamma H}{\Delta p_c}, \frac{L}{H}, \alpha, \nu \right). \quad (2.2)$$

В данном случае в число определяющих параметров не входит проницаемость и другие параметры пласта, а также вязкость жидкости, поскольку берется непосредственно давление жидкости, передающееся на породы, а не расход жидкости.

Таким образом, важно выдерживать постоянство в модели и в натуре отношения $\frac{\Delta p_c}{\gamma H}$. Деформации в модели в данном случае необязательно должны быть равны деформациям в натуре, если на границах на них не налагается особых условий. Однако для того, чтобы определить, каким образом можно обеспечить равенство в модели и в натуре величины $\frac{\Delta p_c}{\gamma H}$, рассмотрим одно соотношение [42], существующее в общем случае на контуре трещины.

Допустим, что еще до проведения разрыва в пласте существовала поверхность нарушения сплошности породы, которая, расширяясь при разрыве пласта, становится трещиной. Пусть средняя поверхность трещины, являющейся достаточно тонкой, задана уравнением $F(x, y, z)$, причем ξ и ζ — направления двух взаимно перпендикулярных касательных к этой поверхности, а n — направление нормали к ней (рис. 84). Рассматривая баланс жидкости, поступающей в элементарный объем трещины $\omega d\xi d\zeta$ и уходящей из него в пласт, а также учитывая расширение трещины с течением времени, получаем соотношение для элемента трещины

$$\omega \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \omega \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + 2v_n + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

где v_ξ , v_ζ — скорости жидкости соответственно в направлениях ξ и ζ ; v_n — скорость фильтрации через стенки трещины.
 Для скоростей движения жидкости по трещине и скорости фильтрации имеем

$$v_\xi = -\frac{\omega^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi}; \quad v_\zeta = -\frac{\omega^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \zeta}; \quad v_n = -\frac{k \partial p}{\mu \partial n}, \quad (2.4)$$

где k — проницаемость пласта.

Из (2.3) и (2.4) получаем, что для выполнения равенства

$$\left(\frac{\Delta p_c}{\gamma H} \right)_n = \left(\frac{\Delta p_c}{\gamma H} \right)_m \text{ должны быть соблюдены условия}$$

$$\left(\frac{kE^3}{L^2 \gamma^3 H^3} \right)_n = \left(\frac{kE^3}{L^2 \gamma^3 H^3} \right)_m; \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\gamma^3 H^3 t}{E^2 \mu} \right)_n = \left(\frac{\gamma^3 H^3 t}{E^2 \mu} \right)_m. \quad (2.6)$$

Условие (2.5) справедливо лишь при разрыве пласта фильтрующей жидкостью. В выражение (2.5) входит характерная длина L , которая, в частности, может быть длиной трещины. Это не всегда удобно, поскольку длина трещины является определяемой величиной, а не заранее заданной.

Для того чтобы исключить длину трещины L из (2.5), используем выражение для баланса жидкости в трещине, записываемое в виде:

$$\int_0^T Q(t) dt = V_* + V_\phi, \quad (2.7)$$

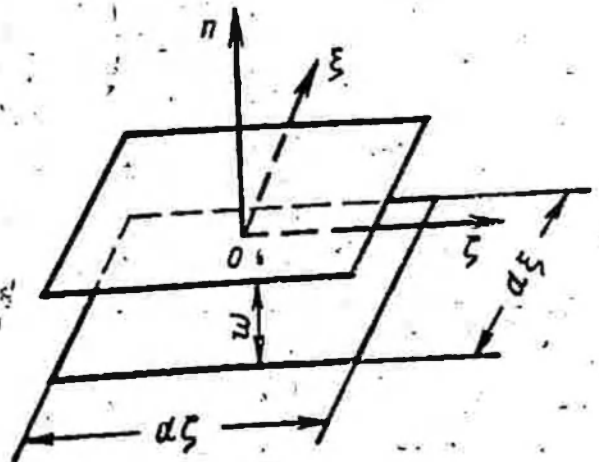
где V_* — объем жидкости в трещине; V_ϕ — объем жидкости, отфильтрованной из трещины к моменту времени T ; $Q(t)$ — расход жидкости, зависящий от времени t .

На основе описанных выше теоретических исследований процесса распространения трещин в горных породах можно написать

$$V_* = \frac{\Delta p_c}{E} L^3 f \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_c}, \nu \right); \quad (2.8)$$

$$V_\phi = 2 \int_0^T \int_0^S \int \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} d\xi d\zeta dt. \quad (2.9)$$

Рис. 84. Элементарный объем трещины.



В выражении (2.9) имеется в виду интегрирование по поверхностям трещины S . После подстановки (2.8) и (2.9) в (2.7) и приведения (2.7) к безразмерной форме можно с учетом (2.5) получить вместо (2.5) условие

$$\left(\frac{\gamma H Q^2 \mu^2}{k^3 E^3}\right)_H = \left(\frac{\gamma H Q^2 \mu^2}{k^3 E^3}\right)_M \quad (2.10)$$

Если разрыв пласта производится жидкостью, имеющей вязкость μ , а пластовая жидкость обладает вязкостью μ_0 , необходимо соблюдение условия $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_H = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_M$. Если процесс фильтрации жидкости происходит при упругом режиме, то необходимо соблюдение условия $\left(\frac{kt}{\beta \mu L^2}\right)_H = \left(\frac{kt}{\beta \mu L^2}\right)_M$, что всегда возможно при выполнении условий (2.5) и (2.6).

Для того чтобы лучше представить себе, как необходимо практически осуществлять моделирование процесса распространения трещин при гидравлическом разрыве пласта, рассмотрим следующие простые примеры. Допустим вначале, что требуется моделировать процесс распространения трещины в горной породе при помощи нефилтующейся жидкости, причем модель пласта изготовлена из естественного песчаника. Пусть линейные размеры модели в 100 раз меньше соответствующих размеров в натуре. Что нужно в этом случае для того, чтобы процессы распространения трещин в модели и в натуре были подобными?

Согласно [36, 38], текущий перепад давления нефилтующейся жидкости вдоль трещины Δp определяется зависимостью

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_c} = \frac{Q \mu}{\Delta p_c \omega_0^3} f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (2.11)$$

По условию С. А. Христиановича прочность породы практически не оказывает влияния на процесс распространения трещины. Следовательно, форма трещины, образуемой путем закачки в нее нефилтующейся жидкости, определяется исключительно эпюрой давления жидкости. В свою очередь эпюра давления жидкости зависит от формы трещины. Таким образом, можно написать

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \varphi\left(\frac{\Delta p}{\Delta p_c}, \frac{\Delta p_c}{\gamma H}\right) \quad (2.12)$$

Для того чтобы процессы распространения трещин в модели и в натуре были подобными, необходимо соблюдение подобия эпюр давления, действующего на стенки трещины, и отношения полного перепада давления жидкости в трещине Δp_c к горному давлению γH , т. е. условий

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta p_c}\right)_H = \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_c}\right)_M, \quad \left(\frac{\Delta p_c}{\gamma H}\right)_H = \left(\frac{\Delta p_c}{\gamma H}\right)_M \quad (2.13)$$

$$\omega_0 \approx \frac{\Delta p_c}{E} L,$$

где L — полудлина (или радиус) трещины.
Тогда из (2.11), (2.12) и (2.13) получаем условие

$$\left(\frac{Q_\mu E^2}{\gamma^3 H^3 L^3} \right)_H = \left(\frac{Q_\mu E^2}{\gamma^3 H^3 L^3} \right)_M, \quad (2.14)$$

что вполне аналогично условию (2.6).
Согласно (2.14) имеем

$$(Q_\mu)_M = (Q_\mu)_H \left(\frac{L_M}{L_H} \right)^3 \left(\frac{E_H}{E_M} \right)^2 \left(\frac{\gamma_M H_M}{\gamma_H H_H} \right)^3, \quad (2.15)$$

где $Q_M, \mu_M, \dots, Q_H, \mu_H, \dots$ — соответствующие параметры в модели и в натуре.

Выше было принято, что линейные размеры модели в 100 раз меньше линейных размеров в натуре, т. е., например, длина трещины в модели меньше длины трещины в натуре в 100 раз, а модуль Юнга материала модели E_M равен модулю Юнга натурального материала E_H . Тогда из (2.15) получаем

$$(Q_\mu)_M = (Q_\mu)_H \left(\frac{\gamma_M H_M}{\gamma_H H_H} \right)^3 10^{-6}.$$

Отсюда видно, что при соблюдении условия $\gamma_M H_M = \gamma_H H_H$ процессы распространения трещин в модели и в натуре будут подобными лишь в том случае, если произведение расхода жидкости на ее вязкость в модели будет уменьшено по сравнению с натурой в миллион раз. Учитывая еще, что величина сжатия породы в модели в этом случае должна быть порядка горного давления в натуре, осуществление моделирования будет сильно затруднено. Во всех экспериментах по разрыву образцов из естественных или искусственных образцов пород условие $(Q_\mu)_M = 10^{-6} (Q_\mu)_H$ не соблюдалось, вследствие чего процессы распространения трещин в образцах не были подобны соответствующим процессам в натуре.

Выясним теперь, что получится, если процесс распространения трещин изучать на моделях из эквивалентных материалов методом [66]. Авторами [66] предполагается, что в модели и в натуре будет выполняться условие $\left(\frac{\gamma H}{\sigma^*} \right)_H = \left(\frac{\gamma H}{\sigma^*} \right)_M$ (σ^* — предел прочности) и, кроме того, условие равенства деформаций, т. е.

$$\left(\frac{\gamma H}{E} \right)_H = \left(\frac{\gamma H}{E} \right)_M. \quad (2.16)$$

В этом случае из (2.15) и (2.16) получаем

$$(Q_\mu)_M = (Q_\mu)_H \left(\frac{L_M}{L_H} \right)^3 \frac{E_M}{E_H}. \quad (2.17)$$

При моделировании разрыва пласта методом [59, 66] имеем $E_M = 10^{-2} E_H$, $L_M = 10^{-2} L_H$. Тогда из (2.17) получаем $(Q_M)_M = 10^{-5} (Q_M)_H$. Таким образом, при моделировании процесса распространения трещин нефилтующейся жидкостью методом [59, 66] придется уменьшать в модели величину Q_M в 100 миллионов раз по сравнению с натурой, что вызовет технические трудности. Кроме того, в модели придется создавать довольно высокое горное давление $(\gamma H)_M = 10^{-2} (\gamma H)_H$. Следовательно, необходимо выбрать иной путь моделирования распространения трещин при гидравлическом разрыве пласта. Как видно из формулы (2.15), моделирование рассматриваемого процесса можно осуществить более просто, если пойти по пути дальнейшего уменьшения модуля Юнга эквивалентного материала, из которого изготавливается модель пласта. Это позволит к тому же уменьшить в модели величину горного давления, что значительно упростит экспериментальную установку. Покажем это на следующем примере.

Пусть в натуре при гидравлическом разрыве пласта трещина распространяется путем закачки в нее нефилтующейся жидкости вязкостью $\mu_H = 100$ *спз* с расходом $Q_H = 10$ *л/сек*, горное давление в натуре $(\gamma H)_H = 300$ *кг/см²*, модуль Юнга породы $E_H = 10^5$ *кг/см²*. При создании модели, у которой модуль Юнга материала, например, $E_M = 1$ *кг/см²*, $L_M = 10^{-2} L_H$, $(\gamma H)_M = 10^{-3} (\gamma H)_H = 0,3$ *кг/см²*, а $\mu_M = 10^{-1} \mu_H = 10$ *спз*, из (2.15) получаем

$$Q_M = Q_H \frac{\mu_H}{\mu_M} \left(\frac{L_M}{L_H} \right)^3 \left(\frac{E_H}{E_M} \right)^2 \left(\frac{\gamma_M H_M}{\gamma_H H_H} \right)^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-9} = 10^{-3} \text{ л/сек} = 1 \text{ см}^3/\text{сек}.$$

Такой расход жидкости является достаточно легко осуществимым в лабораторных условиях. Задача сводится лишь к подбору для модели эквивалентного пористого упругого материала, имеющего малый модуль Юнга. Таким материалом может служить, например, пористая резина. При таком моделировании придется отказаться от выполнения условия равенства деформаций в модели и в натуре. Деформации в модели и в натуре при этом будут не равными, а подобными. Заметим, что моделирование по подобию деформаций не исключает возможности учета явлений, связанных с прочностью материала, для чего должно быть соблюдено условие

$$\left(\frac{\Delta p_c}{\sigma_*} \right)_H = \left(\frac{\Delta p_c}{\sigma_*} \right)_M.$$

Опыты по моделированию процесса распространения трещин были осуществлены на установке [44], схема которой показана на рис. 85. Основной частью установки являлся блок, изготовленный из пористого и проницаемого каучука (резины), служивший моделью упругой пористой и проницаемой среды. Диаметр блока был 40 см, высота 8 см. Из-за отсутствия форм высотой 8 см блок был изготовлен склеиванием двух слоев пористой резины, каждый из которых имел высоту 4 см. В центре блока имелось отверстие диаметром 0,8 см, проходившее через всю толщу блока. Оно имитировало скважину. Блок был разрезан по диаметру на две половины.

Сочлененные по разрезу половины блока образовывали модель пласта с вертикальной трещиной, простирающейся в обе стороны от скважины. С внешней стороны блок подвергался боковому обжатию путем помещения его в перфорированную металлическую обечайку, имевшую меньший диаметр, чем диаметр блока в ненапряженном состоянии. Модуль Юнга упругого пористого материала определялся методом вдавливания штампа, разработанным Л. А. Шрейнером и его сотрудниками [113]. В пределах давлений, применявшихся в опытах, деформация материала модели подчинялась закону Гука. Модуль Юнга верхнего слоя оказался равным $1,52 \text{ кг/см}^2$, а нижнего $0,86 \text{ кг/см}^2$. Плотность материала, определенная взвешиванием образца известного объема, равна $0,28 \text{ г/см}^3$. Пористость, определенная по насыщению образца водой, составляла 65—72%. Проницаемость пористой среды (образцов, вырезанных из материала модели) находили при помощи вакуумной установки для определения воздухопроницаемости кернов. Средняя проницаемость по восьми замерам оказалась равной 20,6 д. После сборки модели поровое пространство насыщалось пластовой жидкостью под вакуумом.

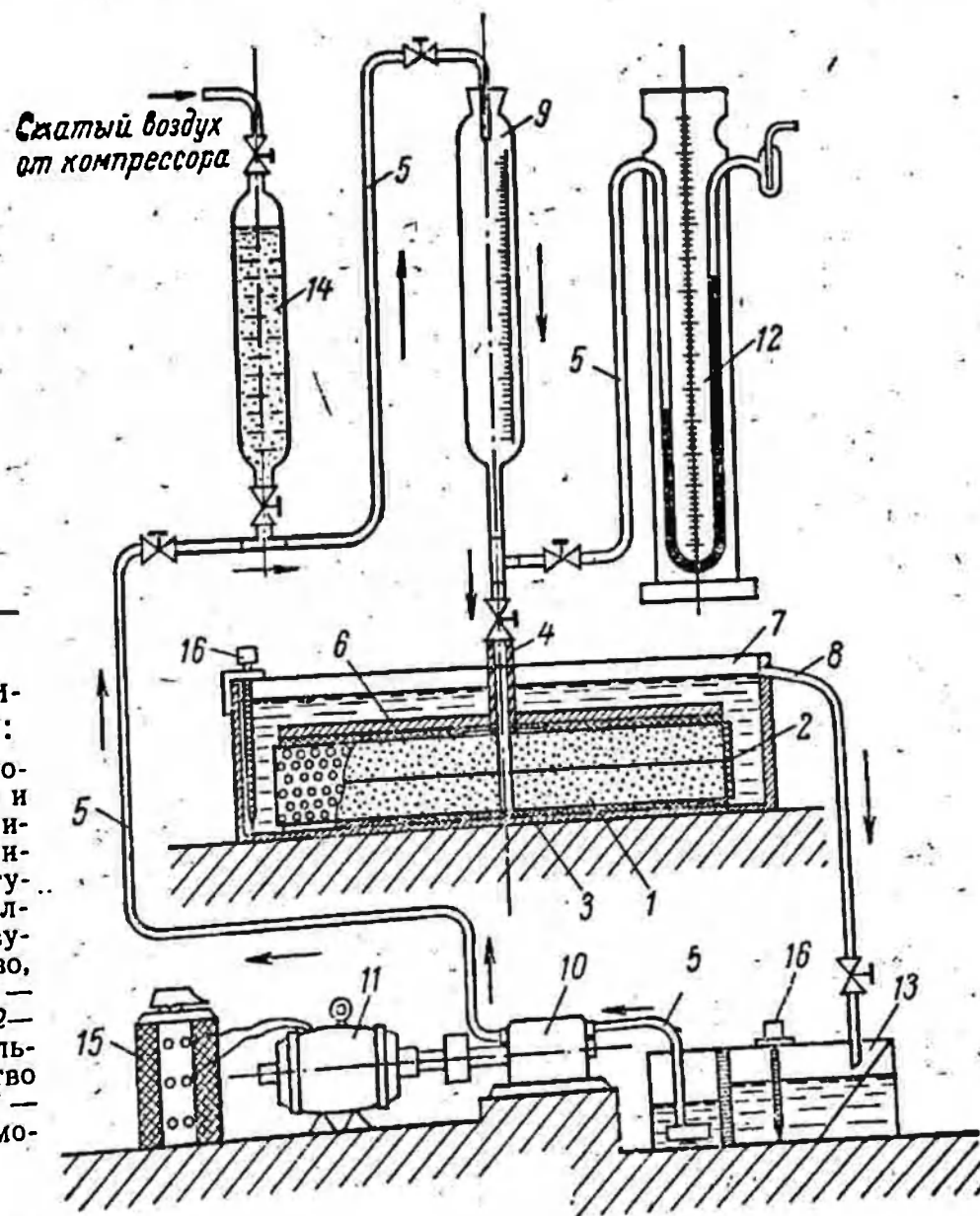


Рис. 85. Схема экспериментальной установки:

1 — модель упругого пористого пласта диаметром 40 см и высотой 8 см, 2 — перфорированная обечайка, 3 — резиновые прокладки, 4 — штуцер, 5 — трубка, 6 — металлический диск, 7 — резервуар, 8 — сливное устройство, 9 — напорная емкость, 10 — насос, 11 — электродвигатель, 12 — манометр, 13 — разделительный бачок для закачки песка, 15 — трансформатор, 16 — термометры.

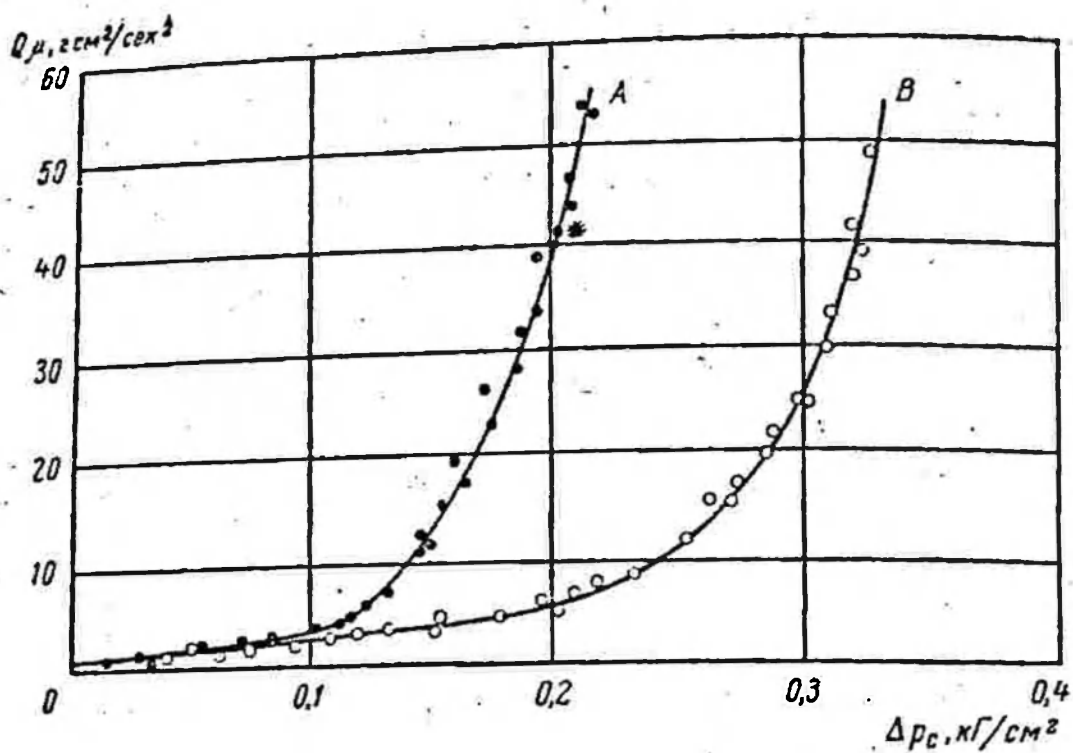


Рис. 86.
Зависимости
 $Q_{\mu} = f_1(\Delta p_c)$.

Для расширения вертикальной трещины в модели в «скважину» закачивали жидкость той же вязкости, что и жидкость, насыщавшая пористую среду модели. В качестве рабочей жидкости использовали технический глицерин вязкостью 50—125 *спз*. После достижения установившегося режима закачки замеряли расход жидкости на сливе из резервуара и давление «в скважине» по манометру. Вначале предполагалось установить по модели характер зависимости расхода жидкости от перепада давления $Q = f(\Delta p_c)$ для различных величин обжатия модели (различных значений бокового горного давления). В связи с тем, что установка не была термостатирована и температура жидкости (а следовательно, и ее вязкость) изменялась от опыта к опыту, а иногда и в процессе одного опыта, в дальнейшем определялась зависимость $Q_{\mu} = f_1(\Delta p_c)$, что давало возможность видеть сопоставимость различных опытов. Зависимость $Q_{\mu} = f_1(\Delta p_c)$ для двух различных величин обжатия модели (различных значений бокового горного давления) представлена на рис. 86. Из этой зависимости видно, что вначале, когда трещина сомкнута, давление жидкости в «скважине» увеличивается пропорционально расходу, т. е. происходит фильтрация жидкости в пористой среде в соответствии с законом Дарси. После достижения некоторой величины давления в «скважине» линейная зависимость расхода от перепада давления нарушается — расход начинает расти быстрее, чем давление. Это происходит после раскрытия трещины.

Кривые, показанные на рис. 86, аналогичны реальным кривым, получаемым в процессе гидравлического разрыва пласта на промыслах. Как видно из рис. 86, при большем обжатии (кривая B) нарушение линейной зависимости, т. е. раскрытие трещины, происходит при большем давлении жидкости. При уменьшении расхода жидкости кривые $Q_{\mu} = f_1(\Delta p_c)$ повторялись почти в точности. При давлении жидкости меньшем, чем давление раскрытия тре-

щины, кривые $Q_{\mu} = f_1(\Delta p_c)$, полученные при возрастании и уменьшении расхода, также совпадают.

Для приближенного определения размеров и формы трещины в нее закачивали песок вместе с рабочей жидкостью. Режим, при котором закачивался песок, отмечен на кривой А звездочкой (см. рис. 86). Форма трещины, воспроизведенная по замерам толщины слоя песка после разборки модели, показана на рис. 87. Эта форма соответствует форме трещин, полученных из решений соответствующих задач теории упругости [9, 38, 39].

Определим теперь, каким значением натуральных параметров соответствовали модельные параметры в описанных выше опытах.

Согласно замеру глубины проникновения песка $L_m = 14 \text{ см}$, $Q_m = 3 \text{ см}^3/\text{сек}$, $\mu_m = 55 \text{ спз}$, $k_m = 20,6 \text{ д}$, $E_m = 1,52 \text{ кг/см}^2$, $(q_{\infty})_m = 0,12 \text{ кг/см}^2$. Пусть в натуре $k_n = 1 \text{ д}$, $E_n = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $(q_{\infty})_n = 200 \text{ кг/см}^2$, $\mu_n = 300 \text{ спз}$. Вычислим, пользуясь параметрами подобия, длину трещины, которая должна получиться в натуре при перечисленных выше данных. Согласно (2.5) имеем

$$L_n = L_m \sqrt{\frac{(q_{\infty})_m^3}{(q_{\infty})_n^3} \cdot \left(\frac{E_n}{E_m}\right)^3 \frac{k_n}{k_m}} \approx 22 \text{ м.}$$

Расход жидкости в натуре Q_n , существующий при образовании такой трещины, определяется на основе (2.15) следующим образом:

$$Q_n = Q_m \sqrt{\frac{(q_{\infty})_m}{(q_{\infty})_n} \left(\frac{\mu_m}{\mu_n}\right)^2 \left(\frac{E_n}{E_m}\right)^3 \left(\frac{k_n}{k_m}\right)^3} \approx 7 \text{ л/сек.}$$

Описанный выше метод моделирования распространения трещин в горных породах при гидравлическом разрыве пласта был использован [37, 52] для изучения взаимодействия трещин и гидравлического разрыва в породах с естественной трещиноватостью.

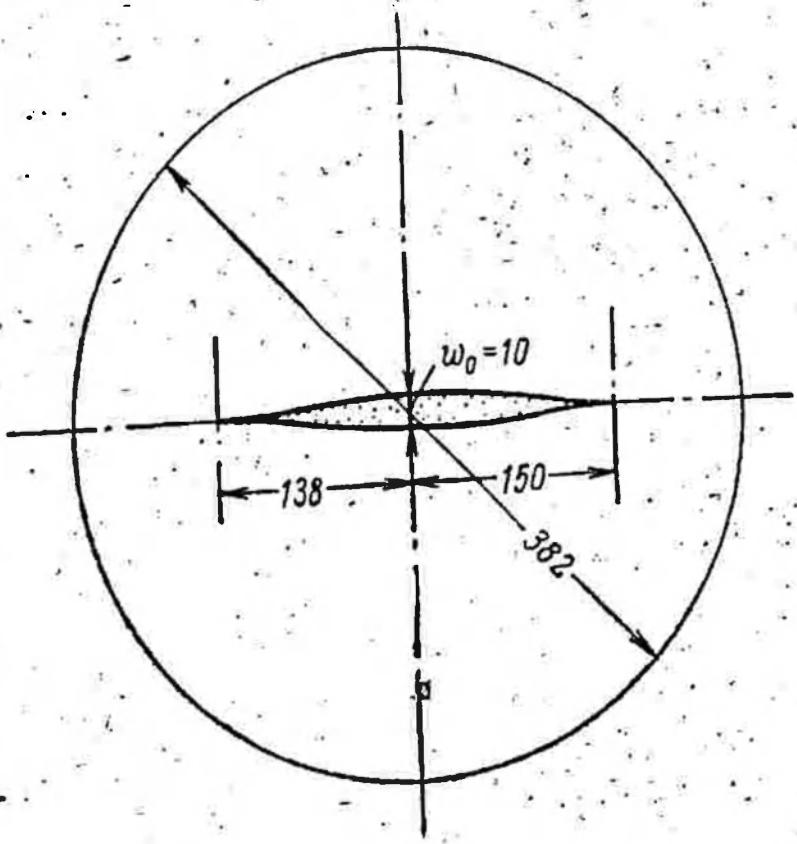


Рис. 87. Форма трещины в модели.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ТРЕЩИН, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЫВЕ ПЛАСТА

Выше указывалось, какое значение имеет определение ориентации трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Отметим дополнительно, что успешное применение метода гидравлического разрыва пласта для борьбы с обводнением скважин (установка цементных экранов), многократного и поинтервального разрывов пласта с целью повышения продуктивности отдельных пропластков или приемистости ими воды, гидравлического разрыва на обводняющихся участках месторождений и вблизи газовой шапки, предотвращение опасности образования вертикальных трещин и утечки газа при создании подземных хранилищ газа и т. д. зависят от выяснения вопроса об ориентации трещин, которые могут образоваться в результате разрыва пласта. Зная ориентацию трещин и используя данные о давлении разрыва, можно определить фактическое естественное напряжение, существующее в пластах. Имея данные о форме той или иной геологической структуры, механических свойствах слагающих ее горных пород и фактических напряжениях, можно судить о характере протекания тектонических процессов, приведших к образованию данной структуры.

В настоящем параграфе рассмотрим способ определения ориентации трещин, образующихся при разрыве пласта; основанный на использовании некоторых положений механики. Один из таких способов описан в статье [106]. Однако этот способ связывается с наличием вблизи скважины разгрузки горного давления и с применением абсолютно нефилтующейся жидкости, что вносит определенные ограничения в его использование. Как следует из предыдущего, условием начала расширения вертикальной трещины является соотношение $p_c - p_k = \Delta p_c \geq q_\infty$ (p_c — давление жидкости на забое скважины, p_k — пластовое давление, q_∞ — боковое горное давление). Для начала же расширения горизонтальной трещины необходимо, чтобы $p_c \geq q$ (q — вертикальное горное давление вблизи скважины). Давление, при котором начинает расширяться трещина, можно определить по излому кривых зависимостей $Q = f(p_c, p_k)$ (Q — расход жидкости разрыва, p_c и p_k — соответственно забойное и пластовое давления при гидравлическом разрыве пласта, которые, как известно, имеют вид, показанный, например, на рис. 23, см. главу II). Пусть удалось определить давление на забое скважины, при котором произошел разрыв пласта, и оно оказалось равным p^* . Известно также пластовое давление p_k . Посмотрим теперь, что произойдет, если пластовое давление изменится и снова будет произведен разрыв пласта в прежней скважине. При изменении пластового давления изменится и боковое горное давление. Это изменение окажется равным (см. главу I, § 4)

$$\Delta q_\infty = \frac{\nu}{1 - \nu} \Delta p_k \quad (3.1)$$

где ν — коэффициент Пуассона пород пласта.

Пусть, например, пластовое давление уменьшилось на бокового давления $q_{\infty}^{\text{II}} = q_{\infty}^{\text{I}} + \Delta q_{\infty} = 2,5 \text{ кг/см}^2$. Тогда при $\nu = 0,2$ давление раскрытия трещины p_c^{II} определится из соотношения

$$p_c^{\text{II}} - p_k^{\text{I}} + \Delta p_k = q_{\infty}^{\text{I}} + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta p_k \quad (3.2)$$

или

$$p_c^{\text{II}} = p_k^{\text{I}} + q_{\infty}^{\text{I}} - \left(1 - \frac{\nu}{1-\nu}\right) \Delta p_k \quad (3.3)$$

Таким образом,

$$p_c^{\text{I}} - p_c^{\text{II}} = \left(1 - \frac{\nu}{1-\nu}\right) \Delta p_k \quad (3.4)$$

Следовательно, для рассматриваемого примера давление на забое скважины, при котором начинает расширяться вертикальная трещина, должно уменьшиться на величину $7,5 \text{ кг/см}^2$. При уменьшении p_k на 20 кг/см^2 давление разрыва должно снизиться на 15 кг/см^2 в случае образования вертикальной трещины, а при уменьшении p_k на 40 кг/см^2 давление разрыва снизится на 30 кг/см^2 . Такие изменения давления разрыва можно уловить по зависимости $Q = f(p_c, p_k)$ при существующей измерительной технике. Если же образовалась горизонтальная трещина, то давление начала разрыва не будет зависеть от величины пластового давления. Положение [45] о том, что с уменьшением пластового давления уменьшается давление образования вертикальных трещин при гидравлическом разрыве пласта, было подтверждено Хэком [130] на основе промысловых данных.

Рассмотренная выше закономерность справедлива также при разгрузке горного давления вблизи скважины. Таким образом, по изменениям давления разрыва, замеренным на забое скважины при различных значениях пластового давления, можно судить об ориентации трещин, образующихся в результате гидравлического разрыва пласта.

Конечно, рассмотренный выше метод также имеет определенные ограничения. Так, если породы пласта достаточно текучи, изменение пластового давления приведет почти к такому же изменению бокового давления, так что изменение пластового давления не будет влиять на давление раскрытия вертикальных трещин. Однако такие случаи, по-видимому, встречаются в природе сравнительно редко и на небольших глубинах. Так, известно много случаев, когда в пластах, залегающих на сравнительно небольшой глубине, имеются открытые естественные трещины, заполненные жидкостью, давление которой (пластовое давление) значительно ниже полного горного давления. Если бы породы пласта обладали значительной

текучестью, то за геологические периоды времени существования этих пластов трещины бы затекли, а жидкость мигрировала в другие пласты, если бы имелся свободный выход из пласта, или пластовое давление повысилось бы вплоть до величины полного горного давления. Такие случаи встречаются, по-видимому, чаще на больших глубинах.

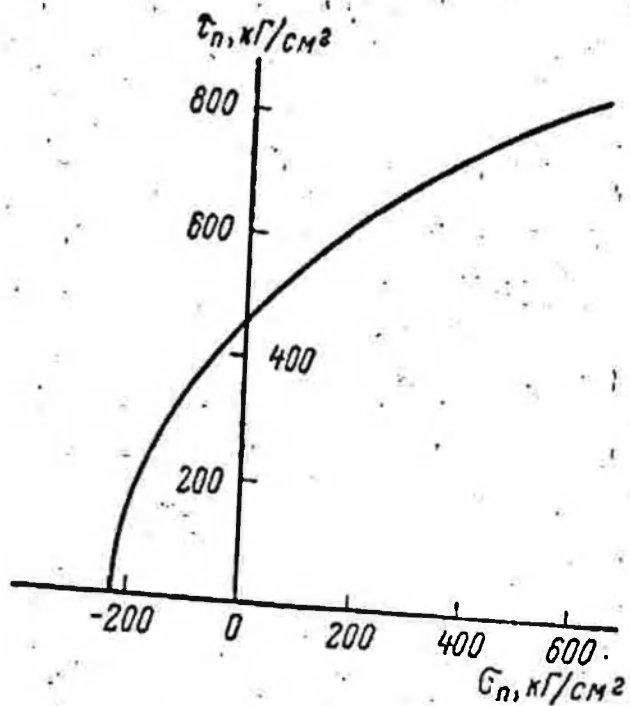
Имея в виду сказанное выше, при решении вопроса об ориентации трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта, необходимо также использовать и анализировать различные данные о пласте, т. е. механические свойства пород, форму геологической структуры, наличие вблизи пласта сводов пород, трещиноватость, пластовое давление, а также результаты разрывов пласта на соседних участках и геофизических исследований, общие данные о разработке пласта и эксплуатации скважин и, в частности, о характере их обводнения до и после гидроразрыва пласта, и т. д.

Заметим, наконец, следующее. При гидравлических разрывах пластов часто бывает трудно определить давление, при котором начинают образовываться трещины. Однако для того, чтобы судить об ориентации трещин на основе описанного выше метода, ненужно в точности знать это давление, так как при изменении пластового давления кривые зависимостей $Q = f(p_c, p_k)$ при образовании вертикальной трещины будут соответственно параллельно сдвигаться, а в случае горизонтальной трещины — останутся неизменными.

§ 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

1. Разрыв пород, окружающих ствол скважин, под действием давления жидкости (образование начальных трещин). Если закачиваемая в скважину жидкость нефилтующаяся или пласт практически непроницаем, давление жидкости оказывается приложенным непосредственно к поверхности ствола скважины, при условии, конечно, что скважина в пределах пласта, подвергаемого разрыву, не обсажена или цемент, находящийся между обсадной колонной и пластом, разрушен. Это же явление будет наблюдаться в тех случаях, когда обсадная труба обладает малой жесткостью по сравнению с породами пласта. Тогда деформацию пласта вблизи скважины можно считать плоской и поэтому напряженное состояние в этой области описывается формулами Ламе (см. главу II), в которых нужно положить $p_d = \Delta p_c = p_c - p_k$, $q_* = \gamma H - p_k$ (p_c — давление в скважине, p_k — давление на контуре питания, q_* — вертикальное горное давление). Здесь учитывается давление на контуре питания, так как считается, что абсолютно нефилтующихся жидкостей не бывает. Если же пласт непроницаем, то вместо Δp_c в указанные формулы нужно подставлять просто p_c . Для расчета давления, при котором произойдет разрыв пород, необходимо знать для этих пород характеристику предельного состояния (прочностную характеристику), определяемую зависимостью $S_* = f(\sigma)$. Расчет давления разрыва

Рис. 88. Огибающая предельных кругов Мора для мелкозернистого песчаника [90].



пород лучше всего продемонстрировать на конкретном примере. Произведем расчет для пласта, сложенного мелкозернистым песчаником, прочностная характеристика которого дана в книге [90] (мелкозернистый песчаник, проба 5). Эта характеристика, представленная в виде огибающей больших кругов Мора, дана на рис. 88. Огибающего вида:

$$\tau_n = k_0 + \sigma_n \operatorname{tg} \psi. \quad (4.1)$$

Координаты точки касания прямой (4.1) с большим кругом Мора можно представить в виде:

$$\sigma_n = \sigma - S_* \sin \psi, \quad \tau_n = S_* \cos \psi. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем

$$S_* = k_1 + a\sigma, \quad k_1 = k_0 \cos \psi, \quad a = \sin \psi. \quad (4.3)$$

Для кривой, представленной на рис. 88, в результате пересчета по формулам (4.2) получаем $k_1 = 234 \text{ кг/см}^2$, $a = 0,84$. Зависимость $S_* = f(\sigma)$ для данного случая показана на рис. 89.

При расчете давления разрыва пород для случая нефилтующейся жидкости нужно величины напряжений вблизи скважины, определяемые формулами Ламе, подставить в выражение зависимости $S_* = f(\sigma)$, а также использовать формулу (4.3) и приведенные выше

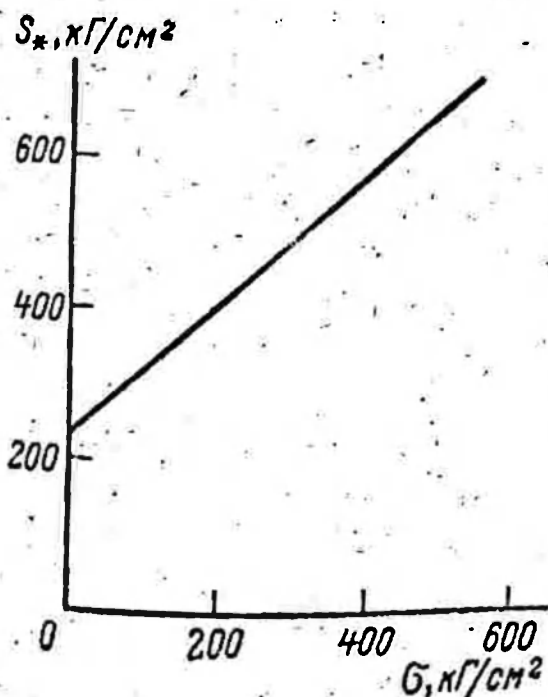


Рис. 89. Зависимость $S_* = f(\sigma)$.

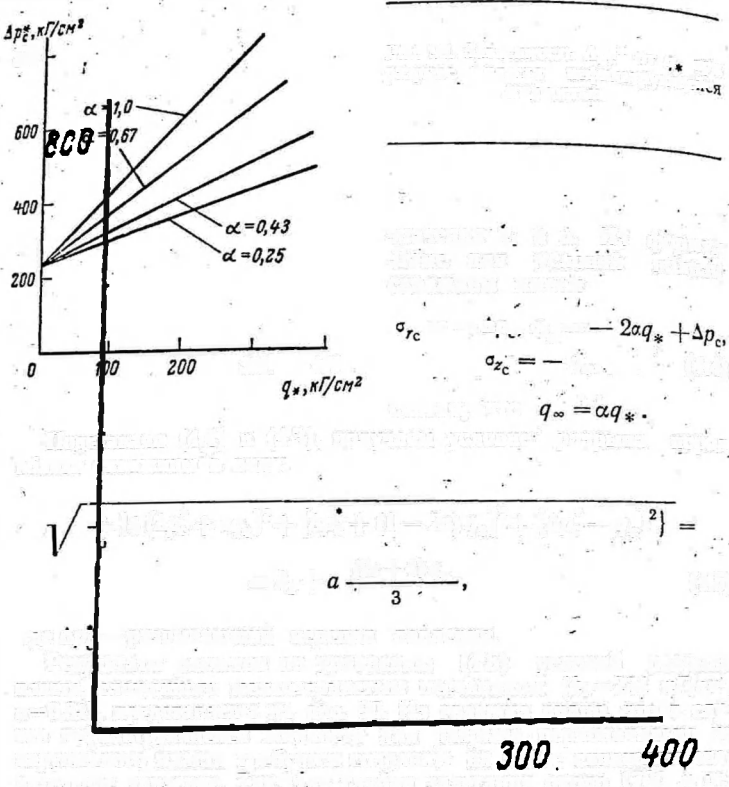


Рис. 90. Зависимость Δp_{c^*} от q_* при разрыве пласта нефилтующей жидкостью.

значения k_1 и a . Из формул Ламе для условий вблизи скважины имеем:

$$\sigma_{\theta_c} = \frac{\Delta p_{c^*}}{q_*} \quad (4.4)$$

считая, что

Подставляя (4.4) в (4.3), получаем условие разрыва пород вблизи скважины в виде:

$$\frac{1}{r} \left[4 (\Delta p_{c^*} + \alpha q_*)^2 + [\Delta p_{c^*} + (1 - 2\alpha) q_*]^2 + (\Delta p_{c^*} - q_*)^2 \right] = k_1 + \frac{(2\alpha + 1) q_*}{3} \quad (4.5)$$

где Δp_{c^*} — разрывающий перепад давления.

Результаты расчетов по уравнению (4.5) условий разрыва пласта, сложенного мелкозернистым песчаником ($k_1 = 234 \text{ кг/см}^2$, $a = 0,84$), представлены на рис. 90. Из графика видно, что в случае нефилтующейся жидкости для разрыва первоначально не нарушенного пласта требуется создавать на забое скважины значительное давление. Так, для глубин залегания около 1700 м перепад давления, требующийся для разрыва пласта, сложенного мелкозернистым песчаником, может при отсутствии в породах пласта естественных нарушений достигать 700—800 кг/см². Этот факт имеет следующее значение. Пусть требуется образовать в пласте горизонтальную трещину путем гидравлического разрыва, при этом боковое горное давление в пласте меньше вертикального горного давления. Возникает вопрос: возможно ли это? Если пласт, подвергаемый разрыву, является в значительной степени трещиноватым (разбит густой сеткой различным образом тирозанных нарушений), то ответ на поставленный вопрос будет следующий: горизонтальную трещину образовать нельзя. Если нарушения в пласте расположены на более или менее значительном расстоянии друг от друга, т. е. в области, вскрытой скважиной, и пласт является монолитным, то горизонтальную трещину образовать можно, применяя малофилтующуюся жидкость и устрой-

ство, инициирующее трещину в горизонтальном направлении, аналогичное устройству, которое описано в работе [139]. Возможно, поскольку она уже инициирована, потребуется преодолеть лишь вертикальное горное давление, а для образования вертикальной трещины — давление, определяемое не только боковым горным давлением, но и прочностью породы. Поэтому, несмотря на то, что боковое горное давление меньше вертикального, давление, требующееся для образования вертикальной трещины, будет больше давления, при котором образуется заранее инициированная горизонтальная трещина. Конечно, эта горизонтальная трещина будет распространяться в горизонтальной или близкой к горизонтальной плоскости лишь до первого вертикального нарушения в пласте. Дальше будет распространяться вертикальная трещина. Однако в слабо нарушенных пластах радиус горизонтальной трещины может быть большим.

Определим теперь давление, при котором образуется трещина в породе при избирательном разрыве пласта (в заранее выбранном узком интервале) фильтрующейся жидкостью. Для этого используем формулы главы III, определяющие напряжение в пласте при центрально-симметричном движении вязкой жидкости. Однако при этом нужно знать не только компоненты дополнительного напряжения, возникающего в результате действия на породы пласта градиентов давления фильтрующейся жидкости, но и горного давления. Будем полагать, что в этом случае напряжение вблизи скважины, возникающее от горного давления, будет приближенно таким же, как и в описанном выше случае. Отсюда из § 2 главы III при $\nu=0,2$ имеем

$$\sigma_{rc} = 0, \sigma_{\theta c} = -2q_{\infty} + 0,75\Delta p_c = -2\alpha q_* + 0,75\Delta p_c, \sigma_{zc} = -q_* + 0,75\Delta p_c. \quad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (4.3), получим, используя приведенные выше значения k_1 и a для мелкозернистого песчаника, следующее уравнение для расчета разрывающего перепада давления Δp_c^* :

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(0,75\Delta p_c^* - 2\alpha q_*)^2 + (1 - 2\alpha)^2 q_*^2 + (0,75\Delta p_c^* - q_*)^2]} = 234 + 0,84 \left[\frac{(1 + 2\alpha) q_*}{3} - 0,5\Delta p_c^* \right]. \quad (4.7)$$

Результаты расчетов Δp_c^* по формуле (4.7) представлены на графике рис. 91 для различных α . Из рисунка видно, что и при избирательном разрыве пласта фильтрующейся жидкостью в случае отсутствия в пласте вблизи скважины естественных нарушений давление разрыва будет высоким. Перепад давления, требующийся для разрыва пласта мелкозерни-

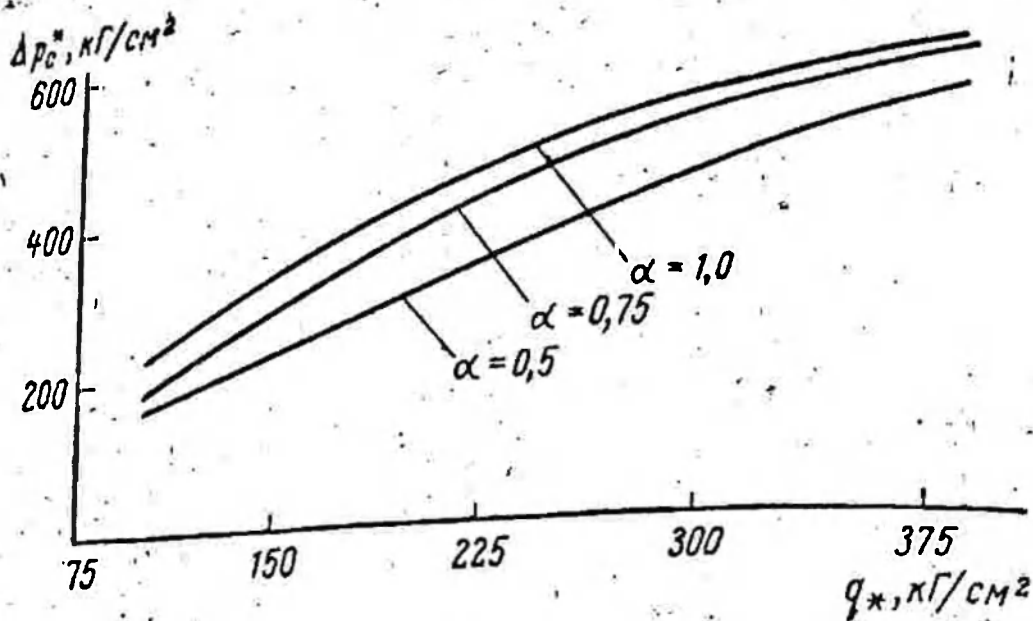


Рис. 91. Зависимость Δp_c^* от q_* при разрыве пласта фильтрующей жидкостью.

стого песчаника, залегающего на глубине около 1700 м, может достигать 700—750 кГ/см². Описанным выше способом можно сделать расчет и для случая разрыва пласта вязкой фильтрующейся жидкостью, движущейся в пласте осесимметрично.

Уравнение для расчета разрывающего перепада давления в этом случае имеет вид:

$$\sqrt{\frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{\Delta p_c^*}{1-\nu} - 2\alpha q_* \right)^2 + [(1-2\alpha)q_* + \Delta p_c^*]^2 + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \Delta p_c^* - q_* \right)^2 \right\}} = k_1 + a \left[\frac{(1+2\alpha)q_* - \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta p_c^*}{3} \right]. \quad (4.8)$$

Однако разрывающий перепад давления можно вычислить по формуле (4.8), по-видимому, в тех случаях, когда пласт очень прочно связан с кровлей. В противном случае из-за высокого давления на забое скважины раньше произойдет расслоение пород по контактам пласта с кровлей и подошвой. Отметим еще раз, что вычисляемые выше давления разрыва относятся к пластам, не содержащим естественных трещин. Если же пласт имеет трещины, то давление «разрыва» будет определяться местным горным давлением.

2. Определение размеров трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Изменение величины $\frac{\Delta p_c}{q_\infty}$ в зависимости от $\frac{E^2 C_{\text{пл}}}{q_\infty^3 V_{\text{ж}}}$ при $\nu=0,2$, рассчитанное по формуле (6.39) главы II, т. е.

для случая образования вертикальной трещины путем закачки в нее нефилтующейся жидкости, показано на рис. 92. Заметим, что величина, отложенная на рис. 92 по оси абсцисс, с течением времени уменьшается, так как $V_{\text{ж}}$ при $\dot{Q}=\text{const}$, непрерывно возрастает. Поэтому $\Delta p_c \rightarrow q_\infty$ при $V_{\text{ж}} \rightarrow \infty$. Определим теперь разме-

ры трещины при некоторых значениях параметров пласта и процесса гидравлического разрыва. Пусть $E=10^5$ кГ/см², $\nu=0,2$, $Q=10^4$ см³/сек (около 900 м³/сутки), $\mu=1$ пз=10⁻⁶ кГ сек/см², $q_{\infty}=100$ кГ/см², $V_{ж}=2$ м³=2·10⁶ см³. Тогда имеем $\frac{E^2 Q \mu}{q_{\infty}^3 V_{ж}} = 0,5 \cdot 10^4$ и по формуле (6.39) главы II $\frac{\Delta p_c}{q_{\infty}} = 1,065$.

По формуле (6.42) той же главы получаем

$$l = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^5}{5,6 \cdot 0,96 \cdot 10^3 \cdot 6,5}} = 24 \text{ м}$$

и на основании формулы (6.41) главы II имеем

$$\omega_0 = \frac{4 \cdot 0,96 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 6,5}{10^5} = 0,6 \text{ см.}$$

Зависимость $\frac{p_c}{q}$ от $\frac{E^2 Q \mu}{q^3 V_{ж}}$ в случае образования горизонтальной трещины при помощи нефилтующейся жидкости, рассчитанная по формуле (6.32) главы II, при $\frac{q}{p_k} = 3$ показана на рис. 93. При $q=300$ кГ/см², $p_k=100$ кГ/см², $V_{ж}=12,4$ м³ и остальных тех же данных, что и выше, $\frac{E^2 Q \mu}{q^3 V_{ж}} = 0,3 \cdot 10^{-5}$, а величина $\frac{p_c}{q} = 1,01$. Следовательно, по формулам (6.28) и (6.31) главы II $R=44$ м, $\omega_0=0,32$ см. Как видно из приведенных выше расчетов, при распространении горизонтальной трещины нефилтующейся жидкостью давление жидкости в трещине быстрее стремится к горному давлению, чем при вертикальной трещине, в результате

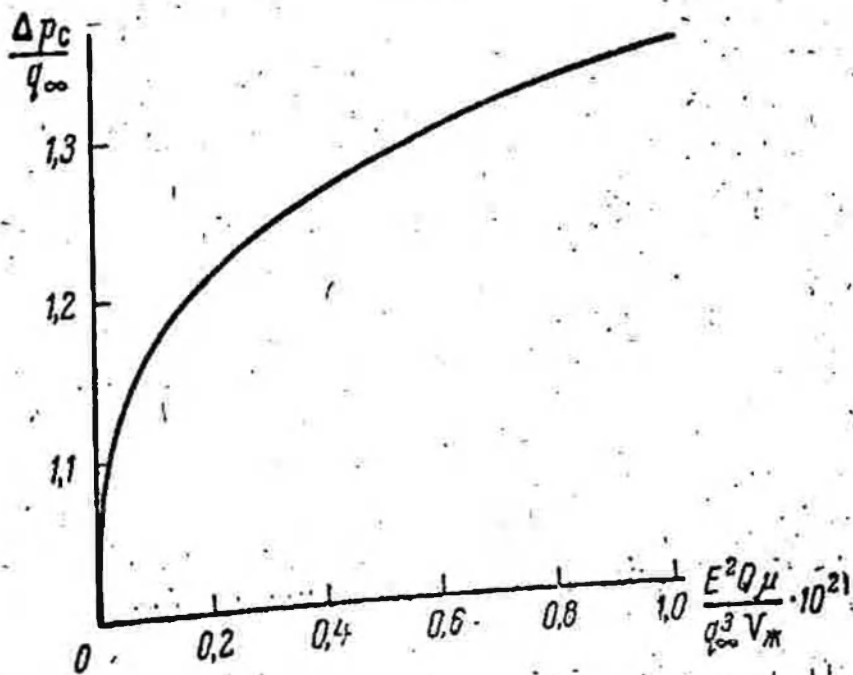


Рис. 92. Зависимость $\frac{\Delta p_c}{q_{\infty}}$ от $\frac{E^2 Q \mu}{q_{\infty}^3 V_{ж}}$

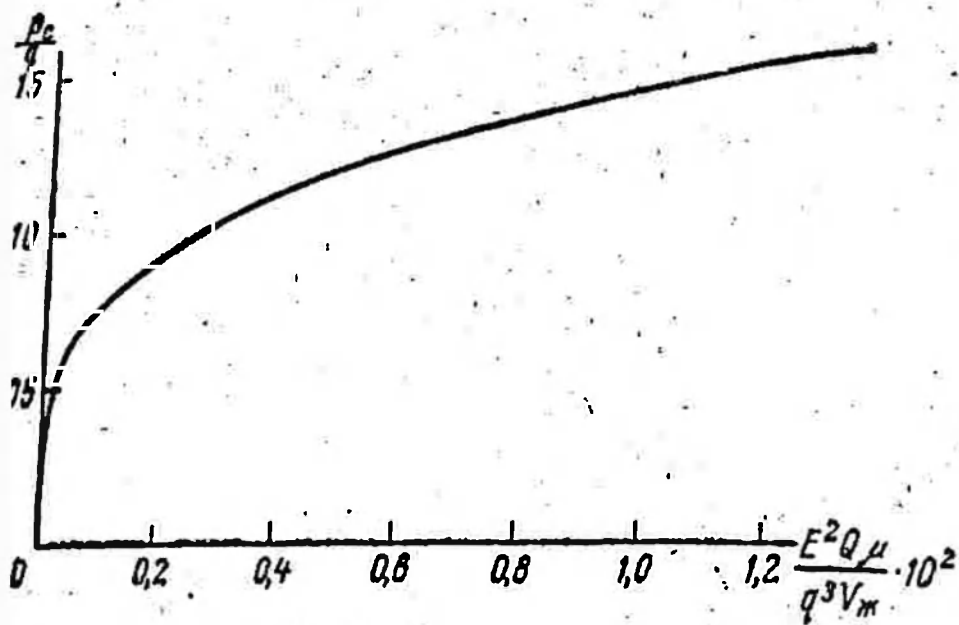


Рис. 93. Зависимость $\frac{\Delta p_c}{q}$ от $\frac{E^2 Q \mu}{q^3 V_{ж}}$ при $\frac{q}{\rho_k} = 3$.

его ширина трещины во втором случае получается большей, чем в первом, при том же произведении $Q\mu$ и даже при большем $V_{ж}$.

Определим теперь размеры вертикальной трещины, образуемой при помощи фильтрующейся жидкости. Пусть $Q = 10^4$ см³/сек, $\mu = 10^{-6}$ кг сек/см², $h = 10^3$ см, $m = 0,2$, $k = 100$ мд = 10^{-9} см², $q_{\infty} = 100$ кг/см², $V_{ж} = 100$ м³ = 10^8 см³, $E = 10^5$ кг/см², $\nu = 0,2$. Тогда, по формулам (3.19) и (3.20) главы III имеем

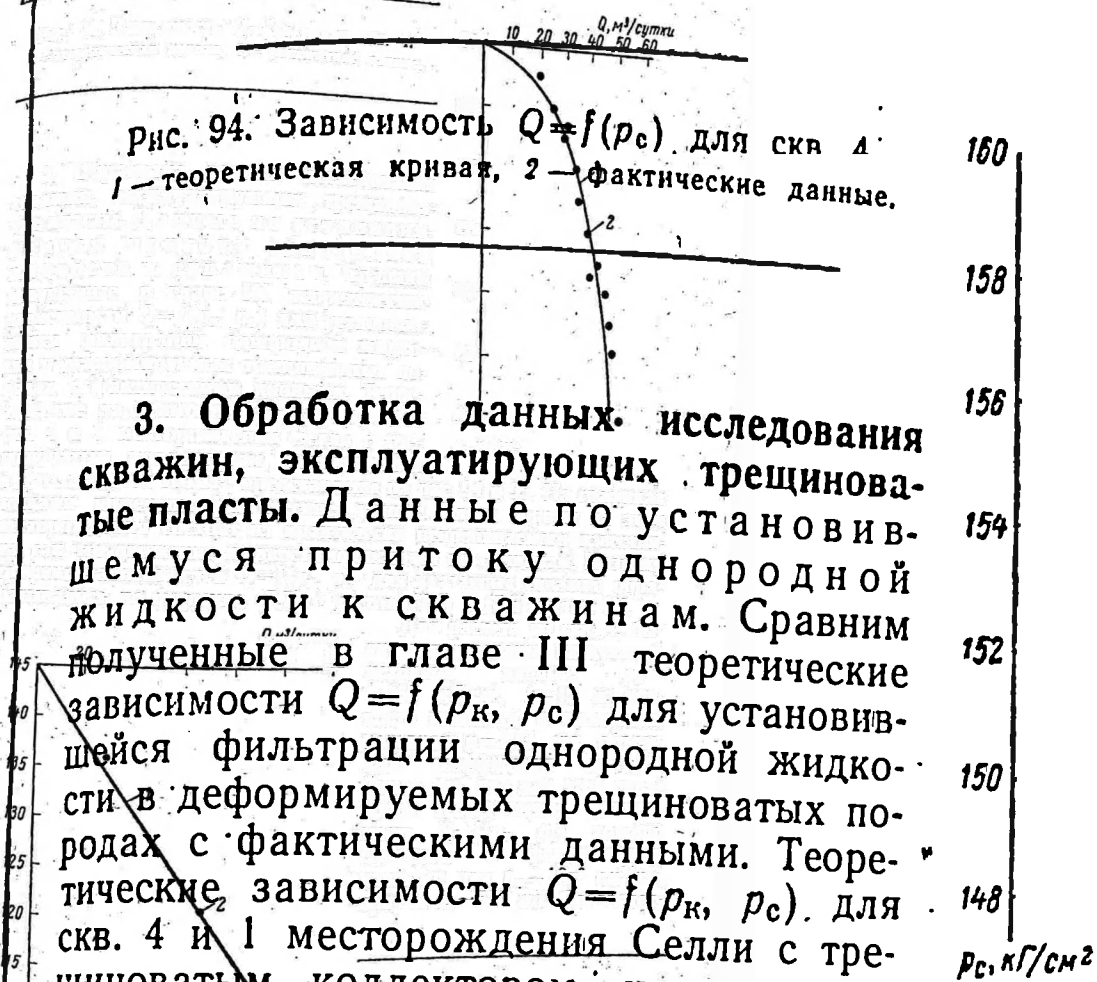
$$i = \sqrt[3]{\frac{10^8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}} = 35 \text{ м}$$

при $\Delta p_c - q_{\infty} = 5$ кг/см²

$$\omega_0 = \frac{4 \cdot 0,6 \cdot 1,2 \cdot 0,5}{3 \cdot 10^5} \cdot 35 \cdot 10^2 = 1,7 \text{ мм.}$$

Из этого расчета следует, что даже при закачке в пласт значительного объема жидкости, равного 100 м³, полудлина вертикальной трещины получается равной всего 35 м, а ее максимальная ширина равна 1,7 мм. В случае вертикальной трещины, расширяемой при помощи нефилтующейся жидкости, полудлина трещины l равна 24 м, а $\omega_0 = 6$ мм при закачке в трещину лишь 1 м³ жидкости. Как видно, ширина вертикальной трещины, образованной при помощи фильтрующейся жидкости, получается равной всего 1,7 мм. Однако такая ширина трещины достаточна для того, чтобы в нее вошел песок. Закачанный в трещину песок будет оказывать дополнительное сопротивление движению жидкости, что в свою очередь будет способствовать расширению трещины. Подобными расчетами можно показать, что объем нефилтующейся жидкости, которую нужно закачать в трещину для того, чтобы ее ширина стала достаточной для прохождения в трещину песка, значительно меньше соответствующего объема фильтрующейся жидкости. Из приведенных выше расчетов видна практическая целесообразность снижения фильтруемости жидкости, применяемой при гидравлических разрывах пласта.

Рис. 94. Зависимость $Q=f(p_c)$ для скв. 4
1 — теоретическая кривая, 2 — фактические данные.



3. Обработка данных исследования скважин, эксплуатирующих трещиноватые пласты. Данные по установившемуся притоку однородной жидкости к скважинам. Сравним полученные в главе III теоретические зависимости $Q=f(p_k, p_c)$ для установившейся фильтрации однородной жидкости в деформируемых трещиноватых породах с фактическими данными. Теоретические зависимости $Q=f(p_k, p_c)$ для скв. 4 и 1 месторождения Селли с трещиноватым коллектором, находящегося в Дагестанской АССР, представлены на рис. 94 и 95. На графиках точками помечены фактические данные. Блоки породы на этом месторождении состоят из практически непроницаемого известняка, так что движение жидкости происходит по трещинам. Поэтому графики зависимостей $Q=f(p_k, p_c)$ для указанных скважин обрабатывались по формуле (7.7) с учетом (7.4) и (7.5) главы III.

Для расчета по скв. 4, были использованы следующие исходные данные: $p_k = 160 \text{ кг/см}^2$, $h = 12 \text{ м}$; вязкость жидкости в пластовых условиях $\mu = 2,13 \text{ спз}$, объемный коэффициент $b_0 = 1,22$. Оказалось, что для этой скважины теоретическая зависимость $Q=f(p_k, p_c)$ хорошо совпадает с фактическими данными при $v_* = 10^{-4} \text{ см}^2/\text{кг}$, причем $k_1 \sim 530 \text{ мд}$. Соответ-

Рис. 95. Зависимость $Q=f(p_c)$ для скв. 1.
1 — теоретическая кривая, 2 — фактические данные.

венно для скв. 1 в качестве исходных данных были взяты: $\rho_k = 145 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 1,5 \text{ сПз}$, $b_0 = 1,16$, $h = 44 \text{ м}$. Теоретическая зависимость $Q = f(\rho_k, \rho_c)$ хорошо согласуется с фактическими данными при $\beta_* = 10^{-3} \text{ см}^2/\text{кг}$. Проницаемость трещиноватого пласта $k_1 \approx 17 \text{ мД}$.

Давление в скв. 4 в момент снятия индикаторной кривой было несколько ниже давления насыщения. Следовательно, в пласте происходило движение газированной жидкости. Однако при снятии индикаторной кривой газовый фактор изменялся незначительно, поэтому можно было предположить, что в пласте движется однофазная жидкость с некоторой эффективной вязкостью. Отметим также следующее обстоятельство. При снятии индикаторной кривой газовый фактор в скв. 1 был больше газового фактора в скв. 4. Однако индикаторная кривая у скв. 4 имеет большую кривизну, чем у скв. 1. Это может быть еще одним свидетельством в пользу того, что причиной искривления индикаторной кривой в скв. 4 не является присутствие газа в пластовой жидкости. При максимальном значении расхода жидкости в пластовых условиях $0,7 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{сек}$, плотности нефти $\rho_{жк} = 0,87 \text{ г/см}^3$ и $r_c = 10 \text{ см}$ получаем, что число Рейнольдса $Re = \frac{Q r_w}{2 \pi r_c \mu} = 450$, т. е. меньше критического значения [68]. Таким образом, заключаем, что наиболее вероятной причиной изгиба индикаторной кривой скв. 4 является, как это было принято выше, деформация трещин.

Данные по неустановившемуся притоку однородной жидкости к скважинам. Линеаризация уравнения движения однородной жидкости в коллекторах с чисто трещинной пористостью (см. § 7 главы III) позволяет применять при обработке данных исследования скважин на неустановившихся режимах методы, разработанные для линейных уравнений.

Решение задачи о притоке жидкости к скважине бесконечно-малого радиуса из неограниченного пласта в этом случае имеет вид (см. обозначения в § 7 главы III):

$$P^4 - P_n^4 = \frac{Q_u}{\pi k h \beta_*^3} \text{Ei} \left(-\frac{r}{\sqrt{\pi t}} \right) - \text{Ei}(-\xi) =$$

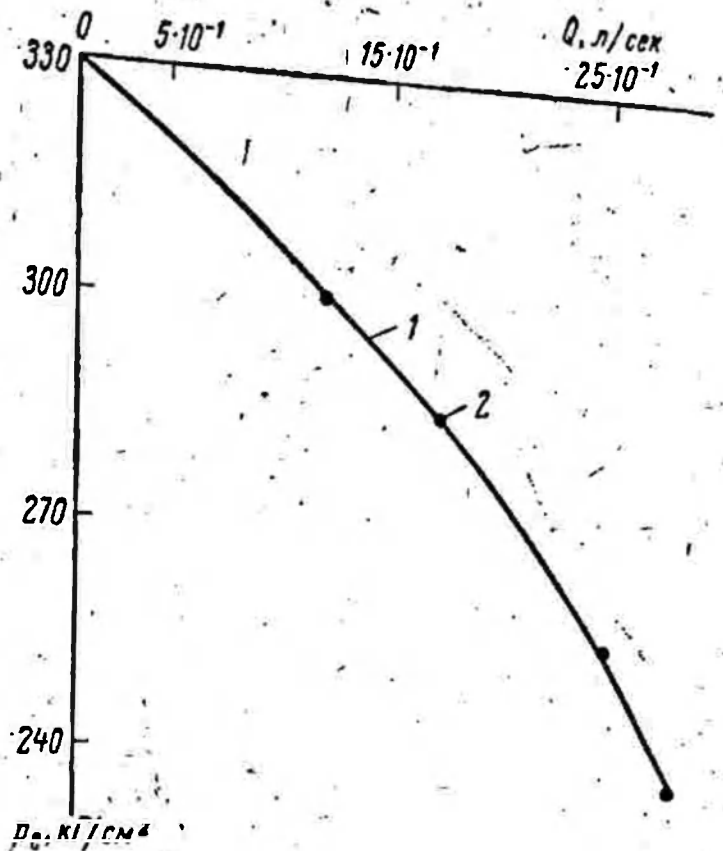
$$= \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\pi t}} \quad (4.9)$$

Для обработки данных по восстановлению давления в скважинах, эксплуатировавшихся достаточно долгое время с постоянным дебитом, можно использовать метод И. А. Чарного [108]. Согласно этому методу имеем при больших t формулу

$$P_c^4(t) - P_c^4(0) = \frac{Q_u}{\pi k h \beta_*^3} \ln \frac{2,25x}{r_c^2} + \frac{Q_u}{\pi k h \beta_*^3} \ln t. \quad (4.10)$$

Рис. 96. Зависимость $Q=f(p_c)$ для скв. 20.

1 — теоретическая кривая,
2 — фактические данные.



По этой формуле были обработаны данные по восстановлению давления в скв. 20 месторождения Заманкул (Чечено-Ингушская АССР). Основные сведения по скважине: $\mu = 1$ спз, $h = 31$ м, $b_0 = 1,13$, $p_K = 331$ кг/см². Для определения β_* были использованы данные по установившемуся притоку жидкости к скважине. Расчетная индикаторная кривая для скв. 20 и соответствующие фактические данные показаны на рис. 96.

Результаты обработки данных по восстановлению давления в скв. 20 показаны на рис. 97. При этом сжимаемость β_* оказалась равной $3 \cdot 10^{-3}$ см²/кг, проницаемость, определенная по индикаторной кривой, — 21 мд, а по кривой восстановления давления — 24 мд.

4. Оценка «прочности» геологических структур. Вопрос о возможности образования трещин, т. е. гидравлическом разрыве пласта, является важным при бурении скважин, когда из-за высокого давления на забое скважины могут наблюдаться серьезные осложнения: уходы глинистого раствора в образовавшиеся в гор-

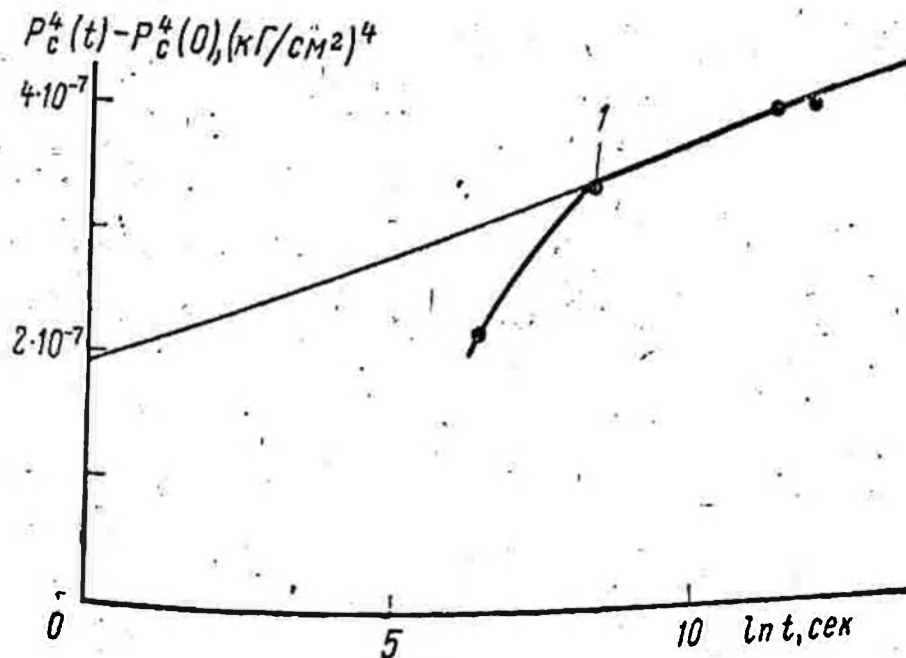


Рис. 97. Кривая восстановления давления в скв. 20.

1 — фактические данные.

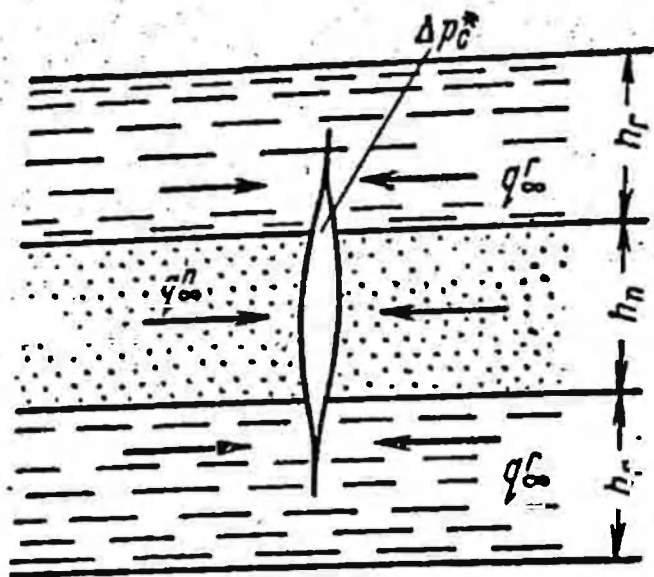


Рис. 98. Вертикальный разрез пласта.

ных породах трещины. При создании подземных хранилищ газа и нефтепродуктов, при таких методах извлечения нефти из недр, как например, закачка в пласт газа высокого давления, когда в пластах приходится создавать высокое давление, возникает опасность расширения вертикальных нарушений, которые могут быть в пластах, образования открытых трещин и прорыва закачиваемых в пласт веществ в вышележащие пласты и на дневную поверхность. Пусть, например, скважина, через которую в пласт закачивают газ или жидкость, прошла через сомкнутую под действием бокового горного давления вертикальную трещину. Вертикальный разрез пласта показан на рис. 98. Сверху и снизу пласт ограничен глинистым пластом мощностью h_r . Мощность пласта песчаника равна h_n . Боковое давление в песчаном пласте q_n^p , в глинистом q_r^g . Ввиду релаксации напряжений боковое давление в глинистом пласте больше, чем в песчаном. Критическим является перепад давления, при котором вертикальная трещина достигает верхней границы глинистого пласта. По аналогии с задачей распространения вертикальной трещины при гидравлическом разрыве пласта [38] имеем [47] выражение для критического перепада давления Δp_c^*

$$\Delta p_c^* = q_r^g - (q_n^p - q_r^g) \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\frac{h_n}{2}}{h_r + \frac{h_n}{2}} \right).$$

Допустим, что $q_r^g = 100 \text{ кг/см}^2$, $q_n^p = 50 \text{ кг/см}^2$, $h_n = 10 \text{ м}$, $h_r = 10 \text{ м}$. Тогда по приведенной выше формуле $\Delta p_c^* \approx 75 \text{ кг/см}^2$. Этот перепад давления и является предельным для данного пласта. Если он будет превышен, трещина пройдет через глинистый пласт и сообщит рассматриваемый пласт с вышележащими пластами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулин Ф. С. Расслоение девонского продуктивного пласта при контурном заводнении. Нефтяное хозяйство, № 1, 1958.
2. Акулинин А. И., Торяник М. Е. Давление при гидравлическом разрыве пласта на месторождении Ключевое. Новости нефтяной техники. «Нефтепромысловое дело». № 4, 1958.
3. Амиров А. Д. Вопросы эксплуатации сверхглубоких скважин Азерб. гос. изд. нефт. и научно-техн. литературы, 1959.
4. Антонов Д. А. Экспериментальное определение коэффициента сжимаемости песчаников. Труды УфНИИ, вып. II, 1957.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
6. Байдюк Б. В., Шрейнер Л. А. Влияние напряженного состояния и влажности на устойчивость глинистых пород в скважинах. Труды Института нефти, т. XI, изд. АН СССР, 1958.
7. Бан Акош, Басниев К. С., Николаевский В. Н. Об основных уравнениях фильтрации в сжимаемых пористых средах. Журнал прикладной механики и технической физики, № 3, 1961.
8. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1955.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
10. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, т. XXIII, вып. 3, 1959.
11. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, т. XXIII, вып. 4, 1959.
12. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, XXIV, вып. 2, 1960.
13. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ДАН СССР, т. 132, № 3, 1960.
14. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, т. XXIV, вып. 5, 1960.
15. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волны разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.

16. Баренблатт Г. И. О возможности линеаризации в некоторых задачах нестационарной фильтрации газа. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1956.
17. Бейкер Р. Дж. Течение жидкости в трещиноватых породах. IV Международный нефтяной конгресс. Бурение скважин и добыча нефти и газа. Гостехиздат, 1956.
18. Белоусов В. В. Основные вопросы геотектоники. Госгеолтехиздат, 1954.
19. Блажевич В. А. О расслоении пород пласта при гидравлическом разрыве и закачке воды в нагнетательные скважины Туймазинского месторождения. Нефтяное хозяйство, № 5, 1960.
20. Васильев Ю. Н. Механизм расширения трещин при гидроразрыве в карбонатных коллекторах. Нефтяное хозяйство, № 6, 1958.
21. Выборных С. Ф. Контроль гидравлического разрыва пласта методом меченых атомов. Нефтяник, № 7, 1956.
22. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1953.
23. Гарушев А. Р. Гидравлический разрыв пласта на нагнетательных скважинах Ахтырско-Бугундырского месторождения. Нефтяное хозяйство, № 12, 1958.
24. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. ОНТИ, 1937.
25. Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практическое применение. Госстройиздат, 1948.
26. Гзовский М. В. Механизм формирования сложных тектонических разрывов. Разведка и охрана недр, № 7, 1956.
27. Гзовский М. В. Метод моделирования в тектонофизике. Советская геология, № 4, 1958.
28. Гзовский М. В. Моделирование тектонических процессов. Проблемы тектонофизики. Госгеолтехиздат, 1960.
29. Гудок Н. С., Кусаков М. М. Экспериментальное исследование влияния внешнего давления на проницаемость нефтесодержащих пород. ДАН СССР, т. 119, № 2, 1958.
30. Давиденков Н. Н. Новый метод применения моделей к изучению равновесия в грунте. ЖТФ, № 1, 1933.
31. Давидянц В. Т. Измерения проявлений горного давления на шахтах Донецкого бассейна. Углетехиздат, 1952.
32. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951.
33. Добрынин В. М. Влияние давления на коллекторские свойства песчаников. Геология нефти и газа, № 1, 1963.
34. Дон Угли. Исследование механических свойств горных пород Донецкого бассейна. Углетехиздат, 1951.
35. Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смесей жидкости с песком в скважине и в трещине. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1958.
36. Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефтяной жидкости в случае постоянного горного давления. Изв. АН СССР, ОТН, «Механ. и машиностр.», № 5, 1959.
37. Желтов Ю. В., Касимов Р. Ш. О возможности одновременного образования нескольких трещин при гидроразрыве пласта. Изв. АН СССР, ОТН, «Механ. и машиностр.», № 6, 1963.
38. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1955.
39. Желтов Ю. П. Об одном приближенном методе расчетов размеров трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1957.

40. Желтов Ю. П. Гидравлический разрыв пласта. Обзор зарубежной практики. Гостоптехиздат, 1957.
41. Желтов Ю. П. Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующейся жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.
42. Желтов Ю. П. О моделировании образования трещин в горных породах. Изв. АН СССР, ОТН, «Механ. и машиностр.», № 4, 1959.
43. Желтов Ю. П. Об образовании необратимых трещин в горных породах. Изв. АН СССР, ОТН, «Механ. и машиностр.», № 6, 1960.
44. Желтов Ю. П., Желтов Ю. В. Моделирование процесса распространения трещин при гидравлическом разрыве пласта. Нефтяное хозяйство, № 1, 1961.
45. Желтов Ю. П. Об определении ориентации трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Новости нефтяной техники, «Нефтепромысловое дело», № 10, 1961.
46. Желтов Ю. П. О движении однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах с чисто трещинной пористостью. ПМТФ, № 6, 1961.
47. Желтов Ю. П. О моделировании в нефтепромысловой механике. Обзор. ПМТФ, № 4, 1962.
48. Желтов Ю. П. Об учете сжимаемости пористой среды при фильтрации в ней однородной жидкости. Труды ВНИИ, вып. XXXVII, Гостоптехиздат, 1962.
49. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Ученые записки МГУ, вып. 39, 1940.
50. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1945.
51. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1947.
52. Касимов Р. Ш., Желтов Ю. В. Моделирование процесса гидравлического разрыва в пластах с трещинными коллекторами. НТС по добыче нефти, вып. 22, 1964.
53. Котяхов Ф. И. Приближенный метод определения запасов нефти в трещиноватых породах. Нефтяное хозяйство, № 4, 1956.
54. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. ОГИЗ, 1948.
55. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, 1961.
56. Кравченко И. И. Новая технология изоляции подошвенных вод. Новости нефтяной техники, «Нефтепромысловое дело», вып. 6, 1957.
57. Кривонос И. В. Гидравлический разрыв пласта по эксплуатационной колонне. Новости нефтяной техники, «Нефтепромысловое дело», № 12, 1959.
58. Крылов А. П., Баренблатт Г. И. Об упруго-пластическом режиме нефтяного пласта. Изд. АН СССР, 1955.
59. Кузнецов Г. Н. Экспериментальные методы исследования вопросов горного давления. Труды Совещания по управлению горным давлением. Углетехиздат, 1948.
60. Кузьмичев Д. Н. О напряженном состоянии толстостенных цилиндров из песчаника при гидравлическом разрыве. Труды ГрозНИИ, вып. 5, Грозный, 1959.
61. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гос. изд. физико-матем. лит., 1958.
62. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - Физматгиз, 1959.

64. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
65. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
66. Лесик Н. П., Овнатанов Г. Т., Руппенейт К. В., Солохин Е. Я. Принципы физического моделирования явлений гидравлического разрыва нефтяных пластов. Труды ВНИИ, вып. 16, 1958.
67. Ловля С. А., Желтов Ю. П., Беляев Б. М. Пути усовершенствования гидравлического разрыва пласта. Нефтяное хозяйство, № 5, 1960.
68. Ломизе Г. М. Фильтрация в трещиноватых породах. Энергониздат, 1951.
69. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
70. Майдебор В. Н. Приближенный метод оценки коэффициента трещиноватости по данным исследования залежи. НТС по добыче нефти, вып. 20, 1963.
71. Максимович Г. К. Гидравлический разрыв нефтяных пластов. Гостоптехиздат, 1957.
72. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
73. Меликбеков А. С. Многоэтапный разрыв пласта при помощи кислоты без закрепления трещин песком. Тематический сборник, ГОСИНТИ, 1960.
74. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Азнефтетехиздат, 1959.
75. Муравьев И. М., Абдуллин Ф. С. Освоение и исследование нагнетательных скважин. Гостоптехиздат, 1963.
76. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
77. Надан А. Пластичность и разрушение твердых тел. Изд. иностр. лит., 1954.
78. Ножкин Н. В. Гидравлический разрыв пласта и возможности его использования для предварительной дегазации мощного сильно газового пласта. Сборник статей по вопросам горного дела и горной механики. ЦИТИУгля, 1961.
79. Овнатанов Г. Т., Солохин Е. Я., Руппенейт К. В., Лесик Н. П. Определение пригодности песков для гидравлического разрыва пласта. Нефтяное хозяйство, № 3, 1957.
80. Осокина Д. Н. Пластичные оптически активные материалы для моделирования тектонических процессов и методы исследования механических и оптических свойств этих материалов. Проблемы тектонофизики. Госгеолтехиздат, 1960.
81. Пилатовский В. П. Об уравнениях фильтрации в трещиноватых породах. ВНИИ, Научно-техн. сборник, № 10. Гостоптехиздат, 1960.
82. Пискунов Н. С. Разрыв пласта и влияние разрыва на процесс эксплуатации месторождения. Труды ВНИИ, вып. 16, 1958.
83. Покровский Г. И. Центробежное моделирование. ОНТИ, 1935.
84. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
85. Рейнер М. Десять лекций по теоретической реологии. Гостехиздат, 1947.
86. Ризниченко Ю. В., Ивакин Б. Н., Бугров В. Р. Моделирование сейсмических волн. Изв. АН СССР, серия «Геофизика», № 5, 1951.
87. Ризниченко Ю. В. Сейсмоакустические методы изучения напряженного состояния горных пород. Изв. АН СССР, серия «Геофизика», № 6, 1955.
88. Ромм Е. С. Исследование фильтрации в трещиноватых породах в связи с их коллекторскими свойствами. Труды ВНИГРИ, вып. 121, 1958.

89. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах. Изв. АН СССР, серия «Геофизика», № 1, 1948.
90. Руппенейт К. В. Некоторые вопросы механики горных пород. Углетехиздат, 1954.
91. Руппенейт К. В. Механические свойства горных пород. Углетехиздат, 1956.
92. Руппенейт К. В., Либерман Ю. М. Введение в механику горных пород. Госгортехиздат, 1960.
93. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике ГИТТЛ, 1957.
94. Смехов Е. М., Гмид Л. П., Ромашова М. Г., Ромм Е. С. Вопросы методики изучения трещиноватых пород в связи с их коллекторскими свойствами. Труды ВНИГРИ, вып. 121, 1958.
95. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
96. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГИТТЛ, 1950.
97. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, 1954.
98. Терцагн К. Основания механики грунтов. Геолразведиздат, 1932.
99. Теслюк Е. В. Применение радиоактивных «зернистых» изотопов при гидравлическом разрыве пластов на промыслах Краснодарнефти. Нефтяное хозяйство, № 5, 1956.
100. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
101. Трофимук А. А. К вопросу об оценке емкости трещиноватых нефтяных коллекторов. Нефтяное хозяйство, № 7, 1955.
102. Усачев П. М., Лесик Н. П., Овнатанов Г. Т., Ечестов А. И., Белов В. И., Генс М. А. Гидравлический разрыв пласта с подземным обследованием зоны разрыва. Нефтяное хозяйство, № 5, 1958.
103. Фарберов И. Л., Бруштейн Н. З., Нусинов Г. О., Пятин Р. Н., Федоров Н. А. О гидравлическом разрыве пластов при подземной газификации углей. Подземная газификация углей, № 1, 1958.
104. Флорин В. А. Основные уравнения консолидации земляной среды. ДАН СССР, IX, № 1, 1948.
105. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1953.
106. Христианович С. А., Желтов Ю. П., Баренблатт Г. И. О механизме гидравлического разрыва пласта. Нефтяное хозяйство, № 1, 1957.
107. Христианович С. А. Исследования механизма гидравлического разрыва пласта. Труды института геологии и разработки горючих ископаемых АН СССР, т. II, 1960.
108. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. Гостоптехиздат, 1956.
109. Шапъгин Н. Н., Изюмова А. М. Движение и размещение песка в вертикальной трещине. Нефтяное хозяйство, № 12, 1958.
110. Шестаков В. М. Некоторые вопросы теории упругого режима фильтрации. Журнал прикл. механики и теор. физики, № 3, 1962.
111. Шехтман Ю. М. Приток жидкости к одиночной вертикальной трещине с заполнителем. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1957.
112. Шрейнер Л. А., Петрова О. П. Метод определения пластических свойств горных пород. ДАН СССР, т. 46, вып. 3, 1954.
113. Шрейнер Л. А., Петрова О. П., Якушев В. П., Портнова А. Т., Садиленко К. М., Ключко Н. А., Павлова Н. Н., Баландин П. С., Спивак А. И. Механические и образивные свойства горных пород. Гостоптехиздат, 1958.

114. Шелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, т. 52, № 2, 1946.
115. Шелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.
116. Юстер С. Т., Калун Д. С. Расслоение пород при флудинге. Гостоптехиздат, 1947.
117. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. Госуд. Изд. физико-матем. лит., 1959.
118. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation. J. of Appl. Physics, vol. 12, 1941.
119. Cloos E. Experimental analysis of fracture patterns. Bull. Geol. Soc. Amer., vol. 66, No. 3 1955.
120. Darin S. R., Huitt J. L. Effect of a partial monolayer of propping agent on fracture flow capacity. J. of Petr. Techn., vol. No. 3, 1960.
121. Davis J. G., Reynolds J. J., Coffey H. F. For better fracturing results control that fluid loss. The Oil and Gas J., vol. 54, No. 61, 1956.
122. Dehlinger P., Browne W. H., Bundrant C. O. Optimum sand concentrations in well treatments. J. of Petr. Techn., vol. 6, No. 11, 1954.
123. Dickey P. A., Andressen K. H. Behavior of water input wells. Oil Weekly, vol 120, No. 2, 1945.
124. Fatt J. Pore volume compressibilities of sandstone reservoir rocks. J. of Petr. Techn., vol. 10, No. 3, 1958.
125. Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. J. of Petr. Techn., December, 1957.
126. Gibson H. S. The production of oil from the fields of southwestern Iran. J. Inst. of Petroleum, vol. 34, 1948.
127. Ghauri W. K. Results of well stimulation by hydraulic fracturing and high rate oil backflush. J. of Petr. Techn., vol. 12, No. 6, 1960.
128. Goodknight R. C., Klykoff W. A., Fatt J. H. Nonsteady-state flow and diffusion in porous media containing dead-end pore volume. The Journal of Physical Chemistry, 64, No. 9, 1960.
129. Harrison E., Kieschnick W. F., McGuire W. J. The mechanics of fracture induction and extension. J. of Petr. Techn., vol. 6, No. 10, 1954.
130. Heck E. T. Hydraulic fracturing in light of geologic conditions. Producers Monthly, vol. 24, No. 11, 1960.
131. Howard G. C., Fast C. R. Squeeze cementing operations. J. of Petr. Techn., vol. 2, No. 2, 1950.
132. Hubbert M. K. Theory of scale models as applied to the geologic structures. Bull. Geol. Soc. Amer., 48, No. 10, 1937.
133. Hubbert M. K., Willis D. G. Mechanics of hydraulic fracturing. J. of Petr. Techn., vol. 9, No. 6, 1957.
134. Hubbert M. K., Rubey W. W. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting. Bull. Geol. Soc. Amer., vol. 70, No. 2, 1959.
135. Kern L. R., Perkins T. K., Wyant R. E. The mechanics of sand movement in fracturing. J. of Petr. Techn., July, 1959.
136. Mohaupt H. H., Metzger H. A. Newest well stimulation technique. The Petr. Eng., vol. 30, No. 9, 1958.
137. Parker T. J., McDowell A. N. Model studies of salt-dome tectonics. Bull. Amer. Assoc. Petr. Geol., vol. 39, No. 1—2, 1955.
138. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures. J. of Petr. Techn., vol. 13, No. 9, 1961.
139. Reynolds J. J., Scott J. B., Popham J. L., Coffey H. F. Hydraulic fracture-field tests to determine areal extent and orientation. J. of Petr. Techn., vol. 13, No. 4, 1961.

140. Scott P. P., Bearden W. G., Howard G. C. Rock rupture as affected by fluid properties. J. of Petr. Techn., April, 1953.
141. Scheidegger A. E. Rheology of the earth: the basic problem of geodynamics. Canad. J. Phys., 35, No. 4, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<i>Глава I. Механические свойства и состояние горных пород в земной коре.</i>	5
§ 1. Представления о напряжении и деформации	5
§ 2. Напряжения и деформация в точке тела	11
§ 3. Связи между напряжениями и деформациями	16
§ 4. Горное давление	24
<i>Глава II. Деформация непористых горных пород</i>	27
§ 1. Уравнения движения	27
§ 2. Решения уравнений движения в одномерных задачах	30
§ 3. Упругая деформация горных пород в двумерных задачах	37
§ 4. Деформация упругого полупространства	43
§ 5. Гидравлический разрыв пласта	49
§ 6. Образование трещин в непористых горных породах при гидравлическом разрыве пласта	66
§ 7. Приближенный метод решения задач теории упругости об образовании горизонтальной трещины в горных породах	79
§ 8. Образование необратимых трещин в горных породах	83
§ 9. Пластическая деформация горных пород	89
<i>Глава III. Деформация пористых и проницаемых горных пород</i>	94
§ 1. Основные особенности деформации пористых и проницаемых горных пород	94
§ 2. Напряжение, возникающее в пласте вокруг скважины в процессе фильтрации жидкости	104
§ 3. Образование трещин в пласте при помощи фильтрующейся жидкости	115
§ 4. Механическое взаимодействие горных пород и фильтрующихся в них жидкостей	124
§ 5. Упруго-пластический, реологический и нелинейно-упругий режимы пластов	136
§ 6. Деформация трещиноватых пород при движении в них жидкости	140
§ 7. Некоторые случаи движения однородной жидкости в деформируемых трещиноватых породах	150
<i>Глава IV. Методы подобия. Примеры и приложения</i>	160
§ 1. Применение теории подобия при изучении деформации горных пород	160
§ 2. Моделирование образования трещин в горных породах	168
§ 3. Определение ориентации трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта	178
§ 4. Примеры расчетов	180
Литература	191

Юрий Петрович Желтов
ДЕФОРМАЦИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

Редактор издательства *Н. Д. Дубровина*
Технические редакторы *Л. Д. Агапонова,*
Э. А. Болдырева
Переплет художника *Г. И. Юдицкого*
Корректор *Г. Г. Большова*

Сдано в набор 21/IV 1966 г.
Подписано к печати 15/VII 1966 г.
Формат 60×90¹/₁₆ Печ. л. 12,5 Уч.-изд. л. 12,1
Т-10243 Тираж 1550 Бумага № 1 Заказ № 361/688-66.
Цена 1 р. 08 к. Индекс 1-4-1

Издательство «Недра»,
Москва, К-12, Третьяковский пр., 1/19.
Московская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-88, 1-я Южно-портовый пр., 17.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА“ ГОТОВИТ К ВЫПУСКУ
В 1966 Г. НОВЫЕ КНИГИ ПО НЕФТЕПРОМЫСЛОВОМУ ДЕЛУ**

МИРЗАДЖАНЗАДЕ А. Х., КОВАЛЕВ А. Г. и др. Разработка газоконденсатных месторождений. (Изд. 2, перераб. и доп.). 25 л. Ц. 1 р. 45 к.

В настоящее время в Азербайджане, Краснодарском крае, Саратовской и Волгоградской областях, Туркмении, Узбекистане и на Украине разрабатывается большое число газоконденсатных месторождений.

Книга посвящена вопросам теории и практики разработки этих месторождений. Приведены краткая термодинамическая характеристика газоконденсатных систем и геологические особенности газоконденсатных месторождений.

Рассматриваются газогидродинамические задачи, решение которых позволяет проектировать разработку газоконденсатных месторождений и проводить анализ их разработки на истощение с учетом динамики выпадения конденсата и его влияния на основные показатели процесса эксплуатации залежи.

В ней даны примеры расчета отдельных процессов разработки и эксплуатации газоконденсатных месторождений.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, занимающихся вопросами проектирования и эксплуатации газоконденсатных месторождений.

ПИЛАТОВСКИЙ В. П. Основы гидромеханики пласта. 18 л. Ц. 1 р. 10 к.

В книге систематизированы и достаточно полно изложены результаты исследований фильтрации несжимаемых и упругих жидкостей в тонких проницаемых пластах. Рассмотрены новые задачи гидромеханики пласта, представляющие практический и теоретический интерес. Подробно описаны вопросы учета влияния неоднородностей пласта и потока на характер течения пластовых жидкостей, рассмотрены вопросы гидродинамической устойчивости пластовых потоков, приведены решения задач о перемещении границы раздела жидкостей.

Книга рассчитана на инженеров нефтяных промыслов, промысловых геологов, научных работников исследовательских учреждений.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА“
ГОТОВИТ К ВЫПУСКУ
В 1966 Г.
НОВЫЕ КНИГИ
ПО НЕФТЕПРОМЫСЛОВОМУ
ДЕЛУ**

**ГАДИЕВ С. Г., ЛАЗАРЕ-
ВИЧ И. С.**

**Воздействие на призабой-
ную зону нефтяных и газовых
скважин. 12 л. Ц. 80 коп.**

В книге обобщены последние достижения за рубежом в совершенствовании технологии гидравлического разрыва, кислотных обработок, различных комбинированных методов воздействия на призабойную зону скважин.

В ней приведены теория и практика гидравлического разрыва пласта, описаны возможности фотографирования для изучения условий в скважине. Указаны области использования кислотных обработок для увеличения производительности эксплуатационных скважин и приемистости нагнетательных. Подробно освещены комбинированные методы обработки — гидро-разрыв и кислотная обработка, добавление поверхностно-активных веществ, использование полимеров и т. п.

В заключении указана технико-экономическая эффективность внедрения различных методов воздействия на призабойную зону пласта.

Издание рассчитано на инженерно-технических работников нефтяных и газовых промыслов.