

Министерство образования Российской Федерации
Ухтинский государственный технический университет

И.Ф. Чупров, Е.А. Канева, А.А. Мордвинов

Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по высшему нефтегазовому образованию
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению 650700 – Нефтегазовое дело

Ухта 2004

УДК 622.276:532.5

Ч 92

Чупров И.Ф. Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа: Учебное пособие /И.Ф. Чупров, Е.А. Канева, А.А. Мордвинов. – Ухта: УГТУ, 2004. – 128 с.: ил.

ISBN 5-88179-345-5

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 650700 – Нефтегазовое дело.

В учебном пособии основное внимание уделено решению таких типов уравнений в частных производных, которые наиболее часто встречаются в нефтегазовом деле при изучении и исследовании процессов бурения скважин, добычи и трубопроводного транспорта нефти и газа.

Учебное пособие также будет полезно магистрам, аспирантам, научным работникам.

Рецензенты: кафедра физики Коми государственного педагогического института и начальник отдела разработки филиала ООО «ВНИИГАЗ» – «Севернипигаз», к.т.н., доцент Назаров А.В.

© Ухтинский государственный технический университет, 2004

© Чупров И.Ф., Канева Е.А., Мордвинов А.А., 2004

ISBN 5-88179-345-5

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение	5
Глава I. Основные понятия и определения	6
§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных	6
§ 2. Общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных	6
§ 3. О частных решениях	8
§ 4. Свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных	9
§ 5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка	10
Глава II. Уравнение колебаний	13
§ 1. Вывод уравнения колебания струны	13
§ 2. Начальные и граничные условия для уравнения колебания струны	16
§ 3. Решение уравнения колебания струны методом Фурье (методом разделения переменных)	17
§ 4. Анализ полученного решения	20
§ 5. Бесконечная струна. Решение методом Даламбера	22
§ 6. Исследование вынужденных колебаний струны	24
§ 7. Исследование колебаний в среде с сопротивлением	29
§ 8. Продольные колебания стержня	32
§ 9. Оператор Лапласа	36
§ 10. Некоторые сведения о бесселевых функциях	38
1. Решение уравнения Бесселя. Функция Бесселя I рода	38
2. Решение обобщенного уравнения Бесселя нулевого порядка	40
3. Ортогональность функций Бесселя	40
4. Функция Бесселя первого порядка	41
§ 11. Исследование свободных колебаний круглой мембраны	42
Глава III. Уравнение теплопроводности. Метод разделения переменных .	50
§ 1. Вывод уравнения линейной теплопроводности	50
§ 2. Краевые условия для уравнения теплопроводности	52
§ 3. Уравнение пьезопроводности при упругом режиме разработки месторождения	54
§ 4. Краевые условия для уравнения пьезопроводности	57
§ 5. Распространение тепла в ограниченных областях	58
§ 6. Неоднородное уравнение теплопроводности	67
§ 7. О методе разделения переменных	72
Глава IV. Уравнение теплопроводности. Решение методом интегральных преобразований	75
§ 1. Понятие метода интегральных преобразований	75
§ 2. Решение уравнения теплопроводности для неограниченной области	78

§ 3. Распространение тепла в полуограниченной области	81
§ 4. Косинус-преобразование для полубесконечной области	82
§ 5. Примеры применения конечных интегральных преобразований.....	84
§ 6. Распространение тепла в пласте при радиальном течении горячей жидкости	91
§ 7. Поле давления в полубесконечном пласте	95
§ 8. Определение давления в магистральном газопроводе с путевым отбором	97
§ 9. Обобщенные функции	101
§ 10. Распространение тепла в пласте при линейном течении горячей жидкости	104
Глава V. Уравнение Лапласа	107
§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа	107
§ 2. Гармонические функции	108
§ 3. Свойства гармонических функций	109
§ 4. Функция Грина	111
§ 5. Решение задачи Дирихле методом функции Грина	116
§ 6. Задача Дирихле для круга. Решение методом Фурье.....	117
§ 7. Теплопроводность в прямоугольном параллелепипеде.....	121
§ 8. Задача Дирихле для кольца. Формула притока из пласта в скважину.....	124
Библиографический список	127

Введение

В учебном пособии основное внимание уделено решению таких типов уравнений в частных производных, которые наиболее часто встречаются в нефтегазовом деле при изучении процессов бурения скважин, добычи и трубопроводного транспорта нефти и газа. Ряд решений иллюстрированы конкретными примерами из нефтегазового дела.

Уравнения в частных производных, наиболее часто встречающихся при решении инженерных задач, называют уравнениями математической физики. Имеющаяся литература по уравнениям математической физики из-за повышенной сложности изложения материала не всегда доступна не только для студентов, но и аспирантов, имеющих математическую базу технических вузов. В этой связи настоящее учебное пособие может оказать большую помощь студентам в их самостоятельной работе при выполнении курсовых и дипломных проектов, при выполнении заданий по научно-исследовательской работе.

Государственные образовательные стандарты, действующие сейчас, как известно, уделяют повышенное внимание именно этим слагаемым учебного процесса в современной высшей школе.

Учебное пособие написано для студентов, обучающихся по направлению подготовки 650700 – Нефтегазовое дело, включающее в себя три специальности:

090600 – Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений;

090700 – Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ;

090800 – Бурение нефтяных и газовых скважин.

Пособие также будет полезно для аспирантов, обучающихся по аналогичным научным специальностям.

Глава I. Основные понятия и определения

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных

Дифференциальным называется такое уравнение, в которое входит не только сама неизвестная функция, но и ее производные некоторых порядков. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является определение функций, удовлетворяющих заданному дифференциальному уравнению.

Может оказаться, что неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение вместе со своим производным, зависит от одного аргумента. Такое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением. С элементами теории обыкновенных дифференциальных уравнений читатель знаком из общего курса математики.

Если неизвестная функция зависит от нескольких аргументов и в уравнение входят производные от нее по этим аргументам, дифференциальное уравнение называют уравнением в частных производных. С элементами теории таких уравнений и с некоторыми приложениями к проблемам нефтепромышленной науки мы познакомимся в этом пособии.

Уравнения в частных производных, наиболее часто встречающиеся при решении инженерных задач, называются уравнениями математической физики.

Примечание. Не все уравнения математической физики являются дифференциальными уравнениями. Встречаются уравнения (Больцмана, Власова и их обобщения), где неизвестная функция как под знаком производной, так и под знаком интеграла. Такие уравнения называются интегро-дифференциальными.

§2. Общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$. Оно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой, содержащей одну произвольную постоянную $y = \varphi(x, c)$. Аналогично общее решение уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ содержит две произвольные постоянные $y = \varphi(x, c_1, c_2)$.

В дальнейшем часто будут встречаться линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Для однородного уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ общее решение есть линейная комбинация двух его частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, если только они линейно независимы

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

где c_1 и c_2 — const.

Общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_{ч.н.}$$

Каков же характер общего решения дифференциального уравнения в частных производных? Будет ли общее решение зависеть от произвольных постоянных, как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения? А может быть, роль произвольных постоянных будут выполнять другие произвольные элементы?

На эти вопросы нам поможет ответить рассмотрение простейших уравнений в частных производных.

Пример 1. Пусть функция $u = u(x, y)$. Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Ясно, что искомая функция $u(x, y)$ не зависит от x , но может быть любой функцией от y : $u(x, y) = \varphi(y)$.

Пример 2. $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$, где $f(y)$ – заданная функция. Все функции,

удовлетворяющие этому уравнению, имеют вид $u(x, y) = \int f(y) dy + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

Пример 3. $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$. Данное уравнение есть уравнение в частных

производных второго порядка. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$, где f – произвольная функция. Общим

решением этого уравнения будет функция

$$u(x, y) = \int f(y) dy + \varphi(x).$$

Так как $f(y)$ – произвольная функция, то и интеграл от нее будет произвольной функцией. Если обозначить $\int f(y) dy = F(y)$, то общее решение будет иметь вид $u(x, y) = F(y) + \varphi(x)$. Итак, общее решение зависит от двух произвольных функций.

Пример 4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. Непосредственной подстановкой можно показать, что функция $u(x, y) = x \cdot \varphi(x + y) + y \cdot F(x + y)$ является решением данного уравнения.

Таким образом, общее решение уравнения в частных производных 1-го порядка зависит от одной, а 2-го порядка – от двух произвольных функций.

Следует ожидать, что общее решение уравнения n -го порядка будет содержать n произвольных функций, т.е. будет зависеть от числа произвольных функций, равного порядку уравнения. Однако такое заключение в общем случае оказывается недостаточно точным, т.к. во многих случаях представление общего решения, как явно зависящего от произвольных функций, невозможно.

§3. О частных решениях

Пусть имеем обыкновенное дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$. Это уравнение определяет поле направлений, т.е. угловой коэффициент касательной к кривой в каждой точке в области, где задана функция $f(x, y)$.

Общее решение $y = \varphi(x, c)$ – бесконечное множество кривых, зависящих от одного параметра – произвольной постоянной. Чтобы из всех кривых выделить нужную (найти частное решение), необходимо задать точку плоскости $y(x_0) = y_0$. При этом предполагаем, что условия теоремы Коши выполняются.

Для уравнения второго порядка необходимо задать точку и угловой коэффициент в этой точке: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.

Для уравнения n -го порядка задается n условий

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1; \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Решение $z = z(x, y)$ этого уравнения можно истолковать как поверхность – интегральную поверхность в пространстве x, y, z .

Попробуем для уравнения (1.1) установить нечто аналогичное, как и для обыкновенного дифференциального уравнения, только в трехмерном пространстве. Место направления, о котором шла речь выше, соответствующего некоторой точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, должен занять наклон плоскости

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = z - z_0,$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ – угловые коэффициенты касательной плоскости, удовлетворяющие уравнению

$$F\left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (1.2)$$

В связи с тем, что уравнению (1.2) удовлетворяет бесчисленное множество пар $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ (ведь уравнение (1.2) определяет не сами значения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, а только некоторую определенную зависимость между ними), касательная плоскость в любой точке P_0 определяется не однозначно. Отсюда следует, что одной точки недостаточно для определения поверхности. Здесь для однозначного определения интегральной поверхности нужно задать не точку в пространстве, а целую пространственную кривую, через которую эта поверхность должна проходить.

Примечание. Для уравнений, где число переменных более двух, используют тот же геометрический язык для многомерного пространства.

§ 4. Свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Особое место в уравнениях математической физики занимают линейные уравнения. Это объясняется тем, что, с одной стороны, они составляют наиболее разработанную часть этой теории, а с другой стороны, описывая реальные физические процессы, находят многочисленные приложения в физике, в технике, в нефтегазопромысловом механике. Познакомимся с целым рядом замечательных свойств их решений, напоминающих соответствующие свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общий вид однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка имеет вид

$$L(u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F \cdot u = 0. \quad (1.3)$$

Более компактная запись

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + F \cdot u = 0.$$

Здесь A, B, \dots, F – заданные функции от x, y или $const$.

Если правая часть (1.3) отлична от нуля, т.е. $L(u) = f(x, y)$, то линейное уравнение называется неоднородным.

Пусть уравнение (1.3) имеет решения $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$. Тогда их линейная комбинация

$$u(x, y) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) + \dots + c_n u_n(x, y),$$

где c_i – произвольные постоянные, также является решением этого уравнения, что легко проверить непосредственной подстановкой. Этот принцип суперпозиции допускает важное обобщение. Предположим, что мы располагаем не конечным числом частных решений (1.3), а бесконечным их числом

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$$

Составим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i U_i(x, y).$$

Этот ряд будет решением уравнения (1.3), если: 1) он сходится к функции $u(x, y)$; 2) допускает почленное дифференцирование.

Принцип суперпозиции можно обобщить. Пусть решение уравнения (1.3) имеет вид $u(x, y, \Theta)$, где Θ – параметр, изменяющийся в конечном или бесконечном промежутке. Из предыдущего следует, что функция $c(\Theta) \cdot u(x, y)$ – тоже решение. Если Θ – непрерывно меняющийся параметр, то суммирование приведет к интегралу $\int c(\Theta) \cdot u(x, y, \Theta) d\Theta$, где интегрирование производится в пределах изменения параметра. И этот интеграл является решением уравнения (1.3).

§ 5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с двумя переменными x и y общего вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F \cdot u = f(x, t). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *гиперболическим* в точке в (x_0, y_0) , если величина $\delta(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0) \cdot C(x_0, y_0) > 0$, *эллиптическим*, если $\delta(x_0, y_0) < 0$, и *параболическим*, если $\delta(x_0, y_0) = 0$.

Уравнение (1.4) называется гиперболическим в области D , если оно гиперболическое в каждой точке этой области. Соответственно, уравнение (1.4) называется эллиптическим или параболическим в области D , если оно эллиптическое или параболическое в области D .

Отметим, что тип уравнения определяется только коэффициентами при частных производных второго порядка и не зависит ни от коэффициентов при первых производных и самой функции, ни от правой части.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, где $a^2 = \text{const}$. Здесь $A = a^2$, $B = 0$, $C = -1$.

$$\delta(x, t) = 0 - 4 \cdot (-1) \cdot a^2 = 4a^2 > 0.$$

Это уравнение, называемое волновым, будет гиперболическим.

Пример 2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ или $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Здесь $A = a^2 = \text{const}$, $B = C = 0$.

$$\delta(x, t) = B^2 - 4AC = 0.$$

Это уравнение параболического типа.

Пример 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. Здесь $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$.

$$\delta(x, t) = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0.$$

Это уравнение эллиптического типа.

Пример 4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. В данном случае $A = 1$, $B = 0$, $C = y$.

$$\delta(x, t) = -y.$$

При $y < 0$, $\delta(x, t) > 0$ – уравнение имеет гиперболический тип.

При $y = 0$, $\delta(x, t) = 0$ – уравнение имеет параболический тип.

При $y > 0$, $\delta(x, t) < 0$ – уравнение имеет эллиптический тип.

Линейное уравнение второго порядка, имеющее в разных точках области D разный тип, называется уравнением *смешанного типа*.

Таким образом, уравнение примера 4 смешанного типа.

В случае постоянных коэффициентов уравнение второго порядка не может быть уравнением смешанного типа.

Классификация уравнений с постоянными коэффициентами и с большим числом независимых переменных выглядит не намного сложнее, чем для двух переменных. Эти вопросы здесь рассматривать не будем.

Волновое уравнение на плоскости и в пространстве относятся к гиперболическому типу, уравнение теплопроводности на плоскости и в пространстве – к параболическому типу, а уравнение Лапласа в пространстве – к эллиптическому типу.

Зачем нужно классифицировать линейные уравнения по типам? Для этого есть несколько причин. Во-первых, три типа уравнений – гиперболический, параболический и эллиптический – соответствуют трем различным видам физических процессов – волновым, диффузионным и стационарным, соответственно. Во-вторых, сложное уравнение можно привести к каноническому (простейшему) виду, который хорошо изучен, и воспользоваться известными результатами. В-третьих, созданы программы для ЭВМ численного решения задач в случае уравнений канонического вида. Поэтому, приведя задачу к каноническому виду и решив с ее помощью стандартных программ, можно всегда вернуться к прежним координатам и получить решение исходной задачи.

Пример 5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Легко проверить, что это уравнение

параболического типа, т.к. $\delta(x, t) = 4 - 4 = 0$. Как найти решение этого уравнения? Сделаем замену переменных: $y - x = v$, $y = \eta$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

После подстановки этих производных в данное уравнение получим $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. Оно очень простое и имеет очевидное решение

$$u = \eta \cdot \varphi(v) + F(v),$$

где φ и F – произвольные функции.

Возвратимся к прежним координатам

$$u(x, y) = y \cdot \varphi(y - x) + F(y - x).$$

К функциям φ и F должно быть предъявлено только существование вторых производных. Можно непосредственно проверить, что полученная функция $u(x, y)$ удовлетворяет поставленной задаче.

Глава II. Уравнение колебаний

Уравнение малых колебаний струны было получено Б.Тейлором в 1715 году и изучено Ж.Даламбером и Л.Эйлером в 1745-1747 гг.

§ 1. Вывод уравнения колебания струны

Рассмотрим колебания струны, натянутой между двумя точками. Сделаем следующие упрощающие допущения:

1) Силу натяжения струны будем считать настолько значительной, что сопротивлением изгиба можно пренебречь по сравнению с натяжением. В покое струна имеет прямолинейную форму.

2) Будем рассматривать плоские колебания, т.е. такие, при которых в любой момент времени все точки струны находятся в одной и той же фиксированной плоскости.

Примем эту плоскость за координатную xOy (рис. 2.1). Обозначим уравнение изогнутой струны в момент t через $u = u(x, t)$. Эту функцию будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой.

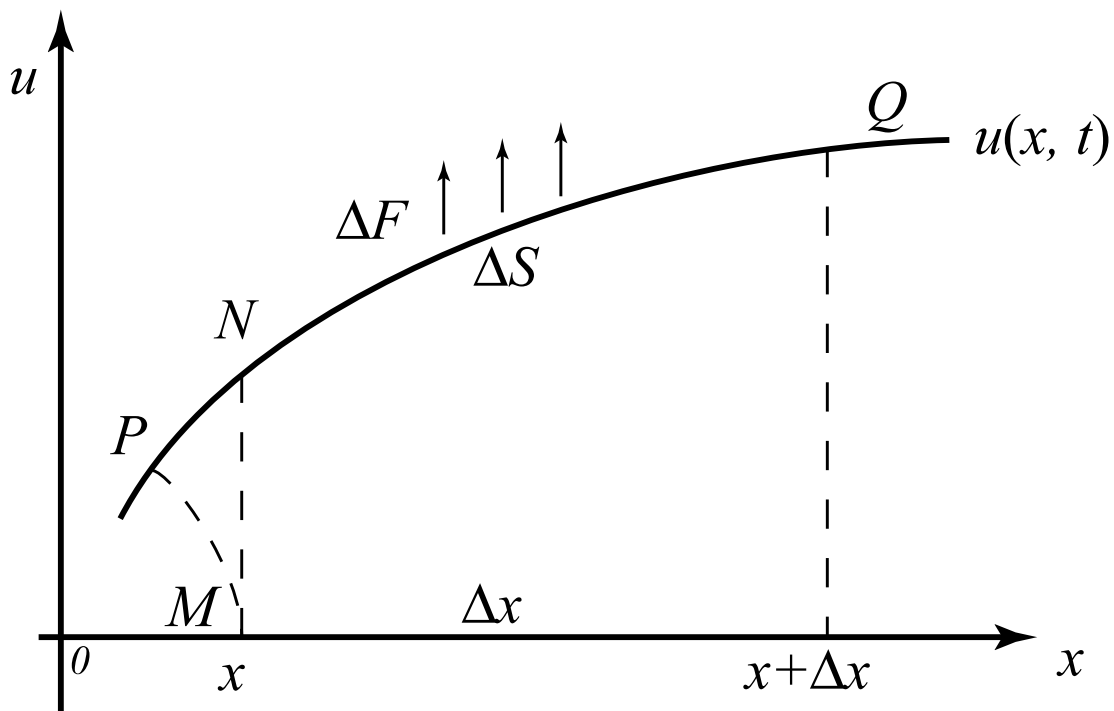


Рис. 2.1

3) Ограничимся рассмотрением малых колебаний, т.е. таких, при которых отклонение струны от положения равновесия в известном смысле мало.

4) Положим приблизительно, что колебания струны поперечные, т.е. такие, что траектория каждой точки струны (например, занимающей в состоянии покоя положение M) не криволинейна (что имеет место в действительности), а прямолинейна, перпендикулярна оси Ox . Фактическая траектория MP заменяется отрезком MN (рис. 2.1). При этом предположении проекция скорости точ-

ки N на ось Ox равна нулю, а на ось Ou — $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$. Проекции ускорения N равны нулю и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

5) Предположим, что внешние силы, действующие на движущуюся струну параллельны оси Ou . Если ΔF — проекция на ось Ou внешних сил, действующих на элемент струны ΔS (рис. 2.1), то обозначим через $f(x,t)$ величину

$$\frac{1}{\rho} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (2.1)$$

В силу эквивалентности ΔS и Δx

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dm}. \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что $f(x,t)$ есть величина внешней силы, рассчитанная на единицу массы струны. Она называется интенсивностью силы.

Приступим к выводу уравнения колебания струны. Обозначим через \bar{T} вектор силы натяжения струны. Если, пользуясь известным приемом механики, вырезать в струне отрезок $N_1 N_2$ (рис. 2.2), то влияние отброшенных частей системы на этот элемент струны будет эквивалентно действию сил $\bar{T}_1(x,t)$ и $\bar{T}_2(x,t)$, направленных по касательной к дуге $N_1 N_2$, но в разных направлениях.

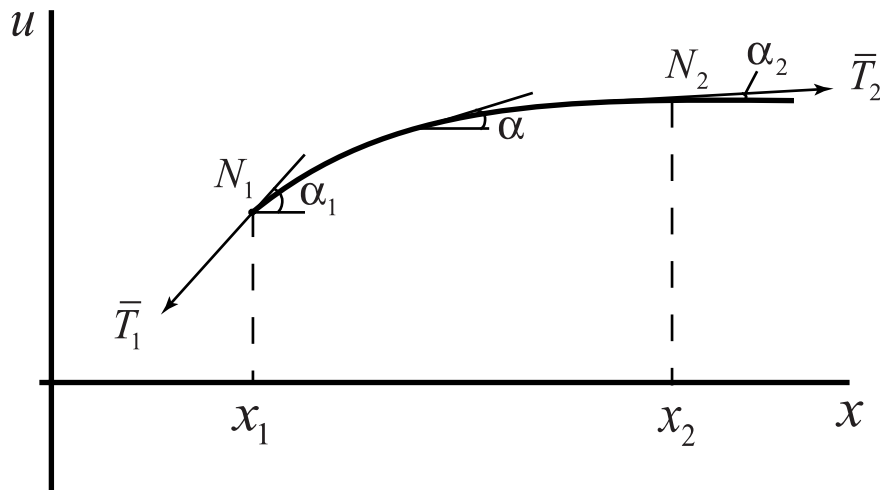


Рис. 2.2

Если через $\alpha = \alpha(x,t)$ обозначить острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t , то условие малости колебаний заключается в том, что величиной α^3 можно пренебречь.

Поскольку

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots, \quad (2.3)$$

то можно считать $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$. И, наконец, $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \alpha) \approx 0$. Откуда $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$.

Покажем теперь, что при наших упрощающих предположениях величину силы натяжения \bar{T} можно считать постоянной, не зависящей ни от точки ее приложения, ни от времени t . Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси Ou и внешние силы также параллельны этой оси, то сумма проекций сил натяжения на ось Ox должна равняться нулю

$$-\bar{T}_1 \cos \alpha_1 + \bar{T}_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (2.4)$$

Отсюда в силу $\cos \alpha \approx 1$ заключаем, что

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2. \quad (2.5)$$

Как отмечалось выше, силы \bar{T}_1 и \bar{T}_2 направлены по касательным к струне, величина этих сил постоянна и равна \bar{T}_0 . Согласно (2.4) сумма проекций сил \bar{T}_1 и \bar{T}_2 на ось Ox равна нулю. Вычислим сумму проекций этих же сил на ось Ou :

$$\begin{aligned} -T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 &= T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \\ &= T_0 (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = T_0 \left[\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) написано для участка струны, проектирующегося в интервал $(x, x+dx)$ оси абсцисс. К квадратной скобке (2.6) применена теорема Лагранжа.

Равнодействующая всех внешних сил, приложенных к участку длиной dx , будет приближенно равна $f(x, t) dx$.

Сейчас найдены все силы, действующие на участок длины dx . Применим второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих сил (в силу малости участка можно его рассматривать в виде материальной точки).

Масса участка струны равна ρdx , ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + f(x, t) dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(x, t), \quad (2.7)$$

где $a^2 = T_0/\rho$.

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами и называется уравнением колебания струны или одномерным волновым уравнением. Если $f(x, t) = 0$, то (2.7) называется однородным. Тогда оно описывает свободные колебания струны без воздействия внешних сил.

§ 2. Начальные и граничные условия для уравнения колебания струны

Как отмечалось выше, дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка имеют бесчисленное множество решений, зависящих от двух произвольных функций. Чтобы определить произвольные функции, т.е. выделить частные решения, нужно на искомую функцию $u(x, t)$ наложить дополнительные условия. Аналогичное явление было при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, когда отыскивание произвольных постоянных из общего решения производилось по заданным начальным условиям.

При решении задачи о колебаниях струны дополнительные условия могут быть двух видов: начальные и граничные. Начальные условия показывают, в каком состоянии находилась струна в момент начала колебания. Начальное положение точек струны задается условием

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2.8)$$

а начальная скорость

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad (2.9)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – заданные функции.

Граничные условия показывают, что происходит на концах струны во время колебательного процесса. В простейшем случае, когда концы струны закреплены, функция $u(x, t)$ должна быть подчинена условиям

$$u_{x=0} = 0, \quad u_{x=l} = 0. \quad (2.10)$$

Сформулируем теперь математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, закрепленной на обоих концах.

Решить однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

при начальных условиях

$$u_{t=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad (2.12)$$

и граничных условиях

$$u_{x=0} = 0; \quad u_{x=l} = 0. \quad (2.13)$$

§ 3. Решение уравнения колебания струны методом Фурье (методом разделения переменных)

Имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.14)$$

при граничных условиях

$$u_{x=0} = u_{x=l} = 0, \quad (2.15)$$

и начальных условиях

$$u_{t=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (2.16)$$

Метод Фурье является классическим методом решения уравнений в частных производных.

Будем искать решение (2.14) при условиях (2.15) и (2.16), в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени t , а другая – от координаты, т.е.

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \quad (2.17)$$

или $u = X \cdot T$. Если (2.17) является решением, то оно должно удовлетворять (2.14). Подставив (2.17) в (2.14), получим $T'' \cdot X = a^2 T'' \cdot X$ или

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (2.18)$$

Переменные разделились.

Так как левая часть (2.18) зависит только от времени t , а правая – от координаты x , то равенство (2.18) возможно при условии, что эти отношения постоянны, т.е.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = c.$$

Имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'' - a^2 c T = 0, \quad (2.19)$$

$$X'' - c X = 0. \quad (2.20)$$

Решим уравнение (2.19), учитывая условие (2.15)

$$X'' - c X = 0$$

при $X(0) = X(\ell) = 0$ – граничные условия.

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - c = 0$; $k^2 = c$.

Пусть:

а) $c = \lambda^2$, тогда $k_{1,2} = \pm \lambda$, $X = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$, решение тривиальное. При $X(0) = X(\ell) = 0$, $A = 0$; $B = 0$; $X = 0$.

б) $c = 0$; $k_{1,2} = 0$; $X = A + Bx$.

Учитывая начальные условия $X(0) = X(\ell) = 0$; $A = B = 0$; $X = 0$,

в) $c = -\lambda^2$; $k_{1,2} = \pm \lambda i$.

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Подчиним граничным условиям $X(0) = X(\ell) = 0$

$$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 0, \\ A \cos \lambda \ell + B \sin \lambda \ell = 0, \end{cases}$$

при $A = 0$; $B \sin \lambda \ell = 0$; $B \neq 0$, тогда $\sin \lambda \ell = 0$; $\lambda = \pi n / \ell$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Решение (2.20) примет вид

$$X_n = B_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Решаем уравнение (2.19)

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad \text{или} \quad T'' + \left(\frac{a \pi n}{\ell} \right)^2 T = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + \left(\frac{a \pi n}{\ell} \right)^2 = 0.$$

Общее решение (2.20) запишется в виде:

$$T_n = M_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + N_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t.$$

Решение исходного уравнения колебаний (2.14) примет вид

$$u_n(x, t) = \left(M_n \cdot \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + N_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \cdot B_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Обозначим $M_n B_n = a_n$, $N_n B_n = b_n$.

Решение уравнения (2.14) при граничных условиях (2.15)

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Так как линейные уравнения обладают свойством, что сумма решений есть решение, то решение (2.14) будет иметь вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.21)$$

Теперь необходимо подобрать коэффициенты a_n и b_n так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям (2.16). Подставляя в (2.21) $t = 0$ и учитывая (2.16), получим равенство

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = f(x), \quad (2.22)$$

которое должно выполняться для всех x из промежутка $(0, \ell)$.

Равенство (2.22) представляет разложение функции $f(x)$ в ряд по синусам.

Используя теорию рядов Фурье, находим

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (2.23)$$

Аналогичным образом определяем и коэффициент b_n . Только предварительно нужно продифференцировать (2.21) по t , а затем уже подставить $t = 0$.

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (2.24)$$

Подставляя выражения a_n и b_n в ряд (2.21), окончательно найдем решение поставленной задачи.

Мы не останавливаемся на условиях, которые надо наложить на $f(x)$ и $F(x)$, чтобы было оправдано сделанное допущение о возможности почленно-го дифференцирования ряда (2.21). Обычно в физических задачах эти условия соблюдаются.

§ 4. Анализ полученного решения

Рассмотрим n -й член полученного ряда

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(a_n \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \quad (2.25) \\ &= A_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x \sin \left(\frac{a\pi n}{\ell} t + \varphi_n \right), \end{aligned}$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}$.

Зависимость (2.25) представляет периодические колебания с амплитудой, равной $A_n \sin(\pi n/\ell) \cdot x$; $\omega_n = a\pi n/\ell$ – частота колебаний; φ_n – начальная фаза, так как амплитуда зависит от x , то это более сложные колебания, чем гармонические. $\frac{2\ell}{an} = T_k$ – период колебания; $\frac{a\pi n}{\ell} = \omega_n$ – собственная частота колебания.

Учитывая, что $a^2 = T_0/\rho$, то $\omega_n = (\pi n/\ell) \sqrt{T_0/\rho}$. Собственная частота обратно пропорциональна длине струны ℓ , корню квадратному плотности ρ материала струны и прямо пропорциональна натяжению струны T_0 .

Мы знаем, что высота тона зависит от частоты колебания струны. Сила звука зависит от амплитуды колебаний. Существуют точки, в которых амплитуда обращается в нуль: при $x = 0$; ℓ/n ; $2\ell/n$; ...; $(n-1)\ell/n$ – эти точки называются узлами стоячей волны.

Существуют точки, в которых амплитуда имеет максимальное значение. Это точки, в которых $\sin(\pi n/\ell)x = 1$, или $x = (2n-1/n)\ell$ – эти точки называются точками пучности. Колебание называется стоячей волной.

Рассмотрим пример:

Найти функцию $f(x, t)$, определяющую колебания закрепленной струны $u_{x=0} = u_{x=l} = 0$ и возбуждаемой оттягиванием ее в точке $x = c$ на величину h (рис. 2.3). Начальная скорость равна нулю.

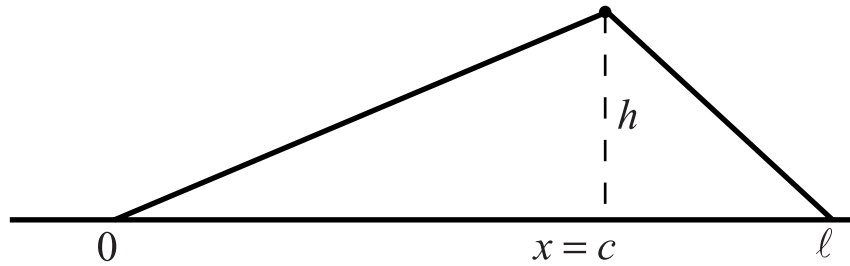


Рис. 2.3

Итак, найдем решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.26)$$

при граничных условиях

$$u_{x=0} = u_{x=l} = 0, \quad (2.27)$$

и начальных условиях

$$u(x; 0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & x \in [0, c), \\ \frac{h(x-c)}{c-l} + h, & x \in [c, l], \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.29)$$

и коэффициенты a_n и b_n .

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^c \frac{h}{c} x \sin \frac{\pi n}{l} x dx + \int_c^l \left(\frac{h(x-c)}{c-l} + h \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right],$$

$$b_n = 0.$$

и окончательно

$$u(x, t) = \frac{2lh(\ell - c + 1)}{\pi^2(\ell - c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{\ell} \cos \frac{\pi n a t}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

§ 5. Бесконечная струна. Решение методом Даламбера

В математике часто рассматриваются бесконечные области. Если граничные эффекты длительное время не влияют на среднюю часть области, то область называют бесконечной.

В этом случае будут отсутствовать граничные условия, т.е. необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0; \quad x \in (-\infty; \infty), \quad (2.30)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= F(x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Эта задача называется задачей Коши.

Общее решение уравнения (2.30) зависит от произвольных функций, и число их соответствует порядку уравнения.

Непосредственной проверкой устанавливается, что общим решением уравнения (2.30) является функция

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (2.32)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \varphi''(x - at) + a^2 \psi''(x + at). \end{aligned}$$

Подставляя полученные равенства в (2.30), видим, что (2.32) есть решение уравнения (2.30).

Общее решение (2.32) подчиним начальным условиям

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \end{cases}$$

Проинтегрируем второе равенство на $[0; x]$

$$-a \int_0^x \varphi'(x) dx + a \int_0^x \psi'(x) dx = \int_0^x F(x) dx,$$

или

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(x) dx,$$

или

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + c, \text{ где } c = \psi(0) - \varphi(0).$$

Составим систему:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + c. \end{cases}$$

Решая ее, получим:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx + \frac{c}{2}, \\ \varphi(x) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Перейдем к первоначальным аргументам $x + at$, $x - at$, тогда

$$\begin{aligned} \psi(x + at) &= \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x) dx + \frac{c}{2}, \\ \varphi(x - at) &= \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x) dx - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно решение уравнения (2.30) примет вид:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx. \quad (2.33)$$

Выражение (2.33) является решением уравнения методом Даламбера для бесконечной струны.

Полученное решение удовлетворяет как данному уравнению, так и начальным условиям.

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (2.33), представляет процесс распространения волны при наличии начальной скорости и начального отклонения. Если фиксировать $t = t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент t_0 ; фиксируя $x = x_0$, получим функцию $u(x_0, t)$, дающую процесс

движение точки x_0 . Предположим, что наблюдатель, находившийся в точке $x_0 = 0$ в момент $t = 0$, движется со скоростью a в положительном направлении. Введем систему координат, связанную с наблюдателем, полагая $x' = x - at$, $t' = t$. В этой подвижной системе координат наблюдатель все время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $f(x - at)$ представляет неизменный профиль, перемещающийся в положительном направлении оси Ox со скоростью a (распространяющуюся или бегущую волну). Функция $f(x + at)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси Ox со скоростью a . Таким образом, решение (2.33) задачи Коши для бесконечной струны есть суперпозиция двух волн.

При этом:

$$\varphi_1(x + at) + \varphi_2(x - at),$$

$$\varphi_1(x + at) = \frac{1}{2} [f(x + at) + \psi(x + at)],$$

$$\varphi_2(x - at) = \frac{1}{2} [f(x - at) - \psi(x - at)],$$

где $\psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x F(\alpha) d\alpha$.

§ 6. Исследование вынужденных колебаний струны

Уравнение вынужденных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t), \quad (2.34)$$

где $G(x, t) = \frac{1}{\rho} \varphi(x, t)$;

$\varphi(x, t)$ – плотность распределения внешних сил.

Рассмотрим струну конечной длины ($0 \leq x \leq \ell$), закрепленную на концах

$$u|_{t=0} = u|_{x=\ell} = 0, \quad (2.35)$$

и при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (2.36)$$

Вынужденное колебание – сложное колебание, состоящее из свободных колебаний и колебаний под воздействием вынуждающих сил.

Решение уравнения(2.34) ищем в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = v(x, t) + z(x, t), \quad (2.37)$$

где $v(x, t)$ есть решение уравнения свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

при условиях $v|_{t=0} = v|_{t=\ell} = 0$ и $v|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$.

$z(x, t)$ есть решение уравнения вынужденных колебаний

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + G(x, t), \quad (2.38)$$

при условиях $z|_{t=0} = z|_{t=\ell} = 0$ и $z|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Функция $v(x, t)$ найдена ранее в §3. Остается решить уравнение (2.38) при нулевых начальных и граничных условиях.

Будем искать решение (2.38) в виде ряда

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (2.39)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (2.39) удовлетворяет граничным условиям уравнения (2.38).

Чтобы функция $z(x, t)$ удовлетворяла и начальным условиям задачи (2.38), достаточно считать

$$\gamma|_{t=0} = 0 \text{ и } \gamma'|_{t=0} = 0. \quad (2.40)$$

Взяв вторые производные по t и x , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n''(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned}$$

Полученные производные подставим в уравнение (2.38)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n''(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = G(x, t),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \left(\gamma_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) \right) = G(x, t). \quad (2.41)$$

Равенство (2.41) есть разложение функции $G(x, t)$ в ряд Фурье по синусам.

Согласно теории рядов Фурье

$$\gamma_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(x, t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (2.42)$$

Дифференциальное уравнение (2.42) должно удовлетворять начальным условиям

$$\gamma_n(0) = \gamma_n'(0) = 0. \quad (2.43)$$

Обозначим $\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(x, t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = q_n(t)$.

Уравнение (2.42) примет вид:

$$\gamma_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) = q_n(t). \quad (2.44)$$

Применим для решения (2.44) метод вариации постоянных. Найдем общее решение однородного уравнения

$$\gamma_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \gamma_n(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 = 0 \text{ или } r_{1,2} = \pm \frac{a\pi n}{\ell} i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\gamma_{0,0} = A \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + B \sin \frac{a\pi n}{\ell} t.$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.44) согласно метода Лагранжа будем искать в виде

$$\gamma_{o.n} = A(t) \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + B(t) \sin \frac{a\pi n}{\ell} t. \quad (2.45)$$

Для определения $A(t)$ и $B(t)$ решаем систему уравнений

$$\begin{cases} A'(t) \cos \frac{a\pi n}{\ell} t + B'(t) \sin \frac{a\pi n}{\ell} t = 0, \\ -\frac{a\pi n}{\ell} A'(t) \sin \frac{a\pi n}{\ell} t + \frac{a\pi n}{\ell} B'(t) \cos \frac{a\pi n}{\ell} t = q_n(t). \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A'(t)$ и $B'(t)$, а затем и $A(t), B(t)$.

$$A(t) = -\frac{\ell}{a\pi n} \int_0^t q_n(\tau) \cdot \sin \frac{a\pi n}{\ell} \tau d\tau,$$

$$B(t) = \frac{\ell}{a\pi n} \int_0^t q_n(\tau) \cos \frac{a\pi n}{\ell} \tau d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= -\frac{\ell}{a\pi n} \int_0^t q_n(\tau) \sin \frac{a\pi n}{\ell} \tau d\tau \left(\cos \frac{a\pi n}{\ell} t \right) + \\ &+ \frac{\ell}{a\pi n} \int_0^t q_n(\tau) \cos \frac{a\pi n}{\ell} \tau d\tau \left(\sin \frac{a\pi n}{\ell} t \right) = \\ &= \frac{\ell}{a\pi n} \int_0^t q_n(\tau) \sin \frac{a\pi n}{\ell} (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Примечание. Если в уравнении (2.44) правая часть: а) постоянная; б) $P_n(t)e^{\alpha t}$; в) $M \cos \beta t + N \sin \beta t$, то его лучше решать методом неопределенных коэффициентов.

Подчиняя (2.46) условиям (2.43), найдем функцию $z(x, t)$, а затем согласно (2.37) решение поставленной задачи (2.34).

Пример. Найти вынужденные колебания закрепленной на концах струны длины ℓ , если $G(x, t) = -q$. Начальные отклонения и начальная скорость равна нулю.

Решение. Итак, уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q,$$

при условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u|_{x=\ell} = 0, \\ u|_{t=0} &= 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + z(x, t),$$

где 1) $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, при $v|_{x=0} = v|_{x=\ell} = 0$ и $v|_{t=0} = v'|_{t=0} = 0$.

Однородному уравнению при нулевых начальных и граничных условиях удовлетворяет только нулевая функция, т.е. $v(x, t) = 0$.

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - q$, при $z|_{x=0} = z|_{x=\ell} = 0$ и $z|_{t=0} = z'|_{t=0} = 0$.

Согласно (2.45) найдем функцию γ :

$$\begin{aligned} \gamma_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \gamma_n(t) &= -\frac{2q}{\ell} \int_0^\ell \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \\ &= \frac{2q}{\ell} \cos \frac{\pi n x}{\ell} \bigg|_0^\ell = \frac{2q}{\pi n} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{-4q}{(2k-1)\pi}, & \text{где } n = 2k-1, \\ 0, & \text{где } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

При четных значениях n

$$\begin{aligned} \gamma_{2k}''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \gamma_{2k}(t) &= 0, \\ \gamma_{2k}(0) &= \gamma_{2k}'(0) = 0. \end{aligned}$$

Этому уравнению при нулевых начальных условиях удовлетворяет только нулевое решение.

$$\gamma_{2k-1}''(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \gamma_{2k-1}(t) = -\frac{4q}{(2k-1)\pi},$$

$$\gamma_{2k-1}(t) = A \cos \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t + B \sin \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t - \frac{4q\ell^2}{a^2(2k-1)^3 \pi^3},$$

$$\gamma_{2k-1}'(t) = -\frac{a(2k-1)\pi}{\ell} A \sin \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t + \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} B \cos \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t,$$

$$A = \frac{4q\ell^2}{a^2(2k-1)^3\pi^3}; \quad B = 0,$$

$$\gamma_{2k-1}(t) = \frac{4q\ell^2}{a^2(2k-1)^3\pi^3} \cos \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t - \frac{4q\ell^2}{a^2(2k-1)^3\pi^3}.$$

Окончательно,

$$u(x, t) = \frac{4q\ell}{a^2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \left(\cos \frac{a(2k-1)\pi}{\ell} t - 1 \right) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}$$

решение поставленной задачи.

§ 7. Исследование колебаний в среде с сопротивлением

Рассмотрим случай, когда колебания струны происходят при наличии сопротивления среды. Экспериментально установлено, что сила сопротивления при небольших скоростях пропорциональна скорости движения (в данном случае скорости отклонения струны от положения равновесия). На участок струны NQ (рис. 2.1) действует сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x. \quad (2.47)$$

Рассуждая так же, как при выводе уравнения колебания струны и учитывая, что сила сопротивления всегда направлена против движения, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \varphi(x, t) - 2m \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.48)$$

где введены обозначения

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad 2m = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Рассмотрим колебание с учетом только сил сопротивления, не учитывая при этом действие других внешних возмущающих сил. Тогда (2.48) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2m \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Граничные и начальные условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0, \quad (2.50)$$

$$u|_{t=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (2.51)$$

Будем решать уравнение (2.49) при условиях (2.50) и (2.51) методом Фурье, т.е. ищем решение в виде

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0.$$

Подставив в уравнение (2.49), получим соотношение

$$T''X = a^2TX'' - 2mT'X.$$

Разделив переменные x, t , получим

$$\frac{T''}{a^2T} + 2m \frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X},$$

или

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{T'' + 2mT'}{T} \right) = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Первоначальное уравнение распалось на два

$$T'' + 2mT' + a^2\lambda^2T = 0, \quad (2.52)$$

$$X'' + \lambda^2X = 0. \quad (2.53)$$

Учитывая условия (2.50), получим краевые условия для уравнения (2.53)

$$X(0) = X(\ell) = 0. \quad (2.54)$$

Решением уравнения (2.53) при условиях (2.54) будет

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Решим уравнение

$$T'' + 2mT' + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 T = 0.$$

Это уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2mr + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 = 0,$$

откуда $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2}$.

Рассмотрим только случай $m < \frac{a\pi n}{\ell}$.

Обозначим $\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 - m^2 = q_n^2$, тогда $r_{1,2} = -m \pm q_n i$.

$$T_n = \ell^{-mt} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t),$$

или

$$u(x, t) = \ell^{-mt} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) C_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Окончательно

$$u(x, t) = \ell^{-mt} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos q_n t + b_n \sin q_n t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (2.55)$$

где $a_n = A_n C_n$, $b_n = B_n C_n$, ℓ^{-mt} – амплитуда колебаний.

Решение (2.55) уравнения (2.49) физически представляет затухающие колебания. Подчиним решение начальным условиям.

Найдем производную по t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(-a_n q_n \ell^{-mt} \sin q_n t - a_n m \ell^{-mt} \cos q_n t + \right. \\ & \left. + q_n b_n \ell^{-mt} \cos q_n t - m b_n \ell^{-mt} \sin q_n t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned} \quad (2.56)$$

К выражениям (2.55), (2.56) применим условия (2.51)

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x = f(x),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n m b_n q_n) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = F(x).$$

Функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют разложение в ряд Фурье по синусам. Поэтому коэффициенты a_n и b_n будут иметь вид

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx, \quad (2.57)$$

$$b_n = \frac{2}{q_n \ell} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx + \frac{m}{q_n} a_n. \quad (2.58)$$

Итак, решением уравнения (2.49) при условиях (2.50) и (2.51) будет формула (2.55), где a_n , b_n определяются выражениями (2.57) и (2.58).

§ 8. Продольные колебания стержня

Стержень – это тело цилиндрической или призматической формы, для растяжения или сжатия которого надо приложить некоторое усилие. Будем считать, что все силы действуют вдоль оси стержня и каждое из поперечных сечений стержня $ABCD$ (рис. 2.4) перемещается только поступательно вдоль оси стержня.

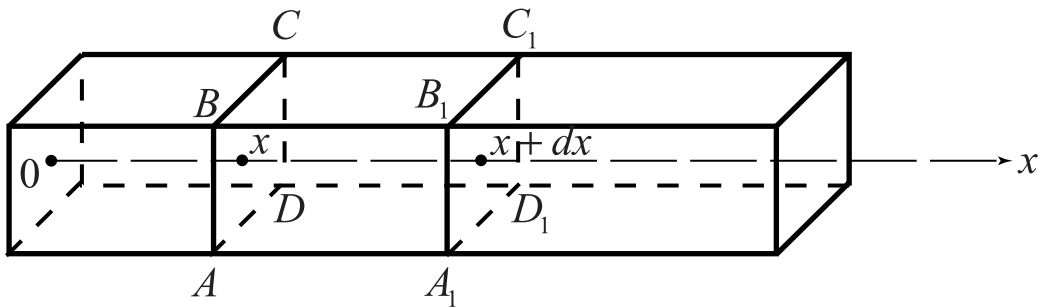


Рис. 2.4

На практике продольные колебания возникают тогда, когда стержень предварительно растягивается или, наоборот, сжимается, а затем предоставляется самому себе.

Рассмотрим сечение стержня $ABCD$. Пусть x – его абсцисса в состоянии покоя. Смещение этого сечения будет характеризоваться функцией $u(x, t)$, для отыскания которой и составляется дифференциальное уравнение. Найдем относительное удлинение участка dx (между сечениями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$). Смещение сечения $A_1B_1C_1D_1$ в момент времени t с точностью до б.м. высшего порядка равно

$$u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение этого участка

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.59)$$

Будем считать, что силы, вызвавшие это удлинение, подчиняются закону Гука. Поэтому силы, действующие соответственно на сечения $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, будут

$$T = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

и

$$T_1 = ES \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x},$$

где E – модуль Юнга; S – площадь поперечного сечения.

Мысленно отбросим части стержня левее сечения $ABCD$ и правее $A_1B_1C_1D_1$ и заменим их силами натяжения (сжатия) T и T_1 . Их результирующая будет равна

$$T_1 - T = ES \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.60)$$

(К квадратной скобке применена теорема Лагранжа).

Считая выделенный участок материальной точкой массой $\rho S dx$ и применяя к нему второй закон Ньютона, составим уравнение

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.61)$$

где $a^2 = E/\rho$.

Таким образом, дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня идентично уравнению колебаний струны.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда один конец закреплен, а другой свободен.

Пусть неподвижный конец стержня совпадает с началом координат. Тогда на этом конце будет условие

$$u|_{x=0} = 0.$$

На другом конце всякие внешние силы отсутствуют, т.е. равна нулю сила T , которую мы приняли подчиняющейся закону Гука.

Это условие запишется в виде

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \text{ откуда } \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0.$$

Колебания происходят от того, что в начальный момент времени стержень был растянут или сжат и точки стержня получили некоторый импульс. Эти условия запишутся в форме

$$u|_{t=0} = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x).$$

Необходимо отметить, что колебаний не будет, если функция $f(x)$ и $F(x)$ одновременно будут равны нулю, т.к. в этом случае $u(x, t) = 0$.

Таким образом, задача о свободных колебаниях стержня, закрепленного на одном конце, формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.62)$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \quad (2.63)$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x). \quad (2.64)$$

Будем решать уравнение (2.62) при условиях (2.63), (2.64) методом Фурье, т.е. искать решение, удовлетворяющее граничным условиям в виде

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (2.65)$$

причем $X(0) = 0$, $X'(l) = 0$.

Подставляя (2.65) в уравнение (2.62) и разделив переменные, получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Общее решение уравнения

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Учитывая условия, исходящие от граничных, будем иметь

$$c_1 = 0; \quad X'(l) = c_2 \lambda \cos \lambda l = 0,$$

откуда $\lambda\ell = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Собственными числами задачи будут

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\ell}. \quad (2.66)$$

Каждому собственному числу соответствует собственная функция

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell}. \quad (2.67)$$

Эти функции будут ортогональными на отрезке $[0, \ell]$, т.е.

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2\ell} x \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\ell}{2} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Решение уравнения $T'' + (a\lambda_k)^2 T = 0$ имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{(2k+2)\pi at}{2\ell} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell}. \quad (2.68)$$

Частные решения уравнения, соответствующие собственным числам λ_k , будут

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} x.$$

В силу линейности уравнения решение, удовлетворяющее граничным условиям, будет

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} x. \quad (2.69)$$

Подчиним (2.69) начальным условиям и получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell},$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi a}{2\ell} b_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell}.$$

Заметив, что функции $f(x)$ и $F(x)$ разложены в ряд по ортогональной системе функций $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell}$, найдем коэффициенты a_k и b_k

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell} dx, \\ b_k &= \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell} dx. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Подставляя (2.70) в (2.69), получим искомое решение уравнения свободных колебаний стержня.

Пример. Однородный стержень длиной ℓ закреплен в точке $x=0$ и растянут силой P , приложенной к другому концу. В начальный момент действие силы прекращается. Найти возникающие продольные колебания.

Пусть сила P такова, что применим закон Гука. Найдем начальное смещение $f(x) = u|_{t=0}$. В каждом сечении сила натяжения постоянна и равна P . Из соотношения $T = ESu'_x(x, t)$ следует, что $f'(x) = P/ES$, т.к. $T = P$; $u'_x = f'(x)$. Интегрируя $f'(x) = P/ES$ и учитывая, что $f(0) = 0$ (стержень при $x=0$ закреплен), получим $f(x) = \frac{P}{ES}x$. Этот результат говорит о том, что смещение в начальный момент пропорционально его абсциссе. Здесь $F(x) = 0$ и $b_k = 0$.

По формуле (2.70) найдем

$$a_k = \frac{2P}{\ell ES} \int_0^{\ell} x \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell} dx = \frac{(-1)^k 8P\ell}{\pi^2 ES (2k+1)^2}.$$

Решение поставленной задачи будет

$$u(x, t) = \frac{8P\ell}{\pi^2 ES} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2\ell} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\ell}. \quad (2.71)$$

§ 9. Оператор Лапласа

Оператором Лапласа (лапласианом) называется выражение вида:

а) в пространстве $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

б) на плоскости $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

в) на прямой $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

При решении многих задач возникает необходимость знать выражение лапласиана в других координатах, и прежде всего в полярных, цилиндрических и сферических.

Полярные координаты (r, φ) связаны с прямоугольными (x, y) соотношениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Лапласиан на плоскости в полярных координатах будет

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

В полярных координатах лапласиан имеет переменные коэффициенты. Иногда удобно последнее выражение записывать в виде

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Если исследуемая величина (температура, давление и т.д.) не зависит от полярного угла, то оператор принимает вид $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$, т.е. становится только функцией от полярного радиуса.

В пространстве оператор Лапласа бывает удобно записывать в цилиндрических координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Сферические координаты (r, φ, θ) связаны с прямоугольными $x = r \cos \varphi \cdot \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \cdot \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \\ &+ \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

В виду громоздкости выводов здесь приведены только окончательные результаты.

§ 10. Некоторые сведения о бесселевых функциях

1. Решение уравнения Бесселя. Функция Бесселя I рода

Во многих задачах математической физики, решение которых связано с применением цилиндрических и сферических координат, процесс разделения переменных приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя k -го порядка, а его решения – цилиндрическими или бесселевыми функциями.

Это уравнение линейное однородное 2-го порядка, но с переменными коэффициентами. Поэтому методом характеристического уравнения решить невозможно. Нужно искать другой путь решения.

Рассмотрим подробно случай $k = 0$ – уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \quad (2.72)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.73)$$

Продифференцируем этот ряд дважды и подставим в (2.72)

$$\begin{aligned} & (2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 x^2 + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots) + \\ & + \frac{1}{x} (c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots) + \\ & + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots) = 0. \end{aligned}$$

В силу тождественности последнего выражения должны быть равны нулю коэффициенты при всех степенях x .

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 3c_3 + c_1 &= 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot c_5 + 5c_5 + c_3 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2k-1} = 0.$$

Найдем коэффициенты при четных степенях

$$\begin{aligned} 2c_2 + 2c_2 + c_0 &= 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 4c_4 + c_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_{n+2} + c_n &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$(n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0. \quad (2.74)$$

Все уравнения предыдущей системы являются частными случаями (2.74). Оставляя c_0 произвольным, выразим через него все коэффициенты при четных степенях

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}; c_4 = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2}; \dots c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} \cdot (n!)^2}.$$

Найдено решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \dots \right) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (2.75)$$

Этот ряд является сходящимся при всех значениях x . В качестве c_0 выбирают такое значение, которое позволяет записать общий член ряда в наиболее компактной форме. В данном случае примем $c_0 = 1$. Решение уравнения (2.72)

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \quad (2.76)$$

называется *функцией Бесселя нулевого порядка первого рода*. Она является решением уравнения при начальных условиях

$$y|_{x=0} = 1; y'|_{x=0} = 0.$$

Для функции Бесселя $J_0(x)$ составлены подробные таблицы (см. например, Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Наука. – М.: 1977). Эта функция четная, имеет бесконечное множество корней, разность между которыми приближенно равна π .

2. Решение обобщенного уравнения Бесселя нулевого порядка

Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda^2 y = 0, \quad (2.77)$$

где λ – отличная от нуля постоянная.

Уравнение (2.77) называется обобщенным уравнением Бесселя нулевого порядка. Найдем решение этого уравнения с помощью подстановки $t = \lambda x$. Тогда

где $\frac{dt}{dx} = \lambda$ и

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lambda \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \lambda \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = \lambda^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

После подстановки и сокращения на λ^2

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Частным решением этого уравнения является функция Бесселя $J_0(x)$.

Решением уравнения (2.77) будет функция $J_0(\lambda x)$.

3. Ортогональность функций Бесселя

Обозначим положительные корни функции Бесселя $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$. Положим, что в функции $J_0(\lambda x)$, λ принимает значение положительных корней. При этом получаем последовательность функций

$$J_0(\mu_1, x), J_0(\mu_2, x), \dots, J_0(\mu_n, x), \dots$$

Укажем без доказательства, что эта функция "почти" ортогональна на $[0; 1]$, т.е.

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) \cdot J_0(\mu_n x) dx = \begin{cases} 0, & \text{где } n \neq k, \\ \frac{1}{2} (J_0')^2(\mu_k), & \text{где } n = k. \end{cases}$$

Ортогональность здесь отличается от обычной тем, что под интегралом содержится еще множитель x .

4. Функция Бесселя первого порядка

Найдем решение уравнения Бесселя первого порядка

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0. \quad (2.78)$$

Будем искать решение уравнения в виде (2.73). После подстановки

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

или

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) c_n x^{n-2} - \frac{c_0}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Переходим к определению коэффициентов ряда

$$c_0 = 0.$$

Рекуррентная формула определения коэффициентов

$$(n^2 - 1)c_n + c_{n-2} = 0, \quad (n \geq 2).$$

Учитывая, что $c_0 = 0$

$$c_2 = c_4 = \dots c_{2n} = 0.$$

Коэффициенты с нечетными индексами выразим через c_1

$$c_3 = -\frac{c_1}{3^2 - 1}; c_5 = \frac{c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1)}; \dots;$$

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1) \dots ((2n+1)^2 - 1)} = \frac{(-1)^n c_1}{2^{2n} \cdot n!(n+1)!}.$$

Положим $c_1 = 1/2$ и получим функцию Бесселя первого рода первого порядка.

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \quad (2.79)$$

Эта функция нечетная, имеет бесконечное множество корней ($\mu_{n+1} - \mu_n \approx \pi$). Значения этой функции тоже затабулированы.

Существует простая связь между бесселевыми функциями нулевого и первого порядка

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Это соотношение получается непосредственным дифференцированием $J_0(x)$.

§ 11. Исследование свободных колебаний круглой мембраны

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круглой мембраны радиуса R , закрепленной по контуру. Эта задача приводится к решению волнового уравнения в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2.80)$$

при граничном условии

$$u|_{r=R} = 0, \quad (2.81)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(r, \varphi). \quad (2.82)$$

Для упрощения решения задачи рассмотрим осесимметричные колебания мембраны, т.е. случай, когда отклонения не будут зависеть от полярного угла φ и форма колеблющейся мембраны в любой момент времени будет поверхностью вращения.

В этом случае задача сформулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2.83)$$

$$u|_{r=R} = 0, \quad (2.84)$$

$$u|_{t=0} = f(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(r). \quad (2.85)$$

Будем снова решать задачу методом Фурье, полагая

$$u(r, t) = u_1(r) \cdot T(t). \quad (2.86)$$

Подставляя (2.86) в уравнение, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{u_1''(r) + \frac{1}{r} u_1'(r)}{u_1(r)} = -\lambda^2. \quad (2.87)$$

Несколько позже укажем, почему это отношение должно быть отрицательным.

Равенства (2.87) приводятся к уравнениям

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (2.88)$$

$$u_1''(r) + \frac{1}{r} u_1'(r) + \lambda^2 u_1(r) = 0. \quad (2.89)$$

Функция $u_1(r)$ должна удовлетворять условию

$$u_1(R) = 0. \quad (2.90)$$

Последнее условие исходит из требования равенства нулю решения уравнения (2.83) и граничного условия (2.84).

Одним из частных решений уравнения (2.89) будет функция $J_0(\lambda r)$. Второе частное решение – функцию Неймана – мы рассматривать не будем, т.к. она обладает логарифмической особенностью при $r = 0$, что невозможно из физических соотношений.

Таким образом, получили

$$u_1(r) = J_0(\lambda r). \quad (2.91)$$

Подчиняем полученное решение условию (2.90)

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (2.92)$$

С другой стороны известно, что функция Бесселя обращается в нуль при $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$

Таким образом, собственные числа задачи будут

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{R},$$

где μ_k – корни функции Бесселя.

Решение уравнения (2.88)

$$T_k(t) = a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at.$$

Собственные функции задачи

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r). \quad (2.93)$$

Примечание. Если бы в (2.87) отношения взяли положительными, то решение уравнения не отражало колебательного процесса, т.к. решение уравнения (2.88) выражалось бы через экспоненциальные функции.

Составим сумму собственных функций

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r). \quad (2.94)$$

Для определения коэффициентов a_k и b_k используем начальные условия (2.85)

$$u|_{t=0} = f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right), \quad (2.95)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \mu_k}{R} b_k J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right). \quad (2.96)$$

Введем безразмерную координату $r/R = \bar{r}$, что равносильно тому, что масштабной единицей длины является R .

Последние ряды запишутся в виде

$$f(R, \bar{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k \bar{r}), \quad (2.97)$$

$$F(R, \bar{r}) = \frac{a}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k b_k J_0(\mu_k \bar{r}). \quad (2.98)$$

Последние равенства означают, что функции f и F разложены в ряд по Бесселевым функциям на отрезке $[0, 1]$. Умножаем каждое из этих равенств на $\bar{r} J_0(\mu_k \bar{r})$ и интегрируем в пределах от 0 до 1.

Используя условия ортогональности функции Бесселя, получим

$$a_n \cdot \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_n) = \int_0^1 \bar{r} J_0(\mu_n \bar{r}) \cdot f(R \bar{r}) d\bar{r},$$

$$\frac{a \mu_n}{R} b_n J_0'^2(\mu_n) = \int_0^1 \bar{r} J_0(\mu_n \bar{r}) \cdot F(R, \bar{r}) d\bar{r}.$$

Учитывая, что $J_0'^2(\mu_n) = J_1^2(\mu_n)$, окончательно получим

$$a_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 \bar{r} J_0(\mu_k \bar{r}) f(R \bar{r}) d\bar{r}, \quad (2.99)$$

$$b_k = \frac{2R}{a \mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 \bar{r} J_0(\mu_k \bar{r}) F(R \bar{r}) d\bar{r}, \quad (2.100)$$

(индекс n заменили на k).

Таким образом, решение поставленной задачи выражается рядом (2.94). Коэффициенты определяются из (2.99) и (2.100).

Решение конкретных задач на колебание круглых мембран вызывает значительные затруднения, т.к. в формулы для определения a_k и b_k входят функции Бесселя под знаком интеграла. Эти интегралы, как правило, не выражаются через элементарные функции. Поэтому приходится прибегать к численному интегрированию. Численное интегрирование (например методом Симпсона) сильно облегчено, т.к. имеются подробные таблицы бесселевских функций.

§ 12. Колебания колонны бурильных труб при спуске

Для определения динамических напряжений в колонне бурильных труб с учетом продольных упругих колебаний предположим, что колонна при спуске останавливается клиновыми захватами (мгновенно), имея в момент времени t_0 скорость v_0 и ускорение q . Дифференциальное уравнение движения колонны бурильных труб после остановки имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q. \quad (2.101)$$

Примем, что после остановки на нижний конец действует статическое давление промывочной жидкости. Тогда граничные условия будут

$$u|_{x=0} = 0, \quad (2.102)$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = -\gamma_2 \ell, \quad (2.103)$$

(γ_2 – удельный вес глинистого раствора).

Начальные условия примем такими:

$$u|_{t=0} = -\frac{\gamma_2 \ell x}{E}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0. \quad (2.105)$$

Будем решать поставленную задачу методом Фурье. Поскольку граничные условия не зависят от времени, то решение будем искать в виде

$$u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t), \quad (2.106)$$

где $u_1(x)$ – стационарное состояние колонны, определяемое решением задачи

$$a^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + q = 0, \quad (2.107)$$

$$E \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=\ell} = -\gamma_2 \ell, \quad (2.108)$$

$$u_1(x) \Big|_{x=0} = 0. \quad (2.109)$$

Решение задачи (2.101-2.109) имеет вид

$$u_1 = -\frac{qx^2}{2a^2} - \left(\frac{\gamma_2 \cdot \ell}{E} - \frac{q \cdot \ell}{a^2} \right) \cdot x. \quad (2.110)$$

Функция $u_2(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (2.111)$$

с однородными граничными

$$u_2 \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0 \quad (2.113)$$

и начальными условиями

$$u_2 \Big|_{t=0} = -\frac{q}{2a^2} (2\ell x - x^2), \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{t=0} = v_0. \quad (2.115)$$

Будем искать

$$u_2(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0. \quad (2.116)$$

После разделения переменных

$$\frac{X''}{x} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\nu^2,$$

откуда

$$X'' + \nu^2 x = 0,$$

$$T'' + a^2 \nu^2 T = 0,$$

решениями которых будут

$$X = A \cos \nu x + B \sin \nu x, \quad (2.117)$$

$$T = C \cos avt + D \sin avt. \quad (2.118)$$

Следовательно,

$$u_2(x, t) = (A \cos vx + B \sin vx) \cdot (C \cos avt + D \sin avt). \quad (2.119)$$

Подчиним решение (2.119) граничным условиям (2.112) и (2.113). Тогда

$$u_2(x, t) = \left(C_n \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} + D_n \sin \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} \right) \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}.$$

В силу линейности и однородности уравнения

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} + D_n \sin \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} \right) \times \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}. \quad (2.120)$$

С учетом начальных условий (2.114) и (2.115) найдем C_n и D_n .

$$C_n = -\frac{2q}{(2n-1)^3 a^2 \cdot \ell}; \quad D_n = \frac{2v_0}{(2n-1)^2 a^2 \ell}.$$

Учитывая (2.106), получим решение поставленной задачи

$$u(x, t) = \frac{q(2\ell x - x^2)}{2a^2} - \frac{\gamma_2 \ell x}{E} + \frac{8\ell}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v_0}{(2n-1)^2} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} - \frac{2q\ell}{a\pi(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} \right) \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}. \quad (2.121)$$

$$\sigma(x, t) = \frac{E_q(\ell - x)}{a^2} - \gamma_2 \ell + \frac{4E}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v_0}{2n-1} \cdot \sin \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell} - \frac{2q\ell}{a\pi(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell} \right) \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}. \quad (2.122)$$

В верхнем сечении, т.е. при $x = 0$

$$\sigma(x, t)|_{x=0} = \frac{Eq\ell}{a^2} - \gamma_2\ell + \frac{4E}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v_0}{2n-1} \cdot \sin \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell} - \frac{2q\ell}{a\pi(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell} \right). \quad (2.123)$$

Отметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell}}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{at}{\ell} \right) \text{ при } 0 \leq t \leq \frac{2\ell}{a},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell}}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4} \text{ при } 0 < t \leq \frac{2\ell}{a}.$$

Поэтому выражение (2.123) при $t \in \left(0, \frac{2\ell}{a} \right)$ примет вид

$$\sigma(x, t) = (\gamma_1 - \gamma_2)\ell + \frac{v_0 E}{a} - \frac{Eq\ell}{a^2} \left(1 - \frac{at}{\ell} \right). \quad (2.124)$$

Здесь γ_1 – удельный вес материала труб. При $t = \frac{2\ell}{a}$ получим наибольшее значение напряжения.

В случае равномерного спуска

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= (\gamma_1 - \gamma_2)\ell + \frac{4Ev_1}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)a\pi t}{2\ell}}{2n-1} = \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2)\ell + \frac{Ev_1}{a}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Значения скорости колонны бурительных труб v_1 для случая равномерного спуска, соответствующее напряжению в верхнем сечении, равному пределу текучести σ_T , определяется так:

$$v_1 = \frac{a}{E} (\sigma_T - (\gamma_1 - \gamma_2)t). \quad (2.126)$$

Пусть $\ell = 3000 \text{ м}$; $\gamma = 0,78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^3$; $\gamma_2 = 0,12 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^3$;
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$; $v_0 = 1,4 \text{ м/с}$.

Для рассматриваемого случая

$$\frac{Ev_0}{a} = 5580 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2; (\gamma_1 - \gamma_2)\ell = 1,98 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2;$$

$$\frac{E_q \ell}{a^2} = 2,34 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 \text{ и } \tau\left(x, \frac{2\ell}{a}\right)_{x=0} = 4,88 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

По формуле (2.126) определяется v_1 колонны. Для труб из стали марки Е
 $\sigma_T = 5,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ и $v_1 = 8,8 \text{ м/с}$.

Вывод. Прочность колонны бурильных труб позволяет осуществлять спуск колонны со скоростью до 8,8 м/с.

Глава III. Уравнение теплопроводности. Метод разделения переменных

Уравнение линейной теплопроводности впервые было получено Ж.Б. Фурье (1768-1830) при изучении процессов теплопроводности 1807 г. и опубликовано в работе «Аналитическая теория тепла» в 1822 г.

§ 1. Вывод уравнения линейной теплопроводности

При построении математической модели распространения тепла в стержне сделаем следующие предложения:

- 1) стержень из однородного материала плотностью ρ ;
- 2) боковая поверхность стержня теплоизолирована, т.е. тепло распространяется только вдоль оси стержня;
- 3) стержень тонкий, т.е. температура в любом сечении, перпендикулярном оси стержня, одна и та же.

Рассмотрим часть стержня на отрезке $[x, x + \Delta x]$ (рис. 3.1.) и воспользуемся законом сохранения количества тепла.

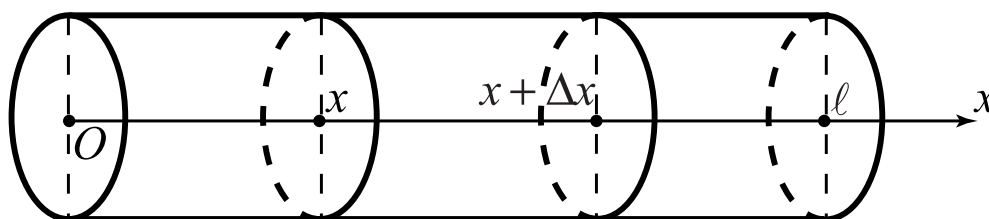


Рис. 3.1

Пусть за время Δt через сечение x вошло в элементарный объем ΔQ_1 тепла, через сечение $x + \Delta x$ вышло ΔQ_2 тепла, а накопилось в этом объеме ΔQ тепла.

Уравнение теплового баланса будет

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2. \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) написано в предположении, что внутри рассматриваемого объема нет источников и стоков тепла.

Количество тепла, которое необходимо сообщить участку стержня, чтобы повысить его температуру на ΔT , исчисляется по формуле

$$\Delta Q = c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \Delta T,$$

где c – удельная теплоемкость материала (количество тепла, которое нужно сообщить 1 кг вещества, чтобы поднять его температуру на 1°C),
 S – площадь поперечного сечения.

Количество тепла, прошедшее через левый конец участка стержня за время Δt (тепловой поток), вычисляется

$$\Delta Q_1 = -k \cdot S \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta t,$$

где k – коэффициент теплопроводности материала (количество тепла, протекающего в секунду через стержень единичной длины и единичной площади поперечного сечения при разности температур на противоположных концах, равной 1°C).

Почему в формуле стоит знак «минус»? Дело в том, что поток считается положительным, если он направлен в сторону увеличения x , а это в свою очередь означает, что слева от точки x температура больше, чем справа, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$. Следовательно, чтобы Q был положительным, необходимо поставить знак «минус».

Тепловой поток через правый конец участка стержня

$$\Delta Q_2 = -k \cdot S \cdot \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} \cdot \Delta t.$$

Согласно уравнения теплового баланса (3.1)

$$c \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \Delta T = k \cdot S \cdot \frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} \cdot \Delta t - k \cdot S \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta t.$$

Если это равенство поделить на $S \cdot \Delta x \cdot \Delta t$ и устремить Δx и Δt к нулю, то будем иметь $c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Обозначим $\frac{k}{c \cdot \rho} = a^2$ – коэффициент теплопроводности.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Примечание. Если внутри рассматриваемого стержня предположить наличие источника тепла, непрерывно распределенного с плотностью $q(x, t)$, получится неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t),$$

где $f(x, t) = \frac{q(x, t)}{c \cdot \rho \cdot S}$.

§ 2. Краевые условия для уравнения теплопроводности

Для уравнения теплопроводности задается только одно начальное условие $T|_{t=0} = \varphi(x)$ (другая форма записи $T(x, 0) = \varphi(x)$). Физически это означает, что начальное распределение температуры стержня имеет вид $\varphi(x)$. Для уравнений теплопроводности на плоскости или в пространстве начальное условие имеет такой же вид, только функция φ будет зависеть от двух или трех переменных.

Если размеры стержня не очень велики и влияниями концов нельзя пренебречь, то в этих условиях одни начальные условия уже не обеспечивают единственность решения задачи. Тогда необходимо задавать условия на концах. Они называются граничными условиями. Пусть начало стержня совпадает с началом координат ($x = 0$), а его конец имеет абсциссу $x = \ell$.

Пусть на концах стержня задана температура $T|_{x=0} = q_1(t)$, $T|_{x=\ell} = q_2(t)$. В частности температура может не зависеть от времени, т.е. $q_1(t) = T_0$, $T|_{x=\ell} = T_\ell$ или даже $T_0 = T_\ell = 0$ – концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Сформулированные выше граничные условия называются граничными условиями *первого рода*.

Пусть на концах стержня задан тепловой поток

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

где λ – коэффициент теплопроводности,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q(x, t)}{\lambda} = q^*(x, t).$$

Для концов стержня

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q^*(0, t) = q_1(t),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\ell} = q^*(\ell, t) = q_2(t).$$

Эти условия принято называть граничными условиями *второго рода*.

Пусть через концы стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Суть этого закона состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Для левого конца поток тепла будет $-h_1(T|_{x=0} - q_1(t)) \cdot S \Delta t$. Здесь $h_1 > 0$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $q_1(t)$ – температура окружающей среды на левом конце. Знак

«минус» поставлен по той же причине, что и при выводе уравнения теплопроводности. С другой стороны, в силу теплопроводности материала поток тепла через тот же конец равен $-k \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \cdot \Delta t$ (см. § 1). Применим закон сохранения количества тепла

$$-k \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \cdot \Delta t = -h_1 (T_{x=0} - q_1(t)) \cdot S \cdot \Delta t,$$

откуда $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda_1 (T_{x=0} - q_1(t))$, где $\lambda_1 = \frac{h_1}{k}$.

Аналогично получается условие на правом конце стержня, только постоянная λ_2 может быть другой, т.к. среды, окружающие левый и правый конец, бывают разные.

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = -\lambda_2 (T|_{x=\ell} - q_2(t)).$$

Последние два условия называются граничными условиями *третьего рода*.

Граничные условия третьего рода являются более общими по сравнению с условиями первого и второго рода. Если предположить, что через какой-либо конец не происходит теплообмена со средой (коэффициент теплообмена равен нулю), то получим граничные условия второго рода.

Предположим, что коэффициент теплообмена очень большой.

Граничные условия третьего рода при $x = 0$ перепишем в виде

$$T_{x=0} - q_1(t) = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{k}{h_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Устремим $h_1 \rightarrow \infty$. В результате будем иметь граничные условия первого рода $T|_{x=0} = q_1(t)$.

Аналогично формируются условия и в случаях, если изучается процесс на плоскости или в пространстве. Тогда границей области будет замкнутая кривая L , ограничивающая плоскую область, или замкнутая поверхность σ , ограничивающая часть пространства.

Соответственно и изменится производная от функции, фигурирующая в граничных условиях второго и третьего рода. Это будет производная по нормали к кривой L на плоскости или к поверхности σ в пространстве. Нормаль восстанавливается к внешней стороне области.

С точки зрения физики тепловых процессов граничные условия третьего рода лучше отражают распределение температуры в теле при внешнем теплообмене с окружающей средой, чем граничные условия первого рода. Тем не менее граничные условия первого рода очень часто применяются при ре-

шении инженерных задач, т.к. простота граничных условий позволяет в более простой форме и более простыми методами находить решение поставленной задачи.

Заметим, что при начальном условии $T(x, 0) = \varphi(x)$ и каждом из трех упомянутых здесь граничных условиях уравнение теплопроводности при некоторых ограничениях имеет вполне определенное единственное решение.

Краевые условия отпадают, если рассматривать задачу для неограниченного тела. Сформулированная задача (уравнение теплопроводности совместно с начальным и граничными условиями), как и в случае волнового уравнения, носит название задачи Коши. Только теперь начальных условий уже не два, а одно.

§ 3. Уравнение пьезопроводности при упругом режиме разработки месторождения

Во-первых, определим понятия, вынесенные в заголовок настоящего параграфа.

Фильтрацией будем называть процеживание, пропускание жидкости или газа через пористое тело. В данном случае через породы нефтяного или газового пласта.

Приток жидкости или газа из пласта в скважины происходит под действием сил, природа и величина которых зависят от видов и запасов пластовой энергии. Если доминирующими силами при движении пластовых флюидов являются упругие силы сжатых пород, то режим разработки залежи называется упругим.

Рассмотрим фильтрацию жидкости в пласте, который представляет собой грунтовый скелет, в промежутках которого (в порах) происходит движение жидкости. Примем следующие предложения.

1) Поры являются достаточно мелкими. Их среднюю величину будем характеризовать пористостью пласта и обозначать m . (Пористостью называют отношение суммарного объема пор в образце породы к объему этого образца. Измеряется пористость в долях единицы или в процентах).

2) Среда изотропна, т.е. во всех направлениях имеет одинаковые свойства.

3) Материал, из которого состоит скелет пласта, упруг, т.е. его удельный объем зависит от давления P . Если обозначить $V_{пор}$ – объем пор; V – объем образца, и $\beta_{ск}$ – коэффициент объемной упругости скелета пласта, то последняя величина определяется соотношением

$$\beta_{ск} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV_{пор}}{dP}. \quad (3.3)$$

4) Фильтрация жидкости упруга. Обозначим $\beta_{жс}$ – коэффициент объемной упругости жидкости, определяемый по формуле

$$\beta_{жс} = -\frac{1}{V_{жс}} \cdot \frac{dV_{жс}}{dP}. \quad (3.4)$$

Здесь $V_{жс}$ – объем, занимаемый массой M . Знак «минус» введен потому, что dP и $dV_{жс}$ имеют разные знаки (с увеличением давления объем жидкости уменьшается).

Как $\beta_{ск}$, так и $\beta_{жс}$ имеют примерно один и тот же физический смысл. Коэффициент $\beta_{жс}$ показывает, на какую часть первоначального объема изменяется объем жидкости при изменении давления на единицу.

5) Выделим в пласте площадку σ . Поверхность, занятую в этой площадке порами, обозначим σ_n и отнесем к σ . Пористость этой площадки $m_\sigma = \frac{\sigma_n}{\sigma}$. Учитывая, что среда изотропна $m_\sigma = m$. Назовем скоростью фильтрации V_ϕ скорость v , распределенную по всей площадке σ . Будем считать, что скорость фильтрации пропорциональна пористости $V_\phi = m \cdot V$, где V – скорость жидкости в свободном пространстве.

6) Фильтрация происходит в силу того, что на частицу жидкости действует внешняя сила, создаваемая разностью давлений. Согласно закону Дарси скорость фильтрации прямо пропорциональна коэффициенту проницаемости пласта k , градиенту давления P и обратно пропорциональна вязкости жидкости μ

$$V_\phi = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P.$$

Знак «минус» потому, что жидкость течет из мест с большим давлением к точкам с меньшим давлением.

Коэффициент проницаемости k характеризует свойство пористой среды пропускать через себя жидкость под действием приложенного перепада давлений.

7) В пласте имеются внутренние источники массы, характеризуемые функцией f , определяемой формулой

$$f(x, y, z, t) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta G}{\Delta V \cdot \Delta t}.$$

Здесь ΔG есть масса жидкости, выделившаяся в объеме ΔV за время Δt . В движущейся среде масса может возникать или исчезать, если в заполненном жидкостью объеме есть источники или стоки. Для случая впрыскивания массы (источник) $f > 0$, для случая отбора массы (сток) $f < 0$.

8) Не учитываем действие сил гравитации.

Перейдем к выводу уравнения фильтрации. Движение жидкости в пористой среде можно заменить свободным движением жидкости с плотностью ρ и скоростью V . Обозначим через ρ_c среднюю плотность жидкости, т.е. ρ_c есть кажущаяся плотность, получаемая при равномерном распределении массы жидкости по всему объему при отсутствии пористой среды.

Тогда

$$\rho_c = m\rho = m_\sigma\rho,$$

где ρ – истинная плотность жидкости.

Напишем уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c V) = f.$$

Сделаем преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} &= \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \rho \frac{\partial m}{\partial t} + m \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial m}{\partial t} &= \rho \frac{\partial m}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \rho \cdot \beta_{ck} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}, \\ m \frac{\partial \rho}{\partial t} &= m \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = m\rho\beta_{жс} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned}$$

Получили

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \rho(\beta_{ck} + m\beta_{жс}) \cdot \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Далее

$$\rho_c V = m\rho V = \rho V_\phi,$$

$$\operatorname{div}(\rho_c V) = \operatorname{div}(\rho V_\phi) = -\operatorname{div}\left(\frac{\rho k}{\mu} \operatorname{grad} P\right).$$

Согласно уравнения неразрывности

$$\rho(\beta_{ck} - m\beta_{жс}) \frac{\partial P}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\frac{\rho k}{\mu} \operatorname{grad} P\right). \quad (3.5)$$

Пусть $\rho, k, \mu, \beta^* = m\beta_{жс} + \beta_{ck}$ постоянны.

Тогда (3.5) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \Delta P + \frac{f}{\rho\beta^*}, \quad (3.6)$$

где $\chi = \frac{k}{\mu\beta^*}$.

Уравнение (3.6) называется уравнением пьезопроводности. χ называется коэффициентом пьезопроводности.

§ 4. Краевые условия для уравнения пьезопроводности

Уравнения теплопроводности и пьезопроводности одностипны с математической точки зрения. Следовательно, одностипными будут для них и начальные, и граничные условия. Остается выяснить физический смысл для уравнения фильтрации применительно к задачам нефтедобычи.

Следует отметить, что уравнение пьезопроводности можно сформулировать для линейного, плоского или пространственного случая, а также в цилиндрических или сферических координатах.

Начальное условие – давление в начальный момент времени

$$P(x, y, z, t)|_{t=0} = P(x, y, z, 0) = P|_{t=0} = P_0(x, y, z). \quad (3.7)$$

Функция P_0 может быть и константой. Граничное условие *первого рода* – на поверхности S , ограничивающей объем V , задается давление P .

$$P(x, y, z, t)|_S = \varphi(x, y, z, t) = \varphi(M, t). \quad (3.8)$$

Граничное условие *второго рода* – в каждой точке M границы S задается поток фильтрующейся жидкости (нефти). Здесь задание потока эквивалентно заданию в точке M скорости фильтрации. По закону Дарси $V_\phi = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial n}$,

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{\mu}{k} V_\phi = \varphi(M, t). \quad (3.9)$$

Производная берется по нормали \bar{n} к поверхности S .

Граничные условия *третьего рода* сформулируем для нагнетательной скважины. В скважину под давлением P_0 в ее устье закачивается вода, которая через поверхность S проникает в пласт и вытесняет нефть. Поверхность S является общей границей пласта и скважины. Согласно закона Пуазейля расход воды Q (м³/час) на глубине H равен

$$Q = A(P_0 + H \cdot \rho - P(x, y, z, t)),$$

где ρ – плотность воды;

A – коэффициент пропорциональности;

$P(x, y, z, t)$ – давление на глубине H .

С другой стороны, этот же расход по законам фильтрации Дарси равен

$$Q = -\frac{k\sigma}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial n},$$

где σ – поверхность фильтрации.

Приравнивая последние равенства, получим граничное условие

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_S = -\frac{A \cdot \mu}{k \cdot \sigma} (P_0 + \rho \cdot H - P(M, t)). \quad (3.10)$$

§ 5. Распространение тепла в ограниченных областях

Пусть имеется тонкий теплопроводящий стержень длиной ℓ , боковая поверхность которого теплоизолирована и концы поддерживаются при нулевой температуре. Задача о распространении тепла в таком стержне может быть сформулирована следующим образом: найти решение $u(x, t)$ однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.11)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad (3.12)$$

и однородным краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{x=0} &= u(0, t) = 0, \\ u(x, t) \Big|_{x=\ell} &= u(\ell, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом разделения переменных. Следуя этому методу, ищем нетривиальные частные решения уравнения (3.11) в виде

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3.14)$$

удовлетворяющее краевым условиям (3.13). Подставим (3.14) в уравнение (3.11). После разделения переменных получим

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Ниже будет сказано, почему постоянная принята отрицательной величиной. Как и при решении волнового уравнения, получим два уравнения

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (3.15)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (3.16)$$

Краевые условия (3.13) дают

$$X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0. \quad (3.17)$$

Для определения функции $X(x)$ получим краевую задачу

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0;$$

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0.$$

Собственные функции этой задачи будут

$$X_1 = \sin \frac{\pi}{\ell} x; \quad X_2 = \sin \frac{2\pi}{\ell} x \dots \quad (3.18)$$

Найдем теперь функции $T(t)$ из уравнения

$$T_k'(t) + a^2 \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$T_k(t) = A_k \exp \left[- \left(\frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 t \right], \quad (3.19)$$

где A_k – произвольные постоянные.

Подставляя найденные значения $X_k(x)$ и $T_k(t)$ в равенство (3.14), получим бесчисленное множество нетривиальных решений уравнения (3.11), каждое из которых удовлетворяет краевым условиям (3.13).

$$u_k(x, t) = X_k \cdot T_k = A_k \exp \left[- \left(\frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{\pi k}{\ell} x. \quad (3.20)$$

Так как исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, то сумма произвольного числа частных решений есть опять решение (принцип суперпозиции).

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp \left[- \left(\frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} x. \quad (3.21)$$

Подставляя в (3.21) значение $t = 0$ и учитывая (3.12), получим условие, из которого определяются коэффициенты A_k

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} x = f(x). \quad (3.22)$$

Очевидно, A_k являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на промежутке $[0, \ell]$

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \cdot d\xi. \quad (3.23)$$

Остается подставить найденное выражение для коэффициентов в ряд (3.21).

Если функция $f(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $f(0) = f(\ell) = 0$, то ряд (3.21) определяет непрерывную при $t \geq 0$ функцию $u(x, t)$, являющуюся решением исходной краевой задачи.

Дадим интерпретацию полученному решению

$$u(x, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi \cdot d\xi \exp \left[- \left(\frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{\pi k}{\ell} x.$$

1. При возрастании времени t температура во всех точках стержня убывает и при $t \rightarrow \infty$ $u \rightarrow 0$ (наступает установившийся процесс).

2. Наступление установившегося процесса зависит от длины стержня ℓ . Чем меньше ℓ , тем быстрее наступит установившийся процесс. Чем больше коэффициент температуропроводности, тем быстрее наступает установившийся процесс.

3. Если бы постоянную после разделения переменных взяли положительной величиной, то температура стержня $u(x, t)$ согласно (3.21) должна была бы расти и при $t \rightarrow \infty$, что физически невозможно.

Примечание. Метод Фурье (разделения переменных) применим при нулевых граничных условиях. В случае ненулевых граничных условий задачу можно свести к нулевым граничным условиям следующим образом.

Пусть нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.24)$$

При начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x)$$

и постоянных граничных условиях

$$u|_{x=0} = u_H, \quad u|_{x=\ell} = u_k.$$

Рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) - \left[u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x \right]. \quad (3.25)$$

Видим, что

$$v|_{x=0} = v|_{x=\ell} = 0, \\ v|_{t=0} = f(x) - \left(u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x \right) = \varphi(x).$$

Пусть $v(x, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

при начальном условии

$$v|_{t=0} = \varphi(x)$$

и нулевых граничных условиях.

Функция $v(x, t)$ может быть найдена согласно (3.21). Тогда искомая функция $u(x, t)$ найдется из (3.25).

Окончательное решение задачи примет вид:

$$u(x, t) = u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x + v(x, t). \quad (3.26)$$

Приведем примеры на применение метода Фурье для уравнения теплопроводности при условии, что рассматриваемая область конечна.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, \infty]$ при начальном условии $u(x, 0) = 4 \sin^3 \pi x - \sin^2 \pi x$ и граничных условиях $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Здесь нулевые граничные условия. Можно сразу применить метод Фурье. Согласно формуле (3.21) решение задачи будет

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(- (3n\pi)^2 t\right) \cdot \sin n\pi x, \quad (3.27)$$

где $A_n = 2 \int_0^1 (4 \sin^3 \pi x - \sin 2\pi x) \cdot \sin n\pi x dx$.

Выполним преобразования начального условия

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \sin^3 \pi x - \sin 2\pi x = 4 \sin \pi x (1 - \cos^2 \pi x) - \sin 2\pi x = \\ &= 4 \sin \pi x \left(1 - \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \right) - \sin 2\pi x = \\ &= 2 \sin \pi x - 2 \sin \pi x \cdot \cos 2\pi x - \sin 2\pi x = \\ &= 2 \sin \pi x - \sin 3\pi x + \sin \pi x - \sin 2\pi x = 3 \sin \pi x - \sin 3\pi x - \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициент ряда A_n .

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \int_0^1 (3 \sin \pi x - \sin 3\pi x - \sin 2\pi x) \cdot \sin n\pi x dx = \\ &= 6 \int_0^1 \sin \pi x \cdot \sin n\pi x dx - 2 \int_0^1 \sin 3\pi x \cdot \sin n\pi x dx - 2 \int_0^1 \sin 2\pi x \cdot \sin n\pi x dx. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы.

$$\begin{aligned} J_1 &= 6 \int_0^1 \sin \pi x \cdot \sin n\pi x dx = 3 \int_0^1 (\cos(n-1)\pi x - \cos(n+1)\pi x) dx = \\ &= 3 \left(\frac{\sin(n-1)\pi x}{(n-1)\pi} - \frac{\sin(n+1)\pi x}{(n+1)\pi} \right) \Big|_0^1 = 3 \left(\frac{\sin(n-1)\pi}{(n-1)\pi} - \frac{\sin(n+1)\pi}{n+1} \right), \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Если $n \neq 1$, то интеграл равен 0. При $n \rightarrow 1$ $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sin(n-1)\pi}{(n-1)\pi} = 1$.

Итак, $J_1 = 3$. Также можно показать, что

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int_0^1 \sin 3\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 3, \\ 0 & \text{при } n \neq 3. \end{cases} \\ J_3 &= 2 \int_0^1 \sin 2\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2, \\ 0 & \text{при } n \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда $A_1 = 3$, $A_2 = -1$, $A_3 = -1$, $A_n = 0$ при $n \geq 4$. Подставляя эти коэффициенты в формулу (3.27), получаем

$$u(x, t) = 3 \exp(-9\pi^2 t) \cdot \sin \pi x - \exp(-36\pi^2 t) \cdot \sin 2\pi x - \exp(-81\pi^2 t) \cdot \sin 3\pi x. \quad (3.28)$$

В этом примере ответ получили в виде элементарной функции, что обусловлено особенностью начального условия, а именно тем, что $f(x)$ есть линейная комбинация функций $\sin k\pi x$. Легко видеть, что решение (3.28) удовлетворяет начальному и граничным условиям, а также дифференциальному уравнению.

Пример 2. Пусть нефтяной пласт, имеющий постоянную температуру u_0 , начал прогреваться плоской батареей скважин с температурой u_H . На расстоянии ℓ от батареи поддерживается температура u_k . Необходимо исследовать нестационарный процесс распространения температуры в зоне пласта при предположении, что тепло распространяется только с помощью теплопроводной составляющей. Такая постановка задачи физически оправдана при прогреве призабойной зоны пласта или при густой сетке нагнетательных скважин. Практически с помощью теплопроводной составляющей прогревается пласт в шахтных уклонах Ярегского месторождения, разрабатываемого термошахтным способом, на начальном этапе прогрева пласта. Здесь из-за высоких фильтрационных сопротивлений при густой сетке нагнетательных скважин теплоноситель в основном прорывается в подстилающий пласт водоносный горизонт.

Рассмотрим эту задачу применительно к условиям пласта Ярегского месторождения. Начальная температура пласта 6° . Температура теплоносителя 120° , коэффициент теплопроводности $a^2 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{час} \approx 31 \text{ м}^2 / \text{год}$, длина участка пласта 15 м.

При этих предположениях необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 31 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при начальном условии $u(x, 0) = 6$ и граничных условиях

$$u(0, t) = 120 \text{ и } u(15, t) = 6.$$

Здесь ненулевые граничные условия.

Воспользуемся формулой (3.26).

$$u(x, t) = 120 + \frac{6-120}{15}x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{n\pi}{15}x,$$

где

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{15} \int_0^{15} 6 \cdot \sin \frac{n\pi}{15} x dx = \frac{18}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ \frac{11,5}{n} & \text{при } n = 2k - 1. \end{cases} \\
u(x, t) &= 120 - 7,6x + \\
&+ 11,5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2,1(2k-1)x}{2k-1} \cdot \exp(-3(2k-1)^2 t) = \\
&= 120 - 7,6x + 11,5 (\sin 2,1x \cdot \exp(-3t) + \\
&+ \frac{\sin 6,3x}{3} \exp(-27t) + \frac{\sin 10,5x}{5} \cdot \exp(-75t) + \dots). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

При больших значениях t ($t \geq 1$, единицей измерения времени взят один год) вместо суммы ряда достаточно взять 1-й член ряда. Расчеты показывают, что в течение 1 года температурный фронт достигает 14 м. Температура на расстоянии 1 м – 113° , 2 м – 104° , 3 м – 97° и т.д. По формуле (3.29) можно определить температуру в любой момент времени для любого $x \in [0, 15]$. Сумма ряда в (3.29) практически равна нулю при $t \geq 2$. Наступает стационарный процесс, $u(x, \infty) \approx 120 - 7,6x$.

Пример 3. Пласт, имеющий форму кругового цилиндра радиуса R , имел температуру u_0 . В момент времени $t = 0$ начала работать кольцевая галерея нагнетательных скважин, расположенных по боковой поверхности пласта. В результате чего на поверхности поддерживается постоянная температура, которую будем считать равной условному нулю температуры ($u_0 < 0$). Толщина пласта такова, что теплопотери в кровлю и подошву отсутствуют. Прогрев осуществляется теплопроводностью.

При этих предположениях необходимо найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{3.30}$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{3.31}$$

и граничном условии

$$u|_{r=R} = 0. \tag{3.32}$$

Отметим еще, что решение существует всюду, в том числе и при $r = 0$, т.е.

$$u(0, t) \text{ – существует.} \quad (3.33)$$

Согласно метода Фурье будем искать решение уравнения в виде

$$u(x, t) = X(r) \cdot T(t)$$

и подставим в уравнение (3.30).

$$T' X = a^2 T \left(\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} \right).$$

Разделим переменные:

$$\frac{\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr}}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda. \quad (3.34)$$

Откуда

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \lambda X = 0. \quad (3.35)$$

Согласно (3.32), (3.33) функция $X(r)$ должна удовлетворять тем же условиям по r , что и искомая функция $u(r, t)$, т.е.

$$X(R) = 0. \quad (3.36)$$

Решением уравнения (3.35) будет функция

$$X(r) = J_0(r\sqrt{\lambda}). \quad (3.37)$$

Подставим (3.37) в (3.36)

$$J_0(R\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Отсюда $R\sqrt{\lambda_n} = v_n$, где v_n – положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{v_n}{R}. \quad (3.38)$$

Множество собственных функций X задачи задается формулой

$$X_n(r) = J_0\left(\frac{v_n r}{R}\right). \quad (3.39)$$

Будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot J_0\left(\frac{v_n r}{R}\right). \quad (3.40)$$

Граничные условия для (3.40) выполняются.

Переходим к определению функции $T_n(t)$. Подставим (3.40) в (3.30)

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cdot X_n(r) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{d^2 X_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX_n}{dr} \right).$$

Но согласно (3.35)

$$\frac{d^2 X_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX_n}{dr} = -\lambda_n \cdot X_n.$$

Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t)) X_n(r) = 0,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \frac{a^2 v_n^2}{n^2} T_n(t) \right) J_0\left(\frac{v_n r}{R}\right) = 0.$$

Тождественный нуль разложен на отрезке $[0, R]$ по собственным функциям задачи. Поэтому коэффициенты разложения равны нулю

$$T_n'(t) + \frac{a^2 v_n^2}{R^2} T_n(t) = 0. \quad (3.41)$$

Подчиним решение (3.40) начальному условию (3.31)

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot J_0\left(\frac{v_n r}{R}\right) = u_0.$$

Из этого соотношения с применением свойства ортогональности функции Бесселя найдем начальные условия для уравнения (3.41).

$$T_n(0) = \frac{2u_0}{v_n J_1(v_n)}. \quad (3.42)$$

Тогда решение уравнения (3.41) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{2u_0}{v_n J_1(v_n)} \cdot \exp\left(-\left(\frac{av_n}{R}\right)^2 t\right). \quad (3.43)$$

Окончательно решение задачи будет

$$u(r, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n} \cdot \exp\left(-\left(\frac{av_n}{R}\right)^2 t\right) \cdot \frac{J_0\left(\frac{v_n r}{R}\right)}{J_1(v_n)}. \quad (3.44)$$

Можно показать, что при $r = 0$ этот ряд сходится, поэтому условие (3.33) выполняется.

§ 6. Неоднородное уравнение теплопроводности

Случай 1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.45)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0, \quad (3.46)$$

и с граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0. \quad (3.47)$$

Будем искать решение задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (3.48)$$

Решение (3.48) удовлетворяет граничным условиям. Для того чтобы выполнялось начальное условие, необходимо

$$T_n(0) = 0. \quad (3.49)$$

Пусть функция $f(x, t)$ такова, что ее можно разложить в ряд по синусам

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (3.50)$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (3.51)$$

Подставим ряд (3.48) в уравнение (3.45) и учтем (3.50)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 T_n(t) - \varphi_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x = 0.$$

Для определения функции $T_n(t)$ получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$T_n'(t) + \omega_n^2 \cdot T_n(t) = \varphi_n(t), \left(\omega_n = \frac{a\pi n}{\ell} \right), \quad (3.52)$$

при начальном условии

$$T_n(0) = 0.$$

Решая обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (3.52) при начальном условии (3.49), находим

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \cdot \varphi(\tau) d\tau. \quad (3.53)$$

Решение поставленной задачи будет

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{\omega_n^2(t-\tau)} \cdot \varphi_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (3.54)$$

Случай 2. Неоднородные граничные и начальные условия.

Пусть необходимо найти решение уравнения (3.45) при условиях

$$u|_{t=0} = 0 = \varphi(x), \quad (3.55)$$

$$u|_{x=0} = \psi_1(t); \quad u|_{x=\ell} = \psi_2(t). \quad (3.56)$$

Эту задачу будем в принципе решать так же, как и задачу о вынужденных колебаниях струны.

Будем искать решение задачи (3.45) при условиях (3.55) и (3.56) в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t), \quad (3.57)$$

где функция v удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (3.58)$$

при условиях

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad (3.59)$$

$$v(0, t) = \psi_1(t); \quad v(\ell, t) = \psi_2(t), \quad (3.60)$$

а функция ω удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.61)$$

и условиям

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \omega|_{x=0} = 0, \quad \omega|_{x=\ell} = 0. \quad (3.62)$$

Эта задача нами уже решена в начале этого параграфа. Остается найти функцию $v(x, t)$.

Решение задачи (3.58) ищем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (3.63)$$

где

$$T_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v(x, t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (3.64)$$

Интегрируем (3.64) два раза по частям, обозначив $u = v(x, t)$,

$dV = \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$. Получим

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2}{\pi n} \left(u|_{x=0} - (-1)^n u|_{x=\ell} \right) - \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t) \right) - \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx. \end{aligned} \quad (3.65)$$

С другой стороны, за $T_n(t)$ можно принять функцию

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} \left(\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t) \right) - \frac{2\ell}{a^2 n^2 \pi^2} \int_0^{\ell} \frac{\partial v}{\partial t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (3.66)$$

Действительно, если приравнять (3.65) и (3.66), то получим уравнение (3.58).

Дифференцируем выражение (3.64) по t

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial v}{\partial t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (3.67)$$

Исключим интеграл из равенств (3.66), (3.67). Получим уравнения для $T_n(t)$

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 T_n(t) = \frac{2a^2\pi n}{\ell^2} (\psi_1(t) - (-1)^n) \psi_2(t). \quad (3.68)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \times \\ \times \left(c_n + \frac{2\pi n a^2}{\ell^2} \int_0^\ell \exp\left(\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \tau\right) (\psi_1(\tau) - (-1)^n) \psi_2(\tau) d\tau \right). \quad (3.69)$$

Чтобы удовлетворить решение начальному условию (3.59), потребуем выполнение

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x = \varphi(x),$$

откуда

$$T_n(0) = c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (3.70)$$

Функция $T_n(t)$ определена

$$T_n(t) = \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \cdot t\right) \cdot \left(\frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx + \right. \\ \left. + \frac{2\pi n a^2}{\ell^2} \int_0^\ell \exp\left(\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 \cdot \tau\right) \cdot (\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)) d\tau \right). \quad (3.71)$$

Решение поставленной задачи найдено в виде (3.63), где $T_n(t)$ определяется по формуле (3.71).

Рассмотрим частный случай, когда концы стержня поддерживаются при постоянных температурах

$$\psi_1(t) = u_H, \quad \psi_2(t) = u_k.$$

Тогда (3.71) принимает вид

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} (u_n - (-1)^n u_k) \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx \right).$$

Подставляя $T_n(t)$ в ряд (3.63), имеем

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{2u_H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n} + \frac{2u_k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u_k - u_H}{n} \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x + \\ &+ \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Учитывая суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{x} & \text{при } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{при } x = 0; 2\pi. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{при } x = (-\pi; \pi), \end{cases}$$

(эти соотношения можно найти, например, в книге Градштейна И.С. и Рыжика И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: 1971) окончательно получим

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u_k - u_H}{n} \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \times \\ &\times \sin \frac{\pi n}{\ell} x + \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

В заключение остается просуммировать решения, чтобы получить решенные уравнения (3.45) при условиях (3.55) и (3.56).

Напомним, что

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

где $v(x, t)$ есть (3.73), а $\omega(x, t)$ – (3.54).

В (3.54) u необходимо заменить на ω .

§ 7. О методе разделения переменных

Подведем некоторые итоги по применению метода Фурье (разделение переменных), с помощью которого решены задачи, изложенные выше.

Пусть задано линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot u = 0, \quad (3.74)$$

в котором нет члена, содержащего смешанную производную. Требуется найти решение (3.74), удовлетворяющее однородному краевому условию

$$u(x, t) \Big|_S = 0, \quad (3.75)$$

и начальному условию

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = f(x). \quad (3.76)$$

Применим метод Фурье.

Первый этап. Отыскиваются нетривиальные решения уравнения (3.74) в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3.77)$$

удовлетворяющие только краевому условию (3.75). После подстановки этого решения в уравнение и выполнения операции разделения переменных получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$a_{11} X''(x) + b_1 X'(x) - (c + \lambda) X(x) = 0, \quad (3.78)$$

$$a_{22} T''(t) + b_2 T'(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (3.79)$$

Чтобы найти нетривиальное решение (3.74) в виде (3.77), удовлетворяющее однородным краевым условиям (3.75), необходимо получить соответствующие условия (3.76) для одной из новых функций, например, $X(x)$. В противном случае прямое применение метода окажется невозможным. Из однородных краевых условий, наложенных на $u(x, t)$, следуют соответствующие краевые условия для функции $X(x)$, которые обозначим через $X(x) \Big|_S = 0$.

Таким образом, приходим к следующей задаче о собственных значениях параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3.78), удовлетворяющие краевому условию $X(x)|_S = 0$.

Необходимо отметить, что эта задача далеко не при всяком λ имеет нетривиальные решения. В связи с этим значение параметра λ_k , при котором краевая задача имеет нетривиальное решение, называется собственным значением, а соответствующее ему значение – собственной функцией. Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций:

1) существует бесконечное множество собственных значений и соответствующих им собственных функций;

2) каждому собственному значению λ_k соответствует только одна (с точностью до числового множителя) собственная функция;

3) собственные функции $X_i(x)$ и $X_k(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ_i и λ_k ($\lambda_i \neq \lambda_k$), ортогональны на некотором промежутке $[\alpha, \beta]$, т.е.

$$\int_{\alpha}^{\beta} X_i(x) \cdot X_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Равенство единице интеграла можно всегда добиться, умножив функцию $X_k(x)$ на соответственно подобранную постоянную, отчего она не перестает удовлетворять уравнению (3.78) и условию $X(x)|_S = 0$;

4) всякая функция $F(x)$, имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_n(x)$ краевой задачи (теорема Стеклова)

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot X_k(x). \quad (3.80)$$

Это свойство имеет огромное принципиальное значение для решения краевых задач математической физики. Ведь любая функция, заданная в качестве начального условия, может быть на основе этого свойства представлена в виде сходящегося ряда, коэффициенты которого легко определяются, если воспользоваться свойством ортогональности собственных функций. Действительно, умножим обе части (3.80) на $X_i(x)$ и проинтегрируем на $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) \cdot X_i(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\alpha}^{\beta} X_k(x) \cdot X_i(x) dx.$$

На основе третьего свойства получим

$$c_i = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) \cdot X_i(x) dx.$$

Таким образом, краевая задача имеет решение при любых начальных условиях, удовлетворяющих условиям теоремы Стеклова.

Второй этап. Составляется ряд, членами которого будут функции (3.77), а коэффициентами c_k – произвольные числа

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot X_k(x) \cdot T_k(t). \quad (3.81)$$

Теперь нужно определить коэффициенты c_k этого ряда так, чтобы функция $u(x, t)$ удовлетворяла не только данному уравнению (3.74) и заданным однородным условиям (3.75) (это выполняется в силу принципа суперпозиции при любых коэффициентах c_k , но и заданному начальному условию (3.76). Полагая в этом ряде $t = 0$ и учитывая начальное условие (3.76), получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot T_k(0) \cdot X_k(x). \quad (3.82)$$

Равенство (3.82) можно рассматривать как разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$ краевой задачи. Коэффициенты ряда $c_k T_k(0)$ находятся по известным формулам для коэффициентов Фурье, откуда определяются величины c_k . Подставив найденные c_k в ряд (3.81), определим искомые решения краевой задачи.

Ранее подчеркивалось, что при применении метода Фурье существенно, чтобы краевые условия были однородными. Однородность краевых условий позволяет без помех решить краевую задачу. Но при решении краевых задач часто приходится иметь дело с неоднородными краевыми условиями, что делает непосредственное применение метода Фурье невозможным; тогда стараются свести задачу к такой, в которой краевые условия были бы однородными, после чего попадают в условия уже изученных задач. С примером такого рода можно познакомиться в § 5 настоящей главы.

Если искомая функция зависит не от двух, а от трех или большего числа переменных, то ее надо искать в форме произведения не двух, а большего числа функций одного переменного.

Глава IV. Уравнение теплопроводности. Решение методом интегральных преобразований

§ 1. Понятие метода интегральных преобразований

Метод разделения переменных Фурье решения уравнений математической физики обычно называют классическим. Мы видели, что для непосредственного применения этого метода необходимы однородные граничные условия. Но недостаток метода не только в этом. Решения, получаемые классическими методами, очень часто нуждаются в дальнейшей доработке с целью получения упрощенных приближенных соотношений. Иногда эти соотношения получают с таким трудом, что исследователю приходится искать другие пути решения поставленной задачи.

За последние годы широкое признание среди инженеров получил метод интегральных преобразований (интегральной трансформации). Один из таких методов нам известен из курса операционного исчисления, где решали обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Суть метода состояла в том, что, применяя преобразование Лапласа, сводили решение заданного дифференциального уравнения к решению алгебраического уравнения, которое в математическом отношении представляет задачу несравненно более простую, чем первоначальная.

Здесь мы будем применять метод интегральных преобразований для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка при заданных начальных и граничных условиях.

Общая схема применения метода интегральных преобразований для уравнений в частных производных состоит в следующем. Как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения, выбранное преобразование применяют к заданному уравнению, тем самым временно исключая одну из независимых переменных. Задача упрощается: теперь уже приходится интегрировать уравнение, которое содержит на единицу меньше независимых переменных, чем заданное уравнение.

Пусть удалось найти решение преобразованного (изображающего) уравнения. Тогда это решение будет функцией остальных переменных и некоторого параметра. Теперь для получения решения заданного уравнения нужно найти по найденному изображению оригинал по формулам обращения или по таблицам.

Выбор интегрального преобразования обусловлен целым рядом причин. Здесь приходится учитывать не только тип самого уравнения, но и характер начальных и граничных условий: ведь кроме уравнения приходится преобразовать и дополнительные условия.

Под интегральным преобразованием понимают интеграл вида

$$F(\rho) = \int_a^b K(x, \rho) f(x) dx, \quad (4.1)$$

которым функции $f(x)$ переменной x сопоставляется функция $F(\rho)$. Функция $K(x, \rho)$ называется ядром преобразования. Из (4.1) видно, что всякое интегральное преобразование определяется ядром $K(x, \rho)$, отрезком интегрирования $[a, b]$ и функцией $f(x)$. Если интегральное преобразование проводится по временной координате, как в преобразовании Лапласа, то пределы интеграла (4.1) от 0 до ∞ . Если преобразование проводится по пространственной координате и рассматриваемый объект считается бесконечным, то пределы интеграла $(-\infty, +\infty)$, для полубесконечной области $(0, \infty)$. Но если тело имеет конечные размеры, то и интеграл берется в пределах (a, b) . Такие интегральные преобразования получили название конечных интегральных преобразований.

Оставляя в стороне вопросы теории интегральных преобразований, приведем формулы прямого и обратного преобразования некоторых интегральных преобразований.

Конечные преобразования. Основаны на теории рядов Фурье. Пусть функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, задана на полупериоде $[0, \ell]$. Тогда ее можно продолжить нечетным образом и разложить в ряд по синусам

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (4.2)$$

Коэффициент разложения определится

$$a_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (4.3)$$

Предположим, что функция $u(x, t)$ неизвестна, но каким-то образом определен коэффициент разложения $a_n(t)$. Тогда, согласно (4.2), можно найти неизвестную функцию $u(x, t)$. В данном случае (4.3) дает синус-преобразование функции $u(x, t)$, а (4.2) является обратным преобразованием.

Аналогично выполняется косинус-преобразование Фурье. Ядро преобразования выбирается в зависимости от вида граничных условий. Если на границах области заданы значения функции, то ядро преобразования должно быть таким, чтобы его значения на границах обращались в нуль. Если на границах области заданы производные, тогда ядро преобразования должно быть таким, чтобы производная от ядра на границах обращалась в нуль. Сказанное выше можно представить таблицей.

Таблица 4.1

Условие при $x = 0$	Условие при $x = \ell$	Ядро
значение функции	значение производной	$\sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x$
значение производной	значение производной	$\cos \frac{\pi n}{\ell} x$
значение функции	значение функции	$\sin \frac{\pi n}{\ell} x$
значение производной	значение функции	$\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x$

Интегральное преобразование Фурье. Основано на интеграле Фурье.

Пусть задана функция $f(x)$ на интервале $(-\infty; \infty)$. Функции $f(x)$ можно поставить в соответствии функцию $F(p)$ с помощью интеграла

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \cdot f(x) dx. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) позволяет по функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяющей условиям Дирихле, найти функцию $F(p)$. При этом $f(x)$ называется оригиналом, $F(p)$ – изображением.

Формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \cdot F(p) dp \quad (4.5)$$

позволяет решить обратную задачу: по изображению найти оригинал. Поэтому она называется обратным преобразованием Фурье, в то время как (4.4) – прямым преобразованием. Фактически эти формулы представляют два взаимно связанных интегральных уравнения, каждое из которых является решением другого.

Если функция $f(x)$ задана на множестве $[0; \infty]$ и удовлетворяет на нем упомянутым выше условиям, то можно говорить о так называемых синус- и косинус-преобразованиях Фурье этой функции на множестве $[0; \infty]$.

Прямое синус-преобразование Фурье имеет вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} \sin \rho x \cdot f(x) dx. \quad (4.6)$$

Обратное преобразование выражается интегралом

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \rho x \cdot F(\rho) d\rho. \quad (4.6a)$$

Прямое и обратное косинус-преобразование Фурье выражаются формулами

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} \cos \rho x \cdot f(x) dx, \quad (4.7)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \rho x \cdot F(\rho) d\rho. \quad (4.8)$$

Преобразование Лапласа. Прямое преобразование в этом случае производится с помощью

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot f(x) dx, \quad (4.9)$$

где x – действительная переменная;
 $p = s + iw$ – комплексная переменная.

Функция предполагается непрерывной вместе со своими производными, за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода, а также возрастающей не быстрее показательной функции. В этом случае интеграл Лапласа (4.9) будет сходящимся.

Обратное преобразование Лапласа, позволяющее по изображению $F(p)$ находить оригинал, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{px} \cdot F(p) dp. \quad (4.10)$$

Интегрирование в формуле (4.10) происходит в области комплексной переменной $p = s + iw$ вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной справа от всех особых точек подынтегральной функции.

Отметим, что использование формул обращения (4.5) и (4.10) в преобразовании Фурье и Лапласа является делом весьма сложным и требует специальных знаний. Нахождение оригинала весьма упрощается, если пользоваться таблицами преобразований Лапласа и Фурье. Весьма обширные таблицы приведены, например, в книге Диткина В.А. и Прудникова А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: 1974г.

§ 2. Решение уравнения теплопроводности для неограниченной области

Будем считать область настолько длинной, что влияние температурных условий на концах можно пренебречь. При этом основным фактором, влияю-

шим на распределение температуры вдоль области, будет начальная температура, которая задается.

Задача о распространении тепла в таком стержне формулируется следующим образом.

Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty), t > 0, \quad (4.11)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0) = f(x). \quad (4.12)$$

Для решения этой задачи воспользуемся преобразованием Фурье (4.4).

Введем в рассмотрение преобразованную температуру

$$\bar{u}(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot u(x, t) dx.$$

Уравнение (4.11) подвергнем преобразованию Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot u(x, t) dx = \frac{d\bar{u}}{dt}.$$

Второй интеграл преобразуем при помощи интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = e^{-ipx} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ip \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{\partial u}{\partial x} dx = ip \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

т.к. из физических соображений $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Выполним интегрирование по частям еще раз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = ip e^{-ipx} \cdot u(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \cdot u(x, t) dx = -p^2 \bar{u}(p, t).$$

Здесь учтено, что $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

Таким образом, в пространстве изображений получили обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -a^2 p^2 \bar{u}. \quad (4.13)$$

Подвергнем преобразованию начальное условие (4.12).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho x} f(x) dx = F(\rho) \text{ или } \bar{u}\Big|_{t=0} = F(\rho). \quad (4.14)$$

Задача свелась к решению уравнения (4.13) при начальном условии (4.14), решение которого

$$\bar{u}(\rho, t) = F(\rho) \cdot \exp(-a^2 \rho^2 t). \quad (4.15)$$

Остается выполнить следующий шаг: перейти от изображения к оригиналу. Обычно этот этап наиболее трудный.

В данном случае прямое применение формулы (4.5) ничего не дает. Но правую часть (4.15) можно рассматривать как произведение двух изображений $F(\rho)$ и $\exp(-a^2 \rho^2 t)$. Из операционного начисления известно, что произведению изображений соответствует свертка оригиналов. Если $F(\rho) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ и $\exp(-a^2 \rho^2 t) \xrightarrow{\cdot} \varphi(x)$, то $F(\rho) \cdot \exp(-a^2 \rho^2 t) \xrightarrow{\cdot} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \varphi(x - \tau) d\tau$.

(Здесь несобственный интеграл с бесконечными пределами, т.к. $x \in (-\infty, +\infty)$).

Будем реализовывать этот план. Изображение $\exp(-a^2 \rho^2 t)$ согласно (4.5) имеет оригинал

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho x} \cdot e^{-a^2 \rho^2 t} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2 \rho^2 t + i\rho x) d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(a\sqrt{t}\rho - \frac{ix}{2a\sqrt{t}}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) d\rho = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 t}\right). \end{aligned}$$

При вычислениях использован интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$.

Итак, оригиналом изображения $\bar{u}(\rho, t)$ служит функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-\frac{(x - \tau)^2}{2a^2 t}\right) d\tau. \quad (4.15a)$$

Решение поставленной задачи получено. Отметим, что функция

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \tau)^2}{2a^2 t}\right)$$

является решением уравнения (4.11). Эту функцию называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

§ 3. Распространение тепла в полуограниченной области

В качестве примера применения преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрим задачу о распространении тепла в полубесконечном стержне при граничном условии первого рода

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \quad (4.17)$$

и краевому условию

$$u|_{x=0} = u_n. \quad (4.18)$$

По характеру условий здесь можно было бы воспользоваться или синус-преобразованием Фурье, или преобразованием Лапласа. Воспользуемся преобразованием Лапласа

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u(x, t) dt.$$

Здесь преобразование применяется не к пространственной координате x , а к временной t

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt = a^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt = e^{-pt} \cdot u(x, t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u dt = p \bar{u}(x, p).$$

Внеинтегральный член обращается в нуль в силу того, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} \cdot u(x, t) = 0$ и благодаря нулевому начальному условию

$$a^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = a^2 \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u(x, t) dt = a^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}.$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$a^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = p \cdot \bar{u}.$$

Применим преобразование Лапласа к краевому условию (4.18)

$$u|_{x=0} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot u_n dt = \frac{u_n}{p}. \quad (4.19)$$

Решение изображающего уравнения при условии (4.19) с учетом ограничения решения при $x \rightarrow \infty$ будет иметь вид

$$u(x, p) = \frac{u_n}{p} \cdot e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

По таблице оригиналов и соответствующих им изображений для преобразования Лапласа находим

$$u(x; t) = u_n \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2a\sqrt{t}} = u_n \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (4.20)$$

что является решением поставленной задачи.

§ 4. Косинус-преобразование для полубесконечной области

Покажем, как применяется косинус-преобразование Фурье для полубесконечной области.

Выбор синус- или косинус-преобразование Фурье определяется видом краевых условий на нижнем пределе переменной. Так синус-преобразование целесообразно в том случае, когда задана величина $u(x, t)$ при $x = 0$, а применение косинус-преобразования целесообразно в том случае, когда задано значение производной по x при $x = 0$ (см. табл. 4.1).

Рассмотрим конкретный пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, +\infty), \quad t > 0, \quad (4.21)$$

при граничном условии

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = Q, \quad (4.22)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = 0. \quad (4.23)$$

При решении задачи необходимо учесть, что в бесконечности температура ограничена

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x; t) = 0. \quad (4.24)$$

Умножим все члены уравнения на $\cos \lambda x$ и проинтегрируем от 0 до ∞ .

$$a^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \lambda x dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \cos \lambda x dx. \quad (4.25)$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x dx = \frac{d}{dt} \bar{u}_\lambda(t) = \frac{d\bar{u}_\lambda(t)}{dt}, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \lambda x dx &= \left| \cos \lambda x = u; \quad du = -\lambda \sin \lambda x \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = dv; \quad v = \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \lambda x \Big|_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \sin \lambda x dx = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \right| = \\ &= -Q + \lambda \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \sin \lambda x dx = \left| \sin \lambda x = u; \quad du = \lambda \cos \lambda x \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} dx = dv; \quad v = u(x, t) \right| = \\ &= -Q + \lambda \left(u(x, t) \sin \lambda x \Big|_0^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} u(x, t) \cos \lambda x dx \right) = \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow \infty} u = 0 \right| = -Q - \lambda^2 \bar{u}_\lambda(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

С учетом (4.25) получим

$$\frac{d\bar{u}_\lambda(t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u}_\lambda(t) = a^2 Q, \quad (4.28)$$

$$\bar{u}_\lambda(0) = 0. \quad (4.29)$$

Решением этой задачи Коши будет

$$\bar{u}_\lambda(t) = \frac{Q}{\lambda^2} \exp\left(- (a\lambda)^2 t\right) - \frac{Q}{\lambda^2}. \quad (4.30)$$

Применим формулу обратного преобразования

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{Q}{\lambda^2} \exp\left(- (a\lambda)^2 t\right) - \frac{Q}{\lambda^2} \right) \cos \lambda x d\lambda. \quad (4.31)$$

Воспользуемся таблицами косинус-преобразования

$$u(x, t) = -Q\sqrt{2at} \cdot ierfc \frac{x}{2\sqrt{at}},$$

где $i \cdot erfci = \int_u^\infty (1 - erfz) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u(1 - erfu),$

где $erfu = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-z^2} dz.$

Решение в окончательном виде

$$u(x, t) = Q \cdot x \left(1 - erf \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{Q\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \quad (4.32)$$

§ 5. Примеры применения конечных интегральных преобразований

Пример 1. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, \ell], \quad t > 0. \quad (4.33)$$

При начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0 - const \quad (4.34)$$

и неоднородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = u_n - const, \quad u|_{x=\ell} = u_n - const. \quad (4.35)$$

Поставленную задачу будем решать методом конечного синус-преобразования Фурье. Конечное интегральное преобразование диктуется конечностью заданной области ($x \in [0, \ell]$). Синус-преобразование определяется граничными условиями.

Введем в качестве образа неизвестной функции $u(x, t)$ функцию $\bar{u}_n(t)$ следующим образом

$$\bar{u}_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(x, t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (4.36)$$

Если каким-нибудь образом будет определена функция $\bar{u}_n(t)$, то моментально

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (4.37)$$

Переходим к решению.

Умножим обе части уравнения на $\frac{2}{\ell} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx$ и интегрируем от 0 до ℓ .

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2a^2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (4.38)$$

Вычислим эти интегралы.

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx \right) = \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \\ = \frac{(u_n - (-1)^n \cdot u_k) \cdot 2a^2 n \pi}{\ell^2} - \left(\frac{a n \pi}{\ell} \right)^2 \cdot \bar{u}_n(t). \end{aligned} \quad (4.40)$$

К интегралу (4.40) дважды применен метод интегрирования по частям и учтены граничные условия задачи.

Приравняем (4.39) и (4.40)

$$\frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \left(\frac{a n \pi}{\ell} \right)^2 \bar{u}_n(t) = \frac{u_n - (-1)^n u_k}{\ell^2} 2a^2 n \pi. \quad (4.41)$$

После воздействия интегралом на уравнение в частных производных получим образ этого уравнения в виде обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянной правой частью, решение которого не представляет никакого труда

$$\bar{u}_n(t) = c \cdot \exp \left(- \left(\frac{a n \pi}{\ell} \right)^2 t \right) + \frac{2}{\pi n} (u_n - (-1)^n u_k). \quad (4.42)$$

Для определения произвольной постоянной c найдем начальное условие для (4.41) в виде синус-преобразования начального условия (4.34).

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(0) &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u|_{t=0} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0 \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \\ &= \frac{2}{\ell} u_0 \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2u_0}{\pi n} (1 - (-1)^n). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Подчиним решение (4.42) условию (4.43)

$$c = \frac{2u_0}{\pi n} \left(1 - (-1)^n\right) - \frac{2}{\pi n} \left(u_n - (-1)^n u_k\right).$$

Образ решения примет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t) &= \frac{2}{\pi n} \left(u_0 - u_k + (-1)^n (u_H - u_0)\right) \times \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \frac{2}{\pi n} \left(u_H - (-1)^n u_k\right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Найдем решение поставленной задачи, используя формулу обратного преобразования (4.37)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left(u_0 - u_H + (-1)^n (u_k - u_0)\right)\right) \times \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \frac{1}{n} \left(u_H - (-1)^n u_k\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Остается несколько преобразовать полученное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2u_H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n} - \frac{2u_k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left(u_0 - u_H + (-1)^n (u_k - u_0)\right)\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Оказывается, первые два ряда в (4.46) суммируются

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kx}{k} = -\frac{x}{2}.$$

Эти сведения можно найти, например, в книге Градштейна И.С. и Рыжика И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971г.

В нашем случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{\ell} x}{n} = \frac{\pi - \frac{\pi}{\ell} x}{2} = \pi \frac{\ell - x}{2\ell}, \quad (4.47)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n} = -\frac{\pi x}{2\ell}. \quad (4.48)$$

Подставим вместо рядов их суммы

$$\begin{aligned} u(x, t) = & u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} (u_0 - u_H + (-1)^n) (u_k - u_0) \right) \times \\ & \times \exp \left(- \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Сделаем проверку полученного решения.

Сразу видно, что решение удовлетворяет граничным условиям. Если положить в решении (4.49) $t = 0$ и полученные ряды просуммировать согласно (4.47) и (4.48), то получим выполнение начального условия. При увеличении t члены ряда убывают. При некотором $t = t_p$ сумму ряда в (4.49) можно без большой ошибки заменить первым членом этого ряда.

$$\begin{aligned} u(x, t_p) = & u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x + \\ & + \frac{2}{\pi} (u_0 - u_H + (-1)) (u_k - u_0) \cdot \exp \left(- \left(\frac{a\pi}{\ell} \right)^2 t_p \right) \cdot \sin \frac{\pi}{\ell} x. \end{aligned}$$

Момент времени, когда вместо суммы ряда можно взять первый член этого ряда, принято называть регулярным режимом. При дальнейшем увеличении t , ($t \rightarrow \infty$) можно пренебречь рядом или, как принято говорить, рассматривать стационарный режим

$$u(x) = u_H + \frac{u_k - u_H}{\ell} x.$$

Покажем качественно изменение $u(x, t)$ в различные моменты времени

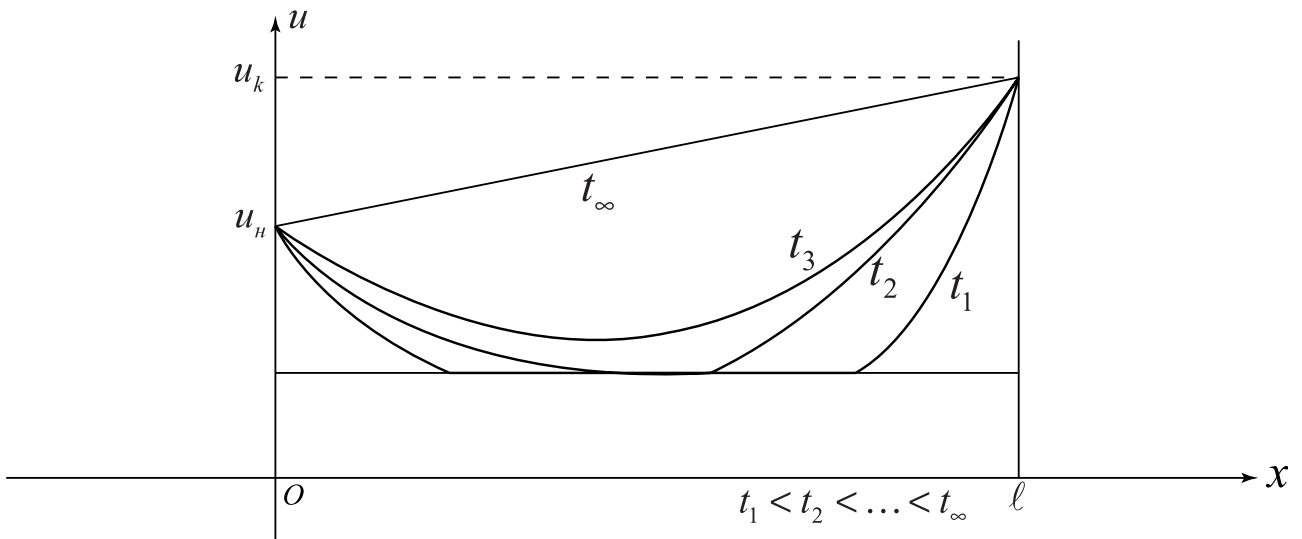


Рис. 4.1

Пример 2. Рассмотрим пример конечного косинус-преобразования Фурье. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.50)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (4.51)$$

и граничных условиях

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = u_H, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = u_k. \quad (4.52)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, t) = \frac{\bar{u}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(t) \cdot \cos \frac{\pi n}{\ell} x, \quad (4.53)$$

где

$$\bar{u}_0(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t) dx \quad (4.54)$$

и

$$\bar{u}_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t) \cdot \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (4.55)$$

Если удастся каким-либо образом найти $\bar{u}_n(t)$, то согласно (4.53) будет найдено решение поставленной задачи.

а) Найдем решение задачи при $n \geq 1$:

Умножим члены уравнения (4.50) на $\frac{2}{\ell} \cos \frac{\pi n}{\ell} x$ и проинтегрируем на отрезке $[0, \ell]$.

$$\frac{2a^2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (4.56)$$

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{d}{dt} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x, t) \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx = \frac{d\bar{u}_n(t)}{dt}. \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx = \\ = \left((-1)^n u_k - u_H \right) \frac{2a^2}{\ell} - \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \bar{u}_n(t). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Согласно (4.56) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{u}_n(t)}{dt} + \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 \bar{u}_n(t) = \frac{2a^2}{\ell} \left((-1)^n \cdot u_k - u_H \right). \quad (4.59)$$

Определим начальное условие для этого уравнения

$$\bar{u}_n(0) = \frac{2}{\ell} u_0 \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx = 0. \quad (4.60)$$

Общее решение (4.59)

$$\bar{u}_n(t) = c \cdot \exp \left(- \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) + \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n u_k - u_H \right). \quad (4.61)$$

Частное решение с учетом (4.60)

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t) = \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \left(u_H - (-1)^n u_k \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) + \\ + \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \left((-1)^n u_k - u_H \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

б) Рассмотрим случай $n = 0$. В этом случае косинус обращается в единицу. Члены уравнения (4.50) умножим на $\frac{2}{\ell} dx$ и проинтегрируем от 0 до ℓ .

$$\frac{2a^2}{\ell} \int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{2a^2}{\ell} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^\ell = \frac{2a^2}{\ell} (u_k - u_H).$$

$$\frac{2}{\ell} \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(x, t) dx \right) = \frac{d\bar{u}_0(t)}{dt}.$$

$$\frac{d\bar{u}_0(t)}{dt} = \frac{2a^2}{\ell} (u_k - u_H). \quad (4.63)$$

Для последнего уравнения определим начальное условие

$$\bar{u}_0(0) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0 dx = 2u_0.$$

Общее решение (4.63)

$$\bar{u}_0(t) = \frac{2a^2}{\ell} (u_k - u_H) t + B. \quad (4.64)$$

Частное решение, удовлетворяющее $\bar{u}_0(0) = 2u_0$,

$$\bar{u}_0(t) = \frac{2a^2}{\ell} (u_k - u_H) t + 2u_0. \quad (4.65)$$

Подставим полученные образы (4.62) и (4.65) в формулу обратного преобразования (4.53).

$$u(x, t) = \frac{a^2}{\ell} (u_k - u_H) t + u_0 + \frac{2\ell u_k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cos \frac{\pi n}{\ell} x}{n^2} - \frac{2\ell u_H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{\ell} x}{n^2} + \frac{2\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (u_H - (-1)^n u_k) \cdot \exp \left(- \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) \cdot \cos \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (4.66)$$

Из указанной выше книги можно на странице 52 найти

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{\pi n x}{\ell}}{n^2} = \frac{\pi^2 x^2}{4\ell^2} - \frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n x}{\ell}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2 x}{2\ell} + \frac{\pi^3 x^2}{4\ell^2}.$$

Окончательно решение задачи будет

$$\begin{aligned} u(x, t) = & u_0 + \ell u_k \left(\frac{x^2}{2\ell^2} - \frac{1}{6} \right) - \ell u_H \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{\ell} + \frac{\pi x^2}{2\ell^2} \right) + \\ & + \frac{a^2}{\ell} (u_k - u_H) \cdot t + \frac{2\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (u_H - (-1)^n u_k) \cdot \exp \left(- \left(\frac{a\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) \cdot \cos \frac{\pi n}{\ell} x. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Как и в предыдущем примере, можно проверить, что полученное решение удовлетворяет уравнению, начальному и граничным условиям.

§ 6. Распространение тепла в пласте при радиальном течении горячей жидкости

Уравнение, описывающее процесс распространения тепла при закачке горячей жидкости в нефтяной пласт, в безразмерной форме можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - 2K(t)u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (4.68)$$

при условиях

$$u(1, t) = 1; \quad u(\infty, t) = u(r, 0) = 0. \quad (4.69)$$

Точное решение уравнения (4.68) не выражается через элементарные функции. При больших, практически интересных значениях параметра ν , решение становится непригодным для численных расчетов вследствие сильной осцилляции подинтегральной функции. Поэтому имеется необходимость иметь приближенные, но простые для использования расчетные формулы. Будем решать уравнение при условиях

$$u(0, t) = 1; \quad u(\infty, t) = u(r, 0) = 0. \quad (4.70)$$

Введем понятие подвижного радиуса теплового влияния $L = L(t)$, как расстояние от оси нагнетательной скважины до ближайшей точки пласта, где температура равна начальной пластовой T_0 . Анализ температурных кривых, полученных аналитически и опытным путем для случая радиальной симметрии,

приводит к идее аппроксимации функции температурного поля в виде параболы n -й степени. Поэтому будем искать решение в виде

$$T = Ar^n + B, \quad (4.71)$$

где A и B – неизвестные пока коэффициенты, а T – размерная температура. Найдем A и B :

$$T_{r=0} = T_B = B, \quad T_{r=L} = T_0 = AL^n + T_B.$$

Тогда

$$T = -(T_B - T_0) \left(\frac{r}{L} \right)^n + T_B.$$

Перейдем к безразмерной температуре

$$u = \frac{T - T_0}{T_B - T_0}, \quad u = 1 - \left(\frac{r}{L(t)} \right)^n, \quad (4.72)$$

где T_0 – начальная температура пласта;

T_B – температура закачиваемой жидкости.

Выражение (4.72) дает безразмерную температуру в любой момент времени, если $L(t)$ будет известной функцией. Будем определять $L(t)$. Введем в рассмотрение функцию

$$\theta(t) = \int_0^{\infty} u(r;t) r dr, \quad (4.73)$$

которая с точностью до постоянного множителя соответствует безразмерному количеству тепла, накопленному в пласте за время t . Фактически это количество тепла за рассматриваемое время, сосредоточенное в пласте с радиусом $L(t)$. Если временно приближенное решение обозначить $u_{\text{пр}}$, то можно записать

$$\theta(t) = \int_0^{\infty} u(r;t) r dr = \int_0^{L(t)} u_{\text{пр}} r dr. \quad (4.74)$$

Равенство (4.74) выражает условие сохранения теплового баланса процесса в интегральной форме, из которого необходимо найти радиус теплового влияния $L(t)$.

Умножим все члены (4.68) на $r dr$ и проинтегрируем от 0 до ∞ . Используя обозначения (4.74) и условия (4.70), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} + 2K(t)\theta = 2v. \quad (4.75)$$

Применив интегральное преобразование к начальному условию $u(r, 0) = 0$, получим начальное условие для (4.75)

$$\theta(0) = 0. \quad (4.76)$$

Применив интегральное преобразование (4.74) к приближенному решению (4.72), получим

$$\theta = \frac{nL^2(t)}{2(n+2)}. \quad (4.77)$$

Решение (4.75) будет

$$\theta = \exp\left(-2\int K(t)dt\right)\left(2v\int \exp\left(2\int K(t)dt\right)dt + c\right), \quad (4.78)$$

при условии $\theta(0) = 0$.

Приравнявая (4.77) и (4.78), можно найти радиус теплового влияния, а затем и приближенное решение уравнения в форме (4.72).

Рассмотрим различные выражения безразмерного коэффициента $K(t)$.

1. Пусть $K(t) = 0$ – теплоизолированный пласт. Тогда

$$u(r, t) = 1 - \frac{0,5r^n}{\sqrt{\left(vt\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)^n}}. \quad (4.79)$$

2. Пусть

$$K(t) = \frac{2b}{\sqrt{\pi t}}.$$

Это выражение для коэффициента теплообмена хорошо согласуется с экспериментальными данными для всех значений времени. При данном $K(t)$

$$u(r, t) = 1 - \frac{r^n}{\sqrt{\left(\frac{\left(2vb\left(1 + \frac{2}{n}\right)\exp(-2d\sqrt{t}) + 2d\sqrt{t} - 1\right)}{d^2}\right)^n}}. \quad (4.80)$$

Для малых моментов времени можно написать приближенное равенство

$$\frac{\exp(-2d\sqrt{t}) + 2d\sqrt{t} - 1}{d^2} \approx \frac{4d^2t}{2d^2} = 2t.$$

В этом случае (4.80) переходит в (4.79), т.е. при малых значениях времени и большой толщине пласта потери тепла будут настолько малы, что пласт можно считать теплоизолированным. Зависимости (4.79) и (4.80) допускают вариацию показателя степени n . Этот показатель нужно подобрать так, чтобы приближенное решение обладало достаточной точностью и расчетные формулы были бы простыми. Исследованиями установлено, что для однородного пласта результаты экспериментов дают хорошее совпадение с приближенной формулой при $n = 2$.

В таблице 4.2 показаны результаты расчетов по формуле (4.80) при параметрах:

$$n=2; h=10\text{м}; q=1,7\text{кг/с (150т/сут)}; \lambda_1 = \lambda_2=2,9\text{Дж/(м с К)};$$

$$C_{ж}=4190\text{Дж/(кг К)}; C_1 = C_2=960\text{Дж/(кг К)}; \rho_1 = \rho_2=2480\text{кг/м}^3.$$

Для сравнения при тех же параметрах даны результаты, полученные по формуле Х. Ловерье

$$U = \operatorname{erfc} \left(\frac{0,5\xi}{\sqrt{(t-\xi) C_1/C_2}} \right) \sigma(t-\xi). \quad (4.81)$$

Таблица 4.2

$R, \text{ м}$	$\tau=1 \text{ год}$		$\tau=2 \text{ года}$		$\tau=3 \text{ года}$	
	2*	3*	2*	3*	2*	3*
10	0,964	0,978	0,983	0,989	0,989	0,990
20	0,855	0,899	0,931	0,944	0,957	0,952
30	0,674	0,767	0,844	0,876	0,903	0,910
40	0,412	0,515	0,723	0,774	0,827	0,823
50	0,092	0,1	0,567	0,631	0,730	0,735
60			0,376	0,454	0,611	0,601
70			0,168	0,241	0,470	0,446
80					0,308	0,293
90					0,124	0,154
100					0,029	0,029

* – Примечание: столбец 2 – значения U по формуле (4.80),
столбец 3 – значения U по формуле (4.81).

Следует отметить, что вычисления по полученным приближенным формулам гораздо удобнее, чем по формуле (4.81). Если показатель экспоненты $2d\sqrt{t} \geq 3$, то вычисления по этим формулам еще более упрощаются. Анализ

таблицы показывает, что при закачке горячей жидкости в пористую среду основную роль в формировании температурного поля играет конвективный теплоперенос (формула (4.80) получена только с учетом конвективной составляющей). При практически интересных значениях v безразмерная температура по формулам (4.80) и (4.81) хорошо совпадает особенно при больших значениях времени закачки.

$$\text{Обозначения: } v = \frac{qc_1\rho_1}{4\pi h\lambda_1}; \quad t = \frac{\lambda_1\tau}{c_1\rho_1 h^2}; \quad d = \frac{4b}{\sqrt{\pi}}; \quad b = \sqrt{\frac{\lambda_1 c_1 \rho_1}{\lambda_2 c_2 \rho_2}};$$

$\xi = \frac{4\pi\lambda_1 R}{hqC_{ж}}$; h – толщина пласта; q – расход нагнетательной жидкости; τ – время; R – расстояние от нагнетательной скважины; $C_{ж}$ – теплоемкость нагнетаемой жидкости; λ, c, ρ – соответственно теплопроводность, теплоемкость и плотность. Индекс 1 относится к пласту, индекс 2 – к окружающим породам.

§ 7. Поле давления в полубесконечном пласте

Рассмотрим задачу об определении поля давления $P(x, t)$ в полубесконечном пласте, когда прямолинейная галерея (прямолинейная батарея скважин заменяется галереей) пущена в эксплуатацию дебитом Q . Начальное давление P_0 . Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.82)$$

при условиях $P(x, t)|_{t=0} = P_0$;

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = A = -\frac{Q\mu}{b \cdot k}; \quad P(x, t)|_{x \rightarrow \infty} \text{ ограничено.}$$

Здесь χ – коэффициент пьезопроводности; k – коэффициент проницаемости; μ – вязкость жидкости; b – толщина пласта.

Применим преобразование Лапласа к уравнению (4.82) с учетом начального условия

$$\frac{d^2 \bar{P}(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\chi} \bar{P}(x, s) = -\frac{P_0}{s} \quad (4.83)$$

при условиях

$$\left. \frac{\partial \bar{P}(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{A}{s}; \quad (4.84)$$

$$\bar{P}(x, s) \Big|_{x \rightarrow \infty} \text{ограничено} \quad (4.85)$$

Общее решение (4.83) примет вид

$$\bar{P} = \frac{P_0}{s} + c_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\chi}}x\right) + c_2 \exp\left(\sqrt{\frac{s}{\chi}}x\right),$$

где

$$c_1 = c_1(s), \quad c_2 = c_2(s).$$

Вследствие ограниченности $\bar{P}(x, s)$ при $x \rightarrow \infty$ имеем $c_2 = 0$, тогда

$$\bar{P} = \frac{P_0}{s} + c_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\chi}}x\right).$$

Исходя из условия (4.84), имеем

$$\frac{A}{s} = A_1 \left(-\sqrt{\frac{s}{\chi}}\right),$$

откуда

$$A_1 = -\frac{A\sqrt{\chi}}{s\sqrt{s}}.$$

Изображение решения примет вид

$$\bar{P} = \frac{P_0}{s} - A\sqrt{\chi} \frac{\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\chi}}\right)\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}. \quad (4.86)$$

По таблице изображений Лапласа

$$\frac{\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\chi}}\right)\sqrt{x}}{s\sqrt{s}} \xrightarrow{\cdot} 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\chi}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\chi t}},$$

$$\frac{P_0}{s} \xrightarrow{\cdot} P_0.$$

Получили решение поставленной задачи

$$P(x, t) = P_0 + \frac{Q \cdot \mu}{b \cdot k} \left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\chi}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\chi t}} \right). \quad (4.87)$$

Решение (4.87) удовлетворяет уравнению (4.82), начальному и граничным условиям.

При проверке надо иметь в виду, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\chi t}} = 0.$$

Можно также показать, что

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = A.$$

§ 8. Определение давления в магистральном газопроводе с путевым отбором

В магистральных газопроводах давление с достаточной точностью описывается с помощью уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \pm \frac{c^2}{F} q(x, t), \quad (4.88)$$

где $\chi = \frac{c^2}{2a} = \frac{2c^2 D}{\lambda \omega}$; c – скорость звука в данной среде; λ – коэффициент гидравлического сопротивления (при различных режимах течения принимает различные значения); D – диаметр трубопровода; ω – скорость течения газа; $q(x, t)$ – массовый отбор (подкачка) газа в единицу времени на единицу длины трубопровода; F – площадь поперечного сечения трубопровода.

Задача 1. Определить давление в газопроводе длиной ℓ с начальным давлением P_H , если на концах газопровода поддерживается давление P_1 и P_2 . На участке $[x_1, x_2]$ производится непрерывный отбор. Для этого необходимо интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2aq}{F} (\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2)) \quad (4.89)$$

при условиях

$$P|_{x=0} = P_1; \quad P|_{x=\ell} = P_2; \quad P|_{t=0} = P_H.$$

Здесь σ – функция Хевисайда

$$\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ 1 & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Так как известны значения P на концах трубопровода, то все члены уравнения (4.89) умножаем на $\frac{2}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$ и интегрируем от 0 до ℓ .

Изображающее уравнение

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + \frac{c^2}{2a} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \cdot P_n(t) = D_n \quad (4.90)$$

при условии

$$P_n(0) = \frac{2P_n}{\pi n} \left(1 + (-1)^{n-1} \right) = P_{HP},$$

где

$$D_n = \frac{c^2 n \pi}{a \ell^2} \left(P_1 + P_2 (-1)^{n-1} \right) + \frac{c^2 q}{F} \cdot \frac{2}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{\ell} x_2 - \cos \frac{\pi n}{\ell} x_1 \right).$$

Тогда

$$P_n(t) = c_n \cdot \exp \left(-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 t \right) + \frac{2a\ell^2}{(c n \pi)^2} \cdot D_n,$$

где

$$c_n = P_{Hn} - 2a \left(\frac{\ell}{c n \pi} \right)^2 \cdot D_n$$

и

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a\ell^2}{(c n \pi)^2} D_n + c_n \cdot \exp \left(-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \right). \quad (4.91)$$

После преобразований (суммирования некоторых рядов) решение будет

$$\begin{aligned}
P(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{2a}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x + \\
& + \frac{P_2 - P_1}{\ell} x + \frac{aq}{F} \cdot \frac{x(x_2^2 - x_1^2)}{\ell} + \\
& + \begin{cases} 2x(x_1 - x_2) & \text{при } x < x_1, \\ x^2 - 2x_1x + x_1^2 & \text{при } x_1 < x < x_2, \\ x_1^2 - x_2^2 & \text{при } x > x_2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Исходя из (4.92), можно определить скорость $[m^3/c]$ через произвольное сечение трубопровода

$$\begin{aligned}
Q = & -\frac{1}{2a} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \frac{\pi n}{\ell} \exp\left(-\frac{c^2}{2a}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \right. \\
& \left. + \frac{P_2 - P_1}{\ell} + \frac{aq}{F} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{\ell} + \begin{cases} 2(x_1 - x_2) & \text{при } x < x_1, \\ 2(x - x_2) & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{при } x > x_2. \end{cases} \right]
\end{aligned}$$

В частности, в начале трубопровода

$$\begin{aligned}
Q_H = Q|_{x=0} = & -\frac{1}{2a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \frac{\pi n}{\ell} \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{2a}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \right. \\
& \left. + \frac{P_2 - P_1}{\ell} + \frac{aq(x_2^2 - x_1^2) + 2\ell(x_2 - x_1)}{\ell F} \right],
\end{aligned}$$

а в конце

$$\begin{aligned}
Q_k = Q|_{x=\ell} = & -\frac{1}{2a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n \cdot \frac{\pi n}{\ell} \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{2a}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) + \right. \\
& \left. + \frac{P_2 - P_1}{\ell} + \frac{aq(x_2^2 - x_1^2)}{\ell F} \right].
\end{aligned}$$

Задача 2. Рассмотрим задачу об определении давления при сосредоточенном отборе G в точке $x = x_1$. (Если происходит подкачка, то G следует заменить на $-G$). Пусть на концах газопровода снова заданы давления

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2aG}{F} \delta(x - x_1), \quad (4.93)$$

при условиях

$$P(0, t) = P_H, \quad P(\ell, t) = P_k, \quad P(x, 0) = P_0,$$

$$\delta(x - x_1) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_1, \\ 0 & \text{при } x \neq x_1. \end{cases}$$

Отметим сразу одно свойство дельта-функции Дирака, которое будет использовано при решении этой задачи

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta(x - a) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } a \notin (x_1, x_2), \\ f(a), & \text{если } x_1 < a < x_2. \end{cases}$$

После применения синус-преобразования с ядром $\sin \frac{\pi n}{\ell} x$ с учетом

$$\frac{2}{\ell} \int_0^\ell \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cdot \delta(x - x_1) dx = \frac{2}{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x_1,$$

получим образ заданного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} + \frac{c^2}{2a} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right) P_n(t) &= \\ &= \frac{c^2 n \pi}{a \cdot \ell^2} \left((-1)^n P_k + P_H \right) - \frac{2c^2 G}{\ell F} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x_1, \end{aligned} \quad (4.94)$$

при начальном условии

$$P_n|_{t=0} = P_0 \cdot \frac{2}{\pi n} \left((-1)^{n-1} + 1 \right). \quad (4.95)$$

Решение уравнения (4.94) при условии (4.95) примет вид

$$\begin{aligned} P_n(t) &= c_n \cdot \exp \left(-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 t \right) + \frac{2}{\pi n} \left((-1)^{n-1} P_k + P_H \right) - \\ &\quad - \frac{4a\ell \cdot G}{F \cdot \pi^2 n^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x_1, \end{aligned}$$

где

$$c_n = P_n(0) - \frac{2}{\pi n} \left((-1)^{n-1} P_k + P_H \right) + \frac{4aG \cdot \ell}{F \pi^2 n^2} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x_1. \quad (4.96)$$

Давление в любом сечении определится формулой

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (4.97)$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} = \frac{x}{2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{\ell} x_1 \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} \frac{x(\ell - x_1)}{\ell^2} & \text{при } x < x_1, \\ \frac{x_1(\ell - x)}{\ell^2} & \text{при } x > x_1, \end{cases}$$

получим

$$P(x, t) = P_H - \frac{P_H - P_k}{\ell} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{2a} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x -$$

$$- \frac{2aG}{F} \cdot \begin{cases} \frac{x(\ell - x_1)}{\ell} & \text{при } x < x_1, \\ \frac{x_1(\ell - x)}{\ell} & \text{при } x > x_1. \end{cases} \quad (4.98)$$

Последние слагаемые (4.98) можно было бы записать в виде

$$\frac{2aG}{F} \left(\frac{x_1(\ell - x)}{\ell} \sigma(x - x_1) - \frac{x(\ell - x_1)}{\ell} (\sigma(x) - \sigma(x - x_1)) \right).$$

Имея давление, можно найти массовый расход через любое сечение

$$M(x, t) = -\frac{F}{2a} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}.$$

§ 9. Обобщенные функции

Единичная функция Хевисайда. При решении задач нефтепромысловой механики широко используются единичная функция Хевисайда и дельта-функция Дирака. Рассмотрим эти функции, их основные свойства и правила обращения с ними.

$$\varphi(t) = \begin{cases} a & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

называется функцией Хевисайда.

Если $a = 1$, то

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

называется единичной функцией Хевисайда. График этой функции изображен на рис. 4.2.

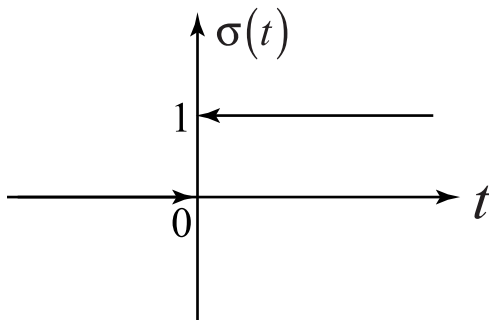


Рис. 4.2

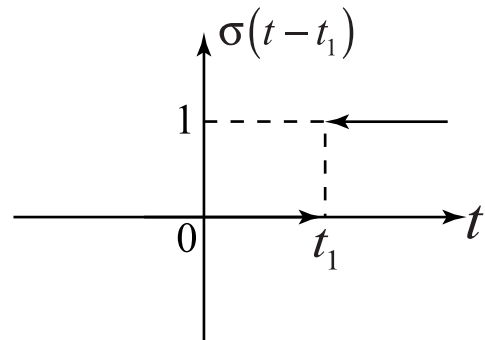


Рис. 4.3

Используя известные свойства функций, рассмотрим

$$\sigma(t-t_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t_1, \\ 0 & \text{при } t < t_1. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.3.

В задачах нефтепромысловой механики иногда удобно пользоваться комбинацией единичных функций от различных переменных (например по времени t или координате x). Пусть линейный источник мощностью h действует на промежутке времени $[t_1, t_2]$, т.е.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ h & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Выразим $\varphi(t)$ через единичную функцию

$$\sigma(t-t_1) - \sigma(t-t_2) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{при } t < t_1, \\ 1 - 0 = 1 & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 1 - 1 = 0 & \text{при } t > t_2, \end{cases}$$

откуда $\varphi(t) = h(\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2))$.

Если источник действовал при $t \in [t_1, t_2]$ на участке $x \in [x_1, x_2]$, то

$$\varphi(x, t) = (\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2)) \cdot (\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)).$$

Из приведенных примеров следует, что с помощью единичной функции удобно записывать условия того, что какой-либо физический процесс начинается с некоторого момента времени и заканчивается в определенный момент (цикличность отбора жидкости из скважин, отбор из трубопровода в определенный промежуток времени), учитывать несовершенство скважин и т.д.

При интегрировании функций, содержащих единичную функцию, следует учесть, что

$$\int_a^b f(x) \cdot \sigma(x - x_1) dx = \begin{cases} \int_a^b f(x) dx, & \text{если } x_1 < a, \\ \int_a^b f(x) dx, & \text{если } a < x_1 < b, \\ 0, & \text{если } x_1 > b. \end{cases}$$

Дельта-функция. Функция, обладающая свойствами:

- 1) равна нулю при всех $x \neq 0$;
- 2) обращается в бесконечность при $x = 0$;
- 3) интеграл от этой функции, взятый в пределах $(-\infty, +\infty)$, равен единице; называется дельта-функцией Дирака и обозначается $\delta(x)$. Таким образом,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases} \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

При помощи дельта-функции удобно записывать действие источников или стоков в отдельные моменты времени или в отдельных точках. Если источник действует в точке с координатой x_1 , то дельта-функция имеет вид $\delta(x - x_1)$. Функция $\delta(t - t_1)$ означает действие источника в момент времени t_1 .

Выражение $(\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2)) \cdot \delta(t - t_1)$ означает, что источник действовал на отрезке $[x_1, x_2]$ в момент времени $t = t_1$. Аналогично,

$(\sigma(t-t_1) - \sigma(t-t_2)) \cdot \delta(x-x_1)$ означает, что источник действовал в точке $x = x_1$ в промежутке времени $[t_1, t_2]$.

Следует отметить, что для дельта-функции не существует никакого явного выражения. Поэтому она не может входить ни в какие окончательные соотношения. Отметим также, что дельта-функция является размерной величиной и имеет размерность, обратную размерности аргумента. Кстати, функция Хевисайда безразмерна.

Приведем некоторые интегральные соотношения, связанные с дельта-функцией.

$$1) \int_a^b \varphi(x) \cdot \delta(x) dx = \varphi(0), \text{ если } a < 0 < b,$$

$$2) \int_a^b \varphi(x) \cdot \delta(x) dx = 0, \text{ если } 0 \notin [a, b],$$

$$3) \int_a^b \varphi(x) \cdot \delta(x-x_0) dx = \varphi(x_0), \text{ если } a < x_0 < b.$$

Выше рассматривалась дельта-функция одной переменной. В двумерных и трехмерных задачах фильтрации, теплового воздействия на пласт и в задачах трубопроводного транспорта используется дельта-функция на плоскости $\delta(x, y)$ и в пространстве $\delta(x, y, z)$.

Для плоскости, например, функция вводится следующим образом:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0, \\ \infty, & \text{если } x = y = 0 \end{cases} \text{ и } \iint_D f(x, y) dx = 1.$$

Для плоскости и пространства имеют место интегральные соотношения, аналогичные для одномерного случая.

§ 10. Распространение тепла в пласте при линейном течении горячей жидкости

При закачке горячей воды в пласт, если пренебречь перетоком тепла в выше- и нижележащие пласты, температурное поле определяется уравнением

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.99)$$

Наличие конвективного слагаемого связано с движением теплоносителя. Уравнение (4.99) будем решать при условиях:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = T_0, \quad (4.100)$$

$$u(x, t)\Big|_{x=0} = T_1, \quad (4.101)$$

$$u(x, t)\Big|_{x \rightarrow \infty} \text{ ограничено.}$$

Применим преобразование Лапласа

$$\bar{u}(x, s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) u(x, t) dt.$$

Получаем изображающее уравнение

$$a \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \beta \frac{d\bar{u}}{dx} - s\bar{u} = -T_0, \quad (4.102)$$

где учтено начальное условие.

Для нахождения изображения \bar{u} необходимо решить уравнение (4.102) при условиях

$$\bar{u}(x, s)\Big|_{x=0} = \frac{T_1}{s}, \quad (4.103)$$

$$\bar{u}(x, s)\Big|_{x \rightarrow \infty} \text{ ограничено.}$$

Решение уравнения (4.102) при ограниченности \bar{u} , когда $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\bar{u}(x, s) = \frac{T_0}{s} + A \cdot \exp\left(\frac{\beta}{2a} x\right) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\beta^2}{4a} + \frac{s}{a}} x\right), \quad (4.104)$$

где A определяется из условия (4.103)

$$\frac{T_1}{s} = \frac{T_0}{s} + A, \quad A = \frac{T_1 - T_0}{s}.$$

Подставляя A в условие (4.104), получаем

$$u(x, s) = \frac{T_0}{s} + \frac{T_1 - T_0}{s} \cdot \exp\left(\frac{\beta x}{2a}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\beta^2}{4a} + s}\right). \quad (4.105)$$

Необходимо перейти к оригиналу по таблицам операционного исчисления. Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2} & \left(\exp\left(\frac{\beta x}{2a}\right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{x + \beta t}{2\sqrt{at}} + \right. \\
 & \left. + \exp\left(-\frac{\beta x}{2a}\right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{x - \beta t}{2\sqrt{at}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{4.106}$$

где $\operatorname{erfc}z = 1 - \operatorname{erf}z$; $\operatorname{erf}z = \int_0^z \exp(-t^2) dt$.

Если $\beta = 0$, то решение при тех же условиях имеет вид

$$u(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

Глава V. Уравнение Лапласа

§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, фильтрация и т.д.) обычно приводят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

На плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Как было показано в главе III, температура нестационарного температурного поля удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u.$$

Если процесс стационарен (не зависит от времени), то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, и уравнение теплопроводности переходит в уравнение Лапласа.

При наличии внутри рассматриваемого тела источников тепла получим уравнение

$$\Delta u = -f(x, y, z),$$

где $f(x, y, z) = F/\lambda$. Здесь F – плотность тепловых источников, λ – коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа принято называть уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью σ . Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела V формулируется следующим образом: найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри V уравнению $\Delta u = -f(x, y, z)$ и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

- 1) $u = \varphi(x, y, z)$ на σ – первая краевая задача;

- 2) $\frac{\partial u}{\partial n} = \Psi(x, y, z)$ на σ – вторая краевая задача;
- 3) $\frac{\partial u}{\partial n} + h \cdot (u - \chi) = 0$ на σ – третья или смешанная краевая задача.

Здесь φ, ψ, χ – заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности σ . Первую краевую задачу часто называют задачей Дирикле, а вторую – задачей Неймана.

В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников и стоков. Напомним, что поле $u(p)$ называется потенциальным, если $\operatorname{rot} u(p) = 0$.

Пусть внутри некоторого объема V с границей σ имеет стационарное течение жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $v(p)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость \bar{v} является потенциальным вектором $\bar{v} = -\operatorname{grad} \varphi$, где φ – скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. Подставляя, получим $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$. Перейдем к координатам в пространстве

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

§ 2. Гармонические функции

Рассмотрим уравнение Лапласа на плоскости или в пространстве

$$\Delta u = 0. \quad (5.1)$$

Определение. Функция $u = u(p)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа (5.1) в некоторой области D , называется *гармонической* в этой области.

Простейшими примерами гармонических функций являются линейные функции: $u = ax + by + c$ на плоскости и $u = ax + by + cz + d$ в пространстве. Особый интерес представляют решения уравнений Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической (в случае двух независимых переменных – круговой) симметрией.

Решение $u = u(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Это уравнение получится, если подставить искомую функцию в уравнение Лапласа (5.1), записанное в сферических координатах (см. главу II). Интегрируя это уравнение, находим

$$u = \frac{c_1}{r} + c_2,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, получим функцию $u_0 = \frac{1}{r}$, которую часто называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*. Функция u_0 является гармонической всюду в пространстве, кроме начала координат.

Аналогично, полагая $u = u(r)$ и пользуясь уравнением Лапласа в цилиндрических или полярных координатах (см. главу II), найдем решения, обладающие цилиндрической или круговой симметрией

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \Rightarrow u = c_1 \ln r + c_2,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Выбирая $c_1 = -1$ и $c_2 = 0$, будем иметь $u_0 = \ln \frac{1}{r}$, которую называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости*.

Фундаментальные решения уравнения Лапласа имеют помимо большого значения в теории гармонических функций важный физический смысл.

Рассмотрим в пространстве электрическое поле, образованное точечным зарядом величины q , помещенным в начало координат. Тогда потенциал этого поля равен

$$u = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Если рассмотреть поле, создаваемое заряженной прямой, то потенциал такого поля будет равен

$$u = \frac{q_1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

где q_1 – линейная плотность заряда (величине заряда, рассчитанной на единицу длины).

§ 3. Свойства гармонических функций

Теорема о среднем. Пусть функция $u = u(x, y)$ гармоническая в некотором круге D радиуса R с центром (x_0, y_0) и непрерывная в соответствующем

замкнутом круге $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда значение этой функции в центре круга равно ее среднему значению на окружности Γ , ограничивающей данный круг (рис. 5.1), т.е.

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \varphi, y_0 + R \sin \varphi) d\varphi. \quad (5.2)$$

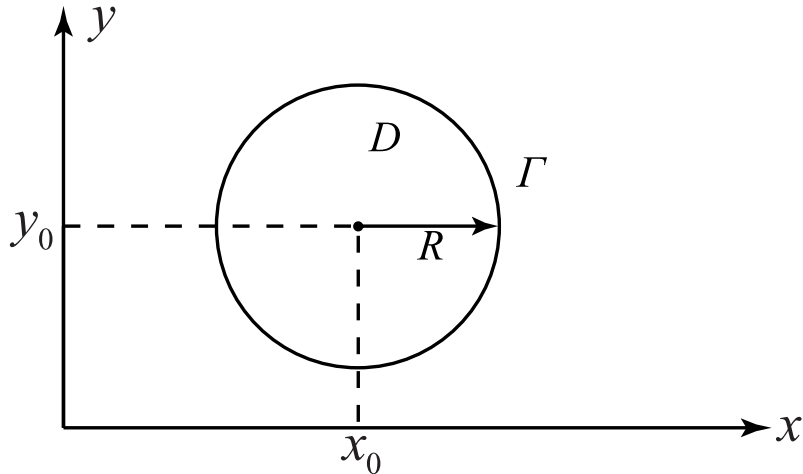


Рис. 5.1

Формуле (5.2) можно придать другой вид

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D u(x, y) dx dy. \quad (5.3)$$

Имеет место и обратная теорема: если в некоторой области D функция $u = u(x, y)$ непрерывная и для каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ выполняется теорема о среднем в любом сколь угодно малом круге с центром в точке (x_0, y_0) , то эта функция гармоничная в D .

Принцип максимума. Если функция $u(x, y)$ непрерывна в области D и на ее границе ($\bar{D} = D \cup \Gamma$), удовлетворяет уравнению Лапласа (гармонична) в области D , то максимальные и минимальные значения функции $u(x, y)$ достигаются на границе Γ , т.е.

$$\min_{(x,y) \in \Gamma} u(x, y) \leq u(x, y) \leq \max_{(x,y) \in \Gamma} u(x, y). \quad (5.4)$$

Следствие. Если функция $u = u(x, y)$ непрерывна в области \bar{D} и гармонична в области D , то

$$|u(x, y)| \leq \max_{(x, y) \in \Gamma} |u(x, y)|.$$

В частности, если $u|_{\Gamma} = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в D .

Из принципа максимума следуют и многие другие важные свойства гармонических функций.

Отметим, что теорема о среднем и принцип максимума выполняются и для функций, гармонических в пространственных областях.

§ 4. Функция Грина

Рассмотрим уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ на плоскости или в пространстве в области D . Рассмотрим точки $p(x, y)$ и $p_0(x_0, y_0)$ для плоскости и $p(x, y, z)$ и $p_0(x_0, y_0, z_0)$ для пространства. Расстояния между этими точками будут

$$r = |pp_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

или

$$r = |pp_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Пусть на границе области задано нулевое значение функции (нулевое условие Дирихле).

Определение. Функция $G(p, p_0)$ называется функцией Грина задачи Дирихле в области D , если для любой фиксированной точки $p_0 \in D$, она, как функция от p , удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывная в \bar{D} всюду, кроме точки p_0 и $G(p, p_0) = 0$ на границе D ; 2) гармоническая в D за исключением точки p_0 ; 3) в случае плоскости $G(p, p_0) - \ln \frac{1}{r}$ остается гармонической функцией в точке p_0 ; в случае пространства $G(p, p_0) - \frac{1}{r}$ остается гармонической в точке p_0 .

Функцию Грина называют также *функцией источника*. Функция Грина $G(p, p_0)$ (если она существует) однозначно определяется условиями 1-3. Кроме того $G(p, p_0) > 0$ в области D .

Задача 1. Построить функцию Грина для плоской области, ограниченной кругом.

Введем понятие сопряженных точек относительно окружности.

Определение. Точки p_0 и p^* называются сопряженными относительно окружности, если они лежат на одном луче, исходящем из центра O окружности, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса: $|Op_0| \cdot |Op^*| = R^2$ (рис. 5.2).

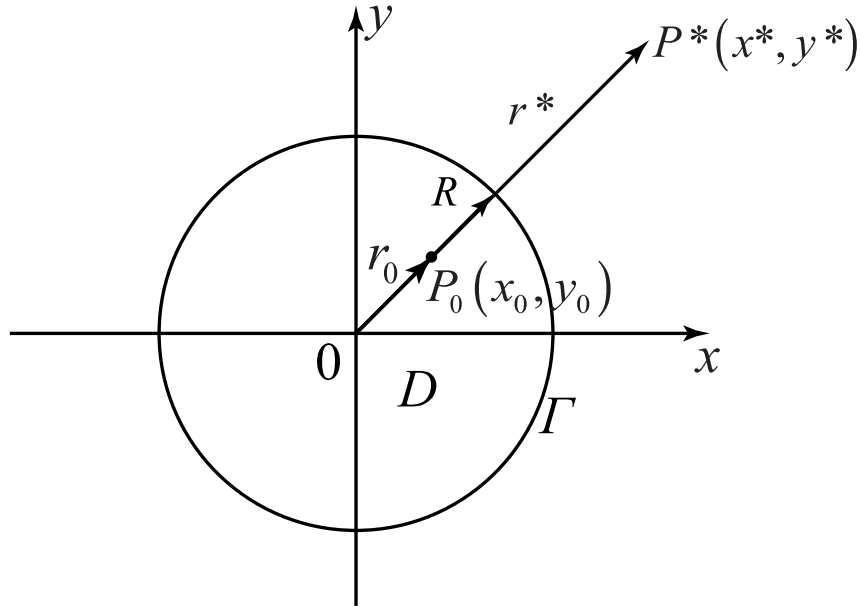


Рис. 5.2

Обозначим через $r_0 = |Op_0|$ и $r^* = |Op^*|$. Тогда $r_0 \cdot r^* = R^2$. Так как точки p_0 и p^* лежат на одном луче, выходящем из начала координат, то

$$\frac{x^*}{x_0} = \frac{y^*}{y_0} = \frac{r^*}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2} \Rightarrow x^* = \frac{R^2}{r_0^2} \cdot x_0, y^* = \frac{R^2}{r_0^2} \cdot y_0.$$

Возьмем функцию

$$G(p, p_0) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{r_0 \cdot r_1}, \quad (5.5)$$

где $r = |pp_0|$, $r_1 = |pp^*|$ (рис. 5.3).

Из треугольника pp_0O по теореме косинусов

$$r = \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho \cdot r_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + r^{*2} - 2\rho \cdot r^* \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

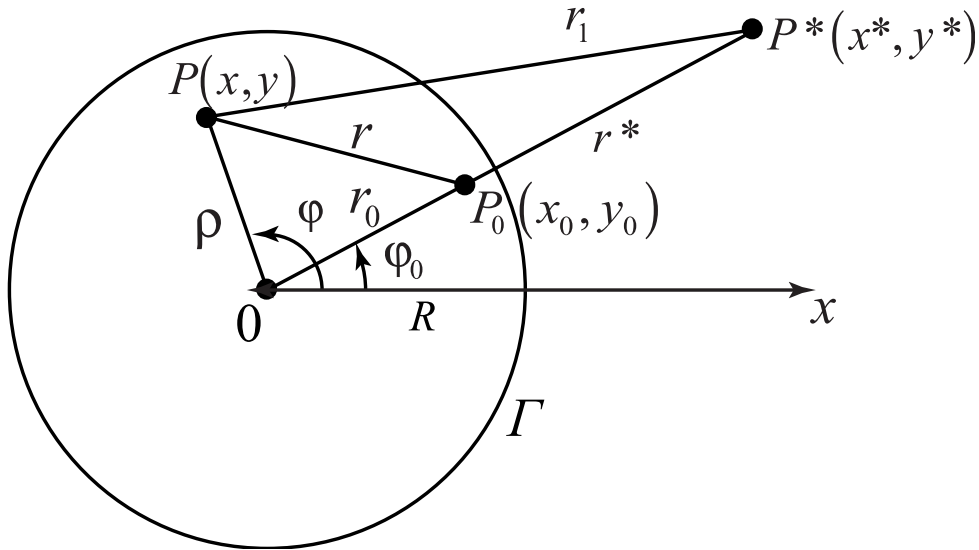


Рис. 5.3

Воспользовавшись равенством $r_0 \cdot r^* = R^2 \Rightarrow r^* = R^2 / r_0$, получим

$r_1 = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2 \cdot \rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}$. Величины r и r_1 выражаются через R, ρ, r_0, φ и φ_0 , и, в конечном счете через R, x, y, x_0, y_0 .

Покажем, что (5.5) удовлетворяет условиям 1-3 определения функции Грина. Функция $G(p, p_0) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{r_0 r_1}$ непрерывна в круге кроме точки p_0 (когда $r = 0$). На границе круга $\rho = R$.

$$\begin{aligned} r_{\rho=R} &= \sqrt{R^2 - r_0^2 - 2R \cdot r_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}, \\ r_{1_{\rho=R}} &= \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \\ &= \frac{R}{r_0} \sqrt{R^2 - r_0^2 - 2R \cdot r_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{R}{r_0} \cdot r_{\rho=R}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$G(p, p_0) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R/r_0}{\left(\frac{R}{r_0}\right) \cdot r} = 0,$$

т.е. на границе обращается в нуль.

Функция $G(p, p_0)$ гармоническая в D за исключением точки p_0 , что можно проверить, если записать оператор Лапласа в полярной системе координат с полюсом в точке p^* .

Выполняется и третье условие. Функция $G(p, p_0) - \ln \frac{1}{r} = -\ln \frac{R/r_0}{r_1}$ будет гармонической в точке p_0 , т.к. p принадлежит области, а точка p^* лежит вне области D и $r_1 > 0$.

Примечание. Аналогично строится функция Грина для шара радиуса R . Она имеет вид

$$G(p, p_0) = \frac{1}{r} - \frac{R/r_0}{r_1}, \quad (5.6)$$

где $r = |p_0 p|$, $r_1 = |p p^*|$, $r_0 = |O p_0|$. Точка p^* в этом случае – сопряженная точка p_0 относительно сферы радиуса R с центром в точке O , т.е. $|O p_0| \cdot |O p^*| = R^2$.

Функцию Грина можно рассматривать не только для ограниченных, но и для неограниченных областей.

Задача 2. Построить функцию Грина для полуплоскости.

Определим точки, сопряженные относительно прямой. Точки p_0 и p^* называются сопряженными относительно прямой, если они симметричны относительно этой прямой (рис.5.4а).

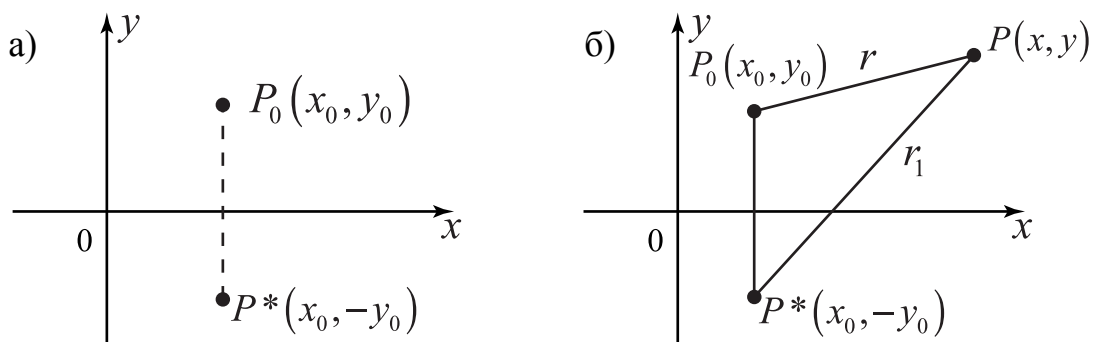


Рис. 5.4

Функция

$$G(p, p_0) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_1}, \quad (5.6)$$

где $r = |pp_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $r_1 = |pp^*| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}$ (рис.5.4б) удовлетворяют свойствам 1-3 определения функции Грина в полуплоскости $y > 0$. В самом деле, на границе области при $y = 0$ $r = r_1$, поэтому

$G(p, p_0)_{y=0} = 0$. Гармоничность функции $\ln \frac{1}{r_1}$ в области $y > 0$ проверим не-

посредственно

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = \frac{d}{dr_1} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) \cdot \frac{dr_1}{dx} = -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{x-x_0}{r_1};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{y+y_0}{r_1};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = \frac{2}{r_1^3} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{r_1} - \frac{1}{r_1^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = \frac{2}{r_1^3} \cdot \frac{(y+y_0)^2}{r_1} - \frac{1}{r_1^2};$$

$$\Delta \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = 0.$$

Следовательно, функция $G(p, p_0)$ гармоническая в области $y > 0$ всюду, кроме точки p_0 , а $G(p, p_0) - \ln \frac{1}{r} = -\ln \frac{1}{r_1}$ гармоническая в точке p_0 .

Примечание. Для полупространства $z > 0$ функция Грина имеет вид

$$G(p, p_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1},$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}.$$

§ 5. Решение задачи Дирихле методом функции Грина

Главная задача математической физики – построение решения данного дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего заданными граничным и начальным условиям. Метод Фурье использует технику разложения искомого решения по собственным функциям. Этот метод приводит к цели, если только удастся найти подходящую для заданных границ систему координат, допускающую разделение переменных в уравнении. Однако есть множество задач, где такое разделение не удается, т.к. граница тела достаточно сложна.

Если же метод Фурье применим, результат обычно получается в виде ряда, который часто сходится медленно, что затрудняет анализ решения.

Для некоторых видов задач желательно иметь решение в замкнутой форме, хотя бы в форме интеграла. Использование функций Грина представляет такой подход. Метод функции Грина решения задачи Дирихле основывается на формулах Грина. Оставляя в сторону выводы, напишем формулу, которая дает решение задачи Дирихле на плоскости, если известна функция Грина

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} f(s) \frac{\partial G}{\partial n} d\ell. \quad (5.7)$$

Здесь Γ – граница области (ориентирована положительно), $f(s)$ – условие на границе. Производная от функции G берется по внешней нормали к границе.

Построим решение задачи Дирихле для круга. Функция $G(p, p_0)$ для этого круга имеет вид

$$G(p, p_0) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{r_1} = -\ln r + \ln r_1 - \ln \frac{R}{r_0}.$$

Так как направление внешней нормали совпадает с направлением полярного радиуса ρ (рис. 5.3), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{\partial G}{\partial \rho} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\rho - r_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}{r} + \\ &+ \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\rho - \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_1}. \end{aligned}$$

На границе Γ расстояние $\rho = R$, $r_1 = \frac{R_1}{r_0}$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_r &= -\frac{R - r_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}{r^2} + \\ &+ \frac{r_0^2}{R^2} \cdot \frac{R - \frac{R^3}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r^2} = -\frac{R^2 - r_0^2}{Rr^2}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение для производной в формулу (5.7)

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(s) \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{Rr^2} d\ell. \quad (5.8)$$

Так как точка $p_0(x_0, y_0)$ может быть произвольной внутри круга, обозначим ее координаты $x_0 = \rho \cos \alpha$, $y_0 = \rho \sin \alpha$, (ρ, α) – полярная система координат с полюсом в точке O . Тогда (5.8) примет вид

$$u(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} d\varphi. \quad (5.9)$$

Функция $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R \cdot \rho \cdot \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2}$ называется *ядром Пуассона*

для круга.

§ 6. Задача Дирихле для круга. Решение методом Фурье

Найдем методом Фурье решение задачи Дирихле для круга. Радиус круга обозначим через R , центр поместим в начало координат. Очевидно, что здесь необходимо решать задачу в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.10)$$

На границе круга задано условие первого рода

$$u(r, \varphi) \Big|_{r=R} = u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad (5.11)$$

где $f(\varphi)$ – заданная функция.

Обратим внимание на постановку краевой задачи: здесь нет начальных условий. Это и понятно – ведь рассматривается установившийся процесс, который от времени не зависит.

Следуя идее метода разделения переменных, будем искать решение задачи в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (5.12)$$

Подставим искомое решение в уравнение

$$R''\Phi + \frac{1}{r} \cdot R'\Phi + \frac{1}{r^2} R \cdot \Phi'' = 0. \quad (5.13)$$

Разделим переменные и приравняем обе части числу λ^2

$$\frac{r^2 R''}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2.$$

(Ниже дано обоснование такого обозначения). Если решение задачи искать в форме (5.12), то уравнение распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (5.14)$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0. \quad (5.15)$$

Решение уравнения (5.14)

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \cos \lambda \varphi + B \cdot \sin \lambda \varphi. \quad (5.16)$$

Покажем, что λ не может принимать произвольные значения. Действительно, искомая функция $u(r, \varphi)$ является периодической относительно φ с периодом 2π . $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$. Это вытекает из характера полярной системы координат: увеличение φ на 2π возвращает точку (r, φ) в исходное положение. Но тогда и функция $\Phi(\varphi)$, как показывает (5.12), должна обладать свойством периодичности. Последний вывод и позволяет определить λ , т.к. должно выполняться

$$A \cdot \cos \lambda(\varphi + 2\pi) + B \cdot \sin \lambda(\varphi + 2\pi) \equiv A \cdot \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi$$

или

$$A \cdot \cos(\lambda \varphi + 2\pi \lambda) + B \cdot \sin(\lambda \varphi + 2\pi \lambda) \equiv A \cdot \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi.$$

Последнее тождество выполняется только тогда, когда λ есть целое число, $\lambda^2 = n^2$ – собственные числа задачи ($n \in \mathbb{N}$). Отрицательные n можем отбросить, т.к. знак n влияет только на знак произвольной постоянной B . Равенство (5.16) сейчас можно переписать в виде

$$\Phi(\varphi) = A \cdot \cos n\varphi + B \cdot \sin n\varphi. \quad (5.17)$$

Перейдем теперь к решению уравнения (5.15)

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{n^2}{r^2} R = 0. \quad (5.18)$$

Это уравнение второго порядка имеет переменные коэффициенты при неизвестной функции и ее производной, поэтому метод интегрирования линейных уравнений здесь не применим. Будем искать решение этого уравнения, называемого уравнением Эйлера, в виде

$$R(r) = r^n. \quad (5.19)$$

После подстановки этого соотношения в уравнение получим

$$r^2 \cdot n(n-1) \cdot r^{n-2} + r \cdot n \cdot r^{n-1} - \lambda^2 \cdot r^n = 0,$$

или

$$n(n-1) + n - \lambda^2 = 0,$$

или

$$n^2 - \lambda^2 = 0; \quad n = \pm \lambda \quad (\lambda \geq 0).$$

Общее решение уравнения Эйлера будет

$$R(r) = c \cdot r^n + D \cdot r^{-n}. \quad (5.20)$$

Рассмотрим случай $n = 0$, т.е. $\lambda = 0$. Уравнения (5.14) и (5.15) примут вид

$$\Phi'' = 0 \Rightarrow \Phi = A_0 + B_0 \varphi,$$

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' = 0 \Rightarrow R = c_0 + D_0 \cdot \ln r.$$

Так как решение должно быть периодическим с периодом 2π , то B_0 должно равняться нулю. Кроме того, в силу ограниченности решения всюду внутри круга, в том числе и в центре ($r = 0$), D_0 должно равняться нулю. Отсюда делаем вывод – нулевое решение должно быть постоянным (постоянная функция является периодической функцией любого периода). Обозначим это решение $\frac{A_0}{2}$.

В решение (5.20) надо положить $D = 0$. Иначе функция u в центре круга обратится в бесконечность и искомое решение не будет ограниченным. Тогда $R(r) = c \cdot r^n$ в силу линейности и однородности уравнения Лапласа решение будет

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) r^n. \quad (5.21)$$

Здесь $A \cdot c = A_n$; $B \cdot c = B_n$.

Коэффициенты полученного ряда Фурье подберем так, чтобы решение удовлетворяло краевому условию (5.11)

$$u|_{r=R} = f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) \cdot R^n.$$

По известным формулам разложения периодической ($T = 2\pi$) функции в полный ряд Фурье находим коэффициенты

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi;$$

$$A_n = \frac{1}{R^n \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \cos n\varphi d\varphi;$$

$$B_n = \frac{1}{R^n \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \sin n\varphi d\varphi.$$

После подстановки найденных коэффициентов можно решение представить в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \cos \tau d\tau \cdot \cos n\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \sin n\tau \cdot d\tau \cdot \sin n\varphi \right) \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^n. \quad (5.22)$$

Этот ряд является сходящимся к функции $u(r, \varphi)$ при условии непрерывности и дифференцируемости функции $f(\varphi)$.

Запишем решение (5.22) в другой форме. Меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right) \cdot (\cos n\varphi \cdot \cos n\tau + \sin n\varphi \cdot \sin n\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \tau) \right) d\tau.$$

По формуле Эйлера

$$\cos n(\varphi - \tau) = \frac{1}{2} \left(\exp(in(\varphi - \tau)) + \exp(-in(\varphi - \tau)) \right).$$

Обозначим $\frac{r}{R} = z$.

Произведем тождественные преобразования

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n(\varphi - \tau) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} z^n (\exp(in(\varphi - \tau)) + \\ &+ \exp(-in(\varphi - \tau))) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((z \cdot \exp(in(\varphi - \tau)))^n + (z \cdot \exp(-in(\varphi - \tau)))^n \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{z \cdot \exp(in(\varphi - \tau))}{1 - z \cdot \exp(in(\varphi - \tau))} + \frac{z \cdot \exp(-in(\varphi - \tau))}{1 - z \cdot \exp(-in(\varphi - \tau))} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cdot \cos(\varphi - \tau) + z^2}. \end{aligned}$$

Разъяснение. Для $r < R$ $0 < z < 1$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z \cdot \exp(i(\varphi - \tau)))^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1 - q}.$$

Решение после этих преобразований примет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - zRr \cos(\varphi - \tau) + r^2} d\tau. \quad (5.23)$$

Это решение было получено в § 5 этой главы, которое было названо интегралом Пуассона. Различие в пределах интегрирования принципиального значения не имеет, т.к. для периодической функции периода 2π

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Примечание 1. Приведенные рассуждения могут быть полезны и при решении других краевых задач для двухмерного или трехмерного уравнения Лапласа. При этом метод разделения переменных эффективен при достаточно «хорошей» границе области. К таким областям можно отнести прямоугольник, цилиндр, шар, параллелепипед.

Примечание 2. Математическая постановка задачи совсем не изменится, если рассматривать цилиндр, температура которого не зависит от z .

§ 7. Теплопроводность в прямоугольном параллелепипеде

С помощью метода Фурье решим задачу практического содержания. Рассмотрим нефтяной пласт или блок трещиноватого пласта в виде прямоугольного параллелепипеда. Необходимо найти стационарное распределение темпе-

ратуры в этом параллелепипеде, если протяженность вдоль оси Oz настолько большая, что ее можно принять равной бесконечности. На боковых стенках и на подошве пласта поддерживается одна и та же постоянная температура, которую примем за нуль отсчета температур. На кровле пласта температура u_0 . При этих предложениях уравнение теплопроводности представляется двухмерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.24)$$

При граничных условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0; \quad u|_{x=\ell} = 0; \\ u|_{y=0} &= 0; \quad u|_{y=b} = u_0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Из граничных условий видно, что толщина пласта равна b , а ширина ℓ . Будем искать решение задачи в виде произведения

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \quad (5.26)$$

Согласно граничных условий

$$X(0) \cdot Y(y) = 0 \text{ и } X(\ell) \cdot Y(y) = 0,$$

откуда следует

$$X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0. \quad (5.27)$$

Получили краевые условия для $X(x)$. Подставим искомое решение (5.26) в уравнение (5.24) и разделим переменные

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda. \quad (5.28)$$

Для определения $X(x)$ получили

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (5.29)$$

при краевых условиях (5.27).

Если принять λ отрицательным или равным нулю, то краевой задаче удовлетворяет только нулевая функция. При $\lambda > 0$ общее решение (5.29) имеет вид

$$X(x) = c_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворив первому из условий (5.27), определим $c_1 = 0$.

Следовательно,

$$X(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (5.30)$$

Удовлетворим второму из условий (5.27)

$$c_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} x = 0.$$

Из последнего соотношения найдем $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$. При этих значениях λ

$$X_n(x) = c_2 \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (5.31)$$

Найдено счетное множество собственных функций. Постоянная интегрирования c_2 не определена. Положим $c_2 = 1$. Тогда семейство собственных функций

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Уравнение (5.24) линейное и однородное. Поэтому решение его напишем в форме

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (5.32)$$

Подставим (5.32) в уравнение (5.24)

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y) - \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 Y_n(y) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x = 0. \quad (5.33)$$

Здесь в тригонометрический ряд разложен тождественный нуль, поэтому

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \cdot Y_n(y) = 0. \quad (5.34)$$

Общее решение этого уравнения представим в виде

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\ell} y + E_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\ell} y. \quad (5.35)$$

Для определения D_n и E_n используем граничные условия задачи

$$u|_{y=0} = 0; \quad u|_{y=b} = u_0.$$

Подставим эти условия в (5.32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x = 0. \quad (5.36)$$

Отсюда следует, что $Y_n(0) = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(b) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x = u_0.$$

Согласно теории рядов Фурье

$$Y_n(b) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0 \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cdot dx = \frac{2u_0}{\pi n} (1 - (-1)^n). \quad (5.37)$$

Подчиним решение (5.37) условиям (5.36) и (5.37)

$$D_n = 0$$

$$E_n = \frac{2u_0(1 - (-1)^n)}{\pi n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\ell} b} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ \frac{4u_0}{(2k-1)\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{\ell} b} & \text{при } n = 2k-1. \end{cases}$$

Получили решение поставленной задачи

$$u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{\ell} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k-1)}{\ell} b} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)x}{\ell}.$$

§ 8. Задача Дирихле для кольца. Формула притока из пласта в скважину

Рассмотрим задачу Дирихле для кольца, считая, что u не зависит от φ и z . Естественно, что необходимо воспользоваться уравнением Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0$$

или

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} = 0 \quad (5.38)$$

при краевых условиях

$$u|_{r=R_1} = u_1, \quad (5.39)$$

$$u|_{r=R_2} = u_2. \quad (5.40)$$

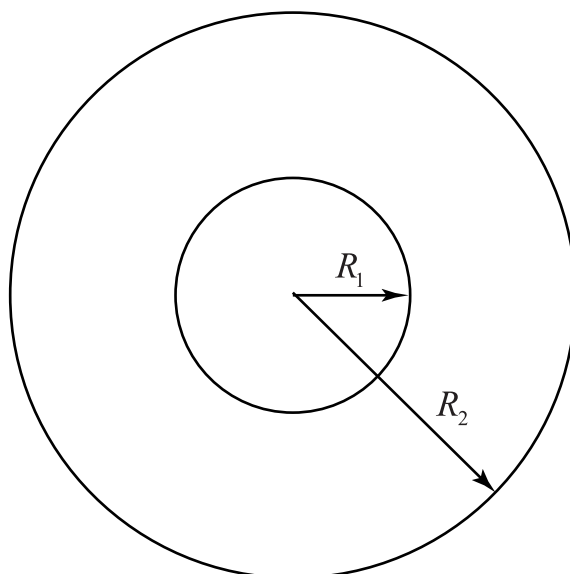


Рис. 5.5

В получившемся обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка сделаем замену $\frac{du}{dr} = v(r)$. Новое уравнение будет с разделяющимися переменными

$$v' + \frac{1}{r}v = 0;$$

$$v = \frac{c_1}{r}; \quad (5.41)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{c_1}{r}; \quad u = c_1 \ln r + c_2.$$

Подчиним полученное решение краевым условиям

$$u_1 = c_1 \ln R_1 + c_2,$$

$$u_2 = c_1 \ln R_2 + c_2.$$

Решение поставленной задачи

$$u(r) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \ln \frac{r}{R_1}. \quad (5.42)$$

Используем решение этой задачи для определения величины притока в единичную скважину, которая находится в середине кругового нефтяного или водоносного пласта.

Под функцией u будем понимать давление. Пусть на стенке скважины поддерживается давление u_1 , а на контуре залежи – u_2 .

Найдем градиент давления

$$\frac{du}{dr} = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

В частности, на стенке скважины эта величина будет

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R_1} = \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{R_1}. \quad (5.43)$$

Величина притока в одиночную скважину радиуса R_1 в пласте с толщиной h будет

$$q = 2\pi R_1 \cdot h \cdot v, \quad (5.44)$$

где v – скорость движения жидкости.

Величина скорости движения жидкости в пористой среде определяется законом Дарси

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{du}{dr}, \quad (5.45)$$

где k – проницаемость пласта;
 μ – вязкость жидкости.

Формула притока в скважину для кругового пласта толщиной h с учетом (5.43) и (5.45) запишется

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \cdot \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (5.46)$$

Эта формула, являющаяся одной из основных в нефтегазовом деле, носит название «формула Дюпюи».

Библиографический список

1. Арамович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики /И.Г. Арамович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969.
2. Арефьев В.Н. Уравнения математической физики. Задача Коши. Краевые задачи для эллиптических уравнений /В.Н. Арефьев. – М., 2002.
3. Анциферов В.С. Уравнения математической физики. Ч.1. /В.С. Анциферов. – М.: 1975.
4. Гусейнадзе М.А., Бобровский С.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором /М.А. Гусейнадзе, С.А. Бобровский. – М.: Наука, 1972.
5. Гусейнадзе М.А., Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах /М.А. Гусейнадзе, А.К. Колосовская. – М.: Недра, 1972.
6. Кошляков Н.С. и др. Основные дифференциальные уравнения математической физики /Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1962.
7. Колобов А.М., Неверов Г.С. Избранные главы высшей математики. Ч.3. /А.М. Колобов, Г.С. Неверов. – Минск: Высшая школа, 1971.
8. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций /Б.Г.Коренев. – М.: Наука, 1971.
9. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Теория колебаний в нефтепромысловом деле /А.Х. Мирзаджанзаде, З.Г. Керимов, М.Г. Копейкин. – Баку: Издательство «Маариф», 1976.
10. Соколов В.А. Основы теории подобия и анализа размерностей в нефтегазодобыче: Учебное пособие /В.А. Соколов. – Ухта: Ухтинский государственный технический университет, 2001. – 159 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. /А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972.
12. Чупров И.Ф. Исследование распространения тепла в пласте при радиальном течении горячей жидкости //Известия вузов. Нефть и Газ. – №5. – 1999.

Учебное издание

Чупров Илья Федорович
Канева Елена Алексеевна
Мордвинов Александр Антонович

Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа

Учебное пособие

Редактор В.П. Кипрова
Технический редактор
Корректор Т.И. Косолапова

План 2004 г., позиция 4. Подписано в печать 09.02.2004 г.
Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл.печ.л. 7,4. Уч.-изд.л. 6,7. Тираж 150 экз. Заказ № 177.

Ухтинский государственный технический университет.
169300, г.Ухта, ул.Первомайская, д.13.
Издательско-полиграфическое управление УГТУ.
Лицензия ПД №00578 от 25.05.2000 г.
169300, г.Ухта, ул. Октябрьская, д.13.