

УЧЕБНЫЙ КУРС **Геодезия**

И.Ф. КУШТИН



УДК 528.2
ББК 26.11
К 96

Куштин И.Ф.

К 96 **Геодезия: обработка результатов измерений: Учебное пособие.** —
М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: издательский центр «МарТ», 2006.
— 288 с. (Серия «Учебный курс»).

ISBN 5-241-00711-3

В учебном пособии изложены основные вопросы геодезии и теории математической обработки результатов геодезических измерений. Простота, компактность и строгость изложения позволяют использовать его студентам вузов, колледжей, техникумов и широкому кругу специалистов геодезического производства.

УДК 528.2
ББК 26.11

ISBN 5-241-00711-3

© Куштин И.Ф., 2006
© Оформление:
издательский центр «МарТ», 2006
© Оформление: ИКЦ «МарТ», 2006

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ГЕОДЕЗИИ

1.1. ПРЕДМЕТ ГЕОДЕЗИИ

Геодезия — наука об измерениях, средствах измерений и математической обработке результатов этих измерений, выполняемых для решения различных научных, производственных и оборонных задач: для определения формы, размеров и гравитационного поля Земли и планет Солнечной системы, для определения координат точек на поверхности Земли и в околоземном пространстве, для создания планов, карт, профилей и математических моделей местности, для выполнения инженерно-геодезических работ при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений.

Геодезия имеет широкое применение в различных областях науки, производства и в военном деле. Топографические карты используют при планировании и размещении производительных сил государства, при разведке и эксплуатации природных ресурсов, в архитектуре и градостроительстве, при мелиорации земель, землеустройстве, лесоустройстве, земельном и городском кадастре. Геодезия используется при строительстве зданий, мостов, тоннелей, метрополитенов, шахт, гидротехнических сооружений, железных и автомобильных дорог, трубопроводов, аэродромов, линий электропередач, при определении деформаций зданий и инженерных сооружений, при строительстве плотин, при решении задач оборонного характера.

Геодезия (греч. — землеразделение) является одной из древнейших наук о Земле, имеет многовековую историю. В процессе своего развития содержание предмета обогатилось, расширилось, и в связи с этим возникло несколько научных и научно-технических дисциплин.

Высшая геодезия, используя результаты высокоточных геодезических, астрономических, гравиметрических и спутниковых измерений, изучает

форму, размеры и гравитационное поле Земли и планет Солнечной системы, занимается созданием государственных опорных геодезических сетей, изучением геодинамических явлений, решением различных геодезических задач на поверхности эллипсоида и в пространстве.

Космическая геодезия — наука, изучающая использование результатов наблюдений искусственных и естественных спутников Земли для решения научных и научно-технических задач геодезии. Наблюдения выполняют как с поверхности планеты, так и непосредственно на спутниках.

Топография рассматривает измерения, выполняемые для создания планов и карт сравнительно небольших участков земной поверхности.

Фотограмметрия изучает формы, размеры, положение, динамику и другие качественные и количественные характеристики объектов по их фотографическим изображениям. Фотограмметрические методы применяются в различных областях науки и техники; в топографии и геодезии, астрономии, архитектуре, строительстве, географии, океанологии, медицине, криминалистике, космических исследованиях и др. Такое широкое применение объясняется объективностью, достоверностью и быстротой получения информации обо всем объекте или отдельных его частях, возможностью бесконтактных исследований явлений и процессов, высокой точностью и производительностью.

Инженерная геодезия изучает геодезические работы при изысканиях, проектировании, строительстве, реконструкции, монтаже и эксплуатации различных инженерных сооружений и технологического оборудования, при разведке и добыче природных богатств страны и ее недр, при создании уникальных объектов и т. п.

1.2. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИИ

1. Система геодезических координат позволяет однозначно определять положение точки в пространстве тремя величинами: геодезической широтой B , геодезической долготой L и геодезической высотой H (рис. 1.1). Если точка расположена на поверхности эллипсоида, то $H = 0$ и ее положение определяют величины B и L .

Геодезической широтой B называют угол между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью геодезического экватора, т. е. плоскостью, проходящей через центр эллипсоида перпендикулярно к его малой оси. **Геодезической долготой** L называют двугранный угол между плоскостью начального геодезического меридиана и плоскостью геодезического меридиана, проходящего через данную точку. Плоскость геодезического меридиана проходит через малую ось эллипсоида.

Геодезической высотой H называют расстояние от данной точки до поверхности эллипсоида по нормали к ней. Геодезические координаты вычисляют по результатам геодезических измерений.

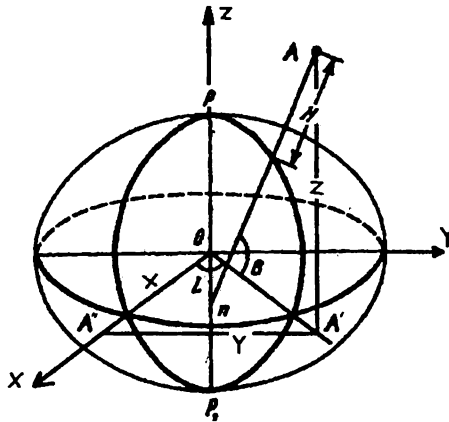


Рис. 1.1. Система геодезических и прямоугольных координат

Кроме геодезических имеются астрономические координаты φ и λ , определяемые из астрономических наблюдений.

Астрономической широтой φ называют угол между отвесной линией, проходящей через данную точку, и плоскостью небесного экватора. **Астрономической долготой** λ называют двугранный угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной

точки. Плоскость астрономического меридиана проходит через отвесную линию данной точки параллельно оси вращения Земли.

Широты B и φ отсчитываются от экватора к полюсам, изменяются от 0° до 90° и считаются положительными для Северного полушария (имеют обозначение с. ш.) и отрицательными для Южного полушария (ю. ш.) Долготы L и λ отсчитываются от начального меридиана к востоку и западу и измеряются от 0° до 180° . Восточные долготы (в. д.) считаются положительными, а западные (з. д.) — отрицательными.

Астрономические и геодезические координаты отличаются вследствие несовпадения отвесных линий и нормалей к поверхности эллипсоида. Это отличие зависит от величины уклонения отвесных линий, среднее квадратическое значение которых для равнинных районов составляет около $5''$, в горных $10-15''$, отдельные значения превышают $40''$.

При мелкомасштабном картографировании различиями между геодезическими и астрономическими координатами часто пренебрегают, и в этих случаях широты и долготы можно считать координатами общей системы географических координат.

На поверхности эллипсоида координатными линиями служат меридианы и параллели. В системе прямоугольных координат для эллипсоида вращения известно уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

При $Z = \text{const}$ вместо (1.1) получим уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = a^2 - \frac{z^2 \cdot a^2}{b^2} = r^2 = \text{const}, \quad (1.2)$$

где r — радиус окружности, получаемый при пересечении поверхности эллипсоида с плоскостью $Z = \text{const}$. Эта окружность называется **параллелью**. При $Z = 0$ параллель имеет наибольший радиус $r = a$ и называется **экватором**. С учетом (1.2) вместо (1.1) получим формулу:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.3)$$

которая является уравнением эллипса, получаемого при пересечении поверхности эллипсоида плоскостью, содержащей ось вращения. Осью вращения эллипсы делятся пополам, каждая половина такого эллипса называется **меридианом**.

Система геодезических координат едина для всей поверхности эллипсоида, удобна для составления карт и имеет широкое применение.

2. Система прямоугольных пространственных координат XYZ. В этой системе (рис. 1.1) за начало координат принят центр O эллипсоида, ось OZ совпадает с малой осью эллипсоида, ось OX находится на пересечении плоскостей геодезического экватора и начального меридиана, ось OY дополняет систему до правой — в правой системе координат вращение оси OX к OY происходит против часовой стрелки, если смотреть по направлению ZO . Положение точки A в этой системе определяется координатами $x = OA''$, $y = A'A''$, $z = A'A$.

Связь между прямоугольными пространственными (x, y, z) и геодезическими (B, L, H) системами выражается формулами (см. рис. 1.1):

$$\begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L, \\ y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где радиус кривизны первого вертикала

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (1.5)$$

a — большая полуось эллипсоида вращения, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — первый эксцентриситет меридианного эллипса, b — малая полуось, H — геодезическая высота.

Для определения геодезических координат B, L, H по прямоугольным x, y, z используют формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} Z &= \frac{y}{x}, \\ \operatorname{tg} B &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2 + \frac{H}{N}} \right), \\ H &= \frac{z}{\sin B} - N(1 - e^2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Значения $\operatorname{tg} B$ и H находят методом приближений.

3. Преобразование систем координат.

В настоящее время в геодезии широко используют спутниковые технологии. В системе GPS (США) используют геоцентрическую систему координат WGS-84, в России — систему координат Пулковско-42 (до 1.07.2002 г.) и СК-95 (с 1.07.2002 г.). Кроме того, используют местные системы координат, переход от которых к государственной системе выполнить трудно или даже невозможно.

Связь между прямоугольными и геодезическими системами выражается формулами (1.4)–(1.6). Если в этих формулах a и e — параметры референц-эллипсоида (РЭ), т. е. принятого на территории данного государства или группы стран, то имеем **референцную систему координат**, если общего земного эллипсоида (ОЗЭ), то получаем **общеземную систему координат**. В обеих системах начало координат находится в центре эллипсоида, ось x — на пересечении плоскостей начального меридиана и экватора, ось z — совпадает с малой полуосью эллипсоида, а ось y дополняет систему до правой.

Для перехода от референцной системы координат x_r, y_r, z_r к общеземной x, y, z на рис. 1.2 имеем

$$\begin{aligned} x &= x_r + \Delta x, \\ y &= y_r + \Delta y, \\ z &= z_r + \Delta z. \end{aligned}$$

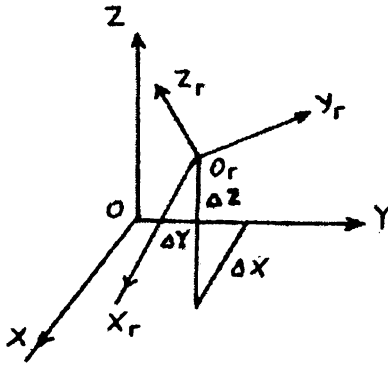


Рис. 1.2. Системы координат

Ввиду непараллельности соответствующих осей координат необходимо выполнить поворот систем x, y, z на углы Эйлера α, β, γ . Соединив поступательно o_r с o и проведя сферу единичного радиуса с центром в точке o , получим прямоугольные и прямосторонние сферические треугольники huz и $x_r y_r z_r$ (рис. 1.3).

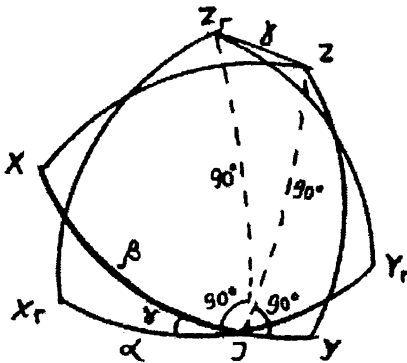


Рис. 1.3. Преобразование систем координат

Для определения направляющих косинусов на рис. 1.3 в сферических треугольниках XX_rJ , XY_rJ , XZ_rJ , X_rYJ , Y_rYJ , JZ_rY , X_rZJ , ZY_rJ и дуге $ZZ_r = \gamma$ по формуле косинусов имеем

$$a_{11} = \cos(X, X_r) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma,$$

$$a_{12} = \cos(X, Y_r) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$a_{13} = \cos(X, Z_r) = \sin \beta \sin \gamma,$$

$$a_{21} = \cos(Y, X_r) = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

$$a_{22} = \cos(Y, Y_r) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

$$a_{23} = \cos(Y, Z_r) = -\cos \beta \sin \gamma,$$

$$a_{31} = \cos(Z, X_r) = -\sin \alpha \sin \gamma,$$

$$a_{32} = \cos(Z, Y_r) = \cos \alpha \sin \gamma,$$

$$a_{33} = \cos(Z, Z_r) = \cos \gamma.$$

Значения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{ПМ} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix},$$

где матрицы поворота Π и масштаба M

$$\Pi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{bmatrix}.$$

При малых значениях угла γ (обычно не превышает $1-1,5''$) матрица

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_x & \omega_y \\ \omega_x & 1 & -\omega_z \\ -\omega_y & \omega_z & 1 \end{bmatrix},$$

в которой $\omega_x = \sin(\beta - \alpha)$, $\omega_y = \gamma \sin \alpha$, $\omega_z = \gamma \cos \alpha$, при этом учитывалось $\alpha \approx \beta$.

Для обратного перехода имеем

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_y}{\omega_z}, \beta = \alpha + \omega_x, \gamma = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

4. Плоские прямоугольные координаты. Часть поверхности эллипсоида по определенному закону изображают на плоскости. Положение точек на этой плоскости определяют прямоугольными координатами x, y . В СНГ часть поверхности эллипсоида, ограниченную меридианами через 6° и 3° (координатную зону), изображают на плоскости с помощью конформной проекции Гаусса-Крюгера.

Система координат в проекции Гаусса-Крюгера определяется следующими условиями:

1) изображение на плоскости равноугольное, т. е. углы при переходе с поверхности эллипсоида на плоскость проекции не искажаются;

2) осевой меридиан, т. е. средний меридиан зоны, и экватор на плоскости изображаются прямыми линиями, принимаемыми за оси абсцисс и ординат. Началом координат служит изображение точки пересечения осевого меридиана с экватором;

3) масштаб вдоль среднего (осевого) меридиана постоянный и принят равным единице. Масштаб в других точках одинаков по всем направлениям и определяется по формуле:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \frac{y^6}{720R^6}. \quad (1.7)$$

Максимальное значение последнего слагаемого для шестиградусной зоны равно $2,9 \cdot 10^{-11}$, поэтому во многих случаях его можно не учитывать.

В каждой зоне образуется самостоятельная система координат. Западной границей первой зоны является гринвичский меридиан, счет зон ведется к востоку от Гринвича. Долгота $L_{0,N}$ осевого меридиана шестиградусной зоны

$$L_{0,N} = 6^\circ N - 3^\circ,$$

где N — номер координатной зоны.

Координатные зоны совпадают с колоннами листов масштаба 1:1000000. Номер зоны на 30 единиц отличается от номера колонны. На территории

СНГ широты $B > 35^\circ$, поэтому для шестиградусной зоны $y < y_{max} \cos B = 334 \cos 35^\circ = 274$ км. Этому значению соответствует $m_{max} \approx 1 + y^2/2R^2 = 1,00092$ и относительное искажение длины:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{Dm - D}{D} = m - 1 = 92/100000 \approx 1/1100.$$

При топографических съемках в масштабе 1:5000 и крупнее требования к точности изображения предметов местности повышаются, относительная погрешность в измеренном на карте расстоянии не должна превышать 1:2000. Поэтому при выполнении крупномасштабных съемок применяются трехградусные зоны, осевыми меридианами которых служат осевые и граничные меридианы шестиградусных зон (рис. 1.4). Осевые меридианы первой трехградусной и первой шестиградусной зон совпадают. Долгота осевого меридиана и номер n трехградусной зоны связаны формулой

$$Z_{0,n} = 3^\circ n.$$

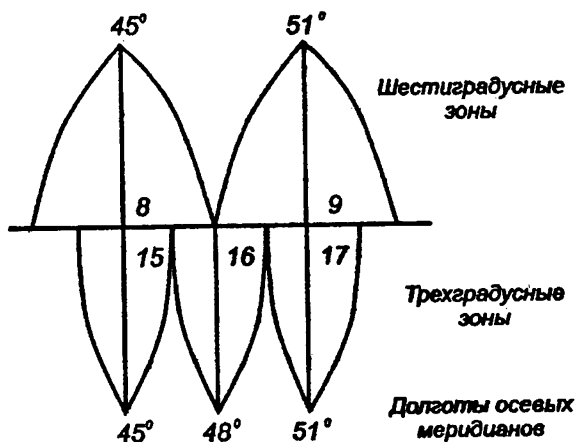


Рис. 1.4. Взаимное положение шести- и трехградусных зон

Максимальное искажение длин в пределах трехградусной зоны в 4 раза меньше максимального искажения в шестиградусной зоне. Для удобства практического использования проекции Гаусса-Крюгера немецкий ученый Баумгардт в 1919 году предложил ко всем ординатам трехградусных зон прибавлять 500000 м, а перед ординатой ставить номер зоны. Эти предложения были приняты и для шестиградусных зон. С учетом этого условно принимают

$$\tilde{y} = (1000000 \cdot N + 500000 + y) \text{ м}, \quad (1.8)$$

например, если точка находится в 8-й координатной зоне и имеет ординату $y = -55451,54$ м, то $\tilde{y} = 8\,444\,548,46$.

Предусмотрены перекрытия координатных зон на 1° — до широты 28° , на 2° — для широт $28-76^\circ$ и 3° — для широт более 76° .

В отдельных случаях, например, при геодезическом обслуживании строительства промышленных объектов и различных инженерных сооружений, в качестве осевого может быть выбран средний меридиан участка работ. В этом случае искажения, свойственные данной проекции, являются минимальными.

Кроме проекции Гаусса-Крюгера в некоторых странах используют проекцию Universal Transverse Mercator (UTM), в которой воображаемый цилиндр касается эллипсоида не по осевому меридиану, как это выполнено в проекции Гаусса-Крюгера, а вдоль секущих линий, отстоящих от центрального меридиана на 180000 м (рис. 1.5). В этой проекции масштаб по центральному меридиану равен 0,9996.

5. Преобразование систем плоских прямоугольных координат. Часто возникает задача преобразования координатных систем на плоскости, когда известны координаты одних и тех же пунктов в двух системах. В этом случае, имеем

$$x_i = x_0 + m x'_i \cos \alpha - m y'_i \sin \alpha = x_0 + P x'_i - Q y'_i,$$

$$y_i = y_0 + m x'_i \sin \alpha + m y'_i \cos \alpha = y_0 + Q x'_i + P y'_i,$$

где $P = m \cos \alpha$, $Q = m \sin \alpha$.

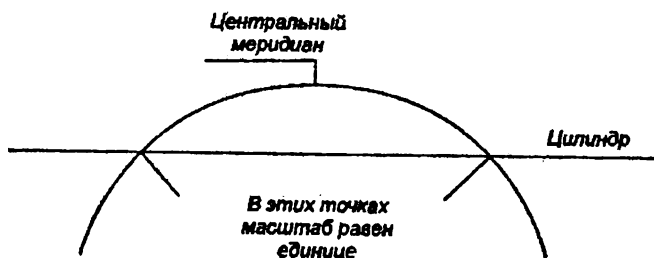


Рис. 1.5. Проекция УТМ

Для n точек получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + Px'_1 - Qy'_1, \\ y_1 &= y_0 + Qx'_1 + Py'_1, \\ x_2 &= x_0 + Px'_2 - Qy'_2, \\ y_2 &= y_0 + Qx'_2 + Py'_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

.....

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + Px'_n - Qy'_n, \\ y_n &= y_0 + Qx'_n + Py'_n. \end{aligned}$$

Вычитая из левой и правой частей каждого выражения для x_i значение x_1 , а для y_i значение y_1 , находим

$$\begin{aligned} \Delta x'_{12} P - \Delta y'_{12} Q - \Delta x_{12} &= v_{x_1}, \\ \Delta y'_{12} P + \Delta x'_{12} Q - \Delta y_{12} &= v_{y_1}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \Delta x'_{1n} P - \Delta y'_{1n} Q - \Delta x_{1n} &= v_{x_{n-1}}, \\ \Delta y'_{1n} P + \Delta x'_{1n} Q - \Delta y_{1n} &= v_{y_{n-1}}. \end{aligned}$$

Переходя к нормальным уравнениям, имеем

$$[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]P - [\Delta x'\Delta x + \Delta y'\Delta y] = 0,$$

$$[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]Q + [\Delta x\Delta y' - \Delta x'\Delta y] = 0,$$

откуда

$$P = \frac{[\Delta x' \Delta x + \Delta y' \Delta y]}{[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]}; Q = -\frac{[\Delta x \Delta y' - \Delta x' \Delta y]}{[\Delta x'^2 + \Delta y'^2]}. \quad (1.9)$$

Подставляя полученные значения P и Q из (1.9) в (1.8), получаем

$$x_0 = \frac{[x - Px' + Qy']}{n}; y_0 = \frac{[y - Qx' - Py']}{n}.$$

Значения $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}; m = \sqrt{P^2 + Q^2}.$

Пример. В табл. 1.1 для 6 пунктов приведены значения x', y' в первой и x, y второй системах координат. В этой же таблице вычислены значения $\Delta x'_{ii} = x'_i - x'_1, \Delta y'_{ii} = y'_i - y'_1, \Delta x_{ii} = x_i - x_1, \Delta y_{ii} = y_i - y_1.$ Вычисления по формулам (1.9)–(1.11) приводят к значениям $P = 0,99732762, Q = 0,07411403, \alpha = 4^\circ 14' 59,96'', m = 1,00007763, X_0 = -0,056, Y_0 = 0,229.$ Истинные значения этих величин $P = 0,9973277, Q = 0,0741142, \alpha = 4^\circ 15' 00,00'', m = 1,0000777, X_0 = Y_0 = 0,00.$ Следовательно, приведенные для решения поставленной задачи формулы являются практически строгими.

Таблица 1.1

Номер пункта	Первая система		Вторая система	
	x'	y'	x	y
1	2	3	4	5
1	910047,28	498990,17	870633,06	565104,18
2	916995,11	494952,72	877861,56	561592,45
3	924003,61	500988,12	884404,02	568131,15
4	920660,11	509242,14	880457,71	5761115,31
5	910993,58	507005,37	870982,79	573168,09
6	916682,33	502252,75	877008,58	568849,79

Окончание табл. 1.1

Первая система		Вторая система	
$\Delta x'_{ii}$	$\Delta y'_{ii}$	Δx	Δy
6	7	8	9
0,00	0,00	0,00	0,00
6947,83	-4037,45	7228,5	-3511,73
13956,33	1997,95	13770,96	3026,97
10612,83	10251,97	9824,65	11011,13
946,30	8015,20	349,73	8063,91
6635,05	3262,58	6375,52	3745,61

6. Переход от геоцентрических координат к плоским координатам в проекции Гаусса-Крюгера

По формулам (1.6) переходят от геоцентрических координат X, Y, Z к геодезическим координатам B, L, H на эллипсоиде с большой полуосью a и эксцентриситетом e или сжатием α , $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ (для ПЗ – 90

$$a = 6\,378\,136 \text{ м}, \alpha = \frac{1}{298,257839303}, \text{ для американской системы координат}$$

$$\text{WGS } a = 6\,378\,137 \text{ м}, \alpha = \frac{1}{298,257223563}). \text{ Затем определяют } x, y \text{ по форму-$$

лам [5], [2]

$$\begin{aligned} x &= x + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + \dots, \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \dots, \end{aligned}$$

где для проекции Гаусса – Крюгера

$$a_2 = \frac{1}{2} N \sin B \cos B,$$

$$a_4 = \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4),$$

$$a_6 = \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B),$$

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111 \operatorname{tg}^2 B + 543 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B),$$

$$b_1 = N \cos B,$$

$$b_3 = \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2),$$

$$b_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B),$$

$$b_7 = \frac{1}{5040} N \cos^7 B (61 - 479 \operatorname{tg}^2 B + 179 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B).$$

Для параметров эллипсоида Красовского

$$\left. \begin{aligned} x &= 6367558,497B + (((a_{28}l^2 - a_{26})l^2 + a_{24})l^2 + 0,5)l^2 N - a_0 \sin B \cos B \\ y &= (((b_{17}l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1)lN \cos B \end{aligned} \right\}$$

где

$$N = [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21\,346,142] \sin^2 B + 6\,378\,245,$$

$$a_0 = (0,7032 \cos^2 B - 135,3277) \cos^2 B + 32\,140,4046,$$

$$a_{24} = [(0,0000076 \cos^2 B + 0,0025269) \cos^2 B + 0,25] \cos^2 B - 0,0416667,$$

$$a_{26} = [(0,00562 \cos^2 B + 0,16358) \cos^2 B - 0,08333] \cos^2 B + 0,00139,$$

$$a_{28} = [(0,125 \cos^2 B - 0,104) \cos^2 B + 0,014] \cos^2 B,$$

$$b_{13} = (0,00112309 \cos^2 B + 0,33333333) \cos^2 B - 0,16666667,$$

$$b_{15} = [(0,004043 \cos^2 B + 0,196743) \cos^2 B - 0,166667] \cos^2 B + 0,008333,$$

$$b_{17} = [(0,1429 \cos^2 B - 0,1667) \cos^2 B + 0,0361] \cos^2 B - 0,0002.$$

Здесь величины B и l выражены в радианах.

1.3. ОРИЕНТИРОВАНИЕ ЛИНИЙ

Ориентирование линий — определение направления линии относительно исходного направления. Исходными направлениями в геодезии являются: астрономический или геодезический меридианы; линий, параллельные осевому меридиану (оси абсцисс в плоской прямоугольной системе координат в проекции Гаусса-Крюгера), магнитный меридиан. Угол между исходным направлением и линией местности, отсчитываемый по ходу часовой стрелки, называют истинным азимутом A , если исходным направлением является астрономический или геодезический меридиан; дирекционным углом α , если за исходное направление принимают осевой меридиан и магнитный азимут A_M , если исходным является магнитный меридиан (рис. 1.6). Магнитный меридиан совпадает с горизонтальной проекцией силовой линии магнитного поля, плоскость магнитного меридиана совпадает с вертикальной плоскостью, проходящей через концы магнитной стрелки. A , α , и A_M изменяются по ходу часовой стрелки от 0 до 360°.

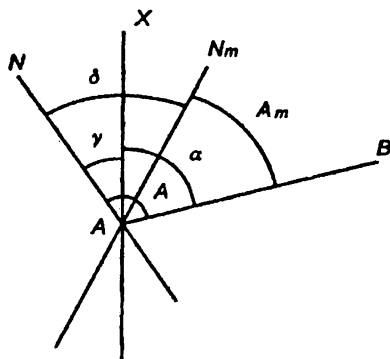


Рис. 1.6. Дирекционный угол и азимуты

Связь между этими углами выражается формулой

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \gamma, \\ A &= A_M + \delta, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где γ — гауссово сближение меридианов, δ — склонение магнитной стрелки, которое называют восточным, положительным, если магнитная стрелка (магнитный меридиан) расположена восточнее геодезического меридиана. На рис. 1.6 приведены положительные значения γ и δ .

Кроме гауссова сближения меридианов (угол между меридианом данной точки и осевым меридианом в проекции Гаусса-Крюгера) имеется сближение меридианов, проходящих через данную и другую точку местности.

Сближение меридианов в проекции Гаусса-Крюгера определяют по формуле [3], [5]

$$\operatorname{tg} \gamma = \{[(l^2 + 0,0045) \cos^2 B + i]0,00674l^3 \cos^4 B + \operatorname{tg} l\} \sin B,$$

которая позволяет определять гауссово сближение меридианов до 0,001'' при $l \leq 9^\circ$. Для приближенного определения γ с точностью до 1' используют формулу

$$\gamma = l \sin B \approx 0,539 y_{\text{км}} \operatorname{tg} B.$$

В этих формулах $l = L - L_0$ — разность долгот меридиана, проходящего через данную точку, и осевого меридиана. Знак γ определяется знаком l , т. е. для точек, расположенных к востоку от осевого меридиана, сближение меридианов имеет знак плюс, а к западу — минус. Для приближенного определения сближения меридианов используют формулу

$$\gamma = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi_m,$$

где λ_1 и λ_2 — долготы точек M_1 и M_2 , φ_m — средняя широта точек M_1 и M_2 . При $\varphi_m = 0^\circ$ на экваторе $\gamma = 0$, т. е. на экваторе все меридианы параллельны между собой. При $\varphi_m = 90^\circ$ на полюсах $\gamma = \lambda_2 - \lambda_1$, т. е. углы между меридианами на полюсе равны разности их долгот.

Наряду с азимутами для ориентирования линий применяют румбы. Румбом называют острый угол между ближайшим концом меридиана (северным или южным) и данным направлением. Перед численным значением румба указывают его направление относительно сторон света: СВ, ЮВ, ЮЗ, СЗ. Связь между азимутами или дирекционными углами и румбами приведена в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ четверти	Азимут или дирекционный угол	Румб
I	$0-90^\circ$	СВ : $r_1 = A(\alpha)$
II	$90-180^\circ$	ЮВ : $r_2 = 180^\circ - A(\alpha)$
III	$180-270^\circ$	ЮЗ : $r_3 = A(\alpha) - 180^\circ$
IV	$270-360^\circ$	СЗ : $r_4 = 360^\circ - A(\alpha)$

Следует заметить, что магнитное поле Земли изучено недостаточно, поэтому значение δ определяют при топографической съемке по показаниям магнитной стрелки буссоли (специальный компас, применяемый в геодезии), когда край буссоли, параллельный линии С-Ю, приложен к западной или восточной рамке планшета, которые являются изображениями истинных ме-

ридианов. Кроме того, имеются буссоли, которые прикрепляют к теодолиту, при этом нулевой диаметр горизонтального круга теодолита должен быть параллелен линии С-Ю буссоли. В этом случае буссоль используют для ориентирования теодолита по магнитному меридиану. Если при этом измерен магнитный азимут линии, дирекционный угол которой известен, то имеется возможность определить склонение магнитной стрелки, используя формулу

$$\delta = \alpha + \gamma - A_M, \quad (1.11)$$

которая получается из сравнений формул (1.10).

Кроме склонения магнитная стрелка позволяет определять **наклонение**, т. е. угол ее наклона относительно горизонтальной плоскости, при этом наклоняется северный конец стрелки. Для уравнивания магнитной стрелки на ее южный конец прикрепляют небольшой грузик.

1.4. ВЫСОТЫ ТОЧЕК МЕСТНОСТИ.

Влияние кривизны Земли на высоты ее точек

Высота точки — расстояние по отвесной линии от данной точки М до поверхности отсчета. **Ортометрические высоты** H^o определяют относительно поверхности геоида, **нормальные высоты** H^y — относительно поверхности квазигеоида, **геодезические высоты** H — относительно поверхности референц-эллипсоида по нормали к ней, относительные высоты H' — относительно условной уровенной поверхности (рис. 1.7). В СНГ все высоты пунктов государственной нивелирной сети определяют в системе нормальных высот методом геометрического нивелирования с использованием материалов гравиметрической съемки по направлениям нивелирных ходов.

Аномалии высот ζ , определяющие положение квазигеоида относительно референц-эллипсоида, находят методами астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования. Геодезическая высота (см. рис. 1.7)

$$H = H_y + \zeta. \quad (1.12)$$

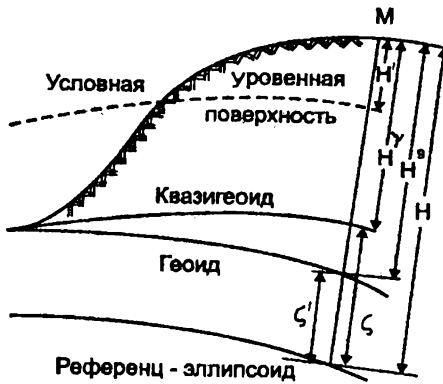


Рис. 1.7. Системы высот

Относительные высоты H' применяют при выполнении работ на небольших участках.

Численное значение высоты называют **отметкой**. В СНГ счет высот ведется от нуля Кронштадтского футштока (абсолютная Балтийская система высот 1977 г.), т. е. относительно нанесенной на медной пластине горизонтальной линии (пластина замурована в гранитном устое моста). Нуль Кронштадтского футштока на 10 мм выше среднего уровня Балтийского моря. Эти высоты обычно называют **абсолютными**.

Разность высот двух точек называют **превышением**. При замене участка уровенной поверхности касательной плоскостью высоты A , определяемые относительно горизонтальной плоскости, отличаются от их значений H относительно уровенной поверхности. На рис. 1.8.

$$H = A \sec \beta + MoMo' = A \sec \beta - (R \sec \beta - R)$$

Раскладывая $\sec \beta$ в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами ряда

$$\left(\sec \beta = 1 + \frac{\beta^2}{2} = 1 + \frac{S^2}{2R^2} \right), \text{ получим}$$

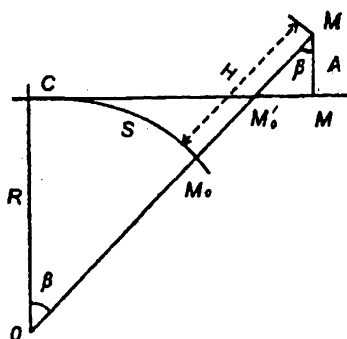


Рис. 1.8. Высоты H и A

$$H = A \left(I + \frac{S^2}{2R^2} \right) + \left[R \left(I + \frac{S^2}{2R^2} \right)^{-R} \right] = A + \frac{S^2}{2R} + \frac{AS^2}{2R^2} \quad (1.13)$$

При $A = 1 \text{ км} = 1\,000\,000 \text{ мм}$, $S = 20 \text{ км}$, $R = 6371 \text{ км}$ последнее слагаемое равно $4,9 \text{ мм}$. При выполнении работ невысокой точности этой величиной

можно пренебречь. Второе слагаемое $\Delta h = \frac{S^2}{2R}$ является значимым даже при небольших значениях S :

$S, \text{ км}$...	0,1	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0	20,0
$\Delta h, \text{ мм}$...	0,8	19,6	78,5	314,0	1962,0	7848,0	31392,0

Следовательно, величины Δh при определении высот H или превышений h нужно учитывать даже при небольших расстояниях S .

Следует обратить внимание на то, что в геодезии для определения положения точек используют две независимые системы координат: систему

плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера (или в какой-либо другой проекции) и систему высот относительно поверхности квазигеоида. Начала координат этих двух систем не совпадают: начальный пункт геодезической сети находится в центре круглого зала Пулковской обсерватории, в зональной системе плоских координат — в пересечении изображений экватора и осевого меридиана, а начало системы высот совмещено с нулем Кронштадтского футштока.

Для небольших участков местности (в пределах 1 км^2) при работах невысокой точности можно использовать единую пространственную прямоугольную систему координат.

1.5. СИСТЕМА ПЛОСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

В математике используют левую прямоугольную систему координат, в которой углы отсчитывают от положительного направления оси x (абсцисс) влево, против хода часовой стрелки, в этом же направлении нумеруют четверти.

В геодезии применяют правую систему прямоугольных координат, за ось x (абсцисс) принимают осевой меридиан (или средний меридиан участка работ), его направление на север является положительным, положительное направление оси y (ординат) совпадает с направлением на восток. Четверти нумеруют по ходу часовой стрелки, углы отсчитывают от положительного направления оси x по движению часовой стрелки (рис. 1.9). Знаки координат и тригонометрических функций в различных четвертях приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Номер четверти	x	y	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{ctg } \alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	-	+	+	-	-	-
III	-	-	-	-	+	+
IV	+	-	-	+	-	-

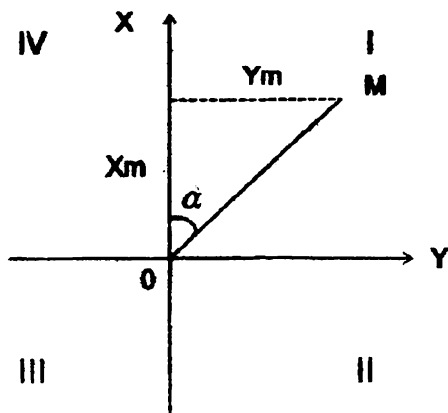


Рис. 1.9. Система плоских прямоугольных координат в геодезии

В условной системе координат направление оси x может не совпадать с направлением меридиана, а принимать другое, более целесообразное направление.

1.6. Единицы мер, используемые в геодезии

При выполнении геодезических работ используют меры длины, площади, веса, температуры, времени и т.п. При измерении углов используют градус, получаемый путем деления прямого угла на 90 равных частей, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$. Углы выражают также в радиальной мере, равной отношению дуги окружности к ее радиусу. Радиян — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, равную радиусу. Так как угол 360° соответствует длине окружности 2π , то один радиан равен $360^\circ/2\pi = 57^\circ 17' 44,81'' = 3437,7468' = 206264,81'' = 57,295780^\circ$. При переводе градусной меры в радианную и обратно используют выражение

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{n^\circ}{\alpha},$$

где α — радианная, n° — градусная мера одного и того же угла, $\pi = 3,141592654$. Например, в угловой мере угол $n^\circ = 135^\circ 11' 17,25''$, для его определения в радианной мере имеем

$$\alpha = \frac{n^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{135^\circ 11' 17,25'' \cdot 3,141592654}{180^\circ} = 2,35947789 \text{ радиана.}$$

Кроме того, для измерения углов используют десятичную систему мер, в которой прямой угол делят на 100 равных частей, получившаяся часть называется **градом** (1g). Один градус содержит 100 градовых минут ($1g = 100^g$), одна градовая минута имеет 100 градовых секунд ($1^g = 100^{gg}$).

Единицей измерения длины является метр, его длина равна одной десятиллионной части половины Парижского меридиана (от полюса до экватора). В Международном бюро мер и весов во Франции хранится «архивный метр», изготовленный из платины жезл соответствующей длины. В 1889 г. из сплава 90 % платины и 10 % иридия был изготовлен 31 жезл, являющиеся копиями «архивного метра», 28 жезлов переданы государствам, присоединившимся к метрической системе мер. В Россию переданы два таких жезла (эталоны): № 28 — хранится во Всесоюзном институте метрологии им. Д.И. Менделеева (ВНИИМ) в С.-Петербурге и № 11 — в Российской Академии наук.

В 1960 г. Международная конференция по мерам и весам установила длину метра, равную 1 650 763,73 длинам волн излучения в вакууме оранжевой линии спектра изотопа криптона с атомным весом 86. В СССР эту длину метра приняли 1 января 1963 г. при переходе к Международной системе единиц СИ Интерференционная установка, созданная во ВНИИМ, позволяет сравнивать жезл с эталонной длиной световой волны в 100 раз точнее, чем платино-иридиевым прототипом метра.

Единицей измерения площади является квадратный метр.

$$10\,000 \text{ м}^2 = 1 \text{ гектару (га); } 100 \text{ га} = 1 \text{ км}^2.$$

Единицей массы является международный килограмм, единицей измерения температуры — градус по шкале Цельсия, единицей измерения време-

ни — секунда, единицей измерения давления — 1 атмосфера, равная 760 мм рт. ст. при температуре 0°С или 1013,25 гектопаскаля (гПа), или 1013,25 миллибара (мбар). За единицу измерения частоты периодических колебаний приняты герц; 1 мегагерц = 10^6 герца.

До перехода на метрическую систему в нашей стране основной единицей длины был сажень, 1 сажень = 84 дюймам, 1 дюйм — 25,4 мм.

их влияние можно только ослабить путем повышения количества и качества измерений и соответствующей математической обработкой результатов измерений. Случайные ошибки имеют следующие свойства:

- 1) по абсолютной величине они не превосходят определенного предела;
- 2) положительные и отрицательные их значения равновозможны;
- 3) малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие;
- 4) среднее арифметическое значение случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю (свойство компенсации случайных ошибок), т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0.$$

Эти свойства случайных ошибок возникают из принятых в теории ошибок постулатов: 1) ошибки Δ_i подчиняются нормальному закону рас-

пределения; 2) математическое ожидание $M(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n \Delta_i p_i = 0$ (p_i — веро-

ятность появления случайной ошибки Δ_i), что возможно при отсутствии систематических ошибок.

Если на оси абсцисс отложить величины случайных ошибок Δ , а на оси ординат — их число ($\varphi(\Delta)$ — плотность нормального распределения ошибки), то получим кривую ошибок, или кривую Гаусса (рис. 2.1). Уравнение кривой имеет вид:

$$\varphi(\Delta) = y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad (2.1)$$

где $h = 1/\sigma\sqrt{2}$ — мера точности; σ — среднее квадратическое отклонение. Если формула (2.1) получена по результатам измерений, то $h = 1/m\sqrt{2}$, где m — средняя квадратическая ошибка. Принимая $\Delta/m = t$, вместо (2.1) получим

$$y = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad (2.2)$$

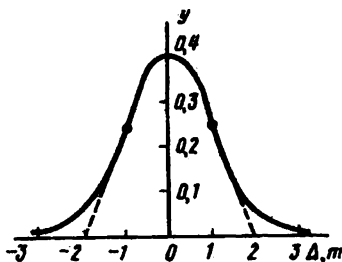


Рис. 2.1. Кривая ошибок (кривая Гаусса)

Пример. Построить кривую нормального распределения, если $\Delta = 0, m, 2m, 3m$; $m = 1,00''$.

Решение. Подставляя в формулу (2.2) $m = 1,00''$, получаем

$$y = 0,3989e^{-t^2/2} = 0,3989e^{-\Delta^2/2m^2}.$$

Приведенным значениям Δ и m соответствуют:

$t = \Delta/m$	0	1	2	3
$-t^2/2 = -\Delta^2/2m^2$	0	-0,5	-2,0	-4,5
y	0,399	0,242	0,054	0,0044

Построенная по значениям Δ и y кривая (см. рис. 2.1) имеет следующие свойства:

- лежит выше оси абсцисс, так как не имеет значений $y \leq 0$;
- симметрична относительно оси oy ;
- при $\Delta = 0$ величина y принимает максимальное значение;
- имеет точки перегиба при $\Delta = m$ и $\Delta = -m$
- касательные к кривой в точках перегиба пересекаются с осью абсцисс в точках $2m$ и $-2m$.

2.2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Средняя квадратическая ошибка m — величина, определяемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{-\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (2.3)$$

где истинные ошибки $\Delta_i = x_i - X$ ($i = 1, 2, \dots, n$); x_i — результат измерения величины, истинное значение которой равно X .

Средняя ошибка ϑ — среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок, т. е.

$$\vartheta = \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \dots + |\Delta_n|}{n} = \frac{[|\Delta|]}{n}. \quad (2.4)$$

Вероятная или срединная ошибка r находится в середине ряда, в котором все ошибки располагают по убыванию или возрастанию их абсолютных значений.

Средняя квадратическая ошибка более предпочтительна, чем средняя и вероятная, так как на ее величину большее влияние оказывают большие по абсолютной величине ошибки и она более устойчива, т. е. довольно надежно определяется при небольшом n числе ошибок. Среднюю квадратическую ошибку самой средней квадратической ошибки определяют по формуле

$$m_m = m / \sqrt{2n}. \quad (2.5)$$

Предельное значение ошибки

$$\Delta_{\text{пред}} \leq 3m. \quad (2.6)$$

При ограниченном числе измерений на практике считают

$$\Delta_{\text{пред}} \leq 2,5 m \text{ и } \Delta_{\text{пред}} \leq 2,0 m. \quad (2.7)$$

Средняя квадратическая ошибка m связана со средней ошибкой ϑ и вероятной ошибкой r приближенными формулами

$$m \approx 1,25 \vartheta; m \approx 1,48 r. \quad (2.8)$$

Все приведенные выше ошибки называют абсолютными. Кроме абсолютных имеются относительные ошибки $f_{\text{отн}}$, которыми называют отношение абсолютной ошибки к среднему значению измеряемой величины. Относительные ошибки выражают дробью, числитель которой равен единице, а знаменатель — отношению среднего значения измеряемой величины к абсолютной ошибке. В зависимости от используемой абсолютной ошибки относительные ошибки называют: средней квадратической относительной, средней относительной, вероятной относительной, предельной относительной.

Например, длина линии $s = 285,00$ м измерена со средней квадратической ошибкой $m_s = 0,15$ м. Средняя квадратическая относительная ошибка

$$f_{\text{отн}} = \frac{m_s}{s} = \frac{1}{s/m_s} = \frac{1}{285,00/0,15} = \frac{1}{1900}.$$

Знаменатель относительной ошибки целесообразно округлять с сохранением двух первых значащих цифр.

Если ряд равноточных измерений одной и той же величины имеет случайные Δ_i и систематические δ_i ошибки, то суммарные ошибки будут равны

$$\sigma_i = \Delta_i + \delta_i.$$

Возведя левые и правые части этого равенства в квадрат, после суммирования и деления на n получим

$$\frac{[\sigma^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\delta^2]}{n} + 2 \frac{[\Delta \cdot \delta]}{n}.$$

При большом числе n измерений последнее слагаемое на основании четвертого свойства случайных ошибок будет близким к нулю. С учетом этого

$$m_{\sigma}^2 = m_{\Delta}^2 + m_{\delta}^2,$$

где m_{Δ} — средняя квадратическая случайная ошибка; m_{δ} — средняя квадратическая систематическая ошибка. Если $m_{\delta} \leq (1/3) m_{\Delta}$, то

$$m_{\sigma} = \sqrt{m_{\Delta}^2 + \frac{1}{9} m_{\Delta}^2} \approx 1,05 m_{\Delta}.$$

Следовательно, систематическую ошибку, не превышающую $(1/3) m_{\Delta}$, можно не учитывать. При этом значение m_{σ} будет получено с искажением не более 5 %. Если $m_{\delta} \leq (1/5) m_{\Delta}$, то искажение m_{σ} вследствие сокращения на величину m_{δ} уменьшится до 2 %.

2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ ОШИБОК НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Исследование рядов ошибок рассмотрим на примере, взяв за основу работу В.Д. Большакова «Теория ошибок измерений» (в кн. «Справочник геодезиста». — М.: Недра, 1985).

В табл. 2.1 приведены угловые невязки 40 треугольников триангуляции 2-го класса. Невязки расположены в порядке возрастания их абсолютных величин (для определения вероятной ошибки r). Необходимо выяснить, подчиняется ли этот ряд невязок, являющихся истинными ошибками суммы углов в каждом треугольнике, нормальному распределению.

Вычислим эмпирические значения:

$$1) a = M(\Delta) = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-0,41}{40} = -0,010;$$

$$2) m = \sqrt{\frac{[\Delta]^2}{n}} = \sqrt{\frac{39,14}{40}} = 0,99'';$$

3) вероятной ошибки $r = (|\Delta_{20}| + |\Delta_{21}|)/2 = (0,64 + 0,68)/2 = 0,66$; коэффициент $k_1 = m/r = 1,50$;

4) средней ошибки $\vartheta = \sum_1^{40} |\Delta_i| / 40 = 31,59/40 = 0,79$ и $k_2 = m/\vartheta = 1,25$.

В табл. 2.2 запишем статистический ряд распределения, разделив невязки с интервалом через 0,5 $m = 0,5 \cdot 0,99'' = 0,50''$ на 12 частей. В графе 4 приведено фактическое число ошибок m_i , входящих в данный интервал — определяется по табл. 2.1. В графе 6 даны вероятности $p_i^0 = [\Delta\Phi(t)]/2$ попадания ошибки в интервал от t_{i-1} до t_i (значения t_i приведены в правой части графы 3). Интеграл вероятности равен

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_i} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= 0,79788 \left(\int_0^{t_1} e^{-t^2/2} dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-t^2/2} dt \right). \quad (2.9)$$

Интегрирование целесообразно выполнять численным методом, используя формулу парабол (Симпсона)

Таблица 2.1

Порядковый номер	Невязка Δ , угл. с	Порядковый номер	Невязка Δ , угл. с	Порядковый номер	Невязка Δ , угл. с	Порядковый номер	Невязка Δ , угл. с
1	0,00	11	+0,27	21	+0,68	31	+1,38
2	0,00	12	-0,28	22	-0,74	32	-1,44
3	-0,01	13	-0,29	23	+0,94	33	-1,50
4	+0,04	14	+0,33	24	-0,99	34	+1,55
5	+0,06	15	-0,38	25	-1,05	35	+1,56
6	-0,07	16	+0,45	26	+1,11	36	-1,58
7	+0,11	17	+0,51	27	+1,17	37	+1,60
8	-0,13	18	-0,60	28	-1,24	38	+1,67
9	-0,15	19	-0,63	29	+1,29	39	-1,74
10	+0,23	20	+0,64	30	-1,33	40	-1,85

$\Sigma\Delta_i = -0,41$

$$\int_a^b y dx = \frac{a-b}{6} (y_a + 4y_c + y_b),$$

где y_a, y_c, y_b — ординаты кривой для значений абсцисс, равных $a, (a+b)/2$ и b соответственно. Используя эту формулу, для интервала $t_{i-1} - t_i$ получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t_i) &= 0,79788 \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-t^2/2} dt = \\ &= 0,13298 (t_i - t_{i-1}) (e^{-t_{i-1}^2/2} + 4e^{-t_i^2/2} + e^{-t_i^2/2}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Например, для третьего интервала (см. табл. 2.2) по формуле (2.10) имеем $t_{i-1} = t_2 = 1,0$; $t_i = t_3 = 1,5$; $t_{ci} = (t_{i-1} + t_i)/2 = (t_2 + t_3)/2 = 1,25$.

С учетом этих значений

$$\Delta\Phi(t_3) = 0,13298 \cdot 0,5 (e^{-1^2/2} + 4e^{-1,25^2/2} + e^{-1,5^2/2}) = 0,06649 (0,60653 + 4 \cdot 0,45783 + 0,32465) = 0,18368;$$

$$p_3 = \Delta\Phi(t_3)/2 = 0,09184.$$

Результаты вычислений p_i , выполненных с использованием формулы (2.10), приведены в графе 6. Ввиду того, что распределение симметрично, p_i достаточно вычислять только для положительных интервалов.

В графе 7 получено теоретическое число $np_i = 40 p_i$ ошибок, одинаковое для соответствующих положительных и отрицательных интервалов. В графе 8 приведены разности $m_i - np_i$ между фактическим и теоретическим количеством ошибок, а в графе 9 — значения $(m_i - np_i)/np_i$.

Для оценки степени согласованности теоретического и статистического распределения на практике применяют так называемые критерии согласия. К. Пирсон в качестве меры расхождения между p_i и Q_i предложил формулу

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (2.11)$$

Таблица 2.2

Номер интервала	Длина интервала $l = \Delta/m$, угл. с				Фактическое число ошибок m_i	$Q_i = \frac{m_i}{\Sigma n}$	P_i^0	nr_i	$m_i - nr_i$	$\frac{m_i - nr_i}{nr_i}$	Q_i $h_i = 0,50$
	t_i		t_{i-1}								
	t_{i-1}	t_i	t_{i-1}	t_i							
1	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0	+0,50	0	0,5	0,200	0,1915	8	0	0	0,400	
2	0,51	1,00	0,5	1,0	0,100	0,1499	6	-2	-0,333	0,200	
3	1,01	1,50	1,0	1,5	0,100	0,0918	4	0	0	0,200	
4	1,51	2,00	1,5	2,0	0,100	0,0441	2	+2	+1,000	0,200	
5	2,01	2,50	2,0	2,5	0	0,0165	0	0	0	0	
6	2,51	3,00	2,5	3,0	0	0,0049	0	0	0	0	
7	0	-0,50	0	-0,5	8	0,1915	8	0	0	0,400	
8	-0,51	-1,00	-0,5	-1,0	4	0,100	0,1499	6	-2	-0,333	0,200
9	-1,01	-1,50	-1,0	-1,5	5	0,125	0,0918	4	+1	+0,250	0,250
10	-1,51	-2,00	-1,5	-2,0	3	0,075	0,0441	2	+1	+0,500	0,150
11	-2,01	-2,50	-2,0	-2,5	0	0	0,0165	0	0	0	0
12	-2,51	-3,00	-2,5	-3,0	0	0	0,0049	0	0	0	0
				40	1,000	0,9974	40	0	0	0	0
				Σn							

По этой формуле $\chi^2 = 4,08$. Распределение χ^2 зависит от числа степеней свободы r , которое равно числу разрядов k без числа связей, накладываемых на частоты. Для нормального закона этих связей три:

$$1) \sum_{i=1}^k Q_i = 1;$$

$$2) \sum_{i=1}^k x_i Q_i = a = M(\Delta) = [\Delta]/n;$$

$$3) D(x) = \sigma^2 = m^2.$$

В рассматриваемом примере $a = -0,010$, т. е. близка к нулю, поэтому число связей будет равно двум, а число степеней свободы $r = 12 - 2 = 10$.

По r и χ^2 определяют вероятность p , используя формулу

$$p = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2}) x^{\frac{r}{2}}} \int_0^{\chi^2} (\chi^2)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2,$$

где $\Gamma(r/2)$ — гамма-функция; $\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$. Если p меньше 0,1, то гипотеза отбрасывается как неправдоподобная.

При $r = 10$ получим $2^5 \Gamma(5) = 32 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 32 \cdot 24 = 768$.

Принимая $\chi^2 = x$ и учитывая, что

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$$

для рассматриваемого случая

$$p = \frac{1}{768} \int_x^{\infty} x^4 e^{x/2} dx = -\frac{2}{768} \int_{4,08}^{\infty} [e^{-x/2} (x^4 + 8x^3 + 48x^2 + 192x + 384)].$$

Подставляя вместо x пределы (подстановка верхнего предела дает ноль), в итоге находим $p = 0,9437 > 0,1$. Кроме того, значение p можно вычислить, используя таблицы работы [2, с. 58] и табл. 2.7.

Выполненные исследования показывают, что рассмотренный ряд ошибок подчиняется нормальному распределению, так как:

- 1) $a = M(\Delta) = [\Delta]/n = -0,010 \approx 0$;
- 2) в ряде нет ошибки, превышающей $3m$;
- 3) коэффициенты k_1 и k_2 практически равны их теоретическим значениям;
- 4) согласно критерию Пирсона вероятность $p = 0,944$ значительно больше критического значения, равного $0,1$.

На рис. 2.2 построена гистограмма и выравнивающая кривая. На оси абсцисс отложены значения $t = \Delta/m$, а на оси ординат — значения $y = \varphi(\Delta) = (h\sqrt{\pi})e^{-t^2/2}$, где $h = 1/m\sqrt{2}$ — мера точности. Если $m = 0,99''$, то $h = 1/0,99\sqrt{2} = 0,7142$, а $y = (0,7142/\sqrt{\pi})e^{-t^2/2} = 0,4030e^{-t^2/2}$.

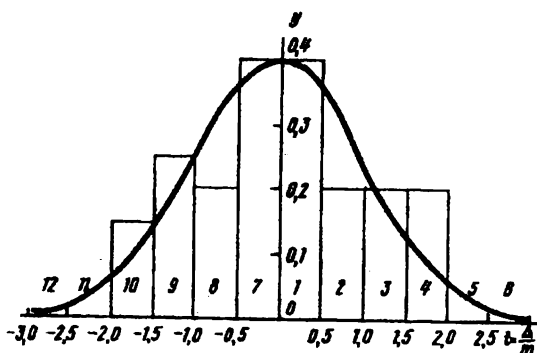


Рис. 2.2. Гистограмма и выравнивающая кривая

В табл. 2.3 приведены для различных t значения y , вычисленные по полученной выше формуле. Высоты прямоугольников гистограммы $h_i = Q_i / (t_{i+1} - t_i) = Q/0,50$ даны в табл. 2.2 графа 10.

Таблица 2.3

$t = \Delta/m$	0	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 1,5$	$\pm 2,0$	$\pm 2,5$	$\pm 3,0$
y	0,403	0,356	0,244	0,131	0,055	0,018	0,004

На рис. 2.2 для каждого интервала построены прямоугольники со сторонами $t_{i-1} - t_i = 0,5$ и высотами h_i . Значения t , соответствующие данному интервалу, приведены в табл. 2.2. Выравнивающая кривая построена путем соединения точек, полученных на границе интервалов после откладывания значений y .

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ И УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

Если имеются пары наблюдений

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

то для определения коэффициента корреляции используют формулу

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{nm_x m_y}, \quad (2.12)$$

где

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}; \quad \bar{y} = \frac{[y]}{n}; \quad m_x = \sqrt{\frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{n}}; \quad m_y = \sqrt{\frac{[(y_i - \bar{y})^2]}{n}}. \quad (2.13)$$

При $n \geq 50$ для определения среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции используют формулу В.И. Романовского

$$\sigma_r = (1 - r^2) / \sqrt{n}. \quad (2.14)$$

при

$$|r| \geq 3\sigma_r \quad (2.15)$$

связь считается установленной. Наименьшее значение r_{\min} , удовлетворяющее условию (2.15), вычисляют по формуле

$$r_{\min} = (\sqrt{n+36} - \sqrt{n})/36 \quad (2.16)$$

При $n < 50$ для оценки надежности коэффициента корреляций используют критерий Фишера

$$z = \frac{1}{2} [\ln(1+r) - \ln(1-r)] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (2.17)$$

который подчиняется закону нормального распределения. Из формулы (2.17) находим

$$r = (e^{2z} - 1) / (e^{2z} + 1). \quad (2.18)$$

Среднее квадратическое отклонение величины z вычисляется по формуле

$$\sigma_z = 1 / \sqrt{n-3}. \quad (2.19)$$

Уравнение регрессии имеет вид

$$y = \bar{y} + r \frac{m_y}{m_x} (x - \bar{x}); \quad (2.20)$$

$$x = \bar{x} + r \frac{m_x}{m_y} (y - \bar{y}). \quad (2.21)$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляют по формулам

$$\sigma_{p_{y/x}} = \frac{m_y}{m_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}; \quad \sigma_{p_{x/y}} = \frac{m_x}{m_y} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}. \quad (2.22)$$

Пример. В табл. 2.4 приведены абсолютные ошибки $|\Delta|$ в превышениях, полученных при геометрическом нивелировании, и длины D ходов нивелирования. Вычислить коэффициент корреляции величин $|\Delta|$ и D , коэффициент регрессии, оценить их точность и составить уравнение регрессии.

Решение. Строим график (рис. 2.3), на котором по оси абсцисс откладываем D , а по оси ординат — ошибки $|\Delta|$, в итоге получаем 16 точек, положение которых показывает существование корреляции между D и $|\Delta|$.

По формулам (2.12), (2.13) и результатам вычислений в табл. 2.4 находим

$$m_D = \sqrt{[\delta D^2]/n} = \sqrt{91,34/16} = 2,39; m_{|\Delta|} = \sqrt{[\delta \Delta^2]/n} = \sqrt{8893/16} = 23,6;$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \delta D \delta \Delta}{n m_D m_{|\Delta|}} = \frac{850,3}{16 \cdot 2,39 \cdot 23,6} = +0,94.$$

Учитывая сравнительно небольшое число измерений, для оценки надежности коэффициента корреляции применим критерий Фишера z . По формуле (2.17) для коэффициента корреляции $r = +0,94$ находим

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2} \ln \frac{1,94}{0,06} = 1,7380.$$

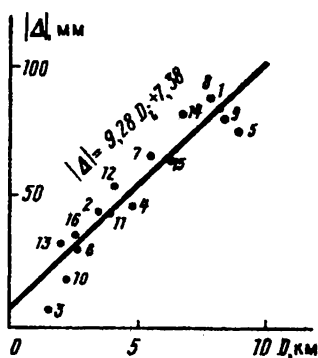


Рис. 2.3. К определению уравнения регрессии

Оценивая надежность z по формуле (2.19) имеем

$$\sigma_z = 1/\sqrt{n-3} = 1/\sqrt{16-3} = 0,277,$$

С вероятностью 0,954 получим $t = 2,00$ (значение t найдено в табл. 2.2 по

вероятности $2 \sum_{i=1}^4 p_i = 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta \Phi(t)}{2} = 2 \cdot 0,477 = 0,954$) и величина z может

Таблица 2.4

Порядковый номер	D_i , км (x)	$ \Delta_i $, мм (y)	$\delta D = D_i - \bar{D}$	$\delta \Delta = \Delta_i - \bar{\Delta}$	δD^2	$\delta \Delta^2$	$\delta D \delta \Delta$
1	7,9	81	+3,1	+29	9,61	841	+89,9
2	3,4	43	-1,4	-9	1,96	81	+12,6
3	1,5	7	-3,3	-45	10,89	2025	+148,5
4	4,8	45	0	-7	0	49	0
5	8,9	74	+4,1	+22	16,81	484	+90,2
6	2,5	31	-2,3	-21	5,29	441	+48,3
7	5,4	65	+0,6	+13	0,36	169	+7,8
8	7,7	87	+2,9	+35	8,41	1225	+101,5
9	8,1	79	+3,3	+27	10,89	729	+89,1
10	2,1	18	-2,7	-34	7,29	1156	+91,8
11	3,7	43	-1,1	-9	1,21	81	+9,9
12	4,0	55	-0,8	+3	0,64	9	-2,4
13	2,0	31	-2,8	-21	7,84	441	+58,8
14	6,7	79	+1,9	+27	3,61	729	+51,3
15	6,1	64	+1,3	+12	1,69	144	+15,6
16	2,6	35	-2,2	-17	4,84	289	-37,4
	$\bar{D} = 4,84$	$\bar{\Delta} = 52$	$\Sigma = +0,6$	$\Sigma = +0,5$	$\Sigma = 91,34$	$\Sigma = 8893$	$\Sigma = +850,3$

иметь значения: $1,7380 - t \sigma_z \leq z \leq 1,7380 + t \sigma_z$;

подставляя $t = 2,00$ и $\sigma_z = 0,277$, получаем $1,184 \leq z \leq 2,292$.

По формуле (2.18) находим соответствующие крайним значениям z коэффициенты корреляции $+ 0,829 \leq r \leq + 0,980$, т. е. с вероятностью не менее 0,954 действительный коэффициент корреляции может располагаться между $+ 0,829$ и $+ 0,980$. По формуле (2.16) при $n = 16$

$$r_{\min} = (\sqrt{16+36} - \sqrt{16})/36 = 0,535.$$

т. е. меньше 0,829. Следовательно, можно считать, что прямая корреляционная связь установлена.

Используя формулу (2.20), составим уравнение регрессии $|\Delta|$ на D . Учитывая значения $|\bar{\Delta}| = [\Delta] = 52,3$; $r = 0,94$; $m_x = m_D = 2,39$; $m_y = m_{|\Delta|} = 23,6$;

$$x = \bar{D} = 4,84, \text{ получаем}$$

$$|\Delta_i| = 52,3 + 0,94 (23,6/2,39) (D_i - 4,84) = (9,28 D_i + 7,38) \text{ мм,}$$

где D_i — расстояние в км.

Полученное уравнение прямой наносим на график (см. рис. 2.3). Надежность коэффициента регрессии $\rho_{|\Delta|/D} = r(m_{|\Delta|} / m_D) = 9,28$ приближенно можно оценить по первой из формул (2.22). В результате получим

$$\sigma_{\rho_{|\Delta|/D}} = \frac{23,6}{2,39} \sqrt{\frac{1-0,94^2}{16-3}} = 0,93,$$

следовательно $\rho_{|\Delta|/D} \approx 9,28 \pm 0,93$.

Если случайные величины x и y подчинены нормальному закону распределения, то корреляция между ними считается установленной при значении

$$V = r \sqrt{(n-2)/(1-r^2)}, \tag{2.23}$$

где r определяют по формуле (2.12), оно не попадает в интервал

$$-V_{\beta} < V < V_{\beta}. \tag{2.24}$$

Таблица 2.5

n - 2	Коэффициенты Стьюдента при доверительной вероятности β								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
14	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
16	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

В формуле (2,24) величину V_β находят из таблиц распределения Стьюдента (табл. 2.5) по вероятности $\beta = 1$ и числу степеней свободы $n - 2$. По условиям рассматриваемой задачи ($r = 0,94$; $n = 16$) имеем

$$V = (0,94 / \sqrt{1 - 0,94^2}) \sqrt{16 - 2} = 10,31$$

В табл. 2.5 для $\beta = 0,999$ и $n - 2 = 14$ находим

$$|V| = 4,2 \text{ и } -4,2 < V < 4,2. \quad (2.25)$$

Так как значение $V = 10,31$ не содержится в интервале (2.25), то d и $|\Delta|$ коррелированы.

2.5. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Нередко искомые величины непосредственно измерить нельзя и их определяют путем вычисления функции измеренных величин. Ошибка функции будет зависеть от ошибок входящих в нее аргументов. Предположим, что в функции

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.26)$$

аргументы x_1, x_2, \dots, x_n попарно коррелированы и получены со средними квадратическими ошибками $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$.

Если X, Y, \dots, U — истинные (точные) значения аргументов, то их истинные ошибки

$$\Delta x = x - X,$$

$$\Delta y = y - Y,$$

...

$$\Delta u = u - U,$$

а истинная ошибка функции

$$\Delta F = f(x, y, \dots, u) - f(x - \Delta x, y - \Delta y, \dots, u - \Delta u).$$

Раскладывая второе слагаемое в ряд Тейлора с учетом первых двух членов ряда, находим

$$\Delta F = f(x, y, \dots, u) - f(x, y, \dots, u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u + R,$$

где R — остаточный член разложения, равный сумме всех нелинейных членов ряда Тейлора, его значением в геодезии в большинстве случаев можно пренебречь. Тогда

$$\Delta F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u.$$

При многократных намерениях имеем

$$\Delta F_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_1,$$

$$\Delta F_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_2,$$

...

$$\Delta F_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x_n + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y_n + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Delta u_n.$$

Возведя левые и правые части в квадрат, суммируя и деля на n с учетом формулы (2.3) получим

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 m_u^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) (\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_2 + \dots + \Delta x_n \Delta y_n) \frac{1}{n} + \dots$$

Согласно формуле (2.12)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i = r n m_x m_y.$$

Для попарно коррелированных аргументов находим

$$m^F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 m_u^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)r_{xy}m_xm_y + \dots + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)r_{xu}m_xm_u} \quad (2.27)$$

Значения частных производных обычно определяют по приближенным значениям аргументов. При вычислениях по формуле (2.27) производные вычисляют с сохранением трех значащих цифр, в конечном результате удерживают две значащих цифры. Коэффициенты корреляции r_{xy}, \dots, r_{xu} предварительно определяют из специальных исследований.

Пример. Определить среднюю квадратическую ошибку функции $u = 3x_1 + 2x_2$, если $m_{x_1} = m_{x_2} = m$, $r_{x_1x_2} = +0,7$.

Решение. По формуле (2.27) находим

$$m_u = \sqrt{9m_{x_1}^2 + 4m_{x_2}^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,7m_{x_1}m_{x_2}} = 4,6m.$$

Если аргументы функции (2.26) некоррелированы ($r_{x_j} = 0$), то вместо (2.27) получаем формулу

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_{x_i}^2} \quad (2.28)$$

Для приведенного выше примера при $r_{x_1x_2} = 0$ имеем

$$m_u = \sqrt{9m_{x_1}^2 + 4m_{x_2}^2} = 3,6 m.$$

Для линейной функции $u = \pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \dots \pm k_n x_n$ частные производные $\left(\frac{df}{dx_i}\right) = k_i$, а

$$m_u = \sqrt{k_1^2 m_{x_1}^2 + k_2^2 m_{x_2}^2 + \dots + k_n^2 m_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 m_{x_i}^2} \quad (2.29)$$

Для функции $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$ частные производные $df/dx_i = 1$,

$$m_u = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \dots + m_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{x_i}^2} \quad (2.30)$$

Если функция имеет вид $u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{y_1 y_2 \dots y_n}$, то целесообразно предварительно выполнить ее логарифмирование:

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n - \ln y_1 - \ln y_2 - \dots - \ln y_n.$$

Используя формулу (2.28), получаем $du/\partial x_i = 1/x_i$, $du/\partial y_i = 1/y_i$ и

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{u} &= \sqrt{\left(\frac{m_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m_{x_n}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{m_{y_1}}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{y_2}}{y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m_{y_n}}{y_n}\right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_{x_i}}{x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_{y_i}}{y_i}\right)^2} \quad (2.31) \end{aligned}$$

В некоторых случаях оценивают не сами величины, а десятичные логарифмы этих величин. Для определения связи между средней квадратической ошибкой величины и средней квадратической ошибкой десятичного логарифма этой же величины воспользуемся связью между десятичными и натуральными логарифмами $lg u = M \ln u$. Тогда

$$m_{lg u} = M(m_u/u), \quad (2.32)$$

$$m_u = (u/M)m_{lg u}. \quad (2.33)$$

Значение $m_{lg u}$ обычно определяют в единицах шестого знака логарифма, поэтому умножая левую и правую части формулы (2.32) на 10^6 , получаем

$$\begin{aligned} m_{lg u} 10^6 = m_{lg u} &= 10^6 M(m_u/u); m_u = \frac{u}{10^6 M} m_{lg u}, \text{ откуда, учитывая } M \approx 0,434, \\ m_u/u &= m_{lg u}/10^6 M = m_{lg u}/434\,000. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Пример. Определить относительную среднюю квадратическую ошибку стороны m_s/s , если средняя квадратическая ошибка логарифма этой стороны $m_{lg s} = 3,7$ ед. 6-го знака логарифма.

Решение. Подставляя в формулу (2.34) вместо $m_{lg u}$ значение $m_{lg s} = 3,7$, находим $m_s/s = 3,7/434\ 000 = 1/117\ 000$:

При выполнении различных расчетов часто возникает необходимость по известной точности функции найти точность определения каждого аргумента. При решении этой задачи обычно используют принцип равных влияний, согласно которому полагают

$(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_{x_1}^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_{x_2}^2 = \dots = (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_{x_n}^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 m_x^2$ и вместо выражения (2.28) получим

$$m_u = \sqrt{n(\frac{\partial f}{\partial x})^2 m_x^2} = |\frac{\partial f}{\partial x} m_x| \sqrt{n},$$

$$\text{откуда } |\frac{\partial f}{\partial x_1} m_{x_1}| = |\frac{\partial f}{\partial x_2} m_{x_2}| = |\frac{\partial f}{\partial x_n} m_{x_n}| = \frac{m_u}{\sqrt{n}}. \quad (2.35)$$

Пример. Превышение между точками получено методом тригонометрического нивелирования по формуле $h = stg v$. С какой точностью необходимо определить горизонтальное проложение $s = 145,00$ м и угол наклона $v = 4^\circ 30'$, чтобы превышение h было получено со средней квадратической ошибкой $m_h = 0,05$ м?

Решение. По формуле (2.28) находим $m_h^2 = tg^2 v m_s^2 + \frac{s^2}{\cos^4 v} \frac{m_v^2}{p^2}$.

Согласно (2.35)

$$|tg v m_s| = \frac{s}{\cos^2 v} \frac{m_v}{p^2} = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{0,05}{\sqrt{2}} = 0,0354, \text{ откуда}$$

$$m_s = \frac{0,0354}{tg v} = \frac{0,0354}{tg 4^\circ 30'} = 0,45 \text{ м}; \quad \frac{m_s}{s} = \frac{0,45}{145} = \frac{1}{320};$$

$$m_v = \frac{\rho \cos^2 v}{s} 0,0354 = \frac{3438' \cos^2 4^\circ 30'}{145} 0,0354 = 0,8'.$$

2.6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Положим, что некоторая величина, истинное значение которой равно X , измерена n раз; в результате измерений получены значения x_1, x_2, \dots, x_n , свободные от систематических ошибок. Случайные ошибки результатов измерений

$$\Delta_1 = x_1 - X;$$

$$\Delta_2 = x_2 - X;$$

...

$$\Delta_n = x_n - X.$$

Суммируя левые и правые части этих выражений, находим $[\Delta] = [x] - nX$, откуда

$$X = \frac{[x]}{n} - \frac{[\Delta]}{n}.$$

Последнее слагаемое при большом числе n на основании четвертого свойства случайных ошибок стремится к нулю, поэтому

$$X \approx \bar{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{x' + \varepsilon_1 + x' + \varepsilon_2 + \dots + x' + \varepsilon_n}{n} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (2.36)$$

где x' — приближенное значение измеряемой величины; ε_i — уклонение x_i от x' , т.е. $\varepsilon_i = x_i - x'$, $i = 1, 2, \dots, n$; n — число измерений. Формула (2.36) показывает, что вероятнейшим, т.е. наиболее надежным значением является среднее арифметическое \bar{x} (арифметическая середина) из результатов равноточных измерений.

Для определения средней квадратической ошибки арифметической середины воспользуемся формулой (2.28). Для большей наглядности перепишем формулу (2.36) в виде выражения

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}.$$

$$\text{Очевидно } \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n};$$

$$M = \sqrt{\frac{1}{n^2} (m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \dots + m_{x_n}^2)}.$$

Для равноточных измерений $m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_n} = m_x$, поэтому

$$M = \sqrt{nm_x^2 / n^2} = m_x / \sqrt{n} . \quad (2.37)$$

Следовательно, точность среднего арифметического возрастает с увеличением числа измерений n , но при $n = 15 - 20$ преобладающее влияние на величину M будут оказывать остаточные систематические ошибки, поэтому практически выполнять более 15 – 20 измерений нецелесообразно. Для существенного повышения точности результатов измерений необходимо использовать более точные приборы, более совершенную методику измерений и т. д.

Для определения входящей в формулу (2.37) средней квадратической ошибки m_x одного измерения в формуле Гаусса (2.4) выразим $[\Delta^2]$ через $[v^2]$, где $v_i = x_i - \bar{x}$ — отклонение измеренной величины от арифметической середины \bar{x} . Подставляя в $\Delta_i = x_i - X$ вместо x_i его значение $x_i = \bar{x} + v_i$, находим

$$\Delta_i = \bar{x} - X - v_i .$$

Возведя в квадрат левые и правые части, после суммирования имеем

$$[\Delta^2] = n(\bar{x} - X)^2 + [v^2] - 2(\bar{x} - X)[v] . \quad (2.38)$$

Суммируя левые и правые части выражений

$$v_1 = x_1 - \bar{x} ;$$

$$v_2 = x_2 - \bar{x} ;$$

...

$$v_n = x_n - \bar{x} ;$$

получаем

$$[v] = [x] - n\bar{x} .$$

Подставляя вместо \bar{x} его значение из (2.36), имеем

$$[v] = [x] - n \frac{[x]}{n} = 0 ,$$

т. е. сумма отклонений v равна нулю при любом числе измерений (первое свойство ошибок v). Если при определении среднего арифметического \bar{x} имеется ошибка округления $\beta = \bar{x}_{\text{окр}} - x_{\text{точн}}$, то $[v] = -n\beta$.

После деления левой и правой частей равенства (2.38) на n получаем

$$[\Delta^2]/n' = (\bar{x} - X)^2 + [v^2]/n.$$

При большом числе n значение истинной ошибки арифметической средней можно принять равным значению M , определяемому по формуле (2.37). Учитывая формулу Гаусса (2.3), получим

$$m^2 = (m^2/n) + ([v^2]/n), \text{ откуда находим формулу Бесселя}$$

$$m = \sqrt{[v^2]/(n-1)}. \quad (2.39)$$

Для контроля вычисления $[v^2]$ используют формулу

$$[v^2] = [\epsilon^2] - [\epsilon]^2/n,$$

где $\epsilon_i = x_i - x'$; x' — приближенное значение измеряемой величины x .

Средние квадратические ошибки величин m и M определяют по формулам

$$m_m = m/\sqrt{2(n-1)}; m_M = M/\sqrt{2n}. \quad (2.40)$$

Пример обработки ряда равноточных измерений приведен в табл. 2.6 (результаты десяти равноточных измерений линий).

Таблица 2.6

i	$l_i, \text{ м}$	$e_i = l_i - 110,385, \text{ мм}$	ϵ_i^2	$v_i, \text{ мм}$	v_i^2	Вычисление
1	110,388	+3	9	+2	4	
2	381	-4	16	-5	25	
3	394	+9	81	+8	64	
4	387	+2	4	+1	1	
5	385	0	0	-1	1	
6	110,379	-6	36	-7	49	
7	393	+8	64	+7	49	
8	386	+1	1	0	0	
9	382	-3	9	-4	16	
10	389	+4	16	+3	9	
Σ		14	236	+4	218	

2.7. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При ограниченном числе измерений оценку точности целесообразно выполнять с помощью доверительных интервалов. Доверительным интервалом называют множество, которому истинное значение оцениваемого параметра принадлежит с некоторой доверительной вероятностью β . Для истинного значения X измеряемой величины доверительный интервал определяют по формуле

$$\bar{x} - t_{\beta} M < X < \bar{x} + t_{\beta} M, \quad (2.41)$$

где t_{β} — коэффициент распределения Стьюдента, который выбирают из табл. 2.5 по вероятности β и числу степеней свободы $r = n - 1$ (n — число измерений). Для примера, приведенного в табл. 2.6, при $\beta = 0,95$ и $r = n - 1 = 9$ по табл. 2.5 в строке $n - 2 = 8$ имеем $t_{\beta} = 2,4$ и по формуле (2.41) с учетом $t_{\beta} M = 3,7 \approx 4$ мм находим $110,382 \text{ м} < X < 110,390 \text{ м}$.

Доверительный интервал для стандарта σ или средней квадратической ошибки m в случае нормального распределения определяют по формуле

$$\gamma_1 m \leq \sigma \leq \gamma_2 m, \quad (2.42)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{(n-1)/\chi_1^2}; \quad \gamma_2 = \sqrt{(n-1)/\chi_2^2},$$

а значения χ_1^2 и χ_2^2 выбирают из таблиц распределения χ^2 по числу степеней свободы $r = n - 1$ и вероятностям $p_1 = 1 - (1 - \beta) / 2$ и $p_2 = 1 - p_1$. Для примера, приведенного в табл. 2.6, имеем $r = 9$, при $\beta = 0,95$ $p_1 = (1 - 0,95) / 2 = 0,025$; $p_2 = 1 - 0,025 = 0,975$. Этим значениям соответствуют (табл. 2.7) $\chi_1^2 = 19,0$, $\chi_2^2 = 2,70$. Подставляя полученные значения в формулу (2.42), находим

$$\sqrt{9/19,0} \cdot 4,9 \leq \sigma \leq \sqrt{9/2,7} \cdot 4,9 \text{ или } 3,4 \text{ мм} \leq \sigma \leq 8,9 \text{ мм}.$$

Доверительный интервал для σ_x (стандарта x или средней квадратической ошибки арифметической середины) находят по формуле

$$\gamma_1 m / \sqrt{n} \leq \sigma_x \leq \gamma_2 m / \sqrt{n}.$$

Для рассматриваемого примера $1,1 \text{ мм} \leq \sigma_x \leq 2,8 \text{ мм}$. Запись результата в виде $x \pm M$ соответствует вероятности $\beta \approx 0,7$.

2.8. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для контроля и повышения точности каждую величину измеряют несколько раз; часто ограничиваются двумя независимыми измерениями. В этом случае, вычислив разности по каждой паре измерений, находят

$$d_1 = x_1 - x_1^1 ;$$

$$d_2 = x_2 - x_2^1 ;$$

.....;

$$d_n = x_n - x_n^1 .$$

Таблица 2.7

Число степеней свободы	Значение χ^2 при вероятности p					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,56	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Значения d_i являются истинными ошибками разностей двойных измерений, поэтому используя формулу Гаусса (2.3), получим

$$m_d = \sqrt{[d^2]/n} , \quad (2.43)$$

где n — число всех разностей.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m_{x_i} = m_d / \sqrt{2} = \sqrt{[d^2]/2n} . \quad (2.44)$$

За окончательное, более надежное принимают значение

$$\bar{x}_i = (x_i + x'_i)/2.$$

При $m_{x_i} = m_{x'_i}$ имеем

$$m_{x_i} = m_{x'_i} / \sqrt{2} = 0,5 \sqrt{[d^2]/n} : \quad (2.45)$$

Формулы (2.43) — (2.45) применяют, когда ряд двойных измерений не имеет систематических ошибок. Если результаты измерений содержат систематические ошибки, то в значениях разностей d_i они значительно ослабляются, и в d_i войдут остаточные систематические ошибки. Учитывая свойство компенсации случайных ошибок, величину остаточной систематической ошибки определяют как среднее арифметическое по формуле

$$\theta = [d]/n \quad (2.46)$$

Критерием допустимости θ является неравенство $|\theta| \leq 0,25 [d]$.

Рассматривая разности $d'_i = d_i - \theta$ как отклонения от арифметической середины, по формуле Бесселя (2.39) находим

$$m_d = \sqrt{[d'^2]/(n-1)} . \quad (2.47)$$

Средние квадратические ошибки m_{x_i} (одного измерения) и $m_{\bar{x}_i}$ (арифметической середины) вычисляют по формулам

$$m_{x_i} = m_d / \sqrt{2} = \sqrt{[d'^2]/2(n-1)} ; \quad m_{\bar{x}_i} = m_{x_i} / \sqrt{2} = 0,5 \sqrt{[d'^2]/(n-1)} . \quad (2.48)$$

Следует заметить, что средние квадратические ошибки, полученные по разностям двойных измерений, обычно дают преуменьшенные результаты.

Пример. В табл. 2.8 приведены превышения между точками, определенные по черной и красной сторонам реек. Вычислять средние квадратические ошибки m_x одного превышения и $m_{\bar{x}}$ среднего из превышений, вычисленных по черной и красной сторонам реек.

Таблица 2.8

Номер превышения	Превышение		d , мм	$d' =$ $d - \theta$, мм	d'^2	Вычисление
	черная сторона	красная сторона				
1	+1,384	+1,382	+2	+3	9	$\theta = [d]/n = -13/9 = -1,44$ мм. Контроль: $[d'] = -n\theta = -9(-1 + 1,44) =$ $= -4$ мм; $ [d] = 13 > 0,25([d] = 6,75,$ следовательно, θ является недопустимой и ее нужно исключить из значений d ; $m_x = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{68}{2(9-1)}} = 2,1$ мм; $m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{2,1}{\sqrt{2}} = 1,5$ мм
2	-0,817	-0,813	-4	-3	9	
3	+0,373	+0,370	+3	+4	16	
4	+0,448	+0,451	-3	-2	4	
5	+1,755	+1,758	-3	-2	4	
6	+0,211	+0,215	-4	-3	9	
7	+0,314	+0,317	-3	-2	4	
8	-0,227	-0,229	+2	+3	9	
9	+0,972	+0,975	-3	-2	4	
		Σ	-13	-4	68	

2.9. НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения, имеющие различные средние квадратические ошибки, называют неравноточными. При совместной обработке результатов неравноточных измерений их неодинаковую точность учитывают с помощью весов. Весом p называют величину, обратно пропорциональную квадрату средней квадратической ошибки

$$p_i = \mu^2 / m_i^2; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.49)$$

где $\mu^2 = c = \text{const}$ — произвольная величина, постоянная для всех измерений. Следовательно, чем точнее результат, тем меньше соответствующая ему средняя квадратическая ошибка и тем больше его вес. Веса являются относительными величинами, поэтому их можно одновременно уменьшать или увеличивать в различное число раз.

При $p = 1$ по формуле (2.49) получим $\mu = m$, т. е. μ — средняя квадратическая ошибка измерения, вес которого равен единице (средняя квадратическая ошибка единицы веса).

В практике геодезических работ в качестве веса принимают:

1) при обработке результатов угловых измерений одним и тем же прибором — величины, пропорциональные количеству измерений каждого угла; для суммы углов в ходе, имеющем n_i вершин, $p_i = 1/n_i$;

2) при обработке линейных измерений одним и тем же мерным прибором $p_i = 1/s_i$, где s_i — длина линии;

3) при определении превышений из геометрического нивелирования — величины, обратно пропорциональные длине ходов или числу станций;

4) при тригонометрическом нивелировании $p_i = 1/s_i^2$, где s_i — расстояние между пунктами.

2.10. ВЕСА ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Для определения обратного веса функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, учитывая формулы (2.27) и (2.49), для коррелированных аргументов после деления обеих частей выражения на μ^2 получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_u} = & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_{x_2}} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_{x_n}} + \\ & + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) r_{x_1 x_2} \frac{1}{\sqrt{p_{x_1} p_{x_2}}} + \dots + \\ & + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) r_{x_{n-1} x_n} \frac{1}{\sqrt{p_{x_{n-1}} p_{x_n}}} . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для некоррелированных аргументов ($r_{x_i x_j} = 0$) находим

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_{x_2}} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_{x_n}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{1}{p_{x_i}} . \quad (2.51)$$

Пример. Определить вес функции

$u = 3x_1 + 2x_2$, если $r_{x_1, x_2} = +0,5$; $p_{x_1} = p_{x_2} = 1$.

Решение. По формуле (2.50) имеем

$$\frac{1}{p_u} = 9 \frac{1}{p_{x_1}} + 4 \frac{1}{p_{x_2}} + 2 \cdot 3 \cdot 2r_{x_1, x_2} \frac{1}{\sqrt{p_{x_1} p_{x_2}}} = 9 + 4 + 6 = 19;$$

$$p = 1/19 = 0,053.$$

Пример. Определить вес функции $u = x \sqrt{p_x}$.

Решение. По формуле (2.51) находим

$$\frac{1}{p_u} = (\sqrt{p_x})^2 \frac{1}{p_x} = 1, \quad (2.52)$$

откуда $p = 1$.

Последний пример показывает, что если результат измерения умножить на корень квадратный из его веса, то вес произведения $x \sqrt{p_x}$ будет равен единице. Этот вывод используют для перехода от неравноточных измерений к равноточным.

2.11. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Положим, что при измерении величины x получены равноточные значения $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_q; c_1, c_2, \dots, c_n$. Вероятнейшим, т. е. наиболее надежным, значением X является средняя арифметическая величина

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + b_1 + b_2 + \dots + b_q + c_1 + c_2 + \dots + c_n}{k + q + \dots + n}. \quad (2.53)$$

Вычислив среднее арифметическое из каждой группы измерений, находим

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k};$$

$$x_2 = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_q}{q}; \dots; \quad (2.54)$$

$$x_n = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Используя формулу (2.51) для первой функции получим

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{p_{a_1}} + \frac{1}{p_{a_2}} + \dots + \frac{1}{p_{a_k}} \right).$$

При $p_{a_1} = p_{a_2} = \dots = p_{a_k} = 1$ имеем $1/p_1 = (l/k^2)k = 1/k$, откуда $p_1 = k$. Аналогично $p_2 = q, \dots, p_n = n$.

С учетом этих значений и формул (2.54) вместо (2.53) находим формулу общей арифметической середины

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[xp]}{[p]} = x' + \frac{[\epsilon p]}{[p]}, \quad (2.55)$$

где $\epsilon_i = x_i - x'$.

Примем

$$v_1 = x_1 - \bar{x};$$

$$v_2 = x_2 - \bar{x};$$

.....;

$$v_n = x_n - \bar{x}.$$

Умножив левые и правые части этих выражений на веса p_1, p_2, \dots, p_n измерений x_1, x_2, \dots, x_n , после сложения получим

$$[pv] = [px] - \bar{x} [p].$$

Подставив в это равенство вместо \bar{x} его значение из выражения (2.55), имеем

$$[pv] = 0. \quad (2.56)$$

Если уклонения v_i вычислены с использованием округленного значения $x_{\text{окр}}$, то

$$[pv] = -(\bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x}) [p] = -\beta [p]. \quad (2.57)$$

Формулу (2.57) используют для контроля правильности вычислений. Умножив величины x_i на корень квадратный из веса этих величин, найдем $x'_i = x_i \sqrt{p_i}$ и истинные ошибки $\Delta'_i = \Delta_i \sqrt{p_i}$ с весом, равным единице (см. пример в разделе 2.10), т. е. неравноточные измерения x_i приведены к равноточным x'_i . В этом случае средняя квадратическая ошибка единицы веса может быть определена по формуле Гаусса (2.4)

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta'^2]}{n}} = \sqrt{\frac{(\Delta_1 \sqrt{p_1})^2 + (\Delta_2 \sqrt{p_2})^2 + \dots + (\Delta_n \sqrt{p_n})^2}{n}} = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}, \quad (2.58)$$

где Δ_i — истинная ошибка.

Если известны вероятнейшие ошибки v_i , то используя формулу Бесселя (2.39), имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{[v'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \quad (2.59)$$

Для определения средней квадратической ошибки общей арифметической середины воспользуемся формулой (2.53), в которую входят равноточные измеренные величины. В этом случае согласно формуле (2.37)

$$M = \frac{m}{\sqrt{k+q+\dots+n}}.$$

Учитывая, что веса непосредственно измеренных величин в формуле (2.53) одинаковы, примем $p = 1$. Тогда средняя квадратическая ошибка единицы веса $m = \mu$, $k + q + \dots + n = p_1 + p_2 + \dots + p_n = [p]$,

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (2.60)$$

Значение $[pv^2]$, входящее в формулу (2.59) и др., вычисляют с контролем

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - [p\varepsilon]^2 / [p]. \quad (2.61)$$

Средние квадратические ошибки значений μ и M определяют по формулам

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}}. \quad (2.62)$$

При большом числе n значение μ , вычисленное по формуле (2.59) и принятое при вычислении весов $\mu^2 = c$, откуда $\mu = \sqrt{c}$, должны совпадать в пределах ошибки m_{μ} . Их расхождение на величину, большую чем m_{μ} , указывает на присутствие систематических ошибок. Конечный результат записывают в виде $\bar{x} \pm M$ или, при интервальной оценке, в виде (2.41).

Пример. Отметка H точки получена по семи нивелирным ходам (табл. 2.9). Вычислить вероятнейшее значение отметки и произвести оценку точности.

Таблица 2.9

Номер хода	$H, \text{ м}$	$m_H, \text{ мм}$	$p = \frac{10}{m_H^2}$	$\nu, \text{ мм}$	$p\nu$	$p\nu^2$	ν	$p\nu$	$p\nu^2$
1	103,751	5,8	0,30	+1	0,30	0,30	-0,9	-0,27	0,2
2	760	6,4	0,24	+10	2,40	24,00	+8,1	+1,94	15,7
3	748	5,0	0,40	-2	-0,80	1,60	-3,9	-1,56	6,1
4	755	9,1	0,12	+5	+0,60	3,00	3,1	+0,37	1,1
5	749	4,2	0,57	-1	-0,57	0,57	-2,9	-1,65	4,8
6	747	7,5	0,18	-3	-0,54	1,62	-4,9	-0,88	4,3
7	765	8,1	0,16	+15	2,40	36,00	-13,1	+2,10	27,5
$x' = 103,750$		-	$[p] = 1,97$	-	$[p\nu] = +3,79$	$\Sigma = 67,09$	-	$[p\nu] = +0,05$	$\Sigma = 59,7$

$$x = x' + [p\nu] / [p] = 103,750 \text{ м} + 3,79 / 1,97 \text{ мм} = 103,7519 \text{ м};$$

$$\beta = -0,024; [p\nu] = -\beta[p] = +0,024 \cdot 1,97 = +0,05 \text{ мм};$$

$$[p\nu^2] = [p\nu^2] - [p\nu]^2 / [p] = 67,09 - 3,79^2 / 1,97 = 59,8;$$

$$\mu = \sqrt{59,8} / (7 - 1) = 3,2 \text{ мм};$$

$$m_{\mu} = 3,2 / \sqrt{2(7-1)} = 0,92 \text{ мм};$$

$$\sqrt{c} = 3,1; |\mu - \sqrt{c}| = 0,1 < m_{\mu};$$

$$M = 3,2 / \sqrt{1,97} = 2,3 \text{ мм};$$

$$m_M = 0,92 / \sqrt{1,97} = 0,66 \text{ мм}$$

$$\text{Ответ: } x = 103,7519 \text{ м} \pm 2,3 \text{ мм.}$$

2.12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Предположим, что известны разности измерений, равноточные в каждой паре, но пары между собой неравноточны. Для разности $d_i = x_i - x'_i$ по формуле (2.51) получим

$$1/p_{d_i} = (1/p_{x_i}) + (1/p_{x'_i}).$$

Так как $p_{x_i} = p_{x'_i}$, то $p_{d_i} = p_{x_i}/2 = p_i/2$. Поскольку d_i являются истинными ошибками, то согласно формуле (2.58) при отсутствии систематических ошибок

$$\mu = \sqrt{[\frac{p}{2} d^2] / n} = \sqrt{[p d^2] / (2n)}. \quad (2.63)$$

Средние квадратические ошибки средних значений $x_i = (x_i + x'_i) / 2$ определяют по формуле $m_{x_i} = \mu \sqrt{p_{x_i}} = \mu \sqrt{2 p_i}$,

$$\text{так как } 1/p_{x_i} = (1/4)(1/p_{x_i} + 1/p_{x'_i}) = 1/2 p_i; \quad p_{x_i} = 2 p_i.$$

Если разности d_i имеют систематические ошибки, то величина

$$\theta = [p d] / [p] \quad (2.64)$$

будет отличаться от нуля. В этом случае

$$\mu = \sqrt{[p d'^2] / 2(n-1)}, \quad (2.65)$$

где $d'_i = d_i - \theta$.

Пример. В табл. 2.10 даны разности прямых и обратных нивелирных ходов III класса и число станций по ходам в одном направлении. Выполнить оценку точности приведенных результатов измерений.

Вычислим

$$\theta = [pd]/[p] = + 1,32/4,38 = + 0,30.$$

Допустимое значение θ определяется из неравенства

$$|[d\sqrt{p}]| \leq 0,25 |[d\sqrt{p}]|.$$

В данном примере $|[d\sqrt{p}]| = 2,16$, что меньше $0,25 |[d\sqrt{p}]| = 0,25 \cdot 30,10 = 7,52$, поэтому используя для вычисления средней квадратической ошибки единицы веса формулу (2.63), находим

$$\mu = \sqrt{[pd^2]/(2n)} = \sqrt{129,76/18} = 2,7 \text{ мм.}$$

Вычислим

$$m_{\mu} = \mu/\sqrt{2n} = 2,7/\sqrt{18} = 0,64 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка среднего значения для первого хода

$$m_x = \mu/\sqrt{2p_1} = 2,7/\sqrt{0,68} = 3,3 \text{ мм.}$$

Таблица 2.10

Номер хода	Разность d , мм	Число станций	Вес $p = 10/N$	pd , мм	$d\sqrt{p}$	pd^2
1	+3,7	29	0,34	+1,26	+2,16	4,66
2	+8,4	17	0,59	+4,96	+6,45	41,63
3	-7,2	31	0,32	-2,30	-4,07	16,56
4	+4,1	18	0,56	+2,30	+3,07	9,43
5	-8,3	23	0,43	-3,57	-5,44	29,62
6	-4,9	12	0,83	-4,07	-4,46	19,93
7	+0,7	17	0,59	+0,41	+0,54	0,29
8	+2,9	24	0,42	+1,22	+1,88	3,53
9	+3,7	33	0,30	+1,11	+2,03	4,11
Σ	+3,1	-	4,38	+1,32	+2,16	129,76

Б. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.13. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В теории ошибок рассматривают математическую обработку многократных измерений одной и той же величины. В геодезии возникают и более сложные задачи совместной обработки результатов измерений величин, функционально связанных между собой. При этом число измерений n делают больше, чем необходимо для определения k неизвестных.

Результаты измерений содержат неизбежные ошибки, поэтому измеряемая величина получит несколько различающихся между собой значений. Кроме того, результаты измерений не будут удовлетворять возникающим в сети геометрическим условиям, например, сумма измеренных в плоском треугольнике углов будет отличаться от 180° и т.п.

Устранение многозначности решения задачи и удовлетворение геометрических условий в сетях достигается в процессе уравнивания по методу наименьших квадратов (МНК), согласно которому в измеренные величины вводят поправки v_i , удовлетворяющие условию $[vv] = \min$ — для равноточных и $[pvv] = \min$ — для неравноточных измерений. Соблюдение этих условий, как теоретически доказано К.Ф. Гауссом и А.А. Марковым, приводит к наилучшим оценкам определяемых величин.

Кроме того, наличие избыточных измерений в количестве $r = n - k$ позволяет выполнить контроль измерений и сделать оценку их точности. Доказано, что в среднем отношение веса P уравненного к весу p неуравненного результата определяется формулой $P/p = n/k > 1$.

Уравнение выполняют двумя основными способами: параметрическим и коррелятным. В параметрическом способе непосредственно определяют уравненные значения неизвестных — параметров, а в коррелятном — сначала находят уравненные коррелаты, а по ним с помощью функций — неизвестные. Оба способа дают одни и те же результаты, поэтому выбор метода уравнивания в основном определяется наименьшим объемом вычислений, необходимым для его реализации. Кроме двух основ-

ных способов имеются комбинированные, сочетающие достоинства одного и другого.

Классическая теория МНК рассматривает независимые, некоррелированные результаты измерений. В настоящее время МНК распространен и на коррелированные измерения.

2.14. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Предположим, что точными значениями неизвестных являются k величин X_j ($j = 1, 2, \dots, k$), не имеющих между собой функциональных зависимостей. Истинными значениями измеренных n величин являются Z_i , связанные с X_j параметрическими уравнениями

$$Z_i = F_i(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (2.66)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $n > k$.

Так как истинные значения Z_i неизвестны, то нельзя определить и точные значения X_j , но можно подобрать такие уравненные значения x_j , $Z_j = z'_i + v_i$ (z'_i — измеренные значения, v_i — поправки), при которых

$$Z'_i + v_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (2.67)$$

откуда имеем систему уравнений поправок

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) - z'_i = v_i;$$

Полагая $x_j = x_j^0 + \delta x_j$, где x_j^0 — приближенные значения неизвестных, δx_j — поправки к ним, находим

$$F_i(x_1^0 + \delta x_1, x_2^0 + \delta x_2, \dots, x_k^0 + \delta x_k) - z'_i = v_i. \quad (2.68)$$

Нелинейные уравнения поправок приводят к линейному виду, для чего функцию в (2.68) разлагают в ряд Тейлора с сохранением членов, содержащих первые степени δx_j , в результате получаем

$$F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + (\partial F_i / \partial x_1) \delta x_1 + (\partial F_i / \partial x_2) \delta x_2 + \dots + (\partial F_i / \partial x_k) \delta x_k - z'_i = v_i.$$

Обозначив

$$a_i = \partial F_i / \partial x_1; b_i = \partial F_i / \partial x_2; \dots; g_i = \partial F_i / \partial x_k; \quad (2.69)$$

$$l_i = F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) - z'_i,$$

получим систему линейных уравнений поправок

$$v_i = a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + \dots + g_i \delta x_k + l_i, \quad (2.70)$$

где l_i — свободный член.

Система (2.70) имеет n уравнений с $(n+k)$ неизвестными (n поправок v и k поправок δx), т. е. является неопределенной. Из множества решений системы (2.70) наилучшим будет то, для которого выполняется принцип МНК — $[pv^2] = \min$. Подставляя вместо v_i его значения из (2.70), получаем

$$\Phi = [pv^2] = p_1(a_1 \delta x_1 + b_1 \delta x_2 + \dots + g_1 \delta x_k + l_1)^2 + p_2(a_2 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \dots + g_2 \delta x_k + l_2)^2 + \dots + p_n(a_n \delta x_1 + b_n \delta x_2 + \dots + g_n \delta x_k + l_n)^2 = \min. \quad (2.71)$$

Для нахождения минимума функции (2.71) возьмем частные производные и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2p_1(a_1 \delta x_1 + b_1 \delta x_2 + \dots + g_1 \delta x_k + l_1) a_1 + 2p_2(a_2 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \dots + g_2 \delta x_k + l_2) a_2 + \dots + 2p_n(a_n \delta x_1 + b_n \delta x_2 + \dots + g_n \delta x_k + l_n) a_n = 0,$$

откуда, приведя подобные члены и разделив на 2, имеем

$$(p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \dots + p_n a_n a_n) \delta x_1 + \\ + (p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n) \delta x_2 + \dots \\ + (p_1 a_1 g_1 + p_2 a_2 g_2 + \dots + p_n a_n g_n) \delta x_k + (p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2 + \dots + p_n a_n l_n) = 0.$$

Аналогично, беря частные производные по x_2, \dots, x_k , получаем другие уравнения:

$$[paa] \delta x_1 + [pab] \delta x_2 + \dots + [pag] \delta x_k + [pal] = 0; \\ [pab] \delta x_1 + [pbb] \delta x_2 + \dots + [pbg] \delta x_k + [pbl] = 0; \\ \dots \\ [pag] \delta x_1 + [pbg] \delta x_2 + \dots + [pgg] \delta x_k + [pgl] = 0. \quad (2.72)$$

Система (2.72) имеет k уравнений с k неизвестными, т. е. является определенной, уравнения этой системы называются нормальными. Через квадратичные коэффициенты $[paa], [pbb], \dots, [pgg]$ этой системы проходит главная диагональ, относительно которой неквадратичные коэффициенты располагаются симметрично.

Для равноточных измерений $p = 1$ и вместо системы уравнений (2.72) имеем

$$[a,a] \delta x_1 + [ab] \delta x_2 + \dots + [ag] \delta x_k + [al] = 0; \\ [ab] \delta x_1 + [bb] \delta x_2 + \dots + [bg] \delta x_k + [bl] = 0; \\ \dots \\ [ag] \delta x_1 + [bg] \delta x_2 + \dots + [gg] \delta x_k + [gl] = 0. \quad (2.73)$$

2.15. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. АЛГОРИТМ ГАУССА

Системы нормальных уравнений решают в основном способами: Гаусса, квадратных корней, неопределенных коэффициентов и итераций — последовательных приближений.

Способ Гаусса сводится к последовательному исключению неизвестных δx_i из системы нормальных уравнений. Рассмотрим этот способ на примере решения трех нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [aa]\delta x_1 + [ab]\delta x_2 + [ac]\delta x_3 + [aI] &= 0; \\ [ab]\delta x_1 + [bb]\delta x_2 + [bc]\delta x_3 + [bI] &= 0; \\ [ac]\delta x_1 + [bc]\delta x_2 + [cc]\delta x_3 + [cI] &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Из первого уравнения системы (2.74) имеем

$$\delta x_1 = -\frac{[ab]}{[aa]} \delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]} \delta x_3 - \frac{[aI]}{[aa]}. \quad (2.75)$$

Подставляя полученное значение δx_1 во второе и третье уравнения, получаем

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1] \delta x_2 + [bc \cdot 1] \delta x_3 + [bI \cdot 1] &= 0; \\ [bc \cdot 1] \delta x_2 + [cc \cdot 1] \delta x_3 + [cI \cdot 1] &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где приняты обозначения, называемые алгоритмами Гаусса:

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1] &= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}; \quad [bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}; \\ [bI \cdot 1] &= [bI] - \frac{[ab][aI]}{[aa]}; \quad [cc \cdot 1] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]}; \\ [cI \cdot 1] &= [cI] - \frac{[ac][aI]}{[aa]}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Цифра 1 в алгоритмах Гаусса означает, что после первого преобразования исключено первое неизвестное.

Из первого уравнения системы (2.76) находим

$$\delta x_2 = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \delta x_3 - \frac{[bI \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}. \quad (2.78)$$

Подставляя его во второе уравнение системы (2.76), после небольших преобразований получаем

$$[cc \cdot 2] \delta x_3 + [cl \cdot 2] = 0, \quad (2.79)$$

где

$$\begin{aligned} [cc \cdot 2] &= [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \\ [cl \cdot 2] &= [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Из уравнения (2.79)

$$\delta x_3 = [-cl \cdot 2] / [cc \cdot 2]. \quad (2.81)$$

Уравнения (2.75), (2.78) и (2.81) называют элиминационными (от латинского слова *elimino* — исключать), а систему преобразованных уравнений

$$\begin{aligned} [aa] \delta x_1 + [ab] \delta x_2 + [ac] \delta x_3 + [al] &= 0; \\ [bb \cdot 1] \delta x_2 + [bc \cdot 1] \delta x_3 + [bl \cdot 1] &= 0; \\ [cc \cdot 2] \delta x_3 + [cl \cdot 2] &= 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

называют эквивалентной. Получение эквивалентной системы называют прямым ходом решения системы нормальных уравнений. Определение неизвестных из элиминационных уравнений, начиная с последнего, называют обратным ходом решения:

$$\begin{aligned} \delta x_3 &= - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}; \\ \delta x_2 &= - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \delta x_3 - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \\ \delta x_1 &= - \frac{[ab]}{[aa]} \delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]} \delta x_3 - \frac{[al]}{[aa]}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Приведенную схему решения нормальных уравнений используют и при большем числе уравнений, при этом применяют правило раскрытия алгоритма Гаусса: алгоритм с цифрой k (например, $[dl \cdot 3]$, $k = 3$) равен алгоритму без цифры ($[dl]$) минус k дробей, знаменатели которых равны первым коэффициентам эквивалентной системы уравнений ($[aa]$, $[bb \cdot 1]$, $[cc \cdot 2]$ и т. д.), а числители — произведениям двух алгоритмов с той же цифрой, что и в знаменателе, при этом первый сомножитель равен произведению первой буквы знаменателя на первую букву раскрываемого алгоритма ($[ad]$, $[bd \cdot 1]$, $[cd \cdot 2]$), а второй — произведению второй буквы знаменателя на вторую букву раскрываемого алгоритма

$$\begin{aligned}
 ([al], [bl \cdot 1], [cl \cdot 2]), \text{ например, } [dl \cdot 3] &= [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \\
 &\frac{[cd \cdot 2][cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}; \\
 [bd \cdot 1] &= [bd] - \frac{[ad][cd]}{[aa]}; \\
 [cl \cdot 2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}. \tag{2.84}
 \end{aligned}$$

Возможна и неполная форма раскрытия алгоритма, когда алгоритм с цифрой k равен тому же алгоритму с цифрой $(k - 1)$ минус последняя дробь в полной форме раскрытия, например,

$$[dl \cdot 3] = [dl \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2][cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \tag{2.85}$$

2.16. КОНТРОЛЬ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Контроль составления и решения нормальных уравнений выполняют в основном методом сумм. В табл. 2.11 в каждой строке выписывают коэффициенты уравнений поправок a_i , b_i , c_i , ..., g_i , свободные члены l_i и суммы $s_i =$

Таблица 2.11

Номер уравнения	a_i	b_i	c_i	...	g_i	l_i	s_i	v_i
1	a_1	b_1	c_1	...	g_1	l_1	s_1	v_1
2	a_2	b_2	c_2	...	g_2	l_2	s_2	v_2
...
n	a_n	b_n	c_n	...	g_n	l_n	s_n	v_n
Сумма	$[a]$	$[b]$	$[c]$...	$[g]$	$[l]$	$[s]$	$[v]$
Неизвестные	δx_1	δx_2	δx_3	...	δx_k	-	-	-
Контроль	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$...	$[gv]$	-	-	$[v]^2$

$a_i + b_i + c_i + \dots + g_i + l_i$. Затем вычисляют суммы по столбцам и проверяют правильность вычислений по формуле

$$[a] + [b] + [c] + \dots + [g] + [l] = [s].$$

В табл. 2.12 вычисляют коэффициенты нормальных уравнений.

Таблица 2.12

$a]$	$b]$	$c]$...	$g]$	$l]$	$s]$	Контроль	
$[a$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$...	$[ag]$	$[al]$	$[as]$	$[aa] + [ab] + [ac] + \dots + [ag] + [al] = [as]$
$[b$	$[bb]$	$[bc]$...	$[bg]$	$[bl]$	$[bs]$	$[ab] + [bb] + [bc] + \dots + [bg] + [bl] = [bs]$	
$[c$		$[cc]$...	$[cg]$	$[cl]$	$[cs]$	$[ac] + [bc] + [cc] + \dots + [cg] + [cl] = [cs]$	
			
$[g$				$[gg]$	$[gl]$	$[gs]$	$[ag] + [bg] + [cg] + \dots + [gg] + [gl] = [gs]$	
$[l$					$[ll]$	$[ls]$	$[al] + [bl] + [cl] + \dots + [gl] + [ll] = [ls]$	
$[s$						$[ss]$	$[as] + [bs] + [cs] + \dots + [gs] + [ls] = [ss]$	

Коэффициенты нормальных уравнений получают путем перемножения в табл. 2.12 элементов одного столбца на самих себя ($[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, ..., $[ss]$) и на другие столбцы ($[ab]$, $[ac]$, ..., $[ls]$) и последовательного их суммирования. Суммирование коэффициентов нормальных уравнений для контроля выполняют углом. Например, $[cs] = [ac] + [bc] + [cc]$ столбца c + ... + $[cg] + [cl]$ строки c .

В табл. 2.13 приведена схема решения нормальных уравнений по способу Гаусса, приведены формулы, по которым вычисляют большинство элементов схемы. Пояснения необходимы только для строк 5, 10 и 16.

В строке 5 записывают результаты суммирования по столбцам элементов 3 и 4 строк, получают $[bb \cdot 1]$, $[bc \cdot 1]$, ..., $[bs \cdot 1]$. В строке 10 приведен результат сложения строк 7, 8, 9 по каждому столбцу, находят $[cc \cdot 2]$, $[cl \cdot 2]$, $[cs \cdot 2]$, а в строке 16 — результат суммирования по столбцам элементов строк 12, 13, 14, 15, получают $[ll \cdot 3]$ и $[ls \cdot 3]$.

При числе неизвестных $k \leq 10$ коэффициенты нормальных и эквивалентных уравнений вычисляют до 0,01; коэффициенты элиминационных уравнений и неизвестные — до 0,001; значения $1/[aa]$, $1/[bb \cdot 1]$ и т. д. — до 0,0001. Расхождение контрольных сумм эквивалентных строк допускает до 0,01–0,02. Контроль решения нормальных уравнений выполняют по формулам, приведенным в табл. 2.13 в столбце контроль.

Заключительным контролем прямого хода решения в схеме Гаусса является соблюдение равенств $[ll \cdot k] = [ls \cdot k] = [ss \cdot k]$ или $[pll \cdot k] = [pls \cdot k] = [pss \cdot k]$. Закончив прямой ход решения, вычисляют неизвестные δx_j , после чего вычисляют по формуле (2.70) поправки v_i и контролируют их вычисление по формулам $[av] = [bv] = \dots = [gv] = 0$ или $[pav] = [pbv] = \dots = [pgv] = 0$, кроме того

$$\begin{aligned} [v^2] &= [ll \cdot k] = [ls \cdot k]; \\ [pv^2] &= [pll \cdot k] = [pls \cdot k]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Вместо полной схемы табл. 2.13 целесообразно использовать сокращенную схему Гаусса (табл. 2.14), в которой не делают промежуточные

Таблица 2.13

Номер строки	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
1	$\begin{pmatrix} [aa] \\ -\frac{1}{[aa]} \end{pmatrix}; -1$	$\begin{pmatrix} [ab] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [ac] \\ -\frac{[ac]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [a] \\ -\frac{[a]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [as] \\ -\frac{[as]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$[aa] + [ab] + [ac] + [a] = [as]$
2						$-1 - \frac{[ab]}{[aa]} - \frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[a]}{[aa]} = -\frac{[as]}{[aa]}$
3		$\begin{pmatrix} [bb] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bc] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [b] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bs] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$[ab] + [bb] + [bc] + [b] = [bs]$
4		$\begin{pmatrix} [bb] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bc] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [b] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bs] \\ -\frac{[ab]}{[aa]} \end{pmatrix}$	
5		$\begin{pmatrix} 1 \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}; -1$	$\begin{pmatrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [b \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + [b \cdot 1] = [bs \cdot 1]$
6						$-1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[b \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = -\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$
7			$\begin{pmatrix} [cc] \\ -\frac{[ac]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [c] \\ -\frac{[ac]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [cs] \\ -\frac{[ac]}{[aa]} \end{pmatrix}$	$[ac] + [bc] + [c] + [a] = [cs]$
8						
9		$\begin{pmatrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	
10		$\begin{pmatrix} 1 \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}; -1$	$\begin{pmatrix} [cc \cdot 2] \\ -\frac{1}{[cc \cdot 2]} \end{pmatrix}; -1$	$\begin{pmatrix} [c \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [cs \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}$	$[cc \cdot 2] + [c \cdot 2] = [cs \cdot 2]$
11						$-1 - \frac{[c \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$
12				$[l]$	$[ls]$	$[a] + [b] + [c] + [l] = [s]$
13				$\begin{pmatrix} [a] \\ [aa] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [as] \\ [aa] \end{pmatrix}$	
14				$\begin{pmatrix} [b] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$	
15				$\begin{pmatrix} [c] \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [cs \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}$	
16				$[l \cdot 3]$	$[ls \cdot 3]$	$[l \cdot 3] = [s \cdot 3]$
17			$\delta x_3 =$	$\begin{pmatrix} [c \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{pmatrix}$		
18		$\delta x_2 =$	$\begin{pmatrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix} \delta x_3$	$\begin{pmatrix} [b \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{pmatrix}$		
19	$\delta x_1 =$	$\begin{pmatrix} [ab] \\ [aa] \end{pmatrix} \delta x_2$	$\begin{pmatrix} [ac] \\ [aa] \end{pmatrix} \delta x_3$	$\begin{pmatrix} [a] \\ [aa] \end{pmatrix}$		

записи. При этом коэффициенты нормальных уравнений нужно сразу после их вычисления записать в схему Гаусса, тогда отпадет необходимость заполнять табл. 2.12.

В строки сокращенной схемы табл. 2.14 записывают коэффициенты уравнений: нормальных (Н), элиминационных (Эл) и эквивалентных (Эк). Порядок заполнения строк Н и Эл очевиден и не требует пояснений. Коэффициенты эквивалентных уравнений (строки Эк) вычисляют методом накопления сумм, используя следующее правило: коэффициент эквивалентного уравнения в строке i и столбце k равен коэффициенту нормального уравнения, расположенного над ним в этом же столбце k , плюс сумма произведений коэффициентов элиминационных уравнений (строки Эл) в столбце квадратичного коэффициента определяемого уравнения на коэффициенты уравнений, расположенных над ними в столбце k . Например, коэффициент эквивалентного уравнения в строке $i = 7$ и столбце $k = 4$ равен

$$[cl \cdot 2] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]} [al] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1].$$

Таблица 2.14

Номер строк	Название уравнения	δx_1	δx_2	δx_3	l	s
1	Н ₁	[aa]	[ab]	[ac]	[al]	[as]
2	Эл ₁	(-1)	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$
3	Н ₂		[bb]	[bc]	[bl]	[bs]
4	Эк ₂		[bb · 1]	[bc · 1]	[bl · 1]	[bs · 1]
5	Эл ₂		(-1)	$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$
6	Н ₃			[cc]	[cl]	[cs]
7	Эк ₃			[cc · 2]	[cl · 2]	[cs · 2]
8	Эл ₃			(-1)	$-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$	$-\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$
9	Н ₄				[ll]	[ls]
10	Эк ₄	δx_1	δx_2	δx_3	[ll · 3]	$\begin{matrix} [ls \cdot 3] \\ [ss \cdot 3] \end{matrix}$

Неизвестное x_j равно числу j -й элиминационной строки из столбца l плюс сумма произведений уже вычисленных неизвестных δx на расположенные над ними числа из этой же элиминационной строки, например,

$$\delta x_2 = - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \delta x_3.$$

При уравнивании неравноточных измерений порядок вычислений остается таким же, но в табл. 2.11 элементы каждой строки умножают на соответствующий вес. Например, элементы строки 1 — на p_1 , строки 2 — на p_2 и т. д. Кроме того, неравноточные измерения можно привести к равноточным путем умножения на корень квадратный из его веса. Уравнения поправок в этом случае аналогичны (2.70) и имеют вид

$$v'_i = a'_i \delta x_1 + b'_i \delta x_2 + \dots + g'_i \delta x_k + l'_i,$$

где

$$v'_i = v_i \sqrt{p_i}; a'_i = a_i \sqrt{p_i}; b'_i = b_i \sqrt{p_i}; \dots; g'_i = g_i \sqrt{p_i}; l'_i = l_i \sqrt{p_i}.$$

При этом сохраняются все формулы и схемы, полученные для равноточных измерений, если коэффициенты a, b, \dots, g_i и свободный член l_i заменить на a', b', \dots, g', l' . В конце вычислений определяют поправки $v_i = v'_i / \sqrt{p_i}$.

2.17. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ

После определения уравненных значений неизвестных выполняют оценку их точности, т. е. вычисляют средние квадратические ошибки измерений и уравненных неизвестных, являющихся функциями измеренных величин. В общем случае среднюю квадратическую ошибку m_i любой величины определяют по формуле

$$m_i = \mu \sqrt{1/p_i}, \quad (2.87)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; p_i — вес оцениваемой величины. Значение μ находят по формуле

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)}, \quad (2.88)$$

где $(n - k)$ — число избыточно измеренных величин.

Для вычисления весов неизвестных можно использовать формулу (2.51), предварительно определив функциональную зависимость между оцениваемой величиной и результатами измерений x_1, x_2, \dots, x_n , т. е.

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для выражения неизвестных δx в виде линейных функций свободных членов нормальных уравнений или непосредственно измеренных величин используют способ неопределенных множителей. В случае равноточных измерений, умножая первое нормальное уравнение на Q_{11} , второе — на Q_{12} , третье — на Q_{13} —, имеем

$$\begin{aligned} ([aa] \delta x_1 + [ab] \delta x_2 + [ac] \delta x_3 + \dots + [al]) Q_{11} &= 0; \\ ([ab] \delta x_1 + [bb] \delta x_2 + [bc] \delta x_3 + \dots + [bl]) Q_{12} &= 0; \\ ([ac] \delta x_1 + [bc] \delta x_2 + [cc] \delta x_3 + \dots + [cl]) Q_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

После сложения и небольших преобразований находим

$$\begin{aligned} &([aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} + \dots) \delta x_1 + \\ &+ ([ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} + \dots) \delta x_2 + \\ &+ ([ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} + \dots) \delta x_3 + \\ &+ [al]Q_{11} + [bl]Q_{12} + [cl]Q_{13} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Учитывая неопределенность множителей Q_{ik} , дадим им такие значения, чтобы

$$\begin{aligned} [aa] Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} + \dots &= 1; \\ [ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} + \dots &= 0; \\ [ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} + \dots &= 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (2.91)$$

В этом случае

$$\delta x_1 = -([a\ell]Q_{11} + [b\ell]Q_{12} + [c\ell]Q_{13} + \dots). \quad (2.92)$$

Используя коэффициенты Q_{21} , Q_{22} , Q_{23} и Q_{31} , Q_{32} , Q_{33} , аналогичным образом находят

$$\begin{aligned} \delta x_2 &= -([a\ell]Q_{21} + [b\ell]Q_{22} + [c\ell]Q_{23} + \dots); \\ \delta x_3 &= -([a\ell]Q_{31} + [b\ell]Q_{32} + [c\ell]Q_{33} + \dots) \end{aligned} \quad (2.93)$$

при условии

$$\begin{aligned} [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + \dots &= 0; \\ [ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + \dots &= 1; \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} [ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23} + \dots &= 0; \\ [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} + \dots &= 0; \\ [ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} + \dots &= 0; \\ [ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} + \dots &= 1. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Неопределенные множители Q позволяют оценить точность полученных значений неизвестных и их функций. Величины Q являются весовыми коэффициентами, что можно доказать следующим образом. Вместо (2.92) можно записать

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -(a_1 Q_{11} + b_1 Q_{12} + c_1 Q_{13})l_1 - (a_2 Q_{11} + b_2 Q_{12} + c_2 Q_{13})l_2 - \\ &\quad - (a_3 Q_{11} + b_3 Q_{12} + c_3 Q_{13})l_3 - \dots = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.96)$$

где

$$\alpha_i = -(a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13}). \quad (2.97)$$

Умножая последовательно левую и правую части уравнения (2.97) на a_1 , a_2 , a_3 , ... и складывая результаты, с учетом первого уравнения системы (2.91) получаем

$$[a\alpha] = -([aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13}) = -1. \quad (2.98)$$

Аналогично, используя коэффициенты b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 , находим

$$[b\alpha] = [c\alpha] = 0. \quad (2.99)$$

Затем, умножив левые и правые части (2.97) на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ и сложив результаты, с учетом (2.98) и (2.99) находим

$$[\alpha\alpha] = -([\alpha\alpha]Q_{11} + [b\alpha]Q_{12} + [c\alpha]Q_{13}) = Q_{11}. \quad (2.100)$$

Согласно формуле (2.51) обратный вес линейной функции (2.96), в которой свободные члены l_i выполняют роль результатов измерений (l_i — разность между приближенным и измеренным значениями величины, поэтому вес l_i , равен весу результата измерения), определяется из выражения

$$\frac{1}{p_{\delta x_1}} = \frac{\alpha_1^2}{p_{l_1}} + \frac{\alpha_2^2}{p_{l_2}} + \frac{\alpha_3^2}{p_{l_3}} + \dots = \left[\frac{\alpha\alpha}{p} \right]. \quad (2.101)$$

Для равноточных измерений $p_1 = p_2 = \dots = 1$, поэтому с учетом (2.100)

$$1/p_{\delta x_1} = [aa] = Q_{11}. \quad (2.102)$$

Аналогичным образом получают

$$1/p_{\delta x_2} = Q_{22}; \quad 1/p_{\delta x_3} = Q_{33}, \dots \quad (2.103)$$

Весовые коэффициенты Q_{11}, Q_{22}, \dots с одинаковыми индексами называются квадратичными, они являются обратными весами уравненных значений неизвестных с соответствующим индексом: Q_{11} — обратный вес первого неизвестного, Q_{22} — второго и т.д. Квадратичные коэффициенты всегда положительны. Неквадратичные коэффициенты Q_{ij} обладают свойством симметрии относительно главной диагонали ($Q_{ij} = Q_{ji}$), выражают зависимость между уравненными неизвестными i и j , могут быть положительными и от-

рицательными.

Весовые уравнения типа (2.91), (2.94), (2.95) решают одновременно с нормальными уравнениями. Значения свободных членов каждой системы весовых уравнений вносят в дополнительный столбец. Вычислив обратные веса неизвестных, определяют их средние квадратические ошибки

$$m_i = \mu \sqrt{1/p_i} = \mu \sqrt{Q_{ii}}, \quad (2.104)$$

где для равноточных измерений

$$\mu = m = \sqrt{[v^2]/(n-k)}, \quad (2.105)$$

где $(n - k)$ — число избыточных измерений. Для неравноточных измерений μ определяется по формуле (2.88).

2.18. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ УРАВНЕННЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ

Часто возникает необходимость оценивать точность функции уравненных неизвестных. Для функции

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.106)$$

где x_i — уравненные неизвестные, обратный вес вычисляют по формуле

$$1/P_F = \sum f_j^2 Q_{jj} + 2 \sum f_i f_j Q_{ij}, \quad (2.107)$$

где $f_j = (\partial F / \partial x_j)$; $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Если весовые коэффициенты неизвестны, то

$$\frac{1}{P_F} = - \frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2^2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[f_3^2 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots - \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}, \quad (2.108)$$

где

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1; [f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1].$$

Отдельные слагаемые формулы (2.108) можно получить в схеме Гаусса путем введения дополнительного столбца. Для контроля вычислений используют формулу

$$-\frac{1}{P_F} = [f] - \frac{\Sigma_1 f_1}{[aa]} - \frac{[\Sigma_2 \cdot 1][f_2 \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \dots - \frac{[\Sigma_k \cdot (k-1)][f_k \cdot (k-1)]}{[gg \cdot (k-1)]}, \quad (2.109)$$

$$\Sigma_1 = [as] - [al] + f_1;$$

$$\Sigma_2 = [bs] - [bl] + f_2;$$

.....

$$\Sigma_k = [gs] - [gl] + f_k. \quad (2.110)$$

Средняя квадратическая ошибка функции $m_F = \mu \sqrt{1/P_F}$.

2.19. ПРИМЕР УРАВНИВАНИЯ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

В табл. 2.15 приведены результаты измерений углов во всех комбинациях. Необходимо уравнять эти результаты параметрическим способом. На рис. 2.4 приведена схема направлений.

Уравнения поправок в общем виде:

$$\delta x_1 + l_1 = v_1;$$

$$\delta x_1 + \delta x_2 + l_2 = v_2;$$

Таблица 2.15

Порядковый номер	Углы	Измеренное значение	Неизвестные	Уравненное значение
1	1.2	37° 51' 17,8"	x_1	37° 51' 17,15"
2	1.3	69 11 28,1	$x_1 + x_2$	69 11 28,82
3	1.4	113 13 53,4	$x_1 + x_2 + x_3$	113 13 53,32
4	2.3	31 20 11,9	x_2	31 20 11,68
5	2.4	75 22 36,6	$x_2 + x_3$	75 22 36,18
6	3.4	44 02 24,0	x_3	44 02 24,50

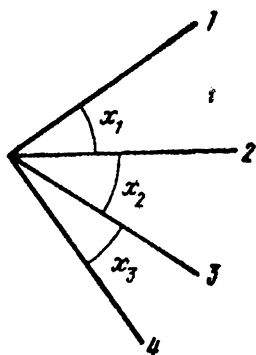


Рис. 2.4. Схема углов

$$\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_3 = v_3; \quad (2.111)$$

$$\delta x_2 + l_4 = v_4;$$

$$\delta x_2 + \delta x_3 + l_5 = v_5;$$

$$\delta x_3 + l_6 = v_6.$$

Примем в качестве приближенных значений x_1, x_2, x_3 их измеренные значения, т. е. $x_1^0 = 37^\circ 51' 17,8''$; $x_2^0 = 31^\circ 20' 11,9''$; $x_3^0 = 44^\circ 02' 24,0''$.

Согласно (2,69) свободные члены l_i равны разностям между их приближенными и измеренными значениями, т. е. $l_1 = l_4 = l_6 = 0$, $l_2 = x_1^0 + x_2^0 - 1,3 = +1,6''$; $l_3 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - 1,4 = +0,3''$; $l_5 = x_2^0 + x_3^0 - 2,4 = -0,7''$.

По уравнениям (2.111) составим таблицу коэффициентов уравнений поправок и нормальных уравнений (табл. 2.16).

Таблица 2.16

Порядковый номер	a	b	c	l	s	v
1	+1				+1	-0,65
2	+1	+1		+1,6	+3,6	+0,72
3	+1	+1	+1	+0,3	+3,3	-0,08
4		+1			+1	-0,22
5		+1	+1	-0,7	+1,3	-0,42
6			+1		+1	+0,50
Σ	+3	+4	+3	+1,2	+11,2	$[v^2] = 1,422$

Таблица 2.17

Порядковый номер	Название уравнения	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль	l_1	l_2	l_3	f_1	Σ_1	t_1	Σ_2
1	H_1	+3,00	+2,00	+1,00	+1,90	+7,90	+7,90	-1,00	0	0	+1,00	+7,00	0	+6,00
2	Σ_{H_1}	-1	0,667	-0,333	-0,633	-2,633	-2,633	+0,333	0	0	-0,333	-2,333	0	-2,00
3	H_2		+4,00	+2,00	+1,20	+9,20	+9,20	0	-1,00	0	+1,00	+9,00	0	+8,00
4	Σ_{H_2}		+2,666	+1,333	-0,067	+3,932	+3,932	+0,667	-1,00	0	+0,333	+4,331	0	+4,00
5	Σ_{H_2}		-1	-0,500	+0,025	-1,474	-1,475	-0,250	+0,375	0	-0,125	-1,625	0	-1,500
6	H_3			+3,00	-0,40	+5,60	+5,60	0	0	-1,00	+1,00	+7,00	+1,00	+7,00
7	Σ_{H_3}			+2,00	-1,00	+1,00	+1,00	0	+0,50	-1,00	+0,50	+2,50	+1,00	+3,00
8	Σ_{H_3}			-1	+0,500	-0,500	-0,500	0	-2,50	+0,500	-0,250	-1,252	-0,500	-1,500
9	H_4				+3,14	+5,84	+5,84							
10	Σ_{H_4}				+1,44	+1,44	+1,44				0,50	-0,50	-0,50	-0,50
11	H_5				+28,54	+28,54	+28,54							
12	-					+1,44								
				-0,650										
			-0,225	+0,500										

В табл. 2.17 дано решение нормальных уравнений по сокращенной схеме Гаусса, приведенной в табл. 2.14. В дополнительных столбцах l_1, l_2, l_3 (см. табл. 2.17) получено решение весовых уравнений (2.91), (2.94), (2.95), которое выполняется одновременно с решением нормальных уравнений и в той же последовательности, если столбец l заменить столбцом l_1 , затем l_2 и после этого столбцом l_3 .

Весовые коэффициенты

$$\begin{pmatrix} +0,500 & -0,250 & 0 \\ -0,250 & +0,500 & -0,250 \\ 0 & -0,250 & +0,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляют по тем же формулам, что и неизвестные δx . Преобразовав по схеме Гаусса столбцы l_1, l_2, l_3 , сначала в третий столбец матрицы весовых коэффициентов из эллиминационной строки 8 (Эл_3) выписывают значения $Q_{13} = 0$ из столбца l_1 ; $Q_{23} = -0,250$ — из столбца l_2 , и $Q_{33} = +0,500$ — из столбца l_3 . Затем, последовательно умножая полученные значения Q_{13}, Q_{23}, Q_{33} на коэффициент $-0,500$ эллиминационного уравнения Эл_2 в столбца δx_3 (строка 5), и прибавляя к каждому результату значения коэффициентов этой же строки 5 в столбцах $l_1 (-0,250), l_2 (+0,375)$ и $l_3 (0)$, получаем

$$Q_{12} = 0(-0,500) - 0,250 = -0,250;$$

$$Q_{22} = -0,250(-0,500) + 0,375 = +0,500;$$

$$Q_{32} = +0,500(-0,500) + 0 = -0,250.$$

После этого, умножая вычисленные коэффициенты в каждой строке матрицы на коэффициенты эллиминационного уравнения Эл_1 в строке 2 и столбцах δx_2 и δx_3 и прибавляя к результату коэффициент этой же строки 2 последовательно в столбцах $l_1 (+0,333), l_2 (0), l_3 (0)$, находим

$$Q_{11} = -0,250(-0,667) + 0(-0,333) + 0,333 = 0,500;$$

$$Q_{21} = 0,500(-0,667) - 0,250(-0,333) + 0 = -0,250;$$

$$Q_{31} = -0,250(-0,667) + 0,500(-0,333) + 0 = 0.$$

Средняя квадратическая ошибка

$$m_{x_j} = \mu \sqrt{Q_{jj}}; \mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)}, \quad (2.112)$$

при равноточных измерениях

$$m_{x_j} = m \sqrt{Q_{jj}}; m = \sqrt{[v^2]/(n-k)}, \quad (2.113)$$

Если система состоит не более чем из четырех нормальных уравнений, ее удобно решать с помощью определителей, используя формулу

$$\delta x_i = -\frac{D_{\delta x_i}}{D}; D \neq 0,$$

где D — определитель, составленный из коэффициентов нормальных уравнений; $D_{\delta x_i}$ — определитель, который получают из определителя D путем замены столбца коэффициентов при неизвестном δx_i столбцом свободных членов. Определитель n -го порядка можно разложить по элементам любой строки

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение (адьюнкта), получаемое из данного определителя путем зачеркивания строки i и столбца j . Знак A_{ij} определяется выражением $(-1)^{i+j}$. Для рассматриваемого примера

$$D = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,00 & 2,00 & 1,00 \\ 2,00 & 4,00 & 2,00 \\ 1,00 & 2,00 & 3,00 \end{vmatrix} =$$

$$= 3,00A_{11} + 2,00A_{12} + 1,00A_{13}.$$

С учетом значений

$$A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 4,00 & 2,00 \\ 2,00 & 3,00 \end{vmatrix} = 4,00 \cdot 3,00 - 2,00 \cdot 2,00 = 8,00;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} = \begin{vmatrix} 2,00 & 2,00 \\ 1,00 & 3,00 \end{vmatrix} = -4,00;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} 2,00 & 4,00 \\ 1,00 & 2,00 \end{vmatrix} = 0;$$

$$D = 3,00 \cdot 8,00 + 2,00(-4,00) + 1,00 \cdot 0 = 16,00.$$

Определитель

$$D\delta_{x_1} = \begin{vmatrix} [pal] & [pab] & [pac] \\ [pbl] & [pbb] & [pbc] \\ [pcl] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,90 & 2,00 & 1,00 \\ 1,20 & 4,00 & 2,00 \\ -0,40 & 2,00 & 3,00 \end{vmatrix} =$$

$$= 1,90(12,00 - 4,00) - 2,00(3,60 + 0,80) + 1,00(2,40 + 1,60) = 10,40;$$

$$\delta x_1 = -D\delta_{x_1}/D = -10,40/16,00 = -0,650.$$

Аналогичным способом получаем

$$D\delta_{x_2} = \begin{vmatrix} [paa] & [pal] & [pac] \\ [pab] & [pbl] & [pbc] \\ [pac] & [pbl] & [pcc] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,00 & 1,90 & 1,00 \\ 2,00 & 1,20 & 2,00 \\ 1,00 & -0,40 & 3,00 \end{vmatrix} = 3,60;$$

$$\delta x_2 = -3,60/16,00 = -0,225.$$

$$D\delta_{x_3} = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pal] \\ [pab] & [pbb] & [pbl] \\ [pac] & [pbc] & [pcl] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,0 & 2,00 & 1,90 \\ 2,00 & 4,00 & 1,20 \\ 1,00 & 2,00 & -0,40 \end{vmatrix} = -8,00;$$

$$\delta x_3 = -8,00/16,00 = +0,500.$$

Решая с помощью определителей системы уравнений типа (2.91), (2.94), (2.95), получим формулу для нахождения весовых коэффициентов $Q_{ij} = A_{ij}/D$. Учитывая вычисленные значения $D, A_{11}, A_{12}, A_{13}$, находим

$$Q_{11} = A_{11}/D = 8,00/16,00 = 0,500;$$

$$Q_{12} = A_{12}/D = -4,00/16,00 = -0,250;$$

$$Q_{13} = A_{13}/D = 0/16,00 = 0.$$

Раскладывая определитель D по элементам второй и третьей строк, находим

$$\begin{aligned} A_{21} &= -4,00; A_{22} = 8,00; A_{23} = -4,00; \\ Q_{21} &= A_{21}/D = -0,250; Q_{22} = A_{22}/D = 0,500; Q_{23} = A_{23}/D = -0,250; \\ A_{31} &= 0; A_{32} = -4,00; A_{33} = 8,00; Q_{31} = A_{31}/D = 0; Q_{32} = A_{32}/D = -0,250 \\ Q_{33} &= A_{33}/D = 0,500 \end{aligned}$$

т.е. получены значения, приведенные в матрице весовых коэффициентов.

Используя для оценки точности формулы (2.113) и учитывая, что согласно (2.86) $[v^2] = [ll \cdot k] = [ls \cdot k]$, в рассматриваемом примере $[v^2] = 1,44$ (в табл. 2.17 строка 10, столбцы l, s),

$$m = \sqrt{1,44 / (6 - 3)} = 0,69'';$$

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = m \sqrt{Q_{jj}} = 0,69 \sqrt{0,50} = 0,49''.$$

Коэффициенты корреляции между уравненными i -м и j -м неизвестными определяют по формуле

$$r_{ij} = Q_{ij} / \sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}. \quad (2.114)$$

Например, коэффициент корреляции между x_1 и x_2 равен

$$r_{1,2} = Q_{12} / \sqrt{Q_{11} Q_{22}} = -0,250 / \sqrt{0,500 \cdot 0,500} = -0,5.$$

В случаях, когда необходимо определить вес функции уравненных неизвестных, можно воспользоваться формулой (2.107). Например, в приведенном выше примере нужно найти вес суммы уравненных углов

$$F = x_1 + x_2 + x_3,$$

т.е. угла 1.4. Учитывая, что $f_j = (\partial F / \partial x_j) = 1$, находим

$$\begin{aligned} 1/P_F &= \sum f_j^2 Q_{jj} + 2 \sum f_j f_k Q_{jk} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} + 2(Q_{12} + Q_{13} + Q_{23}) = \\ &= 0,50 + 0,50 + 0,50 + 2(-0,250 + 0 - 0,250) = 0,50. \end{aligned}$$

Кроме того, обратный вес можно определить, используя формулу (2.108), а для контроля — формулу (2.109). Добавив в схему Гаусса (см. табл. 2.17) столбцы f_1 и Σ_1 , делаем вычисления, аналогичные выполняемым при реше-

нии нормальных уравнений. В столбце f_1 значение $1/P_F$, получается путем суммирования произведений элиминационных строк на расположенные над ними коэффициенты, а в столбце Σ_1 — путем суммирования $[f]$ (в рассматриваемом примере $[f] = 3$) с произведением значений элиминационных строк в столбце f_1 на расположенные над ними коэффициенты в столбце Σ_1 .

По формулам (2.108), (2.109) можно определить также обратные веса уравненных значений неизвестных. Например, если нужно найти обратный вес неизвестного x_3 , то принимают $f_3 = 1, f_1 = f_2 = \dots = f_k = 0$, тогда $F = x_3$ (в табл. 2.17 столбцы f_2, Σ_2)

2.20. ПРИМЕР УРАВНИВАНИЯ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

На схеме нивелирной сети (рис. 2.5) цифрами в кружках обозначены номера секций, стрелками — направление ходов. Ниже приведены исходные данные, в табл. 2.18 — результаты измерений и значения их весов.

Номер марки	20	21	22
Отметка исходной марки, м	104,931	119,354	123,478

Приближенные значения отметок реперов $x_1^0 = 117,3$ м; $x_2^0 = 111,0$ м, $x_3^0 = 113,9$ м. Уравнения поправок в общем виде составляют как разности

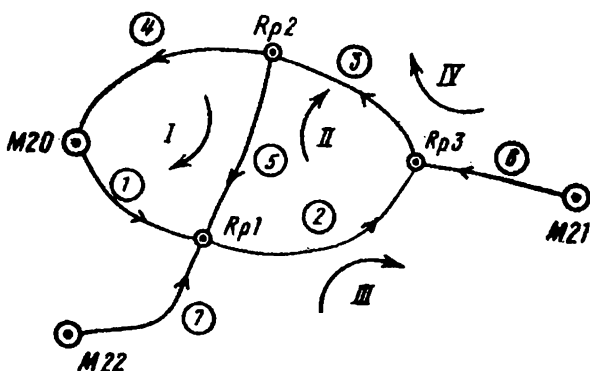


Рис. 2.5 Схема нивелирной сети

Таблица 2.18

Номер хода	Превышение h , м	Длина хода L , км	Вес $p_i = 35/L_i$	Уравненное пре- вышение, м
1	+12,352	27,4	1,28	+12,338
2	-3,387	31,8	1,10	-3,388
3	-2,894	29,1	1,20	-2,877
4	-6,075	34,5	1,01	-6,073
5	+6,243	41,3	0,85	+6,265
6	-5,488	24,9	1,41	-5,473
7	-6,208	28,4	1,23	-6,209

между превышениями, полученными по отметкам точек и их измеренными значениями в каждой секции. При этом к приближенным значениям определяемых отметок x^0 , реперов прибавляют соответствующую поправку δx . Число уравнений поправок равно количеству секций. Для рассматриваемой сети

$$x_1^0 + \delta x_1 - x_{20} - h_1 = v_1;$$

$$x_3^0 + \delta x_3 - x_1^0 - \delta x_1 - h_2 = v_2;$$

$$x_2^0 + \delta x_2 - x_3^0 - \delta x_3 - h_3 = v_3;$$

$$x_{20} - x_2^0 - \delta x_2 - h_4 = v_4;$$

$$x_1^0 + \delta x_1 - x_2^0 - \delta x_2 - h_5 = v_5;$$

$$x_3^0 + \delta x_3 - x_{21} - h_6 = v_6;$$

$$x_1^0 + \delta x_1 - x_{22} - h_7 = v_7.$$

Подставляя в эти уравнения вместо x_1^0, x_2^0, x_3^0 — приближенные значения отметок реперов, вместо x_{20}, x_{21}, x_{22} — отметки марок, а вместо h_1, h_2, \dots, h_7 — измеренные превышения, находим значения свободных членов $l_1 = x_1^0 - x_{20} - h_1, l_2 = x_3^0 - x_1^0 - h_2$ и т. д. В итоге получим уравнения поправок

$$\begin{aligned}
 +\delta x_1 & & + 1,7 = v_1; \\
 -\delta x_1 & & + \delta x_3 - 1,3 = v_2; \\
 & + \delta x_2 - \delta x_3 - 0,6 = v_3; \\
 & - \delta x_2 & + 0,7 = v_4; \\
 + \delta x_1 - \delta x_2 & & + 5,7 = v_5; \\
 & + \delta x_3 & + 3,4 = v_6; \\
 + \delta x_1 & & + 3,0 = v_7;
 \end{aligned}
 \tag{2.115}$$

в которых свободные члены даны в сантиметрах.

В табл. 2.19 приведены коэффициенты уравнений поправок и другие величины, а в табл. 2.20 — коэффициенты нормальных уравнений.

В табл. 2.21 приведена сокращенная схема решения нормальных уравнений. Следует заметить, что табл. 2.20 можно не заполнять, а сразу по данным табл. 2.19 вычислять коэффициенты нормальных уравнений $[paa]$, $[pab]$, ..., $[psv]$ и записывать их в строки H_1, H_2, \dots, H_5

Таблица 2.19

Номер уравнения	Коэффициенты уравнений поправок						
	a	b	c	$l, \text{ см}$	s	p	$V, \text{ см}$
1	+1			+1,7	+2,7	1,28	-1,40
2	-1		+1	-1,3	-1,3	1,10	-0,08
3		+1	-1	-0,6	-0,6	1,20	+1,73
4		-1		+0,7	-0,3	1,01	+0,25
5	+1	-1		+5,7	+5,7	0,85	+2,15
6			+1	+3,4	+4,4	1,41	+1,52
7	+1			+3,0	+4,0	1,23	-0,10
Σ	+2	-1	+1	+12,6	+14,6		
δx_i	-3,10	+0,45	-1,88				
						$[pv^2] = 13,37$	
						$[plv] = 13,33$	
						$[psv] = 13,31$	

В результате решения системы нормальных уравнений получаем поправки $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ и значения неизвестных:

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 117,300 \text{ м} - 3,10 \text{ см} = 117,269 \text{ м};$$

$$x_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 111,000 \text{ м} + 0,45 \text{ см} = 111,004 \text{ м};$$

$$x_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 113,900 \text{ м} - 1,88 \text{ см} = 113,881 \text{ м}.$$

Затем по формулам (2.115) вычисляем значения v и записываем их в табл. 2.19. После этого вычисляют $[pv^2]$ и для контроля $-[plv] = [psv] = [pv^2]$.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-k)} = \sqrt{13,37/(7-3)} = 1,83 \text{ см},$$

средняя квадратическая ошибка 1 км хода

$$m_{\text{км}} = \mu \sqrt{c} = 1,83/\sqrt{35} = 0,31 \text{ см}.$$

Для оценки точности вычислена матрица весовых коэффициентов и дня контроля — обратные веса функций $F_1 = x_1, F_2 = x_2$. Вес последнего неизвестного получен дважды: $P_{x_2} = [cc \cdot 2] = 2,75$ и $P_{x_3} = 1/Q_{33} = 1/0,364 = 2,75$. Вес первого неизвестного также получен дважды:

$$P_{x_1} = 1/(1/P_{F_1}) = 1/0,278 = 3,60; P_{x_1} = 1/Q_{11} = 1/0,279 = 3,58.$$

Вес предпоследнего неизвестного $P_{x_2} = 1/(1/P_{F_2}) = 1/0,432 = 2,31$;

$$P_{x_2} = 1/Q_{22} = 1/0,431 = 2,32.$$

После этого вычисляют средние квадратические ошибки:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{Q_{11}} = 1,83 \sqrt{0,279} = 0,97 \text{ см};$$

$$m_{x_2} = \mu \sqrt{Q_{22}} = 1,83 \sqrt{0,431} = 1,20 \text{ см},$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{Q_{33}} = 1,83 \sqrt{0,364} = 1,10 \text{ см}$$

В последнем столбце табл. 2.18 путем ведения поправок v_i в измеренные превышения h_i получены уравненные значения превышений.

Контролем вычислений является равенство нулю суммы уравненных превышений в каждом замкнутом полигоне и равенство нулю невязок в ходах между твердыми марками.

Используя формулу (2.41), для точных значений X_j имеем доверительные интервалы

$$x_j - t_{\beta} m_{x_j} \leq X_j \leq x_j + t_{\beta} m_{x_j}. \quad (2.116)$$

Для отметки x_1 репера 1 при доверительной вероятности $\beta = 0,95$ и $r = n - k = 4$ из таблицы распределения Стьюдента (см. табл. 2.5) имеем $t_{\beta} = 3,2$; $117,269 \text{ м} - 3,2 \cdot 0,97 \text{ см} \leq X_1 \leq 117,269 \text{ м} + 3,2 \cdot 0,97 \text{ см}$ или $117,238 \text{ м} \leq X_1 \leq 117,300 \text{ м}$.

Иногда результат уравнивания записывают в виде $X_j \pm m_{x_j}$, что соответствует доверительному интервалу $\beta = 0,7$.

Доверительный интервал для стандарта единицы веса равен

Таблица 2.20

	a]	b]	c]	l]	s]	Контроль	F ₁	F ₂	Σ	S _l
[pa	4,46	-0,85	-1,10	+12,14	+14,65	+14,65	+1,00	0	+3,51	13,65
[pb		+3,06	-1,20	-6,27	-5,26	-5,26	0	+1,00	2,01	-6,26
[pc			+3,71	+4,08	+5,49	+5,49	0	0	1,41	4,49
[pl				+61,47	+71,42	+71,42				
[ps					+86,31	+86,31				

Таблица 2.21

Поряд- ковый номер	Название уравне- ния	δx ₁	δx ₂	δx ₃	l	s	Кон- троль	i ₁	i ₂	i ₃	S _i	Кон- троль	F ₁	F ₂	Σ	Кон- троль
1	H ₁	4,46	-0,85	-1,10	+12,14	+14,65	+14,65	-1,00	0	0	+13,65		+1,00	0	3,51	3,51
2	Эп ₁	(-)	+0,191	+0,247	-2,722	-3,285	-3,284	+0,224	0	0	-3,061	-3,060	-0,224	0	-0,787	-0,787
3	H ₂		+3,06	-1,20	-6,27	-5,26	-5,26	0	-1,00	0	-6,26		0	+1,00	+2,01	+2,01
4	Эп ₂		+2,90	-1,41	-3,95	-2,46	-2,46	-0,19	-1,00	0	-3,65	-3,65	+0,19	+1,00	+2,68	+2,68
5	Эп ₃	(-)		-0,486	+1,362	+0,848	+0,848	+0,066	+0,345	0	+1,259	+1,259	0,066	-0,345	-0,924	-0,925
6	H ₃			+3,71	+4,08	+5,49	+5,49	0	0	-1,00	+4,49	0	0	0	+1,41	+1,41
7	Эп ₄			+2,75	+5,16	+7,91	+7,91	-0,34	-0,496	-1,00	+6,09	+6,08	+0,34	+0,49	+3,58	+3,58
8	Эп ₅	(-)			-1,876	-2,876	-2,876	+0,124	+0,177	+0,364	-2,211	-2,211	0,123	-0,177	-1,90	-1,90
9	H ₄				+61,47	+71,42	+71,42	Весовые коэффициенты								
10	Эп ₆				+13,36	+13,35	+13,35	0,279	+0,126	+0,124						
11	H ₅				+86,31	+86,30	+86,30	+0,126	+0,431	+0,177						
12		δx ₁ = = -3,099	δx ₂ = = +0,450	δx ₃ = = -1,876		+13,35		+0,124	+0,177	+0,364						
$\frac{1}{P_r} = -0,278 - 0,478$																

$$\gamma_1 \mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \mu, \quad (2.117)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_1^2}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_2^2}}$; χ_1^2 и χ_2^2 выбирают из таблицы χ^2 по числу степеней свободы $r = n - k$ (см. табл. 2.7). При $\beta = 0,95$ и $r = 4$ имеем (см. раздел 2.7) $p_1 = (1 - \beta)/2 = 0,05/2 = 0,0025$ и $p_2 = 1 - p_1 = 0,975$, этим значениям соответствуют (см. табл. 7) $\chi_1^2 = 11,1$ и $\chi_2^2 = 0,484$ и доверительный интервал $\sqrt{4/11,1} \cdot 1,83 \leq \sigma_0 \leq \sqrt{4/0,484} \cdot 1,83$ или $1,1 \text{ см} \leq \sigma_0 \leq 5,3 \text{ см}$.

Для стандарта σ_x доверительный интервал равен

$$\gamma_1 m_x \leq \sigma_x \leq \gamma_2 m_x. \quad (2.118)$$

Так, для σ_x при тех же значениях r, β, γ_1 и γ_2 имеем $0,58 \text{ см} \leq \sigma_x \leq 2,81 \text{ см}$. Иногда вместо построения доверительного интервала для σ_0 определяют среднюю квадратическую ошибку самой средней квадратической ошибки, т.е. $m_\mu = \mu / \sqrt{2r}$, и записывают $\mu \pm m_\mu$. Аналогично записывают $m_x \pm m_{m_x}$, где $m_{m_x} = m_\mu \sqrt{Q_{x_j}}$.

2.21. СОСТАВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СПОСОБУ УЗЛОВ ПРОФ. В.В. ПОПОВА

При уравнивании нивелирных и полигонометрических сетей профессор В.В. Попов предложил составлять нормальные уравнения по схеме сети, используя следующие правила:

- 1) квадратичные коэффициенты в i -м нормальном уравнении равны сумме весов ходов, сходящихся в узле с номером i ;
- 2) неквадратичные коэффициенты в i -м нормальном уравнении в столбце ji равны отрицательному весу хода между узлами i и j ;
- 3) свободные члены нормальных уравнений равны сумме величин pl ходов, сходящихся в узле i ; pl имеет знак «+», если узел i является конечной точкой хода, и «-», если начальной точкой хода.

Для нивелирования сети, изображенной на рис. 2.5, получим нормальные уравнения:

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2 + p_5 + p_7)\delta x_1 - p_5\delta x_2 - p_2\delta x_3 + (p_1l_1 - p_2l_2 + p_5l_5 + p_7l_7) &= 0; \\ -p_5\delta x_1 + (p_3 + p_4 + p_5)\delta x_2 - p_3\delta x_3 + (p_3l_3 - p_4l_4 - p_5l_5) &= 0 \\ -p_2\delta x_1 - p_3\delta x_2 + (p_2 + p_3 + p_6)\delta x_3 + (p_2l_2 - p_3l_3 + p_6l_6) &= 0\end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения значения весов из табл. 2.18 и l — из табл. 2.19, находим

$$\begin{aligned}4,46 \delta x_1 - 0,85\delta x_2 - 1,10\delta x_3 + 12,14 &= 0; \\ -0,85\delta x_1 + 3,06\delta x_2 - 1,20\delta x_3 - 6,27 &= 0; \\ -1,10\delta x_1 - 1,20\delta x_2 + 3,71\delta x_3 + 4,08 &= 0;\end{aligned}\tag{2.119}$$

т. е. получили нормальные уравнения, вычисленные обычным методом (см. табл. 2.20).

2.22. КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

Предположим, что в результате непосредственных измерений получены величины x_1, x_2, \dots, x_n , истинные значения которых X_1, X_2, \dots, X_n . Если в сети выполнено p измерений, из которых r — избыточные, то возникает r геометрических условий

$$F_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0; j = 1, 2, \dots, r,\tag{2.120}$$

называемых условными уравнениями.

При подстановке в условные уравнения (2.120) вместо истинных X_i измеренных значений x_i , имеющих ошибки измерений, в правой части появятся невязки ω_j , т.е.

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \omega_j\tag{2.121}$$

Невязки ω , можно устранить путем введения в результаты измерений x_i поправок v_i , тогда

$$F_j(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, X_n + v_n) = 0.\tag{2.122}$$

Нелинейные условные уравнения приводят к линейному виду, для чего функцию в формуле (2.122) разлагают в ряд Тейлора с сохранением членов, содержащих первые степени поправок. В результате получаем

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial F_j}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial F_j}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial x_n} v_n = 0.$$

Обозначим

$$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}, b_i = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \dots, g_i = \frac{\partial F_r}{\partial x_i}. \quad (2.123)$$

Учитывая выражение (1.121),

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + \omega_1 = 0;$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + \omega_2 = 0;$$

.....;

$$g_1 v_1 + g_2 v_2 + \dots + g_n v_n + \omega_r = 0. \quad (2.124)$$

или

$$[av] + \omega_1 = 0;$$

$$[bv] + \omega_2 = 0;$$

.....;

$$[gv] + \omega_r = 0. \quad (2.125)$$

В системе условных уравнений поправок число независимых уравнений r меньше числа n неизвестных v , поэтому она неопределенна и имеет множество решений. Однозначное решение получают при соблюдении условия $\Phi = [pv^2] = \min$. Согласно способу Лагранжа к функции Φ присоединяют условные уравнения (2.125), умноженные на неопределенные множители k , называемые коррелатами. В итоге получают

$$\Phi = [pv^2] - 2k_1 ([av] + \omega_1) - 2k_2 ([bv] + \omega_2) - \dots - 2k_r ([gv] + \omega_r) = \min. \quad (2.126)$$

Для определения минимума этой функции берут частные производные по v , и приравнивают их нулю:

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n + f_0 = 0, \quad (2.136)$$

где $f_i = \partial F / \partial x_i$, $f_0 = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n); x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ — результаты измерений.

Обратный вес функции

$$\frac{1}{P_F} = [\pi f f \cdot r] = [\pi f f] - \frac{[\pi a f]^2}{[\pi a a]} - \frac{[\pi b f \cdot 1]^2}{[\pi b b \cdot 1]} - \dots - \frac{[\pi q f \cdot (r-1)]^2}{[\pi q q \cdot (r-1)]} \quad (2.137)$$

вычисляют попутно с решением нормальных уравнений путем добавления к схеме Гаусса столбца F с элементами $[\pi a f]$, $[\pi b f]$, ... $[\pi q f]$.

Для контроля используют формулу

$$\frac{1}{P_F} = [\pi f s \cdot r] = [\pi f s] - \frac{[\pi a f][\pi a s]}{[\pi a a]} - \dots - \frac{[\pi q f \cdot (r-1)][\pi q s \cdot (r-1)]}{[\pi q q \cdot (r-1)]}, \quad (2.138)$$

$$\text{где } s_i = a_i + b_i + \dots + q + f_i. \quad (2.139)$$

Средняя квадратическая ошибка функции

$$m_F = \mu \sqrt{1/P_F}, \quad (2.140)$$

где

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/r}. \quad (2.141)$$

При равноточных измерениях вместо μ находят

$$m = \sqrt{[v^2]/r}. \quad (2.142)$$

2.25. ПРИМЕР УРАВНИВАНИЯ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

Уравняем нивелирную сеть, приведенную в п. 2.20. В этой сети возникает $r = 7 - 3 = 4$ условных уравнения полигона (см. рис. 2.5):

$$-v_1 - v_4 + v_5 + W_1 = 0;$$

$$-v_2 - v_3 - v_5 + W_2 = 0;$$

$$v_2 - v_6 + v_7 + W_3 = 0;$$

$$v_3 + v_4 + v_6 + W_4 = 0$$

Выполнив также оценку точности функций – отметок R_p 1, 2, 3 —, составим весовые функции по ходам 1, 4, 6.

В табл. 2.22 получены коэффициенты условных уравнений, а в табл. 2.23 — коэффициенты нормальных уравнений коррелат.

В табл. 2.23 столбцу a соответствует первое условное уравнение (полигон I), столбцам b, c, d — второе, третье и четвертое уравнения (II, III и IV полигоны).

Табл. 2.23 можно не составлять, а сразу выписывать коэффициенты нормальных уравнений в строки H_1, H_2, \dots, H_7 схемы Гаусса (табл. 2.24).

При вычислении обратных весов (столбцы f_1, f_2, f_3, S) контроль выполняется суммированием углом элементов подчеркнутых строк.

Например, в строке $1/P_{f_1}$ контроль $1 = 0,13 + 0,43 + 0,18 = +0,74$; в строке $1/P_{f_2}$ контроль $1 = 0,12 + 0,18 + 0,36 = +0,66$.

По вычисленным значениям коррелат в табл. 2.22 формуле по (2.127) получены поправки v_i и выполнен заключительный контроль вычислений — $[pv^2] = -[kW]$. После введения поправок в измеренные значения в табл. 2.21 получены уравненные значения превышений $h_y = h + v$. Затем вычислены отметки реперов:

$$x_1 = x_{20} + h_{y_1} = 104,931 + 12,338 = 117,269 \text{ м};$$

$$x_2 = x_{20} + h_{y_4} = 104,931 + 6,073 = 111,004 \text{ м};$$

$$x_3 = x_{21} + h_{y_6} = 119,354 - 5,473 = 113,881 \text{ м}.$$

Вычисленные уравненные значения превышений и отметок совпадают с их значениями, полученными при уравнивании параметрическим способом.

По формуле (2.141) находим среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/r} = \sqrt{13,65}/4 = 1,85 \text{ см}$$

Средняя квадратическая ошибка одного километра хода равна

$$m_{\text{км}} = 1,85/\sqrt{35} = 0,31 \text{ см};$$

Таблица 2.24

Но- мер хода	Назва- ние уравне- ния	k_1	k_2	k_3	k_4	f_1	f_2	f_3	S	Кон- троль 1	W	Σ	Кон- троль 2
1	H_1	+2,95	-1,18	0	-0,99	-0,78	+0,99	0	+0,99	+0,99	-3,50	-2,51	
2	$Эл$	-1,00	+0,400	0	+0,336	+0,264	-0,336	0	-0,336	-0,336	+1,186	+0,851	+0,850
3	H_2		+2,92	-0,91	-0,83	0	0	0	0	0	+3,80	+3,80	
4	$Эк_2$		+2,45	-0,91	-1,23	-0,31	+0,40	0	+0,40	+0,40	+2,40	+2,80	+2,80
5	$Эл_2$		-1,00	+0,371	+0,502	+0,127	-0,163	0	-0,163	-0,163	-0,980	-1,143	-1,143
6	H_3			+2,43	-0,71	0	0	-0,71	+0,10	+0,10	+1,70	+1,80	
7	$Эк_3$			+2,09	-1,17	-0,12	+0,15	-0,71	+0,25	+0,24	+2,59	+2,84	+2,84
8	$Эл_3$			-1,00	+0,560	+0,057	-0,072	+0,340	-0,120	-0,115	-1,239	-1,359	-1,359
9	H_4				+2,53	0	-0,99	+0,71	-0,28	-0,28	-3,40	-3,68	
10	$Эк_4$				+0,92	-0,48	-0,37	+0,31	+0,39	+0,38	-1,92	-1,53	-1,53
11	$Эл_4$				-1,00	+0,519	+0,400	+0,335	-0,422	-0,416	+2,076	+1,654	+1,654
		+1,897	+0,034	-0,076	+2,076	+0,78	0	0	0	0			
					$1/Pf_1 =$	+0,28	+0,13	+0,12	+0,53	+0,53			
							+0,990	0	+0,99	+0,99			
						$1/Pf_2 =$	+0,43	+0,18	+0,73	+0,74			
								+0,71	+0,71	+0,71			
							$1/Pf_3 =$	+0,36	+0,66	+0,66			

$$m_{f_1} = \mu \sqrt{1/P_{f_1}} = 1,85 \sqrt{0,28} = 0,98 \text{ см};$$

$$m_{f_2} = 1,85 \sqrt{1/P_{f_2}} = 1,85 \sqrt{0,43} = 1,21 \text{ см}.$$

$$m_{f_3} = \mu \sqrt{1/P_{f_3}} = 1,85 \sqrt{0,36} = 1,11 \text{ см}.$$

Полученные значения в пределах точности вычислений совпадают с результатами уравнивания этой же сети параметрическим способом. Доверительные интервалы получают так же, как и в параметрическом способе:

2.26. СОСТАВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОРРЕЛАТ ПО СПОСОБУ ПРОФ. В.В. ПОПОВА

Если коэффициенты полигональных условных уравнений равны ± 1 или 0, то нормальные уравнения можно получить, не составляя условные уравнения. Предварительно в схеме нумеруют все ходы и полигоны и указывают их направления при определении невязок, выписывают значения обратных весов ходов. Нормальные уравнения составляют по схеме, используя следующие правила:

- 1) коррелате приписывают номер полигона;
- 2) квадратичные коэффициенты в строке i равны сумме обратных весов ходов в полигоне i ;

3) неквадратичный коэффициент в строке i и столбце j равен обратному весу хода, общего для полигонов i и j со знаком плюс, если направления обхода полигонов совпадают, и минус — если не совпадают;

4) свободный член i -го нормального уравнения равен невязке i -го полигона. Например, для сети, изображенной на рис. 2.5, имеем

$$\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_4 + \pi_5) k_1 - \pi_5 k_2 - \pi_4 k_4 + W_1 &= 0; \\ -\pi_5 k_1 + (\pi_2 + \pi_3 + \pi_5) k_2 - \pi_2 k_3 - \pi_3 k_4 + W_2 &= 0; \\ -\pi_2 k_2 + (\pi_2 + \pi_6 + \pi_7) k_3 - \pi_6 k_4 + W_3 &= 0; \\ -\pi_4 k_1 - \pi_3 k_2 - \pi_6 k_3 + (\pi_3 + \pi_4 + \pi_6) k_4 + W_4 &= 0. \end{aligned} \tag{2.143}$$

Подставляя вместо π_i их значения из табл. 2.22, находим

$$\begin{aligned}
 +2,95k_1 - 1,18k_2 - 0,99k_4 - 3,5 &= 0; \\
 -1,18k_1 + 2,92k_2 - 0,91k_3 - 0,83k_4 + 3,8 &= 0; \\
 -0,91k_2 + 2,43k_3 - 0,71k_4 + 1,7 &= 0; \\
 -0,99k_1 - 0,83k_2 - 0,71k_3 + 2,53k_4 - 3,4 &= 0.
 \end{aligned}$$

Определив коррелаты из решения полученных уравнений, находят поправки, используя правило: поправка v_j равна обратному весу π_j , умноженному на сумму коррелат полигонов, которым принадлежит ход j ; если направления хода и полигона не совпадают, то коррелате придают обратный знак. По схеме (см. рис. 2.5), используя это правило, имеем

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \pi_1(-k_1); \\
 v_2 &= \pi_2(-k_2 + k_4); \\
 v_3 &= \pi_3(-k_2 + k_4); \\
 v_4 &= \pi_4(-k_1 + k_4); \\
 v_5 &= \pi_5(k_1 - k_2); \\
 v_6 &= \pi_6(-k_3 + k_4); \\
 v_7 &= \pi_7k_3.
 \end{aligned}$$

Для оценки точности отметок узлов выбирают ход от твердой точки до оцениваемого узла. Дополнительный столбец в схеме Гаусса находят по тем же правилам, что и нормальные уравнения.

Способ В.В. Попова можно использовать и при раздельном уравнивании полигонометрической сети.

2.27. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод приближений целесообразно использовать, когда квадратичные коэффициенты нормальных уравнений значительно больше неквадратичных. Из системы трех нормальных уравнений

$$\begin{aligned}
 [aa]\delta x_1 + [ab]\delta x_2 + [ac]\delta x_3 + [al] &= 0; \\
 [ab]\delta x_1 + [bb]\delta x_2 + [bc]\delta x_3 + [bl] &= 0;
 \end{aligned}$$

$$[ac]\delta x_1 + [bc]\delta x_2 + [cc]\delta x_3 + [cl] = 0; \quad (2.144)$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\frac{[ab]}{[aa]}\delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\delta x_3 - \frac{[al]}{[aa]} = a_{12}\delta x_2 + a_{13}\delta x_3 + \beta_1; \\ \delta x_2 &= -\frac{[ab]}{[bb]}\delta x_1 - \frac{[bc]}{[bb]}\delta x_3 - \frac{[bl]}{[bb]} = a_{21}\delta x_1 + a_{23}\delta x_3 + \beta_2; \\ \delta x_3 &= -\frac{[ac]}{[cc]}\delta x_1 - \frac{[bc]}{[cc]}\delta x_2 - \frac{[cl]}{[cc]} = a_{31}\delta x_1 + a_{32}\delta x_2 + \beta_3. \end{aligned} \quad (2.145)$$

В первом приближении при определении δx_1 примем $\delta x_2 = \delta x_3 = 0$, при вычислении δx_2 подставляем полученное значение δx_1 и принимаем $\delta x_3 = 0$, а при нахождении δx_3 подставляем полученные значения δx_1 и δx_2 .

Во втором приближении при определении δx_1 подставляем δx_2 и δx_3 , полученные в первом приближении, при нахождении δx_2 подставляем вычисленное во втором приближении δx_1 и δx_3 из первого приближения, при вычислении δx_3 подставляем δx_1 и δx_2 из второго приближения. Подобным образом выполняем третье и последующие приближения, пока разности между двумя последними приближениями для всех неизвестных будут меньше установленного допуска. Результат последнего приближения и будет окончательным значением неизвестных.

В табл. 2.25 приведено решение системы нормальных уравнений, полученной для нивелирной сети в п. 2.20

В первом приближении

$$\delta x_1^{(1)} = \beta_1 = -2,722; \delta x_2^{(1)} = a_{21}\delta x_1^{(1)} + \beta_2 = 0,278 \cdot (-2,722) + 2,049 = +1,292;$$

$$\delta x_3^{(1)} = a_{31}\delta x_1^{(1)} + a_{32}\delta x_2^{(1)} + \beta_3 = +0,296(-2,722) + 0,323(+1,292) - 1,100 = -1,488.$$

Во втором приближении

$$\delta x_1^{(2)} = a_{12}\delta x_2^{(1)} + a_{13}\delta x_3^{(1)} + \beta_1 = +0,191(+1,292) + 0,247(-1,488) - 2,722 = -2,843;$$

$$\delta x_2^{(2)} = a_{21}\delta x_1^{(2)} + a_{23}\delta x_3^{(1)} + \beta_2 = 0,278(-2,843) + 0,392(-1,488) + 2,049 = +0,675;$$

$$\delta x_3^{(2)} = a_{31}\delta x_1^{(2)} + a_{32}\delta x_2^{(2)} + \beta_3 = 0,296(-2,843) + 0,323(+0,675) - 1,100 = -1,724.$$

Таблица 2.25

Параметр	<i>i</i>		
	1	2	3
α_{i1}	0	+0,278	+0,296
α_{i2}	+0,191	0	+0,323
α_{i3}	+0,247	+0,392	0
β_i	-2,722	+2,049	-1,100
$\delta x_i^{(1)}$	-2,722	+1,292	-1,488
$\delta x_i^{(2)}$	-2,843	+0,675	-1,724
$\delta x_i^{(3)}$	-3,019	+0,534	-1,821
$\delta x_i^{(4)}$	-3,070	+0,482	-1,853
$\delta x_i^{(5)}$	-3,088	+0,464	-1,864
$\delta x_i^{(6)}$	-3,094	+0,458	-1,868
$\delta x_i^{(7)}$	-3,096	+0,456	-1,869
$\delta x_i^{(8)}$	-3,097	+0,456	-1,870

Подобным способом выполняем и последующие приближения. Полученные в восьмом приближении значения неизвестных практически совпадают с их значениями, найденными при решении этих же нормальных уравнений по схеме Гаусса (см. табл. 2.21).

2.28. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

В результате опытных исследований получена связь между величинами x и y , при этом предполагается, что эти величины имеют функциональную зависимость $y = F(x)$. Форма зависимости определяется из теоретических исследований или по графическому изображению результатов опыта. Например, положение точек на графике (см. рис. 2.3) показывает линейную зависимость между $|\Delta|$ и D , а на рис. 2.6 полином второй степени $y = ax^2 + bx + c$. С помощью этого полинома можно получить уравнения кривых, каждая из которых проходит через три точки — для определения коэффициентов a , b , c достаточно иметь три уравнения. Например, первая

кривая проходит через точки 1, 2, 3, вторая — через точки 3, 4, 5 и т. д. Кроме того, можно аппроксимировать, опытные данные кривой $(n - 1)$ степени, где n — число опытных значений x и y , которая будет также проходить через все n точек. Но построение таких полиномов нецелесообразно, так как закономерность, полученная опытным путем, искажена ошибками измерений. Для сглаживания случайных уклонений, т. е. для определения коэффициентов сглаживающих полиномов, используют метод наименьших квадратов.

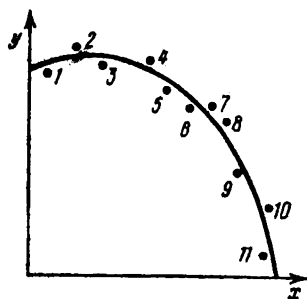


Рис. 2.6. Аппроксимация полинома второй степени

Для линейных зависимостей имеем уравнения поправок

$$ax_1 + b - y_1 = v_1;$$

$$ax_2 + b - y_2 = v_2;$$

.....;

$$ax_n + b - y_n = v_n, \tag{2.146}$$

в которых неизвестными являются коэффициенты a и b , а измеренными величинами — значения x и y . Переходя к нормальным уравнениям, находим

$$[xx]a + [x]b - [xy] = 0;$$

$$[x]a + nb - [y] = 0. \tag{2.147}$$

Решая эту систему с помощью определителей, имеем

$$a = D_a/D; b = D_b/D, \tag{2.148}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} [xx] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix} = n[xx] - [x]^2;$$

$$D_a = \begin{vmatrix} [xy] & [x] \\ [y] & n \end{vmatrix} = n[xy] - [x][y];$$

$$D_b = \begin{vmatrix} [xx] & [xy] \\ [x] & [y] \end{vmatrix} = [xx][y] - [xy][x]. \quad (2.149)$$

Выполним аппроксимацию линейной функцией данных, приведенных в табл. 2.4. По этим данным имеем $[xx] = 465,74$; $[x] = 77,4$; $[y] = 837$; $[xy] = 4899,1$; $n = 16$. Подставляя эти значения в формулы (2.148), (2.149), получаем:

$$D = 465,74 \cdot 16 - 77,4^2 = 1461,08;$$

$$D_a = 16 \cdot 4899,1 - 77,4 \cdot 837 = 13601,8;$$

$$D_b = 465,74 \cdot 837 - 77,4 \cdot 4899,1 = 10634,04;$$

$$a = 13601,8/1461,08 = 9,31;$$

$$b = 10634,04/1461,08 = 7,28; y = 9,31x + 7,28.$$

Полученная формула практически совпадает с уравнением регрессии, найденном по этим же данным (см. пример в п. 2.4). Это подтверждает положение, согласно которому для линейных функциональных зависимостей задача определения параметров a и b математически тождественна задаче построения уравнения регрессии для случая, когда коэффициент корреляции $r = \pm 1$.

Используя приведенные в табл. 2.4 значения x_i и y_i , находим уклонения

$$V_i = 9,81 x_i + 7,28 - y_i;$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
v_i	-0,17	-4,07	+14,24	+6,97	+16,14	-0,44	-7,45	-8,03
i	9	10	11	12	13	14	15	16
v_i	+3,69	+8,83	-1,27	-10,48	-5,10	-9,34	+0,07	-3,51

Для контроля вычисляем $[v] = 0,08 \approx 0$, $[xy] = 0,46 \approx 0$. Для оценки точности

определяем

$$m = \sqrt{[vv]/(n-2)} = \sqrt{977,23/(16-2)} = 8,35 \text{ мм.}$$

Точность параметров a и b находим по формулам

$$m_a = m \sqrt{A_{11}/D} = m \sqrt{Q_{11}};$$

$$m_b = m \sqrt{A_{22}/D} = m \sqrt{Q_{22}}, \quad (2.150)$$

где A_{11} , A_{22} — алгебраические дополнения (см. п.2.19). Напомним, что алгебраическим дополнением называют определитель $(n-1)$ -го порядка, образованный из данного определителя n -го порядка зачеркиванием i -й строки и j -го столбца, знак алгебраического дополнения определяется формулой $(-1)^{i+j}$.

Для определителя D [первая из формул (2.149)] после зачеркивания первой строки и первого столбца имеем $A_{11} = n$; после зачеркивания второй строки и второго столбца — $A_{22} = [xx]$. С учетом этого

$$Q_{11} = A_{11}/D = n/(n[xx] - [x]^2) = 16/1461,08 = 0,01095;$$

$$Q_{22} = A_{22}/D = [xx]/(n[xx] - [x]^2) = 465,74/1461,08 = 0,3188.$$

Подставляя полученные значения Q_{11} и Q_{22} в формулу (2.150), находим

$$m_a = 8,35 \sqrt{0,01095} = 0,87 \text{ мм;}$$

$$m_b = 8,35 \sqrt{0,3188} = 4,71 \text{ мм.}$$

Подобным способом решается задача определения параметров полиномов более высокого порядка.

2.29. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Проект геодезической сети разрабатывают на топографической карте. Затем по карте определяют координаты всех исходных и запроектированных пунктов с точностью, соответствующей графической точности карты. Например, если сеть запроектирована на карте масштаба $1 : 100000$, то коорди-

наты пунктов определяют с точностью не выше $0,1 \text{ мм} \cdot 100\,000 = 10 \text{ м}$. К полученным с точностью до десятков метров значениям x и y приписывают произвольные значения целых, десятых, сотых и тысячных долей метров. После этого, решая обратные задачи на плоскости, определяют дирекционные углы всех линий и длины всех сторон сети. От дирекционных углов можно перейти к направлениям или углам. Контроль правильности решения обратных задач — отсутствие невязок во всех треугольниках сети. Таким образом получают направления и длины сторон сети, которая является безошибочной.

Для перехода от безошибочной сети к реальной, в направления и длины сторон вводят случайные ошибки, которые подчиняются закону нормального распределения Гаусса. Если условия построения сети могут привести к систематическим ошибкам, то кроме случайных в значения направлений и длин сторон могут входить и систематические ошибки, вызываемые в процессе измерений теми или другими факторами. Моделирование ошибок выполняют чаще всего на ЭВМ. При этом полученные при моделировании ошибки должны приводить к заданной для спроектированной сети средней квадратической ошибке единицы веса.

Если необходимо выполнить априорную оценку точности сети триангуляции, то моделируют только ошибки направлений, если сети трилатерации, то определяют ошибки сторон сети, если линейно-угловой сети, то находят ошибки направлений и сторон.

Используя координаты исходных пунктов и полученных описанным способом направления и длины сторон, составляют уравнения поправок — при последующем уравнивании параметрическим способом — или условные уравнения — при уравнивании коррелятным способом. Выполняют обработку полученной сети, вычисляют уравненные значения «измеренных» величин, координаты пунктов и другие элементы построения. Сравнение полученных значений элементов сети с их безошибочными значениями позволяет определить истинные ошибки.

Выполняя описанное моделирование n раз, находят для каждого элемента сети p истинных ошибок, по которым, используя формулу Гаусса,

находят их средние квадратические ошибки. Для определения средних квадратических ошибок m с погрешностью не более 20 % моделирование необходимо выполнить не менее 12–13 раз ($m_m = m / \sqrt{2n} = m / \sqrt{2 \cdot 12} = 0,20m$). Для определения t с ошибкой не более 10 % моделирование нужно выполнить 50 раз ($m_m = m / \sqrt{2 \cdot 50} = 0,10m$).

Описанным методом можно моделировать всевозможные виды геодезических построений: триангуляцию, трилатерацию, линейно-угловые сети, сети геометрического, тригонометрического и других видов нивелирования и т. п.

Ввиду большого объема вычислений априорную оценку точности геодезических сетей этим методом целесообразно выполнять на ЭВМ.

2.30. ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При выполнении вычислений необходимо помнить о той точности, которую нужно или можно получить. Нельзя выполнять вычисления с большей точностью, чем допускают или требуют данные задачи. Например, нецелесообразно пользоваться семизначными таблицами тригонометрических функций при вычислениях с числами, имеющими четыре верные значащие цифры. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны. Например, 0,0275 и 124 имеют три, а 5,3500 — пять значащих цифр.

Округление. Если приближенное число имеет лишние или неверные знаки, то его следует округлить, при этом:

- 1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяются, например $45,34 \approx 45,3$;
- 2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу, например $45,36 \approx 45,4$;
- 3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди других отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу, например $45,3502 \approx 45,4$;

4) если первая из отброшенных цифр равна 5 и все другие отброшенные цифры, являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная, например $44,500 \approx 44$; $43,500 \approx 44$.

При приближенных вычислениях пользуются следующими правилами:

1) при сложении и вычитании приближенных чисел в результате нужно сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков;

2) при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом значащих цифр;

3) при возведении в степень m в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число, при этом последняя цифра результата имеет в m раз большую ошибку, чем последняя цифра основания, т. е. менее надежна, если $m > 1$ и более надежна, если $m < 1$;

4) во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну или две цифры больше, чем рекомендуют приведенные правила;

5) если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень), чем другие, то их предварительно нужно округлить, сохраняя лишь одну или две лишние цифры.

Примеры.

1. Сложить числа: 7,215; $-0,8354$; 11,19; 3,8179; 1421,827. Числом с наименьшим количеством десятичных знаков является 11,19, поэтому, округляя все остальные числа до трех десятичных знаков, получим $7,215 - 0,835 + 11,19 + 3,818 + 1421,827 = 1443,215 \approx 1443,22$.

2. Перемножить приближенные числа: 27,0195; 0,8531; 2,3881 и 0,00375241. Наименьшее число значащих цифр имеет второй сомножитель. Округляя все другие числа до пяти значащих цифр, получаем $27,020 \cdot 0,8531 \cdot 2,3881 \cdot 0,0037524 = 0,20656 \approx 0,2066$.

3. $854,317 : 0,0251 = 854,3 : 0,0251 = 34036 \approx 340 \cdot 10^2$.

4. Извлечь корень квадратный из числа 11,351.

Решение: $\sqrt{11,351} = 3,36912$. Следует заметить, что при извлечении корня результат может иметь верной на одну значащую цифру больше, чем подкоренное число.

5. Вычислить $3,8931^{1,4}$. В результате имеем $3,8931^{1,4} = 6,7052$.

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Уравнивание геодезических построений изложено в работе [4].

По числу имеющихся исходных данных сети триангуляции подразделяют на свободные и несвободные. В *свободной* сети имеются только необходимые исходные данные: координаты одного исходного пункта, длина и дирекционный угол исходной стороны или же вместо них — координаты двух исходных пунктов. Сети, имеющие избыточные исходные данные, называют *несвободными*.

Если в сети выполнены избыточные измерения, то процесс определения наиболее надежных вероятнейших значений измеренных величин с оценкой их точности называют *уравниванием*. Вследствие ошибок в результатах измерений в сети не будут выполняться геометрические условия. Например, сумма измеренных углов в плоском треугольнике будет отличаться от 180° , т.е. появляются невязки, которые устраняют в процессе уравнивания путем введения в измеренные величины поправок v , удовлетворяющих условию: $[v^2] = \min$ — для равноточных измерений — и $[pv^2] = \min$ — для неравноточных измерений.

Для уравнивания геодезических сетей наиболее широко применяют *коррелятный* и *параметрический* способы. Иногда используют коррелятный способ с дополнительными неизвестными. Сети с большим числом исходных пунктов и сторон целесообразно уравнивать на ЭВМ параметрическим способом. Этим способом проще и выгоднее уравнивать обратные засечки, сети трилатерации, линейно-угловые и комбинированные сети. При уравнивании небольших и несложных сетей, отдельных фигур трилатерации (геодезический четырехугольник, центральная система, вставка в угол нескольких пунктов) и ряда трилатерации более эффективен коррелятный способ.

3.1. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

3.1.1. Уравнивание триангуляции коррелятным способом. Условные уравнения.
Число независимых условий

Уравнивание коррелятным способом выполняют по углам или — более строго — по направлениям. Условные уравнения разделяют на угловые и синусные. *Угловыми* называют линейные условия, имеющие коэффициенты ± 1 и 0 . *Синусными* называют нелинейные условные уравнения, в которых содержатся синусы. В триангуляции после устранения невязок угловых условий дирекционный угол любой стороны сети определяется однозначно независимо от пути его передачи от исходных дирекционных углов.

В триангуляции имеются следующие виды угловых условий.

Условия фигур возникают в треугольниках и многоугольниках. В плоском треугольнике (рис. 3.1, а)

$$1 + 2 + 3 - 180^\circ = \omega,$$

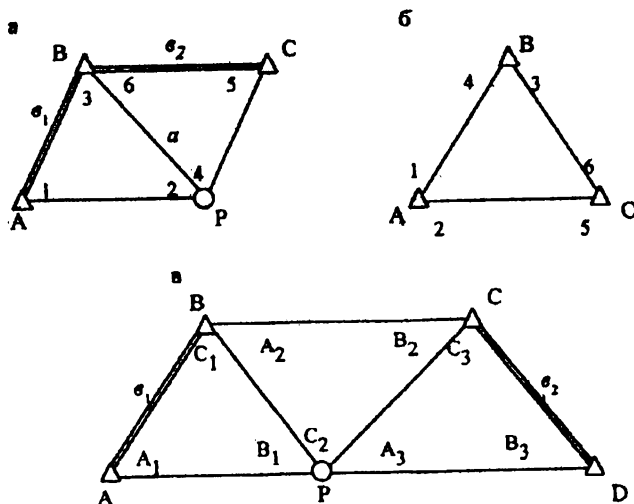


Рис. 3.1. Сети треугольников

где 1, 2, 3 — измеренные значения углов треугольника; ω — невязка в треугольнике. При уравнивании к углам J определяют поправки (J) и получают

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) - 180^\circ = 0.$$

Из сравнения этих выражений находят условие фигур

$$(1) + (2) + (3) - \omega = 0.$$

При уравнивании направлений для треугольника условное уравнение фигур имеет вид (рис. 3.1, б).

$$-(1) + (2) - (3) + (4) - (5) + (6) + \omega = 0,$$

где $\omega = [2 - 1] + [4 - 3] + [6 - 5] - 180^\circ$.

Условие горизонта возникает на пунктах, на которых в уравнивание включены все углы, образуемые смежными направлениями, сумма этих углов равна 360° , т.е.

$$(1) + (2) + \dots + (N) + \omega = 0.$$

При уравнивании по направлениям условий горизонта не возникает.

Условия исходных дирекционных углов возникают при вставке цепочки треугольников в угол или между исходными сторонами и состоят в том, что сумма уравненных углов должна равняться величине жесткого угла или дирекционный угол стороны СД (рис. 3.1, в) должен равняться его вычисленному значению от исходного дирекционного угла стороны АВ с использованием уравненных значений углов треугольников.

На рис. 3.1, а

$$\alpha_{BC} + 6 + 3 - \alpha_{BA} = \omega.$$

После введения поправок и преобразований получаем условное уравнение

$$(3) + (6) + \omega = 0.$$

Для сети на рис. 3.1, в

$$\alpha_{AB} \pm 180^\circ - C_1 \pm 180^\circ + C_2 \pm 180^\circ - C_3 - \alpha_{CD} = \omega. \quad (3.1)$$

После введения поправок и преобразований находим условное уравнение

$$-(C_1) + (C_2) - (C_3) + \omega = 0.$$

Если дирекционные углы α_{AB} и α_{CD} (см. рис. 3.1, в) получены из измерений и поправки (α_{AB}) , (α_{CD}) в их значениях определяют из уравнивания сети, то условное уравнение дирекционных углов в этом случае имеет вид

$$-(C_1) + (C_2) - (C_3) + (\alpha_{AB}) - (\alpha_{CD}) + \omega = 0,$$

где ω определяют по формуле (3.1).

Синусные условия состоят из полюсных, базисных и координатных; их учет необходим для однозначного определения длины любой стороны сети независимо от пути ее определения от исходных сторон. Координатные условия обеспечивают однозначное получение координат любого пункта сети.

Полюсные условия. В центральных системах и геодезических четырехугольниках одна сторона является избыточной, поэтому в этих фигурах возникают полюсные условия. На рис. 3.2 с учетом замены отношения синусов противоположащих им углов имеем

$$\frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OB \cdot OC \cdot OA} = \frac{\sin 2^\circ \sin 4^\circ \sin 6^\circ}{\sin 1^\circ \sin 3^\circ \sin 5^\circ} = 1.$$

Учитывая $J^\circ = J + (J)$ и малую величину поправок (J) , получаем

$$\sin J^\circ = \sin[J + (J)] = \sin J \cos(J) + \cos J \sin(J) \approx [1 + \text{ctg}J(J)] \sin J.$$

С учетом этого.

$$\frac{\sin[2+(2)]\sin[4+(4)]\sin[6+(6)]}{\sin[1+(1)]\sin[3+(3)]\sin[5+(5)]} =$$

$$= \frac{[1+\operatorname{ctg}2(2)][1+\operatorname{ctg}4(4)][1+\operatorname{ctg}6(6)]\sin 2\sin 4\sin 6}{[1+\operatorname{ctg}1(1)][1+\operatorname{ctg}3(3)][1+\operatorname{ctg}5(5)]\sin 1\sin 3\sin 5} = 1.$$

После преобразований, принимая во внимание $[1+\operatorname{ctg}J(J)]^{-1} \approx 1 - \operatorname{ctg}J(J)$ и отбрасывая величины второго порядка малости, имеем

$$[1 + \operatorname{ctg}2(2) + \operatorname{ctg}4(4) + \operatorname{ctg}6(6) -$$

$$- \operatorname{ctg}1(1) - \operatorname{ctg}3(3) - \operatorname{ctg}5(5)] \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} - 1 = 0.$$

Выражая поправки в угловых секундах, находим

$$-\operatorname{ctg}1(1) + \operatorname{ctg}2(2) - \operatorname{ctg}3(3) + \operatorname{ctg}4(4) - \operatorname{ctg}5(5) + \operatorname{ctg}6(6) + \omega = 0. \quad (3.2)$$

$$\text{где } \omega = \left(\frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} - 1 \right) \rho'' = \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2} - 1 \right) \rho'' = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_2} \rho''.$$

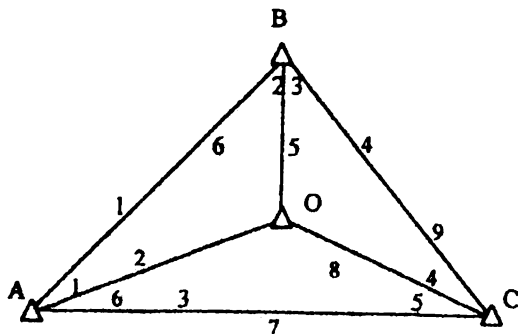


Рис. 3.2. Центральная система

Полусное условное уравнение (3.2) получено для уравнивания углов. При уравнивании направлений поправки в углы выражают через поправки в направления. Учитывая, что угол равен разности направлений, на рис. 3.2 имеем $1 = 2 - 1, 2 = 6 - 5, 3 = 5 - 4, 4 = 9 - 8, 5 = 8 - 7, 6 = 3 - 2$; значение $-\text{ctg}1(1) = \text{ctg}(2-1)(1) - \text{ctg}(2-1)(2)$ и т.п. В результате, после приведения подобных членов при одноименных поправках имеем

$$\begin{aligned} & \text{ctg}(2-1)(1) - [\text{ctg}(2-1) + \text{ctg}(3-2)](2) + \text{ctg}(3-2)(3) + \\ & + \text{ctg}(5-4)(4) - [\text{ctg}(6-5) + \text{ctg}(5-4)](5) + \text{ctg}(6-5)(6) + \\ & + \text{ctg}(8-7)(7) - [\text{ctg}(9-8) + \text{ctg}(8-7)](8) + \text{ctg}(9-8)(9) + \omega = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \omega = \left[\frac{\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(3-2)}{\sin(2-1)\sin(5-4)\sin(8-7)} - 1 \right] \rho'' = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_2} \rho''$$

Базисные условия. На рис. 3.1, a по теореме синусов

$$\begin{aligned} a &= b_1 \frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}, \\ b_2 &= a \frac{\sin 4^\circ}{\sin 5^\circ} = b_1 \frac{\sin 1^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \sin 5^\circ} = b_1 \frac{\sin[1+(1)]\sin[4+(4)]}{\sin[2+(2)]\sin[5+(5)]}. \end{aligned}$$

Выполняя преобразования, аналогичные сделанным при выводе полусного условия, в результате находим

$$\text{ctg}1(1) - \text{ctg}2(2) + \text{ctg}4(4) - \text{ctg}5(5) + \omega = 0,$$

$$\text{где } \omega = \rho'' \frac{b'_2 - b_2}{b'_2}, \quad b'_2 = b_1 \frac{\sin 1 \sin 4}{\sin 2 \sin 5}.$$

На рис. 3.1 b аналогичным способом получаем

$$b_2 = b_1 \frac{\sin A_1^\circ \sin A_2^\circ \sin A_3^\circ}{\sin B_1^\circ \sin B_2^\circ \sin B_3^\circ} = b_1 \frac{\sin[A_1+(A_1)]\sin[A_2+(A_2)]\sin[A_3+(A_3)]}{\sin[B_1+(B_1)]\sin[B_2+(B_2)]\sin[B_3+(B_3)]},$$

$$\operatorname{ctg} A_1(A_1) + \operatorname{ctg} A_2(A_2) + \operatorname{ctg} A_3(A_3) - \\ - \operatorname{ctg} B_1(B_1) - \operatorname{ctg} B_2(B_2) - \operatorname{ctg} B_3(B_3) + \omega = 0,$$

где

$$\omega = \rho'' \frac{b'_2 - b_2}{b'_2}; \quad b'_2 = a_1 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3}.$$

Если одна или обе исходные стороны b_1 и b_2 измерены и поправки (b_1) и (b_2) в их длины определяют из уравнивания, то приведенное выше базисное условное уравнение дополняют поправками с коэффициентами при них, т.е.

к левой части прибавляют $\frac{\rho''}{b'_{11}}(b_1) - \frac{\rho''}{b'_2}(b_2)$.

Условные уравнения абсцисс и ординат возникают, если в сети триангуляции имеются группы — одна или несколько — исходных пунктов, удаленные одна от другой не менее чем на две определяемые стороны. На рис. 3.3 одна группа состоит из смежных пунктов А и В, а вторая — из пункта Д. При составлении условных уравнений в цепочке треугольников, соединяющей ближайшие пункты групп, намечают ходовую линию (на рис. 3.3 — АСЕД), проходящую через вершины промежуточных углов треугольников. В уравненной сети должны соблюдаться равенства

$$x_D = x_A + \sum_A^D \Delta x; \quad y_D = y_A + \sum_A^D \Delta y.$$

Значения приращений координат

$$\Delta x = \Delta x' + (\Delta x); \quad \Delta y = \Delta y' + (\Delta y),$$

где $\Delta x'$, $\Delta y'$ вычисляют с использованием измеренных углов А, В, С.

С учетом этого

$$x_D = x_A + \sum_A^D [\Delta x' + (\Delta x)]; \quad y_D = y_A + \sum_A^D [\Delta y' + (\Delta y)],$$

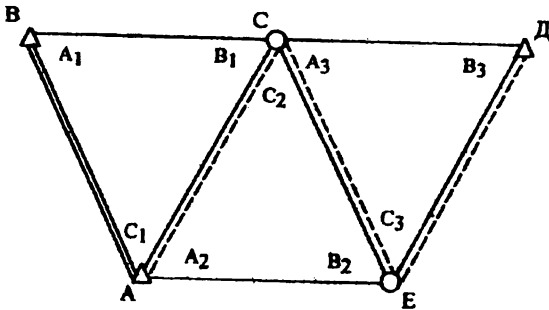


Рис. 3.3. Цепочка треугольников

или

$$\sum_A^D (\Delta x) + \omega_x = 0, \quad \sum_A^D (\Delta y) + \omega_y = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\omega_x = \left[x_A + \sum_A^D \Delta x' \right] - x_D = x'_D - x_D; \quad \omega_y = \left[y_A + \sum_A^D \Delta y' \right] - y_D = y'_D - y_D.$$

Для получения уравнения абсцисс выразим поправки (Δx) через поправки в измеренные углы. Учитывая

$$\Delta x_{AC} = S_{AC} \cos \alpha_{AC}, \quad S_{AC} = b \frac{\sin A_1^\circ}{\sin B_1^\circ}, \quad \alpha_{AC} = \alpha_{AC} + C_1^\circ$$

и отбрасывая в процессе вывода величины второго и более высокого порядка малости, имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{AC} &= \Delta x'_{AC} + (\Delta x_{AC}) = b \frac{\sin A_1^\circ}{\sin B_1^\circ} \cos(\alpha_{AB} + C_1) = \\
 &= b \frac{\sin[A_1 + (A_1)]}{\sin[B_1 + (B_1)]} \cos[\alpha_{AB} + C_1 + (C_1)] = \\
 &= b \frac{\sin[A_1 + (A_1)]}{\sin[B_1 + (B_1)]} \cos[\alpha_{AB} + C_1 + (C_1)] = \\
 &= b \frac{\sin A_1 + \cos A_1(A_1)}{\sin B_1 + \cos B_1(B_1)} \{ \cos[\alpha_{AB} + C_1] - \sin[\alpha_{AB} + C_1](C_1) \} = \\
 &= b \frac{\sin A_1 \cos(\alpha_{AB} + C_1)}{\sin B_1} \times [1 + \operatorname{ctg} A_1(A_1) - \operatorname{ctg} B_1(B_1)] [1 - \operatorname{tg}(\alpha_{AB} + C_1)(C_1)] = \\
 &= b \frac{\sin A_1 \cos(\alpha_{AB} + C_1)}{\sin B_1} [1 + \operatorname{ctg} A_1(A_1) - \operatorname{ctg} B_1(B_1) - \operatorname{tg}(\alpha_{AB} + C_1)(C_1)] = \\
 &= \Delta x'_{AC} + \Delta x'_{AC} \operatorname{tg} A_1(A_1) - \Delta x'_{AC} \operatorname{ctg} B_1(B_1) - \Delta x'_{AC} \operatorname{tg} \alpha_{AC}(C_1),
 \end{aligned}$$

откуда, учитывая $\Delta x'_{AC} = x_C - x_A$ и $\Delta x'_{AC} \operatorname{tg} \alpha_{AC} = y_C - y_A$, получаем

$$(\Delta x_{AC}) = (x_C - x_A) [\operatorname{ctg} A_1(A_1) - \operatorname{ctg} B_1(B_1)] - (y_C - y_A)(C_1).$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 (\Delta x_{CE}) &= (x_E - x_C) [\operatorname{ctg} A_1(A_1) - \operatorname{ctg} B_1(B_1) + \operatorname{ctg} A_2(A_2) - \operatorname{ctg} B_2(B_2)] - \\
 &\quad - (y_C - y_A)(C_1) - (y_E - y_C)[(C_1) - (C_2)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta x_{ED}) &= (x_D - x_E) [\operatorname{ctg} A_1(A_1) - \operatorname{ctg} B_1(B_1) + \operatorname{ctg} A_2(A_2) - \\
 &\quad - \operatorname{ctg} B_2(B_2) + \operatorname{ctg} A_3(A_3) - \operatorname{ctg} B_3(B_3) - (y_C - y_A)(C_1) -
 \end{aligned}$$

$$-(y_E - y_C)[(C_1) - (C_2)] - (y_B - y_E)[(C_1) - (C_2) + (C_3)].$$

Суммируя полученные значения, находим

$$\begin{aligned} \sum_A^D (\Delta x) = & (x_D - x_A) \operatorname{ctg} A_1(A_1) - (x_D - x_A) \operatorname{ctg} B_1(B_1) + (x_D - x_C) \operatorname{ctg} A_2(A_2) - \\ & - (x_D - x_C) \operatorname{ctg} B_2(B_2) + (x_D - x_E) \operatorname{ctg} A_3(A_3) - (x_D - x_E) \operatorname{ctg} B_3(B_3) - \\ & - (y_D - y_A)(C_1) + (y_D - y_C)(C_2) - (y_D - y_E)(C_3). \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение в первую из формул (3.3), после небольших преобразований находим условие абсцисс

$$\sum (x_n - x) \operatorname{ctg} A(A) - \sum (x_n - x) \operatorname{ctg} B(B) - \sum (y_n - y)(\pm C) + \rho'' \omega_x = 0.$$

Аналогично получим условие ординат

$$\sum (y_n - y) \operatorname{ctg} A(A) - \sum (y_n - y) \operatorname{ctg} B(B) + \sum (x_n - x)(\pm C) + \rho'' \omega_y = 0,$$

где $\omega_x = x'_n - x_n$; $\omega_y = y'_n - y_n$;

x'_n, y'_n — координаты конечного пункта (на рис. 3.3 — пункт Д), вычисленные по измеренным углам от начального пункта А; x_n, y_n — твердые координаты конечного пункта; x, y — координаты текущих точек по ходовой линии.

При уравнивании по направлениям поправки в углы выражают через поправки в измеренные направления.

Условия проекций возникают, если в сети имеется длинная диагональ, соединяющая вершины несмежных треугольников (рис. 3.4) и измерены один угол (β_1 или β_2) или два (β_1 и β_2) избыточных угла. Приняв диагональ АД за ось абсцисс, а перпендикулярное ей направление — за ось ординат, можно вычислить дирекционные углы линий АВ, ВС, СД (дирекционный

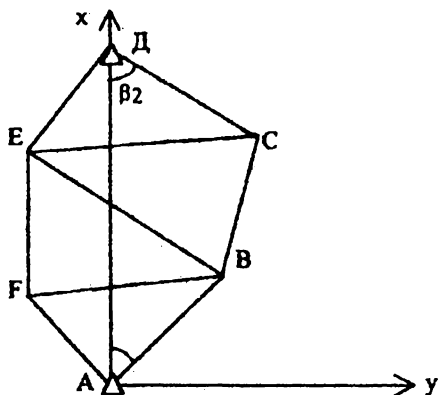


Рис. 3.4. К условию проекций

угол линии АД равен нулю) и приращения координат. В итоге получим

$$\sum (\Delta y) + \omega = 0,$$

где $\omega = \Delta y'_{AB} + \Delta y'_{BC} + \Delta y'_{CD} = \sum \Delta y'$, ($\Delta y'_{DA} = 0$).

Условия проекций усложняют уравнительные вычисления, практически не повышая точности сети, поэтому при проектировании сети нужно избегать возникновения этих условий.

Число независимых условных уравнений. Согласно методу наименьших квадратов общее число (r) условных уравнений $r = n - k$, где n — число всех измеренных величин; k — их необходимое количество. При уравнивании углов $k = 2q$, где q — число определяемых пунктов, т.е.

$$r = n - 2q.$$

При уравнивании направлений общее число условий равно их значению, полученному по формуле для углов, минус число условий горизонта.

Подсчитывают число r_y угловых условий (при уравнивании углов)

$$r_y = n' - k',$$

где n' — число измеренных углов и геодезических азимутов, k' — число определяемых сторон. Число различных видов *угловых условных уравнений* подсчитывают в такой последовательности:

1) определяют число *условий горизонта* r_r , равное числу центральных систем; 2) находят число *условий дирекционных углов* r_α , равное числу всех — жестких и нежестких — дирекционных углов без одного; 3) число *условий треугольников (фигур)* r_ϕ , равное оставшемуся числу угловых условий.

Синусные условия (их общее число $r_c = r - r_y$) подсчитывают в следующем порядке: 1) получают число координатных условий $r_k = 2(n - 1)$, где n — число изолированных систем исходных пунктов; 2) определяют число базисных условий, равное числу B базисных сторон — жестких и нежестких — без одной ($r_b = B - 1$); 3) число r_n полюсных условных уравнений равно оставшемуся числу синусных условий, т.е. $r_n = r_c - r_k - r_b$; кроме того, число полюсных условий равно числу центральных систем и геодезических четырехугольников.

Пример. Определить число и виды условных уравнений для сети, изображенной на рис. 3.5. При уравнивании углов общее число условий $r = n - 2q = 22 - 10 = 12$, угловых условий $r_y = n' - k' = 22 - 13 = 9$. Из них число условий горизонта $r_r = 1$, условий дирекционных углов $r_\alpha = 0$, условий фигур

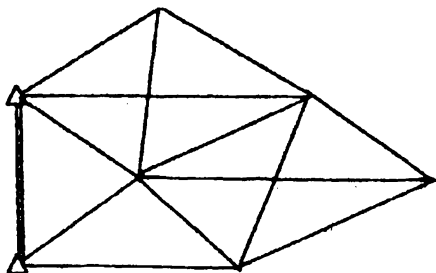


Рис. 3.5. Сеть триангуляции

$r_\phi = 9 - 1 = 8$ — по три условия в двух геодезических четырехугольниках плюс два условия в двух треугольниках. Число синусных условий $r_c = r - r_y = 12 - 9 = 3$, из них: полюсных условий $\kappa_n = 3$ (одно в центральной системе и два в двух геодезических четырехугольниках), координатные и базисные условия отсутствуют.

3.1.2. Оценка точности функций

В коррелятном способе составляют функцию $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. После ее разложения в ряд находят

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n + f_0 = 0,$$

где $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$; свободный член $f_0 = f'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$; x'_1, x'_2, \dots, x'_n — результаты измерений; v_i — поправки.

Среднюю квадратическую ошибку функции определяют по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

где $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}$, r — число избыточных измерений.

Обратный вес функции

$$\frac{1}{P_F} = \left[\frac{ff}{p} \right] - \frac{\left[\frac{af}{p} \right]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[\frac{bf \cdot 1}{p} \right]^2}{\left[\frac{bb \cdot 1}{p} \right]} - \dots - \frac{\left[\frac{qf \cdot (r-1)}{p} \right]^2}{\left[\frac{qq \cdot (r-1)}{p} \right]}$$

вычисляют попутно с решением нормальных уравнений.

Пример. В треугольнике ABC, в котором известен дирекционный угол стороны AC и измерены равноточно все три угла, определить $\frac{1}{P_f}$ дирекционного угла стороны CB. В треугольнике имеем условное уравнение фигуры $(A)+(B)+(C)+\omega=0$, где $\omega=A+B+C-180^\circ$. Коэффициенты a , при поправках равны +1. Дирекционный угол $\alpha_{CB} = \alpha_{AC} \pm 180^\circ + C$. Частные производные $f_A = \frac{\partial \alpha}{\partial A} = 0$, $f_B = \frac{\partial \alpha}{\partial B} = 0$, $f_C = \frac{\partial \alpha}{\partial C} = +1$. Принимая веса измеренных

углов $P_A=P_B=P_C=1$, находим $\left[\frac{ff}{p}\right]=1$, $\left[\frac{aa}{p}\right]=3$, $\left[\frac{af}{p}\right]^2=1$, $\frac{1}{P_\alpha}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

3.1.3. Пример уравнивания сети триангуляции коррелятным способом

Схема небольшой сети 2-го класса изображена на рис. 3.6. Исходные данные приведены в табл. 3.1, а направления, приведенные к центрам знаков и на плоскость в проекции Гаусса–Крюгера, — в табл. 3.2.

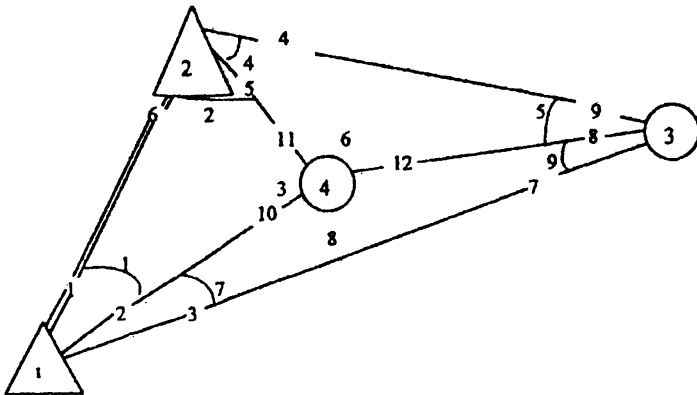


Рис. 3.6. Схема сети триангуляции

Таблица 3.1

Пункт	Координаты, м		Дирекционный угол	Длина стороны, м
	x	y		
1	5 963 124,81	8 412 617,83	7° 28' 37,81"	14 311,32
2	5 977.314,44	8 414 480,18		

Таблица 3.2.

Номер пункта	Номер направления	Направления на плоскости	Поправки из уравнивания	Уравненные направления
1	1	0° 00' 00,00"	+0,13"	0° 00' 00,00"
	2	37 11 06,71	+0,06	37 11 06,64
	3	68 08 59,63	-0,19	68 08 59,31
2	4	0 00 00,00	-0,18	0 00 00,00
	5	25 12 57,42	+0,41	25 12 58,01
	6	58 19 54,61	-0,23	58 19 54,56
3	7	0 00 00,00	+0,06	0 00 00,00
	8	28 01 30,27	-0,09	28 01 30,12
	9	53 31 06,58	+0,02	53 31 06,54
4	10	0 00 00,00	+0,04	0 00 00,00
	11	109 41 57,13	-0,28	109 41 56,81
	12	238 59 22,59	+0,23	238 59 22,78

Общее число r условных уравнений при уравнивании по углам

$$r = n - 2q = 9 - 4 = 5.$$

При уравнивании по направлениям $r = 4$ условие горизонта отсутствует, из них — три условия фигур и одно полюсное.

Составление условных уравнений фигур приведено в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Номер трегольника	Номер вершины	Разность направлений	Углы на плоскости	Условные уравнения фигур
1	1	2-1	37°11'06,71"	-(1)+(2)-(5)+(6)- -(10)+(11)+ +1,03"=0
	2	6-5	33 06 57,19	
	4	11-10	109 41 57,13	
2		Σ	180 00 01,03	-(4)+(5)-(8)+(9)- -(11)+(12)- -1,21"=0
		ω ₁	+1,03	
	2	5-4	25 12 57,42	
3	3	9-8	25 29 36,31	-(2)+(3)-(7)+(8)+ +(10)-(12)+ +0,60"=0
	4	12-11	129 17 25,06	
		Σ	179 59 58,79	
3		ω ₂	-1,21	-(2)+(3)-(7)+(8)+ +(10)-(12)+ +0,60"=0
	1	3-2	30 57 52,92	
	4	10-12	121 00 37,41	
	3	8-7	28 01 30,27	Σ ω ₃ +0,60
		Σ	180 00 00,60	
		ω ₃	+0,60	

$$\sum \omega^2 = 2,88''; m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{2,88}{9}} = 0,57'';$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,57}{\sqrt{4}} = 0,28''$$

Составление полюсного условия центральной системы:

$$\frac{S_{41} \cdot S_{42} \cdot S_{43}}{S_{42} \cdot S_{43} \cdot S_{41}} = \frac{\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(3-2)}{\sin(2-1)\sin(5-4)\sin(8-7)} = 1.$$

Линейный вид уравнения

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}(2-1)(1) - [\operatorname{ctg}(2-1) + \operatorname{ctg}(3-2)](2) + \operatorname{ctg}(3-2)(3) + \operatorname{ctg}(5-4)(4) - \\ & - [\operatorname{ctg}(6-5) + \operatorname{ctg}(5-4)](5) + \operatorname{ctg}(6-5)(6) + \operatorname{ctg}(8-7)(7) - \\ & - [\operatorname{ctg}(9-8) + \operatorname{ctg}(8-7)](8) + \operatorname{ctg}(9-8)(9) + \omega = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\operatorname{ctg}\beta$ и свободный член этого уравнения вычислены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Числитель				Знаменатель			
На- прав- ления	β_i	$\sin\beta_i$	$\operatorname{ctg}\beta_i$	На- прав- ления	β_i	$\sin\beta_i$	$\operatorname{ctg}\beta_i$
6-5	33°06'57,19"	0,5463342	1,533	2-1	37°11'06,71"	0,6043933	1,318
9-8	25 29 36,31	0,4304074	2,097	5-4	25 12 57,42	0,4260312	2,124
3-2	30 57 52,92	0,5145098	1,667	8-7	28 01 30,27	0,4698579	1,879
$\Pi_1 = 0,1209851$				$\Pi_2 = 0,1209839$			

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = \frac{0,0000012}{0,1209851} 206265'' = 2,05''; \quad \sum \operatorname{ctg}^2 = 19,306;$$

$$\omega_{\text{дон}} = 2,5 \cdot m \cdot \sqrt{\sum \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \cdot 1'' \cdot \sqrt{19,306} = 10,98''.$$

С учетом вычисленных коэффициентов полюсное условие имеет вид

$$1,318(1) - 2,985(2) + 1,667(3) + 2,124(4) - 3,657(5) + 1,533(6) + \\ + 1,879(7) - 3,976(8) + 2,097(9) + 2,05 = 0.$$

Составление весовых функций

Для оценки точности определения дирекционного угла стороны S_{34} (в слабом месте сети) имеем $\alpha_{34} = f_\alpha = -(1) + (3) - (7) + (8)$. Для определения средней квадратической ошибки наиболее удаленной стороны S_{34} необходимо определить ее обратный вес, для чего S_{34} нужно представить как

функцию уравненных направлений от исходной стороны S_{12} по кратчайшему пути через треугольники 124 и 234 (см. рис. 3.6).

$$F = S_{34} = S_{12} \frac{\sin(6-5)\sin(3-2)}{\sin(11-10)\sin(8-7)}. \quad (3.4)$$

Для определения обратного веса этой функции находят ее приращение $\Delta F = f_S$. Выполняя вывод, аналогичный сделанному при получении базисного условия, в результате имеем

$$\begin{aligned} f_S = \Delta S_{34} = & -\frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(3-2)(2) + \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(3-2)(3) - \\ & -\frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(6-5)(5) + \frac{S_{34}}{\rho''} (6-5)(6) + \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(8-7)(7) - \\ & -\frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(8-7)(8) + \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(11-10)(10) - \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg}(11-10) \quad (11) \end{aligned}$$

Для удобства сторону S_{34} обычно выражают в дециметрах. Подставляя в формулу (3.4) разность направлений и S_{12} , находим

$$S_{34} = 14311,32 \frac{\sin 33^\circ 06' 57'' \cdot \sin 30^\circ 57' 53''}{\sin 109^\circ 41' 57'' \cdot \sin 28^\circ 01' 30''} = 90940 \text{ дм}, \quad \frac{S_{34}}{\rho''} = 0,4409.$$

Вычисляя значения коэффициентов с учетом разностей направлений в табл. 3.3, имеем

$$\begin{aligned} f_S = \Delta S_{34} = & -0,735(2) + 0,735(3) - 0,676(5) + 0,676(6) + \\ & + 0,828(7) - 0,828(8) - 0,158(10) + 0,158(11). \end{aligned}$$

В табл. 3.5 приведены коэффициенты условных уравнений и весовых функций f_α и f_S .

Таблица 3.5

Поправки	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	f_a	f_s	s'	<i>v</i>
(1)	-1			+1,318	-1		-0,682	+0,13
(2)	+1		-1	-2,985		-0,735	-3,720	+0,06
(3)			+1	+1,667	+1	+0,735	+4,402	-0,19
(4)		-1		+2,124			+1,124	-0,18
(5)	-1	+1		-3,657		-0,676	-4,333	+0,41
(6)	+1			+1,533		+0,676	+3,209	-0,23
(7)			-1	+1,879	-1	+0,828	+0,707	+0,06
(8)		-1	+1	-3,976	+1	-0,828	-3,804	-0,09
(9)		+1		+2,097			+3,097	+0,02
(10)	-1					-0,158	-0,158	+0,04
(11)	+1	-1				+0,158	+0,158	-0,28
(12)		+1	-1				0,000	+0,23
ω	+1,03	-1,21	+0,60	+2,05			$[v^2] = 0,455$	
Контроль:	$\Sigma a_i = \Sigma b_i = \Sigma c_i = \Sigma d_i = \Sigma f_i = \Sigma s'_i = \Sigma v_i = 0$						$-[k\omega] = 0,458$	
	0	0	0	0,000	0	0,000	0,000	-0,02

Таблица 3.6

	$a]$ k_1	$b]$ k_2	$c]$ k_3	$d]$ k_4	f_a	f_i	ω	s	Контроль $s^0 = [as] + \omega$
$[a$	6,0	-2,000	-2,000	0,887	+1,000	+0,933	+1,03	+5,850	+5,850
$[b$	00	6,000	-2,000	0,292	-1,000	-0,006	-1,21	+0,076	+0,076
$[c$			6,000	-1,203	+3,000	-0,344	+0,60	+4,053	+4,053
$[d$				57,398	-5,506	+11,776	+2,05	+65,694	+65,694
$[f_a$					4,000	-0,921		+0,573	+0,573
$[f_i$						+3,415		+14,853	+14,853

В табл. 3.6 получены коэффициенты нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \dots + \omega_1 &= 0, \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \dots + \omega_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

Таблица 3.7

k_1	k_2	k_3	k_4	f_a	f_s	ω	s	Контроль
6,000	-2,000	-2,000	0,887	+1,000	+0,933	+1,03	+5,850	
-1	0,3333	0,3333	-0,1478	-0,1667	-0,1555	-0,1717	-0,9750	-0,9751
	6,000	-2,000	0,292	-1,000	-0,006	-1,21	+0,076	
	5,3333	-2,6667	0,5876	-0,6667	+0,3050	-0,8667	+2,0258	+2,0258
	-1	+0,5000	-0,1102	+0,1250	-0,0572	+0,1625	-0,3798	-0,3799
		6,000	-1,203	+3,000	-0,344	+0,60	+4,053	
		+4,0000	-0,6136	+3,0000	+0,1195	+0,5099	+7,0157	+7,0158
		-1	0,1534	-0,7500	-0,0299	-0,1275	-1,7539	-1,7540
			57,398	-5,506	+11,776	+2,05	+65,694	+65,6822
			57,1080	-5,1201	+11,6228	+2,0715	+65,682	
			-1	+0,0897	-0,2035	-0,0363	-1,1501	-1,1501
-0,1717	+0,1625	-0,1275	-0,0363	4,000	-0,921		+0,573 _A	
+0,0054	+0,0040	-0,0056	k_4					
-0,0444	-0,0666	-0,1331		1,0409	-0,0859	-0,4767	+0,4783	+0,4783
+0,0333	+0,0999	k_3	$\frac{1}{P_{f_a}}$	$\frac{1}{P_{f_s}} =$				
-0,1774	k_2			3,415			14,853	
k_1				0,8837			0,2514	0,2504

Контроль вычисления коррелят:

$$([aa] + [ab] + \dots)k_1 + ([ab] + [bb] + \dots)k_2 + \\ + ([ac] + [bc] + \dots)k_3 + \dots + (\omega_1 + \omega_2 + \dots) = 0.$$

Решение нормальных уравнений приведено в табл. 3.7.

Контроль вычисления коррелят:

$$(6,000 - 2,000 - 2,000 + 0,887)(-0,1774) + (-2,000 + 6,000 - 2,000 + \\ + 0,292)(0,0999) + (-2,000 - 2,000 + 6,000 - 1,203)(-0,1331) + (0,887 + 0,292 - \\ - 1,203 + 57,398)(-0,0363) + (1,03 - 1,21 + 0,60 + 2,05) = 0,002.$$

Оценка точности. Средняя квадратическая ошибка уравненного элемен-

та определяется по формуле $m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}$, где $\mu = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{r}}$ — средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из уравнивания сети; v — поправки к измеренным с весом p величинам; r — число избыточных измерений, равное числу условных уравнений.

Значение $\mu = \sqrt{\frac{0,455}{4}} = 0,34''$. Средняя квадратическая ошибка уравненного

угла $m = \mu \sqrt{2} = 0,34 \sqrt{2} = 0,48''$. С учетом вычисленных значений обрат-

ных весов дирекционного угла $\alpha_{34} \left(\frac{1}{P_{f\alpha}} = 1,0409 \right)$ и длины стороны

$S_{34} \left(\frac{1}{P_{fS}} = 0,8837 \right)$ находим $m_{\alpha_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{f\alpha}}} = 0,34 \sqrt{1,0409} = 0,35''$;

$$m_{S_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{fS}}} = 0,34 \sqrt{0,8837} = 0,32 \text{ дм} = 0,032 \text{ м}.$$

Окончательные вычисления приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Номер трогольника	Номер пункта	Разности направлений	Измеренные углы	Поправки	Уравненные углы	sin уравненных углов	Уравненные стороны, м
1						$q = 15200,944$	
	1	2-1	37°11'06,71"	-0,07"	6,64"	0,6043930	9187,34
	2	6-5	33 06 57,19	-0,64	56,55	0,5463316	8304,76
	3	11-10	109 41 57,13	-0,32	56,81	0,9414758	14311,32
		Σ	180 00 01,03	-1,03	00,00		
	ω_1	1,03					
2						$q = 21345,667$	
	4	5-4	25 12 57,42	+0,59	58,01	0,4260337	9093,97
	5	9-8	25 29 36,31	+0,11	36,42	0,4304079	9187,34
	6	12-11	129 17 25,06	+0,51	25,57	0,7739459	16520,39
		Σ	179 59 58,79	+1,21	00,00		
	ω_2	-1,21					
3						$q = 17675,06$	
	7	3-2	30 57 52,92	-0,25	52,67	0,5145088	9093,97
	8	10-12	121 00 37,41	-0,19	37,22	0,8570743	15148,84
	9	8-7	28 01 30,27	-0,15	30,12	0,4698572	8304,76
		Σ	180 00 00,60	-0,59	00,01		
	ω_3	0,60					

Таблица 3.9

Номер пункта	Уравненные углы	Дирекционные углы	S, м	X, м	У, м
2					
1	68°08'59,31"	187°28'37,81"			
3	28 01 30,12	75 37 37,12	15148,84	5963124,81	8412617,83
4	230 42 34,03	283 39 07,24	9093,97	5966885,26	8427292,51
2	33 06 56,55	334 21 41,27	9187,34	5969031,66	8418455,47
1		187 28 37,82		5977314,44	8414480,18

Если невязки в некоторых треугольниках с уравненными углами не превышают 0,01" и расхождения длин сторон, вычисленных из решения разных треугольников, не более двух единиц последнего знака, то уравнивание выполнено качественно. В противном случае необходимо проверить вычисления длин сторон, если ошибок нет, то их надо искать в полюсных условиях, а при невязках в треугольниках более 0,01" — в условиях фигур. После этого вычисляют окончательные координаты пунктов (табл. 3.9), длины и дирекционные углы сторон и каталог координат пунктов.

3.1.4. Уравнивание триангуляции двухгрупповым методом Урмаева–Крюгера

При уравнивании больших сетей триангуляции возникает много условных и нормальных уравнений, что приводит к трудоемким вычислениям. Для уменьшения объема вычислений Крюгер предложил двухгрупповой метод, в котором условные уравнения делят на две группы, решают уравнения первой группы, находят первичные поправки v' . Затем преобразуют уравнения второй группы и в результате их решения получают поправки v'' и окончательные поправки $v = v' + v''$ такие же, что и при совместном решении уравнений.

Н.А. Урмаев предложил включать в первую группу все условные уравнения фигур неперекрывающихся треугольников. При этом нормальные уравнения первой группы принимают вид

$$3k'_j + \omega_j = 0,$$

а вычисление поправок $v'_1 = v'_2 = v'_3 = -\frac{\omega_j}{3}$ сводится к распределению невязок треугольников с обратным знаком поровну на три угла.

По исправленным первичными поправками углам в каждом треугольнике вычисляют свободные члены условных уравнений второй группы и преобразованные коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 - \bar{\alpha}_j; & A_2 &= \alpha_2 - \bar{\alpha}_j; & A_3 &= \alpha_3 - \bar{\alpha}_j; \\ B_1 &= \beta_1 - \bar{\beta}_j; & B_2 &= \beta_2 - \bar{\beta}_j; & B_3 &= \beta_3 - \bar{\beta}_j; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

где $\bar{\alpha}_j = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$; $\bar{\beta}_j = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$; ...

Контроль: $[A] = [B] = \dots = 0$.

Решив нормальные уравнения второй группы, находят коррелаты, позволяющие вычислить вторичные поправки v'' , которые вводят в предварительные уравненные углы.

Оценка точности. Среднюю квадратическую ошибку непосредственно измеренных величин определяют по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r_1 + r_2}},$$

где r_1 и r_2 — число условных уравнений в первой и второй группах,

$$[vv] = [v'v'] + [v''v''].$$

Для оценки точности функции f_i ее коэффициенты относят во вторую группу и преобразуют по формулам

$$F_1 = f_1 - \bar{f}_j, \quad F_2 = f_2 - \bar{f}_j, \quad F_3 = f_3 - \bar{f}_j; \quad \bar{f}_j = \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3).$$

Таблица 3.10

№ тригольника	№ измеренный угол, β	ν	$\beta + \nu$	ν''	$\beta + \nu'' + \nu''$	$\sin \beta$	Уравненные стороны	$\nu = \nu' + \nu''$
1	1	37°11'06,71"	-0,34"	06,37"	+0,06"		$q = 15200,948$	
	2	33 06 57,19	-0,34	56,85	-0,25	06,43	0,6043922	9187,33
	3	109 41 57,13	-0,35	56,78	+0,19	56,60	0,5463318	8304,76
		180 00 01,03	-1,03	00,00		56,97	0,9414755	14311,32
					00,00			
2	4	25 12 57,42	+0,40	57,82	+0,14	57,96	$q = 21345,65$	
	5	25 29 36,31	+0,40	36,71	-0,32	36,39	0,4260335	9093,96
	6	129 17 25,06	+0,41	25,47	+0,18	25,65	0,4304078	9187,33
		179 59 58,79	+1,21	00,00		00,00	0,7739457	16520,37
3	7	30 57 52,92	-0,20	52,72	-0,27	52,45	$q = 17675,07$	
	8	121 00 37,41	-0,20	37,21	+0,17	37,38	0,5145079	9093,96
	9	28 01 30,27	-0,20	30,07	+0,10	30,17	0,8570740	15148,84
		180 00 00,60	-0,60	00,00		00,00	0,4698575	8304,76

Обратный вес функции уравненных величин

$$\frac{1}{P_F} = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} - \dots$$

3.1.5. Пример уравнивания сети триангуляции двухгрупповым методом Урмаева–Крюгера

Схема сети 2-го класса изображена на рис. 3.6, исходные данные приведены в табл. 3.1. К первой группе отнесены условия фигур треугольников 124, 324, 134, ко второй — условие горизонта и полюсное. Вычисления первичных поправок v' и длин сторон треугольников приведены в табл. 3.10.

Условие горизонта: $(3) + (6) + (8) + \omega = 0$, где $\omega = 3 + 6 + 8 - 360^\circ = 109^\circ 41' 56,78'' + 129^\circ 17' 25,47'' + 121^\circ 00' 37,21'' - 360^\circ = -0,54''$.

Полюсное условие центральной системы:

$$\frac{S_{41} \cdot S_{42} \cdot S_{43}}{S_{42} \cdot S_{43} \cdot S_{41}} = \frac{\sin 2 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 9} = 1.$$

Линейный вид уравнения:

$$-\text{ctg} 1(1) + \text{ctg} 2(2) - \text{ctg} 4(4) + \text{ctg} 5(5) + \text{ctg} 7(7) - \text{ctg} 9(9) + \omega = 0,$$

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho''; \quad \Pi_1 = \sin 2 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7; \quad \Pi_2 = \sin 1 \cdot \sin 4 \cdot \sin 9.$$

Коэффициенты $\text{ctg} \beta$ и свободный член этого уравнения, вычисленный с использованием углов, уравненных за условия первой группы, приведены в табл. 3.11.

Таблица 3.11

Числитель				Знаменатель			
№ углов	Значения углов, β	$\sin \beta$	$\text{ctg} \beta$	№ углов	Значения углов, β	$\sin \beta$	$\text{ctg} \beta$
2	33°06'56,85"	0,5463328	1,533	1	37°11'06,37"	0,6043920	1,318
5	25 29 36,71	0,4304092	2,097	4	25 12 57,82	0,4260329	2,124
7	30 57 52,72	0,5145090	1,667	9	28 01 30,07	0,4698571	1,879
		$\Pi_1 = 0,1209851$				$\Pi_2 = 0,1209839$	

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = \frac{0,0000012}{0,1209851} 206265'' = 2,05''; \quad \sum \operatorname{ctg}^2 \beta = 19,306;$$

$$\omega_{\text{дон}} = 2,5 \cdot m \sqrt{\sum \operatorname{ctg}^2 \beta} = 2,5 \cdot 1'' \sqrt{19,306} = 10,98''.$$

С учетом полученных коэффициентов полюсное уравнение имеет вид
 $-1,318(1) + 1,533(2) - 2,124(4) + 2,097(5) + 1,667(7) - 1,879(9) + 2,05 = 0.$

Составление весовых функций

Для определения средних квадратических ошибок дирекционного угла α_{34} и длины стороны S_{34} имеем:

$$\alpha_{34} = \alpha_{12} + 1 + 7 + 180^\circ + 9, \quad f_\alpha = \Delta\alpha_{34} = (1) + (7) + (9),$$

$$F_S = S_{34} = S_{12} \frac{\sin 2 \cdot \sin 7}{\sin 3 \cdot \sin 9}.$$

В линейном виде

$$f_s = \Delta S_{34} = \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg} 2(2) - \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg} 3(3) + \frac{S_{34}}{\rho''} 7(7) - \frac{S_{34}}{\rho''} \operatorname{ctg} 9(9).$$

Подставляя в формулу F_s , S_{12} и углы, находим $S_{34} \approx 90940$ дм,

$\frac{S_{34}}{\rho''} = 0,4409$. Вычислив численные значения коэффициентов, находим

$$f_s = \Delta S_{34} = 0,676(2) + 0,158(3) + 0,735(7) - 0,828(9).$$

Вычисление коэффициентов условных и нормальных уравнений приведено в табл. 3.12.

Коэффициенты A и B получены по формулам:

$$A_i = \alpha_i - \bar{\alpha}_j, \quad B_i = \beta_i - \bar{\beta}_j;$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad \bar{\beta}_j = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Таблица 3.12

№ угла	α	β	f_α	f_β	A]	B]	F_α	F_β	S]	v''	
1		-1,318	+1		-1	-1,390	0,666	-0,278	-2,002	+0,06	
2		+1,533		+0,676	-1	1,461	-0,333	+0,398	+0,526	-0,25	
3	+1			+0,158	+2	-0,071	-0,333	-0,120	+1,476	+0,19	
4		-2,124			-1	-2,115			-3,115	+0,14	
5		+2,097			-1	+2,106			+1,106	-0,32	
6	+1				+2	+0,009			+2,009	+0,18	
7		+1,667	+1	+0,735	-1	+1,738	+0,333	+0,766	+1,837	-0,27	
8	+1				+2	+0,070	-0,666	+0,031	+1,435	+0,17	
9		-1,879	+1	-0,828	-1	-1,808	+0,333	-0,797	-3,272	+0,10	
ω	-0,54	+2,05			-1,62	+2,05			$[v''v''] = 0,368$		
k					0,0901	-0,1065	$[k\omega] =$	-0,364			
$k\omega$					-0,146	-0,218			ω	Σ	
[A					+18,000	+0,024	-2,997	-0,267	14,760	-1,62	13,140
[B						19,275	-1,459	+3,751	21,591	+2,05	23,641
$[F_{\alpha\beta}$							+1,331	+1,473			

Для того чтобы не было дробных чисел, коэффициенты A и свободный член условия горизонта умножены на 3.

Решение нормальных уравнений приведено в табл. 3.13.

Контроль вычислений коррелат:

$$(18,000 + 0,024) \cdot 0,0901 + (0,024 + 19,275) \cdot (-0,1065) + (-1,62 + 2,05) = -0,001.$$

Таблица 3.13

k_A	k_B	F_α	F_β	ω	Σ	Контроль
+18,000	+0,024	-2,997	-0,267	-1,62	+13,140	+13,140
-1	-0,00133	+0,1655	+0,0148	+0,0900	-0,7300	-0,7300
	+19,275	-1,459	+3,751	+2,05	+23,641	
	+19,2750	-1,4551	+3,7513	+2,0521	+23,6235	+23,6233
	-1	+0,0755	-0,1946	-0,1065	-1,2256	-1,2256
$k_A = 0,0901$	$k_B = -0,1065$	1,331	1,473			
	$\frac{1}{P_F} =$	0,7221	0,7390			

Оценка точности

Средняя квадратическая ошибка результата непосредственного измерения:

$$m = \sqrt{\frac{[v'v'] + [v''v'']}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{0,9618 + 0,368}{3 + 2}} = 0,516'';$$

$$m_{\alpha_{34}} = m \sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 0,52 \sqrt{0,7221} = 0,44'';$$

$$m_{S_{34}} = m \sqrt{\frac{1}{P_{F_S}}} = 0,52 \sqrt{0,7390} = 0,46 \text{ дм} = 0,046 \text{ м.}$$

Сравнение результатов уравнивания коррелятным способом по направлениям и двухгрупповым методом по углам показывает, что они хорошо согласуются между собой.

3.1.6. Условные уравнения в трилатерации**Предварительные вычисления**

До уравнивания в измеренные свето- и радиодальномерами стороны вводят поправки за уменьшение скорости ЭМВ в атмосфере. Затем определяют предварительные значения углов треугольников, используя формулы, получаемые из теоремы косинусов, или по формулам тангенса половинного угла, т.е. формулы (рис. 3.7, б):

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos \left[\frac{(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc} \right] = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \right]; \\ \beta &= \arccos \left[\frac{(-b^2 + a^2 + c^2)}{2ac} \right] = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-b^2}{ac} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \right]; \\ \gamma &= \arccos \left[\frac{(-c^2 + a^2 + b^2)}{2ab} \right] = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-c^2}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

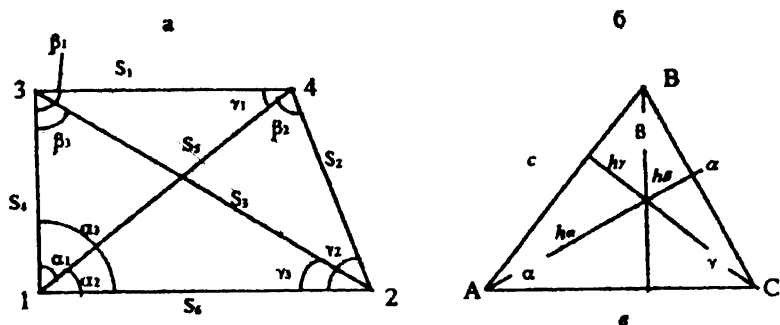


Рис. 3.7. К вычислениям в трилатерации

Далее выполняют редуцирование на поверхность референц-эллипсоида, используя формулу:

$$S = D - \Delta S = D - \frac{(H_2 - H_1)^2}{2D} - \frac{(H_1 + H_2)}{2R_A} + \frac{D^3}{24R_A^2}, \quad (3.6)$$

ед $R_A = R_m \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \cos 2A\right); R_m = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 B} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B};$

D — наклонное расстояние; H_1, H_2 — геодезические высоты точек 1 и 2; R_A — радиус кривизны нормального сечения по направлению линии 1-2; b, c — малая полуось и полярный радиус (для эллипсоида Красовского $b = 6356863.0188$ м, $c = 6399698.9018$ м); e, e' — первый и второй эксцентриситеты (для эллипсоида Красовского $e = 0,0066934216; e' = 0,0067385254$).

Затем переходят на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера, используя формулу

$$d = S \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right),$$

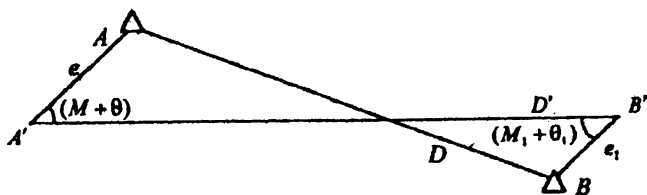


Рис. 3.8. Приведение длин сторон к центрам пунктов

где y_m — ордината середины отрезка d . Для определения y необходимо из значения, приведенного в каталоге, отбросить номер зоны и из результата отнять 500 км; $\Delta y = y_2 - y_1$; S определяют по формуле (3.6).

После этого определяют и вводят поправки за центрировку и редукицию и определяют длины сторон, приведенные к центрам пунктов, используя формулу (рис. 3.8):

$$D = D' - e \cdot \cos(M + \theta) - e_1 \cdot \cos(M_1 + \theta_1).$$

Общее число S независимых условных уравнений в свободных и несвободных сетях трилатерации с N измеренными длинами сторон и k_α азимутами определяют по формуле

$$S = N + k_\alpha - 2k,$$

где k — число определяемых пунктов.

В треугольнике с измеренными сторонами условные уравнения не возникают, по одному условному уравнению возникает в центральной системе и в геодезическом треугольнике, поэтому в сети трилатерации число условных уравнений гораздо меньше, чем в аналогичной по схеме сети триангуляции. Например, в геодезическом четырехугольнике с измеренными углами возникают четыре независимых условных уравнения, а с измеренными сторонами — только одно.

Виды независимых условных уравнений

В свободной сети трилатерации, в которой измерены длины сторон треугольников и азимуты некоторых сторон и имеется один пункт с известными координатами, возникают три вида условных уравнений: условия центральных систем, условия геодезических четырехугольников и условия азимутов (дирекционных углов). В несвободной сети трилатерации, кроме возникающих в свободной сети, при избыточных пунктах с известными координатами возникают условия координат (абсцисс и ординат). Условные уравнения в трилатерации сначала, как и в триангуляции, записывают в угловой форме, а затем поправки в углы выражают через поправки в стороны, используя дифференциальные уравнения, полученные следующим способом.

На рис. 3.7,б по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Дифференцируя по всем переменным, имеем

$$2ada = (2b - 2c \cdot \cos A)db + (2c - 2b \cdot \cos A)dc + 2bc \cdot \sin A dA,$$

откуда, учитывая

$$b - c \cdot \cos A = a \cdot \cos C; \quad c - b \cdot \cos A = a \cdot \cos B; \quad bc \cdot \sin A = ah_A,$$

находим

$$dA = \frac{\rho''}{h_A} (da - db \cdot \cos C - dc \cdot \cos B), \quad (3.7)$$

где h_A — высота треугольника, опущенная из вершины A на противоположную сторону.

Условное уравнение геодезического четырехугольника с измеренными длинами сторон

В угловой форме (рис. 3.7,а) это условие можно записать так: $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Если α'_i — углы, вычисленные по измеренным сторонам, а (α_i) — поправки к ним из уравнивания сети, то

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) + \omega = 0, \quad \omega = \alpha'_1 + \alpha'_2 - \alpha'_3. \quad (3.8)$$

Зависимость между изменением длин сторон треугольника и изменением угла выражается формулой (3.7). Используя обозначения (см. рис. 3.7, б) и принимая $dA = da = (\alpha)$, $da = (a)$, $db = (b)$, $dc = (c)$, имеем

$$(\alpha) = \frac{\rho''}{h_\alpha} [(a) - (b) \cos \gamma - (c) \cos \beta], \quad (\beta) = \frac{\rho''}{h_\beta} [(b) - (a) \cos \gamma - (c) \cos \alpha],$$

$$(\gamma) = \frac{\rho''}{h_\gamma} [(c) - (a) \cos \beta - (b) \cos \alpha].$$

Используя эти формулы для треугольников с углами α_1 , α_2 и α_3 (см. рис. 3.7, а) и подставляя эти значения в формулу (3.8), после приведения подобных членов имеем

$$\lambda_1(S_1) + \lambda_2(S_2) + \lambda_3(S_3) + \lambda_4(S_4) + \lambda_5(S_5) + \lambda_6(S_6) + \omega = 0, \quad (3.9)$$

где $\lambda_1 = \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}}$; $\lambda_2 = \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}}$; $\lambda_3 = -\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}}$;

$$\lambda_4 = + \left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}} \cos \beta'_3 - \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}} \cos \beta'_1 \right) = \frac{\rho''}{S_4} (\text{ctg} \beta'_3 - \text{ctg} \beta'_1);$$

$$\lambda_5 = - \left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_1}} \cos \gamma'_1 + \frac{\rho''}{h_{\alpha_1}} \cos \beta'_2 \right) = -\frac{\rho''}{S_5} (\text{ctg} \gamma'_1 + \text{ctg} \beta'_2);$$

$$\lambda_6 = \left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}} \cos \gamma'_3 - \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}} \cos \gamma'_2 \right) = \frac{\rho''}{S_6} (\text{ctg} \gamma'_3 - \text{ctg} \gamma'_2).$$

$$h_{\alpha_1} = S_4 \sin \beta'_1 = S_5 \sin \gamma'_1; \quad h_{\alpha_2} = S_5 \sin \beta'_2 = S_6 \sin \gamma'_2;$$

$$h_{\alpha_3} = S_4 \sin \beta'_3 = S_6 \sin \gamma'_3.$$

Условное уравнение центральной системы с измеренными сторонами

На рис. 3.9 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 360^\circ = 0$.

Если γ'_i — углы, вычисленные по измеренным сторонам, (γ_i) — поправки к ним из уравнивания сети, то

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + \omega = 0,$$

$$\omega = \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 - 360^\circ = \sum \gamma'_i - 360^\circ.$$

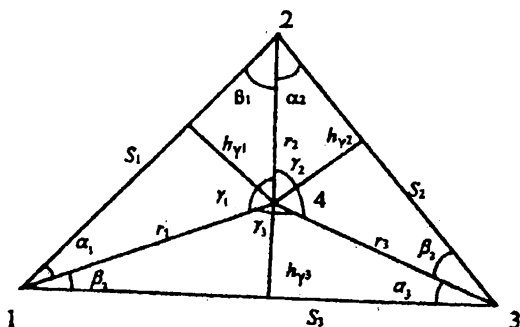


Рис. 3.9. К выводу условного уравнения центральной системы

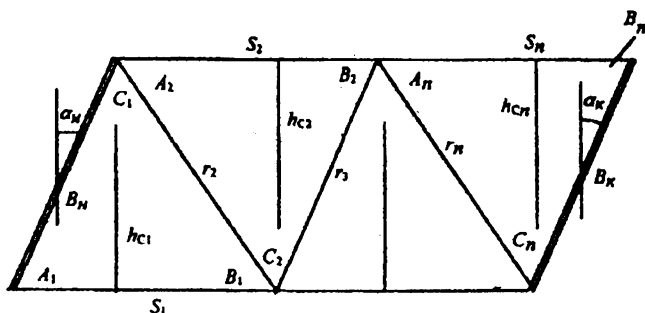


Рис. 3.10. К выводу условного уравнения дирекционных углов

Используя для определения поправок (γ_i) формулы (3.9), после преобразований находим

$$\lambda_1^{\circ}(S_1) + \lambda_2^{\circ}(S_2) + \lambda_3^{\circ}(S_3) + \lambda_1(r_1) + \lambda_2(r_2) + \lambda_3(r_3) + \omega = 0, \quad (3.10)$$

$$\text{где } \lambda_i^{\circ} = \frac{\rho''}{h_{\gamma_i}}; \lambda_i = -\rho'' \left(\frac{\cos \alpha_i}{h_{\gamma_i}} + \frac{\cos \beta_{i-1}}{h_{\gamma_{i-1}}} \right) = -\frac{\rho''}{r_i} (\text{ctg} \alpha_i + \text{ctg} \beta_{i-1})$$

при $i=1 \quad i-1=n$,

n — порядковый номер последнего треугольника в центральной системе, в рассматриваемом случае $n=3$; $h_{\gamma_i} = r_i \sin \alpha_i = r_{i+1} \sin \beta_i$

Условия дирекционных углов возникают при избыточных дирекционных углах линий. В угловой форме (рис. 3.10)

$$\alpha_k = \alpha_n \pm 180^{\circ} - C_1 \pm 180^{\circ} + C_2 \pm \dots + C_n.$$

Если C'_i — углы, вычисленные по измеренным сторонам, (C_i) — поправки к ним из уравнивания сети, то

$$-(C_1) + (C_2) - \dots + (C_n) + \omega = 0, \quad (3.11)$$

где $\omega = \alpha_n \pm 180^{\circ} - C'_1 \pm 180^{\circ} + C'_2 \pm \dots + C'_n - \alpha_k = \alpha'_k - \alpha_k$.

Заменив поправки в углы поправки в стороны и учитывая, что поправки (b_n) и (b_k) в исходные стороны b_n и b_k равны нулю, имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho''}{h_{C_1}}(S_1) + \frac{\rho''}{h_{C_2}}(S_2) - \dots + \frac{\rho''}{h_{C_n}}(S_n) + \rho'' \left(\frac{\cos B'_1}{h_{C_1}} - \frac{\cos A'_2}{h_{C_2}} \right) (r_2) - \\ & - \rho'' \left(\frac{\cos B'_2}{h_{C_2}} - \frac{\cos A'_3}{h_{C_3}} \right) (r_3) + \dots + \frac{\rho'' \cos A'_n}{h_{C_n}} (r_n) + \omega = 0. \end{aligned}$$

Или, учитывая:

$$h_{C_1} = r_2 \sin B'_1, \quad h_{C_2} = r_2 \sin A'_2 = r_3 \sin B'_2,$$

$$h_{C_3} = r_3 \sin A'_3, \dots, h_{C_n} = r_n \sin A_n,$$

находим

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho''}{h_{C_1}}(S_1) + \frac{\rho''}{h_{C_2}}(S_2) - \dots + \frac{\rho''}{h_{C_n}}(S_n) + \frac{\rho''}{r_2}(\operatorname{ctg} B'_1 - \operatorname{ctg} A'_2)(r_2) - \\ & - \frac{\rho''}{r_3}(\operatorname{ctg} B'_2 - \operatorname{ctg} A'_3)(r_3) + \dots + \frac{\rho''}{r_n} \operatorname{ctg} A'_n(r_n) + \omega = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Базисные условия в сетях трилатерации не возникают.

Условия координат (абсцисс и ординат) возникают в тех же случаях, что и в триангуляции. Сначала координатные условия записывают в угловой форме (как в триангуляции при уравнивании углов), а затем поправки углов выражают через поправки к длинам сторон.

Допустимые значения свободных членов в сети триангуляции

Для условий фигур и горизонта, $\omega_{дон} \leq 2,5m\sqrt{n}$, где n — число углов, входящих в данное условие; m — средняя квадратическая ошибка измерения углов триангуляции данного класса. Свободные члены полюсных, базисных и азимутальных условий вычисляют по формулам:

$$\omega_{пол} \leq 2,5m\sqrt{\sum \operatorname{ctg} \beta}, \quad \omega_{баз} \leq 2,5\sqrt{2m_b^2 + \left(\frac{b}{\rho''}m\right)^2 \sum \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

$$\omega_{аз} \leq 2,5\sqrt{m_\alpha^2 + nm^2}.$$

Допустимые значения свободных членов в условиях абсцисс и ординат определяют по формулам:

$$\omega_{x_{дон}} \leq 2,5 \sqrt{\left(\frac{m}{\rho}\right)^2 10^6 [a_x a_x] + m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2};$$

$$\omega_{y_{дон}} \leq 2,5 \sqrt{\left(\frac{m}{\rho}\right)^2 10^6 [a_y a_y] + m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2},$$

где $[a_x a_x]$, $[a_y a_y]$ — суммы квадратов коэффициентов при поправках (A), (B), (C) в углы в условных уравнениях абсцисс и ординат соответственно; m_{x_i} , m_{y_i} — средние квадратические ошибки абсцисс и ординат исходных пунктов.

Допустимые значения свободных членов в сетях трилатерации
 В геодезических четырехугольниках и центральных системах

$$\omega_{дон} \leq 2,5 m_{\bar{S}} \sqrt{\sum \lambda^2},$$

где $m_{\bar{S}}$ — средняя квадратическая ошибка измерения длин сторон, отнесенная к сторонам средней длины $\bar{S} = \sum \frac{S}{n}$; $\sum \lambda^2$ — сумма квадратов коэффициентов в условных уравнениях. Значение $m_{\bar{S}}$ в сети трилатерации определяют по формуле

$$m_{\bar{S}} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i^2}{(\sum \lambda^2)_i}}, \quad (3.13)$$

где k — число условных уравнений центральных систем и геодезических четырехугольников; ω_i — свободные члены условных уравнений.

Для условий дирекционных углов

$$\omega_{\text{дон}} \leq 2,5\sqrt{[\lambda\lambda]m_S^2 + m_{\alpha_1}^2 + m_{\alpha_2}^2},$$

где $[\lambda\lambda]$ — сумма квадратов коэффициентов в условном уравнении (3.12) при поправках в измеренные длины сторон; m_{α_1} , m_{α_2} — средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов m_{α_1} , m_{α_2} .

Для условий абсцисс и ординат

$$\omega_{\text{дон}} \leq 2,5\sqrt{[a_x a_x]m_S^2 + m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}, \quad \omega_{\text{дон}} \leq 2,5\sqrt{[a_y a_y]m_S^2 + m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2},$$

где $[a_x a_x]$, $[a_y a_y]$ — суммы квадратов коэффициентов при поправках в длины сторон треугольников в условных уравнениях абсцисс и ординат соответственно; m_{x_i} , m_{y_i} — средние квадратические ошибки координат исходных пунктов.

3.1.7. Пример уравнивания свободной сети трилатерации коррелятным способом

На рис. 3.11 изображена небольшая сеть трилатерации, состоящая из пяти пунктов, из которых три определяемые. В сети измерено равнооточно 8 сторон.

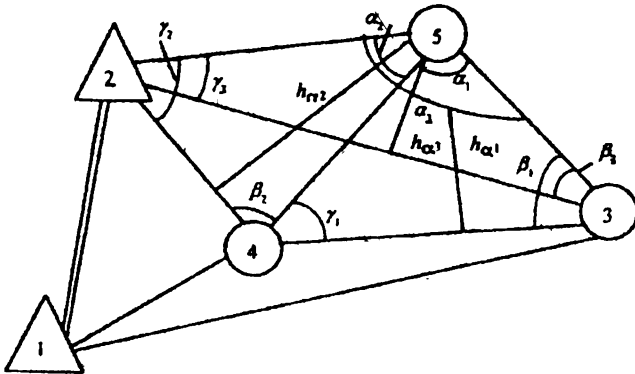


Рис. 3.11. Сеть трилатерации

Таблица 3.14

Сторона	Длина стороны на плоскости, S' , м	Поправка из уравнивания v , м	Уравненные стороны $S = S' + v$, м
1.2	14311,32		14311,320
1.3	15148,87	-0,026	15148,844
1.4	8304,71	+0,040	8304,750
2.3	16520,43	-0,008	16520,422
2.4	9187,32	+0,032	9187,352
2.5	9459,78	-0,011	9459,769
3.4	9093,95	+0,037	9093,987
3.5	9255,66	-0,011	9255,649
4.5	8311,24	+0,010	8311,250

Число независимых условных уравнений в сети $r = n - 2q = 8 - 2 \cdot 3 = 2$ (одно условное уравнение геодезического четырехугольника и одно — центральной системы).

Исходные данные приведены в табл. 3.1, результаты измерений — в табл. 3.14.

В табл. 3.15 выполнены вычисления углов и высот треугольников по формулам (3.5), (3.9).

По формулам (3.9), (3.10) и данным табл. 3.15 в табл. 3.16 вычислены коэффициенты λ_i и свободные члены ω_i условного уравнения геодезического четырехугольника 2534 (рис. 3.11), а в табл. 3.17 — коэффициенты $\lambda_i^\circ, \lambda_i$ и свободный член ω_i условного уравнения центральной системы 1234 (рис. 3.9, 3.11).

Покажем вычисление коэффициентов λ_i на примерах.

Коэффициент при поправке (2,4)

$$\lambda_2 = \frac{\rho''}{h_{\alpha_2}} = \frac{\rho''}{S_{25} \sin \gamma_2} = \frac{206264,81''}{9459,78 \sin 52^\circ 54' 47,71''} = 27,333.$$

Таблица 3.15

Тре- угольник	Верши- на	Измеренные стороны			Углы A, B, C	Высоты, м, h _A , h _B , h _C	(A") (B") (C")	Уравненные углы
		a	b	c				
1	4	14311,32			109° 41' 59,17"	5019,27/27	-2,41	109° 41' 56,76"
	2	8304,71			33 06 55,25	8649,60/60	+1,21	33 06 56,46
	1	9187,32			37 11 05,58	7818,65/65	+1,20	37 11 06,78
			Σ		180 00 00,00	Σ	0,00	180 00 00,00
2	5	9187,32			61 51 41,63	7546,29/29	+0,94	61 51 42,57
	4	9459,78			65 13 30,66	7328,94/94	-0,98	65 13 29,68
	2	8311,24			52 54 47,71	8341,74/74	+0,04	52 54 47,75
			Σ		180 00 00,00		0,00	180 00 00,00
3	3	8311,24			53 51 21,42	8178,17/17	-0,03	53 51 21,39
	5	9093,95			62 04 40,99	7474,28/28	+1,08	62 04 42,07
	4	9255,66			64 03 57,59	7343,70/70	-1,05	64 03 56,54
			Σ		180 00 00,00		0,00	180 00 00,00
4	2	9255,66			27 41 50,32	7848,05/05	-0,27	27 41 50,05
	3	9459,78			28 21 45,61	7678,70/70	-0,27	28 21 45,34
	5	16520,43			123 56 24,07	4396,91/91	+0,54	123 56 24,61
			Σ		180 00 00,00		0,00	180 00 00,00
5	4	16520,43			129 17 29,88	3914,02/02	-3,71	129 17 26,17
	3	9187,32			25 29 34,26	7038,10/11	+1,84	25 29 36,10
	2	9093,95			25 12 55,86	7110,37/37	+1,87	25 12 57,73
			Σ		180 00 00,00		0,00	180 00 00,00
6	1	15148,87			30 57 50,53	7117,66/66	+2,33	30 57 52,86
	4	8304,71			21 00 41,55	4272,77/77	-4,49	21 00 37,06
	3				28 01 27,92	7794,09/09	+2,15	28 01 30,07
			Σ		180 00 00,00		-0,01	179 59 59,99

Таблица 3.16

По-правка	Кoeffициенты λ_i	Угол α'_1	Значение угла
(2,3)	-46,911	α'_1	61° 51' 41,63''
(2,4)	27,333	α'_2	62 04 40,99
(2,5)	25,053	Σ	123 56 22,62
(3,4)	27,597	$-\alpha'_3$	123 56 24,07
(3,5)	25,003	ω_1	- 1,45''
(4,5)	-23,523		

Таблица 3.17

По-правка	Кoeffициенты λ'_i, η_i	Угол γ'_i	Значение угла
(1,3)	48,274	γ'_1	109° 41' 59,17''
(1,4)	-74,134	γ'_2	129 17 29,88
(2,3)	52,699	γ'_3	121 00 41,55
		Σ	360 00 10,60
(2,4)	-82,097	-	360
(3,4)	-90,182	ω_2	+10,60''

Кoeffициент при поправке (2,5)

$$\lambda_6 = \frac{\rho''}{S_{25}} (\text{ctg}\gamma'_3 - \text{ctg}\gamma'_2) = \frac{20626481''}{9459,78} \times$$

$$\times (\text{ctg}27^\circ 41' 50,32'' - \text{ctg}52^\circ 54' 47,71'') = 25,053.$$

Подобным образом вычисляют и другие коэффиценты. Условное уравнение геодезического четырехугольника:

$$-46,911(2,3) + 27,333(2,4) + 25,053(2,5) +$$

$$+ 27,597(3,4) + 25,003(3,5) - 23,523(4,5) - 1,45'' = 0.$$

Условное уравнение центральной системы:

$$48,274(1,3) - 74,134(1,4) + 52,699(2,3) - 82,097(2,4) - 90,182(3,4) + 10,60'' = 0. \quad (3.14)$$

Составление весовой функции

В уравнениях трилатерации определяют среднюю квадратическую ошибку дирекционного угла наиболее удаленной стороны (рис. 3.11 — стороны 3, 5). Весовую функцию сначала составляют в угловой форме. Выделим из сети трилатерации цепочку треугольников для передачи дирекционного угла от твердого направления 1.2 к направлению 3.5 (рис. 3.12). Значение

$$F = \alpha_{35} = \alpha_{12} + C_1 + 180^\circ - C_2 + 180^\circ + C_3.$$

Переходя от функции к ее приращению, при $(\alpha_{12}) = 0$ имеем

$$f_\alpha = \Delta\alpha_{35} = (C_1) - (C_2) + (C_3).$$

Заменяя поправки в углы поправками в стороны по формулам (3.12) и учитывая, что поправка (1.2) к исходной стороне 1.2 равна нулю, находим

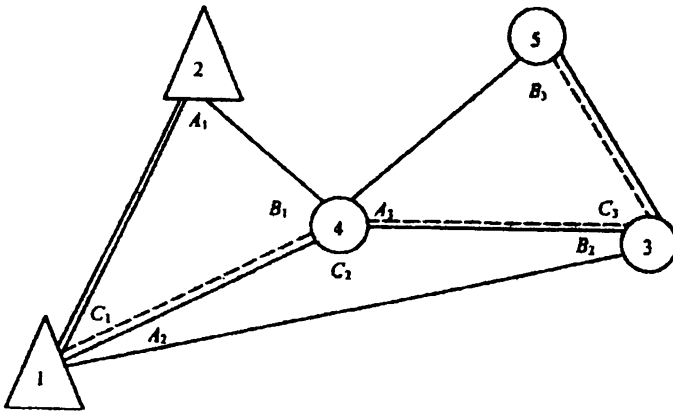


Рис. 3.12. К составлению весовой функции

$$f_{\alpha} = \Delta_{35} = -\frac{\rho''}{h_{C_2}}(1.3) - \frac{\rho''}{S_{14}}(\operatorname{ctg}B'_1 - \operatorname{ctg}A'_2)(1.4) + \frac{\rho''}{h_{C_1}}(2.4) + \frac{\rho''}{S_{34}}(\operatorname{ctg}B'_2 - \operatorname{ctg}A'_3)(3.4) - \frac{\rho''}{S_{35}}\operatorname{ctg}B'_3(3.5) + \frac{\rho''}{h_{C_3}}(4.5). \quad (3.15)$$

Подставляя в формулу (3.15) соответствующие значения из табл. 3.15, после вычислений получим:

$$f_1 = -\frac{\rho''}{h_{C_2}} = -\frac{\rho''}{S_{14} \sin A_2} = -\frac{206264,81''}{8304,71 \sin 30^{\circ}57'50,53''} = -48,274;$$

$$f_2 = -\frac{\rho''}{S_{14}}(\operatorname{ctg}B'_1 - \operatorname{ctg}A'_2) = -\frac{206264,81}{8304,71}(\operatorname{ctg}109^{\circ}41'59,17'' - \operatorname{ctg}30^{\circ}57'50,53'') = 50,288;$$

$$f_3 = \frac{\rho''}{h_{C_1}} = \frac{\rho''}{S_{12} \sin A_1} = \frac{206264,81''}{14311,32 \sin 33^{\circ}06'55,25''} = 26,381;$$

$$f_4 = \frac{\rho''}{S_{34}}(\operatorname{ctg}B'_2 - \operatorname{ctg}A'_3) = \frac{206264,81''}{9093,95}(\operatorname{ctg}28^{\circ}01'27,92'' - \operatorname{ctg}64^{\circ}03'57,59'') = 31,584;$$

$$f_5 = -\frac{\rho''}{S_{35}}\operatorname{ctg}B'_3 = -\frac{206264,81''}{9255,66}\operatorname{ctg}62^{\circ}04'40,99'' = -11,810;$$

$$f_6 = \frac{\rho''}{h_{C_3}} = \frac{\rho''}{S_{34} \sin A'_3} = \frac{206264,81''}{9093,95 \sin 64^{\circ}03'57,59''} = 25,221.$$

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Таблица 3.18

Название по- правок (i, k)	a_1	a_2	f_α	Сумма S	Поправки $v = (i, k), \text{ м}$
(1.3)		48,274	-48,274	0,000	-0,026
(1.4)		-74,134	50,288	-23,846	+0,040
(2.3)	-46,911	52,699		5,788	-0,008
(2.4)	27,333	-82,097	26,381	-28,383	+0,032
(2.5)	25,053			25,053	-0,011
(3.4)	27,597	-90,182	31,584	-31,001	+0,037
(3.5)	25,003		-11,810	13,193	-0,011
(4.5)	-23,523		25,221	1,698	+0,010
ω	-1,45''	+10,60''		$[v^2] =$ $[k\omega] =$	0,00508 -0,00510

Таблица 3.19

k_1	k_2	f_α	S	Контроль
5515,464	-7204,873	704,137	-985,273	-985,272
	25476,124	-11072,539	7198,712	7198,712
		7328,343	-3040,059	-3040,059

Таблица 3.20

k_1	k_2	f_α	ω	$S + \omega$	Контроль
5515,464	-7204,873	704,137	-1,45	-986,723	
-1	1,306304	-0,127666	0,000263	+0,178901	0,178901
	25476,124	-11072,539	+10,60	7209,312	
	16064,370	-10152,722	8,706	5920,352	5920,354
	-1	0,632002	-0,000542	-0,368539	-0,368540
		7328,343	0	-3040,059	
	$\frac{1}{P_F} =$	821,908	5,687	827,586	827,595
k_1	k_2				
-0,000445	-0,000542				

С учетом полученных коэффициентов находим

$$f_{\alpha} = \Delta\alpha_{35} = -48,274(1,3) + 50,288(1,4) + 26,381(2,4) + 31,584(3,4) - 11,810(3,5) + 25,221(4,5). \quad (3.16)$$

Составление и решение нормальных уравнений коррелат

В табл. 3.18 вписывают коэффициенты полученных нормальных уравнений (3.13), (3.14) и весовой функции (3.16), от которых переходят к нормальным уравнениям коррелат (табл. 3.19) и решают их (табл. 3.20). По полученным коррелатам k_1 и k_2 в табл. 3.18 вычисляют поправки

$$v = (i, k) = a_1 k_1 + a_2 k_2.$$

В табл. 3.14 выполнено вычисление уравненных сторон.

Оценка точности уравненных элементов трилатерации

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[v]^2}{r}} = \sqrt{\frac{0,00508}{2}} = 0,0504 \text{ м},$$

где r — число избыточных измерений, равных числу условных уравнений ($r=2$); $[v]$ — взято из табл. 3.18.

Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла наиболее удаленной стороны 3–5

$$m_{\alpha_{35}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{35}}}} = 0,0504 \sqrt{821,908} = 1,4''.$$

Обратный вес $\frac{1}{P_{\alpha_{35}}}$ получен в табл. 3.20.

Таблица 3.21

№ пункта	Уравненные углы	Дирекционные углы, α	Уравненные стороны, S_i , м	$\Delta x = S \cos \alpha$, м	$\Delta y = S \sin \alpha$, м	$x_i = x_{i-1} + \Delta x$, м	$y_i = y_{i-1} + \Delta y$, м
1			14311,320	14189,628	1862,348	5963124,810	8412617,830
2	6°01'44,21"	7°28'37,81"	9459,769	-1877,597	9271,562	5977314,438	8414480,178
5	123 56 24,64	157 30 28,96	9255,649	-8551,602	3540,783	5975436,841	8423751,740
3	53 51 21,39	283 39 07,57	9093,987	2146,416	-8837,052	5966885,239	8427292,523
4	238 59 22,98	224 39 44,59	8304,750	-5906,846	-5837,641	5969031,655	8418455,471
1	37 11 06,78	7 28 37,81				5963124,809	8412617,830
2							
Σ	540 00 00,00		Σ	-0,001	0,000		

Вычисление окончательных координат

Окончательные координаты определяемых пунктов вычисляют с точностью до миллиметра по уравненным сторонам и углам треугольников. Вычисления можно выполнить различными способами: прямой угловой засечкой с пунктов, координаты которых известны; проложением хода, соединяющего исходные и определяемые пункты, и т.п.

В табл. 3.21 выполнено вычисление координат определяемых точек путем проложения хода.

Контролем вычислений являются: сумма углов в замкнутом полигоне должна равняться $180^\circ(n - 2)$, где n — количество углов; дирекционный угол исходной стороны должен быть равен его значению, полученному путем вычислений по ходу; $\Sigma\Delta x = \Sigma\Delta y = 0$; координаты исходного пункта должны равняться их значениям для этого же пункта путем вычислений по ходу. (Расхождения в координатах допускаются не более трех единиц последнего знака).

Вычисленные координаты округляют до 0,01 м и выписывают в каталог, в него же выписывают длины сторон (до 0,01 м) и их дирекционные углы (до 0,01"), вычисленные из решения обратных геодезических задач.

3.2. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

3.2.1. Общие сведения об уравнивании геодезических сетей параметрическим способом

Параметрический способ уравнивания геодезических сетей имеет широкое применение, так как одинаковая структура приведенных к линейному виду уравнений поправок дает возможность составлять универсальные программы уравнивания на ЭВМ триангуляции, трилатерации, линейно-угловых, комбинированных и других построений. Как и в коррелятном способе задача уравнивания решается под условием $[pvv] = \min$.

В параметрическом способе сначала вычисляют координаты всех определяемых пунктов. Затем, используя эти координаты, с высокой точно-

стью решают по всем сторонам обратные геодезические задачи и определяют длины и дирекционные углы сторон. После этого составляют уравнения поправок для всех непосредственно измеренных величин: горизонтальных направлений, измеренных расстояний, азимутов, придавая каждой измеренной величине вес $p = c/m^2$.

От уравнений поправок переходят к нормальным уравнениям, число которых равно удвоенному числу определяемых пунктов. Из решения находят поправки в приближенные координаты определяемых пунктов, т.е. находят уравненные координаты пунктов. Выполняют вычисления окончательных длин сторон и дирекционных углов по уравненным координатам. Делают оценку точности уравненных элементов сети.

Одним из наиболее ответственных этапов уравнивания является установление точного соотношения весов всех измеренных в сети величин.

Приняв в формуле веса $p = c/m^2$, $c = \mu^2 = m_N^2 = const$, где m_N — средняя квадратическая ошибка измеренного направления, получим

$$p_N = 1, p_\alpha = \frac{m_N^2}{m_\alpha^2}, p_s = \frac{m_N^2}{m_s^2},$$

где $p_\alpha, m_\alpha, p_s, m_s$ — вес и средняя квадратическая ошибка азимута α и длины стороны s соответственно. При этом средние квадратические ошибки m должны быть получены не по внутренней сходимости результатов измерений, а по свободным членам соответствующих условных уравнений или другими способами, учитывающими случайные и систематические ошибки. В сетях триангуляции m определяют по формуле Ферреро с использованием невязок ω большого числа n треугольников

$$m_N = \frac{m}{\sqrt{2}}, m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}}.$$

В трилатерации m_s находят по свободным членам условных уравнений геодезических четырехугольников и центральных систем по формуле (3.13).

3.2.2. Уравнения поправок направлений

Выразим ошибки направлений через ошибки координат. На рис. 3.13 ориентирующий угол, т.е. угол между направлением ix и направлением io нулевого диаметра лимба:

$$z_{ik} = \alpha_{ik} - N_{ik},$$

где α_{ik} — дирекционный угол направления ik ; N_{ik} — уравненное значение этого направления. Принимая

$$z_{ik} = z_o + \delta z_i, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ik}^o + \Delta \alpha_{ik}, \quad N_{ik} = N'_{ik} + v_{ik},$$

находим

$$v_{ik} = -\delta z_i + \Delta \alpha_{ik} + l_{ik}, \quad (3.17)$$

где $l_{ik} = \alpha_{ik}^o - N'_{ik} - z_o = \alpha_{ik}^o - R_{ik}^o$ $z_o = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{ik}$,

$R_{ik}^o = N'_{ik} + z_o$, N'_{ik} — измеренное значение направления.

Продифференцировав выражение $\operatorname{tg} \alpha_{ik} = (y_k - y_i)/(x_k - x_i)$ по всем переменным, после перехода к конечным приращениям получим

$$\frac{\Delta \alpha_{ik}}{\rho'' \cos^2 \alpha_{ik}} = \frac{(x_k - x_i)(\delta y_k - \delta y_i) - (y_k - y_i)(\delta x_k - \delta x_i)}{(x_k - x_i)^2}$$

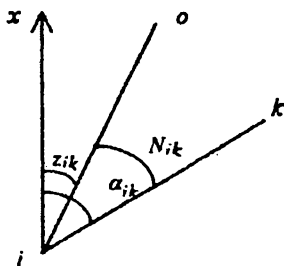


Рис. 3.13. К определению ориентирующего угла

Учитывая $x_k - x_i = s_{ik} \cos \alpha_{ik}$, $y_k - y_i = s_{ik} \sin \alpha_{ik}$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{ik} = & -\rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{s_{ik}} \delta x_k + \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{s_{ik}} \delta y_k + \\ & + \rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{s_{ik}} \delta x_i - \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{s_{ik}} \delta y_i, \end{aligned} \quad (3.18)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{ik} = & -\rho'' \frac{y_k - y_i}{s_{ik}^2} \delta x_k + \rho'' \frac{x_k - x_i}{s_{ik}^2} \delta y_k + \\ & + \rho'' \frac{y_k - y_i}{s_{ik}^2} \delta x_i - \rho'' \frac{x_k - x_i}{s_{ik}^2} \delta y_i. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (3.17), находим

$$v_{ik} = -\delta z_i - a_{ik} \xi_i - b_{ik} \eta_i + a_{ik} \xi_k + b_{ik} \eta_k + l_{ik}, \quad (3.19)$$

где δz_i — поправка в ориентирующий угол z_0 на i -м пункте; $\xi_i, \eta_i, \xi_k, \eta_k$ — поправки в дециметрах в приближенные координаты $x_i^0, y_i^0; x_k^0, y_k^0$ пунктов i и k , т.е. $\xi = 10\delta x, \eta = 10\delta y$;

$\delta x, \delta y$ — поправки в метрах.

Коэффициенты a_{ik}, b_{ik} определяют по формулам:

$$\begin{aligned} a_{ik} = & -20,6265 \frac{\sin \alpha_{ik}^0}{s_{ik}} = -20,6265 \frac{y_k - y_i}{s_{ik}^2}; \\ b_{ik} = & 20,6265 \frac{\cos \alpha_{ik}^0}{s_{ik}} = 20,6265 \frac{x_k - x_i}{s_{ik}^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для обратного направления $k - i$

$$v_{ki} = -\delta z_i - a_{ki} \xi_k - b_{ki} \eta_k + a_{ki} \xi_i + b_{ki} \eta_i + l_{ki}, \quad (3.21)$$

причем $a_{ik} = -a_{ki}$, $b_{ik} = -b_{ki}$, что служит контролем вычислений. Для исходных пунктов поправки ξ и η равны нулю.

Следует заметить, что ошибки, допущенные при составлении уравнений поправок, обнаруживаются только в конце вычислений, поэтому определение a_{ik} , b_{ik} и l_{ik} нужно контролировать.

Уравнение поправок дирекционных углов

От азимутов Лапласа переходят к дирекционным углам направлений, в которые определяют поправки из уравнивания геодезической сети. Уравнения поправок дирекционных углов отличаются от поправок направлений отсутствием поправки $-\delta z_0$ в ориентирующий угол.

3.2.3. Уравнения поправок измеренных сторон

В геодезической сети могут быть измерены стороны, в которые после редуцирования на плоскость проекции Гаусса–Крюгера определяют с учетом весов измерений поправки из уравнивания. Длину стороны s_{ik} можно определить дважды:

$$s_{ik} = s'_{ik} + v_{ik} = s^o_{ik} + \delta s_{ik} , \quad (3.22)$$

где s'_{ik} — измеренная и редуцированная на плоскость длина стороны; v_{ik} — поправка из уравнения; s^o_{ik} — длина той же стороны, определенная по приближенным координатам пунктов; δs_{ik} — поправка в ее значение из уравнивания.

Из формулы (3.22) находим исходное уравнение поправок измеренных сторон

$$v_{ik} = \delta s_{ik} + s^o_{ik} - s'_{ik} = \delta s_{ik} + l_{ik} , \quad (3.23)$$

где $l_{ik} = s^o_{ik} - s'_{ik}$.

Продифференцировав выражение

$$s_{ik}^{\circ 2} = (x_k^{\circ} - x_i^{\circ})^2 + (y_k^{\circ} - y_i^{\circ})^2$$

по всем переменным, имеем

$$2s_{ik}^{\circ} ds_{ik} = 2(x_k^{\circ} - x_i^{\circ})(dx_k - dx_i) + 2(y_k^{\circ} - y_i^{\circ})(dy_k - dy_i).$$

Разделив обе части равенства на s_{ik}° , после перехода к конечным приращениям находим

$$\delta s_{ik} = -\frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} \delta x_i - \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} \delta y_i + \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} \delta x_k + \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} \delta y_k.$$

После подстановки этого значения в (3.22), принимая

$$c_{ik} = \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} = \cos \alpha_{ik}^{\circ}; \quad d_{ik} = \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}} = \sin \alpha_{ik}^{\circ}; \quad \xi = 10\delta x, \quad \eta = 10\delta y,$$

(ξ, η — в дм, $\delta x, \delta y$ — в м), получим

$$v_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}. \quad (3.24)$$

3.2.4. Составление редуцированных нормальных уравнений

Учитывая, что на каждом пункте сумма поправок v_{ik} в измеренные направления равна нулю ($[v] = 0$), можно составить *редуцированные нормальные уравнения*, в которых поправки δz_0 в ориентирующие углы z_0 исключены. При этом общее число нормальных уравнений уменьшается на число пунктов, на которых измерены направления.

Положим, что на пункте i измерено n направлений, им соответствуют уравнения поправок:

$$v_{i1} = -\delta z_i - a_{i1}\xi_i - b_{i1}\eta_i + a_{i1}\xi_1 + b_{i1}\eta_1 + l_{i1};$$

$$v_{i2} = -\delta z_i - a_{i2}\xi_i - b_{i2}\eta_i + a_{i2}\xi_2 + b_{i2}\eta_2 + l_{i2};$$

.....

$$v_{in} = -\delta z_i - a_{in}\xi_i - b_{in}\eta_i + a_{in}\xi_n + b_{in}\eta_n + l_{in}.$$

Примем $-a_{ik} = a_k$, $-b_{ik} = b_k$, $a_{i1} = c_1$, $b_{i1} = d_1$, $a_{i2} = c_2$, $b_{i2} = d_2$ и т.д. С учетом этих обозначений:

$$\begin{aligned} v_{i1} &= -\delta z_i + a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1\xi_1 + d_1\eta_1 + l_{i1}; \\ v_{i2} &= -\delta z_i + a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2\xi_2 + d_2\eta_2 + l_{i2}; \\ &\dots\dots\dots \\ v_{in} &= -\delta z_i + a_n\xi_i + b_n\eta_i + c_n\xi_n + d_n\eta_n + l_{in}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Переходя к нормальным уравнениям, получим:

$$\begin{aligned} n\delta z_i - [a]\xi_i - [b]\eta_i - \dots - [l] &= [v] = 0; \\ -[a]\delta z_i + [aa]\xi_i + [ab]\eta_i + \dots + [al] &= [av] \neq 0; \\ -[b]\delta z_i + [ab]\xi_i + [bb]\eta_i + \dots + [bl] &= [bv] \neq 0; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из первого уравнения

$$\delta z_i = \frac{1}{n} \left([a]\xi_i + [b]\eta_i + c_1\xi_1 + d_1\eta_1 + \dots + c_n\xi_n + d_n\eta_n \right). \quad (3.27)$$

Подставляя полученное значение δz_i в систему (3.25), получим части *редуцированных нормальных уравнений* на данном пункте:

$$\begin{aligned} \left([aa] - \frac{[a][a]}{n} \right) \xi_i + \left([ab] - \frac{[a][b]}{n} \right) \eta_i + \dots + [al] &\neq 0; \\ \left([ab] - \frac{[a][b]}{n} \right) \xi_i + \left([bb] - \frac{[b][b]}{n} \right) \eta_i + \dots + [bl] &\neq 0, \end{aligned}$$

в которых δz_i исключены.

Общую систему редуцированных нормальных уравнений в сети получают суммированием коэффициентов при одноименных неизвестных поправках в уравнениях по станциям. Из решения этой общей системы уравнений находят поправки ξ_i и η_i к приближенным координатам определяе

мых пунктов. Число поправок, как и общее число редуцированных нормальных уравнений, равно удвоенному числу определяемых пунктов.

После определения ξ_i, η_i по формуле (3.27) вычисляют δz_i и по формуле (3.24) — поправки v_{ik} . На каждом пункте $\Sigma v = 0$, что является контролем правильности вычислений. Уравненные координаты

$$x = x^o + 0,1\xi, \quad y = y^o + 0,1\eta.$$

Кроме того, x и y можно определить из решения треугольников, в которых используют уравненные направления.

3.2.5. Оценка точности

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса определяют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{D - 2k - n}}, \quad (3.28)$$

где v — поправки из уравнивания в измеренные с весом p величины; r — число избыточных измерений в сети; D — число всех направлений в сети; k — число определяемых пунктов; n — число пунктов, на которых выполнены наблюдения. Для оценки точности уравненных значений координат пункта k находят p_x и p_y в общей системе уравнений, в качестве последнего и предпоследнего неизвестного ставят поправки η_k и ξ_k . Вес последнего неизвестного равен коэффициенту последнего преобразованного нормального уравнения эквивалентной системы (в схеме решения нормальных уравнений). Вес

$$P_{x_k} = P_{y_k} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}}, \quad (3.29)$$

где C и A — квадратичные коэффициенты последнего и предпоследнего преобразованных нормальных уравнений; B — коэффициент при η_k в предпоследнем преобразованном уравнении.

$$m_{x_k} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_k}}}, \quad m_{y_k} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_k}}}, \quad m_{x,y} = \sqrt{m_{x_k}^2 + m_{y_k}^2}.$$

3.2.6. Пример уравнивания триангуляции параметрическим способом

На рис. 3.14 изображена сеть триангуляции, состоящая из пяти пунктов, из которых два — определяемые. В сети измерены равноточно все направления, приведенные к центрам знаков и редуцированные на плоскость. В табл. 3.22 приведены координаты исходных пунктов, длины сторон и их дирекционные углы, вычисленные по формулам:

$$\alpha_{ik} = \arctg \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}, \quad s_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} = (x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}. \quad (3.30)$$

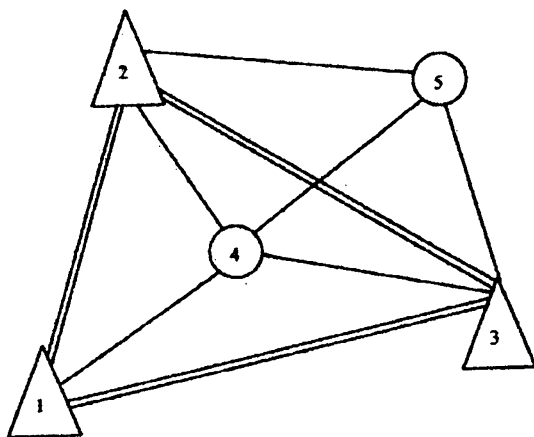


Рис. 3.14. Сеть триангуляции

Таблица 3.22

Пункт	Координаты		Длина сторон, м	Дирекцион- ные углы
	х, м	у, м		
1	5963124,81	8412617,83	14311,32/32	7° 28' 37,83"
2	5977314,44	8414480,18		
3	5966885,26	8427292,51	16520,40/40	129 08 43,57
1	5963124,81	8412617,83	15148,84/84	255 37 37,16

Контролем правильности вычислений служит равенство расстояний s_{ik} , полученных по двум формулам. Так как во вторую формулу s входит дирекционный угол α_{ik} , то равенство s является также контролем правильности определения α_{ik} .

В табл. 3.23 даны направления, приведенные к центрам знаков и на плоскость.

Таблица 3.23

Номер пункта	Направления	Направление на плоскости	Номер пункта	Направления	Направление на плоскости
1	1-2	0° 00' 00,00"	4	4-1	0° 00' 00,00
	1-4	37 11 06,71		4-2	109 41 57,13
	1-3	68 08 59,63		4-5	174 55 26,81
4-3				238 59 22,19	
2	2-5	0 00 00,00	5	5-3	0 00 00,00
	2-3	27 41 50,05		5-4	62 04 42,07
	2-4	52 54 47,75		5-2	123 56 24,01
	2-1	86 01 44,66			
3	3-1	0 00 00,00			
	3-4	28 01 30,27			
	3-2	53 31 06,58			
	3-5	81 52 51,91			

Таблица 3.24

Треугольник	Вершина	Измеренные углы	Предварительно уравненные углы	Стороны, м	Поправки v_i	Уравненные углы	Уравненные стороны
1	4	109° 41' 57,13"	56,88"	$q = 15200,946$ 14311,32	-0,03"	109° 41' 57,10" 33 06 56,27 37 11 06,63	$q = 15200,951$ 14311,32
	2	33 06 56,91	56,66	8304,76	-0,64		8304,74
	1	37 11 06,71	06,46	9187,35	-0,08		9187,35
	Σ	180 00 00,75	00,00		-0,75		180 00 00,00
2	5	61 51 41,94	42,15	$q = 10418,720$ 9187,35	+0,28	61 51 42,22 65 13 29,77 52 54 48,01	$q = 10418,715$ 9187,35
	4	65 13 29,68	29,89	9459,78	+0,09		9459,78
	2	52 54 47,75	47,96	8311,26	+0,26		8311,26
	Σ	179 59 59,37	00,00		+0,63		180 00 00,00
3	3	53 51 21,64	21,94	$q = 10292,100$ 8311,26	+0,51	53 51 22,15 62 04 42,04 64 03 55,81	$q = 10292,091$ 8311,26
	5	62 04 42,07	42,37	9093,99	-0,03		9093,98
	4	64 03 55,38	55,69	9255,63	+0,43		9255,62
	Σ	179 59 59,09	00,00		+0,91		180 00 00,00
4	2	27 41 50,05	50,25	$q = 19913,170$ 9255,63	-0,03	27 41 50,02 28 21 45,72 123 56 24,26	$q = 19913,163$ 9255,62
	3	28 21 45,33	45,53	9459,77	+0,39		9459,78
	5	123 56 24,01	24,22	16520,41	+0,25		16520,40
	Σ	179 59 59,39	00,00		+0,61		180 00 00,00
5	4	129 17 25,06	25,37	$q = 21345,670$ 16520,41	+0,52	129 17 25,58 25 29 36,43 25 12 57,99	$q = 21345,678$ 16520,40
	3	25 29 36,31	36,62	9187,36	+0,12		9187,35
	2	25 12 57,70	58,01	9093,98	+0,29		9093,98
	Σ	179 59 59,07	00,00		+0,93		180 00 00,00
6	1	30 57 52,92	52,59	$q = 17675,070$ 9093,98	-0,22	30 57 52,70 121 00 37,32 28 01 29,98	$q = 17675,061$ 9093,98
	4	121 00 37,81	37,48	15148,83	-0,49		15148,84
	3	28 01 30,27	29,93	8304,75	-0,29		8304,74
	Σ	180 00 01,00	00,00		-1,00		180 00 00,00

$$\Sigma \omega^2 = 4,02, \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma \omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{4,02}{18}} = 0,47''.$$

Предварительное и окончательное решение треугольников приведено в табл. 3.24. Предварительно уравненные углы определяют путем распределения невязок в треугольниках поворну. Значение

$$q = \frac{a}{\sin A},$$

где a — исходная сторона; A — противолежащий этой стороне угол. Стороны $b = q \sin B$, $c = q \sin C$. Графы 6–8 заполняют после решения нормальных уравнений в вычисления поправок v .

Приближенные координаты определяемых пунктов 4 и 5 вычисляют методом прямой засечки, используя формулы котангенсов углов:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{(x_A \operatorname{ctg} B + x_B \operatorname{ctg} A + y_B - y_A)}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}, \\ y_p &= \frac{(y_A \operatorname{ctg} B + y_B \operatorname{ctg} A + x_A - x_B)}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Вычисления по этим формулам целесообразно выполнять по следующей схеме:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_A & y_A \\ +1 & \operatorname{ctg} B \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x_B & y_B \\ -1 & \operatorname{ctg} A \end{array} \right| \\ \hline \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \\ \hline x_p \qquad y_p \end{array}$$

Числитель первой формулы (3.31) получают, складывая результаты решения определителей, а числитель второй формулы — путем суммирования произведений элементов верхней строки на находящиеся под ним элементы нижней.

Вычисления приближенных координат пунктов 4 и 5 приведены ниже. Для уменьшения количества значащих цифр при вычислениях первые одинаковые цифры в x и y исходных пунктов целесообразно отбросить.

Пункт 4

	$A=33^{\circ}06'56,66''$	$B=37^{\circ}11'06,46''$	
$x_2=77314,44$	$y_2=14480,18$	$x_1=63124,81$	$y_1=12617,83$
+1	$\operatorname{ctg} B=1,3181617$	-1	$\operatorname{ctg} A=1,5330762$
	$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2,8512379$		
	$x'_4 = 5969031,68$	$y'_4 = 8418455,47$	

	$A=30^{\circ}57'52,59''$		$B=28^{\circ}01'29,93''$
$x_1=63124,81$	$y_1=12617,83$	$x_3=66885,26$	$y_3=27292,51$
+1	$\text{ctg}B=1,8787499$	-1	$\text{ctg}A=1,6666105$
	$\text{ctg}A+\text{ctg}B=3,5453604$		
	$x'_4=5969031,65$		$y'_4=8418455,47$
	$x'_{4c}=5969031,66$		$y'_{4c}=8418455,47$

Пункт 5

	$A=27^{\circ}41'50,25''$		$B=28^{\circ}21'45,53''$
$x_2=77314,44$	$y_2=14480,18$	$x_3=66885,26$	$y_3=27292,51$
+1	$\text{ctg}B=1,8523466$	-1	$\text{ctg}A=1,9049381$
	$\text{ctg}A+\text{ctg}B=3,7572847$		
	$x'_5=5975436,86$		$y'_5=8423751,74$
	$A=52^{\circ}54'47,76''$		$B=65^{\circ}13'29,69''$
$x_2=77314,44$	$y_2=14480,18$	$x'_4=69031,66$	$y'_4=18455,47$
+1	$\text{ctg}B=0,4615373$	-1	$\text{ctg}A=0,7559301$
	$\text{ctg}A+\text{ctg}B=1,2174674$		
	$x'_5=5975436,84$		$y'_5=8423751,74$
	$x'_{5c}=5975436,85$		$y'_{5c}=8423751,74$

Вычисление дирекционных углов и всех сторон сети по координатам пунктов в виде хода, включающего все определяемые стороны сети, выполнено (табл. 3.25) по формулам (3.30). Вычисления нужно выполнить точно, т.е. дирекционные углы и длины сторон должны точно соответствовать координатам x и y . При нарушении этого соответствия свободные члены уравнений поправок будут иметь ошибки, что приведет к необходимости переуравнивания сети.

В табл. 3.26 приведены результаты вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений поправок направлений по формулам (3.17–3.20).

Таблица 3.25

№ пунк- та	x, м	y, м	$\Delta x =$ $= x_k - x_i$, м	$\Delta y =$ $= y_k - y_i$, м	$\alpha_{ik} =$ $= \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$s_{ik} = \Delta x \cos \alpha_{ik} +$ $+ \Delta y \sin \alpha_{ik}$, м	$s_{ik} =$ $= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, м
1	5963124,81	8412617,83	5906,85	5837,64	44°39'44,50"	8304,753	8304,753
4	5969031,66	8418455,47	-2146,40	8837,04	103 39 07,28	9093,971	9093,971
3	5966885,26	8427292,51	8551,59	-3540,77	337 30 29,12	9255,633	9255,633
5	5975436,85	8423751,74	1877,59	-9271,56	281 26 53,46	9459,766	9459,766
2	5977314,44	8414480,18	-8282,78	3975,29	154 21 41,37	9187,349	9187,349
4	5969031,66	8418455,47	6405,19	-5296,27	39 35 10,97	8311,254	8311,254
5	5975436,85	8423751,74					

Таблица 3.26

№ пункта	№ направления ik	Направление на плоскости N'_{ik}	Дирекционные углы α_{ik}	Значение ориентирующего угла z_{ik}, z_i	Приближенные направления $R_{ik} = \sqrt{N'_{ik} + z_i}$	Свободные члены l_{ik}	Длины сторон, м	Координаты	
								a	b
1	1-2	0°00'00,00"	7°28'37,83"	7°28'37,83"	7°28'37,72"	+0,11	14,311	-0,188	+1,429
	1-4	37 11 06,71	44 39 44,50	7 28 37,79	7 28 37,52	+0,07	8,305	-1,746	+1,767
	1-3	68 08 59,63	75 37 37,16	7 28 37,52	75 37 37,35	-0,19	15,149	-1,319	+0,338
2	2-5	0 00 00,00	101 26 53,46	101 26 53,46	101 26 53,44	+0,02	9,460	-2,137	-0,433
	2-3	27 41 50,05	129 08 43,57	101 26 53,52	129 08 43,49	+0,08	16,520	-0,968	-0,788
	2-4	52 54 47,75	154 21 41,37	101 26 53,62	154 21 41,19	+0,18	9,187	-0,971	-2,024
	2-1	96 01 44,66	187 28 37,83	101 26 53,17	187 28 38,10	-0,27	14,311	+0,188	-1,429
					101 26 53,44	+0,01			
3	3-1	0 00 00,00	255 37 37,16	255 37 37,16	255 37 37,09	+0,07	15,149	+1,319	-0,338
	3-4	28 01 30,27	283 39 07,28	255 37 37,01	283 39 07,36	-0,08	9,094	+2,204	+0,535
	3-2	53 31 06,58	309 08 43,57	255 37 36,99	309 08 43,67	-0,10	16,520	+0,968	+0,788
	3-5	81 52 51,91	337 30 29,12	255 37 37,21	337 30 29,00	+0,12	9,256	+0,852	+2,059
					255 37 37,09	+0,01			
4	4-1	0 00 00,00	224 39 44,50	224 39 44,50	224 39 44,50	0,00	8,305	+1,746	-1,767
	4-2	109 41 57,13	334 21 41,37	224 39 44,24	334 21 41,63	-0,26	9,187	+0,971	+2,024
	4-5	174 55 26,81	39 35 10,97	224 39 44,16	39 35 11,31	-0,34	8,311	-1,582	+1,913
	4-3	238 59 22,19	103 39 07,28	224 39 45,09	103 39 06,69	+0,59	9,094	-2,204	-0,535
				224 39 44,50	+0,01				
5	5-3	0 00 00,00	157 30 29,12	157 30 29,12	157 30 29,16	-0,04	9,256	-0,852	-2,059
	5-4	62 04 42,07	219 35 10,97	157 30 28,90	219 35 11,23	-0,26	8,311	+1,582	-1,913
	5-2	123 56 24,01	281 26 53,46	157 30 29,45	281 26 53,17	+0,29	9,460	+2,137	+0,433
				157 30 29,16	-0,01				

Таблица 3.27

№ пункта	№ направления ik	Коэффициенты при поправках в ориентирующие углы				Коэффициенты при поправках в приближенные координаты				Свободные члены l_a	Сумма S	Вес p	Поправки U из уравнения
		$\delta\alpha_1$	δ_1	$\delta\alpha_3$	$\delta\alpha_4$	$\delta\alpha_5$	ξ_4	η_4	ξ_5				
1	1-2	-1									-0,890	1	+0,13
	1-4	-1				-1,746	+1,767				-0,909	1	+0,05
	1-3	-1				-1,746	+1,767				-1,190	1	-0,17
	Σ	-3									-2,989	-1/3	$z_1 = -0,02$
2	2-5		-1					-2,137	-0,433		-3,550	1	+0,04
	2-3		-1								-0,920	1	+0,01
	2-4		-1			-0,971	-2,024				-3,815	1	+0,30
	2-1		-1			-0,971	-2,024	-2,137	-0,433		-1,270	1	-0,34
Σ		-4								-9,555	-1/4	$z_2 = +0,07$	
3	3-1			-1							-0,930	1	+0,06
	3-4			-1		+2,204	+0,535				+1,659	1	-0,23
	3-2			-1				+0,852	+2,059		-1,100	1	-0,11
	3-5			-1							+2,031	1	+0,28
Σ			-4							+1,660	-1/4	$z_3 = +0,01$	
4	4-1				-1	-1,746	+1,767				-0,979	1	-0,13
	4-2				-1	-0,971	-2,024				-4,255	1	-0,16
	4-5				-1	+1,582	-1,913	-1,582	+1,913		-1,340	1	-0,07
	4-3				-1	+2,204	+0,535				+2,329	1	+0,36
Σ				-4						-4,225	-1/4	$z_4 = +0,09$	
5	5-3							+0,852	+2,059	-0,04	+1,871	1	-0,07
	5-4				-1	+1,582	-1,913	-1,582	+1,913	-0,26	-1,260	1	-0,10
	5-2				-1			-2,137	-0,433	+0,29	-3,280	1	+0,18
	Σ				-3						-2,669	-1/3	$z_5 = +0,20$
													$[pvv] = 0,63$

Используя формулы (3.19)–(3.21) и учитывая, что если направление измерено с исходного пункта i на определяемый k , то

$$v_{ik} = -\delta z_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}; \quad (3.32)$$

если с определяемого пункта i на исходный k , то

$$v_{ik} = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + l_{ik}; \quad (3.33)$$

если с исходного пункта i на исходный пункт k , то

$$v_{ik} = -\delta z_i + l_{ik}, \quad (3.34)$$

составляют уравнения поправок для всех измеренных направлений и вычисляют свободные члены этих направлений (табл. 3.27).

Следует отметить, что ошибки, допущенные при составлении уравнений поправок, обнаруживаются только при окончательном вычислении триангуляции, поэтому определение коэффициентов a_{ik} , b_{ik} и свободных членов l_{ik} должно выполняться тщательно и с контролем. Контрольные вычисления коэффициентов a_{ik} , b_{ik} можно выполнить, используя формулы

$$a_{ik} = -20,6265 \frac{y_k - y_i}{s_{ik}^2}; \quad b_{ik} = 20,6265 \frac{x_k - x_i}{s_{ik}^2}. \quad (3.35)$$

Контролем вычисления l_{ik} является $\sum l_{ik} = 0$ на каждом пункте.

Коэффициенты нормальных уравнений (табл. 3.28) определяют, используя коэффициенты при поправках ξ_i , η_i (см. табл. 3.27) с учетом весов p для всех строк, включая строки сумм, для которых веса $p = -1/n$, где n — сумма коэффициентов в ориентирующие углы, т.е. произведения в строках направлений умножают на $p = 1$, а в строках сумм — на величину $p = -1/n$.

Таблица 3.28

	a_4	b_4	a_5	b_5	L	s'	f_s	f_a	$s = s' + f_s + f_a$	Контроль
$[a_4]$	19,117	-4,246	-4,059	2,436	0,124	13,372	-0,771	+1,581	14,182	14,182
$[b_4]$		18,305	2,383	-4,775	1,714	13,380	-0,637	-1,913	10,830	10,831
$[a_5]$			10,902	2,775	0,353	12,353	0,771	-1,581	11,543	11,544
$[b_5]$				9,977	-1,114	9,298	0,637	1,913	11,848	11,849
$[L]$					0,885				1,981	1,962

Составление функций уравненных элементов сети

Для оценки точности определения элементов в уравненной сети, обычно в наиболее слабом месте сети, этот элемент представляют как функцию координат определяемых пунктов и вычисляют обратный вес этой функции.

В сети на рис. 3.14 наиболее слабой является сторона 4.5, требуется определить средние квадратические ошибки длины и дирекционного угла стороны s_{45} . Связь между координатами пунктов и стороной s_{45} можно выразить известной формулой

$$s_{45}^2 = (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 .$$

Дифференцируя это выражение по координатам определяемых пунктов, после перехода к конечным приращениям имеем

$$f_{s_{45}} = \Delta s_{45} = -\frac{x_5 - x_4}{s_{45}} dx_4 - \frac{y_5 - y_4}{s_{45}} dy_4 + \frac{x_5 - x_4}{s_{45}} dx_5 + \frac{y_5 - y_4}{s_{45}} dy_5 ,$$

или

$$f_s = \Delta s_{45} = -c_{45} \xi_4 - d_{45} \eta_4 + c_{45} \xi_5 + d_{45} \eta_5 .$$

где ξ, η — поправки в координаты в дециметрах, коэффициенты

$$c_{45} = \cos \alpha_{45}^0 = \frac{x_5^0 - x_4^0}{s_{45}^0} , \quad d_{45} = \sin \alpha_{45}^0 = \frac{y_5^0 - y_4^0}{s_{45}^0} . \quad (3.36)$$

Весовая функция для дирекционного угла стороны 4.5 соответствует уравнению поправок этого направления без поправки ориентирования δz и свободного члена l :

$$f_\alpha = \Delta \alpha_{45} = -a_{45} \xi_4 - b_{45} \eta_4 + a_{45} \xi_5 + b_{45} \eta_5 ,$$

где

$$a_{45} = -20,6265 \frac{\sin \alpha_{45}^0}{s_{45}^0} ; \quad b_{45} = 20,6365 \frac{\cos \alpha_{45}^0}{s_{45}^0} . \quad (3.37)$$

и s_{45} — в км.

Таблица 3.29

№ ПУН- КТОВ	x, м	y, м	$\Delta x = x_5 - x_4$, м	$\Delta y = y_5 - y_4$, м	$\alpha_{45}, \beta_{45}, \text{ км}$	$c_{45} = \cos \alpha_{45}$; $d_{45} = \sin \alpha_{45}$	$a_{45} = -20,6265 \sin \alpha_{45}/s$; $b_{45} = 20,6265 \cos \alpha_{45}/s$, км
4	5969031,66	8418455,48				0,7707	-1,5814
5	5975436,86	8423751,74	6405,20	5296,26	$39^{\circ}35'10,62''$ 8,31125 8,31125	0,6372	1,9126

Контроль:

$$\sin^2 \alpha_{45} + \cos^2 \alpha_{45} = 1,0000$$

Коэффициенты для f_S и f_α вычислены в табл. 3.29 с использованием формул (3.30), (3.36), (3.37).

Линейный вид весовых функций:

$$\begin{aligned} f_S &= -0,771\xi_4 - 0,637\eta_4 + 0,771\xi_5 + 0,637\eta_5; \\ f_\alpha &= +1,581\xi_4 - 1,913\eta_4 - 1,581\xi_5 + 1,913\eta_5. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Если нужно найти обратный вес длины и дирекционного угла стороны, пересекающей ряд треугольников сети, поступают так же, как и в рассматриваемом случае, не обращая внимания на отсутствие прямой связи между конечными пунктами этой стороны.

В графе f_S (см. табл. 3.28) записывают коэффициенты $-c_{45}$, $-d_{45}$ в строках с коэффициентами при поправках ξ_4 , η_4 , а c_{45} , d_{45} — в строках ξ_5 , η_5 .

В графе f_α записывают $-a_{45}$, $-b_{45}$ в строках ξ_4 , η_4 , а a_{45} , b_{45} — в строках ξ_5 , η_5 .

В табл. 3.30 приведено решение системы нормальных уравнений по сокращенной схеме Гаусса.

Таблица 3.30

ξ_4	η_4	ξ_5	η_5	L	f_S	f_α	s	Контроль
19,117	-4,246	-4,059	2,436	0,124	-0,771	1,581	14,182	
-1	0,2221	0,2123	-0,1274	-0,0065	0,0403	-0,0827	-0,7419	-0,7419
	18,305	2,383	-4,775	1,714	-0,637	-1,913	10,830	
	17,362	1,481	-4,234	1,742	-0,808	-1,562	13,980	13,981
	-1	-0,0853	0,2439	-0,1003	0,0465	0,0900	-0,8052	-0,8052
		10,902	2,775	0,353	0,771	-1,581	11,543	
		9,914	3,653	0,231	0,676	-1,112	13,361	13,362
		-1	-0,3685	-0,0233	-0,0682	0,1122	-1,3477	-1,3478
			9,977	-1,114	0,637	1,913	11,848	
			7,288	-0,790	0,289	1,740	8,527	8,527
			-1	0,1084	-0,0397	-0,2387	-1,1700	-1,1700
				0,885			1,981	
			[p_{vv}] =	0,618	0,102	0,361	1,100	1,081
			Поправки координат, дециметры	-1/ P_f =	-0,1262	-0,8114		
-0,0489	-0,0685	-0,0632	0,1084					

Полученные поправки координат умножают (см. табл. 3.27) на соответствующие коэффициенты и вычисляют сначала значения δz_i , умножая поправки ξ_i , η_i на суммарные значения коэффициентов в строках сумм, результат делят на n , формула (3.27), а затем определяют поправки v_{ik} из уравнения (3.19). Контролем правильности определения v является $\sum v = 0$ для каждого пункта.

Поправки, равные разностям поправок направлений, вводят в измеренные углы (см. табл. 3.24), находят их уравненные значения и окончательно решают треугольники. Контролем вычислений является равенство суммы уравненных углов треугольника 180° и сходимость одних и тех же сторон, полученных из решения разных треугольников.

В табл. 3.31 приводят координаты исходных пунктов и вычисляют окончательные координаты определяемых пунктов путем введения полученных в табл. 3.30 поправок в координаты (с учетом перехода от дециметров к метрам).

Таблица 3.31

№ пунктов	Приближенные, м		Поправки, м		Окончательные, м	
	x'	y'	δx	δy	x	y
1					5963124,81	8412617,83
2					5977314,44	8414480,18
3					5966885,26	8427292,51
4	5969031,66	8418455,47	0,00	-0,01	5969031,66	8418455,46
5	5975436,85	8423751,74	-0,01	0,01	5975436,84	8423751,75

Для контроля координаты определяемых пунктов вычисляют второй раз, используя уравненные значения углов и сторон (табл. 3.32).

Сходимость полученных разными способами значений координат одних и тех же точек является заключительным контролем уравнительных вычислений.

Таблица 3.32

№ пун-ктов	Уравнен-ные углы хода	Дирекцион-ные углы α	Уравнен-ные сто-роны, м	$\Delta x = s \cos \alpha$	$\Delta y = s \sin \alpha$	x, м	y, м
1							
2	86°01'44,28"	7°28'37,83"				5977314,44	8414480,18
5	61 51 42,22	101 26 53,55	9459,78	-1877,60	9271,57	5975436,84	8423751,75
4	174 55 26,87	219 35 11,33	8311,26	-6405,19	-5296,29	5969031,65	8418455,46
1	37 11 06,63	224 39 44,46	8304,74	-5906,84	-5837,63	5963124,81	8412617,83
2		7 28 37,83					
Σ	360 00 00,00						

Оценка точности уравненных элементов сети

Средняя квадратическая ошибка любого элемента уравненной сети

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \quad (3.39)$$

где $\frac{1}{P_F}$ — обратный вес уравненного элемента; μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса;

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}, \quad (3.40)$$

где v — поправки из уравнивания в измеренные с весом p направления; r — число избыточных измерений, вычисляемое по формуле

$$r = D - (2k + t), \quad (3.41)$$

в которой D — число всех измеренных направлений (в сети на рис. 3.14 $D = 18$); k — число определяемых пунктов ($k=2$); t — количество поправок δz_i , равное числу пунктов, с которых велись наблюдения ($t=5$). Следовательно, для рассматриваемой сети $r = 18 - (2 \cdot 2 + 5) = 9$,

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \sqrt{\frac{0,63}{9}} = 0,26''.$$

Средняя квадратическая ошибка уравненного угла

$$m_{y_2} = \mu \sqrt{2} = 0,26'' \sqrt{2} = 0,37''.$$

Значения m_{y_2} , вычисленные по значениям v в табл. 3.24:

$$m_{y_2} = \sqrt{\frac{[vv]}{n}} = \sqrt{\frac{1,974}{18}} = 0,33'' ,$$

т.е. значения m_{y_2} хорошо согласуются между собой.

Обратный вес $1/P_F$ оцениваемой функции F можно получить при решении системы нормальных уравнений по схеме Гаусса. Вес P_{y_k} последнего неизвестного η_k равен коэффициенту при η_k в последнем преобразованном нормальном уравнении. В табл. 3.30 на последнем и предпоследнем местах стоят поправки координат пункта 5, поэтому $P_{y_5} = 7,288$. Согласно формуле (3.29)

$$P_{y_5} = P_{y_5} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}} = 7,288 \frac{9,914}{7,288 + \frac{3,653^2}{9,914}} = 8,368 .$$

Средние квадратические ошибки определения абсцисс и ординат пункта 5

$$m_{x_5} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{x_5}}} = \frac{0,26''}{\sqrt{8,368}} = 0,090 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{y_5} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{y_5}}} = \frac{0,26''}{\sqrt{7,288}} = 0,096 \text{ дм} = 0,01 \text{ м}.$$

Общая ошибка положения пункта

$$M_5 = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{0,0002} = 0,014 \text{ м} = 0,01 \text{ м}.$$

В табл. 3.30 вычислены обратные веса длины и дирекционного угла стороны 4.5: $1/P_{\alpha_{45}} = 0,126$ и $1/P_{s_{45}} = 0,811$. С учетом этих значений получим:

$$m_{S_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{S_{45}}}} = 0,26 \sqrt{0,126} = 0,092 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{\alpha_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{45}}}} = 0,26 \sqrt{0,811} = 0,23''.$$

Кроме того, вес и средние квадратические ошибки любого уравненного элемента сети можно определить путем вычисления матрицы весовых коэффициентов

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \dots & Q_{mm} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Значение

$$Q_{ij} = \frac{A_{ij}}{D}, \quad (3.43)$$

где D — определитель, составленный из коэффициентов нормальных уравнений; A_{ij} — алгебраическое дополнение (адьюнкта), получаемая из определителя D путем зачеркивания строки i и столбца j . Знак A_{ij} определяется выражением $(-1)^{i+j}$.

По данным табл. 3.28 имеем

$$D = \begin{vmatrix} [a_4 a_4] & [a_4 b_4] & [a_4 a_5] & [a_4 b_5] \\ [a_4 b_4] & [b_4 b_4] & [b_4 a_5] & [b_4 b_5] \\ [a_4 a_5] & [b_4 a_5] & [a_5 a_5] & [a_5 b_5] \\ [a_4 b_5] & [b_4 b_5] & [a_5 b_5] & [b_5 b_5] \end{vmatrix} =$$

$$= [a_4 a_4] A_{11} + [a_4 b_4] A_{12} + [a_4 a_5] A_{13} + [a_4 b_5] A_{14},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} [b_4 b_4] & [b_4 a_5] & [b_4 b_5] \\ [b_4 a_5] & [a_5 a_5] & [a_5 b_5] \\ [b_4 b_5] & [b_5 a_5] & [b_5 b_5] \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} [a_4 b_4] & [b_4 a_5] & [b_4 b_5] \\ [a_4 a_5] & [a_5 a_5] & [a_5 b_5] \\ [a_4 b_5] & [a_5 b_5] & [b_5 b_5] \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} [a_4 b_4] & [b_4 b_4] & [b_4 b_5] \\ [a_4 a_5] & [b_4 a_5] & [a_5 b_5] \\ [a_4 b_5] & [b_4 b_5] & [b_5 b_5] \end{vmatrix};$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} [a_4 b_4] & [b_4 b_4] & [b_4 a_5] \\ [a_4 a_5] & [b_4 a_5] & [a_5 a_5] \\ [a_4 b_5] & [b_4 b_5] & [a_5 b_5] \end{vmatrix}.$$

Подставляя из табл. 3.28 численные значения, находим

$$D = \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & -4,059 & 2,436 \\ -4,246 & 18,305 & 2,383 & -4,775 \\ -4,059 & 2,383 & 10,902 & 2,775 \\ 2,436 & -4,775 & 2,775 & 9,977 \end{vmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 18,305 & 2,383 & -4,775 \\ 2,383 & 10,902 & 2,775 \\ -4,775 & 2,775 & 9,977 \end{vmatrix} = 1481;$$

$$A_{12} = A_{21} = - \begin{vmatrix} -4,246 & 2,383 & -4,775 \\ -4,059 & 10,902 & 2,775 \\ 2,436 & 2,775 & 9,977 \end{vmatrix} = 135,9;$$

$$A_{13} = A_{31} = \begin{vmatrix} -4,246 & 18,305 & -4,775 \\ -4,059 & 2,383 & 2,775 \\ 2,436 & -4,775 & 9,977 \end{vmatrix} = 642,99;$$

$$A_{14} = A_{41} = - \begin{vmatrix} -4,246 & 18,305 & 2,383 \\ -4,059 & 2,383 & 10,902 \\ 2,436 & -4,775 & 2,775 \end{vmatrix} = -475,5544;$$

$$D = 9,117 \cdot 1481 + (-4,246) \cdot 135,9 + (-4,059) \cdot 642,99 + 2,436 \cdot (-475,5544) = 9162,97.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 9,117 & -4,059 & 2,436 \\ -4,059 & 10,902 & 2,775 \\ 2,436 & 2,775 & 9,977 \end{vmatrix} = 637,4964;$$

$$A_{23} = A_{32} = - \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & 2,436 \\ -4,059 & 2,383 & 2,775 \\ 2,436 & -4,775 & 9,977 \end{vmatrix} = -169,986;$$

$$A_{24} = A_{42} = \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & -4,059 \\ -4,059 & 2,383 & 10,902 \\ 2,436 & -4,775 & 2,775 \end{vmatrix} = 319,1973;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & 2,436 \\ -4,246 & 18,305 & -4,775 \\ 2,436 & -4,775 & 9,977 \end{vmatrix} = 1267,4391;$$

$$A_{34} = A_{43} = - \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & -4,059 \\ -4,246 & 18,305 & 2,383 \\ 2,436 & -4,775 & 2,775 \end{vmatrix} = -590,8742;$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 9,117 & -4,246 & -4,059 \\ -4,246 & 18,305 & 2,383 \\ -4,059 & 2,383 & 10,902 \end{vmatrix} = 1351,6352.$$

Контролем правильности выполненных вычислений может служить свойство определителей: сумма произведений всех элементов a_{ik} какой-либо (i -й) строки определителя на адъюнкты A_{ik} соответствующих элементов другой (j -й) строки равна нулю.

Согласно этому свойству

$$[a_4 a_4] \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{pmatrix} + [a_4 b_4] \begin{pmatrix} A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{pmatrix} + [a_4 a_5] \begin{pmatrix} A_{23} \\ A_{33} \\ A_{34} \end{pmatrix} + [a_4 b_5] \begin{pmatrix} A_{24} \\ A_{34} \\ A_{44} \end{pmatrix} = 0;$$

$$[a_4 b_4] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{pmatrix} + [b_4 b_4] \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{pmatrix} + [b_4 a_5] \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{33} \\ A_{43} \end{pmatrix} + [b_4 b_5] \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{34} \\ A_{44} \end{pmatrix} = 0; \quad (3.44)$$

$$[a_4 a_5] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{41} \end{pmatrix} + [b_4 a_5] \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{42} \end{pmatrix} + [a_5 a_3] \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{43} \end{pmatrix} + [a_5 b_5] \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{44} \end{pmatrix} = 0;$$

$$[a_4 b_5] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} + [b_4 b_5] \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} + [a_5 b_5] \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} + [b_5 b_5] \begin{pmatrix} A_{14} \\ A_{24} \\ A_{34} \end{pmatrix} = 0.$$

Подставляя численные значения в первую формулу, находим

$$9,117 \begin{pmatrix} 135,9298 \\ 642,9905 \\ -475,5544 \end{pmatrix} - 4,246 \begin{pmatrix} 637,4964 \\ -169,9860 \\ 319,1973 \end{pmatrix} - 4,059 \begin{pmatrix} -169,9860 \\ 1267,4391 \\ -590,8742 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2,436 \begin{pmatrix} 319,1973 \\ -590,8742 \\ 1351,6352 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,88 \cdot 10^{-5} \\ 8,70 \cdot 10^{-5} \\ 2,97 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Подставляя численные значения в первую строку второй формулы, имеем

$$-4,246 \cdot 1481,6801 + 18,305 \cdot 135,9298 + 2,383 \cdot 642,9905 -$$

$$-4,775 \cdot (-475,5544) = 9,4 \cdot 10^{-5}$$

Следовательно, все алгебраические дополнения (адьюнкты) вычислены с достаточной точностью.

Подставляя в формулу (3.43) соответствующие значения A_{ij} и D , находим матрицу весовых коэффициентов

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} = 0,1617 & Q_{12} = 0,0148 & Q_{13} = 0,0702 & Q_{14} = -0,0519 \\ Q_{21} = 0,0148 & Q_{22} = 0,0696 & Q_{23} = -0,0186 & Q_{24} = 0,0348 \\ Q_{31} = 0,0702 & Q_{32} = -0,0186 & Q_{33} = 0,1383 & Q_{34} = -0,0645 \\ Q_{41} = -0,0519 & Q_{42} = 0,0348 & Q_{43} = -0,0645 & Q_{44} = 0,1475 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Средние квадратические ошибки определения уравненных координат

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_4}}} = \mu \sqrt{Q_{11}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,1617} = 0,105 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{y_4} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_4}}} = \mu \sqrt{Q_{22}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,0696} = 0,069 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{x_5} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_5}}} = \mu \sqrt{Q_{33}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,1383} = 0,097 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{y_5} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_5}}} = \mu \sqrt{Q_{44}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,1475} = 0,100 \text{ дм} = 0,01 \text{ м}.$$

Значения m_{x_5} , m_{y_5} практически совпадают с полученными из решения нормальных уравнений.

Для определения веса функции уравненных неизвестных можно воспользоваться известной формулой [1, 6, 8]

$$\frac{1}{P_F} = \sum f_i^2 Q_{ij} + 2 \sum f_i f_j Q_{ij}. \quad (3.46)$$

Для определения средних квадратических ошибок длины и дирекционного угла стороны s_{45} используем весовые функции (3.38), формулу (3.46) и матрицу весовых коэффициентов (3.45):

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{S_{45}}} &= (-0,771)^2 \cdot 0,1617 + (-0,637)^2 \cdot 0,0696 + 0,771^2 \cdot 0,1383 + \\ &+ 0,637^2 \cdot 0,1475 + 2[(-0,771) \cdot (-0,637) \cdot 0,0148 + (-0,771 \cdot 0,771) \times \\ &\times 0,0702 + (0,771 \cdot 0,637) \cdot (-0,0519) + (-0,637 \cdot 0,771) \cdot (-0,0186) \times \\ &\times (-0,637 \cdot 0,637) \cdot 0,0348 + (0,771 \cdot 0,637) \cdot (-0,0645)] = 0,175; \\ \frac{1}{P_{\alpha_{45}}} &= 1,581^2 \cdot 0,1617 + (-1,913)^2 \cdot 0,0696 + (-1,581)^2 \cdot 0,1383 + \end{aligned}$$

$$+1,913^2 \cdot 0,1475 + 2[1,581 \cdot (-1,913) \cdot 0,0148 + 1,581 \cdot (-1,581) \cdot 0,0702 + \\ + 1,581 \cdot 1,913 \cdot (-0,0519) + (-1,913) \cdot (-1,581) \cdot (-0,0186) + (-1,913) \times \\ \times (1,913) \cdot 0,0348 + (-1,581) \cdot 1,913 \cdot (-0,0645)] = 0,813.$$

Средние квадратические ошибки:

$$m_{S_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{S_{45}}}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,175} = 0,109 \text{ дм} = 0,01 \text{ м};$$

$$m_{\alpha_{45}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{45}}}} = 0,26 \cdot \sqrt{0,813} = 0,23''.$$

Полученные значения практически совпадают с вычисленными другим независимым способом (из решения системы нормальных уравнений).

3.2.7. Параметрические уравнения поправок при уравнивании углов

Любой угол β геодезической сети можно получить как разность дирекционных углов, т.е. $\beta = \alpha_{im} - \alpha_{ik}$. Изменение дирекционных углов на величины $\Delta\alpha_{im}$ и $\Delta\alpha_{ik}$ приводит к изменению угла β на величину v_β :

$$v_\beta = \alpha'_{im} + \Delta\alpha_{im} - \alpha'_{ik} - \Delta\alpha_{ik} - \beta = \Delta\alpha_{im} - \Delta\alpha_{ik} + l_\beta,$$

где $l_\beta = \alpha'_{im} - \alpha'_{ik} - \beta$; α'_{im} , α'_{ik} — приближенные значения дирекционных углов; β — измеренное значение угла на пункте k .

Подставляя вместо $\Delta\alpha_{im}$ и $\Delta\alpha_{ik}$ их значения из (3.18) с учетом принятых ранее обозначений, получим уравнение поправок

$$v_\beta = -(a_{im} - a_{ik})\xi_i - (b_{im} - b_{ik})\eta_i + a_{im}\xi_m + b_{im}\eta_m - a_{ik}\xi_k - b_{ik}\eta_k + l_\beta \quad (3.47)$$

Уравнение поправок упрощается, если один или два из пунктов являются исходными, так как поправки ξ и η для исходных пунктов равны нулю.

Получив уравнения поправок для каждого пункта, составляют и решают нормальные уравнения, находят уравненные значения элементов сети,

выполняют контроль вычислений и оценку точности. Уравнивание сетей по углам позволяет уменьшить объем и сложность вычислений, поэтому часто используют этот способ даже на пунктах с измеренными направлениями. Отступление от строгого уравнивания приводит к небольшому снижению точности определения элементов сети, которым часто можно пренебречь.

3.2.8. Пример уравнивания сети триангуляции параметрическим способом по углам

Схема сети изображена на рис. 3.15. Исходные данные приведены в табл. 3.1, результаты измерения углов — табл. 3.3. *Вычисление предварительных координат определяемых пунктов* целесообразно выполнять по формулам Юнга (3.31) в приведенной после этих формул ведомости. Для удобства вычислений первые две цифры в координатах x и y нужно опускать.

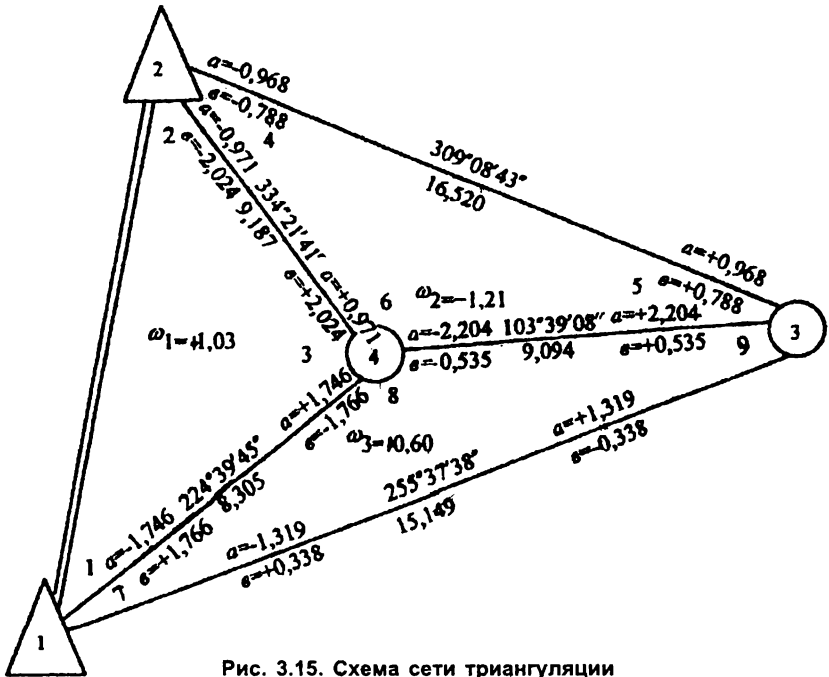


Рис. 3.15. Схема сети триангуляции

$$A = 2 + 4 = 58^{\circ}19'54,61''$$

$$B = 1 + 7 = 68^{\circ}08'59,63''$$

$$x_A = x_2 = 77314,44 \quad y_A = y_2 = 14480,18 \quad x_B = x_1 = 63124,81 \quad y_B = y_2 = 12617,83$$

$$+1 \quad \text{ctg}B = \text{ctg}(1+7) = 0,4009861 \quad -1 \quad \text{ctg}A = \text{ctg}(2+4) = 0,6168452$$

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B = 1,0178314$$

$$x_3 = \underline{66885,24}$$

$$y_3 = \underline{27292,56}$$

$$A = 2 = 33^{\circ}06'57,19''$$

$$B = 1 = 37^{\circ}11'06,71''$$

$$x_A = x_2 = 77314,44 \quad y_A = y_2 = 14480,18 \quad x_B = x_1 = 63124,81 \quad y_B = y_1 = 12617,83$$

$$+1 \quad \text{ctg}B = 1,3181584 \quad -1 \quad \text{ctg}A = 1,5330676$$

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B = 2,8512260$$

$$x_4 = \underline{69031,68}$$

$$y_4 = \underline{18455,50}$$

Для контроля вычислим координаты точки 4 по координатам пунктов 1 и 3 и углам 7 и 9.

$$A = 7 = 30^{\circ}57'52,92''$$

$$B = 1 = 28^{\circ}01'30,27''$$

$$x_A = x_1 = 63124,81 \quad y_A = y_1 = 12617,83 \quad x_B = x_3 = 66885,24 \quad y_B = y_3 = 27292,56$$

$$+1' \quad \text{ctg}B = 1,8787425 \quad -1 \quad \text{ctg}A = 1,6666045$$

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B = 3,5453469$$

$$x_4 = \underline{69031,68}$$

$$y_4 = \underline{18455,49}$$

Вычисление предварительных дирекционных углов выполняют по формуле

$$\alpha_{ik} = \arctg \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для контроля определяют

$$\alpha_{ik} + 45^{\circ} = \arctg \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$$

Вычисления, выполненные на микрокалькуляторе, приведены в табл. 3.33.

Вычисление свободных членов уравнений поправок приведено в табл. 3.34, $l_B = \beta_{\text{выч}} - \beta_{\text{изм}}$, где $\beta_{\text{выч}} = \alpha_{\text{ит}} - \alpha_{ik}$. Правильность вычисления свободных членов в каждом треугольнике контролируется по формуле $[l] = -\omega_1$.

Таблица 3.33

Направления <i>i-k</i>	$\Delta y_{ik} = y_k - y_i$	$\Delta x_{ik} = x_k - x_i$	α_{ik}	$\alpha_{ik} + 45^\circ$
4-1	-5837,67	-5906,87	224° 39' 44,68"	269° 39' 44,68"
4-2	-3975,32	8282,76	334 21 40,57	19 21 40,57
4-3	8837,06	-2146,44	103 39 08,05	148 39 08,05
1-3	14674,73	3760,43	75 37 37,60	120 37 37,60
2-3	12812,38	-10429,20	129 08 43,37	174 08 43,37

Таблица 3.34

№ тре- уголь- ника	№ угла	Вычислен- ные углы $\beta_{выч}$	Измеренные углы $\beta_{изм}$	<i>l</i>	<i>v</i>	Уравненные углы
1	1	37° 11' 06,87"	37° 11' 06,71"	+0,16"	-0,29"	37° 11' 06,42"
	2	33 06 57,24	33 06 57,19	+0,05	-0,59	33 06 56,60
	3	109 41 55,89	109 41 57,13	-1,24	-0,15	109 41 56,98
		180 00 00,00	180 00 01,03	-1,03	-1,03	180 00 00,00
2	4	25 12 57,20	25 12 57,42	-0,22	+0,54	25 12 57,96
	5	25 29 35,32	25 29 36,31	-0,99	+0,09	25 29 36,40
	6	129 17 27,48	129 17 25,06	+2,42	+0,58	129 17 25,64
		180 00 00,00	170 59 58,79	+1,21	+1,21	180 00 00,00
3	7	30 57 52,92	30 57 52,92	0,00	-0,47	30 57 52,45
	8	121 00 36,63	121 00 37,41	-0,78	-0,03	121 00 37,38
	9	28 01 30,45	28 01 30,27	+0,18	-0,10	28 01 30,17
		180 00 00,00	180 00 00,60	-0,60	-0,60	180 00 00,00

Вычисление коэффициентов уравнений поправок в углы удобно выполнять, используя схему сети (рис. 3.15), на которой нумеруют углы, выписывают дирекционные углы и длины (в км) сторон. Значения a_{ik} , b_{ik} , вычисленные по формулам (3.20), выписывают вблизи определяемых пунктов. Затем по формуле (3.47) составляют табл. 3.35 коэффициентов уравнений поправки.

Используя формулу (3.20)

$$a_{ik} = -20,6265 \frac{\sin a_{ik}^0}{s_{ik}}, \quad b_{ik} = 20,6265 \frac{\cos a_{ik}^0}{s_{ik}},$$

для направления 4-1 имеем коэффициенты

$$a_{41} = -20,6265 \frac{\sin 224^{\circ} 39' 45''}{8,305} = 1,746,$$

$$b_{41} = 20,6265 \frac{\cos 224^{\circ} 39' 45''}{8,305} = -1,766.$$

Так как $a_{ik} = -a_{ki}$, $b_{ik} = -b_{ki}$, то $a_{14} = -1,746$, $b_{14} = 1,766$.

Аналогичным способом определяют коэффициенты a_{ki} , b_{ik} для других направлений.

Вычисление коэффициентов нормальных уравнений выполнено в табл. 3.36 путем перемножения элементов одного столбца (табл. 3.35) на соответствующие элементы другого и их суммирования. Контроль вычислений — по методу сумм. В табл. 3.36 включена весовая функция для оценки точности наиболее слабой стороны S_{34}

$$f_{S_{34}} = \Delta s_{34} = -c_{34}\xi_3 - d_{34}\eta_3 + c_{34}\xi_4 + d_{34}\eta_4, \quad (3.48)$$

где $c_{34} = \cos \alpha_{34}^0 = \frac{x_4^0 - x_3^0}{s_{34}^0}$; $d_{34} = \sin \alpha_{34}^0 = \frac{y_4^0 - y_3^0}{s_{34}^0}$; ξ , η — поправки в координаты x и y .

Таблица 3.35

	ξ_2	η_2	ξ_3	η_3	l	s	v
1	-1,746	+1,766			+0,16	+0,180	-0,29
2	+0,971	+2,024			+0,05	+3,045	-0,59
3	+0,775	-3,790			-1,24	-4,255	-0,15
	0,000	0,000					
4	-0,971	-2,024	+0,968	+0,788	-0,22	-1,459	+0,54
5	-2,204	-0,535	+1,236	-0,253	-0,99	-2,746	+0,09
6	+3,175	+2,559	-2,204	-0,535	+2,42	+5,415	+0,58
	0,000	0,000	0,000	0,000			
7	+1,746	-1,766	-1,319	+0,338	0,00	-1,001	-0,47
8	-3,950	+1,231	+2,204	+0,535	-0,78	-0,760	-0,03
9	+2,204	+0,535	-0,885	-0,873	+0,18	+1,161	-0,10
	0,000	0,000	0,000	0,000		$[vv] =$	1,32

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса приведено в табл. 3.37.

Вычисление уравненных координат выполнено в табл. 3.38.

Таблица 3.36

	a]	b]	c]	d]	l]	s]	f	Σ	Контроль
[a	43,982	0,447	-23,621	-5,353	12,365	22,819	-0,23	27,589	27,590
[b		37,431	-3,692	-3,234	11,387	42,340	0,97	43,310	43,309
[c			14,703	3,135	-8,649	-18,123	0,23	-17,893	-17,894
[d				2,134	-1,792	-5,110	-0,97	-6,080	-6,080
[l					9,091	22,403			22,402

Таблица 3.37

ξ_4	η_4	ξ_3	η_3	l	s	f	Σ	Контроль
43,982	0,447	-23,621	-5,353	12,365	27,819	-0,23	27,589	27,590
-1,000	-0,0102	0,5371	0,1217	-0,2811	-0,6325	0,00523	-0,6273	-0,6273
	37,431	-3,692	-3,234	11,387	42,340	0,97	43,310	43,309
	37,426	-3,451	-3,179	11,261	42,056	0,9723	43,029	43,029
	-1,000	0,09221	0,08494	-0,3009	-1,1237	-0,02598	-1,1497	-1,1497
		14,703	3,135	-8,649	-18,123	0,23	-17,893	-17,894
		1,0698	-0,0332	-0,969	0,697	0,196	0,893	0,892
		-1,000	0,01955	0,5707	-0,4105	-0,1154	-0,5259	-0,5252
			2,134	-1,792	-5,110	-0,97	-6,080	-6,080
			1,212	0,650	1,861	-0,912	0,950	0,950
			-1,000	-0,5363	-1,5355	0,7525	-0,7838	-0,7838
-0,0426	-0,295	0,560	-0,5363		1/P _F =	0,7525		

Таблица 3.38

Пункт	Приближенные координаты		Поправки		Уравненные координаты	
	x	y	0,1ξ	0,1η	x	y
3	5966885,24	8427292,56	+0,056	-0,054	5966885,30	8427292,51
4	5969031,68	8418455,50	-0,004	-0,030	5969031,68	8418455,47

Оценка точности уравненной сети

Средняя квадратическая ошибка результата непосредственного измерения

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{N-2k}} = \sqrt{\frac{1,32}{9-4}} = 0,51''$$

где N — число измеренных в сети углов; k — число определяемых пунктов.

Средняя квадратическая ошибка уравненной стороны 3.4

$$m_s = \frac{s}{\rho''} \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = \frac{9094 \cdot 10^3}{206265''} \cdot 0,51 \cdot \sqrt{0,7525} = 19,5 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка определяемого пункта 3 по оси абсцисс

$$m_{x_3} = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{P_{\xi_3}}} = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{[dd \cdot 3] \frac{[cc \cdot 2]}{[dd \cdot 2]}}} = 0,1 \frac{0,51}{\sqrt{1,212 \frac{1,698}{1,213}}} = 0,04 \text{ м,}$$

по оси ординат

$$m_{y_3} = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{P_{\eta_3}}} = 0,1 \frac{\mu}{\sqrt{[dd \cdot 3]}} = 0,1 \frac{0,51}{\sqrt{1,212}} = 0,05 \text{ м.}$$

Для контроля по формуле (3.29) находим значение

$$P_{\xi_3} = P_{\eta_3} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}} = 1,212 \cdot \frac{1,698}{1,212 \frac{0,0332^2}{1,698}} = 1,697,$$

которое совпадает с вычисленным по формуле

$$P_{\xi_3} = \frac{[dd \cdot 3] \cdot [cc \cdot 2]}{[dd \cdot 2]}$$

3.2.9. Уравнивание трилатерации параметрическим способом

Несвободные сети трилатерации обычно уравнивают параметрическим способом. Как и в триангуляции, при уравнивании сетей трилатерации неизвестными являются поправки δx , δy в координаты определяемых пунктов. Параметрическое уравнивание поправок стороны между пунктами i и k получено ранее и выражается формулой (3.24)

$$v_{ik} = -C_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + C_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}, \quad (3.49)$$

$$\text{где } c_{ik} = \cos \alpha_{ik}^{\circ} = \frac{(x_k^{\circ} - x_i^{\circ})}{S_{ik}^{\circ}}; \quad d_{ik} = \sin \alpha_{ik}^{\circ} = \frac{(y_k^{\circ} - y_i^{\circ})}{S_{ik}^{\circ}}.$$

Свободный член

$$l_{ik} = S_{ik}^{\circ} - S'_{ik}, \quad (3.50)$$

где S'_{ik} — измеренная и редуцированная на плоскость длина стороны; S_{ik}° — длина этой же стороны, вычисленная по приближенным координатам пунктов i и k ; ξ , η — поправки в координаты пунктов в дециметрах.

Уравнивание трилатерации параметрическим способом состоит из следующих этапов:

- 1) вычисляют углы треугольников по формулам (3.5);
- 2) по формулам теодолитного хода вычисляют приближенные координаты и по формулам (3.30) соответствующие этим координатам длины сторон сети;
- 3) составляют уравнения поправок сторон, используя формулу (3.49) и нормальные уравнения;
- 4) решают нормальные уравнения и находят поправки к приближенным координатам;
- 5) вычисляют окончательные координаты определяемых пунктов путем введения поправок в приближенные координаты;

6) определяют уравненные стороны (путем введения поправок v (формула (3.49) в измеренные стороны) и уравненные углы треугольников, которые вычисляют по формулам (3.5), используя уравненные значения координат пунктов;

7) для контроля вычисляют окончательные координаты через их приращение, определяемые по уравненным сторонам и их дирекционным углам;

8) выполняют оценку точности и составляют каталог координат пунктов;

3.2.10. Пример уравнивания трилатерации параметрическим способом

В сети, изображенной на рис. 3.16, пункты 1, 2, 3 — исходные, 4, 5 — определяемые. Координаты исходных пунктов, длины сторон и их дирекционные углы приведены в табл. 3.22.

Измеренные равноточно стороны даны в табл. 3.39.

Таблица 3.39

Сторона	Длина стороны на плоскости, $S', \text{ м}$	Сторона	Длина стороны на плоскости, $S', \text{ м}$
4.1	8304,71	4.5	8311,24
4.2	9187,32	5.2	9459,78
4.3	9093,95	5.3	9255,66

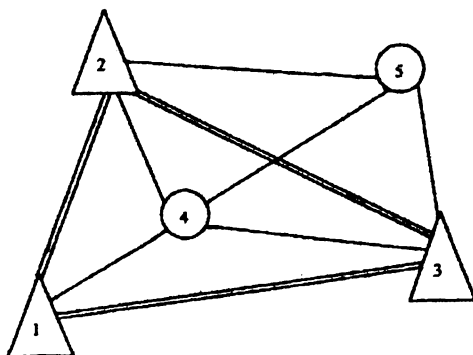


Рис. 3.16. Сеть трилатерации

Таблица 3.40

Сторона	Длина стороны, S, м	Противлежащие углы	Сторона	Длина стороны, S, м	Противлежащие углы
2.3	16520,40	129°17'28,30"	4.5	8311,24	52°54'47,71"
3.4	9093,95,	25 12 56,65	2.4	9187,32	61 51 41,63
2.4	9187,32	25 29 35,05	2.5	9459,78	65 13 30,66
	Σ	180 00 00,00		Σ	180 00 00,00
2.3	16520,40	123 56 22,67			
2.5	9459,78	28 21 46,32			
3.5	9255,66	27 41 51,01			
	Σ	180 00 00,00			

В табл. 3.40 выполнено вычисление углов треугольников по формулам (5):

$$\alpha = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \right]; \quad \beta = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{b^2}{ac} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \right];$$

$$\gamma = \arccos \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{c^2}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right].$$

Вычисление приближенных координат пунктов 4, 5 выполнены в табл. 3.41.

Таблица 3.41

№ пункта	Углы	Дирекционные углы, α	Длины сторон, S, м	Δx= S cos α	Δy= S sin α	x°, м	y°, м
2	-0,01	129°08'43,57"					
3	25°29'35,05"	283 39 08,53	9093,95	2146,45	-8837,01	5966885,26	8427292,51
4	64 03 57,64	39 35 10,90	8311,24	6405,18	5296,26	5969031,71	8418455,50
5	61 51 41,63	281 26 52,54	9459,78	1877,55	-9271,58	5975436,89	8423751,76
2	27 41 51,01	129 08 43,57				5977314,44	8414480,18
3	3+4-5-2=0,05"						

Таблица 3.42

№ пун-ктов	x, м	y, м	$\Delta x_{ik} = x_k - x_i$, м	$\Delta y_{ik} = y_k - y_i$, м	$\alpha_{ik}^{\circ} = \arctg \frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}}$	$S_{ik}^{\circ} = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha$, м	$S_{ik}^{\circ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, м
1	5963124,81	8412617,83	5906,90	+5837,67	44°39'44,16"	8304,809	8304,809
4	5969031,71	8418455,50	-2146,45	+8837,01	103 39 08,54	9093,954	9093,954
3	5966885,26	8427292,51	8551,63	-3540,75	337 30 29,88	9255,662	9255,662
5	5975436,89	8423751,76	1877,55	-9271,58	281 26 52,52	9459,778	9459,778
2	5977314,44	8414480,18	-8282,73	3975,32	154 21 40,28	9187,317	9187,317
4	5969031,71	8418455,50	6405,18	5296,26	39 35 10,94	8311,240	8311,239
5	5975436,89	8423751,76					

Длины сторон по приближенным координатам вычисляют (табл. 3.42) с контролем, используя формулы (3.30):

$$S_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} = (x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}.$$

В табл. 3.43 вычислены коэффициенты и свободные члены уравнений поправок сторон по формулам (3.49), (3.50) с использованием данных табл. 3.39, 3.42.

Таблица 3.43

Сторона	$c_{ik} = \cos \alpha_{ik}^{\circ}$	$d_{ik} = \sin \alpha_{ik}^{\circ}$	S_{ik}°	S'_{ik}	$l_{ik} = 10(S_{ik}^{\circ} - S'_{ik})$, мм
4.1	-0,711	-0,703	8304,809	8304,71	+0,99
4.2	0,902	-0,433	9187,317	9187,32	-0,03
4.3	-0,236	0,972	9093,954	9093,95	+0,04
4.5	0,771	0,637	8311,240	9311,24	0,00
5.2	0,198	-0,980	9459,778	9459,78	-0,02
5.3	-0,924	0,383	9255,662	9255,66	+0,02

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

В табл. 3.44 получены коэффициенты уравнений поправок с использованием формулы (3.49).

Таблица 3.44

Поправки к стороне (i,j)	Коэффициенты при поправках				l _{ik} , ДМ	Сумма S	Вес P _{ik}	Поправки v _{ik} (ik), ДМ
	ξ ₄	η ₄	ξ ₅	η ₅				
(4.1)	0,711	0,703			0,99	2,404	1	0,40
(4.2)	-0,902	+0,433			-0,03	-0,499	1	0,24
(4.3)	0,236	-0,972			0,04	-0,696	1	0,28
(4.5)	-0,771	-0,637	0,771	0,637	0,00	0,000	1	0,18
(5.2)			-0,198	0,980	-0,02	0,762	1	-0,09
(5.3)			0,924	-0,383	0,02	0,561	1	-0,21
ξ,η Поправки из уравнения	-0,4682	-0,3600	-0,3301	-0,2432			[pv ²]=	0,381

Для вычисления средних квадратических ошибок определения длины и дирекционного угла любой стороны, например расположенной в наиболее слабом месте стороны 4.5, составляют весовые функции, которые соответствуют уравнениям поправок сторон, поправок направлений без свободных членов и поправок ориентирования на станциях, т.е.

$$f_S = \Delta S_{45} = -c_{45}\xi_4 - d_{45}\eta_4 + c_{45}\xi_5 + d_{45}\eta_5;$$

$$f_\alpha = \Delta \alpha_{45} = -a_{45}\xi_4 - b_{45}\eta_4 + a_{45}\xi_5 + b_{45}\eta_5,$$

где коэффициенты a, b, c, d по формулам (3.35), (3.49) вычислены в табл. 3.45.

Таблица 3.45

№ пунктов	x, м	y, м	Δx= =x ₅ -x ₄ , м	Δy= =y ₅ -y ₄ , м	α ₄₅ S ₄₅	c ₄₅ = =cosα ₄₅ α ₄₅ = =sinα ₄₅	a ₄₅ = =-20,6265· ·sinα ₄₅ /S ₄₅ b ₄₅ =20,6265· cosα ₄₅ /S ₄₅
4	5969031,71	8418455,50			39°35'10,94"	0,7707	-1,5815
5	5975436,89	8423751,76	6405,18	5296,26	8,31124	0,6372	1,9127

Контроль: $\sin^2\alpha_{45} + \cos^2\alpha_{45} = 1$.

С учетом полученных коэффициентов имеем:

$$f_s = -0,771\xi_4 - 0,637\eta_4 + 0,771\xi_5 + 0,637\eta_5;$$

$$f_\alpha = 1,581\xi_4 - 1,913\eta_4 - 1,581\xi_5 + 1,913\eta_5,$$

т.е. получили выражения, совпадающие с формулами (3.38).

В табл. 3.46 получены коэффициенты нормальных уравнений.

Таблица 3.46

	$c_4]\xi_4$	$d_4]\eta_4$	$c_5]\xi_5$	$d_5]\eta_5$	$L]$	f_s	f_α	$S' = S + f_s + f_\alpha$	Контроль
$[c_4$	1,969	0,371	-0,594	-0,491	0,740	-0,771	1,581	2,805	2,805
$[d_4$		2,032	-0,491	-0,406	0,644	-0,637	-1,913	-0,400	-0,400
$[c_5$			1,487	-0,057	0,022	0,771	-1,581	-0,443	-0,443
$[d_5$				1,513	-0,027	0,637	1,913	3,082	3,082
$[L$					0,983			2,363	2,362

Решение нормальных уравнений по сокращенной схеме Гаусса выполнено в табл. 3.47.

Таблица 3.47

ξ_4	η_4	ξ_5	η_5	L	f_s	f_α	S'	Контроль
1,969	0,371	-0,594	-0,491	0,740	-0,771	1,581	2,805	2,805
-1	-0,1884	0,3017	0,2494	-0,3758	0,3916	-0,8029	-1,4246	-1,4244
	2,032	-0,491	-0,406	0,644	-0,637	-1,913	-0,400	-0,400
	1,962	-0,379	-0,313	0,505	-0,492	-2,211	0,928	-0,928
	-1	0,1932	0,1595	-0,2574	0,2508	1,1269	0,4730	0,4730
		1,487	-0,057	0,022	0,771	-1,581	-0,443	-0,443
		1,235	-0,266	0,343	0,443	-1,531	0,224	0,224
		-1	0,2154	-0,2777	-0,3587	1,2397	-0,1814	-0,1813
			1,513	-0,027	0,637	1,913	3,082	3,082
			1,283	0,312	0,462	1,625	3,682	3,682
			-1	-0,2432	-0,3601	-1,2666	-2,8698	-2,8699
ξ_4	η_4	ξ_5	η_5	$-\frac{1}{P_F}$	-0,751	-7,717		
-0,4682	-0,3600	-0,3301	-0,2432					

Суммарное уравнение

$$1,255\xi_4 + 1,506\eta_4 + 0,3450\xi_5 + 0,559\eta_5 + 1,379 = 0.$$

Подставив в него поправки ξ, η , имеем

$$-0,588 - 0,542 - 0,114 - 0,136 + 1,379 = -0,001,$$

что свидетельствует о правильности решения системы уравнений.

Поправки координат, выраженные в метрах:

$$\delta x = 0,1\xi, \quad \delta y = 0,1\eta.$$

Уравненные координаты определяемых пунктов вычисляют по формулам

$$x_i = x_i^\circ + \delta x; \quad y_i = y_i^\circ + \delta y.$$

В табл. 3.48 приведены вычисления уравненных координат пунктов 4, 5.

Таблица 3.48

№ пункта	Приближенные		Поправки		Окончательные	
	x° , м	y° , м	δx , м	δy , м	x , м	y , м
4	5969031,71	8418455,50	-0,05	-0,04	5969031,66	8418455,46
5	5975436,89	8423751,76	-0,03	-0,02	5975436,86	8423751,74

Вычисление уравненных сторон и углов треугольников.

Контрольные вычисления окончательных координат

Поправки v_{ik} в стороны S'_{ik} вычисляют, подставляя значения ξ и η в формулу (3.49), (табл. 3.44). В последней строке табл. 3.44 выписывают поправки ξ, η из табл. 3.47, значения поправок v_i определяют путем умножения ξ и η на соответствующие коэффициенты в строках (ik) , результаты умножения складывают, прибавляя к сумме значения l_{ik} . Например, для стороны 4.1 поправка $v_{41} = -0,4682 \cdot 0,711 - 0,3600 \cdot 0,703 + 0,99 = 0,40$.

Вычисление уравненных сторон трилатерации приведено в табл. 3.49.

Вычисление уравненных углов треугольников выполнено в табл. 3.50 по формулам (3.5).

Таблица 3.49

Сторона i,k	Измеренные стороны, S'_{ik} , м	Поправки v_{ik} , м	Уравненные стороны $S=S'+v$	Сторона i,k	Измеренные стороны, S'_{ik} , м	Поправки v_{ik} , м	Уравненные стороны $S=S'+v$
4.1	8304,710	0,040	8304,750	4.5	8311,240	0,018	8311,258
4.2	9187,320	0,024	9187,344	5.2	9459,780	-0,009	9459,771
4.3	9093,950	0,028	9093,978	5.3	9255,660	-0,021	9255,639

Таблица 3.50

Сторона	Уравненные стороны, м	Противоположные углы	Сторона	Уравненные стороны, м	Противоположные углы
2.3	16520,400	123°56'23,91"	2.3	16520,400	129°17'25,84"
2.5	9459,771	28 21 45,76	2.4	9187,344	25 29 36,27
3.5	9255,639	27 41 50,33	3.4	9093,978	25 12 57,90
	Σ	180 00 00,00		Σ	180 00 00,01

Контрольные вычисления окончательных координат приведены в табл. 3.51.

Сходимость значений одноименных координат, вычисленных разными способами в табл. 3.48 и 3.51 указывает на правильность уравнивания сети триангуляции.

Таблица 3.51

	<i>i</i>	2	3	2	3
	<i>k</i>	4		5	
$\alpha_{исх}$		129°08'43,57"	309°08'43,57"	129°08'43,57"	309°08'43,57"
$\pm\beta$		+25 12 57,90	-25 29 36,27	-27 41 50,33	+28 21 45,76
α_{ik}		154 21 41,47	283 39 07,30	101 26 53,24	337 30 29,33
x_k		5969031,662	5969031,663	5975436,859	5975436,859
x_i		5977314,440	5966885,260	5977314,440	5966885,260
$\Delta x_{ik} = S_{ik} \cos \alpha_{ik}$		-8,282,778	2146,403	-1877,581	8551,599
S_{ik}		9187,344	9093,978	9459,771	9255,639
$\Delta y_{ik} = S_{ik} \sin \alpha_{ik}$		3975,284	-8837,047	9271,567	-3540,764
y_i		8414480,180	8427292,510	8414480,180	8427292,510
y_k		8418455,464	8418455,463	8423751,747	8423751,746

Оценка точности уравненных элементов сети

Среднюю квадратическую ошибку любого уравненного элемента сети вычисляют по известной формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}$$

Обратный вес оцениваемой функции *F* определяют в процессе решения нормальных уравнений по схеме Гаусса или другим методом — путем обращения матрицы коэффициентов этих уравнений.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}$$

где *v* — поправки к измеренным с весом *p* величинам; *r* — число избыточных измерений. Значение

$$r = N - 2k,$$

где $N = k_S + k_\alpha$ — общее число измеренных в сети сторон k_S и азимутов k_α , n — число определяемых пунктов.

В рассматриваемой сети (рис. 3.16) $k_S=6$, $k_\alpha=0$, $k=2$.

Учитывая $[pv^2] = 0,381$ (табл. 3.44), имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{0,381}{(6-2 \cdot 2)}} = 0,44 \text{ дм}.$$

Обратный вес стороны 4.5 (табл. 3.47) $\frac{1}{P_S} = 0,751$ и ее дирекционного

угла $\frac{1}{P_\alpha} = 7,717$. С учетом этих значений получим

$$m_{S_{45}} = 0,44\sqrt{0,751} = 0,38 \text{ дм}, \quad m_{\alpha_{45}} = 0,44\sqrt{7,717} = 1,22''.$$

Для вычисления средней квадратической ошибки определения координат пункта нужно коэффициенты при неизвестных для этого пункта поставить на последнее и предпоследнее места в схеме Гаусса. В табл. 3.47 для пункта 5 имеем $P_{y_5} = P_{n_5} = 1,283$. Вес предпоследнего неизвестного по формуле (3.29)

$$P_{x_5} = P_{y_5} \frac{A}{c + \frac{B^2}{A}} = 1,283 \frac{1,235}{1,283 + \frac{0,266^2}{1,235}} = 1,182.$$

С учетом полученных значений весов:

$$m_{x_5} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_5}}} = 0,44 \sqrt{\frac{1}{1,182}} = 0,40 \text{ дм} = 0,040 \text{ м};$$

$$m_{y_3} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_3}}} = 0,44 \sqrt{\frac{1}{1,283}} = 0,39 \text{ дм} = 0,039 \text{ м};$$

$$M_S = \sqrt{m_{x_3}^2 + m_{y_3}^2} = \sqrt{0,40^2 + 0,39^2} = 0,56 \text{ дм} = 0,056 \text{ м}.$$

Уравнивание трилатерации заканчивается составлением каталога координат (табл. 3.52) с округлением до 0,01 м, так как ошибки определения координат равны примерно 0,04 м. Длины и дирекционные углы сторон в табл. 3.52 вычислены по координатам каталога из решения обратных геодезических задач.

Таблица 3.52

Пункт	Координаты		S, м	α	На пункт
	x, м	y, м			
1	5963124,81	8412617,83	14311,32	7°28'37,83"	2
2	5977314,44	8414480,18	16520,40	129 08 43,57	3
3	5966885,26	8427292,51	9093,98	283 39 07,22	4
4	5969031,66	8418455,46	8311,27	39 35 11,00	5
5	5975436,86	8423751,74	9459,76	281 26 53,25	2

3.2.11. Уравнивание линейно-угловых сетей

Линейно-угловой называют геодезическую сеть, в которой измерены горизонтальные направления и длины сторон. Линейно-угловые сети имеют больше условных уравнений, чем такие же по построению сети триангуляции и трилатерации, их в основном уравнивают параметрическим способом под условием

$$[p_n v_n^2] + [p_S v_S^2] = \min, \quad (3.51)$$

где v_n, v_S — поправки к непосредственно измеренным с весом p направлениям (n) и длинам сторон (S).

Уравнительные вычисления состоят из следующих этапов:

- 1) вычисление приближенных координат определяемых пунктов;
- 2) решение обратных геодезических задач по всем сторонам сети;
- 3) составление уравнений поправок направлений и поправок сторон;
- 4) переход с учетом весов от системы уравнений поправок к системе нормальных уравнений, из решения которых находят поправки к координатам определяемых пунктов;
- 5) определение поправок в измеренные направления и стороны;
- 6) контрольные вычисления координат пунктов по уравненным значениям дирекционных углов и сторон;
- 7) оценка точности уравненных элементов сети.

При уравнивании линейно-угловых сетей особое внимание следует уделить надежному определению средних квадратических ошибок m_n и m_s . Значение

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \quad (3.52)$$

где m_m — средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки m , n — число ошибок или невязок треугольников.

Для определения m направлений и углов по невязкам треугольников с учетом формулы (3.52) число невязок

$$n = \frac{m^2}{2m_m^2}.$$

Подставляя в эту формулу $m_m = 0,1m; 0,15m; 0,2m$, находим $n = 50, 23$ и 13 , т.е. для определения m по формуле Ферреро с ошибкой 10, 15 и 20% необходимо иметь сети из 50, 23 и 13 треугольников соответственно.

Средние квадратические ошибки измерения сторон S светодальномерами вычисляют по эмпирическим формулам

$$m_s = a_0 + a_1 S, \quad (3.53)$$

или

$$m_S = a_0 + a_1 S + a_2 S^2, \quad (3.54)$$

где коэффициенты a_i находят из обработки результатов измерения светодальномером эталонных базисов разной длины S или по свободным членам условных уравнений трилатерации, в которой стороны измерены тем светодальномером, для которого определяют коэффициенты a_i .

Известно, что между значениями m_n и m_S должно выполняться условие

$$\frac{m_n}{\rho^n} = \frac{m_S}{S}. \quad (3.55)$$

Учитывая, что $p_n = \frac{c}{m_n^2} = \frac{\mu^2}{m_n^2}$; $p_S = \frac{m_S^2}{m_S^2}$ и приняв $p_n=1$, находим

$$\mu^2 = m_n^2 \text{ с учетом (3.55)}$$

$$P_S = \frac{m_n^2}{m_S^2} = \frac{\rho^{n^2} m_S^2}{S^2 m_S^2} = \frac{\rho^{n^2}}{S^2}. \quad (3.56)$$

В случаях, когда условие (3.55) не выполняется, вычисления p_S по формуле (3.56) дают ошибочные значения весов измеренных сторон. Поэтому для получения более достоверного соотношения весов измеренных направлений и сторон в небольшой линейно-угловой сети ее уравнивают в три этапа: как свободную угловую с равноточными измерениями (находят μ_n), как линейную (определяют μ_S) и как линейно-угловую. При уравнивании только

линейных измерений (второй этап) принимают $p_S = \frac{c}{S^2}$, где S — в км, из уравнивания получают μ_S на 1 км расстояния. Вес каждой измеренной стороны, полагая $m_S = \mu_S S$, определяют по формуле

$$P_S = \frac{\mu_n^2}{\mu_S^2 S^2}. \quad (3.57)$$

Приняв $p_{ii} = 1$ и вычислив p_s по формуле (3.57), уравнивают линейно-угловую сеть за все возникающие в ней геометрические условия. Описанный метод установления весов измеренных сторон дает удовлетворяющие результаты и часто используется при уравнивании сетей на геодинамических полигонах.

Апробирование результатов угловых и линейных измерений

В небольшой сети (рис. 3.17), соответствующей по точности измерений геодезической сети 2-го класса, исходными являются координаты пунктов 1 и 2 (табл. 3.53).

Таблица 3.53

Пункт	Координаты		Дирекционный угол	Длина стороны S, м
	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$		
1	5963124,81	8412617,83		
2	5977314,44	8414480,18	$7^\circ 28' 37,83''$	14311,32

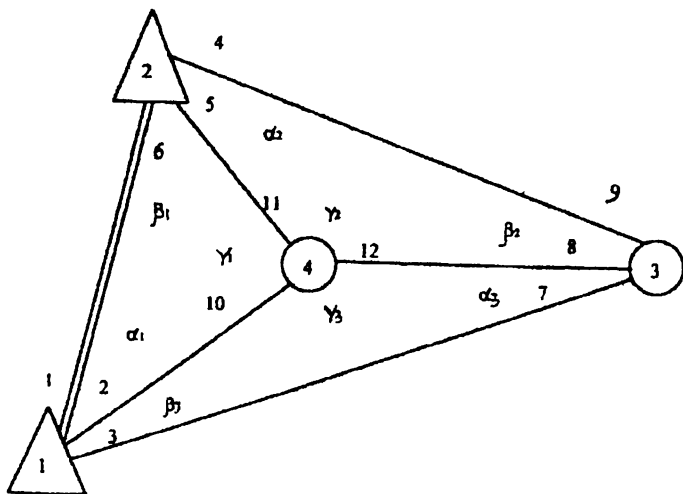


Рис. 3.17. Линейно-угловая сеть

Измеренные и приведенные к центрам знаков и на плоскость горизонтальные направления и длины сторон даны в табл. 3.54, в которой после уравнивания вычисляют уравненные направления и длины сторон.

Так как рассматриваемая сеть по точности соответствует сети 2-го класса, то ошибки измерений угловых и длин сторон не должны превышать $m=1''$

и $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{300000}$ соответственно. Поэтому до уравнивания вычисляют факти-

ческие значения m и $\frac{m_s}{S}$, а также свободные члены условий фигур и полюсных и их соответствие допускам.

Предварительное решение треугольников выполнено в табл. 3.55.

Сначала рассматривают линейно-угловую сеть как сеть триангуляции. Вычисляют невязки в треугольниках (табл. 3.55), которые не должны превышать для триангуляции 2-го класса

$$\omega''_{\partial on} = 2,5m''\sqrt{3} = 2,5 \cdot 1''\sqrt{3} = 4''.$$

Вычисленная по невязкам в треугольниках средняя квадратическая ошибка $m=0,63''$ при допуске $m=1''$.

Число полюсных условий в сети определяют по формуле

$$c = p - 2n + 3, \quad (3.58)$$

где p , n — число всех сторон и пунктов соответственно.

В сети (рис. 3.17) имеем $p=6$, $n=4$. Значение $c=6 - 8 + 3 = 1$, которое возникает в центральной системе.

На рис. 3.17, принимая за полюс пункт 4, имеем

$$\frac{S_{41} \cdot S_{42} \cdot S_{43}}{S_{42} \cdot S_{43} \cdot S_{41}} = 1.$$

Заменяя отношение сторон отношением синусов противолежащих предварительно уравненных углов, получим

Таблица 3.54

Пункт	Направление, сторона	Измеренные направления		Поправки		Уравненные направления $N = N' + \nu_0$	Измеренные стороны $S, \text{ м}$	Поправки $\nu_5, \text{ м}$	Уравненные стороны $S = S' + \nu_5, \text{ м}$
		N'	N''	ν	ν_0				
1	1-2	0°00'00,00"	0°00'00,00"	+0,12"	0,00"	0°00'00,00"	8304,720	+0,009	8304,729
	1-4	37 11 06,71	37 11 06,71	+0,12	0,00	37 11 06,71	15148,770	+0,022	15148,792
	1-3	68 08 59,63	68 08 59,63	-0,25	-0,37	68 08 59,26			
		Σ		-0,01					
2	2-3	0 00 00,00	0 00 00,00	+0,09	0,00	0 00 00,00	16520,340	+0,029	16520,369
	2-4	25 12 57,42	25 12 57,42	0,58	0,49	25 12 57,91	9187,360	-0,001	9187,359
	2-1	58 19 54,61	58 19 54,61	-0,66	-0,75	58 19 53,86			
		Σ		+0,01					
3	3-1	0 00 00,00	0 00 00,00	-0,01	0,00	0 00 00,00	9093,950	-0,009	9093,941
	3-4	28 01 30,27	28 01 30,27	-0,24	-0,23	28 01 30,04			
	3-2	53 31 06,58	53 31 06,58	+0,26	+0,27	53 31 06,85			
		Σ		+0,01					
4	4-1	0 00 00,00	0 00 00,00	-0,20	0,00	0 00 00,00			
	4-2	109 41 57,13	109 41 57,13	+0,01	+0,21	109 41 57,34			
	4-3	238 59 22,19	238 59 22,19	+0,20	+0,40	238 59 22,59			
		Σ		+0,01					

Таблица 3.55

Треугольник	Вершина	Углы на плоскости	$\frac{\omega}{3}$	Предварительные уравненные углы	Длины сторон из решения, м	Веса измеренных сторон $P_{ik} = \frac{728,7}{S_{км}^2}$
1	1	37°11'06,71"	-0,34"	37°11'06,37"	9187,328	8,63
	2	33 06 57,19	-0,34	33 06 56,85	8304,774	10,57
	4	109 41 57,13	-0,35	109 41 56,78	14311,320	
	Σ	180 00 01,03	-1,03	180 00 00,00		
2	ω	+1,03				
	2	25 12 57,42	+0,40	25 12 57,82	9093,914	8,81
	3	25 29 36,31	+0,40	26 29 36,71	9187,328	
	4	129 17 25,06	+0,41	129 17 25,47	16520,321	2,67
3	Σ	179 59 58,79	+1,21	180 00 00,00		
	ω	-1,21				
	1	30 57 52,92	-0,33	30 57 52,59	9093,914	
	4	121 00 37,81	-0,33	121 00 37,48	15148,738	3,18
	3	28 01 30,27	-0,34	28 01 29,93	8304,692	
	Σ	180 00 01,00	-1,00	180 00 00,00		
	ω	+1,00				

$$\sum \omega^2 = 3,525; n = 3; m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{3,525}{9}} = 0,63"; m_n = \frac{m}{\sqrt{2}} = 0,44".$$

$$\frac{\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(3-2)}{\sin(2-1)\sin(5-4)\sin(8-7)} = 1.$$

Вычисление свободного члена полюсного условия приведено в табл. 3.56.

Таблица 3.56

Числитель				Знаменатель			
Углы β	Значения углов	sinβ	ctgβ	Углы β	Значения углов	sinβ	ctgβ
6-5	33°06'56,85"	0,5463328	1,533	2-1	37°11'06,37"	0,6043919	1,318
9-8	25 29 36,71	0,4304091	2,097	5-4	25 12 57,82	0,4260329	2,124
3-2	30 57 52,59	0,5145085	1,667	8-7	28 01 29,93	0,4698564	1,879
	<i>Π</i> ₁	0,1209849			<i>Π</i> ₂	0,1209837	

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1} \rho'' = 2,02''; \quad \sum \text{ctg}^2\beta = 19,306;$$

$$\omega_{\text{дон}} = 2,5m \cdot \sqrt{\sum \text{ctg}^2\beta} = 2,5 \cdot 1'' \cdot \sqrt{19,306} = 10,98''.$$

Вычисления, выполненные в табл. 3.55 и 3.56, показывают, что свободные члены условий фигур и полюсных меньше их допустимых значений, что свидетельствует о высоком качестве угловых измерений и их соответствии предъявляемым к ним требованиям.

Теперь рассмотрим исследуемую сеть как трилатерацию. Условное уравнение центральной системы в угловой форме имеет вид

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + (\gamma_3) + \omega = 0,$$

где

$$\omega = \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 - 360^\circ. \quad (3.59)$$

Заменив поправки в углы поправками в стороны, получим формулу (3.10), т.е.

$$\lambda_1^\circ(S_1) + \lambda_2^\circ(S_2) + \lambda_3^\circ(S_3) + \lambda_1(r_1) + \lambda_2(r_2) + \lambda_3(r_3) + \omega = 0, \quad (3.60)$$

где

$$\lambda_i^{\circ} = \frac{\rho''}{h_{\gamma_i}} = \frac{\rho''}{r_i \sin \alpha_i} = \frac{\rho''}{r_{i+1} \sin \beta_i};$$

$$\lambda_i = -\frac{\rho''}{r_i} (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_{i-1}) = -\rho'' \left(\frac{\cos \alpha_i}{h_{\gamma_i}} + \frac{\cos \beta_{i-1}}{h_{\gamma_{i-1}}} \right).$$

Вычисление углов и высот треугольников по формулам (3.5), (3.9) выполнено в табл. 3.57.

По формулам (3.60) и данным табл.3.57 вычислены коэффициенты λ_i° и λ_i и свободный член ω условного уравнения центральной системы (табл. 3.58). Аналогичные вычисления выполнены в табл. 3.17.

Таблица 3.57

Тре- угольник	Назва- ние угла	Измеренные стороны, м	Углы	Высоты, м
1	γ_1	14311,32	109°41'57,45"	5019,32/32
	β_1	8304,72	33 06 55,81	8649,67/67
	α_1	9187,36	37 11 06,73	7818,68/68
			179 59 59,99	
2	β_2	9187,36	25 29 37,81	7038,29/29
	γ_2	16520,34	129 17 23,24	3914,16/16
	α_2	9093,95	25 12 58,95	7110,59/59
			180 00 00,00	
3	β_3	9093,95	30 57 53,24	7117,78/78
	γ_3	15148,77	121 00 36,32	4272,87/87
	α_3	8304,72	28 01 30,45	7794,21/21
			180 00 00,01	

Таблица 3.58

Название поправки	Коэффициенты λ_i° , λ_i	Углы γ'_i	Значения углов
(1.3)	48,273	γ'_1	109°41'57,45"
(1.4)	-74,133	γ'_2	129 17 23,24
(2.3)	52,697	γ'_3	121 00 36,32
(2.4)	-82,095	Σ	359 59 57,01
(3.4)	-90,179	-	360
	$\Sigma\lambda^2 = 25474,799$	ω	-2,99

Покажем вычисления λ_i° и λ_i на примерах. Коэффициент λ° при поправке (1.3)

$$\lambda_{13}^{\circ} = -\frac{\rho''}{r_{\gamma_3}} = \frac{206265''}{4272,87} = 48,273,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{14} &= -\frac{\rho''}{r_{14}} (\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_3) = \\ &= -\frac{206265''}{8304,72} (\operatorname{ctg}37^{\circ}11'06,73'' + \operatorname{ctg}30^{\circ}57'53,24'') = -74,133. \end{aligned}$$

Допустимое значение свободного члена вычисляют по формуле

$$\omega_{\text{дон}} = 2,5m_{\bar{S}}\sqrt{\sum\lambda^2}, \quad (3.61)$$

где $m_{\bar{S}}$ определяют по формуле (3.13), т.е.

$$m_{\bar{S}} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_1^k \frac{\omega_i^2}{\sum\lambda^2}},$$

где k — число условных уравнений центральных систем или геодезических треугольников; ω_i — свободный член условных уравнений. Подставляя в эту формулу полученные в табл. 3.58 значения, находим

$$m_{\bar{S}} = \sqrt{\frac{1}{1} \left(\frac{2,99^2}{25474,799} \right)} = 0,019 \text{ м.}$$

Для более достоверной оценке $m_{\bar{S}}$ должно быть получено при $k = 20-25$.

При средней длине сторон $\bar{S} = 11651$ м получим $\frac{m_{\bar{S}}}{\bar{S}} = \frac{0,019}{11651} = \frac{1}{613000}$,

что примерно в два раза меньше установленной для данной сети относительной ошибки измерения сторон 1:300 000.

Подставляя полученное значение $m_{\bar{S}}$ в формулу (3.61), имеем

$$\omega_{\text{дон}} = 2,5 \cdot 0,019 \sqrt{25474,799} = 7,58''.$$

Вычисленные значения ω и $m_{\bar{S}}$ оказались меньше их допустимых величин, что подтверждает соответствие точности линейных измерений заданным требованиям и позволяет приступить к следующему этапу уравнивательных вычислений.

Вычисление приближенных координат определяемых пунктов.

Решение обратных геодезических задач

Вычисление приближенных координат (до 0,001 м) и соответствующих им длин и дирекционных углов сторон, необходимых для составления уравнений поправок, выполнено в табл. 3.59.

В табл. 3.60 приведены приближенные координаты, равные средним значениям из полученных дважды в табл. 3.59. Поправки из уравнивания и окончательные координаты записывают после уравнивания.

Дирекционные углы и длины сторон, вычисленные по координатам, приведенным в табл. 3.60, получены в табл. 3.61.

- Таблица 3.59

	i	1	2	1	2
	k	3		4	
$\alpha_{\text{исх}}$	7°28'37,81"	187°28'37,81"	7°28'37,81"	187°28'37,81"	
$\pm\beta_i$	68 08 58,96	58 19 54,67	37 11 06,37	33 06 56,85	
α_{ik}	75 37 36,77	129 08 43,14	44 39 44,18	154 21 40,96	
x_k	5966885,272	5966885,324	5969031,646	5969031,658	
x_i	5963124,810	5977314,44	5963124,810	5977314,440	
Δx_{ik}	3760,462	-10429,116	5906,836	-8282,782	
S_{ik}	15148,770	16520,340	8304,720	9187,360	
Δy_{ik}	14674,609	12812,306	5837,608	3975,312	
y_i	8412617,830	8414480,18	8412617,830	8414480,180	
y_k	8427292,439	8427292,486	8418455,438	8418455,492	

Таблица 3.60

Пункт	Приближенные координаты		Поправки из уравнивания		Окончательные координаты	
	x^a , м	y^a , м	δx , м	δy , м	x , м	y , м
1					5963124,810	8412617,830
2					5977314,440	8414480,180
3	5966885,298	8427292,462	-0,043	+0,004	5966885,255	8427292,466
4	5969031,652	8418455,465	-0,011	-0,011	5969031,641	8418455,454

Таблица 3.61

Пункт	Направления	Дирекционные углы α_{ik}^o	Длины сторон S_{ik}^o
1	1-2	7°28'37,83"	14311,322
	1-4	44 39 44,55	8304,744
	1-3	75 37 36,50	15148,798
2	2-3	129 08 43,58	16520,338
	2-4	154 21 41,55	9187,354
	2-1	187 28 37,83	14311,322
3	3-1	255 37 36,50	15148,798
	3-4	283 39 06,49	9093,918
	3-2	309 08 43,58	16520,338
4	4-1	224 39 44,55	8304,744
	4-2	334 21 41,55	9187,354
	4-3	103 39 06,49	9093,918

*Составление уравнений поправок направлений,
уравнений поправок сторон и весовых функций*

Уравнения поправок направлений в линейно-угловой сети такие же, как в триангуляции:

$$\begin{aligned} v_{ik}^N &= -\delta z_i - a_{ik} \xi_i - b_{ik} \eta_i + a_{ik} \xi_k + b_{ik} \eta_k + l_{ik}^N; \\ l_{ik}^N &= \alpha_{ik}^\circ - R_{ik}^\circ = z_{ik} - z_i^\circ. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Уравнения поправок сторон такие же, как в трилатерации:

$$\begin{aligned} v_{ik}^S &= -c_{ik} \xi_i - d_{ik} \eta_i + c_{ik} \xi_k + d_{ik} \eta_k + l_{ik}^S; \\ l_{ik}^S &= S_{ik}^\circ - S_{ik}' . \end{aligned} \quad (3.63)$$

В уравнениях (3.62), (3.63) ξ, η и l выражаются в дециметрах, а коэффициенты a, b, c, d выражают по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= -\frac{-20,6265 \sin \alpha_{ik}}{S_{ik}}; \\ b_{ik} &= \frac{20,6265 \cos \alpha_{ik}}{S_{ik}}; \\ c_{ik} &= \cos \alpha_{ik} = \frac{(x_k - x_i)}{S_{ik}}; \\ d_{ik} &= \sin \alpha_{ik} = \frac{(y_k - y_i)}{S_{ik}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

S — в км.

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок направлений выполнено в табл. 3.62.

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок сторон приведено в табл. 3.63.

Таблица 3.62

Пункт	Направление ik	Измеренные направления N'_{ik}	Дирекционные углы α°_{ik}	Ориентирующие углы $r^{\circ}_{ik} = \alpha^{\circ}_{ik} - N'_{ik}$	Приближенные ориентированные направления $R^{\circ}_{ik} = N'_{ik} + z^{\circ}_i$	Средние бытовые члены f°_{ik}	S°_{ik} км	a_{ik}	b_{ik}	Вес P_{ik}
1	1-2	0°00'00,00"	7°28'37,83"	7°28'37,83"	7°28'37,51"	+0,32	14,31	-0,19	1,43	1
	1-4	37°11'06,71"	44°39'44,55"	7°28'37,84"	44°39'44,22"	+0,33	8,30	-1,75	1,77	1
	1-3	68°08'59,63"	75°37'36,50"	7°28'36,87"	75°37'37,14"	-0,64	15,15	-1,32	0,34	1
			$z^{\circ}_1 =$	7°28'37,51"		+0,01				
2	2-3	0°00'00,00"	129°08'43,58"	129°08'43,58"	129°08'43,64"	-0,06	16,52	-0,97	-0,79	1
	2-4	25°12'57,42"	154°21'41,55"	129°08'44,13"	154°21'41,06"	+0,49	9,19	-0,97	-2,02	1
	2-1	58°19'54,61"	187°28'37,83"	129°08'43,22"	187°28'38,25"	-0,42	14,31	0,19	-1,43	1
			$z^{\circ}_2 =$	129°08'43,64"		+0,01				
3	3-1	0°00'00,00"	255°37'36,50"	255°37'36,50"	255°37'36,57"	-0,07	15,15	1,32	-0,34	1
	3-4	28°01'30,27"	283°39'06,49"	255°37'36,22"	283°39'06,84"	-0,35	9,09	2,20	0,54	1
	3-2	53°31'06,58"	309°08'43,58"	255°37'37,00"	309°08'43,15"	+0,43	16,52	0,97	1,43	1
			$z^{\circ}_3 =$	255°37'36,57"		+0,01				
4	4-1	0°00'00,00"	224°39'44,55"	224°39'44,55"	224°39'44,42"	+0,13	8,30	1,75	-1,77	1
	4-2	109°41'57,13"	334°21'41,55"	224°39'44,30"	334°21'41,55"	0,00	9,19	0,97	2,02	1
	4-3	238°59'22,19"	103°39'06,49"	224°39'44,42"	103°39'06,61"	-0,12	9,09	-2,20	-0,54	1
			$z^{\circ}_4 =$	224°39'44,42"		+0,01				

Таблица 3.63

Пункт	Сторона ik	Измеренные длины сторон S'_{ik} м	Вычисленные длины сторон S''_{ik} м	$S''_{ik} = S'_{ik} - S''_{ik}$ дм	$c_{ik} = \cos \alpha''_{ik}$	$d_{ik} = \sin \alpha''_{ik}$	$\sqrt{P_{ik}}$	$c\sqrt{PS}$	$d\sqrt{PS}$	$l\sqrt{PS}$
1	1-3	15148,770	15148,798	0,28	0,25	0,97	1,78	0,44	1,73	0,50
	1-4	8304,720	8304,744	0,24	0,71	0,70	3,25	2,31	2,28	0,78
2	2-3	16520,340	16520,338	-0,02	-0,63	0,78	1,63	-1,03	1,27	-0,03
	2-4	9187,360	9187,354	-0,06	-0,90	0,43	2,94	-2,65	1,26	-0,18
3	3-4	9093,950	9093,918	-0,32	0,24	-0,97	2,97	0,71	-2,88	-0,95

Для вычисления весов p_S воспользуемся формулой (3.57). Полученная по невязкам треугольников величина $m_n = 0,44$, значение $m_{\bar{S}} = 0,019 \text{ м} = 0,19 \text{ дм}$,

для средней длины стороны $\bar{S} = 11,651 \text{ км}$, $\mu_S = \frac{m_{\bar{S}}}{\bar{S}} = 0,0163 \frac{\text{дм}}{\text{км}}$.

Подставляя эти значения в формулу (3.57), находим

$$P_S = \frac{\left(\begin{array}{c} 0,44 \\ 0,0163 \end{array} \right)^2}{S^2_{\text{км}}} = \frac{728,7}{S^2_{\text{км}}}. \quad (3.65)$$

Значения P_S , вычисленные по этой формуле, приведены в табл. 3.55 и использованы при вычислениях табл. 3.63.

Сводная табл. 3.64 уравнений поправок направлений, суммарных уравнений на станциях и уравнений поправок сторон, приведенных к весу, равному единице, приведена ниже.

Для удобства вычислений целесообразно привести уравнения поправок сторон к весу, равному единице, путем умножения каждого уравнения на $\sqrt{p_S}$, что и сделано в последних графах табл. 3.63. Поправки v_{ik}^S также умножаются на $\sqrt{p_S}$.

Общее число D уравнений поправок

$$D = D' + k_S,$$

где D' , k_S — число измеренных в сети направлений и сторон соответственно.

Общее число q неизвестных, входящих в уравнения поправок направлений и в уравнения поправок сторон

$$q = t + 2k,$$

где t — число поправок ориентирования на станциях, равно числу пунктов, на которых измерены направления; k — число определяемых пунктов.

Таблица 3.64

Пункт i	Направ- ление ik	δz_i	ξ_3	η_3	ξ_4	η_4	l	S'	p	Поправка из урав- нения
1	1-2	-1					0,32	0,32	1	0,12"
	1-4	-1			-1,75	1,77	0,33	0,35	1	0,12
	1-3	-1	-1,32	0,34			-0,64	-1,62	1	-0,25
	Σ	-3	-1,32	0,34	-1,75	1,77	0,01	-0,95	-1/3	$\delta z_1=0,20''$
2	2-3	-1					-0,06	-1,82	1	0,09
	2-4	-1	-0,97	-0,79	-0,97	-2,02	0,49	-2,50	1	0,58
	2-1	-1					-0,42	-0,42	1	-0,66
	Σ	-3	-0,97	-0,79	-0,97	-2,02	0,01	-4,74	-1/3	$\delta z_2=0,24-$
3	3-1	-1	-1,32	0,34	2,20	0,54	-0,07	-1,05	1'	0,01
	3-4	-1	-2,20	-0,54			-0,35	-0,35	1	-0,24
	3-2	-1	-2,97	-1,43			0,43	-1,97	1	0,26
	Σ	-3	-4,49	-1,63	2,20	0,54	0,01	-3,37	-1/3	$\delta z_3=0,53$
4	4-1	-1			-1,75	1,77	0,13	0,15	1	-0,20
	4-2	-1	-2,20	-0,54	-0,97	-2,02	0,00	2,99	1	0,01
	4-3	-1	-2,20	-0,54	2,20	0,54	-0,12	-0,12	1	0,20
	Σ	-3	-2,20	-0,54	-0,52	0,29	0,01	-2,96	-1/3	$\delta z_4=0,32$

Окончание табл. 3.64

Уравнения поправок сторон, умноженные на $\sqrt{p_s}$										
		$\sqrt{p_s} \cdot v_s$, ДМ								
1	1-3	0,44	1,73	2,31	2,28	0,50	2,67	1	0,39	0,22
	1-4					0,78	5,37	1	0,28	0,09
2	2-3	-1,03	1,27			-0,03	0,21	1	0,47	0,29
	2-4			-2,65	1,26	-0,18	-1,57	1	-0,04	-0,01
3	3-4	-0,71	2,88	0,71	-2,88	-0,95	-0,95	1	-0,27	-0,09
Поправки из уравнения ξ, η		-0,434	0,044	-0,107	-0,112					=1,6027
										[pv ²]

Таблица 3.65

№ пункт	x, м	y, м	$\Delta x = x_4 - x_5$	$\Delta y = y_4 - y_5$	α_{34} S ₃₄	$c_{34} = \cos \alpha_{34}$ $d_{34} = \sin \alpha_{34}$	$a_{34} = -20,6265 \cdot \sin \alpha_{34} / S_{34}$ $b_{34} = 20,6265 \cdot \cos \alpha_{34} / S_{34}$
3	5966885,3	8427292,5	2146,4	-8837,0	283°39'07,5"	0,236	2,204
4	5969031,7	8418455,5			9093,9	0,972	0,535

Контроль: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,000$

В сети (рис. 3.17)

$$D' = 12, k_S = 5, D = D' + k_S = 17, q = t + 2k = 4 + 4 = 8.$$

Число избыточных измерений $r = D - q = 17 - 8 = 9$.

Для вычисления обратного веса уравненных значений дирекционного угла и длины стороны 3.4, расположенной в слабом месте сети, имеем весовые функции:

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \Delta\alpha_{34} = -a_{34}\xi_3 - b_{34}\eta_3 + a_{34}\xi_4 + b_{34}\eta_4; \\ f_S &= \Delta S_{34} = -c_{34}\xi_3 - d_{34}\eta_3 + c_{34}\xi_4 + d_{34}\eta_4. \end{aligned}$$

Коэффициенты весовых функций вычислены по формулам (3.64) в табл. 3.65.

С учетом полученных коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} f_\alpha &= -2,204\xi_3 - 0,535\eta_3 + 2,204\xi_4 + 0,535\eta_4; \\ f_S &= -0,236\xi_3 + 0,972\eta_3 + 0,236\xi_4 - 0,972\eta_4. \end{aligned}$$

В табл. 3.66 получены коэффициенты редуцированных нормальных уравнений по данным табл. 3.64 с учетом весов, к таблице присоединены столбцы весовых функций f_α, f_S .

Решение нормальных уравнений по сокращенной схеме Гаусса приведено в табл. 3.67.

Суммарное уравнение

$$-1,86\xi_3 + 4,70\eta_3 + 19,88\xi_4 + 19,14\eta_4 + 3,26 = 0,00.$$

После подстановки в суммарное уравнение полученных неизвестных получим 0,00, что свидетельствует о правильности решения систем нормальных уравнений.

Поправки координат в метрах

$$\delta x = 0,1\xi; \quad \delta y = 0,1\eta.$$

Уравненные координаты

$$x_i = x_i^0 + \delta x_i; \quad y_i = y_i^0 + \delta y_i.$$

В табл. 3.60 приведены вычисления уравненных координат пунктов 3,4.

Таблица 3.66

ξ_3	η_3	ξ_4	η_4	L	f_α	f_s	$S=S'+f_\alpha+f_s$	Контроль
7,58	-1,90	-8,36	0,82	2,57	-2,20	-0,24	-1,74	-1,73
	15,15	0,71	-9,26	-2,46	-0,54	0,97	2,68	2,67
		27,51	0,02	-0,71	2,20	0,24	21,62	21,61
			27,56	3,86	0,54	-0,97	22,55	22,57
				3,18			6,44	6,44

Таблица 3.67

ξ_3	η_3	ξ_4	η_4	L	f_α	f_s	S	Контроль
7,58	-1,90	-8,36	0,82	2,57	-2,20	-0,24	-1,74	-1,73
-1	0,251	1,103	-0,108	-0,339	0,290	0,032	0,230	0,229
	15,15	0,71	-9,26	-2,46	0,54	0,97	2,68	2,67
	14,67	-1,39	-9,05	-1,81	-1,09	0,91	2,24	2,24
	-1	0,095	0,617	0,123	0,074	-0,062	-0,153	-0,153
		27,51	0,02	-0,71	2,20	0,24	21,62	21,61
		18,16	0,06	1,95	-0,33	0,06	19,91	19,90
		-1	-0,003	-0,107	0,018	-0,003	-1,096	-1,095
			27,56	3,86	0,54	-0,97	22,55	22,57
			21,89	2,46	0,11	-0,38	24,06	24,08
			-1	-0,112	-0,005	0,017	-1,099	-1,100
ξ_3	η_3	ξ_4	η_4	$-\frac{1}{P_F}$				
-0,434	0,044	-0,107	-0,112					

Вычисление уравненных сторон и углов треугольников.

Окончательные вычисления координат

Для контроля уравнительных вычислений координаты определяемых пунктов находят вторично путем определения приращений координат Δx , Δy . Для этого по формуле (3.27) вычисляют поправки δz ориентирования на станциях (табл. 3.64), а затем по формулам (3.62) находят поправки v_{ik} измеренных направлений. В этой же таблице по формуле (3.63) вычисляют поправки сторон, умноженные на $\sqrt{p_S}$, т.е. $v'_S = v_S \sqrt{p_S}$, а затем поправки (в дм)

$$v_S = \frac{v'_S}{\sqrt{p_S}}. \quad (3.66)$$

Значения p_S берут из табл. 3.55.

Решение треугольников по уравненным направлениям приведено в табл. 3.68.

Таблица 3.68

Треугольник	Вершина	Измеренные углы β'	Поправки v_β	Уравненные углы β	Уравненные стороны из решения треуго.	Контроль уравненных сторон
1	1	37°11'06,71"	0,00"	06,71"	9187,357	9187,359
	2	33 06 57,19	-1,24	55,95	8304,727	8304,729
	4	109 41 57,13	0,21	57,34	14311,320	14311,320
	Σ	180 00 01,03 +1,03	-1,03	00,00		
	2	25 12 57,42	0,49	57,91	9093,942	9093,941
2	3	25 29 36,31	0,50	36,81	9187,357	9187,359
	4	129 17 25,06	0,21	25,27	16520,370	16520,369
	Σ	179 59 58,79 -1,21	1,20	-00,01		
	3	30 57 52,92	-0,37	52,55	9093,942	9093,941
	4	121 00 37,81	-0,40	37,41	15148,793	15148,792
3	3	28 01 30,27	-0,23	30,04	8304,728'	8304,729
	Σ	180 00 01,00 +1,00	-1,00	00,00		

Расхождения в длинах сторон, полученных из решения треугольников и путем введения поправок в измеренные расстояния, не должны превышать 1–3 единиц последнего знака после запятой, т.е. в рассматриваемом примере 1–3 мм, что и соблюдается в табл. 3.68.

Заключительным контролем уравнительных вычислений является нахождение координат определяемых пунктов из решения прямых геодезических задач (табл. 3.69). Совпадение координат (в пределах ошибок округления), вычисленных для одних и тех же пунктов разными способами, свидетельствует о правильности уравнительных вычислений. За окончательные принимаются координаты, полученные в табл. 3.60, их и включают в каталог координат.

Таблица 3.69

Формулы	i		1		2	
	k	3	1	2	4	4
$\alpha_{\text{иск}}$	7°28'37,83"	187°28'37,83"	7°28'37,83"	187°28'37,83"	7°28'37,83"	187°28'37,83"
$\pm\beta_i$	68 08 59,26	58 19 53,86	37 11 06,71	33 06 55,95	37 11 06,71	33 06 55,95
α_{ik}	75 37 37,09	129 08 43,97	44 39 44,54	154 21 41,88	44 39 44,54	154 21 41,88
x_k	5966885,255	5966885,254	5969031,641	5969031,643	5969031,641	5969031,643
x_i	5963124,810	5977314,440	5963124,810	5977314,440	5963124,810	5977314,440
Δx_{ik}	3760,445	-10429,186	5906,831	-8282,797	5906,831	-8282,797
S_{ik}	15148,793	16520,370	8304,727	9187,357	8304,727	9187,357
Δy_{ik}	14674,637	12812,287	5837,623	3975,273	5837,623	3975,273
y_i	8412617,830	8414480,180	8412617,830	8414480,180	8412617,830	8414480,180
y_k	8427292,467	8427292,467	8418455,453	8418455,453	8418455,453	8418455,453

Оценка точности уравненных элементов сети

Средняя квадратическая ошибка единицы веса (уравненного направления)

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{1,6027}{9}} = 0,42''$$

где число избыточных измерений $r = D - q = D' + k_s - t - 2k = 12 + 5 - 4 - 4 = 9$ (D' , k_s — число измеренных в сети направлений (D') и сторон (k_s); t — число поправок ориентирования, равное числу пунктов; k — число определяемых пунктов).

Учитывая полученные в табл. 3.67 значения $\frac{1}{P_\alpha}$ и $\frac{1}{P_S}$, имеем

$$m_{\alpha_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_\alpha}} = 0,42 \sqrt{0,725} = 0,36'',$$

$$m_{S_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_S}} = 0,42 \sqrt{0,071} = 0,11 \text{ дм} = 0,011 \text{ м.}$$

Средние квадратические ошибки определения координат пункта 4 с учетом полученного в табл. 3.67 $P_{y_4} = P\eta_4 = 21,89$ (коэффициент при η в последнем преобразованном нормальном уравнении)

$$m_{y_4} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_4}}} = 0,42 \sqrt{\frac{1}{21,89}} = 0,090 \text{ дм} = 0,009 \text{ м.}$$

Вес предпоследнего неизвестного

$$P_{x_4} = P_{y_4} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}} = 21,89 \frac{18,16}{21,89 + \frac{0,062}{18,16}} = 18,16;$$

$$m_{x_4} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{x_4}}} = \frac{0,42}{\sqrt{18,16}} = 0,099 \text{ дм} = 0,010 \text{ м};$$

$$M_S = \sqrt{m_{x_4}^2 + m_{y_4}^2} = \sqrt{0,010^2 + 0,009^2} = 0,013 \text{ м.}$$

Кроме того, вес и средние квадратические ошибки любого уравненного элемента сети можно определить путем вычисления матрицы весовых коэффициентов, как это сделано в разделе 3.2.6 (пример уравнивания триангуляции параметрическим способом).

3.3. ПОЛИГОНОМЕТРИЯ

3.3.1. Классификация и характеристика полигонометрии

Полигонометрией называют метод определения положения геодезических пунктов путем построения на местности полигонометрического хода (ломаной линии) или систем ходов (полигонометрическая сеть), в которых измеряют все углы и стороны. Полигонометрические ходы опираются на исходные, более высокого класса, пункты и линии. Они могут быть разомкнутыми и замкнутыми. Если ход по форме близок к прямой линии, то его называют вытянутым, в противном случае — изогнутым. Стремятся прокладывать вытянутые ходы с примерно одинаковыми сторонами, которые являются оптимальными по объему полевых работ, обработке и оценке точности.

В полигонометрической сети имеются узловые точки, в которых сходятся не менее трех ходов, замкнутые и разомкнутые полигоны. Отдельный ход между двумя узловыми или между узловой и исходной точками называют *звеном*. *Свободная сеть* полигонометрии опирается только на исходный пункт и дирекционный угол исходного направления. Если в сети имеется большее число исходных данных, то ее называют *несвободной*.

Если между пунктами двух параллельных ходов полигонометрии одного разряда меньше 1,5 км, то их соединяют перемычками того же разряда. Это необходимо для повышения жесткости и однородности полигонометрической сети. Под *однородностью сети* понимают равенство ошибок взаимного положения близлежащих пунктов во всех направлениях.

По методу создания полигонометрию разделяют на светодальномерную, траверсную — стороны измеряют подвесными мерными приборами, короткобазисную, створно-короткобазисную и параллактическую.

3.3.2. Предрасчет точности полигонометрии

Качество создаваемой полигонометрии характеризуют предвычисленными средними квадратическими невязками и их действительными значениями. В полигонометрическом ходе, опирающемся на исходные пункты и на

правления, угловую невязку определяют по формуле

$$f_{\beta} = \sum_1^{n+1} \beta_{изм.} - \sum_1^{n+1} \beta_{теор.}$$

Теоретическая сумма для $(n+2)$ углов замкнутого полигона (рис. 3.18)

$$\begin{aligned} & (180^{\circ} - \beta_1) + (360^{\circ} - \beta_2) + \dots + (360^{\circ} - \beta_n) + (180^{\circ} - \beta_{n+1}) + \beta_0 = \\ & = 180^{\circ} [(n+2) - 2] = 180^{\circ} \cdot n. \end{aligned}$$

Так как $\beta_0 = 180^{\circ} - (\alpha_n - \alpha_k)$, то в разомкнутом ходе

$$\begin{aligned} \sum_1^{n+1} \beta_{теор.} & = 180^{\circ} \cdot 2 + 360^{\circ} (n-1) + 180^{\circ} - (\alpha_n - \alpha_k) - 180^{\circ} \cdot n = \\ & = 180^{\circ} (n+1) - (\alpha_n - \alpha_k). \end{aligned}$$

С учетом этого значения

$$f_{\beta} = \sum_1^{n+1} \beta_{изм} + \alpha_n - \alpha_k - 180^{\circ} (n+1). \quad (3.67)$$

Целесообразность подсчета теоретической суммы углов путем создания из разомкнутого хода замкнутого в том, что в зависимости от ориентации хода относительно исходных направлений в последнем слагаемом формулы (3.67) множитель бывает не только $(n+1)$, но может иметь и другие значения. Так, на рис. 3.19

$$\begin{aligned} \sum_1^{n+1} \beta_{теор} & = 180^{\circ} [(n+2) - 2] - \beta_0 = 180^{\circ} \cdot n - (360^{\circ} - \alpha_k + \alpha_n) = \\ & = 180^{\circ} (n-2) + \alpha_k - \alpha_n \end{aligned}$$

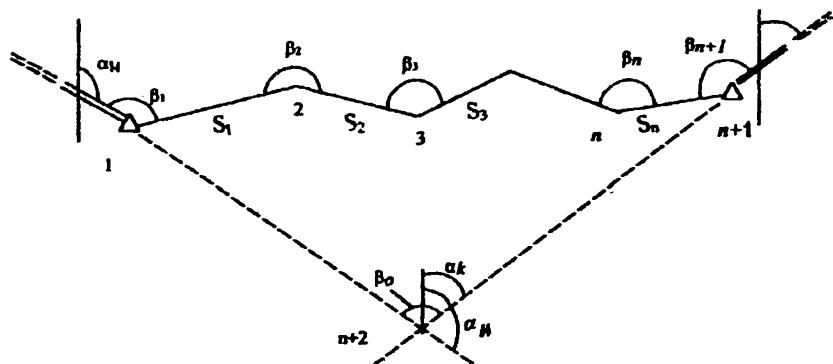


Рис. 3.18. Полигонометрический ход

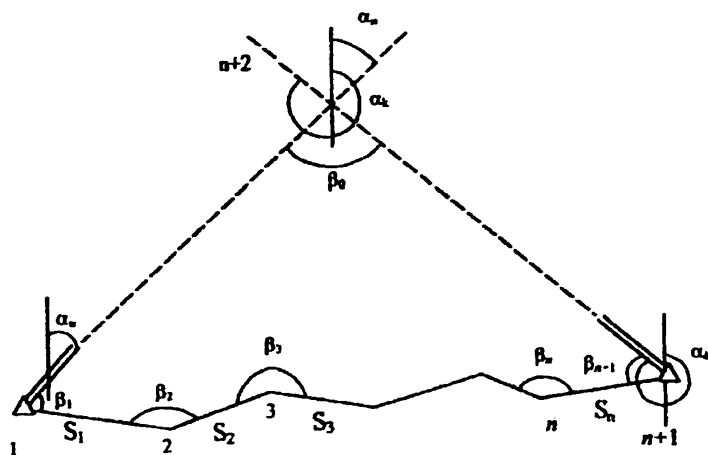


Рис. 3.19. Ход полигонометрии с другой ориентацией исходных направлений

$$f_{\beta} = \sum_1^{n+1} \beta_{\text{изм}} + \alpha_n - \alpha_k - 180^\circ (n-2). \quad (3.68)$$

Невязки по осям координат определяют по формулам

$$f_x = \sum_{i=1}^n \Delta x_i - (x_k - x_n); f_y = \sum_{i=1}^n \Delta y_i - (y_k - y_n); f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (3.69)$$

В формулах (3.67–3.69) n — число сторон; x_n, y_n, x_k, y_k — координаты начального и конечного исходных пунктов; α_n, α_k — дирекционные углы начального и конечного исходных направлений.

Средние квадратические ошибки невязок полигонометрического хода:

$$m_{f_{\beta}}^2 = \sum_1^{n+1} m_{\beta_i}^2; m_{f_x}^2 = \sum_1^n m_{S_i}^2 \cos^2 \alpha_i + \frac{1}{\rho^2} \sum_1^n m_{\beta_i}^2 (y_k - y_{i-1})^2;$$

$$m_{f_y}^2 = \sum_1^n m_{S_i}^2 \sin^2 \alpha_i + \frac{1}{\rho^2} \sum_1^n m_{\beta_i}^2 (x_k - x_{i-1})^2. \quad (3.70)$$

При равноточных линейных и угловых измерениях:

$$m_{f_{\beta}} = m_{\beta} \sqrt{n+1}; m_{f_x}^2 = m_S^2 \sum_1^n \cos^2 \alpha_i + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \sum_1^n (y_k - y_{i-1})^2;$$

$$m_{f_y}^2 = m_S^2 \sum_1^n \sin^2 \alpha_i + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \sum_1^n (x_k - x_{i-1})^2. \quad (3.71)$$

Предельно допустимые значения невязок в 2–3 раза больше средних квадратических значений.

При выполнении линейных измерений проволоками или лентами стремятся организовать работу так, чтобы коэффициент систематического влияния λ был не более 3–4% от коэффициента случайного влияния μ , причем

$$\lambda = \frac{\Delta}{S}, \quad \mu = \frac{m}{\sqrt{S}},$$

где Δ , m — систематическая и средняя квадратические ошибки одного уложения мерного прибора. Средняя квадратическая ошибка измерения длины линии

$$m_S^2 = \mu^2 S + \lambda^2 S^2. \quad (3.72)$$

Для вытянутого хода длиной L

$$m_L^2 = \sum m_S^2 = \mu^2 L + \lambda^2 [S^2]. \quad (3.73)$$

В вытянутом полигонометрическом ходе невязку в периметре f_S обычно раскладывают на *продольную* t по направлению замыкающей и *поперечную* u (по перпендикуляру к t) невязки. Величина t является следствием накопления ошибок линейных измерений, а u — следствием накопления ошибок измерения углов. Очевидно, $f_S = \sqrt{t^2 + u^2}$. Средняя квадратическая продольная невязка

$$m_t = \sqrt{[m_S^2]}.$$

Между поперечной невязкой u' и ошибками $d\beta$ в углах имеется зависимость

$$u' = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \frac{d\beta_1}{\rho''} + (S_2 + \dots + S_n) \frac{d\beta_2}{\rho''} + \dots + S_n \frac{d\beta_n}{\rho''}.$$

При $S_1 \approx S_2 \approx \dots \approx S_n = S$, $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \dots = m_{\beta_n} = m_{\beta}$ средняя квадратическая невязка

$$m_{u'}^2 = S^2 [n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2] \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} = S^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} =$$

$$= L^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2},$$

откуда

$$m_{u'} = L \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2}} \approx L \sqrt{\frac{n+1,5}{3} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2}}. \quad (3.74)$$

Если предварительно углы исправлены за невязку f_{β} , то

$$m_u = L \sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{12n} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2}} \approx L \sqrt{\frac{n+3}{12} \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2}}. \quad (3.75)$$

Средняя квадратическая ошибка M положения конечной точки для вытянутого полигонометрического хода

$$M = \sqrt{m_t^2 + m_u^2},$$

для хода любой формы

$$M = \sqrt{m_{f_x}^2 + m_{f_y}^2}.$$

С учетом приведенных формул для вытянутого хода с примерно одинаковыми сторонами без исправления углов за невязку f_{β}

$$M' = \sqrt{\left[m_s^2 \right] + \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} L^2 \frac{n+1,5}{3}}. \quad (3.76)$$

Если углы предварительно исправлены за невязку f_{β} , то

$$M = \sqrt{\left[m_s^2 \right] + \frac{m_{\beta}^2}{\rho''^2} L^2 \frac{n+3}{12}}. \quad (3.77)$$

Для хода произвольной формы

$$M' = \sqrt{[m_S^2] + \frac{m_B^2}{\rho'^2} [D_{n+1,i}^2]}, \quad M = \sqrt{[m_S^2] + \frac{m_B^2}{\rho'^2} [D_{0,i}^2]} \quad (3.78)$$

где $D_{n+1,i}$ — расстояние от последней до каждой точки; $D_{0,i}$ — расстояние от центра тяжести до каждой точки. $D_{n+1,i}$, $D_{0,i}$ — можно определить графически. Координаты центра тяжести находят по формулам:

$$x_0 = \frac{\sum_1^n x}{(n+1)}; \quad y_0 = \frac{\sum_1^{n+1} y}{(n+1)}.$$

3.3.3. Строгое уравнивание одиночного полигонометрического хода

В одиночном полигонометрическом ходе с исходными пунктами 1 и 2 и исходными дирекционными углами α_n, α_k для определения координат точек 2, 3, ..., n достаточно измерить $(n+1)$ углов и n сторон (см. рис. 3.18, 3.19). Сторона S_n и углы β_n, β_{n+1} являются избыточными, в результате имеем три условных уравнения: дирекционных углов, абсцисс и ординат. Условное уравнение дирекционных углов выражает зависимость между известными дирекционными углами исходных сторон и углами поворота β . Для измеренных левых углов

$$\alpha_k = \alpha_n + [\beta] - k \cdot 180^\circ, \text{ или } [\beta] - k \cdot 180^\circ + \alpha_n - \alpha_k = 0,$$

где k — количество исключений 180° для получения искомого дирекционного угла. При подстановке измеренных углов и поправок к ним имеем

$$[\beta_{изм}] - k \cdot 180^\circ + \alpha_n - \alpha_k = f_\beta \quad (3.79)$$

и

$$[\beta_{изм} + v_{\beta}] - k \cdot 180^{\circ} + \alpha_n - \alpha_k = 0. \quad (3.80)$$

Вычитая из выражения (3.80) соответствующие части (3.79), находим

$$[v_{\beta}] - f_{\beta} = 0. \quad (3.81)$$

Для определения двух других условных уравнений поправок имеем

$$x_n + [\Delta x] - x_k = 0, \quad y_n + [\Delta y] - y_r = 0. \quad (3.82)$$

Если Δx и Δy вычислять по измеренным углам, то

$$x_n + [\Delta x]_{изм} - x_k = f_x, \quad y_n + [\Delta y]_{изм} - y_r = f_y. \quad (3.83)$$

Значение

$$\begin{aligned} [\Delta x] &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + \dots + S_n \cos \alpha_n = \\ &= (S_1 + v_{S_1}) \cos(\alpha_n - 180^{\circ} + \beta_1 + v_{\beta_1}) + (S_2 + v_{S_2}) \cos(\alpha_n - 180^{\circ} + \beta_1 - \\ &- 180^{\circ} + \beta_2 + v_{\beta_1} + v_{\beta_2}) + \dots + (S_n + v_{S_n}) \cos(\alpha_n - 180^{\circ} + \beta_1 - 180^{\circ} + \\ &+ \beta_2 - \dots - 180^{\circ} + \beta_n + v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_n}) = S_1 \cos \alpha_1 + v_{S_1} \cos \alpha_1 - \\ &- S_1 \sin \alpha_1 v_{\beta_1} + S_2 \cos \alpha_2 + v_{S_2} \cos \alpha_2 - S_2 \sin \alpha_2 (v_{\beta_1} + v_{\beta_2}) + \dots + \\ &+ S_n \cos \alpha_n + v_{S_n} \cos \alpha_n - S_n \sin \alpha_n (v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_n}) = \end{aligned}$$

$$[\Delta x]_{изм} + [v_{S_i} \cos \alpha_i] - \frac{1}{\rho''} [(y_{n+1} - y_i) v_{\beta_i}].$$

Подставляя полученное значение $[\Delta x]$ в первую формулу (3.82) с учетом (3.83) и $x_{n+1} = x_k$, $y_{n+1} = y_r$, находим условное уравнение абсцисс

$$[v_{S_i} \cos \alpha_i] - \frac{1}{\rho''} [(y_k - y_i) v_{\beta_i}] + f_x = 0. \quad (3.84)$$

Аналогичным образом получаем условное уравнение ординат

$$[v_{S_i} \sin \alpha_i] + \frac{1}{\rho''} [(x_k - x_i) v_{\beta_i}] + f_y = 0. \quad (3.85)$$

При уравнивании поправки v_β к измеренным углам и v_S к измеренным сторонам ликвидирующие невязки f_β, f_x, f_y определяют под условием

$$[p_\beta v_\beta^2] + [p_S v_S^2] = \min, \text{ где } p_{\beta_i} = \frac{c}{m_{\beta_i}^2}, \quad p_{S_i} = \frac{c}{m_{S_i}^2}.$$

Так как угловые измерения в полигонометрическом ходе равноточны, то веса p_β одинаковы для всех углов. Средние квадратические ошибки сторон S_i в зависимости от метода измерения вычисляют по формулам $m_{S_i} = \mu \sqrt{S_i}$ — при измерении проволоками и лентами, $m_{S_i} = K_{S_i}$ (или $m_{S_i} = K_{S_i}^2$) — при измерении оптическими дальномерами, $m_{S_i} = (b_{S_i} + a)$ — при измерении линий некоторыми типами светодальномеров.

Для уменьшения объема вычислений целесообразно применить двухгрупповой способ, включив в первую группу условное уравнение дирекционных углов, а во вторую — абсцисс и ординат. Учитывая, что в (3.81) $a_i = +1$, получим нормальное уравнение

$$(n+1)k_1 + f_\beta = 0,$$

откуда

$$k_1 = -\frac{f_\beta}{(n+1)},$$

где n — число сторон в ходе.

Первичные поправки

$$v_{\beta_1} = v_{\beta_2} = \dots = v_{\beta_{n+1}} = k_1 = -\frac{f_\beta}{(n+1)}, \quad (3.86)$$

т.е. первичные поправки в измеренные углы определяют путем равномерного распределения невязки во все углы хода.

Используя предварительно исправленные углы, вычисляют приращения координат и находят невязки f'_x и f'_y . Для определения вторичных поправок коэффициенты второй группы преобразовывают: преобразованный коэффициент равен преобразованному минус среднее арифметическое из преобразованных коэффициентов, т.е.

$$\begin{aligned} b' &= b - \frac{[b]}{(n+1)} = -\frac{1}{\rho''} \left[(y_k - y_l) - \frac{[(y_k - y_l)]}{n+1} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho''} \left(y_l - \frac{[y_l]}{(n+1)} \right) = \frac{1}{\rho''} (y_l - y_u); \\ c' &= c - \frac{[c]}{(n+1)} = \frac{1}{\rho''} \left[(x_k - x_l) - \frac{[(x_k - x_l)]}{(n+1)} \right] = \\ &= -\frac{1}{\rho''} \left(x_l - \frac{[x_l]}{(n+1)} \right) = -\frac{1}{\rho''} (x_l - x_u), \end{aligned}$$

где $x_u = \frac{[x_l]}{(n+1)}$, $y_u = \frac{[y_l]}{(n+1)}$ — координаты центра тяжести полигонометрического хода.

Так как коэффициенты при поправках к длинам сторон после исправления не изменяются, то, приняв $(y_l - y_u) = \eta_i$, $(x_l - x_u) = \xi_i$, получим условные уравнения поправок второй группы с преобразованными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho''} [\eta v_{\beta}'] + [v_S \cos \alpha] + f'_x &= 0, \\ -\frac{1}{\rho''} [\xi v_{\beta}'] + [v_S \sin \alpha] + f'_y &= 0. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Этим уравнениям поправок соответствуют нормальные уравнения:

$$\begin{aligned} Ak_2 + Ck_3 + f'_x &= 0, \\ Ck_2 + Bk_3 + f'_y &= 0, \end{aligned} \quad (3.88)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} \eta_1^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} \eta_2^2 + \dots + \frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} \eta_{n+1}^2 + m_{S_1}^2 \cos^2 \alpha_1 + \dots + \\ &+ m_{S_n}^2 \cos^2 \alpha_n = \frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} [\eta^2] + [m_S^2 \cos^2 \alpha], \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$B = \frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} [\xi^2] + [m_S^2 \sin^2 \alpha], \quad C = -\frac{m_{\beta}^2}{\rho'^2} [\eta\xi] + [m_S^2 \sin \alpha \cos \alpha].$$

Решая нормальные уравнения (3.88), имеем

$$k_2 = \frac{C f'_y - B f'_x}{AB - C^2}; \quad k_3 = \frac{C f'_x - A f'_y}{AB - C}. \quad (3.90)$$

Вторичные поправки v_{β_i}'' в углы и v_{S_i} в стороны

$$v_{\beta_i}'' = \frac{m_{\beta}^2}{\rho''} (\eta_i k_2 - \xi_i k_3), \quad v_{S_i} = m_{S_i}^2 (k_2 \cos \alpha_i + k_3 \sin \alpha_i). \quad (3.91)$$

Контроль: $[v_{\beta}''] = 0$.

По вычисленным поправкам в углы определяют поправки к дирекционным углам $v_{\alpha_i} = v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_i}$, после чего находят поправки к приращениям координат

$$v_{\Delta x_i} = v_{S_i} \cos \alpha_i - \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''} \Delta y_i, \quad v_{\Delta y_i} = v_{S_i} \sin \alpha_i + \frac{v_{\alpha_i}}{\rho''} \Delta x_i. \quad (3.92)$$

Контроль: $[v_{\Delta x}] = -f'_x$, $[v_{\Delta y}] = -f'_y$.

По исправленным приращениям координат вычисляют уравненные координаты пунктов хода.

3.3.4. Оценка точности

В полигонометрическом ходе могут быть оценены какой-либо уравненный угол, дирекционный угол, сторона, абсцисса и ордината пункта (обычно в наиболее слабом месте — в середине хода).

Средняя квадратическая ошибка единицы веса при уравнении двухгрупповым способом

$$\mu = \sqrt{\frac{[p v v]}{r}} = \sqrt{\frac{[p_B v'_B]^2 + [p_B v_B^2] + [p_S v_S^2]}{3}}. \quad (3.93)$$

Средняя квадратическая ошибка функции уравненных элементов

$$M_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

где обратный вес функции F уравненных элементов сети

$$\frac{1}{P_F} = [q F F] - p_B \frac{[q a F]^2}{n+1} - \frac{[q b' F]^2}{A} - \frac{\left\{ [q c' F] - \frac{c}{A} [q b' F] \right\}^2}{B - \frac{c^2}{A}}, \quad (3.94)$$

где F_i — частные производные функции F по измеренным углам и сторонам, $a_i=1$ — коэффициент первого условного уравнения; b'_i, c'_i — преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы; A, B, C — коэффициенты нормальных уравнений второй группы; q — обратный вес.

Значения $[qFF]$, $[qaF]$, $[qb'F]$, $[qc'F]$ в формуле (94) приведены в табл. 3.70 [7, с.288].

В формулах табл. 3.70 $\rho = 2,063$, так как значения x, y, ξ, η даны в километрах, а результат получаем в сантиметрах, то, учитывая $1 \text{ км} = 10^5 \text{ см}$, имеем

$$\frac{10^5}{206265} = \frac{1}{2,063}$$

Таблица 3.70

Элемент	Угол β_i	Дирекционный угол	Сторона	Абсцисса	Ордината
$[qFF]$	$q\beta$	$iq\beta$	q_{Si}	$\frac{q\beta}{\rho^2}[(y_{i+1} - y)^2]_i^2 + [q_S \cos^2 \alpha]_i^2$	$\frac{q\beta}{\rho^2}[(x_{i+1} - x)^2]_i^2 + [q_S \sin^2 \alpha]_i^2$
$[qaF]$	$q\beta$	$iq\beta$	0	$-\frac{q\beta}{\rho^2}[(y_{i+1} - y)]_i^1$	$\frac{q\beta}{\rho}[(x_{i+1} - x)]_i^1$
$[qb'F]$	$\frac{q\beta}{\rho} \eta_i$	$\frac{q\beta}{\rho} [\eta]_i^1$	$q_{Si} \cos \alpha_i$	$-\frac{q\beta}{\rho^2}[(y_{i+1} - y)\eta]_i^1 + [q_S \cos^2 \alpha]_i^1$	$\frac{q\beta}{\rho^2}[(x_{i+1} - x)\eta]_i^1 + [q_S \sin \alpha \cos \alpha]_i^1$
$[qc'F]$	$-\frac{q\beta}{\rho} \xi_i$	$-\frac{q\beta}{\rho} [\xi]_i^1$	$q_{Si} \sin \alpha_i$	$\frac{q\beta}{\rho}[(y_{i+1} - y)\xi]_i^1 + [q_S \sin \alpha \cos \alpha]_i^1$	$-\frac{q\beta}{\rho^2}[(x_{i+1} - x)\xi]_i^1 + [q_S \sin^2 \alpha]_i^1$

3.3.5. Пример уравнивания полигонометрического хода любой формы двухгрупповым способом

Схема полигонометрического хода дана на рис. 3.20.

Исходные данные приведены в табл. 3.71.

Таблица 3.71

Пункт	Координаты, м		Дирекционные углы	Нас. пункт
	x	y		
Луч	65141,154	50819,311	226°18'13,4"	Панки
Лесная	66333,271	52435,089	86 15 09,3	Ужово

Измеренные углы и длины линий, измеренные светодальномерами, даны в табл. 3.72.

Таблица 3.72

Пункт	Углы поворота (левые), β	Длины линий, S м	Точность измерений
Луч 1	$181^{\circ}15'37,0''$	534,185	$m_{\beta}=2,0''$ $m_S = (13+2,5 \cdot S_{\text{ср(км)}}) \text{мм} = 14,2 \text{мм} = 1,42 \text{см}$
2	247 18 21,3	571,917	
3	119 38 54,7	494,395	
4	155 12 18,1	439,815	
5	161 46 19,7	411,513	
Лесная 6	254 45 17,9		

В табл. 3.73 приведена ведомость уравнивания полигонометрического хода. Для вычисления невязки f_{β} на рис. 3.20 имеем теоретическую сумму

$$\begin{aligned} \sum \beta_{\text{теор}} &= 180^{\circ}(n' - 2) + 2 \cdot 180^{\circ} - [180^{\circ} - (\alpha_k - \alpha_n)] = \\ &= 180^{\circ}(n' - 1) + (\alpha_k - \alpha_n); \end{aligned}$$

$$f_{\beta} = \sum \beta_{\text{пр}} - \sum \beta_{\text{теор}}, \quad (3.95)$$

где $n' = n + 2 = 7$ — число углов в замкнутом полигоне; n — число сторон в ходе. Для рассматриваемого примера

$$f_{\beta} = 1119^{\circ}56'48,7'' - 1080 - 39^{\circ}56'55,9'' = -7,2''.$$

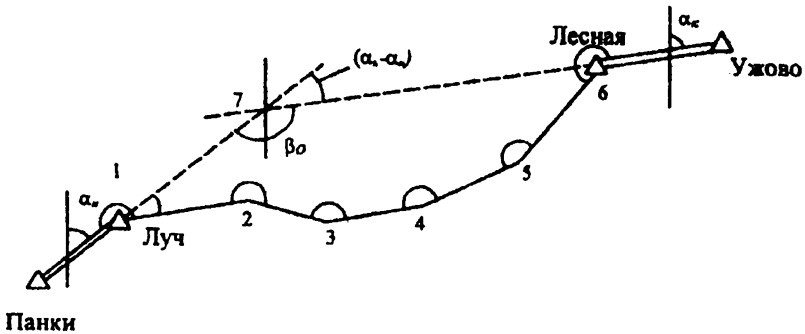


Рис. 3.20. Схема полигонометрического хода

Таблица 3.73

Пункты	Углы поворота (левые)	Дирекционные углы α	Длина сторон S_i , м	Приращения координат, м		Координаты, м	
				$\Delta x = S_i \cos \alpha$	$\Delta y = S_i \sin \alpha$	x	y
1	2	3	4	5	6	7	8
Панки	+1,2	46°18'13,4"					
Луч 1	181°15'37,0"	-2,1	-3	+2	-6	65141,154	50819,311
2	247 18 21,3	47 33 51,6	534,185	360,448	394,247		
	+1,2	-3,1	-21	+17	-16	65501,604	51213,552
3	119 38 54,7	114 52 14,1	571,917	-240,531	518,877		
	+1,2	-3,7	-5	+4	-9	65261,090	51732,413
4	155 12 18,1	54 31 10,0	494,395	286,960	402,592		
	+1,2	-3,3	+4	+7	-4	65548,054	52134,996
5	161 46 19,7	29 43 29,3	439,815	381,943	218,076		
	+1,2	-2,1	+11	+11	-2	65930,004	52353,068
Лесная 6	254 45 17,9	11 29 50,2	411,513	403,256	82,023		
Ужово		86.15 09,3				66333,271	52435,089
$\Sigma \beta_{\text{нр}}$	1119°56'48,9"		$\Sigma S = 2451,825$	$\Sigma 1192,076$	1615,815		
$\Sigma \beta_{\text{теор}}$	1119 56 55,9			$\Sigma 1192,117$	1615,778		
F_{β}	-7,2"			$f'_x = -0,041$	$f'_y = +0,037$		
Пред. $f_{\beta} = 2,5m\sqrt{n} = 12,2''$				$f_s = 0,055$			
$[v'_{\beta^2}] = 1,2^2 \cdot 6 = 8,64$				$f_s = \frac{1}{\Sigma S} = \frac{1}{44600}$			

Продолжение табл. 3.73

Пункты	Условные координаты, км		$\xi = x' - x_{10}$ км	$\eta = y' - y_{10}$ км	$\cos^2 \alpha$	$\cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$	$\sin^2 \alpha$	$v''_{\beta} = k_2 \eta - k_3 \xi =$ $= 1,615\xi + 1,367\eta$
	x'	y'						
9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	0	0	-0,477	-0,962	0,455	0,498	0,545	-2,09''
2	0,360	0,394	-0,117	-0,568	0,177	-0,382	0,823	-0,97
3	0,119	0,913	-0,358	-0,049	0,337	0,473	0,663	-0,65
4	0,406	1,316	-0,071	+0,354	0,754	0,431	0,246	0,37
5	0,788	1,534	+0,311	+0,572	0,960	0,195	0,040	1,28
6	1,191	1,616	+0,714	+0,654				2,05
$\Sigma =$	+2,864	+5,773	+0,002	+0,001	+2,683	+1,215	+2,317	-0,01

$$x_y = \frac{\sum x'}{n} = 0,477 \quad y_y = \frac{\sum y'}{n} = 0,962$$

$$\text{Контроль: } [\sin^2 \alpha] + [\cos^2 \alpha] = n \quad [v''_{\beta} v''_{\beta}] = 11,71$$

$$2,317 + 2,683 = 5$$

$$[\xi^2] = 0,981 \quad [\eta^2] = 2,131$$

$$[\xi \eta] = 1,163$$

$$[D^2_{y_i}] = [\xi^2] + [\eta^2] = 3,112$$

Окончание табл. 3.73

Пункты	$\nu \alpha_i = \sum \frac{\nu}{I} \beta$	$k'_2 \cos \alpha = 1,422 \cos \alpha$	$k'_2 \sin \alpha = 31,680 \sin \alpha$	$\nu S = (20) + (21)$	$\nu \Delta x = \nu S \cos \alpha - \frac{\nu \alpha}{\rho} \Delta y,$ см	$\nu \Delta y = \nu S \sin \alpha + \frac{\nu \alpha}{\rho} \Delta x,$ мм
18	19	20	21	22	23	24
1	-2,09"	0,96	-1,24	-0,28	0,21	-0,57
2	-3,06	-0,60	-1,52	-2,12	1,66	-1,57
3	-3,71	0,83	-1,37	-0,54	0,41	-0,94
4	-3,34	1,23	-0,83	+0,40	0,70	-0,42
5	-2,06	1,39	-0,33	+1,06	1,12	-0,19
6	-0,01					
Σ				-1,48	+4,10 = f_x	-3,69 = $-f_y$
				$[\nu S'] =$	6,15	

$$A = \frac{m_B^2 \cdot 10^{10}}{\rho''^2} [\eta^2] + m_S^2 [\cos^2 \alpha] = \frac{2,0^2}{206265^2} 2,131 \cdot 10^{10} + 1,42^2 \cdot 2,683 =$$

$$= 2,004 + 5,410 = 7,414;$$

$$B = \frac{m_B^2 \cdot 10^{10}}{\rho''^2} [\xi^2] + m_S^2 [\sin^2 \alpha] = \left(\frac{2,0}{2,063} \right)^2 0,981 + 1,42^2 \cdot 2,317 =$$

$$= 0,922 + 4,672 = 5,594;$$

$$C = \left(\frac{m_B \cdot 10^5}{\rho''} \right)^2 [\xi\eta] + m_S^2 [\sin \alpha \cos \alpha] = \left(\frac{2,0}{2,063} \right)^2 1,163 + 1,42^2 \cdot 1,215 =$$

$$= -1,093 + 2,450 = 1,357;$$

$$k_2 = \frac{cf'_y - Bf'_x}{AB - c^2} = \frac{1,357(+3,7) - 5,594(-4,1)}{7,414 \cdot 5,594 - 1,357^2} = \frac{27,96}{39,632} = 0,705;$$

$$k'_2 = \frac{m_B^2 \cdot 10^5}{\rho''} k_2 = 1,36; \quad k''_2 = m_S^2 k_2 = 1,422;$$

$$k_3 = \frac{cf'_x - Af'_y}{AB - c^2} = \frac{1,357(-4,1) - 7,414 \cdot 3,7}{39,632} = -\frac{32,996}{39,632} = -0,833;$$

$$k'_3 = \frac{m_B^2 \cdot 10^5}{\rho''} k_3 = -1,615; \quad k''_3 = m_S^2 k_3 = -1,680.$$

Уравнивание полигонометрического хода состоит из следующих этапов:

1. По формуле (3.95) вычисляют угловую невязку f_β и по формуле (3.86) — первичные поправки в углы. Затем по исправленным за первичные поправки углам находят дирекционные углы, приращения координат Δx и Δy , невязки

$$f'_x = \sum \Delta x - (x_k - x_n), \quad f'_y = \sum \Delta y - (y_k - y_n), \quad f_s = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$$

и $\frac{f_s}{\sum S}$.

2. В графах 10,11 вычисляют условные координаты (в км)

$$x'_i = \sum_1^i \Delta x, \quad y'_i = \sum_1^i \Delta y, \quad \text{после чего находят координаты } x_y = \frac{[x']}{n},$$

$y_y = \frac{[y']}{n}$ центра тяжести полигонометрического хода и вычисляют коэффици-

циенты $\xi = x' - x_y$, $\eta = y' - y_y$ уравнений поправок (3.87). Коэффициенты А, В, С нормальных уравнений определяют по формулам (3.89). Учитывая, что в нашем примере m_s является одинаковой для всех сторон, m_s^2 вынесено за знак суммы. Так как ξ и η приведены в километрах, то для перехода к сантиметрам нужно первые слагаемые формул (3.89) умножить на $(10^5)^2 = 10^{10}$. Коррелаты k_2 и k_3 находят по формулам (3.90) путем решения нормальных уравнении методом определителей. Правильность определения k_2 , k_3 контролируют путем подстановки их значений в формулы (3.88).

3. Вторичные поправки $v'\beta$ в углы и поправки v_{S_i} в стороны вычисляют по формулам (3.91), которые с учетом постоянства для данной сети m_β , m_s , k_1 , k_2 имеют вид:

$$v_\beta = k'_2 \eta - k'_3 \xi; \quad v_s = k''_2 \cos \alpha + k''_3 \sin \alpha,$$

$$\text{где } k'_2 = \frac{m_\beta^2 \cdot 10^{10}}{\rho''} k_2, \quad k'_3 = \frac{m_\beta^2 \cdot 10^5}{\rho''} k_3; \quad k''_2 = m_S^2 k_2, \quad k''_3 = m_S^2 k_3.$$

После подстановки численных значений имеем

$$v_\beta = 1,615\xi + 1,367\eta; \quad v_S = 1,422 \cos \alpha - 1,680 \sin \alpha.$$

Вторичные поправки в углы используют для определения попра-

вок $v_{\alpha_i} = \sum_1^i v_\beta$ в дирекционные углы, их значения записывают в графе 3 над

значениями секунд. Контролем правильности вычислений являются $[v_\beta] = 0$, $v_{\text{ан}} = 0$, $[v_S] = k'_2[\cos \alpha] + k'_3[\sin \alpha] = 1,422[\cos \alpha] - 1,680[\sin \alpha] = 1,422 \cdot 2,683 - 1,680 \cdot 3,155 = -1,485$ (в графе 22 $[v_S] = -1,48$).

4. По формулам (3.92) вычисляют поправки $v_{\Delta x}$, $v_{\Delta y}$ в приращения координат (графы 23, 24 табл. 3.73). Контролем правильности вычислений этих поправок являются равенства

$$[v_{\Delta x}] = -f'_x, \quad [v_{\Delta y}] = -f'_y.$$

Поправки $v_{\Delta x}$, $v_{\Delta y}$ в мм записывают над соответствующими значениями Δx , Δy (графы 5, 6).

5. С учетом исправления значений Δx и Δy вычисляют координаты x , y (графы 7, 8 табл. 3.73).

6. По формуле (3.93) определяют среднюю квадратическую ошибку единицы веса μ . Если при вычислении веса $P_\beta = \frac{c}{m_\beta^2}$ принять $c = m_\beta^2$, то $P_\beta = 1$,

$$\text{а } P_S = \frac{m_\beta^2}{m_S^2} = \frac{\gamma^2}{1,42^2} = 1,98. \text{ В этом случае } \mu \text{ будет равна средней квадратичес-$$

кой ошибке измерения угла, т.е.

$$\mu = m_{\beta} = \sqrt{\frac{[v'_{\beta}v'_{\beta}] + [v''_{\beta}v''_{\beta}] + P_S [v_S v_S]}{3}} = \sqrt{\frac{8,64 + 11,71 + 1,98 \cdot 6,15}{3}} = 3,3'',$$

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} = \frac{3,3}{\sqrt{6}} = 1,3''.$$

7. Используя формулу (3.94), определяют обратные веса элементов хода в наиболее слабом месте (в середине хода). В рассматриваемом примере наиболее слабым является дирекционный угол стороны 3–4 и координаты пункта 4. Подставляя в формулу (3.94) ее элементы, приведенные в табл.3.70 и вычисленные в табл. 3.74, имеем

$$\frac{1}{P_{\alpha_{ik}}} = \frac{i}{P} - P_{\beta} \frac{i}{p(n+1)} - 10^{10} \frac{(q[\eta]_i^i)^2}{A} - \frac{10^{10}}{\rho^{n^2}} \frac{\left\{ -q[\xi]_i^i - \frac{c}{A}(q[\eta]_i^i) \right\}^2}{\left(B - \frac{c^2}{A} \right)}.$$

Для рассматриваемого примера $p=P_{\beta}=q=1, i=3, A=7,414, B=5,594, C=1,357$, число сторон $n=5, [\eta]_i^i = -1,579, [\xi]_i^i = -0,952$.

С учетом этих значений

$$\frac{1}{P_{\alpha_{34}}} = 3 - \frac{3}{6} - \frac{(-1,579)^2}{2,063^2 \cdot 7,414} - \frac{\left\{ 0,952 - \frac{1,357}{7,414}(-1,579) \right\}^2}{2,063^2(5,594 - \frac{1,357^2}{7,414})} =$$

$$= 3 - 0,5 - 0,079 - 0,068 = 2,353$$

$$q_{\beta} = 1, \quad q_S = \frac{m_S^2}{m_{\beta}^2} = \left(\frac{1,42}{2,00} \right)^2 = 0,504.$$

Таблица 3.74

Элемент	Дирекционный угол	Абсцисса	Ордината
$[qFF]$	$iq_{\beta} = 3$	$\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(y_{i+1} - y)^2]_i' + [q_S \cos^2 \alpha]_i' =$ $= 0,645 + 0,488 = 1,133$	$\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(x_{i+1} - x)^2]_i' + [q_S \sin^2 \alpha]_i' =$ $= 0,059 + 1,024 = 1,083$
$[qaF]$	$iq_{\beta} = 3$	$-\frac{q_{\beta}}{\rho} [(y_{i+1} - y)]_i' = -1,330$	$\frac{q_{\beta}}{\rho} [(x_{i+1} - x)]_i' = 0,358$
$[qb'F]$	$\frac{q_{\beta}}{\rho} [\eta_i]_i' = -0,766$	$-\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(y_{i+1} - y)\eta]_i' + [q_S \cos^2 \alpha]_i' =$ $= 0,425 + 0,488 = 0,913$	$\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(x_{i+1} - x)\eta]_i' + [q_S \sin^2 \alpha]_i' =$ $= -0,101 + 0,297 = +0,196$
$[qc'F]$	$-\frac{q_{\beta}}{\rho} [\xi_i]_i' = 0,461$	$\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(y_{i+1} - y)\xi]_i' + [q_S \sin^2 \alpha]_i' =$ $= -0,207 + 0,297 = +0,090$	$-\frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(x_{i+1} - x)\xi]_i' + [q_S \cos^2 \alpha]_i' =$ $= 0,071 + 1,024 = 1,095$

Подставляя полученные в табл. 3.74 значения в формулу (3.94) и учитывая

$$A = 7,414, B = 5,594, C = 1,357, \text{ находим } B - \frac{C^2}{A} = 5,594 - \frac{1,357^2}{7,414} = 5,346,$$

$$\frac{C}{A} = \frac{1,357}{7,414} = 0,183 \text{ находим:}$$

$$\frac{1}{P_{\alpha_{34}}} = 3 - \frac{3}{6} - \frac{(-0,766)^2}{7,414} - \frac{[0,461 - 0,183(-0,766)]^2}{5,346} = 2,353;$$

$$m_{\alpha_{34}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_{34}}}} = 3,3'' \sqrt{2,353} = 5,1''; \quad m_{m_{\alpha}} = \frac{m_{\alpha_{34}}}{\sqrt{6}} = 2,1'';$$

$$\frac{1}{P_{x_4}} = 1,133 - \frac{(-1,330)^2}{6} - \frac{0,913^2}{7,414} - \frac{[0,090 - 0,183 \cdot (0,913)]^2}{5,346} = 0,725;$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_4}}} = 3,3 \sqrt{0,725} = 2,81 \text{ см}, m_{m_{x_4}} = \frac{m_{y_4}}{\sqrt{6}} = 1,15 \text{ см}.$$

$$\frac{1}{P_{y_4}} = 1,083 - \frac{0,358^2}{6} - \frac{0,196^2}{7,414} - \frac{(1,095 - 0,183 \cdot 0,196)^2}{5,346} = 0,847;$$

$$m_{y_4} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_4}}} = 3,3 \sqrt{0,847} = 3,04 \text{ см}, m_{m_{y_4}} = \frac{m_{y_4}}{\sqrt{6}} = 1,24 \text{ см}.$$

3.4. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАСЕЧКИ

3.4.1. Прямая многократная засечка

Для определения координат пункта методом прямых засечек достаточно с двух опорных пунктов измерить углы β_1, β_2 между направлениями на твердый и определяемый пункты (рис. 3.21). Для контроля и повышения точности измеряют с опорных пунктов больше двух углов, в этом случае засечка называется многократной. Дирекционный угол направления ip

$$\alpha_i = \alpha_{oi} + \beta_i.$$

Для вывода формул, позволяющих определять координаты пункта P , имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_p - y_i}{x_p - x_i},$$

откуда $(x_p - x_i) \operatorname{tg} \alpha_i = y_p - y_i$.

Для направления $1p$ и $2p$ находим

$$(x_p - x_1) \operatorname{tg} \alpha_1 = y_p - y_1, \quad (x_p - x_2) \operatorname{tg} \alpha_2 = y_p - y_2,$$

т.е. получили два уравнения с двумя неизвестными.

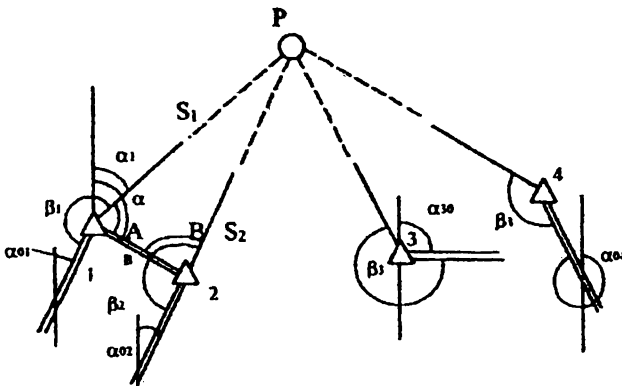


Рис. 3.21. Схема прямой многократной засечки

Вычитая из второго выражения первое, имеем

$$x_p(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) - x_2 \operatorname{tg}\alpha_2 + x_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = y_1 - y_2,$$

откуда

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{x_2 \operatorname{tg}\alpha_2 - x_1 \operatorname{tg}\alpha_1 + y_1 - y_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}; \\ y_p &= y_1 + (x_p - x_1) \operatorname{tg}\alpha_1 = y_2 + (x_p - x_2) \operatorname{tg}\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Кроме того, координаты пункта P можно определить по формулам котангентов (формулам Юнга), которые получают следующим способом. На рис. 3.21

$$x_p - x_1 = S_1 \cos \alpha_1; \quad y_p - y_1 = S_1 \sin \alpha_1. \quad (3.97)$$

В треугольнике $12P$ по теореме синусов имеем

$$S_1 = \frac{b \sin B}{\sin(A+B)}, \quad S_2 = \frac{b \sin A}{\sin(A+B)}.$$

Подставляя вместо S_1, S_2 полученные значения в формулы (3.97) и учитывая $\alpha_1 = \alpha - A$, $\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{b}$, $\sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{b}$, находим

$$\begin{aligned} x_p - x_1 &= \frac{b \sin B \cos(\alpha - A)}{\sin(A+B)} = \frac{b \sin B (\cos \alpha \cos A + \sin \alpha \sin A)}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} = \\ &= \frac{b (\cos \operatorname{ctg} A + \sin \alpha)}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A} = \frac{b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \left(\frac{x_2 - x_1}{b} \operatorname{ctg} A + \frac{y_2 - y_1}{b} \right) = \\ &= \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} A + y_2 - y_1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Аналогичным образом получаем

$$y_p - y_1 = \frac{(y_2 - y_1) \operatorname{ctg} A - x_2 + x_1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}. \quad (3.99)$$

Перенеся x_1 и x_2 в правые части, после небольших преобразований имеем формулы котангенсов, которые иногда называют формулами Юнга:

$$x_p = \frac{x_1 \operatorname{ctg} B + x_2 \operatorname{ctg} A + y_2 - y_1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}, \quad y_p = \frac{y_1 \operatorname{ctg} B + y_2 \operatorname{ctg} A + x_1 - x_2}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}. \quad (3.100)$$

Вычисления по формулам (3.100) удобно вычислять по следующей схеме:

$$\begin{array}{cc|cc} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ +1 & \operatorname{ctg} B & -1 & \operatorname{ctg} A \end{array} \quad (3.100') \\ \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \\ x_p \quad y_p$$

Числитель первой формулы (3.100) получают, складывая результаты решения определителей, а числитель второй — путем суммирования произведений элементов верхней строки на находящиеся под ними элементы нижней.

Если смотреть на пункт P , то опорный пункт 1 должен быть слева, а пункт 2 — справа.

Для априорной оценки точности определения координат x, y и положения пункта необходимо получить формулы средних квадратических ошибок

$$m_x, m_y, M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}.$$

Дифференцируя формулу (3.98) по переменным x_p, A и B , имеем

$$dx = \left[-\frac{(x_2 - x_1)}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) \sin^2 A} + \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} A + y_2 - y_1}{\sin^2 A (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2} \right] dA + \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} A + y_2 - y_1}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2 \sin^2 B} dB.$$

Учитывая формулу (3.98) и

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin[180^\circ - (A+B)]}{\sin A \sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin A \sin B},$$

где γ — угол между направлениями 1 P и 2 P в пункте P, находим

$$dx = \frac{1}{\sin \gamma} \left[\frac{(x-x_2) \sin B}{\sin A} dA + \frac{(x-x_1) \sin A}{\sin B} dB \right]$$

Используя теорему синусов, имеем $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{S_1}{S_2}$, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{S_2}{S_1}$, переходя

к средним квадратическим ошибкам и принимая $m_A = m_B = m_\beta$, получаем

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} (x-x_2)^2 + \frac{S_2^2}{S_1^2} (x-x_1)^2} = \\ &= \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 \cos^2 \alpha_2 + S_2^2 \cos^2 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Аналогичным образом, используя формулу (3.99), находим

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} (y-y_2)^2 + \frac{S_2^2}{S_1^2} (y-y_1)^2} = \\ &= \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 \sin^2 \alpha_2 + S_2^2 \sin^2 \alpha_1}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Значение

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad (3.103)$$

т.е. получили известную формулу средней квадратической ошибки определения положения точки методом прямой засечки.

Уравнивание результатов измерений в прямой многократной засечке обычно выполняют параметрическим способом.

Процесс уравнивания состоит из нескольких этапов.

1. Определение приближенных x_0, y_0 координат пункта P по формулам (3.96) или (3.100) с использованием двух опорных пунктов, с которых направления на P пересекаются примерно под прямым углом. Для контроля x_0, y_0 целесообразно определить дважды: с пунктов 1, 3 (x'_0, y'_0) и 2, 4 (x''_0, y''_0) (рис. 3.21), за окончательные значения принимают их средние значения, т.е. $x_0 = 0,5(x'_0 + x''_0), y_0 = 0,5(y'_0 + y''_0)$.

Вычисления выполняют с округлением до $0,1''$ и до $0,001$ м.

2. Составляют уравнения поправок

$$a_i \delta x + b_i \delta y + l_i = v_i, \quad (3.104)$$

где согласно формуле (3.20)

$$a_i = -20,6265 \frac{\sin \alpha_i}{S_{0i}}, \quad b_i = 20,6265 \frac{\cos \alpha_i}{S_{0i}}, \quad (3.105)$$

свободный член

$$l_i = \alpha_{0i} - \alpha'_i,$$

где α_{0i} определяют с использованием приближенных координат x_0, y_0 и координат опорных пунктов x_i, y_i по формуле

$$\alpha_{0i} = \arctg \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}, \quad (3.106)$$

а входящие в формулы (3.105) значения

$$S_{0i} = (y_0 - y_i) \cos \alpha_{0i} = (x_0 - x_i) \sec \alpha_{0i} = (x_0 - x_i) \cos \alpha_{0i} + (y_0 - y_i) \sin \alpha_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}. \quad (3.107)$$

3. Составляют нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [aa] \delta x + [ab] \delta y + [al] &= 0, \\ [ab] \delta x + [bb] \delta y + [bl] &= 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Решение нормальных уравнений обычно вычисляют методом определителей:

$$\delta x = \frac{D_x}{D}, \quad \delta y = \frac{D_y}{D}, \quad (109)$$

где $D_x = [ab][bl] - [al][bb]$, $D_y = [ab][al] - [aa][bl]$, $D = [ab][bb] - [ab]^2$.

4. Вычисляют уравненные значения координат

$$x_p = x_0 + \delta x, \quad y_p = y_0 + \delta y.$$

После этого по формуле (3.104) находят поправки v_i к дирекционным углам α'_i , т.е. находят $\alpha_i = \alpha'_i + v_i$. Критерием правильности вычислений является совпадение $[vv]$ с ее значением [7, с. 244].

$$[vv] = [ll] + [al]\delta x + [bl]\delta y. \quad (3.110)$$

Заключительным контролем решения задачи является равенство,

$$\alpha_i = \alpha'_i + v_i \text{ с } \alpha_i = \arctg \frac{y_p - y_i}{x_p - x_i}, \text{ где } x_p, y_p \text{ — уравненные значения координат пункта } P.$$

нат пункта P .

5. Оценка точности. Определяют

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}, \quad (3.111)$$

где n — число направлений.

Средние квадратические ошибки уравненных значений абсцисс и ординат вычисляют по формулам [7, с. 245]

$$m_x = \frac{m_\alpha}{10\sqrt{P_x}}, \quad m_y = \frac{m_\alpha}{10\sqrt{P_y}}, \quad (3.112)$$

$$\text{где } P_x = \frac{D}{[bb]}, \quad P_y = \frac{D}{[aa]}. \quad (113)$$

3.4.2. Пример уравнивания прямой многократной засечки

Исходные данные и измеренные величины приведены в табл. 3.75.

Схема расположения опорных и определяемого пунктов приведена на рис. 3.22.

Значения углов β_i приведены в табл. 3.75. Сначала выполним предварительную оценку точности, используя формулы (3.101) — (3.103). При $m_\beta = 5,0''$, для засечки с пунктов 1 и 2 имеем $\gamma = 72,89^\circ$; $S_1 = 1,41$ км, $S_2 = 1,35$ км, $\alpha_1 = 141^\circ 28'$; $\alpha_2 = 214^\circ 21'$. По формулам (3.101) — (3.103):

Таблица 3.75

Название пунктов i	Измеренные углы β_i	Координаты, м		Дирекционные углы α_i	Приближенные дирекционные углы α_{0i}	$l_i = \alpha_{0i} - \alpha'_i$	$l_i l_i$
		x	y				
1	51°56'02,4"	6915,311	5371,917	141°27'45,4"	141°27'46,7"	+1,3"	1,69
2	55 10 31,1	6928,831	7015,183	214 21 11,9	214 21 11,1	-0,8	0,64
3	50 14 27,1	4723,455	7163,191	320 01 35,7	320 01 36,8	+1,1	1,21
4	41 24 45,0	4715,433	5018,231	48 22 23,6	48 22 22,5	-1,1	1,21

$[ll] = 4,75$

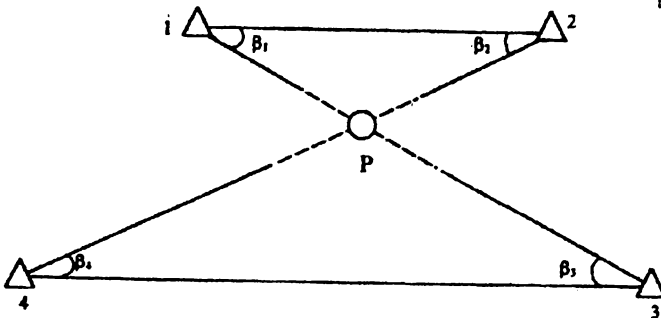


Рис. 3.22. Схема прямой многократной засечки

$$m_x = \frac{5\sqrt{1,41^2 \cos^2 214^\circ 21' + 1,35^2 \cos^2 141^\circ 28'}}{206,265 \sin 72,89^\circ} = 0,040 \text{ м,}$$

$$m_y = \frac{5\sqrt{1,41^2 \sin^2 214^\circ 21' + 1,35^2 \sin^2 141^\circ 28'}}{206,265 \sin 72,89^\circ} = 0,029 \text{ м,}$$

$$M = \sqrt{0,040^2 + 0,029^2} = 0,050 \text{ м,}$$

$$M = \frac{S\sqrt{1,41^2 + 1,35^2}}{206,265 \sin 72,89^\circ} = 0,050 \text{ м.}$$

При вычислении по формулам (3.101–3.103) значения ρ уменьшено в 1000 раз, так как S_1, S_2 — в км, а результат получаем в метрах.

Вычисление приближенных координат пункта P выполнено по формулам (3.100) и схеме (3.100').

$$x_2 = 6928,831 \quad y_2 = 7015,183 \quad x_1 = 6915,311 \quad y_1 = 5371,917$$

$$+1 \quad \text{ctg}B = \text{ctg}\beta_1 = 0,7831423 \quad -1 \quad \text{ctg}A = \text{ctg}\beta_2 = 0,6956574$$

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B = 1,4787997$$

$$x'_p = 5811,254 \quad y'_p = 6251,299$$

$$x_4 = 4715,433 \quad y_4 = 5018,231 \quad x_3 = 4723,455 \quad y_3 = 7163,191$$

$$+1 \quad \text{ctg}B = \text{ctg}\beta_3 = 0,8319610 \quad -1 \quad \text{ctg}A = \text{ctg}\beta_4 = 1,1337786$$

$$\text{ctg}A + \text{ctg}B = 1,9657396$$

$$x''_p = 5811,232 \quad y''_p = 6251,298$$

$$x_p = 0,5(x'_p + x''_p) = 5811,243 \quad y_p = 0,5(y'_p + y''_p) = 6251,298$$

Хорошая сходимость x'_p, x''_p и y'_p, y''_p свидетельствует о правильности

вычислений.

Дирекционные углы α'_i вычисляют по формулам:

$$\alpha'_1 = \alpha_{12} + \beta_1 = 89^\circ 31' 43,0'' + 51^\circ 56' 02,4'' = 141^\circ 27' 45,4'',$$

Таблица 3.76

№ пункта	α	S_i , км	$a_i = 20,6265 \times \frac{\sin \alpha_i}{S_i}$	$b_i = 20,6265 \times \frac{\cos \alpha_i}{S_i}$	l	v	$\alpha = \alpha' + v$	$\alpha = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i}$
1	141°27'46"	1,4115	-9,10	-11,43	+1,3"	1,31"	141°27'46,7"	141°27'46,8"
2	214 21 12	1,3537	8,60	-12,58	-0,8	-0,90	214 21 11,0	214 21 11,0
3	320 01 36	1,4195	9,34	11,14	+1,1	1,08	320 01 36,8	320 01 36,7
4	48 22 23	1,6496	-9,35	8,31	-1,1	-1,01	48 22 22,6	48 22 22,7

$$[vv] = 4,71$$

$$\alpha'_2 = \alpha_{21} - \beta_2 = 269^\circ 31' 43,0'' - 55^\circ 10' 31,1'' = 214^\circ 21' 11,9'',$$

$$\alpha'_3 = \alpha_{34} + \beta_3 = 269^\circ 47' 08,6'' + 50^\circ 14' 27,1'' = 320^\circ 01' 35,7'',$$

$$\alpha'_4 = \alpha_{43} - \beta_4 = 89^\circ 47' 08,6'' - 41^\circ 24' 45,0'' = 48^\circ 22' 23,6''.$$

В табл. 3.76 приведены результаты вычисления S_i по формулам (3.107) коэффициентов a_i , b_i по формулам (3.105), значение l переписано из табл. 3.75.

Используя значения a , b , c , находят коэффициенты нормальных уравнений (3.108):

$$[aa] = 311,43; [ab] = 22,17; [al] = 1,85; [bb] = 482,06; [bl] = -1,68,$$

после чего получают нормальные уравнения:

$$311,43\delta x + 22,17\delta y + 1,85 = 0,$$

$$22,17\delta x + 482,06\delta y - 1,68 = 0.$$

Решая эти уравнения методом определителей, имеем

$$D_x = \begin{vmatrix} -1,85 & 22,17 \\ +1,68 & 482,06 \end{vmatrix} = -929,06;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 311,43 & -1,85 \\ 22,17 & +1,68 \end{vmatrix} = 564,22;$$

$$D = \begin{vmatrix} 311,43 & 22,17 \\ 22,17 & 482,06 \end{vmatrix} = 149636,44;$$

$$\delta x = \frac{D_x}{D} = \frac{-929,06}{149636,44} = -0,00621 \text{ дм} = -0,621 \text{ мм},$$

$$\delta y = \frac{D_y}{D} = \frac{564,22}{149636,44} = 0,00377 \text{ дм} = 0,377 \text{ мм}.$$

Контроль : суммарное уравнение

$$333,60\delta x + 504,23\delta y + 0,17 = -2,072 + 1,901 + 0,17 = 0,00.$$

Окончательные координаты пункта P :

$$x = x_0 + \delta x = 5811,243 - 0,001 = 5811,242 \text{ м},$$

$$y = y_0 + \delta y = 6251,298 + 0,000 = 6251,298 \text{ м}.$$

Вычисление поправок v по формуле (3.104) и уравненных дирекционных углов $\alpha_i = \alpha'_i + v_i$ (α_i приведены в табл. 3.75) выполнено в табл. 3.76.

Заключительный контроль выполняют путем определения дирекционных углов с использованием уравненных значений координат x ; y пункта P по формуле (3.106).

Расхождения $\alpha = \alpha' + v$ и вычисленные по формулам (3.106) не должны превышать $0,3''$ [7].

Контроль вычисления поправок выполняется по формуле (3.110):

$$\begin{aligned} [vv] &= [bl] + [al]\delta x + [bl]\delta y = 4,75 + 1,85(-0,00621) - 1,68 \cdot 0,00377 = \\ &= 4,75 - 0,01 - 0,01 = 4,73. \end{aligned}$$

Полученные значения $[vv]$ отличаются от ее значения, полученного другим способом, на $0,02''$, т.е. эти величины практически совпадают.

Подставляя в формулу (3.111) значение $[vv]$ и $n = 4$, находим

$$m_{\alpha} = \sqrt{\frac{4,71}{4-2}} = 1,5''.$$

По формулам (3.113) имеем:

$$P_x = \frac{D}{[bb]} = \frac{149636,44}{482,06} = 310,4; \quad P_y = \frac{D}{[aa]} = \frac{149636,44}{311,43} = 480,5.$$

Используя формулы (3.112), находим:

$$m_x = \frac{m_{\alpha}}{10\sqrt{P_x}} = \frac{1,5}{10\sqrt{310,4}} = 0,009 \text{ м},$$

$$m_y = \frac{m_{\alpha}}{10\sqrt{P_y}} = \frac{1,5}{10\sqrt{480,5}} = 0,007 \text{ м},$$

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 0,011 \text{ м}.$$

3.4.3. Обратная многократная засечка

Для определения координат пункта P обратной засечкой (рис.3.23) на местности нужно измерить углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, при этом минимально необходимое число углов — два, например, β_1, β_2 , остальные измеренные углы являются избыточными, что позволяет получить из уравнивания вероятнейшие значения координат x, y пункта P по методу наименьших квадратов.

В первую очередь получим формулы однократной обратной засечки, когда x, y определяют по измеренным углам β_1 и β_2 .

На рис. 3.23 имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x - x_1}{y - y_1};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{x_2 - x}{y_2 - y} = \frac{x_2 - x_1 + x_1 - x}{y_2 - y_1 + y_1 - y} = \frac{\Delta x_{12} + \Delta x}{\Delta y_{12} + \Delta y} = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \beta_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta y} \operatorname{ctg}\beta_1 - 1}{\frac{\Delta x}{\Delta y} + \operatorname{ctg}\beta_1} = \frac{\Delta x \operatorname{ctg}\beta_1 - \Delta y}{\Delta x + \Delta y \operatorname{ctg}\beta_1}; \quad (3.114)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_3 = \frac{x_3 - x}{y_3 - y} = \frac{x_3 - x_1 + x_1 - x}{y_3 - y_1 + y_1 - y} = \frac{\Delta x_{13} + \Delta x}{\Delta y_{13} + \Delta y} = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \beta_2) =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_2} = \frac{\Delta x \operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta y}{\Delta x + \Delta y \operatorname{ctg}\beta_2}.$$

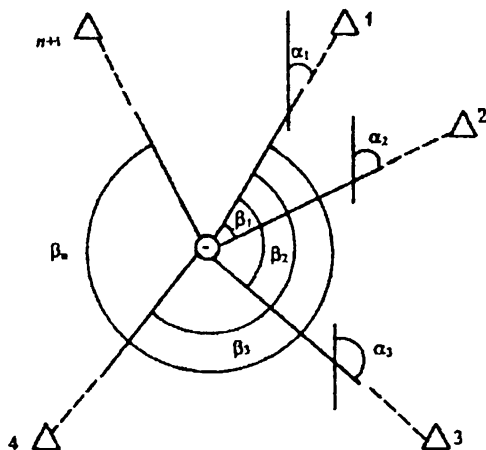


Рис. 3.23. Схема обратной многократной засечки

Выполняя небольшие преобразования вместо второго и третьего выражений, находим:

$$\begin{aligned}\Delta x_{12}\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x_{12}\Delta y \operatorname{ctg}\beta_1 &= \Delta x\Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 - \Delta y_{12}\Delta y - \Delta y^2; \\ \Delta x_{13}\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x_{13}\Delta y \operatorname{ctg}\beta_2 &= \Delta x\Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta y_{13}\Delta y - \Delta y^2.\end{aligned}$$

После преобразований имеем:

$$\begin{aligned}\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta x(\Delta x_{12} - \Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1) + \Delta y(\Delta x_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta y_{12}) &= 0, \\ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta x(\Delta x_{13} - \Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2) + \Delta y(\Delta x_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 + \Delta y_{13}) &= 0.\end{aligned}\quad (3.115)$$

Вычитая из первого выражения второе, получаем

$$\begin{aligned}\Delta x(\Delta x_{12} - \Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 - \Delta x_{13} + \Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2) + \\ + \Delta y(\Delta x_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta y_{12} - \Delta x_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta y_{13}) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta x_{12} - \Delta x_{13}}{\Delta x_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta x_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 - \Delta y_{12} + \Delta y_{13}}. \quad (3.116)$$

Поделив оба выражения (3.115) на Δx^2 , находим:

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1 + \frac{1}{\Delta x}(\Delta x_{12} - \Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1) + \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\Delta x}(\Delta x_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta y_{12}) &= 0, \\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1 + \frac{1}{\Delta x}(\Delta x_{13} - \Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2) + \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\Delta x}(\Delta x_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 + \Delta y_{13}) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{(\Delta x_{12} - \Delta y_{12}\operatorname{ctg}\beta_1) + (\Delta x_{12}\operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta y_{12})\operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1} = \\ &= \frac{(\Delta x_{13} - \Delta y_{13}\operatorname{ctg}\beta_2) + (\Delta x_{13}\operatorname{ctg}\beta_2 + \Delta y_{13})\operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1},\end{aligned}\quad (3.117)$$

т.е. получили две формулы для определения $\Delta x = x - x_1$, значение $x = x_1 + \Delta x$.

$$\text{Так как } \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

$$\text{то } y - y_1 = \Delta y = \Delta x \operatorname{tg}\alpha_1 = (x - x_1) \operatorname{tg}\alpha_1, \quad (3.118)$$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg}\alpha_1 = y + \Delta y.$$

Примем

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x_{12} \operatorname{ctg}\beta_1 + \Delta y_{12} = (x_2 - x_1) \operatorname{ctg}\beta_1 + (y_2 - y_1); \\ k_2 &= \Delta y_{12} \operatorname{ctg}\beta_1 - \Delta x_{12} = (y_2 - y_1) \operatorname{ctg}\beta_1 - (x_2 - x_1); \\ k_3 &= \Delta x_{13} \operatorname{ctg}\beta_2 + \Delta y_{13} = (x_3 - x_1) \operatorname{ctg}\beta_2 + (y_3 - y_1); \\ k_4 &= \Delta y_{13} \operatorname{ctg}\beta_2 - \Delta x_{13} = (y_3 - y_1) \operatorname{ctg}\beta_2 - (x_3 - x_1). \end{aligned} \quad (3.119)$$

С учетом этих обозначений вместо (3.116) — (3.118) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{k_4 - k_2}{k_3 - k_1}.$$

$$\Delta x = \frac{k_1 \operatorname{tg}\alpha_1 - k_2}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1} = \frac{k_3 \operatorname{tg}\alpha_1 - k_4}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1}; \quad \Delta y = \Delta x \operatorname{tg}\alpha_1; \quad (3.120)$$

$$x = x_1 + \Delta x;$$

$$y = y_1 + \Delta y.$$

Вычисления координат x, y методом обратной засечки можно выполнить по схеме, приведенной в табл. 3.77.

Значения k_1 и k_2 получают из решения определителей, а k_3, k_4 путем суммирования результатов умножения элементов верхней строки на лежащие под ними элементы нижней строки.

Для априорной оценки точности определения положения точки методом обратной засечки используют формулу, которую можно получить следующим способом. На рис. 3.23

Таблица 3.77

Пункт	Координаты		β	x_2-x_1	y_2-y_1	x_3-x_1	y_3-y_1	x_3-y_1	
	$x, м$	$y, м$							
1	x_1	y_1	0						
2	x_2	y_2	β_1	Численные значения x_2-x_1 -1	y_2-y_1 $\text{ctg}\beta_1$	Численные значения x_3-x_1 -1	y_3-y_1 $\text{ctg}\beta_1$		
3	x_3	y_3	β_2	$k_1 = (x_2-x_1)\text{ctg}\beta_1 + (y_2-y_1)$ $k_2 = -(x_2-x_1) + (y_2-y_1)\text{ctg}\beta_1$ $x = x_1 + \Delta x$	$k_3 = (x_3-x_1)\text{ctg}\beta_2 + (y_3-y_1)$ $k_4 = -(x_3-x_1) + (y_3-y_1)\text{ctg}\beta_2$ $y = y_1 + \Delta y$			$\text{tg}\alpha_1 = \frac{k_4 - k_2}{k_3 - k_1}$ $\Delta x = \frac{k_1 \text{tg}\alpha_1 - k_2}{1 + \text{tg}^2\alpha_1}$ $\Delta x' = \frac{k_3 \text{tg}\alpha_1 - k_4}{1 + \text{tg}^2\alpha_1}$ $\Delta y = \Delta x \text{tg}\alpha_1$	

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}, \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \beta_2) = \frac{y_3 - y}{x_3 - x}.$$

Подставляя во вторую и третью формулы значения $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ из

первой формулы, находим:

$$\begin{aligned} (x_2 - x) \operatorname{tg} \left(\beta_1 + \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \right) - y_2 + y &= 0, \\ (x_3 - x) \operatorname{tg} \left(\beta_2 + \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \right) - y_3 + y &= 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученные выражения по x, y, β_1, β_2 и учитывая

$$\frac{x_2 - x}{\cos \alpha_2} = d_2, \quad \frac{x_3 - x}{\cos \alpha_3} = d_3, \quad \frac{y_1 - y}{d_1} = \sin \alpha_1, \quad \frac{x_1 - x}{d_1} = \cos \alpha_1,$$

после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \left(-\sin \alpha_2 + \frac{d_2}{d_1} \sin \alpha_1 \right) dx + \left(\cos \alpha_2 - \frac{d_2}{d_1} \cos \alpha_1 \right) dy + d_2 d\beta_1 &= 0, \\ \left(-\sin \alpha_3 + \frac{d_3}{d_1} \sin \alpha_1 \right) dx + \left(\cos \alpha_3 - \frac{d_3}{d_1} \cos \alpha_1 \right) dy + d_3 d\beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Решая эти уравнения методом определителей, имеем

$$dx = \frac{D_x}{D}, \quad dy = \frac{D_y}{D}, \quad (3.122)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} (-\sin \alpha_2 + \frac{d_2}{d_1} \sin \alpha_1) & (\cos \alpha_2 - \frac{d_2}{d_1} \cos \alpha_1) \\ (-\sin \alpha_3 + \frac{d_3}{d_1} \sin \alpha_1) & (\cos \alpha_3 - \frac{d_3}{d_1} \cos \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \frac{d_3}{d_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \frac{d_2}{d_1} \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 -$$

$$-\frac{d_2 d_3}{d_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_2 - \frac{d_2}{d_1} \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 -$$

$$-\frac{d_3}{d_1} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{d_2 d_3}{d_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 =$$

$$= \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \frac{d_3}{d_1} \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{d_2}{d_1} \sin(\alpha_3 - \alpha_1) =$$

$$= d_2 d_3 \left[\frac{\sin(\beta_2 - \beta_1)}{d_2 d_3} + \frac{\sin \beta_1}{d_1 d_2} - \frac{\sin \beta_2}{d_1 d_3} \right].$$

Примем $\frac{\rho^*}{d_i} = r_i$.

Тогда $D = \frac{d_2 d_3}{\rho^*} [r_2 r_3 \sin(\beta_2 - \beta_1) + r_1 r_2 \sin \beta_1 - r_1 r_3 \sin \beta_2]$.

Учитывая (рис. 3.24)

$$\begin{aligned}r_2 r_3 \sin(\beta_2 - \beta_1) &= 2F_{P_2'3'}, \\r_1 r_2 \sin \beta_1 &= 2F_{P_1'2'}, \\r_1 r_3 \sin \beta_2 &= 2F_{P_1'3'}, \\F_{P_2'3'} + F_{F_1'2'} - F_{P_1'3'} &= F_{1'2'3'} = F,\end{aligned}$$

где $F_{P_{ij}}$ площадь треугольника P_{ij} , получим

$$D = \frac{2d_2 d_3 F}{\rho}. \quad (3.123)$$

Значение

$$D_x = \begin{vmatrix} -d_2 d \beta_1 & (\cos \alpha_2 - \frac{d_2}{d_1} \cos \alpha_1) \\ -d_3 d \beta_2 & (\cos \alpha_3 - \frac{d_3}{d_1} \cos \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d} [d_2 (d_3 \cos \alpha_1 - d_1 \cos \alpha_3) d \beta_1 + d_3 (d_1 \cos \alpha_2 - d_2 \cos \alpha_1) d \beta_2],$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (-\sin \alpha_2 + \frac{d_2}{d_1} \sin \alpha_1) & -d_2 d \beta_2 \\ (-\sin \alpha_3 + \frac{d_3}{d_1} \sin \alpha_1) & -d_3 d \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_1} [-d_3 (-d_1 \sin \alpha_2 + d_2 \sin \alpha_1) d \beta_2 + d_2 (-d_1 \sin \alpha_3 + d_3 \sin \alpha_1) d \beta_1].$$

Подставляя полученные значения в формулы (3.122), имеем:

$$\delta x = \frac{D_x}{D} = \frac{\rho}{2d_1 d_2 d_3 F} [d_2 (d_3 \cos \alpha_1 - d_1 \cos \alpha_3) d\beta_1 + d_3 (d_1 \cos \alpha_2 - d_2 \cos \alpha_1) d\beta_2] = \frac{1}{2F} [(r_1 \cos \alpha_1 - r_3 \cos \alpha_3) d\beta_1 + (r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1) d\beta_2],$$

$$\delta y = \frac{D_y}{D} = \frac{\rho}{2d_1 d_2 d_3 F} [d_3 (d_1 \sin \alpha_2 - d_2 \sin \alpha_1) d\beta_2 + d_2 (d_3 \sin \alpha_1 - d_1 \sin \alpha_3) d\beta_1] = \frac{1}{2F} [(r_1 \sin \alpha_1 - r_3 \sin \alpha_3) d\beta_1 + (r_2 \sin \alpha_2 - r_1 \sin \alpha_1) d\beta_2].$$

Так как $r_i \cos \alpha_i = x'_i - x$, $r_i \sin \alpha_i = y'_i - y$,

то

$$\delta x = \frac{1}{2F} [(x'_1 - x'_3) d\beta_1 + (x'_2 - x'_1) d\beta_2],$$

$$\delta y = \frac{1}{2F} [(y'_1 - y'_3) d\beta_1 + (y'_2 - y'_1) d\beta_2].$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам и принимая $m_{\beta_1} m_{\beta_2} = m_{\beta}$, получим:

$$m_x = \frac{m_{\beta}}{2F} \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (x'_1 - x'_3)^2},$$

$$m_y = \frac{m_{\beta}}{2F} \sqrt{(y'_2 - y'_1)^2 + (y'_1 - y'_3)^2}. \quad (3.124)$$

Значение

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \frac{m_{\beta}}{2F} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (3.125)$$

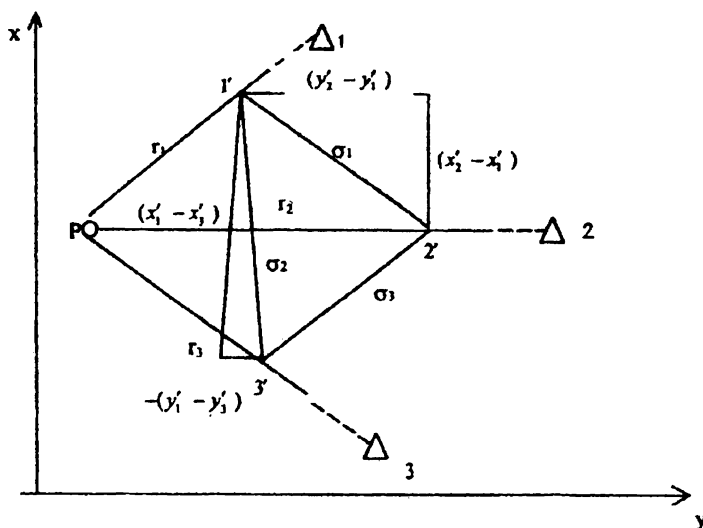


Рис. 3.24. Обращенный треугольник

т.е. получили известную формулу средней квадратической ошибки положения точки, определяемой обратной засечкой.

Если на пункте P измеряли направления способом круговых приемов, то

$$M = \frac{m_n}{2F} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}, \quad (3.126)$$

где m_n — средняя квадратическая ошибка направления.

Площадь F и стороны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ инвертного (обращенного) треугольника измеряют на схеме (см. рис. 3.24), на которой в произвольном масштабе по

направлениям на пункты 1, 2, 3 откладывают величины $r_i = \frac{\rho}{S_i}$, где S_i — рас-

стояния от пункта P до пункта i , получают обращенный треугольник $1', 2', 3'$ со сторонами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Если точки $1', 2', 3'$ лежат на одной прямой, то площадь $F = 0, m_x = m_y = M = \infty$,

т.е. имеем неопределенность решения обратной засечки.

Если измерены направления r'_i на 4 и более опорных точках (многократная обратная засечка), то вероятнейшие значения координат $x = x_0 + \delta x$; $y = y_0 + \delta y$ и ориентированного направления $z = z_0 + \delta z$ находят из уравнивания по направлениям. В приведенных формулах x_0, y_0, z_0 — приближенные значения неизвестных; $\delta x, \delta y, \delta z$ — поправки к ним. Значения x_0, y_0 определяют из решения обратной однократной засечки, а

$$z_0 = \frac{[\alpha_{0i} - r'_i]}{n}, \quad (3.127)$$

где α_{0i} — приближенные значения дирекционных углов, вычисленных с использованием x_0, y_0 .

Уравнение поправок для направления i имеет вид

$$v_i = a_i \delta x + b_i \delta y - \delta z + l_i, \quad (3.128)$$

$$\text{где } a_i = 20,6265 \frac{\sin \alpha_i}{S_i}, \quad b_i = -20,6265 \frac{\cos \alpha_i}{S_i},$$

свободный член $l_i = \alpha_{0i} - r'_i - z_0$, z_0 определяют по формуле (3.127).

Для исключения из уравнения (3.128) значения δz суммируют значения v_i , после чего получают

$$[v] = [a] \delta x + [b] \delta y - n \delta z + [l] = 0.$$

Так как $[l]=0$, то

$$\delta z = \frac{1}{n} ([a] \delta x + [b] \delta y)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (3.128), находим

$$v_i = \left(a_i - \frac{[a]}{n} \right) \delta x + \left(b_i - \frac{[b]}{n} \right) \delta y + l_i.$$

Принимая

$$A_i = a_i - \frac{[a]}{n}, \quad B_i = b_i - \frac{[b]}{n}, \quad (3.129)$$

получим

$$v_i = A_i \delta x + B_i \delta y + l_i. \quad (3.130)$$

Переходя к нормальным уравнениям, имеем:

$$\begin{aligned} [AA] \delta x + [AB] \delta y + [Al] &= 0, \\ [AB] \delta x + [BB] \delta y + [Bl] &= 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Решив уравнения методом определителей, находим

$$\delta x = \frac{D_x}{D}, \quad \delta y = \frac{D_y}{D}. \quad (3.132)$$

где

$$\begin{aligned} D &= [AA][BB] - [AB]^2, \quad D_x = \begin{vmatrix} -[Al] & [AB] \\ -[Bl] & [BB] \end{vmatrix} = [AB][Bl] - [BB][Al], \\ D_y &= \begin{vmatrix} [AA] & -[Al] \\ [AB] & -[Bl] \end{vmatrix} = [AB][Al] - [AA][Bl]. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Уравненные значения координат

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y.$$

Вычислив поправки v_i по формуле (3.130), получают уравненные направления

$$r_i = r'_i + v_i. \quad (3.134)$$

Заключительным контролем является вторичное определение

$$r_i = \alpha_i - z, \quad (3.135)$$

Таблица 3.78

Пункт	Координаты, м		Измеренные направления r'_i	Приближенные дирекционные углы, $\alpha_{д}$	$\alpha_{д} - r'_i$	$l_i = \alpha_{д} - r'_i - z_0$	l_i	S, км
	x	y						
1	6915,311	5371,917	0°00'00,0"	321°27'48,5"	321°27'48,5"	-0,24	0,06	1,411
2	6928,831	7015,183	72 53 24,5	34 21 11,2	321 27 46,7	-2,04	4,16	1,354
3	4723,455	7163,191	178 33 43,7	140 01 35,0	321 27 51,3	+2,56	6,55	1,419
4	4411,213	6234,315	217 11 03,1	178 38 55,3	321 27 52,2	+3,46	11,97	1,400
5	4715,433	5018,231	266 54 37,8	228 22 22,8	321 27 45,0	-3,74	13,99	1,650

36,73

+0,2

$$z_0 = \frac{[d_0i - z'_i]}{n} = \frac{321 27 48,74}{5} = +0,2$$

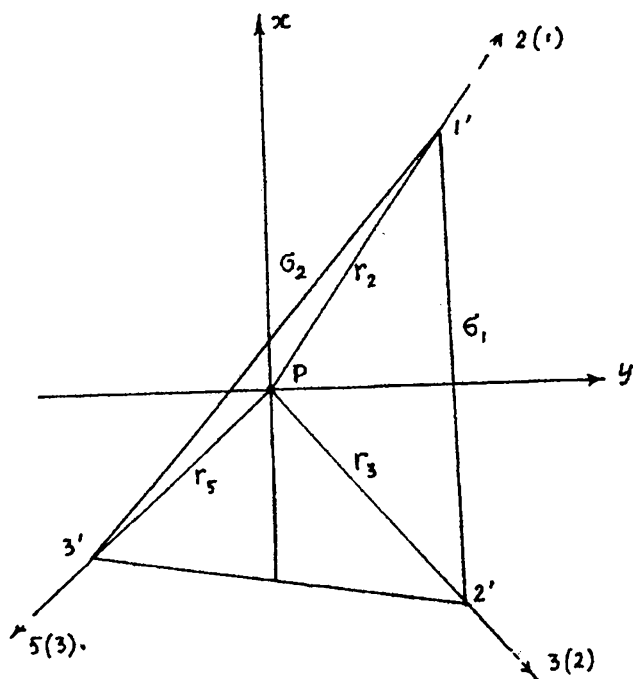


Рис. 3.25. Построение обращенного треугольника

где $\alpha_i = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x}$; $z = \frac{[\alpha - r]}{n}$.

Оценку точности выполняют по формулам:

$$m_r = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}; \quad m_x = \frac{m_r}{\sqrt{P_x}}; \quad m_y = \frac{m_r}{\sqrt{P_y}}; \quad P_x = \frac{D}{[BB]}; \quad P_y = \frac{D}{[AA]}. \quad (3.136)$$

3.4.4. Пример уравнивания обратной многократной засечки

В табл. 3.78 приведены координаты опорных пунктов 1, 2, . . . , 5 и

Таблица 3.79

	α_i	$d_i, \text{м}$	$x'_i,$ $y.c./\text{м}$	$y'_i,$ $y.c./\text{м}$	$x'_2 - x'_1$ $x'_1 - x'_3$	$y'_2 - y'_1$ $y'_1 - y'_3$	
2(1)	34°21'11"	1354	125,77	85,96	-237,16	7,42	$m_x = \frac{m\beta}{2F} \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (x'_1 - x'_3)^2} =$ $= \frac{5''}{44096} \sqrt{(-237,16)^2 + (208,81)^2} =$ $= 0,036 \text{ м}$ $m_y = \frac{m\beta}{2F} \sqrt{(y'_2 - y'_1)^2 + (y'_1 - y'_3)^2} =$ $= \frac{5''}{44096} \sqrt{7,42^2 + 179,40^2} = 0,020 \text{ м}$ $M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 0,041 \text{ м}$
3(2)	140 01 35	1419	-111,39	93,38	208,81	179,40	
5(3)	228 22 23	1650	-83,04	-93,44			
2(1)			125,77	85,96			
		2F=	44095,	874 =	44096		

Таблица 3.80

Пункт	Координаты		β	x ₂ -x ₁	y ₂ -y ₁	x ₃ -x ₁	y ₃ -y ₁	$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{k_4 - k_2}{k_3 - k_1} =$ $= 0,6835128$ $\Delta x = \frac{k_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 - k_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} =$ $= -1117,598$ $\Delta x' = \frac{k_3 \operatorname{tg}\alpha_1 - k_4}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} =$ $= 117,598$ $\Delta y = \Delta x \operatorname{tg}\alpha_1 =$ $= -763,893$
	x, м	y, м						
1(2)	6928,831	7015,183	0°00'00,0"	-2205,376	148,008	-2213,398	-1996,952	
2(3)	4723,455	7163,191	105 40 23,8	-1	$\operatorname{tg}\beta_1 = 0,2805841$	-1	$\operatorname{ctg}\beta_1 = 4,0048498$	
3(5)	4715,433	5018,231	194 01 11,7	$k_1 = 766,80144$ $k_2 = 2163,8473$ $x = x_1 + \Delta x = 5811,233$		$k_3 = -10861,279$ $k_4 = -5784,0948$ $y = y_1 + \Delta y = 6251,290$		

измеренные на пункте P направления.

Предварительно выполним оценку точности решения однократной обратной засечки при измерении из пункта P направлений на пункты 2, 3, 5 (рис. 3.25).

Для аналитического решения задачи вычисляют координаты вершин обращенного треугольника, используя формулы:

$$x'_i = r_i \cos \alpha_i = \frac{\rho''}{d_i} \cos \alpha_i; \quad y'_i = r_i \sin \alpha_i = \frac{\rho''}{d_i} \sin \alpha_i.$$

Используя x'_i, y'_i , находят удвоенную площадь

$$2F = x'_1 y'_2 + x'_2 y'_3 + x'_3 y'_1 - x'_2 y'_1 - x'_3 y'_2 - x'_1 y'_3 = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix}.$$

При использовании последней записи $2F$ равна сумме произведений левого элемента верхней строки на правый элемент нижней со знаком плюс и правого элемента верхней строки на левый элемент нижней со знаком минус.

После этого определяют m_x, m_y и M , используя формулы (3.124), (3.125).

Результаты вычислений для рассматриваемого примера приведены в табл. 3.79.

При графическом решении задачи на рис. 3.25, построенном в масштабе 1:2,39, имеем

$$2F = 73,0 \cdot 41,4 = 3022,2;$$

$$x'_2 - x'_1 = -62,5; \quad x'_1 - x'_3 = 54,5;$$

$$y'_2 - y'_1 = 2,0; \quad y'_1 - y'_3 = 46,8; \quad \sigma_1 = 63,0; \quad \sigma_2 = 73,0.$$

С учетом масштаба графического построения (результат нужно умно-

жить на 2,39)

$$m_x = \frac{5,0'' \cdot 2,39}{3022,2} \sqrt{(-62,5)^2 + 54,5^2} = 0,328 \text{ дм} = 0,033 \text{ м},$$

$$m_y = \frac{5,0'' \cdot 3}{3022,2} \sqrt{2,0^2 + 46,8^2} = 0,188 \text{ дм} = 0,019 \text{ м},$$

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{0,328^2 + 0,188^2} = 0,378 \text{ дм} = 0,038 \text{ м},$$

$$M = \frac{m_B}{2F} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{5,0'' \cdot 2,39}{3022,2} \sqrt{63,0^2 + 73,0^2} = 0,381 \text{ дм} = 0,038 \text{ м}.$$

Результаты аналитического и графического решения хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о правильности решения задачи.

В табл. 3.80 выполнено решение однократной обратной засечки по формулам (3.119), (3.120) по схеме, приведенной в табл. 3.77.

Используя полученные приближенные значения координат x_0 , y_0 пункта P и координаты опорных пунктов, вычисляют приближенные дирекционные углы (табл. 3.78)

$$\alpha_{0i} = \arctg \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}.$$

Вычисление коэффициентов уравнений поправок и приведенных нормальных уравнений выполнено в табл. 3.81.

Нормальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 331,452\delta x + 27,906\delta y + 44,702 &= 0, \\ + 27,906\delta x + 678,272\delta y + 76,823 &= 0. \end{aligned}$$

Решая их методом определителей, находим:

Таблица 3.81

Пункт	$a = +20,6265 \frac{\sin \alpha}{S}$	$b = -20,6265 \frac{\cos \alpha}{S}$	$A = a - \frac{[a]}{n}$	$B = b - \frac{[b]}{n}$	l
1	-9,107	-11,435	-9,073	-13,467	-0,24
2	+8,596	-12,577	+8,630	-14,609	-2,04
3	+9,338	+11,139	+9,372	+9,107	+2,56
4	+0,347	+14,729	+0,381	+12,697	+3,46
5	-9,344	+8,304	-9,310	+6,272	-3,74
$\Sigma \frac{1}{n}$	-0,034	+2,032	0,000	0,000	+0,00
		[A]	331,452	27,906	44,702
		[B]		678,272	76,823

Окончание табл. 3.81

$\Delta \delta x$	$B \delta y$	v	$r_i = r'_i + v$	$\alpha_i = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x}$	$\alpha - r_i = 321^{\circ}27'$	Уравненные направления r $= \alpha - z$
+1,14	+1,45	2,35	0°00'02,4"	321°27'51,0"	48,6"	0°00'02,5"
-1,09	1,58	-1,55	72 53 23,0	34 21 11,5	48,5	72 53 23,0
-1,18	-0,98	+0,40	178 33 44,1	140 01 32,5	48,4	178 33 44,0
-0,05	-1,37	+2,04	217 11 05,1	178 38 53,7	48,6	217 11 05,2
+1,17	-0,68	-3,25	266 54 34,6	228 22 23,2	48,6	266 54 34,7
-0,01	0,00			$z = 321^{\circ}27'48,5''$		
	$\Sigma v =$	-0,01				
	$[v^2] =$	22,81				

$$D = \begin{vmatrix} 331,452 & 27,906 \\ 27,906 & 678,272 \end{vmatrix} = 224035,87;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -44,702 & 27,906 \\ -76,823 & 678,272 \end{vmatrix} = -28176,292;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 331,452 & -44,702 \\ 27,906 & -76,823 \end{vmatrix} = -24215,683;$$

$$\delta x = -0,126 \text{ дм} = -0,013 \text{ м}, \quad \delta y = -0,108 \text{ дм} = -0,011 \text{ м}.$$

Значения:

$$x = x_0 + \delta x = 5811,233 - 0,013 = 5811,220 \text{ м},$$

$$y = y_0 + \delta y = 6251,290 - 0,011 = 6251,279 \text{ м}.$$

По формуле (3.130) вычисляют поправки v (табл. 3.81), находят $[v^2]$. Для контроля вычисление поправок получают $[v^2]$ по формуле

$$\begin{aligned} [v^2] &= [ll] + [Al]\delta x + [Bl]\delta y = \\ &= 36,73 + (-44,702)0,126 + (-76,823)0,108 = 22,80, \end{aligned}$$

т.е. полученное значение практически совпадает с вычисленным в табл. 3.81.

Оценка точности выполняется по формулам (3.136).

Средняя квадратическая ошибка направления (единицы веса)

$$m_r = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{22,81}{5-3}} = 3,38'' = 3,4''.$$

Веса координат:

$$P_x = \frac{D}{[BB]} = \frac{224035,87}{678,272} = 330,3; \quad P_y = \frac{D}{[AA]} = 675,9.$$

Средние квадратические ошибки координат:

$$m_x = \frac{m_r}{\sqrt{P_x}} = \frac{3,38}{\sqrt{330,3}} = 0,19 \text{ дм} = 0,019 \text{ м}$$

$$m_y = \frac{m_r}{\sqrt{P_y}} = \frac{3,38}{\sqrt{675,9}} = 0,13 \text{ дм} = 0,013 \text{ м}$$

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 0,023 \text{ м.}$$

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ГЕОДЕЗИИ	3
1.1. Предмет геодезии	3
1.2. Основные системы координат, используемые в геодезии	4
1.3. Ориентирование линий	17
1.4. Высоты точек местности. Влияние кривизны Земли на высоты ее точек	20
1.5. Система плоских прямоугольных координат в геодезии	23
1.6. Единицы мер, используемые в геодезии	24
2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ	27
А. Теория ошибок измерений	27
2.1. Теория ошибок измерений. Виды ошибок	27
2.2. Критерии оценки точности измерений	30
2.3. Исследование рядов ошибок на нормальное распределение ...	32
2.4. Определение коэффициента корреляции и уравнения регрессии по опытным данным	38
2.5. Оценка точности функций измеренных величин	43
2.6. Обработка результатов равноточных измерений одной величины	48
2.7. Интервальные оценки результатов измерений	51
2.8. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений	52
2.9. Нервноточные измерения. Веса результатов измерений	54
2.10. Веса функций измеренных величин	55
2.11. Обработка результатов неравноточных измерений одной величины	56

2.12. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений	60
Б. Метод наименьших квадратов	62
2.13. Понятие о методе наименьших квадратов	62
2.14. Параметрический способ уравнивания	63
2.15. Решение системы нормальных уравнений. Алгоритм Гаусса	65
2.16. Контроль составления и решения нормальных уравнений	68
2.17. Оценка точности уравненных неизвестных	73
2.18. Оценка точности функций уравненных неизвестных	77
2.19. Пример уравнивания равноточных измерений параметрическим способом	78
2.20. Пример уравнивания неравноточных измерений параметрическим способом	85
2.21. Составление нормальных уравнений по способу узлов проф. В.В.Попова	90
2.22. Коррелятный способ уравнивания	91
2.23. Контроль составления и решения нормальных уравнений коррелят	93
2.24. Оценка точности функций при уравнивании коррелятным способом	94
2.25. Пример уравнивания нивелирной сети коррелятным способом	95
2.26. Составление нормальных уравнений коррелят по способу проф. В.В. Попова	99
2.27. Решение нормальных уравнений методом приближений	100
2.28. Использование метода наименьших квадратов при аппроксимации функций	102
2.29. Априорная оценка точности геодезических сетей путем моделирования результатов измерений	105
2.30. Правила приближенных вычислений	107

3. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ	110
3.1. Уравнивание геодезических сетей коррелятным способом	111
3.1.1. Уравнивание триангуляции коррелятным способом. Условные уравнения. Число независимых условий	111
3.1.2. Оценка точности функций	122
3.1.3. Пример уравнивания сети триангуляции коррелятным способом	123
3.1.4. Уравнивание триангуляции двухгрупповым методом Урмаева–Крюгера	132
3.1.5. Пример уравнивания сети триангуляции двухгрупповым методом Урмаева–Крюгера	135
3.1.6. Условные уравнения в трилатерации	138
3.1.7. Пример уравнивания свободной сети трилатерации коррелятным способом	147
3.2. Уравнивание геодезических сетей параметрическим способом	156
3.2.1. Общие сведения об уравнивании геодезических сетей параметрическим способом	156
3.2.2. Уравнения поправок направлений	158
3.2.3. Уравнения поправок измеренных сторон	160
3.2.4. Составление редуцированных нормальных уравнений	161
3.2.5. Оценка точности	163
3.2.6. Пример уравнивания триангуляции параметрическим способом	164
3.2.7. Параметрические уравнения поправок при уравнивании углов	186
3.2.8. Пример уравнивания сети триангуляции параметрическим способом по углам	187
3.2.9. Уравнивание трилатерации параметрическим способом ..	193
3.2.10. Пример уравнивания трилатерации параметрическим способом	194

3.2.11. Уравнивание линейно-угловых сетей	203
3.3. Полигонометрия	226
3.3.1. Классификация и характеристика полигонометрии	226
3.3.2. Предрасчет точности полигонометрии	226
3.3.3. Строгое уравнивание одиночного полигонометрического хода	232
3.3.4. Оценка точности	237
3.3.5. Пример уравнивания полигонометрического хода любой формы двухгрупповым способом	238
3.4. Прямая и обратная засечки	239
3.4.1. Прямая многократная засечка	239
3.4.2. Пример уравнивания прямой многократной засечки	255
3.4.3. Обратная многократная засечка	259
3.4.4. Пример уравнивания обратной многократной засечки	270
ЛИТЕРАТУРА	280

Серия «Учебный курс»

Куштин И.Ф.

ГЕОДЕЗИЯ: ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

**Редактор А. Ильинова
Корректор О. Милованова
Верстка М. Курузьян**

**Подписано в печать 30.01.2006. Формат 84×108^{1/32}.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс.
Тираж 5000 экз. Заказ № 3984.**

**Издательский Центр «Март»
344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Темерницкая, 78,
тел.: (863) 240-86-48, 240-90-22
E-mail: mart@martdon.ru
Web: www.martdon.ru**

**Издательско-книготорговый центр «Март»
121059, г. Москва, ул. Брянская, 7, офис 312
тел.: (095) 241-56-91, 244-78-05, 243-51-58
E-mail: mart.m@astelit.ru**

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Тульская типография».
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109 .



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «МАРТ»

**344002, г. Ростов-на-Дону,
ул. Темерницкая, 78,
тел.: (863) 269-80-13, 240-86-48
E-mail: mart@martdon.ru
Web: www.martdon.ru**

ПРЕДЛАГАЕТ

- **Около 100 новых книг каждый месяц;**
- **Более 1000 наименований книжной продукции собственного производства;**
- **Более 2000 наименований обменной книжной продукции от лучших издательств России;**

ГАРАНТИРУЕТ

- **Гибкую систему скидок;**
- **Реальные цены;**
- **Надежный доход**

ЖДЕМ ПОКУПАТЕЛЕЙ!



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «МАРТ»

344002, г. Ростов-на-Дону,
ул. Темерницкая, 78,
тел.: (863) 269-80-13, 240-86-48
E-mail: mart@martdon.ru
Web: www.martdon.ru

Оптовая и розничная торговля:

- учебная литература для вузов;
- кодексы, комментарии, право;
- бухгалтерский учет;
- гуманитарные науки;
- справочная литература

ЖДЕМ ПОКУПАТЕЛЕЙ!



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «МАРТ»

344002, г. Ростов-на-Дону,
ул. Темерницкая, 78,
тел.: (863) 269-80-13, 240-86-48
E-mail: mart@martdon.ru
Web: www.martdon.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов:

- учебных пособий для вузов и колледжей;
- книг по бухгалтерскому учету, экономике, праву, информатике и другим наукам

Рассмотрим все предложения!