Министерство образования Российской Федерации

Ухтинский государственный технический университет

ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА В НЕФТЯНОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

ЧАСТЬ 2

Методические указания

Ухта 2003

УДК [622.276+622.279]:519.6
Щ 95

Щукин А.Н., Банникова А.Г. Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности. Часть 2: Методические указания. – Ухта: УГТУ, 2003. – 20 с.

Методические указания предназначены для студентов специальности 090600 – «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».

Методические указания содержат теоретический материал и задания для выполнения контрольной работы №2 по дисциплине «Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности».

Содержание методических рекомендаций соответствует учебной рабочей программе.

Методические рекомендации рассмотрены, одобрены и рекомендованы для издания выпускающей кафедрой РЭНГМ и ПГ (протокол № 17 от 28.04.2003 г.)

Рецензент Миклина О. А, ст. преподаватель кафедры РЭНГМ И ПГ.
Редактор Мордвинов А. А., профессор кафедры РЭНГМ И ПГ.

В методических рекомендациях учтены замечания рецензента и редактора.

План 2003, позиция .
Подписано в печать г. Компьютерный набор.
Объем 20 с. Тираж 150 экз. Заказ № 7.

169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.

Отдел оперативной полиграфии УГТУ.
169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ 5
   1.1. Метод наименьших квадратов 5
   1.2. Интерполяция 8
2. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ 16
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 19
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 20

ВВЕДЕНИЕ

Студенты специальности 090600 «РЭНГМ» очной и заочной форм обучения изучают дисциплину «Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности» (ИМР).

Цель изучения данной дисциплины – освоение основных численных методов решения различных прикладных задач и применение информатики для их реализации на ЭВМ.

Основной базой для изучения данной дисциплины являются «Высшая математика» и «Информатика» (раздел «Программирование»), которые изучаются в университете на первом и втором курсах.

В результате изучения дисциплины ИМР студенты должны освоить следующие темы:

- решение нелинейных уравнений;
- решение систем линейных и нелинейных уравнений;
- аппроксимация функций;
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численное интегрирование.

Студенты заочной формы обучения выполняют две контрольные работы (первая контрольная – по темам 1 и 4, вторая – по теме 3) и одну лабораторную работу – по темам 2 и 5. Студенты дневной формы обучения выполняют расчётно-графическую работу, содержащую все изученные темы.

Студентам **заочной формы обучения** необходимо сдать контрольные работы не позднее, чем **за две недели до начала сессии**. Лабораторная работа выполняется **в период сессии**.

Контрольной формой изучения дисциплины является **зачет**.

Контрольная работа выполняется на листах формата А4. Каждое задание имеет 20 вариантов. Вариант выбирается **по сумме двух последних цифр** зачетной книжки.

Контрольная работа должна содержать следующее:

1) титульный лист (образец приведен в конце методических указаний);
2) условие задачи;
3) основные теоретические выкладки для решения задачи;
4) ручной счет задачи;
5) блок-схема алгоритма решения задачи;
6) программа (состоит из трех файлов – файл с исходными данными, файл с обрабатывающей программой и файл с результатами);
7) подпись студента и дата выполнения контрольной работы.

Пункты 2-6 повторяются **для каждой задачи**.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ

Аппроксимация (перевод *приближаюсь)* – замена одного математического объекта другим, более простым и близким к исходному.

Пусть нам дана некоторая величина y, которая является функцией аргумента x. Часто на практике явная связь между x и y неизвестна, либо слишком сложна. Более того, обычно подобная связь задана в виде таблицы значений $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, ...$ (например, экспериментальные данные). Точки x_i в этом случае называются *узловыми*.

Тогда решается задача замены (аппроксимации) данной функции $f(x)$ некоторой другой, более простой функцией $\varphi(x)$, такой, чтобы эти функции в заданной области совпадали наибольшим образом. Тогда $\varphi(x)$ называют *аппроксимирующей* функцией.

В дальнейшем мы рассмотрим несколько случаев аппроксимации многочленами.

1.1. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате некоторого эксперимента получены значения функции в виде таблицы $\{x_i, y_i\}$ $(i=1,...,n)$. Понятно, что за счет погрешности приборов и других факторов значения функции определены с некоторой погрешностью. Необходимо найти функцию $\varphi(x)$, который в точках x_i будет принимать некоторые значения $\varphi(x_i)$, отличные от табличных значений y_i, но приближенную к ним наилучшим образом. Если характер данной функции неизвестен заранее, то он подбирается эмпирически, исходя из характера расположения точек. При этом стараются использовать наиболее простые зависимости. Как правило, с этой целью используются многочлены, для нахождения неизвестных коэффициентов которых используется следующий критерий: величина

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi(x_i) - y_i\right]^2 \qquad (1.1)$$

должна принимать наименьшее значение. Поэтому метод называется *методом наименьших квадратов*.

Как известно из курса высшей математики, необходимым условием минимума функции является равенство нулю всех ее частных производных. Поэтому находим производные функции F по параметрам $a_0, a_1, ..., a_m$ (коэффициентам многочлена). Рассмотрим несколько частных случаев использования метода наименьших квадратов (МНК).

Линейное приближение методом наименьших квадратов. Пусть аппроксимирующая функция является линейной относительно x, т.е. $\varphi(x) = a_0 \cdot x + a_1$ (рис. 1.1) Она содержит два неизвестных параметра – a_0 и a_1.

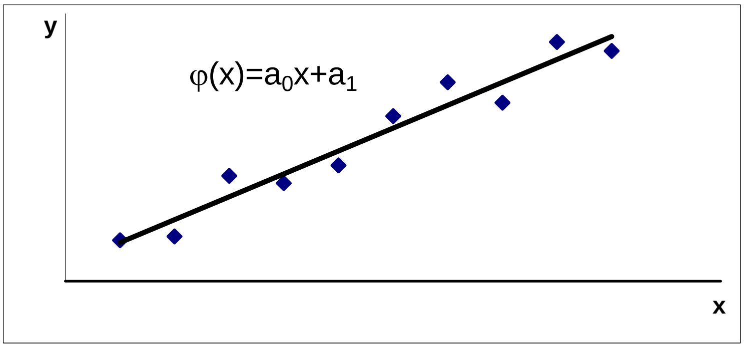

Рис. 1.1. Аппроксимация функции линейной зависимостью.

Критерий F принимает вид

$$F=\sum_{i=1}^{n}\left[a_0\cdot x_i+a_1-y_i\right]^2 .$$

В этом случае условие минимума значения F определяется через равенство нулю частных производных по неизвестным параметрам:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a_0}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(a_0\cdot x_i+a_1-y_i\right)\cdot x_i\right]=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1}=2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(a_0\cdot x_i+a_1-y_i\right)\cdot 1\right]=0.\end{cases}$$

Расписав каждое уравнение, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}a_0\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+a_1\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[x_i\cdot y_i\right],\\ a_0\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}\qquad(1.2)$$

Система уравнений линейная, поэтому из нее легко получить значения a_0 и a_1. Таким образом, получена новая функция $y=\varphi(x)$.

Пример. Аппроксимировать функцию методом наименьших квадратов:

i	x_i	y_i
1	1	2
2	2	5
3	3	10
4	4	11

Ищем функцию вида $\varphi(x)=a_0\cdot x+a_1$.

$$\sum_{i=1}^{4}x_i=1+2+3+4=10;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30;$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 2 + 5 + 10 + 11 = 28;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 11 = 86.$$

Подставляем в (1.2)

$$\begin{cases} a_0 \cdot 30 + a_1 \cdot 10 = 86 \\ a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot 4 = 28 \end{cases}$$

Получаем $a_0 = 3.2$, $a_1 = -1$.

Следовательно, $\varphi(x) = 3.2 \cdot x - 1$.

Аппроксимация параболической зависимостью. Более сложной является аппроксимация функции, когда функция $y = \varphi(x)$ является квадратичной (рис. 1.2), т.е. $\varphi(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2$.

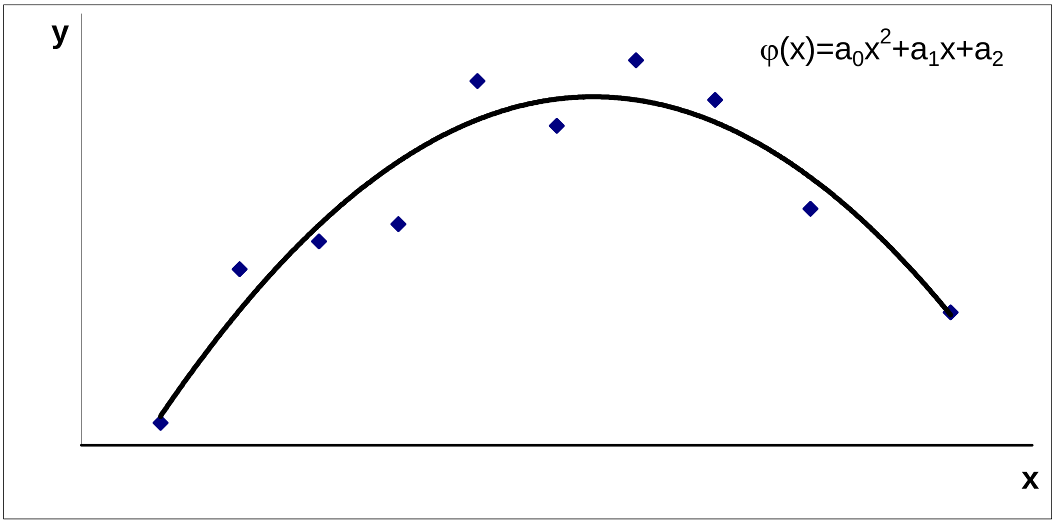

Рис. 1.2. Аппроксимация функции параболической зависимостью.

В этом случае критерий метода наименьших квадратов принимает вид

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 \cdot x_i^2 + a_1 \cdot x_i + a_2 - y_i\right]^2.$$

Условие минимума данной функции, расписанное через равенства нулю трех частных производных, приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{1.3}$$

Решение данной системы позволяет найти неизвестные коэффициенты a_0, a_1, и a_2 и определить функциональную зависимость.

Данные многочлены первой и второй степеней не ограничивают круг возможных аппроксимирующих многочленов, но являются наиболее используемыми.

В качестве аппроксимирующей функции могут выступать и другие простейшие функции: логарифмическая, показательная, тригонометрическая и другие.

1.2. Интерполяция

Интерполяция (перевод *изменение, переделка*) – отыскание промежуточных значений величины по некоторым известным ее значениям.

Методы интерполяции относятся к методам *точечной* аппроксимации. Дополнительным условием, накладываемым на аппроксимирующую функцию $y = \varphi(x)$ является обязательное совпадение значений двух функции в узловых точках

$$f(x_i) = \varphi(x_i) = y_i \quad (i = 1,...,n).$$

Далее приведены методы интерполяции функции многочленами. Здесь точки x_i называются *узлами интерполяции*, а $\varphi(x)$ – *интерполяционным многочленом.* Задача интерполяции – определение значений функции в точках, отличных от узловых.

Интерполяция функции производится на некотором отрезке $[x_0, x_n]$. Различаются *глобальная* интерполяция, когда на весь задаваемый интервал строится один многочлен, и *локальная* интерполяция, когда для каждой части рассматриваемого интервала строится свой многочлен.

Если функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы значений, т.е. не является однозначно определенной, то вновь построенная функция $y = \varphi(x)$ является одним из возможных вариантов такой функции.

Линейная и квадратичная интерполяции. Простейшей локальной интерполяцией является линейная интерполяция. Заданные точки $\{x_i, y_i\}$ $(i = 0,...,n)$ соединяются прямолинейными отрезками (рис. 1.3), и функция приближается ломаной с вершинами в данных точках.

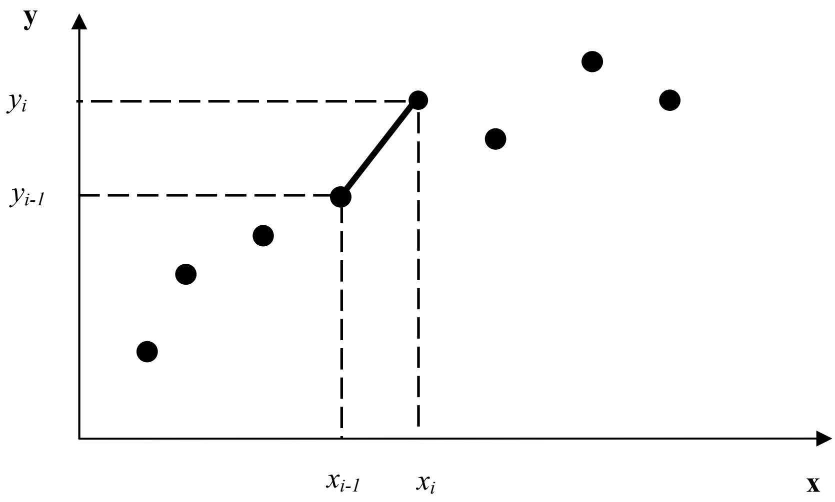

Рис. 1.3. Локальная линейная интерполяция.

Для каждого участка (x_{i-1}, x_i) в качестве интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через концы этого отрезка. Например, для i-того интервала прямая, проходящая через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), имеет следующее уравнение:

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Отсюда получаем следующее выражение

$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i\text{-}1} \le x \le x_i,$$
$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}. \tag{1.4}$$

Поэтому, если требуется найти приближенное значение функции в точке x, то сначала определяем, в какой интервал попадает значение x, а затем подставляем его в формулу (1.4).

При локальной квадратичной интерполяции (рис. 1.4) в качестве интерполяционной функции на отрезке (x_{i-1}, x_{i+1}) берем квадратный трехчлен:

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i\text{-}1} \le x \le x_{i+1}, \tag{1.5}$$

где содержится три неизвестных коэффициента, для нахождения которых необходимы три уравнения. Подставим в (1.5) последовательно точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

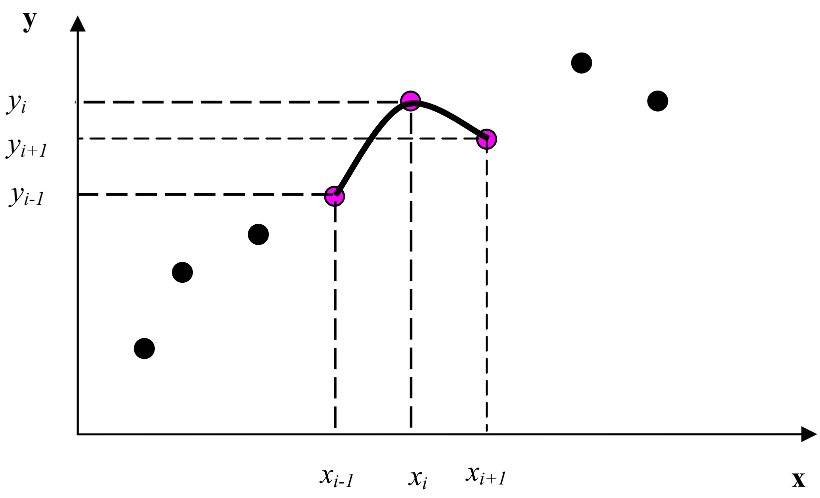

Рис. 1.4. Локальная квадратичная интерполяция.

Получаем следующую систему (для простоты опускаем индексы при неизвестных коэффициентах)

$$\begin{cases} a \cdot x_{i-1}^2 + b \cdot x_{i-1} + c = y_{i-1}, \\ a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c = y_i, \\ a \cdot x_{i+1}^2 + b \cdot x_{i+1} + c = y_{i+1}. \end{cases}$$

Запишем систему в виде расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 & y_{i-1} \\ x_i^2 & x_i & 1 & y_i \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 & y_{i+1} \end{array} \right).$$

Для решения системы произведем следующие действия над строками:

- из второй и третьей строк вычтем первую

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 & y_{i-1} \\ x_i^2 - x_{i-1}^2 & x_i - x_{i-1} & 0 & y_i - y_{i-1} \\ x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2 & x_{i+1} - x_{i-1} & 0 & y_{i+1} - y_{i-1} \end{array} \right);$$

- разделим вторую и третью строки соответственно на $(x_i - x_{i-1})$ и $(x_{i+1} - x_{i-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 & y_{i-1} \\ x_i + x_{i-1} & 1 & 0 & \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ x_{i+1} + x_{i-1} & 1 & 0 & \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \end{array}\right);$$

- вычтем из третьей строки вторую

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 & y_{i-1} \\ x_i + x_{i-1} & 1 & 0 & \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ x_{i+1} - x_i & 0 & 0 & \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{array}\right).$$

Отсюда получаем

$$a = \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_i};$$

$$b = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - a\left(x_i + x_{i-1}\right);$$

$$c = y_{i-1} - a \cdot x_{i-1}^2 - b \cdot x_{i-1}.$$

Теперь, для определения значения функции в точке x необходимо найти интервал $\left(x_{i-1}, x_{i+1}\right)$, содержащий данную точку, рассчитать коэффициенты a, b, c и подставить значения в (1.4).

<u>*Сплайны*</u>. Кубические *сплайн-функции* – специальным образом построенные многочлены третьей степени. Между каждой парой соседних узлов интерполяции функция записывается в следующем виде

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \; \mathrm{x}_{\mathrm{i\text{-}1}} \le x \le x_i. \quad (1.6)$$

Для нахождения коэффициентов необходимо получить *4n* уравнений. Условия прохождения функции через заданные точки можно записать так

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad (1.7)$$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad (1.8)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Здесь *2n* уравнений. Для получения остальных уравнений используем условие гладкости кривой во всех точках, т.е. непрерывность первых и вторых производных в узлах интерполяции. Для этого вычислим первую и вторую производные нашей функции

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \qquad (1.9)$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \qquad (1.10)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Аналогичные уравнения можно записать для интервала $[x_i, x_{i+1}]$

$$S'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2,$$

$$S''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i).$$

Поскольку функция непрерывно дифференцируемая, то приравниваем в каждом внутреннем узле $x=x_i$ значения этих производных:

$$b_{i+1} = b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i, \qquad (1.11)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i, \quad i = 1,..,n\text{-}1. \qquad (1.12)$$

Получим *2n-2* уравнений.

Недостающие два уравнения получаются из условия закрепления концов сплайна. Например, можно приравнять нулю кривизну линий в этих точках (свободное закрепление концов). Такая функция называется *свободным кубическим сплайном*. Условия нулевой кривизны на концах можно расписать

$$S'(x_0) = c_1 = 0, \quad S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \qquad (1.13)$$

Приведем нашу систему из *4n* уравнений к следующему виду. Во-первых, коэффициенты a_i находятся сразу из (1.7). Далее из (1.12), (1.13) получим

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \; i = 1,..,n\text{-}1, \qquad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \qquad (1.14)$$

Подставив эти соотношения, а также значения a_i в (1.8), получим

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1,..,n\text{-}1, \\ b_n &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n. \end{aligned} \qquad (1.15)$$

Учитывая последние соотношения, исключаем из (1.11) коэффициенты d_i и b_i. Окончательно для c_i получаем

$$c_1 = 0,\ c_{n+1} = 0,$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right),\ i = 2,..,n. \quad (1.16)$$

Матрица *трехдиагональная* и решается методом прогонки. По найденным коэффициентам c_i находим d_i и b_i.

Из построения видно, что сплайн является непрерывно дифференцируемой функцией, т.е. производная функции на отрезке $[x_0, x_n]$ непрерывна (курс Высшей математики).

Пример. Проинтерполировать с помощью сплайнов функцию, заданную таблично:

i	x_i	y_i
0	1	2
1	2	5
2	3	10
3	4	11

Шаг постоянен $h_i = 1 \ i = 1,...,n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, $c_1 = c_4 = 0$.

Составим систему уравнений согласно (1.16):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 36 \\ 1 & 4 & 48 \end{array}\right).$$

Хотя порядок системы равен двум, но решим ее формально методом прогонки. Находим прогоночные коэффициенты

$$A_1 = -\frac{1}{4}; \qquad B_1 = \frac{36}{4} = 9.$$

Отсюда получаем, что

$$c_3 = \frac{48 - 1\cdot 9}{4 + 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{52}{5}; \qquad c_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{52}{5} + 9 = \frac{32}{5}.$$

Используя (1.14) и (1.15), получаем

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\cdot 1} = \frac{32}{15}; \quad d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3\cdot 1} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}; \qquad d_3 = \frac{-c_3}{3\cdot 1} = -\frac{52}{15};$$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \frac{5-2}{1} - \frac{1}{3}\left(\frac{32}{5} + 2\cdot 0\right) = 3 - \frac{32}{15} = \frac{13}{15};$$

$$b_2 = \frac{10-5}{1} - \frac{1}{3}\left(\frac{35}{5} + 2\cdot\frac{32}{5}\right) = -\frac{8}{5}; \quad b_3 = \frac{11-10}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{52}{5} = 1 - \frac{104}{15} = -\frac{89}{15}.$$

Зная теперь коэффициенты многочленов, найдем значения функции в точке $x = 1.4$.

Точка находится в интервале $[0,1]$. Значение в точке равно

$$y = S(1.4) = 2 + \frac{13}{15}(1.4-1) + \frac{32}{15}(1.4-1)^3 = 2 + \frac{26}{75} + \frac{256}{1875} = 2\frac{302}{625}.$$

Найдите самостоятельно значения функции в точках $x_1 = 2.6$, $x_2 = 2.3$.

Многочлен Лагранжа. Построим интерполяцию, единую для всего отрезка [x_0, x_n]. При этом график должен проходить через все заданные точки. Запишем искомый многочлен в виде

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n . \qquad (1.17)$$

Из условий равенства значений многочлена в узлах получаем следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n . \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение. Но недостатком является огромное количество вычислений, особенно при большом количестве узлов.

Примером глобальной интерполяции является построение многочлена Лагранжа, когда поиск многочлена осуществляется в виде линейной комбинации многочленов степени n:

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x).$$

Требуется, чтобы каждый многочлен l_i обращался в ноль во всех узлах интерполяции кроме i-того, где он должен равняться единице:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Такому условию удовлетворяет следующая система многочленов:

$$\begin{cases} l_0(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}, \\ l_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_i(x) = \dfrac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})}. \end{cases}$$

Суммируя, получаем

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Эта формула называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Многочлен Лагранжа единственный. Допустим, что существует еще один многочлен $F(x)$ степени n: $F(x_i)=y_i$. Тогда разность $R(x)=L(x)-F(x)$ – многочлен степени не выше n. В узлах она равна

$$R(x_i) = L(x_i) - F(x_i) = 0,\ i = 0,..,n.$$

Этот многочлен степени не выше n имеет $n+1$ корней. Это возможно только, если $R(x)=0$ или $F(x)=L(x)$.

Пример. Проинтерполировать с помощью функции Лагранжа функцию, заданную таблично:

i	x_i	y_i
0	1	2
1	2	5
2	3	10
3	4	11

Определим систему многочленов

$$\begin{cases} l_0(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}, \\ l_1(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}, \\ l_2(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}, \\ l_3(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и подставив данные значения в выражение

$$L(x) = 2 \cdot l_0(x) + 5 \cdot l_1(x) + 10 \cdot l_3(x) + 11 \cdot l_4(x),$$

получим многочлен третьей степени, проходящий через все точки, заданные в таблице.

Еще одним методом глобальной интерполяции является метод, при котором функцию заменяют на отрезке $[x_0,\ x_n]$ многочленом вида $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Для нахождения коэффициентов составляются $(n+1)$ уравнение путем подстановки в многочлен значений $\{x_i, y_i\}$, $i = 0,...,n$. Система линейных уравнений решается, к примеру, методом Гаусса. Недостатком данного метода является большие затраты времени при решении системы, особенно при большом количестве используемых значений.

2. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ № 2

Задание № 1. Найти коэффициенты фильтрационных сопротивлений *a* и *b* по данным, полученным в результате исследований скважины на стационарных режимах (табл. 2.1). Число режимов равно четырем. При решении использовать метод наименьших квадратов. Уравнение имеет вид $\left(p_{пл}{}^{2} - p_{з}{}^{2}\right)/\,Q = a + b \cdot Q$.

Использованы следующие обозначения: $p_{пл}$ – пластовое давление, МПа, $p_{з}$ – забойное давление, МПа, Q – дебит, м^3/сут.

Результаты отобразить в Excel в виде графика $Q \div \left(p_{пл}{}^{2} - p_{з}{}^{2}\right)/\,Q$. На диаграмме показать значения, полученные при исследованиях, и итоговую прямую, построенную с использованием коэффициентов *a* и *b*.

Таблица 2.1.

Вар.	**1**			**2**		
Исходные данные	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**
	27,575	26,715	161,5	34,372	32,391	300
		26,969	121,125		33,019	225
		27,203	80,75		33,563	150
		27,404	40,375		34,017	75
Вар.	**3**			**4**		
Исходные данные	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**
	32,636	16,405	250	34,371	24,338	300
		22,268	187,5		28,728	225
		26,635	125		31,715	150
		35,318	62,5		33,563	75
Вар.	**5**			**6**		
Исходные данные	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**
	15,979	14,457	161,5	34,667	30,216	200
		15,006	121,125		32,042	150
		15,439	80,75		33,372	100
		15,761	40,375		34,244	50
Вар.	**7**			**8**		
Исходные данные	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**
	27,574	24,191	161,5	34,438	29,968	200
		25,582	121,125		31,803	150
		26,594	80,75		33,139	100
		27,253	40,375		34,014	50
Вар.	**9**			**10**		
Исходные данные	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**	**$p_{пл}$**	**$p_{з}$**	**Q**
	27,575	26,443	161,5	34,689	15,473	400
		26,817	121,125		24,780	300
		27,135	80,75		30,230	200
		27,387	40,375		33,394	100

Продолжение таблицы 2.1.

Вар.	11			12		
Исходные данные	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**
	33,309	30,469 31,481 32,293 32,904	300 225 150 75	35,082	33,099 33,869 34,459 34,862	130 97,5 65 32,5
Вар.	**13**			**14**		
Исходные данные	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**
	34,829	32,044 33,028 33,821 34,424	300 225 150 75	16,042	10,954 13,393 14,896 15,746	161,5 121,125 80,75 40,375
Вар.	**15**			**16**		
Исходные данные	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**
	34,121	31,376 32,495 33,318 33,860	500 375 250 125	30,272	29,207 29,660 29,987 30,192	100,5 75,375 50,25 25,125
Вар.	**17**			**18**		
Исходные данные	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**
	34,372	33,046 33,384 33,724 34,057	300 225 150 75	33,896	30,001 31,620 32,797 33,550	600 450 300 150
Вар.	**19**			**20**		
Исходные данные	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**	$p_{пл}$	$p_з$	**Q**
	33,672	28,392 30,632 32,226 33,229	700 525 350 175	27,067	18,540 21,303 23,612 25,512	161,5 121,125 80,75 40,375

Задание № 2. Найти значения функции в точках x_1 и x_2, используя локальную ***квадратичную*** интерполяцию.

Таблица 2.2.

Вар.	x_1	x_2	**Вар.**	x_1	x_2
1	-3	2,6	11	0,1	5,1
6	-4,9	7,1	16	-1,1	2,2

Исходные данные

x	-5.1	-3.1	-1.55	-0.47	0.5	1.9	3.3	5.4	7.77
y	7	3	9.7	2.98	4.4	-1.5	-4.5	-0.4	3.32

Вар.	x_1	x_2	**Вар.**	x_1	x_2
2	-8,0	6,0	12	-1,4	0,5
7	-3,3	2,2	17	-0,5	5,1

Исходные данные

x	-8.2	-5.0	-1.3	-0.8	0.4	2.9	4.3	6.6	6.9
y	9.9	6.7	4.4	2.0	5.4	0.4	-0.5	-0.9	2.2

Вар.	x_1	x_2	**Вар.**	x_1	x_2
3	-3,8	2,6	13	-8,1	1,0
8	-11,1	0,0	18	-10,1	1,5

Исходные данные

x	-11.5	-9.5	-6.9	-5.1	-3.0	-1.1	0.5	1.2	3.8
y	7.8	3.9	9.4	2.1	4.1	-1.6	-4.9	-0.8	1.55

Вар.	x_1	x_2	**Вар.**	x_1	x_2
4	-3	2,6	14	0,1	5,1
9	-4,9	7,1	19	-1,1	2,2

Исходные данные

x	-10.1	-8.1	-3.3	-2.2	-0.5	1.9	2.8	5.4	7.7
y	7	3	9.7	2.98	4.4	-1.5	-4.5	-0.4	3.32

Вар.	x_1	x_2	**Вар.**	x_1	x_2
5	-8,0	6,0	15	-1,4	1,5
10	-3,3	2,2	20	-0,5	5,1

Исходные данные

x	-11.5	-9.5	-6.9	-5.1	-3.0	-1.1	0.5	4.2	6.8
y	-7.8	3.9	9.4	-2.1	-4.1	-1.6	4.9	0.8	-1.55

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.: Высш. шк., 1979. – 184 с.
4. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Краскевич В.Е., Зеленских К.Х., Гречко В.И Численные методы в инженерных исследованиях: Учеб. пособие. – Киев: Вища шк., 1986. – 263 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
7. Кунцман Ж. Численные методы – М.: Наука, 1979. – 160 с.
8. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 229 с.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1989. – 608с.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987. – 286 с.
11. **Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987. – 320 с.**
12. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики: Справ. – Киев: Наукова думка, 1970. – 791 с.
13. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров – М.: Наука, 1968. – 400 с.
14. Щукин А.Н., Банникова А.Г. Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности. Часть 1: Метод. указания. – Ухта: УГТУ, 2003. – 30 с.
15. Щукин А.Н., Банникова А.Г. Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности. Часть 3: Метод. указания. – Ухта: УГТУ, 2003. – 30 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБРАЗЕЦ ЛИСТА С ЭТИКЕТКОЙ

115

85

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УХТИНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА
РАЗРАБОТКИ И ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ И ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Кр № 2-02069562-090600-030303

Группа РЭНГМ-2-00 ФБО

Иванов И.И.

Дисциплина**: «Инженерные методы расчета в нефтяной и газовой промышленности»**

Ухта 2003

Пояснения:

Кр	– контрольная работа;
02069562	– код УГТУ;
090600	– шифр специальности РЭНГМ;
030303	– номер зачетной книжки.