

К. Ф. ГАУСС



ИЗБРАННЫЕ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ
СОЧИНЕНИЯ

*Под общей редакцией
С. Т. Судакова*




ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1957 •



К. Ф. ГАУСС

ТОМ
I



СПОСОБ
НАИМЕНЬШИХ
КВАДРАТОВ

*Под редакцией, с введением
Т. В. Багратуни*

ПЕРЕВОД
С ЛАТИНСКОГО И НЕМЕЦКОГО
Н. Ф. БУЛАЕВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1957 •

ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкому распространению оригинальных трудов Гаусса по способу наименьших квадратов препятствует то, что латинский язык, на котором они в большинстве написаны, знает ограниченный круг читателей. Французы и немцы, имея в виду именно это, в середине прошлого столетия перевели и издали у себя работы Гаусса. К сожалению, это не было сделано в России в тот же период, хотя интерес русских геодезистов к исследованиям Гаусса всегда был необычайно велик.

Настоящий первый том избранных трудов Гаусса, в котором собраны все его статьи, относящиеся к способу наименьших квадратов, призван восполнить этот пробел в нашей специальной геодезической литературе. Кроме основных работ по способу, сюда включен и ряд разделов из других трудов Гаусса, где он рукою мастера применяет свой метод при решении астрономических и геодезических задач. Вследствие этого подобранные примеры дают весьма ценные пояснения теоретическим исследованиям автора.

В Советском Союзе и за границей имеется немало превосходных учебников и курсов, обстоятельно излагающих как теоретические основы, так и практическое применение способа наименьших квадратов. Тем не менее, тот, кто стремится получить глубокое представление о предмете, как его понимал и изложил Гаусс, должен основательно изучить его гениальные труды, хотя можно предсказать, что на этом пути он встретит весьма большие трудности. Но самостоятельное преодоление трудностей, в конечном счете, принесет большое удовлетворение любознательному читателю.

Полноценный перевод классических трудов всегда был сложной задачей, решение которой требует больших усилий переводчиков.

Переводчику предлагаемых вниманию читателя трудов Гаусса Н. Ф. Булаевскому и редакторам пришлось преодолеть ряд трудностей в своей работе, чтобы достигнуть точности и ясности перевода. Однако надо полагать, что настоящий труд не лишен недостатков. Если можно сказать, что основные мысли Гаусса переданы правильно, то нельзя с таким же успехом утверждать, что они переданы с достаточной ясностью. Надеемся, что полную оценку выполненной работы дадут читатели, за что будем им весьма благодарны.

*С. Г. Судаков
Г. В. Багратуни*

ВВЕДЕНИЕ

В 1955 г. исполнилось сто лет со дня смерти Карла Фридриха Гаусса, одного из величайших математиков, астрономов и геодезистов XIX в. Эта знаменательная дата была широко отмечена научными кругами и учреждениями как в СССР, так и за границей, особенно на его родине — в Германии.

Академия наук СССР и другие научные организации приступили к изданию избранных трудов Гаусса по математике, астрономии и физике.

Учитывая громадное значение трудов Гаусса в области геодезии и пожелания геодезистов, Издательство геодезической литературы приняло решение об издании его избранных геодезических сочинений. В ходе подготовки и подбора материалов выявилась необходимость издать их в двух томах: в первый том включить исследования Гаусса по способу наименьших квадратов, во второй — основные работы по высшей геодезии.

Таким образом, предлагаемый том содержит почти все работы Гаусса по способу наименьших квадратов.

В 1855 г., еще при жизни Гаусса, известный французский математик Бертран перевел и издал на французском языке основные его работы по способу наименьших квадратов, написанные в основном на латинском языке. В 1887 г. научные сотрудники Потсдамского геодезического института Бёрш и Симон, следуя совету Гельмерта, издали на немецком языке нечто подобное сборнику Бертрана, к которому Гельмерт написал предисловие.

При тщательном сличении немецкого текста с латинским оригиналом оказалось, что они почти идентичны. В основу нашего издания взят немецкий текст. Одновременно для уточнений и проверок использованы как французский, так и латинский тексты. Некоторые из работ Гаусса, помещенные в этом томе, были переведены на русский язык. В частности, в 1859 г., будучи студентом Московского университета, впоследствии профессором, Догель перевел с латинского «Теорию движения небесных тел», где дается первое изложение способа наименьших квадратов. Этот материал также использован нами при работе над переводом.

В книге профессора Н. М. Идельсона «Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений» (1947) на странице 17 указано, что все мемуары Гаусса по способу наименьших квадратов были переведены на немецкий язык и изданы под редакцией Гельмерта, а «русский перевод с немецкого (1889) является библиографической редкостью». Следует отметить, что Гельмерт не был редактором немецкого издания, а написал к нему только предисловие. Ни в библиотеке имени В. И. Ленина в Москве, ни в публичной библиотеке имени Салтыкова-Щедрина в Ленинграде перевода этого труда на рус-

ский язык не имеется; больше того, никаких сведений не удалось получить об этом. По всей вероятности, в этом указании проф. Идельсона имеется неточность, возможно это был сборник на правах рукописи. Удалось найти перевод первой статьи «Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae» с французского, видимо, с перевода Бертрана (там об этом нет указаний). Он опубликован в 1859 г. в Сборнике под названием «Популярные чтения Бесселя», хотя Бесселю принадлежат только две статьи: о нормальных мерах и о приливах. Кроме указанной статьи Гаусса, там помещен полный перевод Догеля «Теория движения небесных тел».

К. Ф. Гаусс предпочитал обоснование способа, данное им в «Теории комбинации наблюдений», тому, которое имеется в «Теории движения небесных тел», поэтому статьи из серии «Теории комбинации» помещены вначале. Хотя эти статьи написаны с присущей Гауссу ясностью и изяществом и основаны на более простом принципе, тем не менее прежнее обоснование должно быть изучено внимательно, чтобы глубже понять основные мысли Гаусса, изложенные в «Теории комбинации наблюдений». Следует отметить, что академик А. Н. Крылов всегда рекомендовал тщательно изучать именно изложение способа в «Теории движения небесных тел» и подчеркивал, что Гаусс его написал в самом расцвете творческих сил и потому там много того, что можно развить дальше. Исходя из этого, оно идет вслед за «Теорией комбинации наблюдений».

Далее помещены: 1) «Извлечение из исследования об эллиптических элементах Паллады», где дается порядок редуцирования и решения нормальных уравнений; 2) «Определение точности наблюдений», где излагается способ получения вероятнейшей ошибки из достаточного количества истинных ошибок и для сравнения выводит ее с помощью сумм других степеней; 3) «Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии»; здесь изложен способ решения задачи Потенота; 4) «Определение долгот хронометрическими рейсами» и 5) в конце тома, как и в немецком сборнике, помещены аннотации основных работ по способу, сообщенных Гауссом Гёттингенскому научному обществу, которое опубликовало их в своих трудах по мере их поступления. Они весьма ценны для глубокого понимания основных идей Гаусса в обосновании и изложении способа наименьших квадратов. Их рекомендуется читать до изучения основных работ.



С момента первого опубликования способа наименьших квадратов Лежандром прошло свыше 150 лет. За это время по этому вопросу создана большая литература, имеется немало прекрасных учебников и курсов, подробно освещающих основные идеи и правила способа наименьших квадратов. Обработка обширных геодезических сетей, особенно в СССР, явилась всесторонним испытанием и проверкой способа наименьших квадратов, вместе с тем возникли новые проблемы в этой области, над решением которых работает большой коллектив научных работников. Несмотря на это, до сих пор еще проявляется большой интерес к вопросу возникновения и развития основных идей Гаусса по способу наименьших квадратов. После издания полного собрания сочинений Гаусса Гёттингенским научным обществом этот вопрос в настоящее время может быть освещен с учетом исторического развития. Не беря на себя решения подобной задачи, здесь сделана только попытка дать краткий обзор возникновения и развития основных идей Гаусса.

В 1794 г. семнадцатилетний Гаусс, готовясь к университетским занятиям и увлеченный многими математическими идеями, пришел к мысли об основном принципе способа наименьших квадратов.

Гаусс считал для себя высшим идеалом плодотворную деятельность в области теории и практики. Поэтому он всегда ценил характеристику своей деятельности, которую дал Ольберс в следующих скупых выражениях: «Тончайший геометр и совершеннейший астроном — вот два титула, которые я высоко ценю в отдельности и перед которыми преклоняюсь с благоговением, когда они соединены вместе»*.

Принцип, которым руководствовался Гаусс в своей деятельности в отношении связи теории с практикой, заключен в следующих словах, взятых из его письма к Штерну: «Наука должна быть подружкой практики, но не рабыней ее, она должна дарить ей, а не служить ей»**.

Впервые Гаусс опубликовал способ наименьших квадратов в работе «Теория движения небесных тел», вышедшей в 1809 г., т. е. через 15 лет после открытия его и на три года позже опубликования Лежандром в труде «Новый метод определения орбит комет» (в 1806 г.), в котором последний впервые и предложил название — способ наименьших квадратов, принятый в дальнейшем как самим Гауссом, так и другими исследователями.

Естественно возникает вопрос, почему возникло много рассуждений и споров по вопросу о том, кому принадлежит приоритет открытия способа, Лежандру или Гауссу. Разумеется, для науки это значения не имеет, особенно теперь; тем не менее для истории в этом вопросе имеются любопытные моменты. На основании достоверных фактов, обстоятельства, связанные с этим вопросом, можно объяснить несколькими причинами.

Вначале Гаусс считал, что идея способа наименьших квадратов настолько проста, что к ней должны были придти задолго до него, и некоторое время он готов был держать пари по этому поводу. Кроме того, «Ум молодого гения явился уже в то время неисчерпаемым источником, из которого день и ночь струился столь мощный поток идей, что одно открытие опережало другое, и не находилось даже времени закрепить на бумаге хотя бы внешние контуры идеи. Именно поэтому величайшие открытия оставались более десятилетия, а иной раз свыше полувека неизвестными широким кругам ученого мира», так писал близкий друг и биограф Гаусса Сартариус фон Вальтерсхаузен***.

В этом отношении характерно свидетельство самого Гаусса: «Некоторые из астрономов непосредственно после открытия вновь планеты Цереры (это было в 1801 г. **Прим. ред.**) высказали пожелание, чтобы я опубликовал примененные мной методы вычислений. Однако ряд причин не позволил мне исполнить пожелание моих друзей: во-первых, я был занят другими работами, во-вторых, я имел в виду отработать эту тему позднее более подробно; главным же образом я надеялся, что длительная работа над этой задачей окажется полезной для самого ее решения в смысле его обобщения, упрощения и стройности. Мои надежды меня не обманули» (из предисловия к «Теории движения небесных тел»).

* Вильгельм Ольберс, его жизнь и труды, т. II, Переписка между Ольберсом и Гауссом, ч. I, Берлин, 1900, ч. II, Берлин, 1909.

** Gauss, Werke, 1924, Bd II, S. . .

*** В. Сартариус фон Вальтерсхаузен, Памяти Гаусса, Лейпциг, 1856, стр. 21.

В 1799 г. Гаусс впервые упоминает о способе наименьших квадратов в письме к Цаху. В изданном Цахом журнале «Всеобщие географические эфемериды» были помещены выдержки из таблиц уравнивания времени Улуг-Бека. В разборе этих таблиц Гаусс применил свой способ и пришел к «некоторым весьма курьезным результатам». В этом письме и в заметке названного журнала за февраль 1799 г. он указывает, что использовал собственный метод, применявшийся им в течение ряда лет,— определенным образом комбинировать наблюденные величины, содержащие случайные величины. Об открытии способа Гаусс в этот же период сообщил своему другу, венгерскому математику Больяи, показывал его также профессору Клюгелю, с которым встретился в 1799 г. в Гельмштадте.

Считается, что определенное влияние на Гаусса в вопросе открытия способа оказала работа Ламберта «К вопросу о применении математики» (1765 г.). В этой работе имеется специальная глава «Теория надежности наблюдений и опытов», в которой наряду с другими задачами он вычисляет длину тропического года из длинного ряда наблюдений, охватывающих почти полувековой период. В указанной задаче Ламберт заменяет систему уравнений ошибок с двумя неизвестными двумя уравнениями, которые он составляет по методу, напоминающему составление нормальных уравнений в способе наименьших квадратов. Кроме этого, здесь Ламберт уже различает систематические и случайные отклонения возможны в обе стороны от середины, что меньшие по величине ошибки встречаются чаще, чем большие; что кривая вероятности (которую он называет «возможностью») симметрична в обе стороны, средняя ордината наибольшая, кривая имеет по обе стороны точки перегиба и затем асимптотически приближается к оси абсцисс. Величины самих случайных ошибок Ламберт считал малыми величинами первого порядка. Все это было крупным достижением для того времени. Однако Гауссу показалось, что у Ламберта отсутствует твердый принцип, по которому следовало бы единообразно решить задачи, связанные с наблюдениями.

На молодого Гаусса оказывали влияние также работы других крупных математиков: Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Босковича и др. В работе «Sur les inegalites du mouvement de Saturne et de Jupiter» (1748) Эйлер ставит себе задачу целесообразным сочетанием результатов наблюдений составить для каждого неизвестного нечто вроде нормального уравнения.

В 1770 г. Лагранж впервые рассмотрел случайные ошибки на основе теории вероятностей, однако он оказался тогда единственным исследователем в этом направлении и вскоре позабытым.

Наиболее существенный шаг на пути к открытию способа наименьших квадратов был сделан итальянским астрономом и математиком Роджери Иосифом Босковичем. В 1755 г. он предложил новое правило для решения линейных уравнений для случая, когда число их превышает число неизвестных, состоящее в том, что сумма абсолютных разностей наблюденных и вычисленных величин должна быть минимальной.

В 1770 г. метод Босковича был изложен в французском переводе его отчета о градусном измерении в Кирхенштате под заглавием «Астрономическое и географическое путешествие в церковное государство». В конце книги приведены примеры применения этого метода, относящиеся к 14 дугам градусного измерения и к произведенному в том же году Босковичем вычислению элементов кометных орбит. Спустя 19 лет, в 1789 г., в мемуарах Французской академии наук появилась статья Лапласа, в которой он, приведя способ Босковича и считая его недоста-

точным для получения однозначного решения, ставит новое условие: алгебраическая сумма ошибок должна равняться нулю. По истечении 10 лет, в 1799 г., Лаплас в исследовании «*Traite de mecanique ce'leste*» более полно изложил свою теорию; здесь четко сформулированы два условия: 1) алгебраическая сумма ошибок должна быть равна нулю; 2) сумма абсолютных величин ошибок должна быть минимальной.

В дневнике Гаусса за 1798 г. имеется фраза «исчисление вероятностей, защищенное от Лапласа». Этим подчеркивалось его несогласие с Лапласом. Против метода Лапласа Гаусс обычно выдвигал следующие возражения: 1) отсутствие математического единства и строгости; 2) не принимается во внимание различный характер ошибок; 3) этот принцип во многих случаях не дает никакого решения; 4) применение его связано с трудностями; 5) избыточные наблюдения принимаются во внимание только тогда, когда они могут повлиять на окончательный результат. Все эти недостатки исчезают,— указывает Гаусс,— как только сумма абсолютных величин ошибок заменяется суммой их четных степеней, среди которых вторая степень заслуживает предпочтения.

Запись в дневнике в 1798 г. явилась следствием того, что именно в этом году Гаусс нашел связь способа наименьших квадратов с теорией вероятностей.

В письме к Ольберсу Гаусс, ссылаясь на запись в дневнике, писал, что в июне 1798 г. он установил «несовместимость метода Лапласа с положениями теории вероятностей».

30 января 1812 г. Гаусс, возвращаясь к этому вопросу, писал Лапласу: «Я применял метод наименьших квадратов, начиная с 1795 года, и я нашел в своих бумагах, что июнь 1798 года — это дата, когда я его согласовал с теорией вероятностей. Примечание об этом находится в моем дневнике, который я вел по поводу моих математических занятий начиная с 1796 года и который я на днях показал господину Лиденау. Однако мои частные применения этого метода датируются лишь 1802 годом, с какого времени я, так сказать, каждодневно использовал этот метод в моих астрономических вычислениях, связанных с новыми планетами*». Говоря о новых планетах, Гаусс имел в виду в первую очередь Цереру и Палладу; исследование по определению элементов орбит этих планет составляет целую эпоху в астрономии.

В 1805 г. Гаусс начал составлять «Теорию движения небесных тел», которую завершил в следующем 1806 г. на немецком языке, но осуществить издание вовремя не удалось по политическим и семейным причинам (имеется в виду вторжение Наполеона в Германию и женитьба Гаусса). Только в 1807 г. начали печатать книгу после перевода ее на латинский язык, причем она увидела свет только в 1809 г.

Пока Гаусс томился в издательских и творческих муках, в 1806 г. Лежандр выпустил свой труд о вычислении кометных орбит, в котором с исключительной четкостью и ясностью сформулировал основной принцип и многие правила способа наименьших квадратов. Он сопровождает определение параболической орбиты комет из трех наблюдений следующими пояснениями:

«Когда все условия задачи выражены соответствующим образом, следует так определять коэффициенты, чтобы ошибки были возможно меньше. Метод, который кажется мне наиболее подходящим для этой цели, состоит в том, чтобы приводить сумму квадратов ошибок к минимуму. При этом получается ровно столько же уравнений, сколько имеет-

* Gauss, Werke, Elften Bandes, Zweite Abteilung, Göttingen, 1924.

ся неизвестных, что дает возможность определить элементы орбиты. Так как способ, который я называю способом наименьших квадратов, сможет, вероятно, принести большую пользу во всех вопросах физики и астрономии, где требуется получить из наблюдений возможно более точные результаты, то в приложении я даю детальные подробности о применении способа к меридианному измерению во Франции»*.

В указанном приложении Лежандр пишет: «Когда число уравнений превышает число неизвестных, неизбежно проявляется произвол в распределении ошибок, и нельзя ожидать, что все гипотезы приведут к одинаковым результатам, следует, однако, осуществить подбор таким образом, чтобы экстремальные ошибки, независимо от их знака, были заключены в возможно более узкие границы»*.

«Из всех принципов, которые можно здесь предложить, наиболее универсальный, точный и легко применяемый, по моему мнению, тот, который предполагает минимум суммы квадратов ошибок. Благодаря этому между ошибками устанавливается принцип равновесия, препятствующий преобладанию крайних значений и весьма удобен для получения из системы уравнений результатов, более всего подходящих к действительности».

Ознакомившись с работой Лежандра, Гаусс с горечью написал Ольберсу: «Повидимому такова моя судьба — столкнуться с Лежандром во всех моих теоретических работах. Так, например, принцип, которым я пользуюсь с 1794 года, а именно, для того, чтобы наилучшим образом представить несколько величин, которым нельзя дать точных знаний, нужно привести к минимуму сумму квадратов ошибок, применяется также и в работе Лежандра и излагается в ней весьма основательно».

Как видно из предыдущего, в письме к Ольберсу и в других местах Гаусс указывает на 1794 г. как на начало применения им способа наименьших квадратов, тогда как в письме к Лапласу и в «Теории движения небесных тел» указывается, что он пользуется им с 1795 г. Видимо, Гауссу было трудно спустя 15 лет определить точно, когда он пришел к основному принципу способа, однако большинство исследователей у нас и в Германии склонны считать 1794 г. наиболее вероятной датой открытия способа Гауссом.

Подход к обоснованию способа наименьших квадратов у Лежандра и Гаусса принципиально различный. Лежандр исходил из целесообразности, предлагая его в то время как Гаусс, приняв начало арифметической середины как аксиому, обосновал способ наименьших квадратов теорией вероятностей.

После опубликования «Теории движения» Гаусс продолжал работать над дальнейшей разработкой теории и над усовершенствованием практики способа. В 1810 г. он представил Гёттинггенскому научному обществу свою новую работу «Disquisitio de elementis ellipticis Palladis» (Исследование об эллиптических элементах Паллады), в которой дается метод решения и контроля системы нормальных уравнений, впоследствии получившей название алгорифма Гаусса. Здесь же были впервые введены весьма удобные обозначения, которыми до сих пор пользуются при составлении и решении нормальных уравнений.

В 1816 г., по просьбе известного геодезиста Бонненберга, для издаваемого им журнала Гаусс написал статью «Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen» (Определение точности наблюдений). В ней изло-

* „Mémoires de la classe des Sciences mathématique et physiques de l'Institut de France“ 1810, т. II.

жен способ получения вероятнейшей ошибки из достаточного количества истинных ошибок наблюдений и для сравнения она ее получает через сумму других степеней, из которой ясно следует, что наиболее целесообразно получить эту ошибку из суммы квадратов.

Указанные работы Гаусса относятся к тому периоду, когда он, исходя из допущения, что среднее арифметическое дает вероятнейшее значение искомой величины, стремился обосновать это на основе теории вероятностей. Однако Гаусс затем установил, что этот вывод позволяет применять способ наименьших квадратов при любом законе ошибок, лишь только среднее арифметическое из всех ошибок было бы равно нулю. Так как среднее арифметическое не есть какая-то неизбежная величина для всех случаев, то он считал необходимым ограничиться только рассмотрением определенного вида закона ошибок, который имеет место в действительности. Над этим он работал, начиная с 1815—1820 гг., вскоре пришел к другим выводам и отказался от прежнего обоснования. Только после опубликования фундаментальной работы под названием «*Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*» («Теория комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам») Гаусс счел возможным сказать об изменении своей точки зрения в письмах к Энке от 23 августа 1831 г., Бесселю от 28 февраля 1839 г. и Шумахеру от 25 ноября 1844 г. Письма к Бесселю и Шумахеру имеют большое историческое и методическое значение, поэтому мы считаем уместным привести их.

В письме к Бесселю Гаусс писал: «То, что я впоследствии отказался от метафизики способа наименьших квадратов, приведенной в «Теории движения», произошло главным образом по причине, о которой я сам публично не упоминал. Именно, я считаю менее важным отыскание такого значения неизвестной величины, вероятность которой максимальна, но всегда остается бесконечно малой, нежели того, с которым можно получить верную игру; иными словами, если $f(a)$ обозначает вероятность значения a для неизвестного x , то представляется менее важным привести к максимуму $f(a)$, нежели к минимуму интеграл $\int f(x) F(x-a) dx$, распространенный на все возможные значения x , в котором за F берется функция всегда положительная и подходящим образом увеличивается с увеличением аргумента»*.

«То, что для этого выбирают квадрат вполне произвольно, причем произвол этот лежит в существе дела. Не считаясь с известными, исключительно большими преимуществами, обеспечиваемыми выбором квадратов, можно было остановить свой выбор на любой другой функции, удовлетворяющей указанным условиям»*.

В письме к Шумахеру Гаусс поясняет ту методику, исходя из которой он в течение продолжительного времени читал лекции по этому предмету в Гёттингенском университете.

«При чтении лекции по этой теме я считаю полезным идти путем, обратным тому, который применен мной в изданных исследованиях. Я начинаю с практического применения способа, знакомя слушателей с деталями приемов в зависимости от условия преподавания. И лишь затем сообразуясь со временем, я перехожу к различным выводам для обоснования способа наименьших квадратов, знакомство с которым может заинтересовать только того, кто умеет применять его на практике. Я имею обыкновение знакомить слушателей с тремя приемами вывода:

* Gauss, Werke, Bd VIII.

1) первый вывод основан на принципе целесообразности; этот прием весьма нагляден и прост; 2) второй вывод, сообщаемый в «Theoria motus» (Теория движения) основан на теории вероятностей; 3) третий вывод, также основанный на теории вероятностей, но совершенно отличный от второго, изложен в «Theoria Combinationis (Теория комбинации) и, на мой взгляд, является единственно приемлемым. Для всех, не знакомых с рассматриваемой теорией, я считаю этот порядок изучения наиболее целесообразный»*.

Непосредственным поводом для предпринятых Гауссом новых работ по способу наименьших квадратов, как многие авторы считают, были результаты новых исследований Лапласа по теории вероятностей. В 1809—1812 гг. Лаплас выпустил ряд работ, в том числе такую фундаментальную, как «Théorie analytique des probabilités» («Аналитическая теория вероятностей»), в которых он, наряду с другими проблемами, поставил задачу — найти наилучшую комбинацию наблюдений для определения из них неизвестной при условии, что положительные и отрицательные ошибки равновероятны и число их неограниченно большое. Не делая при этом никаких предположений в отношении закона распределения ошибок, Лаплас нашел, что способ наименьших квадратов дает наилучшую комбинацию наблюдений.

Наиболее уязвимым местом обоснования, сделанного Лапласом и сразу же отмеченного Гауссом, является то, что он исходил из бесконечно большого числа наблюдений. В действительности, как это хорошо известно из геодезических, астрономических и других измерений, число наблюдений, а следовательно и число ошибок, всегда ограничено. Имея эту предпосылку в виду, Гаусс и предпринял новое обоснование способа наименьших квадратов. При этом он подчеркивает в своих работах, что исходит из тех же условий, что и Лаплас, но понятие средней квадратической ошибки установил иначе, более естественным образом, поэтому, по его мнению, способ наименьших квадратов на новой основе дает наиболее целесообразную комбинацию наблюдений, причем число наблюдений может быть большим или меньшим.

15 февраля 1821 г. Гаусс представил Гёттинггенскому научному обществу первую статью, 2 февраля 1823 г. вторую и 6 сентября 1826 г. — третью, или, как он ее назвал, «Дополнение» к «Теории комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам».

Отметим лишь, что «Дополнение» сыграло исключительную роль в создании современной теории и практики геодезических уравнивательных вычислений. Гаусс это понимал превосходно; он в аннотации к указанной выше работе пишет: «Тригонометрические измерения вполне относятся к области, где применима теория вероятностей, причем именно в той форме, которая развита в настоящей статье».

В другом месте Гаусс говорит о «моральной» стороне применения способа наименьших квадратов: «Он с возрастающим успехом противодействует негодным способам отбора и оценки наблюдений, происходящим либо от незнания основ правильной теории, либо от тайного желания придать измерениям видимость большой точности».

* * *

В XIX и XX вв. способ наименьших квадратов получил всестороннее развитие и широкое применение, особенно при обработке геодезических и астрономических измерений. Исследования и работы Лежандра, Лапласа и Гаусса положили только основу для создания современной теории и практики способа наименьших квадратов.

* Gauss, Werke, Bd VIII, S 147—148.

В этой области крупные заслуги имеют также Бессель, Ганзен, Энке, Герлинг, Геальмерт, В. Я. Струве, А. Н. Савич, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, А. Н. Крылов, А. Н. Колмогоров и др.

Бессель в своих сочинениях: «Fundamenta Astronomiae» («Фундаментальная астрономия»), «Abhandlung über der Olbers'schen Cometen» («Исследования орбиты кометы Ольберса») подверг тщательному исследованию распределение ошибок в больших рядах наблюдений. Бесселю принадлежит метод уравнивания посредственных наблюдений, изложенный в «Градусном измерении в Восточной Пруссии» (1837 г.).

Значительным вкладом являются статьи Энке, напечатанные в «Berliner Astronomisches Jahrbuch» за 1834, 1835 и 1836 гг. под названием «Über die Methode der kleinsten Quadrate» («О способе наименьших квадратов»).

А. Н. Савич в введении «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений» (Академия наук, Петербург, 1857 г.) об этих статьях Энке пишет: «К распространению Гауссовых теорий способствовала прекрасная статья Берлинского астронома, г. Энке, напечатанная в Berl. Astr. Jahrbuch, 1834, 1835 и 1836 годов». Энке был учеником Гаусса и директором Берлинской астрономической обсерватории.

Большая заслуга в развитии, применении и распространении способа в России принадлежит академикам В. Я. Струве, В. Я. Буняковскому и крупным геодезистам Корпуса военных топографов Смыслову, Ходзько и др. В. Я. Струве, как известно, не написал специальных исследований по способу наименьших квадратов, но результаты громадного количества астрономических и геодезических измерений, выполненных им или под его руководством, неизменно обрабатывались по способу. Особое место в этом направлении занимает обработка материалов дуги меридиана от устья Дуная до берегов Ледовитого океана.

В. Я. Струве принадлежит особый прием решения уравнений градусного измерения по меридиану. Кроме того, Струве наряду с Гауссом ввел понятие о средней ошибке. По этому поводу Буняковский в работе «Основания математической теории вероятностей» (стр. 299) пишет: «Приведем еще понятие о средней погрешности особого рода, рассмотрение которой было предложено Гауссом и нашим знаменитым астрономом Струве».

Практически большое значение имело применение способа при обработке материалов первоклассной триангуляции Корпуса военных топографов. Военные геодезисты Смыслов и Ходзько в середине прошлого столетия начали в широких масштабах применять способ при обработке геодезических материалов Корпуса. Смыслов строго по способу наименьших квадратов уравнивал Астраханскую базисную сеть, Ходзько — Северо-Кавказскую триангуляцию того времени. Как первые шаги, указанные работы сыграли определенную положительную роль в применении способа в дальнейшем. Но наиболее раннее применение способа в России принадлежит финскому профессору Вальбеку, который впервые обработал материалы градусных измерений начала XIX в. по способу наименьших квадратов и в 1819 г. опубликовал свой вывод формы и размеров земного эллипсоида, применявшийся в геодезических работах Корпуса военных топографов. Имеется указание, что Гаусс также пользовался в своих вычислениях эллипсоидом Вальбека.

Следует, однако, заметить, что такие крупные геодезисты, как знаменитый К. И. Теннер и Ф. Ф. Шуберт, в своих работах способом наименьших квадратов не пользовались.

В 1846 г. Российская академия наук издала указанный выше труд профессора Петербургского университета, ординарного академика и доктора математических наук Парижской академии В. Я. Буняковского. Этот большой том (около 500 страниц крупного формата) был в то время выдающимся произведением по теории вероятностей не только в России, но и во всей Европе. В нем с исключительной полнотой рассмотрены все основные вопросы теории вероятностей и способа наименьших квадратов. В главе X «О наивыгоднейших результатах наблюдений» творчески разобраны работы Лапласа, Лежандра, Гаусса, Бесселя и др. Дан обзор и сравнительная оценка других способов, применявшихся для обработки наблюдений, в частности, приводятся правила Комеса*. Труд Буняковского до появления работ Чебышева, Ляпунова и Маркова по теории вероятностей и способу наименьших квадратов был наибольшим вкладом в этой области в русскую науку. Всякий, кто знакомится с этой чудесной книгой, не может не восхищаться глубиной мысли автора и ясностью изложения.

Из учебников и курсов, сыгравших большую роль в создании современного способа наименьших квадратов, особенно в геодезии, следует отметить:

1. Болотов «Геодезия», ч. I, 1835 г. В конце книги под заглавием «Прибавление к высшей геодезии» приводится достаточно полное изложение способа наименьших квадратов. Возможно, что это первое систематическое изложение способа для геодезических целей в учебной литературе. Изложение ведется на основе работ Гаусса, поэтому оно является прекрасным комментарием трудных мест в его исследованиях.

2. Гаген (Hagen) «Grundzüge der Warscheinlichkeitsrechnung» («Основы исчисления вероятностей»), Берлин, 1837 г. Исходя из теории вероятностей, Гаген в своем учебнике обосновал теорию ошибок измерений, рассматривая каждую ошибку как сумму весьма большого числа элементарных положительных и отрицательных ошибок. В его работе вопрос обоснования излишне осложнен, но это был первый учебник в Германии по способу наименьших квадратов. Гаген был учеником Бесселя.

3. Герлинг (Gerling) «Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der Kleinsten Quadrate» («Уравнительные вычисления практической геометрии или способ наименьших квадратов»), Гамбург, 1843 г. Герлинг главное внимание обратил на практическую сторону метода; на ряде специально подобранных примеров он наглядно показал применение способа при уравнивании и оценке точности результатов. О книге Герлинга Савич писал: «Эта весьма хорошая книга заключает руководство к вычислению геодезических измерений и содержит некоторые, нигде не издаваемые замечания Гаусса, наставлениями которого автор имел счастье пользоваться»**.

4. Две работы академика А. Савича: 1) «Приложение практической астрономии к географическому определению мест», Петербург, 1845 г. Эта работа удостоена полной Демидовской премии Российской академии наук за 1846 г. В книге приведено много числовых примеров, обработанных по способу наименьших квадратов. 2) «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений»

* У Идельсона эта фамилия пишется «Котс». См. Н. И. Идельсон, Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений, М., Издательство геодезической и картографической литературы, 1947.

** А. Савич, «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений», Академия наук, Санкт-Петербург, 1857.

(1857 г.). Книга написана в качестве руководства по способу наименьших квадратов для слушателей геодезического отделения Генерального штаба. Части этого руководства были написаны еще задолго до выхода книги, ими пользовался Болотов в своих лекциях. Труд Савича является наиболее полным курсом по способу наименьших квадратов, написан на весьма высоком теоретическом уровне. Теоретические вопросы изложены на основании трудов Гаусса, Лапласа, Бесселя, Струве, Буняковского, Гайзена, Энке и Герлинга. В конце книги помещены примеры и правила для тех, кто не знаком с теорией способа наименьших квадратов.

5. Для геодезических работ особую роль в Германии и у нас играли «Уравнивание по способу наименьших квадратов» Гельмерта и первая часть «Руководства по геодезии» Иордана, где изложен способ наименьших квадратов. Эти две книги в свое время были переведены на русский язык и широко использовались отечественными геодезистами.

Большую роль в разработке приложений способа наименьших квадратов к уравниванию обширных геодезических сетей сыграли видные советские ученые: Красовский Ф. Н., Чеботарев А. С., Урмаев Н. А., Идельсон Н. И., Попов В. В., Пранис-Праневич И. Ю., Ларин Д. А. и др.

Список выдающихся трудов по способу наименьших квадратов можно было продолжить, однако ограничимся только теми, которые играли историческую роль и являются оригинальными трудами для своего времени.

* * *

Обоснование способа наименьших квадратов все время привлекало внимание крупнейших русских и советских математиков: Чебышева, Ляпунова, Маркова, Колмогорова и др.

С исчерпывающей полнотой вопрос рассмотрен академиком А. А. Марковым в его известном труде «Исчисление вероятностей», первое издание которого вышло в 1913 г. VII глава труда А. А. Маркова озаглавлена: «Способ наименьших квадратов» в четвертом издании (1924 г.), она занимает 150 стр. (стр. 323—473). Здесь весьма обстоятельно, на основе теории вероятностей, рассмотрены теоретические основы способа. Приходится сожалеть, что геодезистами до сих пор мало изучен труд А. А. Маркова.

Взгляды А. А. Маркова на способ наименьших квадратов наиболее ярко освещены в его статье «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов», напечатанной впервые в Известиях физико-математического общества при Казанском университете в 1898 г. В 1951 г. эта статья была перепечатана в Избранных трудах А. А. Маркова «Теория чисел и теория вероятностей», Академия наук, 1951 г., стр. 246. В статье, в виде письма к профессору Казанского университета Васильеву, рассмотрены различные попытки обоснования способа наименьших квадратов на основе теории вероятностей. Приведем основные мысли А. А. Маркова, заключенные в этой статье:

«Не допуская определенного закона распределения погрешностей отдельных наблюдений, мы можем придти к способу наименьших квадратов, исходя из следующих положений: 1) мы рассматриваем только такие приближенные равенства, которые, по нашим предположениям, не содержат постоянной погрешности; 2) каждому приближенному равенству мы приписываем определенный вес, причем веса различных приближенных равенств мы считаем обратно пропорциональными математическим ожиданиям квадратов погрешностей; 3) достоинства каждого приближенного равенства мы оцениваем его весом и соответственно

этому для каждого неизвестного отыскиваем такое приближенное равенство, вес которого наибольший».

Принимая как основу эти положения, А. А. Марков рассматривает все основные задачи способа наименьших квадратов. Нетрудно видеть, что его взгляды в основном тождественны тем положениям, которые развиты Гауссом в «Теории комбинации наблюдений». А. А. Марков утверждает, что при определенных условиях, указанных выше, способ наименьших квадратов дает приближенное значение искомых величин, имеющих наибольший вес или наибольшую надежность.

В журнале «Успехи математических наук» (т. I, вып. I (11), 1946 г.) напечатана статья академика А. Н. Колмогорова «К обоснованию метода наименьших квадратов». В введении своей работы автор указывает на те недостатки, которыми, по его мнению, обладает «общеупотребительная» литература по способу наименьших квадратов. Он подчеркивает: в учебной литературе не дается указаний о пользовании законом распределения Стюдента и о соответствующей этому распределению оценке точности. «Употребление же вместо этих законов распределения закона Гаусса при небольшом числе наблюдений приводит к очень большой и практически весьма ощутимой переоценке этой надежности»; «... все основные результаты теории метода наименьших квадратов получаются весьма громоздкими *чисто вычислительным путем*, в то время как использование надлежащих *общих понятий* современной линейной алгебры позволяет получить те же результаты значительно более прозрачным образом. Особенно наглядным получается изложение при употреблении представлений n -мерной векторной геометрии».

Последний недостаток действительно имеет большое значение для университетских курсов, в которых указанные разделы высшей математики рассматриваются достаточно глубоко; что касается технических и геодезических вузов, то едва ли этот недостаток имеет какое-либо существенное значение. Как известно, главной целью преподавания этого предмета в указанных вузах являются уравнивательные вычисления и оценка точности результатов, при выполнении которых необходимо разработать определенный порядок действий и соответствующие схемы вычислений, гораздо нагляднее и удобнее получающиеся именно «вычислительным путем», так как теоретическое изложение вопроса полностью соответствует практическому применению.

Весьма существенно определить точность получаемых результатов. Совершенно справедливо, что способ наименьших квадратов дает несколько завышенную точность, особенно, если число измерений невелико. Однако следует оговориться.

Во-первых, еще Гауссу было известно, что это явление имеет место; в аннотации второй статьи «Теории комбинации наблюдений» он пишет: «Так как мы не имеем права наиболее надежные значения считать истинными, то легко можно убедиться, что с помощью этого способа мы всегда должны получать вероятные и средние ошибки несколько меньшими по величине, а поэтому приписывать наблюдениям и выведенным на основании их результатам большую точность, чем они действительно имеют. Конечно, в случае, когда число наблюдений во много раз больше числа неизвестных величин, такая неточность имеет небольшое значение, однако отчасти достоинство науки требует, чтобы полно и определенно было рассмотрено, насколько при этом велика опасность сделать ошибку».

«... Автор подверг этот вопрос особому исследованию, которое привело его к замечательному и в высшей степени простому результату. А

именно, чтобы среднюю ошибку, полученную по указанному выше ошибочному способу, превратить в правильную, умножают ее только на

$$\sqrt{\frac{\pi - \rho}{\pi}},$$

где π — число наблюдений и ρ — число неизвестных величин» (стр. 147).

Во-вторых, работа «Теория комбинации наблюдений» была принята Гауссом для того, чтобы вывести способ наименьших квадратов в предположении, что число измерений ограничено, в противовес Лапласу, который в своем исследовании исходил из бесконечного числа измерений.

Более чем столетнее применение способа наименьших квадратов при обработке и использовании геодезических измерений до сих пор не приводило к каким-либо противоречиям с действительностью. Что и является лучшим доказательством обоснованности способа наименьших квадратов, каким он был создан трудами Лежандра, Лапласа и Гаусса.

Тем не менее, упрек математиков по адресу геодезистов и астрономов в том, что они до сих пор применяют и излагают в учебниках способ так, как это было сделано Гауссом, т. е. без учета современных достижений математической статистики, в своей существенной части остается в силе. И в этом большая вина самих математиков.

На самом деле, разве работы Гаусса получили бы такое распространение, если бы он в своих исследованиях по способу не осуществил то тесное сочетание теории и практики, которое и поныне считается примером в науке. Однако исследования многих современных математиков по данному вопросу зачастую носят слишком отвлеченный характер при сложном и локаничном изложении. Эти обстоятельства создают весьма большие трудности при практическом использовании результатов подобных исследований в прикладных науках.

Г. В. Багратуни

Т е о р и я
комбинаций наблюдений, подверженных
наименьшим ошибкам

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Представлена Научному обществу в Гёттингене

15 февраля 1821 г.

Последние сочинения Гёттингенского королевского научного общества, т. V.
Гёттинген, 1823

1.

Как бы тщательно ни производились наблюдения для определения физических явлений, они всегда бывают подвержены более или менее значительным ошибкам. В большинстве случаев ошибки наблюдений не бывают простыми, а происходят одновременно на основании многих источников; следует хорошо различать два вида источников. Некоторые причины ошибок таковы, что их влияние на какое-либо наблюдение зависит от различных обстоятельств, не связанных между собой и с самим наблюдением. Такие ошибки называются неправильными или случайными, ибо как сами ошибки, так и их приводящие обстоятельства не могут быть учитываемы. Таковы ошибки, происходящие от несовершенства наших чувств, и ошибки, которые зависят от внешних причин, например от неясного изображения предметов вследствие колебаний воздуха, а также ошибки, происходящие от несовершенств, которыми страдают даже самые лучшие инструменты, например неправильности внутренних поверхностей уровней, отсутствие абсолютной устойчивости и т. д. Наоборот, другие причины ошибок во многих наблюдениях такого рода, что по самой природе своей обнаруживают или полное постоянство или, по крайней мере, таковы, что величина их подчиняется закону, тесно связанному с наблюдениями. Такого рода ошибки называются постоянными или правильными*. Впрочем, очевидно, что такое различие в известном смысле только относительное и зависит от более широкого или более узкого представления о наблюдениях данного вида. Например, случайные погрешности делений кругов вносят постоянную ошибку в измерения углов, если речь идет о многократном измерении одного и того же угла и если при этом все время пользуются одними и теми же делениями. Наоборот, ошибку, происходящую из этого же источника, можно считать случайной, если речь идет о последовательном измерении различных углов и если не имеется таблицы значений ошибок для каждого деления.

* Ошибки такого рода впоследствии в нашей специальной литературе получили название систематических (Прим. ред.).

2.

Рассмотрение постоянных ошибок не входит в наши исследования. Конечно, дело наблюдателя старательно исследовать все причины, которые могут повести к возникновению постоянных ошибок, или устранить их, или, по крайней мере, самым тщательным образом исследовать их свойства и величину, чтобы исправить каждое наблюдение от их влияния так, что полученный результат как бы и не был подвержен ошибке. Совсем иначе обстоит дело со случайными ошибками, по самой природе своей не поддающимися учету. Поэтому их приходится терпеть в наблюдениях, но следует, по возможности, ослабить их влияние на полученные результаты путем искусного комбинирования их. Этому весьма важному вопросу посвящены последующие исследования.

3.

Ошибки в наблюдениях такого рода, которые возникают от одной определенной простой причины, по самой природе вещей заключаются в определенных пределах, которые, несомненно, можно точно указать, если вполне известны свойства этой причины. Многие причины случайных ошибок исследованы и оказывается, что, согласно закону непрерывности, все ошибки, охватываемые этими пределами, должны считаться возможными; основательное изучение причины ошибок может показать, все ли они равновероятны и какова относительная вероятность, с которой должна быть принята каждая ошибка. То же самое можно сказать и о сложной ошибке, которая складывается из большого числа простых ошибок, а именно: она заключена двумя определенными пределами, из которых один равен сумме высших, а другой — нижних пределов, соответствующих простым ошибкам. Хотя в этих пределах заключены все ошибки, но так как каждая может оказаться соединением бесконечно различными способами составляющих ошибок, которые в свою очередь более или менее вероятны, то мы должны принять, что одни из них будут встречаться чаще, а другие — реже. Кроме того, зная законы простых ошибок, можно установить закон относительной вероятности для каждой ошибки, если не считаться с аналитическими трудностями при получении связи между всеми сочетаниями.

Правда, бывают такие причины ошибок, которые не подчиняются закону непрерывности, но могут вызывать только периодические ошибки, как, например, ошибки делений кругов, так как у данного круга число делений конечно. Но, несмотря на это, очевидно, если только не все причины ошибок вызывают периодические ошибки, совокупность всех возможных сложных ошибок образует, согласно закону непрерывности, возрастающий ряд или даже несколько таких отдельных рядов, если, распределив все возможные периодические ошибки в ряд по возрастающим величинам, окажется, что разность между двумя последовательными членами этого ряда будет меньше разности между крайними пределами ошибок, подверженными закону непрерывности. Но на практике последний случай едва ли произойдет когда-нибудь, если только не было грубых ошибок при нанесении делений.

4.

Обозначим через $\varphi(x)$ относительную вероятность ошибки при определенном виде наблюдений; тогда, надо полагать, что, вследствие непрерывности ошибок, вероятность некоторой ошибки, лежащей между бесконечно близкими пределами x и $x + dx$, будет равна $\varphi(x) dx$. Конечно, на практике вряд ли бывает возможно заранее указать такую функцию, тем не менее можно установить много ее замечательных свойств, кото-

рым мы будем следовать. Очевидно, функция $\varphi(x)$, если считать ее разрывной для значений x , лежащих вне пределов возможных ошибок, должна равняться нулю; внутри же этих пределов она принимает положительное значение (за исключением случая, о котором говорилось в конце предыдущего параграфа). В большинстве случаев можно предполагать, что положительные и отрицательные ошибки одной и той же величины бывают одинаково часто, так что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Далее малые ошибки встречаются чаще, чем крупные; так что значение $\varphi(x)$ будет максимальным при $x = 0$ и постоянно уменьшится с непрерывным возрастанием x .

Но, вообще говоря, интеграл $\int \varphi(x) dx$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ выразит вероятность, что где-то между пределами a и b заключена еще неизвестная ошибка. Следовательно, значение этого интеграла, взятого между верхним и нижним пределами всех возможных ошибок, всегда будет равно единице. А так как $\varphi(x)$ для всех значений x вне этих пределов всегда равно нулю, то очевидно, что значение интеграла $\int \varphi(x) dx$ в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ всегда равно единице.

5.

Рассмотрим далее интеграл $\int x\varphi(x) dx$ в тех же пределах и примем, что его значение равно k . Если все причины ошибок таковы, что нет повода допустить, что ошибки, равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются чаще других и это правило действительно также для сложных ошибок, то $\varphi(-x) = \varphi(x)$, поэтому необходимо, чтобы $k = 0$. Отсюда мы заключаем, что всякий раз, когда k не пропадает (не равно нулю), но сохраняет какое-то положительное значение, необходимо должна существовать какая-то причина ошибок, которая дает только положительные ошибки или, по крайней мере, положительные ошибки появляются чаще отрицательных. Величина k , которая в действительности является средней из всех возможных ошибок или средним значением x , может быть названа постоянной частью ошибки. Впрочем, легко доказать, что постоянная часть сложной ошибки равна сумме постоянных частей ошибок, получившихся на основании отдельных простых причин. Предположим теперь, что величина k известна; вычитаем ее из каждого наблюдения и ошибку исправленного таким образом наблюдения обозначим через x' , а соответствующую вероятность — через $\varphi'(x')$; тогда получим $x' = x - k$, $\varphi'(x') = \varphi(x)$, а следовательно,

$$\int x' \varphi'(x') dx' = \int x \varphi(x) dx - \int k \varphi(x) dx = k - k = 0,$$

т. е. ошибки исправленных наблюдений не имеют постоянной части, что, впрочем, само по себе очевидно.

6.

Подобно тому как интеграл $\int x\varphi(x) dx$, или среднее значение x , указывает или на наличие или на отсутствие систематической ошибки и на величину ее, так и интеграл $\int x^2\varphi(x) dx$ в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ (или среднее значение x^2) указывает наилучшим образом на ненадежность наблюдений как с точки зрения определения их, так

и измерения. Поэтому из двух систем неравноточных наблюдений надо считать более точными те, для которых интеграл $\int x^2 \varphi(x) dx$ принимает меньшее значение. Если кто-нибудь возразит, что этот принцип принят произвольно, без особой для того надобности, то мы охотно с этим согласимся. Интересующий нас вопрос по самой своей природе содержит в себе нечто неопределенное, что может быть ограничено известными пределами и в некоторой степени произвольным правилом. Определение из наблюдений какой-либо величины, содержащей более или менее крупные ошибки, вполне возможно сравнивать с игрой на счастье, в которой можно только проигрывать, но не выигрывать, в которой, следовательно, каждая ожидаемая ошибка соответствует проигрышу. Риск в такой игре оценивается по вероятному проигрышу, т. е. по сумме произведений отдельных возможных проигрышей на соответствующие их вероятности. Но какому проигрышу нужно приравнять отдельную ошибку наблюдений, это остается отнюдь не ясным; решение, как лучше поступить, зависит частично от нашего произвола. Очевидно, не следует приравнять проигрыш самой ошибке; если, однако, положительные ошибки принимаются за проигрыши, то отрицательные должны представлять собой выигрыши. Величина проигрыша должна быть выражена такой функцией ошибок, которая по природе своей всегда остается положительной. При бесконечном разнообразии таких функций, простейшей, обладающей таким свойством и заслуживающей предпочтения перед другими, несомненно, является квадратичная функция. Итак, высказанный нами выше принцип оправдался.

Хотя знаменитый Лаплас рассматривал этот вопрос почти подобным же образом, но он всегда принимал положительную ошибку, как меру проигрыша. Однако, если мы не ошибаемся, такое допущение не менее произвольно, чем наше; или двойная ошибка должна считаться столь же приемлемой, как дважды повторенная простая ошибка, или, что хуже, а потому не больше ли приемлемо двойной ошибке приписывать только двойное или даже большее значение, когда исследуемый вопрос не ясен сам по себе и не может быть решен математическим путем, но только при помощи свободных рассуждений. Однако нельзя отрицать, что подобное утверждение противоречит закону непрерывности, поэтому этот способ (Лапласа) в высокой степени не удобен в аналитической трактовке; между тем результаты, к которым приводит наш принцип, удивительно отличаются как своей простотой, так и общностью.

7.

Принимая, что значение интеграла $\int x^2 \varphi(x) dx$ в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ всегда равно m^2 , будем называть величину m средней ожидаемой ошибкой или просто средней ошибкой наблюдений, неизвестные ошибки которых x имеют относительную вероятность $\varphi(x)$. Такое название мы не будем ограничивать непосредственными наблюдениями, но распространим его на все результаты, полученные из наблюдений. Впрочем, не следует смешивать среднюю ошибку со средним арифметическим из всех ошибок, о котором мы говорили в § 5.

Если приходится сравнивать несколько систем наблюдений или различные неравноточные определения, то мы будем считать их относительным весом величину, обратно пропорциональную m^2 , в то время как точность обратно пропорциональна просто m . Следовательно, чтобы выразить вес числом, надо принять за единицу вес какой-нибудь системы наблюдений, выбранной совершенно произвольно.

8.

Если ошибки наблюдений содержат постоянную часть, то после исключения ее средняя ошибка уменьшается, а вес и точность увеличиваются. Сохранив обозначения § 5 и обозначив через m' среднюю ошибку исправленных наблюдений, получим:

$$m'^2 = \int x'^2 \varphi'(x') dx' = \int (x - k)^2 \varphi(x) dx = \int x^2 \varphi(x) dx - \\ - 2k \int x \varphi(x) dx + k^2 \int \varphi(x) dx = m^2 - 2k^2 + k^2 = m^2 - k^2.$$

Если же вместо истинной постоянной части k введем другую величину l , полученную из наблюдений, то квадрат новой средней ошибки равен $m^2 - 2kl + l^2 = m'^2 + (l - k)^2$.

9.

Обозначим через λ некоторый определенный коэффициент и через μ — значение интеграла $\int \varphi(x) dx$ в пределах от $x = -\lambda m$ до $x = +\lambda m$, тогда μ будет вероятность, что ошибка какого-либо наблюдения по абсолютной величине меньше λm , а $(1 - \mu)$ — вероятность, что ошибка больше λm . Следовательно, если значение $\mu = \frac{1}{2}$ соответствует значению $\lambda m = \rho$, то ошибка может быть как меньше ρ , так и больше ρ ; поэтому с достаточным основанием можно называть ρ вероятной ошибкой. Соотношение между величинами λ и μ зависит, очевидно, от свойств функции $\varphi(x)$, которая во многих случаях остается неизвестной. Поэтому заслуживает труда рассмотреть подробнее это соотношение для некоторых частных случаев.

I. Пусть пределы всех возможных ошибок $-a$ и $+a$ и все ошибки в этих пределах равновероятные, тогда $\varphi(x)$ в пределах от $x = -a$ до $x = +a$ будет постоянной величиной и, следовательно, равна $\frac{1}{2a}$. Отсюда получаем $m = a \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\mu = \lambda \sqrt{\frac{1}{3}}$, поскольку λ не больше $\sqrt{3}$; наконец, $\rho = m \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,8660254m$ и вероятность, что какая-либо ошибка будет не больше средней ошибки, равна $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773503$.

II. Если, как и выше, пределы возможных ошибок $-a$ и $+a$ и вероятность самих ошибок уменьшается в обе стороны от ошибки, равной нулю, в арифметической прогрессии, тогда получаем

$$\varphi(x) = \frac{a-x}{a^2} \text{ для значений } x \text{ от } 0 \text{ до } +a,$$

$$\varphi(x) = \frac{a+x}{a^2} \text{ для значений } x \text{ от } 0 \text{ до } -a.$$

Отсюда следует $m = a \sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} \lambda^2$, поскольку λ лежит между 0 и $\sqrt{6}$, и, наконец, $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{6 - 6\mu}$, если μ лежит между нулем и единицей, откуда

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0,7174389 m.$$

Вероятность, что ошибка не превзойдет средней ошибки в этом случае

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0,6498299.$$

III. Допустим, что функция $\varphi(x)$ пропорциональна $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ (что на самом деле может быть очень близко к действительности), тогда получаем

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

где π обозначает половину окружности радиуса 1; отсюда затем выводим

$$m = h\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(см. Disquisitiones generales circa Seriem infinitam etc. art. 28). (Исследования в общем виде о бесконечном ряде и т. д.); если при $z = 0$ обозначим интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2} dz$$

через $\Theta(z)$; то получим

$$\mu = \Theta\left(\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

В следующей таблице даны некоторые значения этой величины:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Хотя соотношение между λ и μ зависит от вида функции $\varphi(x)$, но все же можно установить некоторые ее свойства общего характера. Конечно, какова бы ни была эта функция, если она только так составлена, что ее значение при увеличении абсолютного значения самого x всегда уменьшается, или, по крайней мере, не увеличивается, то наверное получится:

λ — меньше или, по крайней мере, не больше $\mu\sqrt{3}$; если μ меньше $\frac{2}{3}$;

λ — не больше $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$, если μ больше $\frac{2}{3}$.

Для $\mu = \frac{2}{3}$ оба предела равны и λ может тогда быть не больше $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Чтобы доказать эту замечательную теорему, обозначим через y значение интеграла $\int \varphi(z) dz$ в пределах от $z = -x$, $z = +x$, тогда y будет вероятность, что какая-то ошибка находится в пределах между $-x$ и $+x$. Затем примем, что

$$x = \psi(y), \quad d\psi(y) = \psi'(y) dy, \quad d\psi'(y) = \psi''(y) dy.$$

Следовательно, $\psi(0) = 0$ и

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)},$$

вследствие чего, согласно сделанному нами предположению, $\psi'(y)$ в пределах от $y = 0$ до $y = 1$ все время растет или, во всяком случае, нигде не убывает, или, что то же, значение $\psi''(y)$ всегда положительное, или, по крайней мере, не бывает отрицательным.

Далее, мы имеем

$$d(y\psi'(y)) = \psi'(y) dy + y\psi''(y) dy,$$

следовательно,

$$y\psi'(y) - \psi(y) = \int y\psi''(y) dy,$$

если нижний предел интегрирования $y = 0$. Таким образом, значение выражения $y\psi'(y) - \psi(y)$ будет всегда положительной величиной и, во всяком случае, не отрицательной, а следовательно,

$$1 - \frac{\psi(y)}{y\psi'(y)}$$

положительная величина, меньшая единицы. Пусть f — ее значение для $y = \mu$, т. е. когда $\psi(\mu) = \lambda m$; пусть

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\psi'(\mu)} \quad \text{или} \quad \psi'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}.$$

После этих предварительных замечаний рассмотрим следующую функцию от y

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu} (y - \mu f),$$

которую обозначим через $F(y)$ и $dF(y) = F'(y) dy$. Очевидно, что тогда

$$F(\mu) = \lambda m = \psi(\mu),$$

$$F'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu} = \psi'(\mu).$$

Так как $\psi'(y)$ с увеличением y всегда возрастает (или, по крайней мере, не уменьшается, ибо ее всегда нужно понимать таким образом) и, кроме того, $F'(y)$ остается постоянной, то разность $\psi'(y) - F'(y) = \frac{d(\psi(y) - F(y))}{dy}$ для значений y , превосходящих μ , будет положительной, а для меньших значений — отрицательной. Отсюда легко видеть, что $\psi(y) - F(y)$ всегда положительная величина, и затем, что $\psi(y)$ всегда по абсолютной величине больше или, по крайней мере, не меньше $F(y)$ во всяком случае, пока значение $F(y)$ остается положительным, т. е. в пределах от $y = \mu f$ до $y = 1$. Поэтому значение интеграла

$\int [F(y)]^2 dy$ в пределах от $y = \mu f$ до $y = 1$ меньше значения интеграла $\int [\psi(y)]^2 dy$ в тех же пределах, и настолько меньше, насколько меньше значение этого же интеграла в пределах от $y = 0$ до $y = 1$, которое равно m^2 . Но значение первого интеграла оказывается

$$= \frac{\lambda^2 m^2 (1 - \mu f)^3}{3\mu^2 (1 - f)^2},$$

откуда получаем, что λ^2 меньше $\frac{3\mu^2(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, причем больше нуля и меньше единицы. Значение дроби $\frac{3\mu^2(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, дифференциал которой, если принять f за переменную величину

$$= -\frac{3\mu^2(1-f)}{(1-\mu f)^4} (2 - 3\mu + \mu f) df$$

непрерывно уменьшается, пока f переходит от значения нуля к значению единицы, если μ меньше $\frac{2}{3}$; максимально возможное значение будет соответствовать значению $f = 0$ и, следовательно, равно $3\mu^2$, так что в этом случае λ наверное меньше или не больше $\mu\sqrt{3}$. Это и нужно было нам доказать. Если, напротив, μ больше $\frac{2}{3}$, то значение этой дроби достигает максимума, когда $2 - 3\mu + \mu f = 0$, т. е. для $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, откуда оно равно $\frac{4}{9(1-\mu)}$, следовательно, λ в этом случае не больше, чем $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$, что мы заметили уже выше.

Так, например, для $\mu = \frac{1}{2}$ наверное λ не может стать больше $\sqrt{\frac{3}{4}}$, т. е. вероятная ошибка не будет выше предела $0,8660254m$, для которого в первом примере § 9 была найдена такая же величина.

Затем на основании нашей теоремы легко вывести, что μ не меньше $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, пока λ меньше $\sqrt{\frac{4}{3}}$; наоборот, μ не меньше $1 - \frac{4}{9\lambda^2}$, если значение λ больше $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

11.

Так как много задач, которые будут рассматриваться ниже, связано с значением интеграла $\int x^4 \varphi(x) dx$, то стоит труда вычислить его для некоторых частных случаев. Обозначим значение этого интеграла, в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, через n^4 .

I. Для $\varphi(x) = \frac{1}{2a}$, когда x заключен между $-a$ и $+a$, мы будем иметь $n^4 = \frac{1}{5} a^4 = \frac{9}{5} m^4$.

II. Во втором случае, приведенном в § 9, где $\varphi(x) = \frac{a \mp x}{a^2}$, для значений x между 0 и $\pm a$ мы получим $n^4 = \frac{1}{15} a^4 = \frac{12}{5} m^4$.

III. В третьем случае, где

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

согласно результатам, приведенным в цитированной выше статье, мы находим

$$n^4 = \frac{3}{4} h^4 = 3m^4.$$

Впрочем, можно доказать, что значение $\frac{n^4}{m^4}$ наверное не меньше $\frac{9}{5}$, если только имеет место предположение, приведенное в предыдущем параграфе.

12.

Обозначим через x, x', x'' и т. д. ошибки одного и того же ряда наблюдений, произведенных независимо одна от другой, относительные вероятности которых обозначены по-прежнему через $\varphi(x), \varphi(x'), \varphi(x'')$ и т. д.; пусть затем y — заданная рациональная функция переменных x, x', x'' и т. д.; тогда многократный интеграл (1)

$$\int \varphi(x) \varphi(x') \varphi(x'') \dots dx dx' dx'' \dots, \quad (1)^*$$

распространенный на все значения переменных x, x', x'' и т. д., для которых значение y заключается между пределами 0 и η выражает вероятность, что значение y находится где-то неопределенно между пределами 0 и η . Очевидно, что этот интеграл представляет собой функцию от η , дифференциал которой будем считать равным $\psi(\eta) d\eta$, так что сам интеграл равен интегралу $\int \psi(\eta) d\eta$, взятому от $\eta = 0$, как функцию нижнего предела интегрирования. Тогда следует думать, что обозначение $\psi(\eta)$ выражает относительную вероятность какого-либо значения y , а x следует рассматривать как функцию переменных y, x', x'' и т. д., которую можно обозначить через $f(y, x', x'', \dots)$, тогда интеграл (1) примет вид

$$\int \varphi \left[f(y, x', x'', \dots) \right] \frac{df(y, x', x'', \dots)}{dy} \varphi(x') \varphi(x'') \dots dy dx' dx'' \dots,$$

где y следует взять в пределах от $y = 0$ до $y = \eta$, но остальные переменные получают все значения, для которых $f(y, x', x'', \dots)$ соответствует действительному значению. Отсюда следует, что

$$\psi(y) = \int \varphi [f(y, x', x'', \dots)] \frac{df(y, x', x'', \dots)}{dy} \varphi(x') \varphi(x'') \dots dx' dx'' \dots,$$

где интегрирование, при котором y должно рассматриваться как постоянное, распространяется на все значения переменных x', x'' и т. д., которые дают для функции $f(y, x', x'', \dots)$ действительное значение.

13.

Чтобы действительно выполнить это интегрирование, нужно знать функцию φ , которая обычно остается неизвестной, но если бы даже эта функция была известна, то интегрирование ее во многих случаях превышало бы возможности математики. Как бы то ни было мы не сможем

* Современное обозначение многократного интеграла:

$$\iiint \dots \int \varphi(x) \cdot \varphi(x') \varphi(x'') \dots dx dx' dx'' \dots \quad (\text{Прим. ред.}).$$

определить вероятность именно отдельных значений y , но совсем другое дело, если требуется иметь только среднее значение y ; последнее получится интегрированием $\int y \psi(y) dy$ для всех возможных значений y .

И хотя ясно, что для всех значений, которых y не может принять или вследствие характера самой функции, обозначаемой через y (например, для отрицательных значений $y = x^2 + x'^2 + x''^2 +$ и т. д.), или вследствие принятых определенных пределов для ошибок x, x', x'' и т. д., то следует принять $\psi(y) = 0$; равным образом ясно, что такое интегрирование мы можем распространить на все действительные значения y , т. е. в пределах от $y = -\infty$ до $y = +\infty$. Итак, приведенный выше интеграл $\int y \psi(y) dy$ в определенных пределах от $y = \eta$ до $y = \eta'$ равен интегралу

$$\int y \varphi[f(y, x', x'' \dots)] \frac{df(y, x', x'' \dots)}{dy} \varphi(x') \varphi(x'') \dots dy dx' dx'',$$

взятому между пределами от $y = \eta$ до $y = \eta'$ и распространенный на все значения переменных $x', x'' \dots$, которым соответствует действительное значение функции $f(y, x', x'', \dots)$, или, что то же, равен значению интеграла

$$\int y \varphi(x) \varphi(x') \varphi(x'') \dots dx dx' dx'' \dots,$$

если при его интегрировании принять вместо y его значение, как функции от x, x', x'' , распространив интегрирование на все значения переменных, которым соответствует значение y , лежащее между η и η' . Отсюда мы заключаем, что для всех значений y от $y = -\infty$ до $y = +\infty$ интеграл $\int y \psi(y) dy$ может быть представлен в виде

$$\int y \varphi(x) \varphi(x') \varphi(x'') \dots dx dx' dx'' \dots,$$

если он распространен на все действительные значения в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, $x' = -\infty$ до $x' = +\infty$ и т. д.

14.

Если имеется функция от y , состоящая только из суммы членов, имеющих вид

$$A x^\alpha x'^\beta x''^\gamma \dots,$$

то значение интеграла $\int y \psi(y) dy$ или среднее значение y равно сумме членов вида

$$A \times \int x^\alpha \varphi(x) dx \times \int x'^\beta \varphi(x') dx' \times \int x''^\gamma \varphi(x'') dx'' \dots,$$

где интегрирование произведено в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, от $x' = -\infty$ до $x' = +\infty$ и т. д., или, что то же самое, равно сумме членов, которые получатся, если вместо отдельных степенных множителей $x^\alpha, x'^\beta, x''^\gamma \dots$, мы подставим их средние значения. Справедливость этой столь важной теоремы легко можно вывести также на основании других соображений.

15.

Изложенную в предыдущем параграфе теорему мы применим к частному случаю, когда

$$y = \frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots}{\sigma},$$

где σ — число членов в числителе. Сразу мы находим, что среднее значение y равно m^2 , если мы примем для буквы m то же значение, как и выше. Истинное значение y в данном случае может быть больше или меньше среднего значения, точно так, как и истинное значение отдельного члена x^2 может быть больше или меньше m^2 , но вероятность, что случайное значение y не существенно отклоняется от среднего значения m^2 , будет постоянно тем ближе к достоверности, чем больше возрастает число σ . Чтобы показать это яснее, мы найдем ожидаемую среднюю ошибку при допущении $y = m^2$, так как мы не в силах точно определить самую вероятность. Согласно положениям, приведенным в § 6, эта ошибка, очевидно, равна квадратному корню из среднего значения функции

$$\left(\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots}{\sigma} - m^2 \right)^2.$$

Чтобы найти ее, достаточно сделать замечание, что среднее значение члена вида $\frac{x^4}{\sigma^2}$ равно $\frac{n^4}{\sigma^2}$ (где буква n имеет такое же значение, как и в § 11), а среднее значение члена вида $\frac{2x^2 x'^2}{\sigma^2}$ равно $\frac{2m^4}{\sigma^2}$, откуда легко непосредственно получаем, что среднее значение нашей функции

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}.$$

Отсюда мы видим, что если имеется достаточно большое число независимых одна от другой случайных ошибок $x, x', x'' \dots$, то с большой достоверностью можно получить приближенное значение m по формуле

$$m = \sqrt{\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots}{\sigma}}$$

и ожидаемая в этом определении средняя ошибка квадрата m^2

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}.$$

Впрочем, так как эта последняя формула содержит величину n , то в случае, если речь идет только о получении приблизительного представления о степени точности данного наблюдения, следует принять какую-нибудь особую форму для функции φ . Например, для третьего допущения § 9 и 11 было принято, что ошибка равна $m^2 = \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Если это дает мало удовлетворительные результаты, то можно вывести приблизительное значение для n^4 из самих ошибок при помощи формулы

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \dots}{\sigma}.$$

Вообще, мы можем утверждать, что для повышения вдвое точности определения требуется увеличить в четыре раза число ошибок, или что вес определения пропорционален числу σ .

Если ошибки наблюдений заключают в себе постоянную часть, то подобным же образом мы можем выделить эту часть из среднего арифметического этих ошибок, притом тем увереннее, чем больше было число их, т. е. ожидаемая средняя ошибка в этом определении будет

$$\sqrt{\frac{m^2 - k^2}{\sigma}},$$

если k — постоянная часть, а m — средняя ошибка наблюдений, еще не освобожденных от постоянной части, или просто равна $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, если m — средняя ошибка наблюдений, освобожденных от постоянной части (см. § 8).

16.

В § 12—15 мы предполагали, что ошибки x, x', x'', \dots относятся к наблюдениям одного и того же рода, так что вероятность каждого отдельного из них выражается одной и той же функцией. Но, очевидно, общие исследования в § 12—14 можно столь же легко распространить на более общий случай, где вероятности ошибок x, x', x'' будут выражены различными функциями $\varphi(x), \varphi'(x'), \varphi''(x'')$, т. е. где каждая ошибка относится к наблюдениям различной точности. Предположим, что x — ошибка наблюдения, средняя ожидаемая ошибка которого равна m ; точно так же x', x'', \dots — ошибки других наблюдений, ожидаемые средние ошибки которых равны m', m'', \dots . В таком случае среднее значение суммы $x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots$ равно $m^2 + m'^2 + m''^2$. Кроме того, уже известно, что величины m, m', m'' находятся в определенном соотношении одна относительно другой, т. е. пропорционально числам $1, \mu', \mu'' \dots$, в таком случае среднее значение выражения

$$\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots}$$

равно m^2 . Если возьмем для m^2 величину, которую получит это выражение, когда в него подставим случайные ошибки x, x', x'' , то средняя ошибка, соответствующая этому наблюдению, окажется

$$= \frac{\sqrt{n^4 + n'^4 + n''^4 + \dots - m^4 - m'^4 - m''^4 \dots}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots}$$

как и в предыдущем параграфе, где $n', n'' \dots$ по отношению к наблюдениям, ошибки которых x', x'' , должно иметь такое же значение, как n по отношению к первому наблюдению. Если числа n, n', n'' считать пропорциональными m, m', m'', \dots , то ожидаемая средняя ошибка

$$= \frac{\sqrt{n^4 - m^4} \cdot \sqrt{1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \dots}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots}$$

Но этот способ для определения приближенного значения m не является наилучшим. Чтобы сделать это яснее, рассмотрим более общее выражение

$$y = \frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \dots}{1 + \alpha' \mu'^2 + \alpha'' \mu''^2 + \dots},$$

среднее значение которого равно m^2 , как это оказалось возможным сделать соответствующим подбором коэффициентов $\alpha', \alpha'' \dots$. Если принять, что некоторое определенное значение y равно m^2 , полученное по случайным ошибкам x, x', x'' , то на основании приведенных выше принципов ожидаемая средняя ошибка будет

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4) + \alpha'^2 (n'^4 - m'^4) + \alpha''^2 (n''^4 - m''^4) + \dots}}{1 + \alpha' \mu'^2 + \alpha'' \mu''^2 + \dots},$$

чтобы эта ошибка была минимальной, необходимо принять

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \mu'^2,$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \mu''^2 \dots$$

Очевидно, такие значения можно вычислить только тогда, когда известно соотношение между величинами $n, n', n'' \dots$ и $m, m', m'' \dots$. Поскольку точные значения этих соотношений неизвестны, то лучше всего* принять их пропорциональными одно другому (см. § 11), тогда получим значения

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'^2}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''^2} \dots,$$

т. е. коэффициенты $\alpha', \alpha'' \dots$ следует принять равными относительным весам наблюдений, которым соответствуют ошибки $x', x'' \dots$, если вес наблюдения, которому соответствует ошибка x , принять за единицу. Поэтому, если, как и выше, мы обозначим через σ число ошибок, то среднее значение выражения

$$\frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \dots}{\sigma}$$

равно m^2 и ожидаемая средняя ошибка, если мы значение этого выражения, полученное по случайным ошибкам, примем за истинное значение m^2 , получится

$$= \frac{\sqrt{n^4 + \alpha'^2 n'^4 + \alpha''^2 n''^4 + \dots - \sigma m^4}}{\sigma}$$

Следовательно, если только мы примем $n, n', n'' \dots$ пропорциональными $m, m', m'' \dots$, то она станет

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}},$$

эта формула тождественна той, которая была получена для равноточных наблюдений.

17.

Если значение величины, зависящей от другой неизвестной величины, определено из наблюдения, не дающего абсолютно точную величину, то вычисленное значение неизвестной будет сопровождаться ошибкой, хотя при таком способе определения нет ничего произвольного. Но если много величин, зависящих от такой же неизвестной, определено из наблюдений, то можно значение неизвестной вывести или из какого-нибудь одного из этих наблюдений, или из любой комбинации многих наблюдений, что можно выполнить бесконечно различными способами. Хотя полученное таким образом значение неизвестной всегда будет со-

* Мы можем считать, что знания величин $\mu', \mu'' \dots$ надо требовать только в одном случае, когда ошибки $x, x', x'' \dots$, пропорциональные по природе вещей величинам $1, \mu', \mu''$, считаются равно вероятными, или скорее, когда

$$\varphi(x) = \mu' \varphi'(\mu' x) = \mu'' \varphi''(\mu'' x) = \dots$$

(Прим. Гаусса)

держат ошибку, но при одной комбинации мы можем ожидать большей, а при другой — меньшей ошибки. То же самое получится, если наблюдалось большое число величин, которые одновременно зависят от многих неизвестных. Смотря потому, равно ли число наблюдений числу неизвестных, меньше или больше этого числа, задача будет или определенной, или неопределенной, или сверхопределенной. В последнем случае для определения неизвестных наблюдения можно комбинировать бесконечно различными способами. Выбрать из такого разнообразия те, которые лучше подходят к данному обстоятельству, т. е. которые дают значения неизвестных с наименьшими ошибками, эту задачу следует считать самой важной в приложении математики к натуральной философии*.

В «Теории движения небесных тел» мы показали, как должны быть выведены вероятнейшие значения неизвестных, если известен закон вероятности распределения ошибок наблюдений, а так как этот закон по природе своей почти во всех случаях остается гипотетическим, то применим нашу теорию к наиболее правдоподобному началу, согласно которому вероятность ошибок x принята пропорциональной показательной функции $e^{-h^2 x^2}$; на этом предположении основан способ, давно уже применявшийся нами, главным образом в астрономических вычислениях, а теперь применяемый многими вычислителями под названием способа наименьших квадратов.

Несколько позднее знаменитый Лаплас, подойдя к данному вопросу иначе, показал, что как раз этот принцип, каков бы ни был закон вероятности ошибок, должен быть предпочтен по сравнению со всеми другими, если только число наблюдений очень велико. Если же число наблюдений невелико, то вопрос остается нерешенным; если бы даже наш гипотетический закон был отвергнут, то способ наименьших квадратов заслуживает предпочтения перед другими уже потому, что он больше других упрощает вычисления.

Мы надеемся поэтому оказать услугу математикам, приведя здесь новое изложение вопроса и показав, что способ наименьших квадратов дает наилучшую комбинацию наблюдений, притом не приближенную, а точную, каков бы ни был закон вероятности ошибок и каково бы ни было число ошибок, если только понятие средней ошибки принимать не согласно определению Лапласа, а так, как установлено нами в § 5 и 6.

Наконец, здесь нужно с особой силой подчеркнуть, что в последующих исследованиях мы будем говорить только о случайных ошибках, не содержащих постоянную часть, ибо по существу именно они являются предметом настоящего исследования; о всех причинах систематических ошибок мы, по возможности, воздержимся говорить. Какие средства может требовать вычислитель от теории вероятности при обработке наблюдений, которые не вполне свободны от систематических ошибок. Опубликование особого исследования об этих средствах мы откладываем до другого случая.

18.

Задача. Пусть через U обозначена заданная функция неизвестных величин $V, V', V'' \dots$; требуется найти ожидаемую среднюю ошибку M при определении значения U , если для V, V', V'' приняты не их истинные величины, а те, которые получаются из

* Гаусс имеет в виду естественные и технические науки (Прим. ред.).

независимых одно от другого наблюдений, средние ошибки которых соответственно равны $m, m', m'' \dots$

Решение. Если ошибки наблюдаемых величин V, V', V'' обозначить через $e, e', e'' \dots$, то получаемая ими ошибка в U может выразиться линейной функцией

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \dots = E,$$

где $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$ производные $\frac{dU}{dV}, \frac{dU'}{dV'}, \frac{dU''}{dV''} \dots$ взятые по значениям V, V', V'' , если наблюдения достаточно точны, чтобы можно было пренебречь квадратами и произведениями ошибок. Отсюда, во-первых, следует, так как предполагается, что ошибки свободны от постоянной части, что среднее значение E равно нулю. Далее, если средняя ожидаемая ошибка значения U равна квадратному корню из среднего значения E^2 , то M^2 будет равно среднему значению суммы

$$\lambda^2 e^2 + \lambda'^2 e'^2 + \lambda''^2 e''^2 + \dots + 2\lambda\lambda' e e' + 2\lambda\lambda'' e e'' + 2\lambda'\lambda'' e' e'' + \dots$$

Но среднее значение $\lambda^2 e^2$ равно $\lambda^2 m^2$, среднее значение $\lambda'^2 e'^2$ есть $\lambda'^2 m'^2$ и т. д., наконец, средние значения произведений вида $2\lambda\lambda' e e'$ и т. д. равны нулю. Отсюда мы заключаем, что

$$M = \sqrt{\lambda^2 m^2 + \lambda'^2 m'^2 + \lambda''^2 m''^2 + \dots}$$

К этому решению следует добавить некоторые примечания.

I. Если рассматривать ошибки наблюдений как величины первого порядка и пренебрегать величинами высших порядков, то мы можем в нашей формуле взять вместо $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$ те значения производных $\frac{dU}{dV} \dots$, которые получаются по наблюдаемым значениям $V, V', V'' \dots$. Если U — линейная функция, то эта замена вполне точная.

II. Если хотят вместо средних ошибок наблюдений ввести их веса, то последние, выраженные в произвольной единице, равны $p, p', p'' \dots$; пусть P — вес определения значения U , полученного из наблюдаемых величин $V, V', V'' \dots$. Тогда мы будем иметь

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \dots}$$

III. Если T — некоторая другая данная функция величин $V, V', V'' \dots$, и для их истинных значений имеем

$$\frac{dT}{dV} = x, \quad \frac{dT}{dV'} = x', \quad \frac{dT}{dV''} = x'' \dots,$$

то ошибка определения величин T , полученная по наблюдаемым значениям $V, V', V'' \dots$,

$$E' = x e + x' e' + x'' e'' + \dots$$

и ожидаемая средняя ошибка при этом определении

$$= \sqrt{x^2 m^2 + x'^2 m'^2 + x''^2 m''^2 + \dots}$$

Однако ошибки E, E' не будут независимыми одна от другой, а среднее значение произведения $E E'$ в противоположность среднему значению произведения $e e'$, не равно нулю, но

$$= x \lambda m^2 + x' \lambda' m'^2 + x'' \lambda'' m''^2 + \dots$$

IV. Нашу задачу можно распространить также на случай, когда значения величин V , V' , V'' не определены непосредственно из наблюдений, но выведены каким-то способом из комбинаций наблюдений, если только отдельные наблюдения суть независимые одно от другого, т. е. представляют собой различные наблюдения, но если это условие не выполнено, то формула для вычисления M становится неправильной.

Например, если то или другое наблюдение, которое служит для определения значения V , может быть использовано и для определения V' , то ошибки e и e' не будут полностью независимыми одна от другой и среднее значение произведения ee' не будет поэтому равно нулю.

В случае, когда связь величин V и V' с простыми наблюдениями, из которых она выведена, точно известна, тогда определяют среднее значение произведения ee' так, как указано в замечании III, и формула для определения M может считаться полностью исправленной.

19.

Пусть V , V' , V'' — функции неизвестных x, y, z, \dots ; число функций равно π , число неизвестных — ρ ; допустим, что из наблюдений определены непосредственно или посредством значения функций $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ и т. д., но так, что эти определения независимы одно от другого. Если ρ больше π , то, очевидно, что определение неизвестных представит собой неопределенную задачу; если ρ равно π , то можно отдельные x, y, z, \dots или представить или мыслить в форме функций от V, V', V'', \dots , так что на основании наблюденных величин первых можно найти значения последних, откуда, учитывая сказанное в предыдущем параграфе, можно вычислить относительную точность, соответствующую этим отдельным определениям. Наконец, если ρ меньше π , то отдельные x, y, z, \dots могут быть представлены бесконечно различными способами как функции V, V', V'', \dots , и значения для каждой из них могут быть выведены бесконечно различными способами. Эти определения должны быть полностью тождественны, если наблюдения произведены с абсолютной точностью; так как этого не бывает, то разные способы дадут разные результаты; то же самое получается, если определения, полученные из различных комбинаций наблюдений, произведены с неодинаковой точностью.

Впрочем, если во втором или третьем случаях функции V, V', V'', \dots составлены так, что $\pi - \rho + 1$ или даже большее число из них может рассматриваться как функции остальных, то задача, касающаяся этих последних функций, будет всегда определенной, но неопределенной в отношении неизвестных x, y, z, \dots и значения последних можно определять даже не тогда, когда значения функций V, V', V'', \dots даны вполне точно; но этот случай мы исключаем из наших исследований.

Если V, V', V'', \dots сами по себе не являются линейными функциями входящих в них переменных, то им можно придать такую форму, если вместо первоначальных неизвестных подставить разности их приближенных значений, которые с другой стороны надлежит считать известными. В определениях $V = L, V' = L', V'' = L'', \dots$ ожидаемые средние ошибки обозначим через m, m', m'', \dots , веса определений через p, p', p'', \dots , тогда $pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$. Будем считать известным соотношение, которое существует между средними ошибками, тогда станут известны веса, причем из них любой можно принять за единицу.

Наконец, положим

$$(V - L)\sqrt{p} = v, \quad (V' - L')\sqrt{p'} = v', \quad (V'' - L'')\sqrt{p''} = v'' \dots$$

то непременно получим в общем виде

$$\kappa v + \kappa' v' + \kappa'' v'' + \dots = x - A. \quad (5)$$

Это уравнение показывает, что между различными системами коэффициентов $\kappa, \kappa', \kappa''$, очевидно, следует принимать также следующую систему: $\kappa = \alpha, \kappa' = \alpha', \kappa'' = \alpha'' \dots$, а также для любой системы существует некоторое общего вида уравнение.

$$(\kappa - \alpha) v + (\kappa' - \alpha') v' + (\kappa'' - \alpha'') v'' + \dots = A - k;$$

оно содержит в себе уравнения:

$$(\kappa - \alpha) a + (\kappa' - \alpha') a' + (\kappa'' - \alpha'') a'' + \dots = 0,$$

$$(\kappa - \alpha) b + (\kappa' - \alpha') b' + (\kappa'' - \alpha'') b'' + \dots = 0,$$

$$(\kappa - \alpha) c + (\kappa' - \alpha') c' + (\kappa'' - \alpha'') c'' + \dots = 0.$$

Умножим эти уравнения соответственно на $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \dots$ и сложим их, тогда, согласно формулам (4), получим

$$(\kappa - \alpha) \alpha + (\kappa' - \alpha') \alpha' + (\kappa'' - \alpha'') \alpha'' + \dots = 0$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \kappa^2 + \kappa'^2 + \kappa''^2 + \dots &= \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots + \\ &+ (\kappa - \alpha)^2 + (\kappa' - \alpha')^2 + (\kappa'' - \alpha'')^2 + \dots, \end{aligned}$$

откуда следует, что сумма $\kappa^2 + \kappa'^2 + \kappa''^2 + \dots$ будет иметь наименьшее значение, если $\kappa = \alpha, \kappa' = \alpha', \kappa'' = \alpha'' \dots$, что и требовалось доказать.

Впрочем, это минимальное значение можно получить также следующим образом. Уравнение (5) показывает, что

$$\kappa a + \kappa' a' + \kappa'' a'' + \dots = 1,$$

$$\kappa b + \kappa' b' + \kappa'' b'' + \dots = 0,$$

$$\kappa c + \kappa' c' + \kappa'' c'' + \dots = 0.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \dots$ и складывая их, тотчас получаем на основании уравнений (4)

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots = [\alpha\alpha].$$

21.

Так как наблюдения позволяют составить уравнения $v = 0, v' = 0, v'' = 0, \dots$ (что очень близко к действительности), то, чтобы найти на основании их значение неизвестной x , нужно воспользоваться комбинацией уравнений

$$\kappa v + \kappa' v' + \kappa'' v'' + \dots = 0,$$

в которой коэффициент у x равен единице, а остальные неизвестные y, z, \dots были бы исключены; этому уравнению, согласно § 18, следует приписать вес

$$= \frac{1}{\kappa^2 + \kappa'^2 + \kappa''^2 \dots}$$

На основании предыдущего параграфа следует, что наиболее целесообразным решением будет, если принять $\kappa = \alpha, \kappa' = \alpha', \kappa'' = \alpha'' \dots$. В таком случае x получит значение A . Очевидно, такой же результат можно получить непосредственно путем исключения из уравнений $\xi = 0,$

$\eta=0, \zeta=0 \dots$ (если неизвестны множители $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$). Вес, который следует приписать такому определению, равен $\frac{1}{[\alpha\alpha]_i}$, или ожидаемая средняя ошибка

$$= m \sqrt{p[\alpha\alpha]} = m' \sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m'' \sqrt{p''[\alpha\alpha]} \dots$$

Подобным же образом наиболее удобным способом можно определить и остальные неизвестные y, z, \dots , для которых получают соответствующие значения путем исключения из тех же уравнений $\xi=0, \eta=0, \zeta=0, \dots$.

Обозначим общую сумму $v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots$, или, что то же,

$$p(V-L)^2 + p'(V'-L')^2 + p''(V''-L'')^2 + \dots$$

через Ω , тогда, очевидно, $2\xi, 2\eta, 2\zeta, \dots$ будут частными производными функции Ω , т. е.

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy}, \quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \dots$$

Поэтому значения неизвестных, полученные из наилучшей комбинации наблюдений, мы можем с полным правом назвать вероятнейшими и значениями; они будут тождественны с теми значениями, для которых функция Ω принимает наименьшее значение. В таком случае $(V-L)$ выражает, вообще говоря, разность между вычисленным и наблюдаемым значением. Таким образом, вероятнейшими значениями неизвестных будут такие, которые превращают в минимум сумму квадратов разностей между наблюдаемыми и вычисленными значениями V, V', V'', \dots , умноженных на веса наблюдений. Этот принцип давно был установлен нами совершенно иным путем в «Theoria Motus Corporum Coelestium». Если, кроме того, требуется привести относительную точность отдельных определений, то надо вывести x, y, z, \dots при помощи неопределенного исключения их из уравнений (3) в форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \dots \\ y &= B + [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \dots \\ z &= C + [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда получаются вероятнейшие значения неизвестных, т. е. A, B, C , а также соответствующие этим определениям веса $\frac{1}{[\alpha\alpha]}, \frac{1}{[\beta\beta]}, \frac{1}{[\gamma\gamma]}, \dots$, или ожидаемые средние ошибки

$$\text{для } x \dots m \sqrt{p[\alpha\alpha]} = m' \sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m'' \sqrt{p''[\alpha\alpha]} = \dots,$$

$$\text{для } y \dots m \sqrt{p[\beta\beta]} = m' \sqrt{p'[\beta\beta]} = m'' \sqrt{p''[\beta\beta]} = \dots,$$

$$\text{для } z \dots m \sqrt{p[\gamma\gamma]} = m' \sqrt{p'[\gamma\gamma]} = m'' \sqrt{p''[\gamma\gamma]} = \dots,$$

этот результат совпадает с теми, которые были получены нами в «Theoria Motus Corporum Coelestium».

22.

Еще нужно сказать несколько слов о самом простом случае, но встречающемся чаще других, а именно: когда имеется только одна неизвестная, т. е. $V=x, V'=x, V''=x, \dots$. Конечно, мы будем иметь

$$a = \sqrt{p}, \quad a' = \sqrt{p'}, \quad a'' = \sqrt{p''}, \dots$$

$$l = -L\sqrt{p}, \quad l' = -L'\sqrt{p'}, \quad l'' = -L''\sqrt{p''}, \dots$$

и, следовательно,

$$\xi = (p + p' + p'' + \dots)x - (pL + p'L' + p''L'' + \dots),$$

отсюда получаем

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \dots},$$
$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots}.$$

Таким образом, если из многих неравноточных наблюдений, веса которых соответственно равны p, p', p'', \dots , получено значение одной и той же величины, а именно: из первого наблюдения она равна L , из второго L' , из третьего L'' и т. д., то вероятнейшее значение ее

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots},$$

а вес этого определения $p + p' + p'' + \dots$. Если все наблюдения одинаковой точности, то вероятнейшее значение

$$= \frac{L + L' + L'' + \dots}{\pi},$$

т. е. равно среднему арифметическому из наблюдаемых значений, а вес этого определения равен π , если вес одного наблюдения принять за единицу.

Т е о р и я
комбинации наблюдений, подверженных
наименьшим ошибкам

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Представлена Научному обществу в Гёттингене

2 февраля 1823 г.

Последние сочинения Гёттингенского королевского научного общества, т. V.
 Гёттинген, 1823

23.

Остается еще много вопросов, которые должны разъяснить и подробно развить приведенную в первой статье теорию.

Прежде всего надо исследовать, всегда ли приложим, не считаясь с трудностями, процесс исключения, при помощи которого мы выражали неизвестные x, y, z, \dots через ξ, η, ζ, \dots . Так как число первых равно числу последних, то, как известно из теории линейных уравнений, такое исключение становится, несомненно, возможным, если ξ, η, ζ, \dots не зависят одно от другого, в противном случае — оно невозможно. Допустим на мгновение, что ξ, η, ζ, \dots не являются независимыми одно от другого, но между ними существует такое тождественное уравнение

$$0 = F\xi + G\eta + H\zeta + \dots + K.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} F\Sigma a^2 + G\Sigma ab + H\Sigma ac + \dots &= 0, \\ F\Sigma ab + G\Sigma b^2 + H\Sigma bc + \dots &= 0, \\ F\Sigma ac + G\Sigma bc + H\Sigma c^2 + \dots &= 0 \end{aligned}$$

и затем

$$F\Sigma al + G\Sigma bl + H\Sigma cl + \dots = -K.$$

Обозначив затем

$$\left. \begin{aligned} aF + bG + cH + \dots &= \Theta \\ a'F + b'G + c'H + \dots &= \Theta' \\ a''F + b''G + c''H + \dots &= \Theta'' \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

получаем

$$\begin{aligned} a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \dots &= 0, \\ b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \dots &= 0, \\ c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \dots &= 0, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$l\Theta + l'\Theta' + l''\Theta'' + \dots = -K.$$

Умножив затем уравнения (1) соответственно на $\Theta, \Theta', \Theta'' \dots$ и сложив их, получим

$$0 = \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \dots$$

Такое уравнение, очевидно, существовать не может, если только одновременно не имеют места равенства $\Theta = 0, \Theta' = 0, \Theta'' = 0$. Отсюда, во-первых, мы выводим заключение, что K обязательно должно равняться нулю. Затем уравнения (1) показывают, что функции v, v', v'', \dots составлены так, что значения их не меняются, если значения величин x, y, z увеличить или уменьшить соответственно пропорционально величинам F, G, H, \dots . Очевидно, то же самое правило справедливо для функций $V, V', V'' \dots$. Это предположение не имеет места только в том случае, когда становится невозможным определить значения неизвестных x, y, z, \dots из точных значений величин $V, V', V'' \dots$, т. е. если задача по самой природе своей является неопределенной, но этот случай мы не будем принимать во внимание при наших исследованиях.

24.

Обозначим через β, β', β'' множители, которые по отношению к y будут играть точно такую же роль, как и $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ по отношению к x , тогда получим

$$\begin{aligned} a[\beta\alpha] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \dots &= \beta, \\ a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \dots &= \beta', \\ a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \dots &= \beta'', \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

так что в общем виде имеем

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \dots = y - B.$$

Точно так же $\gamma, \gamma', \gamma'' \dots$ пусть будут аналогичные множители по отношению к неизвестной z , тогда

$$\begin{aligned} a[\gamma\alpha] + b[\gamma\beta] + c[\gamma\gamma] + \dots &= \gamma, \\ a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \dots &= \gamma', \\ a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \dots &= \gamma''. \end{aligned}$$

Так что вообще получится

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \dots = z - C \text{ и т. д.}$$

Равным образом, как мы нашли уже в § 20, следует, что $\Sigma\alpha\alpha = 1, \Sigma\alpha b = 0, \Sigma\alpha c = 0, \dots$ и, кроме того, $\Sigma\alpha l = -A$, точно так же получаем

$$\begin{aligned} \Sigma\beta\alpha = 0, \quad \Sigma\beta b = 1, \quad \Sigma\beta c = 0 \dots \quad \text{и} \quad \Sigma\beta l = -B, \\ \Sigma\gamma\alpha = 0, \quad \Sigma\gamma b = 0, \quad \Sigma\gamma c = 1 \dots \quad \text{и} \quad \Sigma\gamma l = -C. \end{aligned}$$

Как и в § 20, получилось $\Sigma\alpha^2 = [\alpha\alpha]$, совершенно также мы имеем

$$\Sigma\beta^2 = [\beta\beta], \quad \Sigma\gamma^2 = [\gamma\gamma] \dots$$

Если затем мы умножим значения $\alpha, \alpha', \alpha''$ [см. § 20, формулы (4)] соответственно на $\beta, \beta', \beta'' \dots$ и сложим их, то получим

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \dots = [\alpha\beta] \text{ или } \Sigma\alpha\beta = [\alpha\beta],$$

а если умножим значения $\beta, \beta', \beta'', \dots$ соответственно на $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ и сложим их, то получим

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \dots = [\beta\alpha], \text{ следовательно, } [\alpha\beta] = [\beta\alpha].$$

Аналогичным образом мы найдем далее, что

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma, \quad [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma\beta\gamma \text{ и т. д.}$$

25.

Обозначим через $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ те значения функций v, v', v'' , которые получатся, если вместо x, y, z мы подставим их наиболее вероятные значения A, B, C , следовательно,

$$\begin{aligned} aA + bB + cC + \dots + l &= \lambda, \\ a'A + b'B + c'C + \dots + l' &= \lambda', \\ a''A + b''B + c''C + \dots + l'' &= \lambda''. \end{aligned}$$

Примем, кроме того, что

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots = M,$$

так как M представляет собой значение функции Ω , соответствующее наиболее вероятным значениям переменных, притом, как мы уже доказали в § 20, является наименьшим значением этой функции. Поэтому $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \dots$ будет значением ξ и вместе с тем будет равно нулю, т. е. мы будем иметь

$$\Sigma a\lambda = 0;$$

точно так же получается

$$\Sigma b\lambda = 0, \quad \Sigma c\lambda = 0 \dots$$

кроме того,

$$\Sigma a\lambda = 0, \quad \Sigma \beta\lambda = 0, \quad \Sigma \gamma\lambda = 0, \dots$$

Умножая, наконец, выражения $\lambda, \lambda', \lambda''$ на $\lambda, \lambda', \lambda''$ и складывая их, мы получаем

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \dots = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots$$

или

$$\Sigma l\lambda = M.$$

26.

Подставим вместо x, y, z, \dots в уравнение $v = ax + by + cz + l \dots$ выражения (7) из § 21, тогда после соответственных упрощений, произведенных на основании указаний, сделанных в предыдущем параграфе, получим

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \dots + \lambda;$$

точно так же мы получим

$$\begin{aligned} v' &= \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \dots + \lambda', \\ v'' &= \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \dots + \lambda'' \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Умножая эти уравнения или уравнения (1) в § 20 на $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$ и складывая их, мы видим, что вообще

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \dots = M.$$

Функцию Ω можно вообще представить во многих формах, на вывод которых стоит затратить немного труда. И, действительно, возведя сперва в квадрат и складывая почленно уравнения (1) из § 20, мы непосредственно получаем

$$\Omega = x^2 \Sigma a^2 + y^2 \Sigma b^2 + z^2 \Sigma c^2 + \dots + 2xy \Sigma ab + 2xz \Sigma ac + \\ + 2yz \Sigma bc + \dots + 2x \Sigma al + 2y \Sigma bl + 2z \Sigma cl + \dots + \Sigma l^2$$

это *первая* форма.

Умножая те же уравнения на $v, v', v'' \dots$ и складывая их, получаем

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \dots + lv + l'v' + l''v'' + \dots,$$

отсюда, подставляя вместо $v, v', v'' \dots$ выражения, приведенные в предыдущем параграфе, получаем

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \dots - A\xi - B\eta - C\zeta - \dots + M,$$

или

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \dots + M;$$

это *вторая* форма.

Подставив во второй форме вместо $(x - A), (y - B), (z - C)$ их выражения (7) из § 21, получаем *третью* форму

$$\Omega = [\alpha\alpha] \xi^2 + [\beta\beta] \eta^2 + [\gamma\gamma] \zeta^2 + \dots + 2[\alpha\beta] \xi\eta + \\ + 2[\alpha\gamma] \xi\zeta + 2[\beta\gamma] \eta\zeta + \dots + M.$$

Форму *четвертую* можно вывести из третьей и формул предыдущего параграфа путем преобразований, которые производятся на основании третьей формы и формул предыдущего параграфа, как это ясно само собой

$$\Omega = (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \dots + M$$

или

$$\Omega = M + \Sigma (v - \lambda)^2;$$

четвертая форма непосредственно и наглядно приводит к условию минимума.

28.

Пусть $e, e', e'' \dots$ — ошибки, которые получаются при наблюдениях, если допустить, что $V = L, V' = L', V'' = L'', \dots$, т. е. истинные значения функций V, V', V'' соответственно равны $L - e, L' - e', L'' - e'' \dots$ и, следовательно, истинные значения $v, v', v'' \dots$ соответственно равны

$$-e \sqrt{p}, \quad -e' \sqrt{p'}, \quad -e'' \sqrt{p''} \dots$$

Отсюда истинное значение x

$$= A - \alpha e \sqrt{p} - \alpha' e' \sqrt{p'} - \alpha'' e'' \sqrt{p''} - \dots$$

или при наиболее целесообразном определении значения x полученная ошибка, которую обозначаем через $E(x)$,

$$= \alpha e \sqrt{p} + \alpha' e' \sqrt{p'} + \alpha'' e'' \sqrt{p''} + \dots$$

Равным образом ошибка, полученная при наиболее целесообразном определении значения y , которую мы будем обозначать через $E(y)$

$$= \beta e \sqrt{p} + \beta' e' \sqrt{p'} + \beta'' e'' \sqrt{p''} + \dots$$

Среднее значение квадрата $[E(x)]^2$ получается

$$= m^2 p (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots) = m^2 p [\alpha\alpha];$$

среднее значение квадрата $[E(y)]^2$, как мы показали это выше, равно $m^2 p [\beta\beta]$ Теперь мы можем дать также среднее значение произведения $E(x) E(y)$, а именно, оно будет

$$= m^2 p (\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \dots) = m^2 p [\alpha\beta].$$

Это положение можно вкратце выразить так: средние значения квадратов $[E(x)]^2$, $[E(y)]^2$, . . . равны произведениям $\frac{1}{2} m^2 p$ на частные производные второго порядка

$$\frac{d^2 \Omega}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2 \Omega}{d\eta^2}, \quad \dots$$

а среднее значение произведений такого рода, как $E(x) E(y)$, равно произведению $\frac{1}{2} m^2 p$ на частную производную $\frac{d^2 \Omega}{d\xi d\eta}$, если рассматривать Ω как функцию от переменных ξ, η, ζ . . .

29.

Обозначим через t заданную линейную функцию от x, y, z, \dots , следовательно, пусть

$$t = fx + gy + hz + \dots k.$$

Значение t , полученное из вероятнейших значений x, y, z, \dots , будет тогда равно $fA + gB + hC + \dots + k$, которое мы обозначим через K . Приняв его за истинное значение t , мы получим ошибку

$$= fE(x) + gE(y) + hE(z) + \dots,$$

которую мы можем обозначить $E(t)$. Среднее значение этой ошибки, очевидно, равно нулю, т. е. ошибка не будет содержать в себе постоянной части. Но среднее значение квадрата $[E(t)]^2$, т. е. среднее значение суммы

$$\begin{aligned} f^2 [E(x)]^2 + 2fgE(x)E(y) + 2fhE(x)E(z) + \dots + \\ + g^2 [E(y)]^2 + 2ghE(y)E(z) + \dots + \\ + h^2 [E(z)]^2 + \dots + \\ + \dots \end{aligned}$$

равно, согласно тому, что говорилось в предыдущем параграфе, произведению $m^2 p$ на сумму

$$\begin{aligned} f^2 [\alpha\alpha] + 2fg [\alpha\beta] + 2fh [\alpha\gamma] + \dots + \\ + g^2 [\beta\beta] + 2gh [\beta\gamma] + \dots + \\ + h^2 [\gamma\gamma] + \dots + \\ + \dots \end{aligned}$$

или равно произведению $m^2 p$ на значение функции $\Omega - M$, которое получается путем подстановок

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h, \dots$$

Обозначим полученное нами таким путем значение функции $\Omega - M$ через ω , тогда ожидаемая средняя ошибка будет равна $m \sqrt{p\omega}$, если мы принимаем $t = K$ и вес определения будет равен $\frac{1}{\omega}$.

Так как вообще

$$\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \dots,$$

то ω должна быть равна определенному нами выражению

$$(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h + \dots,$$

т. е. определенному нами значению $t - K$, которое получается, если мы дадим переменным x, y, z такие значения, которые соответствуют значениям ξ, η, ζ , равным в свою очередь f, g, h, \dots .

Наконец, отметим еще, что если t выражено вообще в форме функции от ξ, η, ζ, \dots , то ее постоянная часть необходимо должна быть равна K . Следовательно, если вообще

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \dots + K,$$

получим

$$\omega = fF + gG + hH + \dots$$

30.

Функция Ω достигает, как мы видели выше, своего *абсолютного* наименьшего значения M , когда $x = A, y = B, z = C, \dots$ или, что то же, когда $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0, \dots$. Но если какой-либо из этих величин придать *другое* значение, например, принять, что $x = A + \Delta$, то Ω путем изменений остальных величин может достигнуть относительного наименьшего значения, которое, очевидно, получится при помощи уравнений

$$x = A + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0, \dots$$

Поэтому должны существовать уравнения $\eta = 0, \zeta = 0, \dots$, а так как

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \dots, \text{ то } \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}.$$

Подобным же образом мы получим

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \quad z = C + \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \dots$$

Относительное наименьшее значение Ω

$$= [\alpha\alpha]\xi^2 + M = M + \frac{\Delta^2}{[\alpha\alpha]}.$$

Кроме того, мы заключаем отсюда, что когда Ω не должно переходить заранее установленного предела ($M + \mu^2$), тогда значение x необходимо должно находиться в пределах $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ и $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$. Следует заметить, что $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ равно ожидаемой средней ошибке вероятнейшего значения x , если положить $\mu = m\sqrt{p}$, т. е. если μ равно средней ошибке таких наблюдений, вес которых равен единице.

В более общем случае будем отыскивать наименьшее значение Ω , которое может получиться для заданного значения t , если, как и в предыдущем параграфе, мы будем обозначать через t линейную функцию $fx + gy + hz + \dots + k$, вероятнейшее значение которой равно K ; пусть

оно будет равно $K + \kappa$ для заданного значения t . Из теории максимума и минимума нам известно, что решение нашей задачи получится при помощи уравнений

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Theta \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \Theta \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Theta \frac{dt}{dz}$$

...

и уравнений $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$, ..., если обозначить через Θ неопределенный сперва множитель. Следовательно, если, как и в предыдущем параграфе, мы примем в общем виде

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \dots + K,$$

то мы получим

$$K + \kappa = \Theta (fF + gG + hH + \dots) + K \text{ или } \Theta = \frac{\kappa}{\omega},$$

где ω взято в таком же значении, как и в предыдущем параграфе. Но так как $\Omega - M$, вообще, представляет собой однородную функцию второго порядка переменных ξ, η, ζ, \dots , то мы тут же приходим к заключению, что значение ее для $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h, \dots, \Theta^2 \omega$, а следовательно, наименьшее значение, которого Ω может достигнуть для $t = K + \kappa$, равно $M + \Theta^2 \omega = M + \frac{\kappa^2}{\omega}$. С другой стороны, если Ω не должно превосходить какого-нибудь наперед заданного значения $M + \mu^2$, то t обязательно будет находиться в пределах $K - \mu \sqrt{\omega}$ и $K + \mu \sqrt{\omega}$, где $\mu \sqrt{\omega}$ равно ожидаемой средней ошибке при вероятнейшем определении t , если считать μ средней ошибкой наблюдений, вес которых равен единице.

31.

Когда число величин x, y, z довольно велико, то численное определение значений A, B, C, \dots из уравнений $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0, \dots$ путем исключений становится обременительным. Поэтому в «Теории движения небесных тел» § 182 мы указали особый способ вычислений (алгоритм) и подробнее развили его в статье «Исследование об эллиптических элементах Паллады» (*Disquisitione elementis ellipticis Palladis. Comm. recent. Soc. Gotting., Vol. I.*)* с помощью которого эта работа упрощается, насколько позволяют данные условия. Действительно функция Ω может быть выражена в такой форме

$$\frac{u^{\circ 2}}{\mathfrak{A}^{\circ}} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \dots + M,$$

где делители $\mathfrak{A}^{\circ} \mathfrak{B}' \mathfrak{C}'' \mathfrak{D}'''$, ... представляют собой уже известные величины, а $u^{\circ}, u', u'', u''', \dots$ — линейные функции от x, y, z , из которых, впрочем, вторая функция u' не содержит x , третья u'' — x и y , четвертая u''' — x, y, z и т. д.; причем функция $u^{(\pi-1)}$ содержит только последнюю из неизвестных x, y, z, \dots . Наконец, коэффициенты, на которые соответ-

* Указанную работу см. в этом томе.

ственно умножены x, y, z, \dots при составлении $u^\circ, u', u'', u''', \dots$, равны $\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'' \dots$. Чтобы, по возможности, удобнее вычислить в обратном порядке значения неизвестных x, y, z, \dots , положим $u^\circ = 0, u' = 0, u'' = 0, u''' = 0, \dots$. Нам кажется, что нет необходимости повторять еще раз способ вычислений, с помощью которого производилось преобразование функции Ω .

Но исключение неизвестных, с помощью которого находят веса этих определений, требует гораздо больше времени. Правда, вес последней неизвестной (одна только и входит в последнее уравнение $u^{(n-1)}$), как мы показали в «Теории движения небесных тел», легко будет найден, так как он равен последнему члену в ряде делителей $\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'' \dots$, поэтому некоторые вычислители, чтобы избежать тягостного труда при исключении, за отсутствием других средств, повторяли упомянутый выше способ вычислений, изменяя лишь расположение величин x, y, z, \dots в уравнениях до тех пор, пока они последовательно становились последними. Мы надеемся заслужить благодарность математиков, изложив здесь особо новый способ вычисления весов определений на основании более глубокого анализа доказательств, почерпнутых из метода, который, по-видимому, является наиболее полным.

32.

Итак, предположим, что

$$\left. \begin{aligned} u^\circ &= \mathfrak{A}^\circ x + \mathfrak{B}^\circ y + \mathfrak{C}^\circ z + \dots + \mathfrak{L}^\circ \\ u' &= \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \dots + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \mathfrak{C}'' z + \dots + \mathfrak{L}'' \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Отсюда, вообще, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \dots = \\ &= \frac{u^\circ du^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{u' du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' du''}{\mathfrak{C}''} + \dots = \\ &= u^\circ (dx + \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} dy + \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} dz + \dots) + \\ &+ u' (dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \dots) + u'' (dz + \dots) + \dots; \end{aligned}$$

откуда заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u^\circ \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} u^\circ + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} u^\circ + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Допустим, что отсюда получаются формулы

$$\left. \begin{aligned} u^\circ &= \xi \\ u' &= A'\xi + \eta \\ u'' &= A''\xi + B''\eta + \zeta \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

$$\frac{\mathfrak{C}^{\circ}}{\mathfrak{A}^{\circ}} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^{\circ}}{\mathfrak{A}^{\circ}} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} A'' + A''' = 0,$$

откуда можно найти A', A'', A''', \dots

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

.....

отсюда находят B'', B''', \dots

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

последнее доставляет $C'''' \dots$ и т. д.

Другой способ вычислений дает формула

$$\mathfrak{A}^{\circ} A' + \mathfrak{B}^{\circ} = 0,$$

откуда получается A'

$$\mathfrak{A}^{\circ} A'' + \mathfrak{B}^{\circ} B'' + \mathfrak{C}^{\circ} = 0,$$

$$\mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' = 0;$$

отсюда получают B'' и A''

$$\mathfrak{A}^{\circ} A''' + \mathfrak{B}^{\circ} B''' + \mathfrak{C}^{\circ} C''' + \mathfrak{D}^{\circ} = 0,$$

$$\mathfrak{B}' B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' = 0,$$

$$\mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' = 0,$$

откуда получают $C''', B''', A''' \dots$ и т. д.

Оба способа вычислений в общем одинаково удобны, если требуется найти веса наблюдений x, y, z , но если ищут ту или другую из величин $[\alpha\alpha], [\beta\beta], [\gamma\gamma], \dots$, то, очевидно, следует предпочесть первый способ.

Впрочем, комбинирование уравнений (1) и (4) приводит к тем же формулам и, кроме того, дает нам второй способ вычисления вероятнейших значений A, B, C, \dots , а именно, во-первых

$$A = -\frac{\mathfrak{L}^{\circ}}{\mathfrak{A}^{\circ}} - A' \frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - A'' \frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - A''' \frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{A}'''} - \dots$$

$$B = -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - B'' \frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - B''' \frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \dots$$

$$C = -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - C''' \frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \dots$$

Второй способ вычисления тождествен с обычным, если принять

$$u^{\circ} = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \quad \dots$$

34.

Результаты рассуждений, приведенных в § 32, являются, впрочем, частным случаем более общей теоремы, которая гласит:

Теорема. Обозначим через t следующую линейную функцию переменных x, y, z, \dots и т. д.

$$t = fx + gy + hz + \dots + k,$$

которая может быть представлена, как функция переменных u°, u', u'' в форме

$$t = k^{\circ}u^{\circ} + k'u' + k''u'' + \dots + K.$$

В таком случае K будет вероятнейшим значением t и вес его будет

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^{\circ} k^{\circ 2} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \dots}.$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна, потому что вероятнейшее значение t должно соответствовать значениям $u^{\circ} = 0, u' = 0, u'' = 0, \dots$. Для доказательства второй части заметим, что так как

$$\frac{1}{2} d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz \dots \text{ и } dt = f dx + g dy + h dz \dots,$$

то для $\xi = f, \eta = g, \zeta = h, \dots$, независимо от значений дифференциалов dx, dy, dz, \dots , получится

$$d\Omega = 2dt.$$

Отсюда следует, что для тех же значений $\xi = f, \eta = g; \zeta = h \dots$ получим

$$\frac{v^{\circ}}{\mathfrak{A}^{\circ}} du^{\circ} + \frac{u'}{\mathfrak{B}'} du' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''} du'' + \dots = k^{\circ} du^{\circ} + k' du' + k'' du'' + \dots$$

Тогда легко видеть, что если dx, dy, dz, \dots независимы друг от друга, то и du°, du', du'' независимы, отсюда приходим к заключению, что для $\xi = f, \eta = g, \zeta = h, \dots$ имеем

$$u^{\circ} = \mathfrak{A}^{\circ} k^{\circ}, \quad u' = \mathfrak{B}' k', \quad u'' = \mathfrak{C}'' k'', \dots$$

Следовательно, значение Ω , соответствующее тем же значениям переменных

$$= \mathfrak{A}^{\circ} k^{\circ 2} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \dots + M,$$

откуда, согласно § 29, тотчас же можно убедиться в справедливости нашей теоремы.

Впрочем, если мы хотим произвести преобразование нашей функции t непосредственно, т. е. не зная подстановок (4) из § 32, то можно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^{\circ} k^{\circ}, \\ g &= \mathfrak{B}^{\circ} k^{\circ} + \mathfrak{B}' k', \\ h &= \mathfrak{C}^{\circ} k^{\circ} + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k'', \\ &\dots \end{aligned}$$

из которых можно определить коэффициенты $k^{\circ}, k', k'', \dots$; и, наконец, получить

$$K = k - \mathfrak{Q}^{\circ} k^{\circ} - \mathfrak{Q}' k' - \mathfrak{Q}'' k'' \dots$$

Особого рассмотрения заслуживает следующая задача как вследствие своего значения для практики, так и вследствие изящества способа решения.

Найти изменения вероятнейших значений неизвестных, которые произошли от добавления нового уравнения, а также веса этих новых определений.

Мы будем придерживаться принятых выше обозначений, так что приведенными к весу 1 первоначальными уравнениями являются $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0 \dots$, а их общая сумма $v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots = \Omega$; далее, пусть ξ, η, ζ, \dots будут частными производными

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz}, \dots$$

и, наконец, при помощи исключения неизвестных имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \dots \\ y &= B + [\alpha\beta]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \dots \\ z &= C + [\alpha\gamma]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Допустим, что получено новое уравнение (очень близкое к действительности, отнесенное к весу единица) $v^* = 0$; исследуем теперь, как велики получаемые при этом изменения вероятнейших значений неизвестных A, B, C , а также коэффициентов $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], \dots$. Положим, что

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^*, \dots;$$

примем, что после исключения неизвестных получается

$$x = A^* + [\alpha\alpha^*]\xi^* + [\alpha\beta^*]\eta^* + [\alpha\gamma^*]\zeta^* + \dots$$

Пусть, наконец,

$$v^* = fx + gy + hz + \dots k,$$

тогда после подстановки сюда значений x, y, z, \dots из выражений (1) получится

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \dots + K,$$

затем положим, что

$$Ff + Gg + Hh + \dots = \omega.$$

Очевидно, K будет вероятнейшим значением функции v^* , как оно получается из первоначальных уравнений, не считая значения 0, которое дает произведенное новое наблюдение, а $\frac{1}{\omega}$ равно весу этого определения.

Следовательно, мы имеем

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^*, \dots$$

и поэтому

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \dots)$$

или

$$v^* = \frac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots + K}{1 + \omega}.$$

Равным образом

$$\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \dots \\ &\quad - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \dots) = \\ &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \dots - Fv^* = \\ &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \dots - \\ &\quad - \frac{F}{1+\omega}(F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots + K). \end{aligned}$$

Отсюда мы приходим к заключению, что

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

должно быть вероятнейшим значением x , полученным из *всех* наблюдений, тогда

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega},$$

в таком случае вес этого определения

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega}}.$$

Совершенно таким же способом находят вероятнейшее значение y , полученное из *всех* наблюдений

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega},$$

вес которого

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \frac{G^2}{1+\omega}}$$

и т. д. Что и требовалось доказать.

Таким образом, поставленная задача решена.

К этому решению можно добавить несколько замечаний.

I. После подстановки новых значений A^* , B^* , C^* , ... функция v^* принимает вероятнейшее значение

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \dots) = \frac{K}{1+\omega},$$

а так как вообще

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \dots + \frac{K}{1+\omega},$$

то, согласно положениям, высказанным в § 29, вес этого определения

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \dots} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

То же самое получится, если применить правило, приведенное в конце § 21; совокупность первоначальных уравнений дает определение

$v^* = K$, вес которого равен $\frac{1}{\omega}$, в то время как новое наблюдение дает другое, независимое от него определение $v^* = 0$, вес которого равен единице; комбинируя оба определения, получаем $v^* = \frac{K}{1+\omega}$, вес которого равен $\frac{1}{\omega} + 1$.

II. Так как для $x = A^*$, $y = B^*$, $z = C^*$, ... должно быть $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$, ..., то для тех же самых значений получаем

$$\xi = -\frac{fK}{1+\omega}, \quad \eta = -\frac{gK}{1+\omega}, \quad \zeta = -\frac{hK}{1+\omega}, \dots$$

а затем, поскольку вообще

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \dots M,$$

то

$$\Omega = \frac{K^2}{(1+\omega)^2} (Ff + Gg + Hh + \dots) + M = M + \frac{\omega K^2}{(1+\omega)^2}$$

и, наконец, так как вообще $\Omega^* = \Omega + v^{*2} \dots$, то

$$\Omega^* = M + \frac{\omega K^2}{(1+\omega)^2} + \frac{K^2}{(1+\omega)^2} = M + \frac{K^2}{1+\omega}.$$

III. Сравним эти результаты с выведенными в § 30, тогда заметим, что наименьшее значение функции Ω остается таким же, каким она могла бы стать при уже определенном нами значении функции $v^* = \frac{K}{1+\omega}$.

36.

Для следующей задачи, весьма схожей с предыдущей, мы приведем здесь только решение ее, доказательство же, которое легко проделать по аналогии с изложенным в предыдущем параграфе, для краткости мы здесь опустим.

Исследовать изменения вероятнейших значений неизвестных, происходящие вследствие изменения веса одного из первоначальных наблюдений, а также веса новых определений.

Допустим, что по окончании вычислений было замечено, что для одного из наблюдений принят несколько меньший или больший вес; например, для первого, которое давало $V = L$, вместо принятого при вычислениях веса p правильнее было бы приписать ему вес p^* . Тогда нет надобности повторять все вычисление, но гораздо удобнее вычислить поправки по указанным ниже формулам.

Исправленные вероятнейшие значения неизвестных будут тогда

$$\begin{aligned} x &= A - \frac{(p^* - p) \alpha \lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)}, \\ y &= B - \frac{(p^* - p) \beta \lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)}, \\ z &= C - \frac{(p^* - p) \gamma \lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

а веса этих наблюдений будут найдены, если единицу соответственно разделить на

$$[\alpha\alpha] = \frac{(p^* - p)\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)},$$

$$[\beta\beta] = \frac{(p^* - p)\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)},$$

$$[\gamma\gamma] = \frac{(p^* - p)\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)}.$$

.

Это решение охватывает также случай, когда по окончании вычислений обнаружено, что одно из наблюдений должно быть совершенно отброшено, так как в этом случае пришлось бы принять, что $p^* = 0$; точно так же значение $p^* = \infty$ соответствует случаю, когда уравнение $V = L$, принимаемое при вычислениях как приближенное, на самом деле абсолютно точно.

Впрочем, если к уравнениям, принимаемым при вычислении за основу, добавить *несколько* новых, или если заметят, что *нескольким* из них приписаны ошибочные веса, то вычисление поправок будет слишком сложным, поэтому в таких случаях следует произвести вычисление заново.

37.

В § 15 и 16 мы дали способ, как вычислить приближенную точность наблюдений*. Этот способ предполагает, что действительно случившиеся ошибки достаточно многочисленны и точно известны; это условие, строго говоря, случается очень редко и лучше, скажем, никогда не случается. Но если, по крайней мере, величины, приближенные значения которых получены из наблюдений, зависят, согласно известному нам закону, от одной или нескольких неизвестных нам величин, то вероятнейшие значения последних определяются по способу наименьших квадратов; о вычисленных таким образом значениях этих величин, над которыми производились наблюдения, можно предполагать, что так как они очень мало отличаются от истинных величин, то разности между ними и наблюдаемыми величинами можно с тем большим правом считать истинными ошибками наблюдений, чем большее число их имеется. Этим способом пользуются все вычислители, которые в подобных случаях оценивают наблюдения «а posteriori» (после того как они были произведены). Очевидно, что с теоретической точки зрения этот способ не безупречен, и хотя во многих случаях практики он достаточен, все-таки в некоторых случаях грешит свыше меры. Поэтому данный вопрос достоин более глубокого анализа.

В этом исследовании мы будем придерживаться обозначений, которыми пользовались, начиная с § 19. В упомянутом способе величины A, B, C, \dots считались истинными значениями переменных x, y, z, \dots , поэтому $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ можно считать истинными значениями функций v, v', v'', \dots . Если все наблюдения имеют одинаковую точность и веса их $p = p' = p'' = \dots$ приняты за единицу, то величины $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$

* Исследование, касающееся того же вопроса, которое мы опубликовали в более ранней статье „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen («Определение точности наблюдений»), Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, Bd I, S 185, основано на той же гипотезе о характере функции, как и вероятность ошибок; на ней же мы построили способ наименьших квадратов в «Теории движения небесных тел (Указанные работы Гаусса см. в этом томе).

с противоположными знаками, по приведенному выше предположению, являются ошибками наблюдений, которые, согласно § 15, дают среднюю ошибку наблюдений m

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

Если точность наблюдений не одинакова, то величины $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda'' \dots$ будут представлять собой ошибки наблюдений, умноженные на квадратный корень из их весов, и правила в § 16 приводят к формуле $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$, которая выражает уже среднюю ошибку таких наблюдений, веса которых приняты равными единице. Но, очевидно, строгое вычисление требует, чтобы вместо величин λ , λ' , $\lambda'' \dots$ были взяты значения функций v , v' , $v'' \dots$, полученные из истинных значений x , y , $z \dots$, т. е. вместо M взято значение функции Ω , соответствующее истинным значениям x , y , $z \dots$. Хотя оно нам неизвестно, но все же мы убеждены, что оно больше M (так как M — возможное наименьшее значение Ω), за исключением чрезвычайно невероятного случая, когда вероятнейшие значения неизвестных точно совпадают с истинными. Следовательно, мы можем вообще утверждать, что обычный способ вычислений, применяемый на практике, дает наверно преуменьшенные средние ошибки наблюдений и преувеличенную точность их. Посмотрим теперь, что покажет строгая теория.

38.

Прежде всего надо исследовать, как M зависит от истинных ошибок наблюдений. Обозначим эти последние, как и в § 28, через e , e' , $e'' \dots$ и для большей простоты примем

$$e \sqrt{p} = \varepsilon, \quad e' \sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e'' \sqrt{p''} = \varepsilon'' \dots$$

и

$$m \sqrt{p} = m' \sqrt{p'} = m'' \sqrt{p''} = \dots = \mu.$$

Пусть далее истинные значения x , y , $z \dots$ соответствуют $A - x^\circ$, $B - y^\circ$, $C - z^\circ \dots$; для них значения ξ , η , $\zeta \dots$ соответственно равны $-\xi^\circ$, $-\eta^\circ$, $-\zeta^\circ \dots$. Очевидно, величинам v , v' , v'' соответствуют $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon'' \dots$, так что имеем

$$\begin{aligned} \xi^\circ &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \dots, \\ \eta^\circ &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \dots, \\ \zeta^\circ &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} x^\circ &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \dots, \\ y^\circ &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \dots, \\ z^\circ &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \dots \end{aligned}$$

Наконец, примем

$$\Omega^\circ = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \dots,$$

так что Ω° представляет собой значение функции Ω , соответствующее истинным значениям x, y, z, \dots . Так как, вообще, мы имеем

$$\Omega = M + (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \dots,$$

то получаем

$$M = \Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \dots$$

Отсюда ясно, что после преобразований M становится однородной функцией второго порядка ошибок e, e', e'', \dots , которая для различных значений ошибок может принимать большее или меньшее значение. Но, поскольку нам неизвестна величина ошибок, эта функция при исследовании остается неопределенной, и прежде всего следует розыскать ее среднее значение на основании принципов теории вероятностей. Это значение мы найдем, если вместо квадратов e^2, e'^2, e''^2, \dots подставим m^2, m'^2, m''^2, \dots , произведения $ee', ee'', e'e'', \dots$ совсем откинем; или, что то же самое, если мы вместо квадратов $\varepsilon^2, \varepsilon'^2, \varepsilon''^2, \dots$ напишем μ^2 и откинем произведения $\varepsilon\varepsilon', \varepsilon\varepsilon'', \varepsilon\varepsilon''', \dots$. В таком случае из члена Ω° , очевидно, получится $\pi\mu^2$; член $-x^\circ\xi^\circ$ превратится в

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)\mu^2 = -\mu^2$$

и аналогично все остальные отдельные члены будут равны $-\mu^2$, так что полное среднее значение будет равно $(\pi - \rho)\mu^2$, если через π обозначено число наблюдений, а через ρ число неизвестных. Истинное значение M , полученное на основании случайных ошибок, будет больше или меньше среднего значения, но разница между ними будет тем меньше, чем больше было произведено наблюдений, так что приближенное значение μ следует принять равным

$$\sqrt{\frac{M}{\pi - \rho}}$$

Следовательно, значение μ , полученное на основании ошибочного практического способа, рассмотренного в предыдущем параграфе, должно быть умножено на отношение $\sqrt{\pi - \rho}$ к $\sqrt{\pi}$.

39.

Чтобы еще яснее показать, по какому праву мы решаемся принять случайное значение M равным среднему значению, следует найти ожидаемую среднюю ошибку, если принято, что $\frac{M}{\pi - \rho} = \mu^2$. Эта средняя ошибка равна квадратному корню из среднего значения величины

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \dots - (\pi - \rho)\mu^2}{\pi - \rho} \right)^2,$$

которому мы придадим вид

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \dots}{\pi - \rho} \right)^2 - \frac{2\mu^2}{\pi - \rho} [\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \dots - (\pi - \rho)\mu^2] - \mu^4;$$

так как очевидно, что среднее значение второго члена равно нулю, то вопрос сводится к отысканию среднего значения функции

$$\Psi = (\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \dots)^2.$$

Если это значение найдено, то, обозначив его через N , получим искомую среднюю ошибку, которая

$$= \sqrt{\frac{N}{(\pi - \rho)^2} - \mu^4}.$$

Выражение Ψ , очевидно, можно представить в виде однородной функции или ошибок $e, e', e'' \dots$ или величин $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$, и его среднее значение будет найдено, если

1) вместо четвертых степеней e^4, e'^4, e''^4, \dots будут подставлены их средние значения;

2) вместо отдельных произведений каждых двух квадратов, как например $e^2 e'^2, e^2 e''^2, e'^2 e''^2, \dots$, будут подставлены произведения их средних значений $m^2 m'^2, m^2 m''^2, m'^2 m''^2, \dots$;

3) будут отброшены остальные члены, которые содержат произведения вида: $e^3 e'$ или $e^2 e' e''$. Средние значения четвертых степеней e^4, e'^4, e''^4, \dots мы будем считать пропорциональными четвертым степеням m^4, m'^4, m''^4, \dots (см. § 16), так что первые относятся ко вторым, как v^4 к μ^4 , где v^4 , следовательно, обозначает среднее значение четвертой степени таких наблюдений, веса которых равны единице. Поэтому приведенные выше правила можно выразить еще так: вместо отдельных четвертых степеней $\varepsilon^4, \varepsilon'^4, \varepsilon''^4, \dots$ следует писать v^4 ; вместо отдельных произведений двух квадратов, как, например, $\varepsilon^2 \varepsilon'^2, \varepsilon^2 \varepsilon''^2, \varepsilon'^2 \varepsilon''^2, \dots$, следует писать μ^4 ; откинем все остальные члены, множители которых содержат $\varepsilon^3 \varepsilon'$ или $\varepsilon^2 \varepsilon' \varepsilon''$ или $\varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon'''$.

Если это хорошо понять, то легко найдем, что

I. Среднее значение квадрата $\Omega^{\circ 2}$ равно $\pi v^4 + (\pi^2 - \pi) \mu^4$.

II. Среднее значение произведения $\varepsilon^2 x^{\circ} \xi^{\circ} = a x v^4 + (a' \alpha' + a'' \alpha'' + \dots) \mu^4$ или, так как $a \alpha + a' \alpha' + a'' \alpha'' + \dots = 1$, то оно

$$= a \alpha (v^4 - \mu^4) + \mu^4.$$

И так как среднее значение произведения $\varepsilon'^2 x^{\circ} \xi^{\circ}$ также

$$= a' \alpha' (v^4 - \mu^4) + \mu^4,$$

то среднее значение $\varepsilon''^2 x^{\circ} \xi^{\circ}$ тоже

$$= a'' \alpha'' (v^4 - \mu^4) + \mu^4 \dots;$$

в таком случае очевидно, что среднее значение произведения $(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \dots) x^{\circ} \xi^{\circ}$ или $\Omega^{\circ} x^{\circ} \xi^{\circ}$

$$= v^4 - \mu^4 + \pi \mu^4.$$

Такое же среднее значение имеют произведения $\Omega^{\circ} y^{\circ} \eta^{\circ}, \Omega^{\circ} z^{\circ} \zeta^{\circ}$ и т. д. Следовательно, среднее значение произведения $\Omega^{\circ} (x^{\circ} \xi^{\circ} + y^{\circ} \eta^{\circ} + z^{\circ} \zeta^{\circ} + \dots)$

$$= \rho v^4 + \rho (\pi - 1) \mu^4.$$

III. Чтобы не выписывать подробно все следующие выводы, следует ввести удобные обозначения. Для этой цели мы будем пользоваться буквой Σ , но несколько в более широком смысле, чем мы делали это раньше; она обозначает сумму членов, перед которыми она поставлена, со всеми подобными, но не тождественными, которые получаются путем всевозможных комбинаций наблюдений. Так, например, мы имеем $x^{\circ} = \Sigma \alpha \varepsilon$, $x^{\circ 2} = \Sigma \alpha^2 \varepsilon^2 + 2 \Sigma \alpha \alpha' \varepsilon \varepsilon'$. Вычисляя тогда по частям среднее значение произведения $x^{\circ 2} \xi^{\circ 2}$, получаем сперва среднее значение произведения $\alpha^2 \varepsilon^2 \xi^{\circ 2}$, которое

$$\begin{aligned}
&= a^2 \alpha^2 \nu^4 + \alpha^2 (a'^2 + a''^2 + \dots) \mu^4 = \\
&= a^2 \alpha^2 (\nu^4 - \mu^4) + \alpha^2 \mu^4 \Sigma a^2.
\end{aligned}$$

Равным образом среднее значение произведения $\alpha'^2 \varepsilon'^2 \xi^{\circ 2}$ равно $a'^2 \alpha'^2 (\nu^4 - \mu^4) + \alpha'^2 \mu^4 \Sigma a'^2$ и т. д., а потому среднее значение произведения $\xi^{\circ 2} \Sigma \alpha^2 \varepsilon^2$

$$= (\nu^4 - \mu^4) \Sigma a^2 \alpha^2 + \mu^4 \Sigma a^2 \Sigma a^2.$$

Далее среднее значение произведения $\alpha \alpha' \varepsilon \varepsilon' \xi^{\circ 2} = 2 \alpha \alpha' a a' \mu^4$ и среднее значение произведения $\alpha \alpha'' \varepsilon \varepsilon'' \xi^{\circ 2} = 2 \alpha \alpha'' a a'' \mu^4 \dots$; на основании этого легко сделать заключение, что среднее значение произведения $\xi^{\circ 2} \Sigma \alpha \alpha' \varepsilon \varepsilon'$ получится

$$= 2 \mu^4 \Sigma \alpha a \alpha' a' = \mu^4 [(\Sigma \alpha a)^2 - \Sigma a^2 \alpha^2] = \mu^4 (1 - \Sigma a^2 \alpha^2).$$

Собрав вместе эти члены, мы получаем среднее значение произведения $x^{\circ 2} \xi^{\circ 2}$, которое

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma a^2 \alpha^2 + 2\mu^4 + \mu^4 \Sigma a^2 \Sigma a^2.$$

IV. Совершенно таким же образом найдем среднее значение произведения $x^{\circ} y^{\circ} \xi^{\circ} \eta^{\circ}$, которое

$$= \nu^4 \Sigma a b \alpha \beta + \mu^4 \Sigma a \alpha b' \beta' + \mu^4 \Sigma a b \alpha' \beta' + \mu^4 \Sigma a \beta b' \alpha'.$$

Но так как

$$\Sigma a \alpha b' \beta' = \Sigma a \alpha \Sigma b \beta - \Sigma a \alpha b \beta,$$

$$\Sigma a b \alpha' \beta' = \Sigma a b \Sigma \alpha \beta - \Sigma a b \alpha \beta,$$

$$\Sigma a \beta b' \alpha' = \Sigma a \beta \Sigma b \alpha - \Sigma a \beta b \alpha,$$

и так как $\Sigma a \alpha = 1$, $\Sigma b \beta = 1$, $\Sigma a \beta = 0$, $\Sigma b \alpha = 0 \dots$, то среднее значение произведения $x^{\circ} y^{\circ} \xi^{\circ} \eta^{\circ}$ получится

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma a b \alpha \beta + \mu^4 (1 + \Sigma a b \Sigma \alpha \beta).$$

V. Так как подобным же образом получается среднее значение произведения $x^{\circ} z^{\circ} \xi^{\circ} \zeta^{\circ}$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma a c \alpha \gamma + \mu^4 (1 + \Sigma a c \Sigma \alpha \gamma)$$

и т. д., то, сложив все эти выражения, получим среднее значение произведения $x^{\circ} \xi^{\circ} (x^{\circ} \xi^{\circ} + y^{\circ} \eta^{\circ} + z^{\circ} \zeta^{\circ} + \dots)$, которое

$$\begin{aligned}
&= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma [a \alpha (a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots)] + (\rho + 1) \mu^4 + \\
&+ \mu^4 (\Sigma a^2 \Sigma \alpha^2 + \Sigma a b \Sigma \alpha \beta + \Sigma a c \Sigma \alpha \gamma + \dots) = \\
&= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma [a \alpha (a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots)] + (\rho + 2) \mu^4.
\end{aligned}$$

VI. Совершенно таким же способом мы находим среднее значение произведения $y^{\circ} \eta^{\circ} (x^{\circ} \xi^{\circ} + y^{\circ} \eta^{\circ} + z^{\circ} \zeta^{\circ} + \dots)$, которое

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma [b \beta (a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots)] + (\rho + 2) \mu^4,$$

а также среднее значение произведения $z^{\circ} \zeta^{\circ} (x^{\circ} \xi^{\circ} + y^{\circ} \eta^{\circ} + z^{\circ} \zeta^{\circ} + \dots)$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma [c \gamma (a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots)] + (\rho + 2) \mu^4$$

и т. д. Складывая эти величины, мы получаем среднее значение квадрата $(x^{\circ} \xi^{\circ} + y^{\circ} \eta^{\circ} + z^{\circ} \zeta^{\circ} + \dots)^2$, которое

$$= (\nu^4 - 3\mu^4) \Sigma [(a \alpha + b \beta + c \gamma + \dots)^2] + (\rho^2 + 2\rho) \mu^4.$$

VII. Сложив надлежащим образом все эти выражения, получим наконец

$$N = (\pi - 2\rho)v^4 + (\pi^2 - \pi - 2\pi\rho + 4\rho + \rho^2)\mu^4 + \\ + (v^4 - 3\mu^4)\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2] = \\ = (\pi - \rho)(v^4 - \mu^4) + (\pi - \rho)^2\mu^4 - (v^4 - 3\mu^4)\{\rho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2]\}.$$

Ожидаемая ошибка μ^2 , вычисленная по формуле

$$\mu^2 = \frac{M}{\pi - \rho},$$

будет

$$= \sqrt{\frac{v^4 - \mu^4}{\pi - \rho} - \frac{v^4 - 3\mu^4}{(\pi - \rho)^2} \left\{ \rho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2] \right\}^*}.$$

40.

Величина $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2]$, которая входит в только что найденное выражение, вообще, не может быть выражена в более простой форме, но все же можно указать пределы, между которыми необходимо должно находиться ее значение. *Во-первых*, на основании выведенных выше соотношений легко с несомненностью показать, что

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \dots)^2 + \\ + (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \dots)^2 + \dots = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots,$$

откуда мы приходим к заключению, что $a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots$ — величина положительная и что она меньше (во всяком случае не больше) единицы. То же самое можно сказать о величине $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \dots$, которая оказалась равной сумме $(a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \dots)^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \dots)^2 + \dots$ точно так же величина $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \dots$ меньше единицы и т. д. Отсюда $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2]$ обязательно должна быть меньше π . *Во-вторых*, так как $\Sigma a\alpha = 1, \Sigma b\beta = 1, \Sigma c\gamma = 1, \dots$ то мы имеем $\Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots) = \rho$, откуда легко выводим заключение, что сумма квадратов $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2]^*$ больше $\frac{\rho^2}{\pi}$ или, по крайней мере, не меньше. Отсюда член

$$\frac{v^4 - 3\mu^4}{(\pi - 3\rho)^2} \left\{ \rho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2] \right\}$$

* Приведа эту формулу, А. Н. Колмогоров, А. А. Петров и Ю. М. Смирнов в статье «Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов» (см. «Известия Академии наук СССР», серия математическая, том II, 1947, стр. 561—566) замечают следующее:

«В § 40 Гаусс извлекает из формулы более простые оценки интересующей его средней квадратической ошибки. Эти оценки он основывает на неравенствах

$$\frac{\rho^2}{\pi} \leq \Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2 \leq \pi. \quad (2)$$

По какому-то недосмотру Гаусс не заметил, что верхняя из оценок может быть заметно усилена и неравенства (2) могут быть заменены неравенствами

$$\frac{\rho^2}{\pi} \leq \Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2 \leq \rho. \quad (3)$$

Из-за этого недосмотра выводы § 40 оказались неожиданно слабыми: нижняя оценка, предлагаемая Гауссом для исследуемой им средней квадратической ошибки, оказывается в некоторых случаях даже отрицательной.

Авторы в статье приводят доказательство неравенства (3). А. И. Мальцевым в том же журнале (стр. 567—568) показано, что нижняя оценка также достижима при любых значениях ρ и π .

Читателю рекомендуется ознакомиться с этими статьями (Прим. ред.).

непрерывно лежит между пределами $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ и $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho} \frac{\rho}{\pi}$ или, если мы возьмем более широкие пределы, между $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ и $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$, а потому квадрат ожидаемой ошибки, вычисленной по формуле $\mu^2 = \frac{M}{\pi - \rho}$, лежит между пределами $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \rho}$ и $\frac{2\mu^4}{\pi - \rho}$, так что можно получить любую точность, если только произведено достаточное число наблюдений.

Весьма замечательно, что в упомянутой выше гипотезе (§ 9, III), на основе которой построена была нами в прежнее время теория наименьших квадратов, этот член совершенно отсутствует, и подобно тому как для получения приближенного значения μ средней ошибки наблюдений приходится иметь дело во всех случаях с суммой

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots = M,$$

как если бы она была суммой $\pi - \rho$ случайных ошибок, так из нашей гипотезы получается также, что точность этого определения равна такой, которую мы нашли в § 15 из определения на основании $\pi - \rho$ истинных ошибок.

Supplementum
Theoriae
Combinationis Observationum erroribus minimis obnoxiae

Д о п о л н е н и е
к теории комбинации наблюдений, подверженных
наименьшим ошибкам

Представлено научному обществу в Гёттингене
16 сентября, 1826 г.

Последние сочинения Гёттингенского королевского научного общества, т. VI.
Гёттинген, 1828

1.

В статье «Теория комбинации наблюдений», напечатанной в V томе трудов Гёттингенского научного общества, мы предполагали, что величины, значения которых получены из не абсолютно точных наблюдений, так зависят от некоторых неизвестных элементов, что их можно представить в виде заданных функций этих элементов; перед нами стоит теперь задача: вывести, насколько возможно точно, эти элементы из наблюдений.

В большинстве случаев такое допущение действительно имеет место. В некоторых случаях задача выступает перед нами в несколько другом виде, так что на первый взгляд кажется сомнительным, можно ли привести ее к желаемой форме. Действительно, нередко бывает, что величины, к которым относятся наблюдения, не могут быть выражены в виде функций уже определенных элементов, и даже кажется, что не могут быть приведены к таким формам, по крайней мере, простым способом и без обходных путей; между тем, с другой стороны, по самой сущности вопроса имеются известные условия, которым должны удовлетворять со всей строгостью истинные значения наблюдаемых величин.

Однако, если присмотреться внимательнее, то легко увидеть, что этот случай на деле не существенно отличается от предыдущего и может быть приведен к нему. Действительно, обозначив через π число наблюденных величин, а через σ число условных уравнений и выбрав из первых произвольно $\pi - \sigma$, ничто нам не мешает принимать их за неизвестные элементы, а остальные, число которых равно σ , рассматривать с помощью условных уравнений как функции первых; таким образом, задача будет приведена к нашему первоначальному предположению.

Но хотя такой путь в очень многих случаях действительно удобно приводит к цели, все же нельзя отрицать, что он не носит вполне естественного характера, и что поэтому стоит затратить некоторый труд на рассмотрение задачи в другой форме; сделать это надо тем более, что мы получим очень изящное решение. Можно даже сказать: это новое решение приводит к более коротким вычислениям, чем решение задачи

в первоначальном виде, если σ меньше $\frac{1}{2}\pi$, или, что то же самое, если число элементов, обозначаемое в предыдущей статье через ρ , больше $\frac{1}{2}\pi$. В таком случае, приводимое в данной статье решение следует предпочесть решению в предыдущей статье даже потому, что можно без всякого обходного пути отбросить условные уравнения, что вытекает из самой природы вопроса.

2.

Обозначим через v, v', v'', \dots величины числом π , значения которых нам известны из наблюдений; предположим, что некоторая неизвестная величина, зависящая от них, может быть выражена заданной функцией u ; пусть затем l, l', l'', \dots значения частных производных

$$\frac{du}{dv}, \frac{du}{dv'}, \frac{du}{dv''}, \dots,$$

соответствующие истинным значениям v, v', v'', \dots . Подобно тому как подстановкой этих истинных значений в функцию u получается ее истинное значение, так и подстановкой в v, v', v'', \dots значений, имеющих соответственные ошибки e, e', e'', \dots , мы получим ошибочное значение неизвестной, ошибка которой

$$= le + l'e' + l''e'' + \dots,$$

если только мы всегда будем принимать ошибки e, e', e'', \dots столь малыми, что (для нелинейной функции u) можно пренебречь их квадратами и произведениями. Хотя величина ошибок e, e', e'', \dots остается неизвестной, однако, вообще, можно оценить точность, присущую такому определению неизвестных, а именно: с помощью ожидаемой средней ошибки, которая, согласно принципам, изложенным в предыдущей статье,

$$= \sqrt{l^2 m^2 + l'^2 m'^2 + l''^2 m''^2 + \dots}$$

если через m, m', m'' обозначать средние ошибки наблюдений; или, если наблюдения произведены с одинаковой точностью, она

$$= m \sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \dots}$$

Очевидно, при таком вычислении с равным правом мы можем взять для l, l', l'', \dots значения частных производных, соответствующие наблюдаемым значениям величин v, v', v'', \dots .

3.

Если величины v, v', v'', \dots полностью одна от другой не зависят, то неизвестная величина при помощи их может быть определена только по одному способу, поэтому ошибку в ней нельзя будет тогда никоим способом ни избежать, ни уменьшить, и при выводе значения неизвестной из наблюдений исключается всякий произвол.

Совсем иначе обстоит, когда между величинами v, v', v'', \dots существует взаимная зависимость, которую мы выразим через σ условных уравнений

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad \dots,$$

где X, Y, Z, \dots обозначают заданные функции переменных v, v', v'', \dots . В этом случае можно определять нашу неизвестную бесконечно различными способами при помощи комбинаций величин v, v', v'', \dots , так как очевидно, что вместо функции u можно взять какую-нибудь другую

функцию U , составленную так, что $(U - u)$ тождественно превращается в нуль, если принять $X = 0, Y = 0, Z = 0, \dots$

В применении к данному случаю не получится никакого различия в отношении значения неизвестной, если наблюдения производились с абсолютной точностью, но так как наблюдения подвержены ошибкам, то очевидно, что каждая комбинация дает свое значение неизвестной. Так, вместо ошибки

$$le + l'e' + l''e'' + \dots,$$

которую имела функция u , мы получаем для функции U ошибку

$$Le + L'e' + L''e'' + \dots,$$

где через L, L', L'', \dots соответственно обозначены значения производных $\frac{dU}{dv}, \frac{dU}{dv'}, \frac{dU}{dv''}, \dots$. И хотя мы не можем дать самих ошибок, но можно сравнить между собой ожидаемые средние ошибки в различных комбинациях наблюдений; наилучшей комбинацией будет та, у которой средняя ошибка окажется минимальной. Так как она

$$= \sqrt{L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \dots},$$

то нужно стремиться к тому, чтобы сумма $L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \dots$ приняла минимальное значение.

4.

Так как существует бесконечное разнообразие функций U , которые, согласно условию, приведенному в предыдущем параграфе, можно принимать вместо u , то мы будем их рассматривать только в том отношении, что из них получаются различные системы коэффициентов L, L', L'', \dots , в таком случае прежде всего нужно искать связь, которая имеется между всеми возможными системами этих коэффициентов. Обозначим определенные нами значения частных производных

$$\begin{aligned} & \frac{dX}{dv}, \frac{dX}{dv'}, \frac{dX}{dv''}, \dots, \\ & \frac{dY}{dv}, \frac{dY}{dv'}, \frac{dY}{dv''}, \dots, \\ & \frac{dZ}{dv}, \frac{dZ}{dv'}, \frac{dZ}{dv''}, \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

которые получаются, если взяты истинные значения v, v', v'', \dots , соответственно через

$$\begin{aligned} & a, a', a'', \dots, \\ & b, b', b'', \dots, \\ & c, c', c'', \dots, \end{aligned}$$

принимая тогда dv, dv', dv'', \dots как приращения к v, v', v'', \dots , которые не изменяют X, Y, Z , остающихся по отдельности равными нулю, т. е. эти приращения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} 0 &= a dv + a' dv' + a'' dv'' + \dots, \\ 0 &= b dv + b' dv' + b'' dv'' + \dots, \\ 0 &= c dv + c' dv' + c'' dv'' + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

так что даже $(u - U)$ не должно менять своей величины, откуда следует, что

$$0 = (l - L) dv + (l' - L') dv' + (l'' - L'') dv'' + \dots$$

Тогда легко прийти к заключению, что коэффициенты L, L', L'', \dots должны выражаться следующими формулами:

$$\begin{aligned} L &= l + ax + by + cz + \dots, \\ L' &= l' + a'x + b'y + c'z + \dots, \\ L'' &= l'' + a''x + b''y + c''z + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

где x, y, z, \dots — определенные множители. С другой стороны, ясно, что если система определенных множителей x, y, z составлена произвольно, то всегда можно получить такую функцию U , которую удовлетворяют значения L, L', L'', \dots из приведенных выше уравнений и которая, согласно предыдущему параграфу, может заменить функцию u ; этого можно достичь бесконечно различными способами. Простейший случай будет, если иметь $U = u + xX + yY + zZ + \dots$; в более общем случае можно принять, что $U = u + xX + yY + zZ + \dots + u'$, где u' обозначает такую функцию переменных v, v', v'', \dots , которая всегда превращается в нуль для $X = 0, Y = 0, Z = 0, \dots$ и значение которой в данном определенном случае, о котором идет речь, превращается в максимум или минимум*. Но для нашей цели от этого не получится никакой разницы.

5.

Теперь легко подобрать для множителей x, y, z, \dots такие значения, при которых сумма

$$L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \dots$$

обратится в минимум. При этом, очевидно, что для этой цели абсолютно нет надобности знать точные значения средних ошибок m, m', m'', \dots , но достаточно знать соотношение, которое между ними существует. Введем поэтому вместо них веса наблюдений p, p', p'', \dots , т. е. числа, обратно пропорциональные квадратам m^2, m'^2, m''^2, \dots , причем произвольно примем вес какого-нибудь одного наблюдения за единицу. Величины x, y, z, \dots должны быть определены так, чтобы многочлен

$$\begin{aligned} &\frac{(ax + by + cz + \dots + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \dots + l')^2}{p'} + \\ &+ \frac{(a''x + b''y + c''z + \dots + l'')^2}{p''} + \dots \end{aligned}$$

принял минимальное значение; это может произойти при определенных значениях x^0, y^0, z^0, \dots

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{p} + \frac{a'^2}{p'} + \frac{a''^2}{p''} + \dots &= [aa], \\ \frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \dots &= [ab], \end{aligned}$$

* Так как все производные превращаются в нули (Прим. ред.).

когда в функцию U подставлены полученные из наблюдений значения величин $v, v', v'' \dots$; при такой подстановке функция u получит значение k ; наконец, пусть x — истинное значение неизвестной, каким оно получится на основании истинных значений v, v', v'', \dots , если мы сможем подставить их или в U или в u . Отсюда мы получаем

$$k = x + le + l'e' + l''e'' + \dots, \\ K = x + Le + L'e' + L''e'' + \dots,$$

откуда

$$K = k + (L - l)e + (L' - l')e' + (L'' - l'')e'' + \dots$$

Подставив в этом уравнении вместо $L - l, L' - l', L'' - l'', \dots$ их значения из (2) и обозначив

$$\left. \begin{aligned} ae + a'e' + a''e'' + \dots &= \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \dots &= \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \dots &= \mathfrak{C} \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

получим

$$K = k + \mathfrak{A}x^\circ + \mathfrak{B}y^\circ + \mathfrak{C}z^\circ + \dots \quad (5)$$

Значения $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ нельзя, конечно, вычислить по формулам (4), так как ошибки e, e', e'', \dots остаются неизвестными; однако ясно, что они представляют собой не что иное, как значения функций X, Y, Z, \dots , которые получаются тогда, когда вместо v, v', v'' подставлены полученные из наблюдений величины. Итак, система уравнений (1), (3), (5) дает полное решение нашей задачи, так как приведенные в конце § 2 правила о вычислении величин l, l', l'', \dots на основании наблюдаемых величин v, v', v'', \dots можно, очевидно, распространить с полным правом на вычисление величин $a, a', a'', \dots, b, b', b'', \dots$ и т. д.

7.

Вместо формулы (3), которая выражает вес наиболее вероятного определения, можно дать много других формул, над выводом которых стоит потрудиться.

Заметим сперва, что, умножая уравнения (2) соответственно на $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}, \dots$ и складывая их, получаем

$$[aa]x^\circ + [ab]y^\circ + [ac]z^\circ + \dots + [al] = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \dots$$

Левая часть этого выражения равна нулю; обозначим по аналогии с предыдущим через $[aL]$ его правую часть, тогда получим $[aL] = 0$; точно так же $[bL] = 0, [cL] = 0, \dots$

Затем, умножив уравнения (2) на $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}, \dots$ и сложив их, найдем

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \dots = \frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \dots,$$

откуда получим для веса *второе* выражение

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \dots}$$

Умножая, наконец, уравнения (2) на $\frac{l}{p}$, $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$, ... и складывая их, получаем *третье* выражение для веса

$$P = \frac{1}{[al]x^{\circ} + [bl]y^{\circ} + [cl]z^{\circ} + \dots + [ll]}$$

если, подобно остальным обозначениям, примем, что

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \dots = [ll].$$

Отсюда, при помощи уравнений (1) легко перейти к *четвертому* выражению, которое мы напишем так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} = & [ll] - [aa]x^{\circ 2} - [bb]y^{\circ 2} - [cc]z^{\circ 2} - \dots - \\ & - 2[ab]x^{\circ}y^{\circ} - 2[ac]x^{\circ}z^{\circ} - 2[bc]y^{\circ}z^{\circ} - \dots \end{aligned}$$

8.

Общее решение, которым мы до сих пор занимались, преимущественно касалось случая, когда следовало определить одну неизвестную, зависящую от наблюдаемых величин. Но если в действительности хотят получить наиболее вероятные значения нескольких неизвестных, зависящих от тех же наблюдений, или, когда при этом не установлено, какая неизвестная заслуживает больше внимания, чтобы ее выводить из наблюдений прежде других, то следует применить в этом случае другой способ, к рассмотрению которого мы сейчас приступим.

Будем рассматривать величины x , y , z , ... как переменные и положим, что

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \dots &= \xi \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \dots &= \eta \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \dots &= \zeta \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и путем исключения получим отсюда

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \dots &= x \\ [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \dots &= y \\ [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \dots &= z \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Прежде всего следует заметить, что симметрично расположенные коэффициенты непременно равны один другому, следовательно

$$\begin{aligned} [\beta\alpha] &= [\alpha\beta], \\ [\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma], \\ [\gamma\beta] &= [\beta\gamma], \\ & \dots \end{aligned}$$

это уже вытекает само собой из общей теории исключения в линейных уравнениях; впрочем, впоследствии мы еще раз непосредственно докажем это.

Следовательно, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x^\circ &= -[\alpha\alpha][al] - [\alpha\beta][bl] - [\alpha\gamma][cl] - \dots \\ y^\circ &= -[\alpha\beta][al] - [\beta\beta][bl] - [\beta\gamma][cl] - \dots \\ z^\circ &= -[\alpha\gamma][al] - [\beta\gamma][bl] - [\gamma\gamma][cl] - \dots \\ &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

откуда, предполагая, что

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \dots &= A \\ [\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \dots &= B \\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \dots &= C \\ &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

получаем

$$K = k - A[al] - B[bl] - C[cl] - \dots,$$

или, если, кроме того, мы примем, что

$$\left. \begin{aligned} aA + bB + cC + \dots &= p\varepsilon \\ a'A + b'B + c'C + \dots &= p'\varepsilon' \\ a''A + b''B + c''C + \dots &= p''\varepsilon'' \\ &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

получим

$$K = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \dots \quad (11)$$

9.

Сравнение уравнений (7) и (9) показывает, что вспомогательные величины A, B, C, \dots являются теми значениями переменных x, y, z, \dots , которые соответствуют значениям переменных ξ, η, ζ, \dots , если $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}, \dots$; отсюда следует, что имеем

$$\left. \begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C + \dots &= \mathfrak{A}, \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C + \dots &= \mathfrak{B}, \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C + \dots &= \mathfrak{C}, \\ &\dots \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Умножив уравнение (10) последовательно на $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}, \dots$ и сложив их, получим

$$\mathfrak{A} = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \dots$$

и далее подобным же образом

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \dots \\ \mathfrak{C} &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

но так как \mathfrak{A} представляет собой значение функции X , если вместо v, v', v'', \dots подставлены наблюдаемые значения, то легко видеть, что, введя соответственные поправки $-\varepsilon, -\varepsilon', -\varepsilon'', \dots$, мы получим для функции X значение нуль; функции Y, Z, \dots тогда тоже будут равны нулю. Подобным же образом можно прийти к заключению на основании уравнения (11), что K представляет собой значение функции u , выведенное путем таких же подстановок.

Внесение поправок $-\varepsilon, -\varepsilon', -\varepsilon'', \dots$ в наблюдения мы будем называть *уравниванием наблюдений**, тогда очевидно, что мы придем к следующему очень важному заключению: уравненные описанным выше способом наблюдения точно удовлетворяют всем условным уравнениям и каждое из наблюдений какой-либо величины принимает как раз такое значение, какое должно получаться при наиболее целесообразной комбинации наблюдений. Если же невозможно определить ошибки e, e', e'', \dots из условных уравнений, так как число их недостаточно, то мы, по крайней мере, получаем *вероятнейшие ошибки*; это название мы позволяем себе дать величинам $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$.

10.

Так как предполагается, что число наблюдений больше числа условных уравнений, то, помимо системы вероятнейших поправок, может существовать бесконечно много других систем поправок, которые удовлетворяют условным уравнениям, поэтому стоит труда исследовать, как эти последние относятся к первой. Итак, пусть $-E, E', E'', \dots$ есть другая система, отличающаяся от системы вероятнейших поправок, тогда получим

$$\begin{aligned} aE + a'E' + a''E'' + \dots &= \mathfrak{A}. \\ bE + b'E' + b''E'' + \dots &= \mathfrak{B}, \\ cE + c'E' + c''E'' + \dots &= \mathfrak{C}. \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Умножив эти уравнения соответственно на A, B, C, \dots и сложив их, получим на основании уравнений (10)

$$p\varepsilon E + p'\varepsilon'E' + p''\varepsilon''E'' + \dots = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \dots$$

Совершенно таким же образом уравнения (13) дают

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \dots = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \dots \quad (14)$$

Из комбинации этих двух уравнений легко выводится

$$\begin{aligned} pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \dots &= p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \dots \\ &+ p(E - \varepsilon)^2 + p'(E' - \varepsilon')^2 + p''(E'' - \varepsilon'')^2 + \dots \end{aligned}$$

Сумма $pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \dots$ будет обязательно *больше* суммы $p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \dots$, что можно выразить так:

Теорема. Сумма квадратов поправок наблюдений, умноженных на соответствующие их веса, является минимумом, если приняты в ней вероятнейшие поправки.

В этом заключается принцип наименьших квадратов, из которого легко можно непосредственно вывести уравнения (12) и (10). Наконец, уравнение (14) дает нам для этой минимальной суммы, которую в дальнейшем мы будем обозначать через S , выражение $A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \dots$

11.

Определение вероятнейших ошибок независимо от коэффициентов l, l', l'', \dots , очевидно, является наиболее выгодным для любого дела, в котором встречаются наблюдения. Кроме того, ясно, что для этой цели

* У Гаусса уравнивание везде называется «компенсацией». (Прим. ред.).

нет надобности в *неопределенном* исключении и вычислении коэффициентов $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$. . . , и что достаточно вывести только вспомогательные величины A, B, C, \dots , которые в дальнейшем мы будем называть *коррелатами* условных уравнений; они получаются из уравнений (12) при помощи определенной системы исключения и подстановки в формулы (10).

Хотя этот способ действительно не оставляет желать ничего лучшего, если требуется найти только вероятнейшие значения зависящих от наблюдений величин, однако дело обстоит иначе, если желательно, помимо того, получить вес какого-либо определения; в этом случае придется пользоваться тем и другим из приведенных выше четырех выражений, а следовательно, знать величины L, L', L'', \dots или, по крайней мере, необходимо, по-видимому, знать x^0, y^0, z^0, \dots . На этом основании будет полезно точнее исследовать способ исключения, и тогда нам откроется более легкий путь для отыскания весов.

12.

Взаимная связь величин, входящих в эту задачу, может быть хорошо освещена, если ввести в исследование общую функцию второй степени

$$[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \dots + [bb]y^2 + 2[bc]yz + \dots + [cc]z^2 + \dots,$$

которую мы будем обозначать через T . Во-первых, эта функция, очевидно, равна

$$\frac{(ax + by + cz + \dots)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \dots)^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \dots)^2}{p''} + \dots (15)$$

Затем, очевидно

$$T = x\xi + y\eta + z\zeta + \dots (16)$$

и, если при помощи уравнений (7) мы вновь заменим x, y, z, \dots , через ξ, η, ζ, \dots , то получим

$$T = [\alpha\alpha]\xi^2 + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \dots + [\beta\beta]\eta^2 + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \dots + [\gamma\gamma]\zeta^2 + \dots$$

Согласно изложенной выше теории, существуют две системы определенных значений величин x, y, z и ξ, η, ζ, \dots ; первой из них, в которой $x = x^0, y = y^0, z = z^0, \dots$ и $\xi = -[al], \eta = -[bl], \zeta = -[cl], \dots$, соответствует следующее значение T :

$$T = [ll] - \frac{1}{p},$$

которое может быть получено или из сравнения третьего выражения для веса P с уравнением (16), или непосредственно из четвертого выражения; второй системе, в которой $x = A, y = B, z = C \dots$ и $\xi = \mathfrak{A}, \eta = \mathfrak{B}, \zeta = \mathfrak{C}, \dots$, соответствует значение $T = S$, как это ясно из формул (10) и (15) или из формул (14) и (16).

13.

Наша основная работа состоит теперь в преобразовании функции T , подобном тому, какое мы произвели в «Теории движения небесных тел» § 182 и более подробно в «Исследовании об эллиптических элементах Паллады». Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]} \mathfrak{A} - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]} \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]} \mathfrak{A} - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]} \mathfrak{B}' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]} \mathfrak{C}'' \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

тогда A, B, C, \dots получатся из формул (19), если вычисления производить в обратном порядке, начиная с последней формулы

$$\left. \begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C + [ad]D + \dots &= \mathfrak{A} \\ [bb, 1]B + [bc, 1]C + [bd, 1]D + \dots &= \mathfrak{B}' \\ [cc, 2]C + [cd, 2]D + \dots &= \mathfrak{C}'' \\ [dd, 3]D + \dots &= \mathfrak{D}''' \\ \dots & \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Для суммы S мы получаем новую формулу

$$S = \frac{\mathfrak{A}^2}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{[bb, 1]} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{[cc, 2]} + \frac{\mathfrak{D}'''^2}{[dd, 3]} + \dots \quad (20)$$

Если, наконец, требуется найти вес P , который соответствует вероятнейшему определению величины, выраженной функцией u , то, положив

$$\left. \begin{aligned} [bl, 1] &= [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} \\ [cl, 2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc, 1][bl, 1]}{[bb, 1]} \\ [dl, 3] &= [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd, 1][bl, 1]}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2][cl, 2]}{[cc, 2]} \\ \dots & \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

получим

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl, 1]^2}{[bb, 1]} - \frac{[cl, 2]^2}{[cc, 2]} - \frac{[dl, 3]^2}{[dd, 3]} - \dots \quad (22)$$

Формулы (17) — (22), простой вид которых, по-видимому, не оставляет желать ничего лучшего, дают во всех отношениях полное решение нашей задачи.

14.

После того как нами решены основные задачи, займемся некоторыми второстепенными вопросами, которые придадут больше ясности этому доказательству.

Сперва надо исследовать, может ли иметь место случай, когда окажется невозможным исключение, при помощи которого следует выводить x, y, z, \dots из ξ, η, ζ, \dots . Ясно, что такой случай будет, если функции ξ, η, ζ, \dots не будут независимыми одна от другой. Предположим на мгновение, что одна из них определяется при помощи других; в таком случае получается тождественное уравнение

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \dots = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \dots$ представляет собой некоторые определенные числа. Тогда получим

$$\begin{aligned} \alpha [aa] + \beta [ab] + \gamma [ac] + \dots &= 0, \\ \alpha [ab] + \beta [bb] + \gamma [bc] + \dots &= 0, \\ \alpha [ac] + \beta [bc] + \gamma [cc] + \dots &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

положим теперь

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots &= p\Theta, \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \dots &= p'\Theta', \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \dots &= p''\Theta'', \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

отсюда само собой получится

$$\begin{aligned} \alpha\Theta + \alpha'\Theta' + \alpha''\Theta'' + \dots &= 0, \\ \beta\Theta + \beta'\Theta' + \beta''\Theta'' + \dots &= 0, \\ \gamma\Theta + \gamma'\Theta' + \gamma''\Theta'' + \dots &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

и далее

$$p\Theta^3 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \dots = 0,$$

так как все значения p, p', p'', \dots по самой природе своей — величины положительные, то, очевидно, что это уравнение может существовать, если только $\Theta = 0, \Theta' = 0, \Theta'' = 0, \dots$

Рассмотрим теперь значения полных дифференциалов dX, dY, dZ, \dots , соответствующих тем значениям величин v, v', v'', \dots , которые получаются из наблюдений. Эти дифференциалы

$$\begin{aligned} \alpha dv + \alpha' dv' + \alpha'' dv'' + \dots, \\ \beta dv + \beta' dv' + \beta'' dv'' + \dots, \\ \gamma dv + \gamma' dv' + \gamma'' dv'' + \dots, \\ \dots \end{aligned}$$

согласно сделанному нами выше заключению, зависят один от другого так, что после умножения их соответственно на $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ сумма их будет тождественно равна нулю, или, что то же самое, любой из них (по крайней мере, если не превращается в нуль соответствующий ему множитель $\alpha, \beta, \gamma, \dots$), сам превращается в нуль, если будем предполагать, что все остальные дифференциалы превращаются в нуль. Поэтому одно (по меньшей мере) из условных уравнений $X = 0, Y = 0, Z = 0, \dots$ должно считаться излишним, так как оно удовлетворяется само собой и удовлетворяет другие уравнения.

Рассматривая глубже этот вопрос, становится очевидным, что это заключение само собой действительно только в пределах бесконечно малых изменений переменных. Собственно, следует различать два случая: во-первых, когда одно из условных уравнений $X = 0, Y = 0, Z = 0, \dots$ в абсолютном и общем смысле заключается в других, так что легко может быть отброшено в любом случае; во-вторых, когда как бы случайно, для определенных значений величин v, v', v'', \dots , полученных из наблюдений, одна из функций X, Y, Z, \dots , например первая X , получает максимальное или минимальное (или, вообще, некоторое постоянное) значение, принимая во внимание все изменения, которым мы можем подчинить величины v, v', v'', \dots , не нарушая уравнения $Y = 0,$

$Z = 0, \dots$ Но так как в нашем исследовании изменение величин должно рассматриваться только в столь узких пределах, что их можно считать за бесконечно малые, то этот второй случай (который на практике вряд ли когда-нибудь встретится) производит такое же действие, как и первый, т. е. одно из условных уравнений должно быть отброшено как излишнее. Следовательно, мы можем быть уверены, что если все остающиеся условные уравнения будут независимыми одно от другого в указанном нами смысле, то они обязательно будут допускать исключение переменных. Более подробное исследование этого вопроса, которое скорее стлится своей теоретической тонкостью, чем пользой на практике, мы должны отложить до другого раза.

15.

В предыдущей статье, в параграфах 37 и последующих, мы показали, как получить с возможной достоверностью *a posteriori* точность наблюдений. Действительно, если из наблюдений одинаковой точности найдены приближенные значения π величин и произведены сравнения их с теми значениями, которые получаются путем вычисления их из наиболее вероятных значений ρ элементов, от которых они зависят, то следует сложить квадраты их разностей и разделить эту сумму на $\pi - \rho$; полученное частное можно рассматривать, как приближенное значение квадрата средней ошибки, получающейся из группы таких наблюдений. Если наблюдения были неодинаковой точности, то эти правила следует изменить так, что прежде чем складывать квадраты разностей, их надо помножить на веса наблюдений; тогда получится искомая средняя ошибка наблюдений, вес которых принимается равным единице.

В нашем исследовании эта сумма, очевидно, соответствует сумме S , а разность $\pi - \rho$ — числу условных уравнений σ , вследствие чего для средней ошибки наблюдений с весом, равным единице, мы примем выражение $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$; это определение тем достовернее, чем больше число σ .

Но стоит потрудиться, чтобы установить этот результат независимо от предыдущего исследования. Для этой цели нам надлежит ввести некоторые новые обозначения. Пусть значениям переменных ξ, η, ζ, \dots

$$\xi = a, \eta = b, \zeta = c, \dots$$

соответствуют следующие значения x, y, z, \dots

$$x = \alpha, y = \beta, z = \gamma, \dots;$$

тогда получим

$$\alpha = a[\alpha x] + b[\alpha \beta] + c[\alpha \gamma] + \dots,$$

$$\beta = a[\alpha \beta] + b[\beta \beta] + c[\beta \gamma] + \dots,$$

$$\gamma = a[\alpha \gamma] + b[\beta \gamma] + c[\gamma \gamma] + \dots$$

Точно также значениям

$$\xi = a', \eta = b', \zeta = c', \dots$$

соответствуют

$$x = \alpha', y = \beta', z = \gamma'$$

и значениям

$$\xi = a'', \eta = b'', \zeta = c''$$

соответствуют

$$x = \alpha'', y = \beta'', z = \gamma'', \dots$$

и т. д.

При таком предположении, комбинируя уравнения (4) и (9), получаем

$$\begin{aligned} A &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \dots, \\ B &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \dots, \\ C &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

а так как $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \dots$, то отсюда должно получиться

$$\begin{aligned} S &= (\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \dots)(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \dots) + \\ &+ (\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \dots)(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \dots) + \\ &+ (\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \dots)(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \dots) + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

16.

Обработку наблюдений, при помощи которой мы получаем значения величин v, v', v'', \dots , подверженных случайным ошибкам e, e', e'', \dots , мы можем рассматривать как опыт, который не пригоден для того, чтобы показать величину отдельно встречающихся ошибок, но вследствие изложенных выше правил позволяет определить значение величины S , которая, согласно выведенной нами формуле, представляет собой заданную функцию этих ошибок. При таком опыте, конечно, могут встречаться то крупные, то малые случайные ошибки, но чем больше имеется в нашем распоряжении ошибок, тем больше надежды, что значение величины S в данном отдельном опыте должно меньше отличаться от своего среднего значения. Самое важное, следовательно, определить среднее значение величины S . Согласно принципам, изложенным в предыдущих статьях, повторять которые мы считаем излишним, мы находим следующее среднее значение:

$$\begin{aligned} &(\alpha\alpha + b\beta + c\gamma + \dots) m^2 + (\alpha'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \dots) m'^2 + \\ &+ (\alpha''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \dots) m''^2 + \dots \end{aligned}$$

Обозначим среднюю ошибку наблюдений, вес которых равен единице, через μ , так что $\mu^2 = pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2 \dots$, тогда найденное нами выше выражение можно написать в форме

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha\alpha}{p} + \frac{\alpha'\alpha'}{p'} + \frac{\alpha''\alpha''}{p''} + \dots\right) \mu^2 + \left(\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \dots\right) \mu^2 + \\ &+ \left(\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \dots\right) \mu^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Но сумма } \frac{\alpha\alpha}{p} + \frac{\alpha'\alpha'}{p'} + \frac{\alpha''\alpha''}{p''} + \dots =$$

$$= [aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] + \dots,$$

а потому она равна единице, как это легко видеть, сопоставляя уравнения (6) и (7). Точно так же

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \dots = 1,$$

$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \dots = 1,$$

и т. д.

Отсюда среднее значение S окончательно равно $\sigma\mu^2$, а так как случайное значение S мы можем принять за среднее, то будем иметь $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$.

17.

Насколько большое доверие заслуживает это определение, следует судить по средней ожидаемой ошибке или ее квадрату; эта ошибка равна квадратному корню из среднего значения выражения

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu^2\right)^2,$$

вывод которого может быть получен из вычислений, подобных приведенным в § 39 и следующих за ним. Для краткости мы не дадим его здесь, а приведем только самую формулу. Ожидаемая средняя ошибка при определении квадрата μ^2 выразится тогда так:

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma^2}} N,$$

где ν^4 — обозначает среднее значение четвертой степени ошибок, вес которых равен единице, а N — следующую сумму

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots)^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \dots)^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \dots)^2 + \dots$$

Эту сумму, вообще, нельзя привести к более простому виду, но подобным же образом, как и в § 40 предыдущей статьи, можно показать, что ее значение должно лежать в пределах между π и $\frac{\sigma^2}{\pi}$. На основании той же гипотезы, на которой был первоначально обоснован способ наименьших квадратов, совершенно пропадает член, который заключает в себе эту сумму, потому что тогда $\nu^4 = 3\mu^4$; поэтому точность, которая соответствует средней ошибке, вычисляемой по формуле $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, будет такой же, как и точность, вычисленная на основании σ точно известных ошибок, полученная согласно § 15 и 16 предыдущей статьи.

18.

Для уравнивания наблюдений, как мы видели, надо произвести две операции: во-первых, вычислить коррелаты условных уравнений, т. е. числа A, B, C, \dots , которые удовлетворяют уравнениям (12); во-вторых, подставить эти числа в уравнения (10). Такое уравнение можно назвать *совершенным* (Compensatio perfecta) или *полным* (Completa), в отличие от *несовершенного* (imperfecta) или *неполного* (manca); под этим последним названием мы будем понимать такие результаты, которые получаются на основании тех же уравнений (10), но после подстановки значений величин A, B, C, \dots , не удовлетворяющих уравнениям (12), т. е. или только части их, или ни одному. Но таких поправок наблюдений, которые не могут быть выражены формулами (10), мы не будем касаться в настоящем исследовании и даже не будем называть их уравнениями. Так как при существовании уравнений (10) уравнения (13) полностью равнозначны с уравнениями (12), то это различие может быть выражено так: полностью уравненные наблюдения удовлетворяют всем условным уравнениям $X = 0, Y = 0, Z = 0, \dots$; уравнения не вполне

уравненные, в действительности, или не удовлетворяют ни одному, или, по крайней мере,— ни всем; уравнивание, при помощи которого удовлетворяются все условные уравнения, обязательно должно быть полным.

Так как из понятия уравнивания уже само собой следует, что сумма двух уравниваний дает новое уравнение, то легко видеть, что получается одно и то же, применяя ли правила полного уравнивания непосредственно к первоначальным наблюдениям или к наблюдениям, уравненным не полностью.

Действительно, пусть $-\Theta, -\Theta', -\Theta'', \dots$ образуют систему неполного уравнивания, которая получается на основании формул:

$$\left. \begin{aligned} \Theta p &= A^\circ a + B^\circ b + C^\circ c + \dots \\ \Theta' p' &= A^\circ a' + B^\circ b' + C^\circ c' + \dots \\ \Theta'' p'' &= A^\circ a'' + B^\circ b'' + C^\circ c'' + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Так как предполагается, что наблюдения, измененные этим уравниванием, не могут удовлетворять всем условным уравнениям, то пусть $\mathfrak{U}^*, \mathfrak{B}^*, \mathfrak{C}^*, \dots$ будут теми значениями, которые получают X, Y, Z, \dots после подстановки указанных выше измененных значений. Следует найти числа A^*, B^*, C^*, \dots , которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}^* &= A^* [aa] + B^* [ab] + C^* [ac] + \dots \\ \mathfrak{B}^* &= A^* [ab] + B^* [bb] + C^* [bc] + \dots \\ \mathfrak{C}^* &= A^* [ac] + B^* [bc] + C^* [cc] + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Тогда полное уравнение измеренных по этому способу наблюдений произойдет при помощи новых поправок $-x, -x', -x'', \dots$, причем x, x', x'' вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} xp &= A^* a + B^* b + C^* c + \dots \\ x' p' &= A^* a' + B^* b' + C^* c' + \dots \\ x'' p'' &= A^* a'' + B^* b'' + C^* c'' + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Исследуем теперь, как связаны эти поправки при полном уравнивании с первоначальными наблюдениями. Прежде всего ясно, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}^* &= \mathfrak{U} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \dots, \\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \dots, \\ \mathfrak{C}^* &= \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставив в эти уравнения вместо $\Theta, \Theta', \Theta'', \dots$ их значения из формул (I) и вместо $\mathfrak{U}^*, \mathfrak{B}^*, \mathfrak{C}^*, \dots$ их значения из формул (II), получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= (A^\circ + A^*) [aa] + (B^\circ + B^*) [ab] + (C^\circ + C^*) [ac] + \dots, \\ \mathfrak{B} &= (A^\circ + A^*) [ab] + (B^\circ + B^*) [bb] + (C^\circ + C^*) [bc] + \dots \\ \mathfrak{C} &= (A^\circ + A^*) [ac] + (B^\circ + B^*) [bc] + (C^\circ + C^*) [cc] + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

откуда следует, что коррелаты, которые удовлетворяют уравнениям (12), равны

$$A = A^\circ + A^*, B = B^\circ + B^*, C = C^\circ + C^*, \dots$$

Тогда, действительно, уравнения (10), (I) и (II) показывают, что

$$\varepsilon = \Theta + \chi, \varepsilon' = \Theta' + \chi', \varepsilon'' = \Theta'' + \chi'', \dots,$$

т. е. уравнивание наблюдений производится одинаково полно, как при помощи непосредственных вычислений, так и при помощи посредственных вычислений, на основании неполного уравнивания.

20.

Если число условных уравнений очень велико, то определение коррелат A, B, C, \dots путем непосредственного исключения может оказаться таким длинным, что терпение вычислителя истощится, тогда может оказаться удобным произвести полное уравнивание последовательными приближениями на основании приведенной в предыдущем параграфе теоремы. Условные уравнения распределяются на две или большее число групп; сперва довольствуются тем, что стараются уравнивать первую группу уравнений, оставляя в стороне остальные. Затем измененные после этого уравнивания наблюдения обрабатываются так, чтобы они удовлетворяли только уравнениям второй группы. Обычно внесение второй системы уравнивания нарушает согласование с уравниваниями первой группы, поэтому, если составлены только две группы, мы возвращаемся к уравнениям первой группы и составляем третью систему уравнивания, которая удовлетворяет первой группе уравнений; после этого трижды исправленные наблюдения подвергаем четвертому уравниванию, в котором принимаются во внимание только уравнения второй группы. Таким образом, принимая во внимание попеременно уравнения то первой, то второй группы, мы получаем постепенно сходящиеся результаты, и если разделение на группы произведено искусно, то после небольшого числа повторений мы придем к окончательным результатам. Если составлено больше двух групп, то надо поступать подобным же образом; отдельные группы вычисляются одна за другой; после последней вновь перевычисляется первая группа и т. д. На этом мы остановимся; следует только добавить, что успех вычислений во многом будет зависеть от умелого применения нашего способа.

21.

Нам остается еще привести доказательство леммы, указанной в § 8, причем для ясности мы будем пользоваться другими, более подходящими обозначениями.

Пусть $x^\circ, x', x'', x''', \dots$ будут переменные; предположим, что из уравнений:

$$\begin{aligned} n^{00} x^\circ + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \dots &= X^0, \\ n^{10} x^\circ + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \dots &= X', \\ n^{20} x^\circ + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \dots &= X'', \\ n^{30} x^\circ + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \dots &= X''', \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

после соответствующих исключений мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} N^{00} X^0 + N^{01} X' + N^{02} X'' + N^{03} X''' + \dots &= x^0, \\ N^{10} X^0 + N^{11} X' + N^{12} X'' + N^{13} X''' + \dots &= x', \\ N^{20} X^0 + N^{21} X' + N^{22} X'' + N^{23} X''' + \dots &= x'', \\ N^{30} X^0 + N^{31} X' + N^{32} X'' + N^{33} X''' + \dots &= x'''. \end{aligned}$$

Подставив затем в первые два уравнения второй системы значения величин $X^0, X', X'', X''', \dots$ из первой системы, получим:

$$\begin{aligned} x^0 &= N^{00} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \dots) + \\ &+ N^{01} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \dots) + \\ &+ N^{02} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \dots) + \\ &+ N^{03} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \dots) + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= N^{10} (n^{00} x^0 + n^{01} x' + n^{02} x'' + n^{03} x''' + \dots) + \\ &+ N^{11} (n^{10} x^0 + n^{11} x' + n^{12} x'' + n^{13} x''' + \dots) + \\ &+ N^{12} (n^{20} x^0 + n^{21} x' + n^{22} x'' + n^{23} x''' + \dots) + \\ &+ N^{13} (n^{30} x^0 + n^{31} x' + n^{32} x'' + n^{33} x''' + \dots) + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Так как каждое из этих двух уравнений, очевидно, должно быть тождественным уравнением, то можно как в первое, так и во второе из них подставить вместо $x^0, x', x'', x''', \dots$ любые определенные значения. Подставим в первое уравнение

$$x^0 = N^{10}, x' = N^{11}, x'' = N^{12}, x''' = N^{13}, \dots$$

и во второе

$$x^0 = N^{00}, x' = N^{01}, x'' = N^{02}, x''' = N^{03}, \dots$$

Тогда, вычитая их почленно одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} &= (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01}) (n^{01} - n^{10}) + \\ &+ (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02}) (n^{02} - n^{12}) + \\ &+ (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03}) (n^{03} - n^{13}) + \\ &+ \dots + \\ &+ (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02}) (n^{12} - n^{21}) + \\ &+ (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03}) (n^{13} - n^{31}) + \\ &+ \dots + \\ &+ (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03}) (n^{23} - n^{32}) + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Это уравнение можно написать в виде

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma (N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta}) (n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}),$$

где через α, β обозначены все комбинации неодинаковых индексов.

Отсюда, если

$$n^{01} = n^{10}, n^{02} = n^{20}, n^{03} = n^{30}, n^{12} = n^{21}, n^{13} = n^{31}, n^{23} = n^{32}, \dots$$

или вообще

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha},$$

получаем

$$N^{10} = N^{01}.$$

Так как порядок переменных в данных уравнениях произвольный, то ясно, что при таком предположении мы будем иметь

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

Так как описанный в этой статье способ часто и с удобством применяется при вычислениях преимущественно в высшей геодезии, то мы надеемся, что нашим читателям будет приятно видеть объяснение изложенных выше правил на некоторых примерах, взятых из области высшей геодезии.

Условные уравнения, составленные между углами некоторой системы треугольников, приходится рассматривать следующих трех видов:

I. Сумма углов, которые составляют вокруг одной и той же вершины полный круг по горизонту, должна равняться четырем прямым.

II. Сумма трех углов в любом треугольнике равна некоторой определенной величине, так что если треугольник расположен на какой-либо кривой поверхности, то избыток этой суммы над двумя прямыми можно вычислить настолько точно, что его можно считать абсолютно точным.

III. Третьим видом является отношение сторон треугольников, образующих замкнутую цепь. Пусть ряд треугольников так связан между собой, что сторона второго треугольника a — общая с первым треугольником, а другая сторона b — общая с третьим треугольником; равным образом, у четвертого треугольника сторона c — общая с третьим, а сторона d — общая с пятым треугольником и т. д., вплоть до последнего треугольника, у которого сторона k — общая с предыдущим и l — с первым треугольником. Тогда значения частных

$$\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}, \dots, \frac{l}{k},$$

которые можно вычислить согласно известной теореме, т. е. на основании свойства углов, противолежащих общим сторонам в смежных треугольниках, и так как произведение таких дробей должно равняться единице, то отсюда получается условное уравнение между синусами углов (эти углы должны быть уменьшены на одну треть сферического или сфероидического избытка, если треугольники расположены на кривой поверхности).

Впрочем, в более сложных системах треугольников очень часто случается так, что условных уравнений второй и третьей группы можно составить больше, чем это требуется геометрически, так как часть из них является следствием других. Наоборот, реже бывают случаи, когда приходится добавлять к условным уравнениям второй группы такие же уравнения, которые относятся к многоугольным фигурам; это бывает только тогда, когда в триангуляции приходится иметь дело с многоугольниками, которые при наблюдениях не делятся на треугольники. Об этом вопросе, который далеко отходит от нашей темы, мы поговорим

подробнее при других обстоятельствах. Однако мы не можем обойти молчанием того замечания, что наша теория, если применение ее должно быть чистым и строгим, предполагает, что величины v, v', v'', \dots наблюдаются действительно непосредственно или выведены из наблюдений так, что они остаются независимыми одно от другого или, по крайней мере, могут рассматриваться как таковые. В обыкновенной практике наблюдаются сами углы треугольников, а поэтому их можно принять за величины v, v', v'', \dots ; но мы должны помнить, если случайно сверх того наша система содержит такие треугольники, углы которых непосредственно не наблюдались, но образованы как сумма или разность углов, наблюдаемых непосредственно, то значения их нельзя помещать в числе наблюдаемых углов, но вычислять их следует, принимая во внимание способ, каким они были определены. Иначе обстоит дело в способе наблюдений, подобном тому, который применял В. Я. Струве (*Astronomische Nachrichten*, Bd. II, S. 431), где направления отдельных сторон, выходящих из одной и той же вершины точки, получались путем сравнения их с каким-либо одним, произвольно выбранным направлением. Тогда, разумеется, эти углы должны быть приняты равными v, v', v'', \dots , после чего все углы треугольников выражаются в форме разностей, а условные уравнения первой группы, которые по самому характеру способа удовлетворяются, отпадают, как излишние. Способ наблюдений, который я сам применял в триангуляции, проложенной за последние годы, отличается как от первого, так и от второго способа, однако по получаемым результатам он может приравняться ко второму способу, так что на отдельных пунктах направления сторон, вычисленные от как бы произвольно выбранного начального направления, приняты равными величинам v, v', v'', \dots . Мы приведем здесь два примера, один из них относится к способу первому, другой — к способу второму.

23.

Первый пример мы заимствуем из труда *де Крайенгофа* «Исторический очерк тригонометрических работ, произведенных в Голландии» (*de Krayenhoff «Précis historique des opérations trigonometriques faites en Hollande»*), причем мы уравнили часть сети треугольников, которая была проложена между девятью пунктами: Harlingen, Sneek, Oldeholtgrade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde und Gröningen. Между этими пунктами была образована сеть из девяти треугольников, которые в указанном выше труде обозначены номерами: 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132; наблюдаемые в них углы, приведенные в труде *де Крайенгофа* в таблице на стр. 77—81 (они нами даны с обозначениями, отличающимися от тех, которыми пользовался автор), следующие:

Треугольник 121.

0.	Harlingen	50°58'15",238
1.	Leeuwarden	82 47 15 ,351
2.	Ballum	46 14 27 ,202

Треугольник 122.

3.	Harlingen	51 5 39 ,717
4.	Sneek	70 48 33 ,445
5.	Leeuwarden	58 5 48 ,707

Треугольник 123.

6.	Sneek	49°30' 40",051
7.	Drachten	42 52 59 ,382
8.	Leeuwarden	87 36 21 ,057

Треугольник 124.

9.	Sneek	45 36 7 ,492
10.	Oldeholtpade	67 52 0 ,048
11.	Drachten	66 31 56 ,513

Треугольник 125.

12.	Drachten	53 55 24 ,745
13.	Oldeholtpade	47 48 52 ,580
14.	Oosterwolde	78 15 42 ,347

Треугольник 127.

15.	Leeuwarden	59 24 0 ,645
16.	Dockum	76 34 9 ,021
17.	Ballum	44 1 51 ,040

Треугольник 128.

18.	Leeuwarden	72 6 32 ,043
19.	Drachten	46 53 27 ,163
20.	Dockum	61 0 4 ,494

Треугольник 131.

21.	Dockum	57 1 55 ,292
22.	Drachten	83 33 14 ,515
23.	Gröningen	39 24 52 ,397

Треугольник 132.

24.	Oosterwolde	81 54 17 ,447
25.	Gröningen	31 52 46 ,094
26.	Drachten	66 12 57 ,246

Ближайшее рассмотрение этих треугольников показывает, что между 27 углами, приближенные значения которых получены из наблюдений, можно составить 13 условных уравнений, а именно: два уравнения первой группы, девять уравнений второй группы и два уравнения третьей группы. Но нет надобности выписывать все эти уравнения в их окончательной форме, так как для вычислений требуются только величины, которые в общей теории обозначены через \mathcal{U} , a , a' , a'' , ..., \mathcal{B} , b , b' , b'' , ..., и т. д.; поэтому вместо них мы выпишем уравнения, обозначенные выше номером (13), в которых показаны эти величины; вместо букв ϵ , ϵ' , ϵ'' , ... мы будем просто писать (0), (1), (2), ...

Таким образом, двум условным уравнениям первой группы соответствуют следующие:

$$(1) + (5) + (8) + (15) + (18) = - 2'',197,$$

$$(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) = - 0'',436.$$

Сфероидические избытки треугольников будут:

1",749; 1",147; 1",243; 1",698; 0",873; 1",167; 1",104; 2",161; 1",408.

Тогда первое условное уравнение второй группы получится в таком виде*: $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180^{\circ}0'1",749 = 0$ и остальные условные уравнения будут подобного же вида. Таким образом, мы получим девять следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (0) + (1) + (2) &= - 3",958, \\ (3) + (4) + (5) &= + 0,722, \\ (6) + (7) + (8) &= - 0,753, \\ (9) + (10) + (11) &= + 2,355, \\ (12) + (13) + (14) &= - 1,201, \\ (15) + (16) + (17) &= - 0,461, \\ (18) + (19) + (20) &= + 2,596, \\ (21) + (22) + (23) &= + 0,043, \\ (24) + (25) + (26) &= - 0,616. \end{aligned}$$

Условные уравнения третьей группы удобнее выразить в логарифмической форме, первое из них имеет вид:

$$\begin{aligned} \log \sin (v^{(0)} - 0",583) - \log \sin (v^{(2)} - 0",583) - \log \sin (v^{(3)} - 0",382) + \\ + \log \sin (v^{(4)} - 0",382) - \log \sin (v^{(6)} - 0",414) + \log \sin (v^{(7)} - 0",414) - \\ - \log \sin (v^{(16)} - 0",389) + \log \sin (v^{(17)} - 0",389) - \log \sin (v^{(19)} - 0",368) + \\ + \log \sin (v^{(20)} - 0",368) = 0. \end{aligned}$$

Излишне выписывать и другое уравнение в окончательной форме. Этим двум уравнениям соответствуют следующие, в которых коэффициенты выражены в седьмом знаке Бригговых логарифмов:

$$\begin{aligned} 17,068(0) - 20,174(2) - 16,993(3) + 7,328(4) - 17,976(6) + 22,672(7) - \\ - 5,028(16) + 21,780(17) - 19,710(19) + 11,671(20) = - 371; \\ 17,976(6) - 0,880(8) - 20,617(9) + 8,564(10) - 19,082(13) + 4,375(14) + \\ + 6,798(18) - 11,671(20) + 13,657(21) - 25,620(23) - 2,995(24) + \\ + 33,854(25) = + 370. \end{aligned}$$

Так как нет никаких указаний, чтобы приписывать наблюдениям неодинаковые веса, то примем $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)} = \dots = 1$. Обозначив коррелаты условных уравнений через $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$ в том порядке, в каком мы приводили соответствующие им уравнения, для определения их получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} - 2",197 &= 5A + C + D + E + H + I + 5,917N, \\ - 0,436 &= 6B + E + F + G + I + K + L + 2,962M, \\ - 3,958 &= A + 3C - 3,106M, \\ + 0,722 &= A + 3D - 9,665M, \\ - 0,753 &= A + B + 3E + 4,696M + 17,096N, \\ + 2,355 &= B + 3F - 12,053N, \\ - 1,201 &= B + 3G - 14,707N, \end{aligned}$$

* Значки в этом примере мы предпочитаем заменить арабскими цифрами (Прим. Гаусса).

$$\begin{aligned}
& - 0,461 = A + 3H + 16,752M, \\
& + 2,596 = A + B + 3I - 8,039M - 4,874N, \\
& + 0,043 = B + 3K - 11,963N, \\
& - 0,616 = B + 3L + 30,859N, \\
- 371 & = + 2,962B - 3,106C - 9,665D + 4,696E + 16,752H - 8,039I + \\
& + 2902,27M - 459,33N, \\
+ 370 & = + 5,917A + 17,096E - 12,053F - 14,707G - 4,874I - 11,963K + \\
& + 30,859L - 459,33M + 3385,96N.
\end{aligned}$$

Посредством исключения получим из них:

$$\begin{array}{l|l|l}
A = - 0,598 & F = + 1,351 & K = + 0,577 \\
B = - 0,255 & G = + 0,271 & L = - 1,351 \\
C = - 1,234 & H = + 0,659 & M = - 0,109792 \\
D = + 0,086 & I = + 1,050 & N = + 0,119681 \\
E = - 0,477 & &
\end{array}$$

Наконец, вероятнейшие ошибки получатся по формулам:

$$\begin{aligned}
(0) & = C + 17,068M \\
(1) & = A + C \\
(2) & = C - 20,174M \\
(3) & = D - 16,993M \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

откуда мы получаем приводимые ниже их численные значения; для сравнения выписываем (изменив соответственно знаки) поправки к наблюдениям, полученные де Крайенгофом:

	Де Крайенгоф		Де Крайенгоф
(0) = - 3",108	- 2",090	(14) = + 0",795	+ 2",400
(1) = - 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	- 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = - 1,732	- 7,674
(4) = - 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = - 0,512	- 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	- 0,137	(20) = - 1,628	- 5,530
(7) = - 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = - 1,180	- 1,614	(22) = + 0,322	- 3,454
(9) = - 1,116	0	(23) = - 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = - 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	- 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = - 1,606	- 3,077
(13) = - 2,013	- 6,014		

Сумма квадратов поправок при наших уравниваниях оказалась равной 97",8845. Отсюда средняя ошибка, которая может быть выведена из 27 наблюдаемых углов,

$$= \sqrt{\frac{97",8845}{13}} = 2",7440.$$

Сумма поправок, введенных в наблюдаемые углы де Крайенгофом, равна 341",4201.

24.

Вторым примером послужат нам треугольники, составленные между пятью пунктами Ганноверской триангуляции.

Наблюдались следующие направления*:

На пункте *Falkenberg*

0.	Wilsede	187°47'30",311
1.	Wulfsode	225 9 39 ,676
2.	Hauselberg	266 13 56 ,239
3.	Breithorn	274 14 43 ,634

На пункте *Breithorn*

4.	Falkenberg	94 33 40 ,755
5.	Hauselberg	122 51 23 ,054
6.	Wilsede	150 18 35 ,100

На пункте *Hauselberg*

7.	Falkenberg	86 29 6 ,872
8.	Wilsede	154 37 9 ,624
9.	Wulfsode	189 2 56 ,376
10.	Breithorn	302 47 37 ,732

На пункте *Wulfsode*

11.	Hauselberg	9 5 36 ,593
12.	Falkenberg	45 27 33 ,556
13.	Wilsede	118 44 13 ,159

На пункте *Wilsede*

14.	Falkenberg	7 51 1 ,027
15.	Wulfsode	298 29 49 ,519
16.	Breithorn	330 3 7 ,392
17.	Hauselberg	334 25 26 ,746

* Начальные направления, относительно которых получают отдельные направления, рассматриваются здесь как произвольные, хотя они совпадали с меридианами пунктов. Впоследствии наблюдения будут полностью опубликованы, пока одна фигура помещена в журнале „*Astronomischen Nachrichten*“ (Астрономические известия), Bd. 1, S. 441.

Из этих наблюдений можно составить семь треугольников.

Треугольник I

Falkenberg	8° 0'47",395
Breithorn	28 17 42 ,299
Hauselberg	143 41 29 ,140

Треугольник II

Falkenberg	86 27 13 ,323
Breithorn	55 44 54 ,345
Wilsede	37 47 53 ,635

Треугольник III

Falkenberg	41 4 16 ,563
Hauselberg	102 33 49 ,504
Wulfsode	36 21 56 ,963

Треугольник IV

Falkenberg	78 26 25 ,928
Hauselberg	68 8 2 ,752
Wilsede	33 25 34 ,281

Треугольник V

Falkenberg	37 22 9 ,365
Wulfsode	73 16 39 ,603
Wilsede	69 21 11 ,508

Треугольник VI

Breithorn	27 27 12 ,046
Hauselberg	148 10 28 ,108
Wilsede	4 22 19 ,354

Треугольник VII

Hauselberg	34 25 46 ,752
Wulfsode	109 38 36 ,566
Wilsede	35 55 37 ,227

Тогда можно составить семь условных уравнений второй группы (уравнений первой группы, очевидно, не будет); для этого прежде всего следует вычислить сфероидические избытки семи треугольников. Для чего необходимо знать абсолютную величину, по крайней мере, одной стороны; сторона между пунктами Wilsede и Wulfsode равна 22877,94 м. На основании ее получатся сфероидические избытки треугольников:

$$I \dots 0'',202; \quad II \dots 2'',442; \quad III \dots 1'',257; \quad IV \dots 1'',919;$$

$$V \dots 1'',957; \quad VI \dots 0'',321; \quad VII \dots 1'',295.$$

Если мы обозначим теперь через $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \nu^{(3)}, \dots$ направления в том же порядке, как они приведены выше, и различающиеся индексами, то углы первого треугольника будут следующие:

$$\nu^{(3)} - \nu^{(2)}, \quad \nu^{(5)} - \nu^{(4)}, \quad 360^\circ + \nu^{(7)} - \nu^{(10)};$$

тогда первое условное уравнение примет вид

$$-v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^{\circ}59'59'',798 = 0.$$

Точно так же остальные треугольники образуют шесть других уравнений, однако небольшая внимательность покажет, что эти семь уравнений не остаются независимыми одно от другого, но что второе тождественно с суммой первого, четвертого и шестого, а сумма третьего и пятого тождественна с суммой четвертого и седьмого, поэтому мы отбросим второе и пятое уравнения. Вместо остающихся условных уравнений в окончательной форме мы выпишем соответствующие уравнения системы (13), причем вместо букв $\epsilon, \epsilon', \dots$ будем пользоваться (0), (1), (2), \dots

$$\begin{aligned} -1'',368 &= -(2) + (3) - (4) + (5) + (7) - (10), \\ +1,773 &= -(1) + (2) - (7) + (9) - (11) + (12), \\ +1,042 &= -(0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17), \\ -0,813 &= -(5) + (6) - (8) + (10) - (16) + (17), \\ -0,750 &= -(8) + (9) - (11) + (13) - (15) + (17). \end{aligned}$$

Из системы треугольников можно получить *восемь* условных уравнений третьей группы, так как для этой цели можно комбинировать по три из четырех треугольников I, II, IV, VI или из треугольников III, IV, V, VII, но немного внимания покажет нам, что достаточно *двух* уравнений: одно — из первых, другое — из последних треугольников, так как остальные должны уже содержаться в них. Итак, шестое условное уравнение у нас будет

$$\begin{aligned} \log \sin (v^{(3)} - v^{(2)} - 0'',067) - \log \sin (v^{(5)} - v^{(4)} - 0'',067) + \\ + \log \sin (v^{(14)} - v^{(17)} - 0'',640) - \log \sin (v^{(2)} - v^{(0)} - 0'',640) + \\ + \log \sin (v^{(6)} - v^{(5)} - 0'',107) - \log \sin (v^{(17)} - v^{(16)} - 0'',107) = 0 \end{aligned}$$

и седьмое

$$\begin{aligned} \log \sin (v^{(2)} - v^{(1)} - 0'',419) - \log \sin (v^{(12)} - v^{(11)} - 0'',419) + \\ + \log \sin (v^{(14)} - v^{(17)} - 0'',640) - \log \sin (v^{(2)} - v^{(0)} - 0'',640) + \\ + \log \sin (v^{(13)} - v^{(11)} - 0'',432) - \log \sin (v^{(17)} - v^{(15)} - 0'',432) = 0, \end{aligned}$$

им соответствуют, согласно системе (13), уравнения:

$$\begin{aligned} +25 &= +4,31(0) - 153,88(2) + 149,57(3) + 39,11(4) - 79,64(5) + \\ &+ 40,53(6) + 31,90(14) + 275,39(16) - 307,29(17); \\ -3 &= +4,31(0) - 24,16(1) + 19,85(2) + 36,11(11) - 28,59(12) - \\ &- 7,52(13) + 31,90(14) + 29,06(15) - 60,96(17). \end{aligned}$$

Так как отдельным направлениям мы приписываем одну и ту же точность, то, приняв $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)} = \dots = 1$ и обозначив через A, B, C, D, E, F, G коррелаты семи условных уравнений в том порядке, в каком они здесь следуют, мы определим их из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} -1,368 &= +6A - 2B - 2C - 2D + 184,72F - 19,85G, \\ +1,773 &= -2A + 6B + 2C + 2E - 153,88F - 20,69G, \\ +1,042 &= -2A + 2B + 6C - 2D - 2E + 181,00F + 108,40G, \\ -0,813 &= -2A - 2C + 6D + 2E - 462,51F - 60,96G, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0,750 = + 2 B - 2 C + 2 D + 6 E - 307,29 F - 133,65 G, \\
+ 25 & = + 184,72 A - 153,88 B + 181,00 C - 462,51 D - 307,29 E + \\
& + 224\,868 F + 16\,694,1 G, \\
- 3 & = - 19,85 A - 20,69 B + 108,40 C - 60,96 D - 133,65 E + \\
& + 16\,694,1 F + 8752,39 G.
\end{aligned}$$

При помощи исключения мы получаем:

$$\begin{aligned}
A &= - 0,225 & E &= - 0,323 \\
B &= + 0,344 & F &= + 0,000\,215\,915 \\
C &= - 0,088 & G &= - 0,005\,474\,62 \\
D &= - 0,171
\end{aligned}$$

Вероятнейшие ошибки получатся тогда по формулам:

$$\begin{aligned}
(0) &= - C + 4,31 F + 4,31 G, \\
(1) &= - B - 24,16 G, \\
(2) &= - A + B + C - 153,88 F + 19,85 G,
\end{aligned}$$

откуда их численные значения равны:

$$\begin{array}{l|l}
(0) = + 0'',065 & (9) = + 0'',021 \\
(1) = - 0,212 & (10) = + 0,054 \\
(2) = + 0,339 & (11) = - 0,219 \\
(3) = - 0,193 & (12) = + 0,501 \\
(4) = + 0,233 & (13) = - 0,282 \\
(5) = - 0,071 & (14) = - 0,256 \\
(6) = - 0,162 & (15) = + 0,164 \\
(7) = - 0,481 & (16) = + 0,230 \\
(8) = + 0,406 & (17) = - 0,139
\end{array}$$

Сумма квадратов этих ошибок равна 1,2288, отсюда средняя ошибка одного направления, выведенная из 18 направлений,

$$= \sqrt{\frac{1,2288}{7}} = 0'',4190.$$

25.

Чтобы пояснить примером вторую часть нашей теории, найдем точность, с которой получается по уравненным направлениям сторона Falkenberg — Breithorn из стороны Wilsede — Wulfode. Функция u , при помощи которой эта точность выражается в данном случае, имеет вид

$$u = 22\,877,94^m \times \frac{\sin(\nu^{(13)} - \nu^{(12)} - 0'',652) \sin(\nu^{(14)} - \nu^{(16)} - 0'',814)}{\sin(\nu^{(1)} - \nu^{(0)} - 0'',652) \sin(\nu^{(6)} - \nu^{(4)} - 0'',814)}.$$

Ее значение на основании исправленных направлений $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots$

$$= 26\,766,68 \text{ м.}$$

Дифференцирование этого выражения, если дифференциалы $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$, ... выражены в дуговых секундах, дает:

$$du = 0,16991 (dv^{(0)} - dv^{(1)}) + 0,08836 (dv^{(4)} - dv^{(6)}) - \\ - 0,03899 (dv^{(12)} - dv^{(13)}) + 0,16731 (dv^{(14)} - dv^{(16)}).$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{array}{ll} [al] = - 0,08836 & [el] = + 0,03899 \\ [bl] = + 0,13092 & [fl] = - 40,1315 \\ [cl] = - 0,00260 & [gl] = + 10,9957 \\ [dl] = + 0,07895 & [ll] = + 0,13238. \end{array}$$

Наконец, согласно изложенным выше методам, принимая метр за линейную единицу длины, находим

$$\frac{1}{P} = 0,08329, \quad \text{или} \quad P = 12,006,$$

тогда ожидаемая средняя ошибка стороны Falkenberg — Breithorn равна $0,2886m$ метра (где m — ожидаемая средняя ошибка направления, выраженная в секундах), и поэтому, если примем найденное выше значение для m , получим окончательно

$$= 0,1209 \text{ м.}$$

Впрочем, обозрение системы треугольников тотчас же покажет нам, что пункт Hauselberg может быть совершенно исключен из нее, и этим не нарушится связь между сторонами Wilsede—Wulfsode и Falkenberg—Breithorn. Но хорошему методу не приличествуют наблюдения, которые относятся к пункту Hauselberg*, так как, очевидно, они служат для повышения точности системы. Чтобы показать яснее, насколько они повышают точность, мы произведем вычисления снова, исключив из них все, что относится к пункту Hauselberg. Из приведенных выше 18 направлений отпадают 8, и вероятнейшими ошибками остальных будут:

$$\begin{array}{ll} (0) = + 0'',327 & (12) = + 0'',206 \\ (1) = - 0,206 & (13) = - 0,206 \\ (3) = - 0,121 & (14) = + 0,327 \\ (4) = + 0,121 & (15) = + 0,206 \\ (6) = - 0,121 & (16) = + 0,121 \end{array}$$

Значение стороны Falkenberg—Breithorn тогда равняется $26766,63 \text{ м}$, действительно, оно мало отличается от полученного выше, но вычисление веса дает

$$\frac{1}{P} = 0,13082, \quad \text{или} \quad P = 7,644,$$

а потому средняя ожидаемая ошибка равна $0,36169m$ метров $= 0,1515 \text{ м}$. Отсюда ясно, что, принимая в расчет наблюдения, относящиеся к пункту Hauselberg, мы тем самым увеличим вес определения стороны Falkenberg — Breithorn в отношении чисел 12,006 и 7,644, т. е. приведя их к единице в 1,571 раз.

* Большая часть этих наблюдений была уже закончена прежде чем был отрекогносцирован пункт Breithorn и введен в систему триангуляции.

**Theoria motus corporum coelestium in sectionibus
conicis Solem ambientium,
Hamburgi, 1809
Liber II, Sectio III**

**Теория движения небесных тел, вращающихся
вокруг Солнца по коническим сечениям**

Гамбург, 1809 г.

КНИГА ВТОРАЯ

Раздел третий

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ, ВОЗМОЖНО ТОЧНО
УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ ЛЮБОМУ ЧИСЛУ НАБЛЮДЕНИЙ**

172.

Если бы астрономические наблюдения и другие числовые данные, на которых основывается вычисление орбит, имели абсолютную точность, то в таком случае и элементы ее, получены ли они по трем или четырем наблюдениям, тоже были бы абсолютно точными (по крайней мере, если предполагается, что движение совершается точно по законам Кеплера), так что все новые наблюдения могут их подтвердить, а не исправлять. Но так как в действительности все наши измерения и наблюдения представляют собой только приближения к истине, и то же самое можно предполагать о всех, основанных на них вычислениях, то окончательную цель этих вычислений сложных явлений следует видеть в том, чтобы возможно ближе подойти к истине. Этого можно достигнуть только целесообразной комбинацией большого числа наблюдений, что обязательно требуется для определения неизвестных величин. Но такой труд можно предпринять тогда, когда орбита уже приближенно известна; ее затем нужно исправить, чтобы она *возможно точнее* удовлетворяла всем наблюдениям. Хотя может показаться, что такое выражение вносит что-то неопределенное, но мы приведем ниже правила, на основании которых задача получит решение наиболее целесообразное и систематическое.

Добиваться наивысшей точности следует стараться только тогда, когда будет приложено как бы последнее усилие к определению орбиты. Наоборот, пока есть еще надежда, что вскоре новые наблюдения дадут повод для новых исправлений, то, смотря по обстоятельствам, следует отказаться от крайней точности, если при этом можно облегчить вычисления. Мы постараемся рассмотреть оба случая.

173.

Прежде всего особенно важно, чтобы отдельные геоцентрические места (положения) небесного тела, орбиту которого предположено вычислить, выводились не из отдельных наблюдений, но, если это воз-

можно, из нескольких, комбинированных так, чтобы случайные ошибки, по возможности, уничтожались, т. е. такие отдельные наблюдения, которые производились с промежутками в несколько дней — или, в зависимости от обстоятельств, с промежутком 15—20 дней — при вычислениях принимались не за отдельные положения. Но лучше было бы выводить из них одно положение, которое будет как бы средним, к тому же мы получим тогда значительно большую точность, чем из отдельных, особо рассматриваемых наблюдений. Этот способ основан на следующих соображениях.

Геоцентрические места небесного тела, вычисленные на основании приближенных элементов, мало отличаются от истинных мест и разности между ними испытывают только очень медленные изменения, так что в течение нескольких дней их можно рассматривать почти как постоянные, или, по крайней мере, их изменения можно считать пропорциональными времени. Поэтому, если бы наблюдения были свободны от всякой ошибки, то разности между местами, наблюденными в моменты t, t', t'', t''', \dots и соответствующими местами, вычисленными по элементам, т. е. разности полученных из наблюдений долгот и широт или прямых восхождений и склонений и вычисленных на основании наблюдений, будут величинами или почти равными, или, по крайней мере, равномерно и весьма медленно возрастающими или убывающими. Пусть, например, этим моментам соответствуют наблюденные прямые восхождения $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$, из вычислений же получены $\alpha + \delta, \alpha' + \delta', \alpha'' + \delta'', \alpha''' + \delta''', \dots$, тогда разности $\delta, \delta', \delta'', \delta''', \dots$ будут отступать от истинных отклонений элементов настолько, насколько ошибочны были сами наблюдения. Следовательно, если эти отклонения для всех наблюдений можно рассматривать как постоянные, то количества $\delta, \delta', \delta'', \delta''', \dots$ дадут столько же различных определений одной и той же величины, для правильного значения которой поэтому следует принять среднее арифметическое из этих определений, поскольку нет основания сделать предпочтение для той или иной величины. Если, в действительности, отдельным наблюдениям нельзя приписать одинаковую степень точности, то мы предполагаем, что степень точности отдельных наблюдений должна считаться соответственно пропорциональной числам e, e', e'', e''', \dots , т. е. ошибки, обратно пропорциональные этим числам, должны случаться при наблюдениях с одинаковой легкостью. Тогда, согласно изложенным ниже соображениям, вместо простого среднего арифметического значения наиболее вероятным будет среднее значение вида

$$\frac{e^2 \delta + e'^2 \delta' + e''^2 \delta'' + e'''^2 \delta''' + \dots}{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \dots}.$$

Полагая это среднее значение равным Δ , для истинных прямых восхождений следует принять соответственно $\alpha + \delta - \Delta, \alpha' + \delta' - \Delta, \alpha'' + \delta'' - \Delta, \alpha''' + \delta''' - \Delta, \dots$ и тогда будет безразлично, какой величиной пользоваться в вычислениях. Но если наблюдения разделены одно от другого слишком большим промежутком времени, или мы не располагаем еще достаточно близкими к истине элементами орбиты, так что отклонения от нее нельзя считать постоянными для всех наблюдений, то легко видеть, что разница получится только в том, что найденное выше среднее отклонение не будет общим для всех наблюдений. Гораздо лучше отнести его к среднему моменту времени, который следует вывести из отдельных моментов времени, подобно тому как Δ выводится из отдельных отклонений; вообще этот момент времени равен:

$$\frac{e^2 t + e'^2 t' + e''^2 t'' + e'''^2 t''' + \dots}{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \dots}.$$

Если желательно добиваться наивысшей точности, то следует вычислить для этого же самого момента времени на основании элементов орбиты геоцентрическое место, а затем освободить его от средней ошибки Δ , чтобы положение небесного тела получилось наиболее точным; впрочем, чаще всего довольствуются тем, что среднюю ошибку относят к наблюдению, которое ближе отстоит от среднего момента времени. То, что мы говорили здесь о прямых восхождениях, действительно также и для склонений, или, если хотите, и для долгот и широт; однако же всегда предпочтительнее сравнивать прямые восхождения и склонения, вычисленные непосредственно из элементов орбиты, с полученными на основании наблюдений; в этом случае мы не только получаем выгоду в более быстром производстве вычислений, особенно, если пользуемся способами, изложенными в § 53—60*, но этот способ следует рекомендовать еще потому, что он позволяет использовать неполные наблюдения, между тем как если вести вычисления на основании долгот и широт, то всегда можно опасаться, что в наблюдении с правильным прямым восхождением плохо определено склонение (или наоборот); и в том и в другом случае наблюдение испорчено, и его нельзя было бы использовать. Впрочем, согласно приведенным выше соображениям, степень точности, приписываемая найденному нами среднему значению, равна $\sqrt{e^2 + e'^2 + e''^2 + e'''^2 + \dots}$, так что требуется произвести четыре или девять наблюдений одинаковой точности, чтобы среднее из них было в два или три раза точнее и т. д.

174.

Если орбита небесного тела определена согласно методам, изложенным в предыдущих главах, по трем или четырем геоцентрическим положениям, которые сами в отдельности по правилам § 173 образованы из многих наблюдений, то эта орбита среди всех наблюдений будет занимать как бы среднее положение, и в разностях между найденными и вычисленными местами не останется и следа какой-либо закономерности, которую можно было бы уничтожить или чувствительно ослабить внесением поправок в элементы орбиты.

Поскольку все наблюдения охватывают не слишком большой промежуток времени, то таким способом следует достигнуть наилучшего согласия элементов со всеми наблюдениями, если удастся подобрать три или четыре положения, которые будут считаться, так сказать, нормальными. При определении орбит новых комет или планет, наблюдения над которыми ведутся еще меньше года, мы таким способом можем в большинстве случаев достичь столь многого, как это позволяют обстоятельства. Если определяемая орбита наклонена к эклиптике на значительный угол, то она определяется обыкновенно по трем наблюдениям, которые выбирают возможно дальше одно от другого; но если при этом мы встретимся, в действительности, с одним из исключительных случаев (см. § 160—162)*, или наклон орбиты окажется слишком мал, то мы предпочтем определять ее по четырем наблюдениям, которые мы тоже берем возможно дальше одно от другого.

* Здесь Гаусс указывает параграфы по тексту «Теории движения небесных тел» (Прим. ред.).

Но если в нашем распоряжении имеется более длинный ряд наблюдений, охватывающий многие годы, то на основании их можно вывести много нормальных мест, а потому мы плохо позаботились бы о получении наибольшей точности, если бы для определения орбиты взяли три или четыре положения, а все остальные совершенно отбросили. Поэтому, если желательно добиваться получения наибольшей точности, то в таком случае лучше тщательно подобрать возможно большее число положений и использовать их в вычислениях. Тогда в нашем распоряжении будет больше данных, чем это требуется для определения неизвестных; но все эти данные заключают в себе ошибки, хотя бы и незначительные, так что вообще не представляется возможным удовлетворить их полностью. Так как нет никакого основания принимать за абсолютно точные те или другие шесть данных, то лучше, согласно законам теории вероятностей, предположить, что в них без различия одинаково могут встречаться ошибки более крупные и более мелкие; так как, вообще говоря, более мелкие ошибки встречаются чаще, чем более крупные, то очевидно, что такая орбита, которая точно удовлетворяет шести данным, но в большей или меньшей степени отклоняется от других, должна считаться менее соответствующей истине, согласно законам теории вероятностей, нежели другая, которая, хотя и несколько не согласуется с этими шестью данными, но зато лучше сходится с остальными. Исследование орбиты, которая, в строгом смысле слова, считается *наиболее* вероятной, зависит от знания закона, согласно которому с возрастанием величины ошибок вероятность их уменьшается; но этот закон зависит, в действительности, от столь многих соображений, неопределенных или сомнительных, а также физиологических, которые не поддаются вычислению, что такой закон вряд ли когда-нибудь надлежащим образом можно подметить в каком-либо случае астрономической практики. Тем не менее, исследование связи между таким законом и наиболее вероятной орбитой, которое мы произведем в самой общей форме, ни коим образом не следует считать бесплодным рассуждением.

175.

Для этой цели мы перейдем от нашей частной задачи к исследованию в самом общем виде, которое оказывается весьма плодотворным при всяком приложении математики к вопросам естествознания. Пусть V, V', V'', \dots — функции неизвестных p, q, r, s, \dots ; μ — число этих функций; ν — число неизвестных; предположим, что из непосредственных наблюдений найдены значения этих функций $V=M, V'=M', V''=M'', \dots$. Вообще говоря, определение неизвестных величин представляет собой задачу неопределенную, определенную или переопределенную (определенную с избытком); смотря по тому, будет ли $\mu < \nu, \mu = \nu$ или $\mu > \nu \dots$ *. Здесь речь будет идти только о последнем случае, в котором, очевидно, что точное представление о всех наблюдениях возможно только тогда, когда все они будут абсолютно безошибочны. Но так как в действительности этого никогда не бывает, то каждая система неизвестных p, q, r, s, \dots может считаться возможной, если на основании ее полу-

* Если в последнем случае функции $V, V', V'' \dots$ составлены так, что $\mu + 1 = \nu$ из них или большее число можно рассматривать как функции остальных, то задача по отношению к этим функциям будет определенной с избытком, а по отношению к величинам p, q, r, s, \dots неопределенной; конечно, их значения следует определять только тогда, когда значения функций V, V', V'', \dots даны с абсолютной точностью, но этим частным случаем мы не будем заниматься в нашем исследовании.

(Прим. Гаусса).

чаются функции $M - V$, $M' - V'$, $M'' - V''$, ..., не превосходящие пределов ошибок, которые могут быть сделаны при этих наблюдениях; однако ни в коем случае не следует считать, будут ли иметь такие возможные системы одинаковую степень вероятности.

Предположим в первую очередь, как это у всех наблюдений в действительности и замечается, что нет никаких оснований считать, почему бы одно наблюдение было менее точным, чем другое, и что одинаковые по величине ошибки у отдельных наблюдений следует принимать за равновероятные. Итак, вероятность, приписываемая любой ошибке Δ , выразится функцией от Δ , которую мы будем обозначать $\varphi(\Delta)$. Хотя эта функция не может быть задана в точном виде, но, по крайней мере, мы можем утверждать, что ее максимум получится, когда $\Delta = 0$, и что в большинстве случаев она одинакова для равных и противоположных по знаку значений Δ и, наконец, превращается в нуль, если принять Δ равной наибольшей ошибке или еще большей величине. Собственно, функцию $\varphi(\Delta)$ следует отнести к роду функций прерывных (терпящих разрыв), но если для практических целей мы заменим ее аналитической функцией, то последняя должна быть составлена так, чтобы от значения $\Delta = 0$ в обе стороны она асимптотически приближалась к нулю, так что вне известных пределов ее можно рассматривать как величину, в действительности равную нулю. Далее вероятность, что ошибка лежит между пределами Δ и $\Delta + d\Delta$, отстоящими один от другого на бесконечно малую величину $d\Delta$, должна быть выражена через $\varphi(\Delta) d\Delta$; поэтому, вообще, вероятность, что ошибка лежит между D и D' , выразится интегралом $\int \varphi(\Delta) d\Delta$, взятым в пределах от $\Delta = D$ до $\Delta = D'$. Если взять этот интеграл в пределах от наибольшего отрицательного значения Δ до его наибольшего положительного значения, т. е. вообще в более общем виде от $\Delta = -\infty$ до $\Delta = +\infty$, то получим, что он равен единице.

Предположим теперь, что задана некоторая определенная система значений величин p, q, r, s , тогда вероятность, что V получит из наблюдений значение M , выразится через $\varphi(M - V)$, если мы подставим в V значения p, q, r, s, \dots ; равным образом $\varphi(M' - V')$, $\varphi(M'' - V'')$, ... выразят вероятности, что функции V', V'', \dots получат из наблюдений значения M', M'', \dots . Поэтому, так как все наблюдения следует рассматривать как независимые одна от другой величины, то произведение

$$\varphi(M - V) \varphi(M' - V') \varphi(M'' - V'') \dots = \Omega$$

выражает ожидание или вероятность, что все эти значения получаются одновременно из наблюдений.

176.

Подобно тому как до наблюдений при допущении каких-либо определенных значений неизвестных каждой системе функций V, V', V'' и т. д. придается определенная вероятность, так и, наоборот, после того как из наблюдений были получены определенные значения функций, отдельным определенным системам неизвестных, из которых они могли вытекать, соответствует определенная вероятность; очевидно, более вероятными следует считать именно те системы, для которых ожидание полученных результатов больше. Оценка этой вероятности основывается на следующей теореме.

Если, согласно некоторой гипотезе H , вероятность какого-либо определенного события E равна h , а согласно другой гипотезе H' , несовместной с первой и равновероятной, вероятность того же события

равна h' , то я утверждаю, что, если событие E действительно произошло, то вероятность, что H — правильная гипотеза, относится к вероятности, что H' — правильная гипотеза, как h относится к h' .

Для доказательства этой теоремы предположим: принимая во внимание различие между всякого рода обстоятельствами, от которых зависит, будет ли справедлива гипотеза H , H' или какая-нибудь другая, должно ли совершиться событие E или какое-нибудь другое, образуем систему различных случаев, которые одни сами по себе (т. е. пока остается неизвестным, произойдет ли событие E или другое) должны рассматриваться как равновероятные; эти случаи распределим так:

Какое число случаев	К какой гипотезе они относятся	Какое должно произойти событие (при каких условиях)
m	H	E
n	H	иной, чем E
m'	H'	E
n'	H'	иной, чем E
m''	иная, чем H и H'	E
n''	иная, чем H и H'	иной, чем E

Тогда получим $h = \frac{m}{m+n}$, $h' = \frac{m'}{m'+n'}$; затем вероятность гипотезы H до наступления известного события была $= \frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$, а после известного события, когда выбывают из числа возможных случаи n , n' , n'' , вероятность той же гипотезы будет равна $\frac{m}{m+m'+m''}$ равным образом вероятность гипотезы H' до и после события выразится соответственно через $\frac{m'+n'}{m+n+m'+n'+m''+n''}$ и $\frac{m'}{m+m'+m''}$, но так как, до известного события (до получения известного результата), гипотезам H и H' приписывалась одинаковая вероятность, то

$$m+n = m'+n',$$

откуда немедленно становится очевидной справедливость теоремы.

Так как мы предполагаем, что, помимо наблюдений $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M'' \dots$, не имеется никаких других данных для определения неизвестных, и к тому же все системы неизвестных, до наблюдений их, были равновероятны, то очевидно, что после наблюдений вероятность каждой определенной системы пропорциональна Ω . Это надо понимать так, что вероятность того, что значения неизвестных заключаются соответственно между бесконечно близкими пределами p и $p+dp$, q и $q+dq$, r и $r+dr$, s и $s+ds \dots$, выразится через $\lambda \Omega dpdqdrds$, где λ — постоянная величина, не зависящая от $p, q, r, s \dots$. И, конечно, очевидно, что $\frac{1}{\lambda}$ будет равно следующему интегралу порядка $\int^v \Omega dpdqdrds \dots$, если отдельные переменные интегрировать в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Отсюда само собой следует, что вероятнейшей системой значений величин p, q, r, s, \dots будет та, при которой Ω принимает максимальное

а так как на основании элегантно́й теоремы, впервые предложенной знаменитым *Лапласом*, интеграл

$$\int e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

в пределах от $\Delta = -\infty$ до $\Delta = +\infty$ (где π обозначает длину полуокружности, радиус которой равен единице), то наша функция примет вид

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}.$$

178.

Полученная таким образом функция, очевидно, не может со всей строгостью выразить вероятности ошибок. Так как возможные ошибки всегда заключаются в известных пределах, то вероятность более крупной ошибки (лежащей вне этих пределов) всегда должна равняться нулю, а между тем наша формула всегда дает некоторое конечное число. Однако этот недостаток, которым страдает по природе своей всякая аналитическая функция, для любых практических целей не имеет никакого значения, так как, если только $h\Delta$ достигает значительной величины, значение нашей функции уменьшается так быстро, что его вполне можно принять равным нулю. Кроме того, сама природа вопроса никогда не позволит, чтобы пределы ошибок были установлены с абсолютной строгостью.

Впрочем, постоянная h может рассматриваться как мера точности наблюдений. Действительно, если допустить, что в некоторой системе наблюдений вероятность Δ выразится через

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2},$$

а в другой системе наблюдений, более точных или менее точных,—через

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2},$$

то ожидание, что в каком-нибудь наблюдении из первой системы ошибка находится в пределах $-\delta$ и $+\delta$, выразится интегралом

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta,$$

взятым в пределах от $\Delta = -\delta$ до $\Delta = +\delta$; равным образом, ожидание, что ошибка какого-либо наблюдения второй системы не выйдет из пределов $-\delta$ и $+\delta$, выразится интегралом

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} d\Delta,$$

взятым в пределах от $\Delta = -\delta'$ до $\Delta = \delta'$; впрочем, оба интеграла, очевидно, равны, поскольку $h\delta = h'\delta'$. Поэтому, например, если $h' = 2h, \dots$, то это значит, что в два раза бóльшая ошибка в первой системе может случиться так же легко, как и ошибка во второй системе, т. е. в два раза бóльшая ошибка в первой системе равновероятна простой ошибке во второй системе; в таком случае, вообще принято говорить, что наблюдениям второй системы приписывается вдвое бóльшая точность.

Рассмотрим теперь следствия, вытекающие из этого закона. Саме собой разумеется, чтобы произведение

$$\Omega = h^\mu \pi - \frac{1}{2} \mu e - h^2 (v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots)$$

было максимумом, сумма $v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots$ должна быть минимумом. Итак, *вероятнейшая система значений неизвестных p, q, r, s получится тогда, когда квадраты разностей между наблюдаемыми и вычисленными значениями функций $V, V', V'' \dots$ дают наименьшую возможную сумму*, если только можно предполагать, что все наблюдения имеют одинаковую точность.

Этот принцип, который очень часто бывает полезен во всех применениях математики к естественным наукам, должен считаться за аксиому, подобно тому как и среднее арифметическое из многих наблюдаемых значений одной и той же величины принимается за наиболее вероятное ее значение.

Этот принцип без всяких затруднений можно теперь распространить на наблюдения *неодинаковой* точности. Без сомнения, если меру точности наблюдений, при помощи которой найдено, что $V = M, V' = M', V'' = M'', \dots$, соответственно можно выразить через h, h', h'', \dots , т. е. если предположить, что ошибки, обратно пропорциональные этим величинам, могут встречаться в наблюдениях одинаково легко (равновероятны), то, очевидно, это происходит от того, как если бы в наблюдениях одинаковой точности (мера которой равна единице) значения функций $hV, h'V', h''V'', \dots$ непосредственно были получены равными $hM, h'M', h''M'', \dots$, поэтому вероятнейшее значение системы величин p, q, r, s, \dots получится тогда, когда сумма $h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 + \dots$, т. е. когда *сумма квадратов разностей между действительно наблюдаемыми и вычисленными значениями, умноженными на квадраты чисел, служащих мерой их точности, будет минимумом*. Поэтому вовсе не является необходимым, чтобы функции V, V', V'', \dots принадлежали к величинам однородным, но они могут представлять собой и величины неоднородные (например, секунды дуги и времени), если только можно судить об отношениях их ошибок, которые, каждая в отдельности могут совершаться с одинаковой легкостью (быть равновероятны).

180.

Изложенный в предыдущем параграфе принцип заслуживает внимания также на том основании, что численное определение неизвестных приводит к очень удобному способу вычислений (алгоритму), если V, V', V'', \dots — линейные функции. Примем, что

$$\begin{aligned} M - V &= v = -m + ap + bq + cr + ds + \dots, \\ M' - V' &= v' = -m' + a'p + b'q + c'r + d's + \dots, \\ M'' - V'' &= v'' = -m'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и положим

$$\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \dots &= P, \\ bv + b'v' + b''v'' + \dots &= Q, \\ cv + c'v' + c''v'' + \dots &= R, \\ dv + d'v' + d''v'' + \dots &= S. \end{aligned}$$

Тогда в уравнениях, приведенных в § 177, из которых должны определяться значения неизвестных, будут следующие:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0 \dots$$

если только мы будем предполагать, что наблюдения одинаково хороши; к этому случаю, согласно указаниям предыдущего параграфа, приводятся и все остальные. Следовательно, в нашем распоряжении имеется столько уравнений, сколько требуется для определения неизвестных, значения которых выводятся из них методом исключения.

Посмотрим теперь, всегда ли возможно такое исключение, или иногда решение может оказаться неопределенным или даже невозможным. Из теории решения уравнений известно, что второй или третий случай бывают тогда, когда из уравнений $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0, \dots$, при опускании одного из них, можно составить уравнение, которое окажется тождественным с опущенным уравнением или противоречащим ему, или, что то же самое, если задана линейная функция $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \dots$, которая или тождественно равна нулю или, по крайней мере, не содержит ни одного из неизвестных p, q, r, s, \dots . Итак, предположим, что существует функция

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \dots = x.$$

Тогда само собой получится тождественное уравнение

$$(v + m)v + (v' + m')v' + (v'' + m'')v'' + \dots = pP + qQ + rR + sS + \dots$$

Если мы теперь допустим, что после подстановок $p = \alpha x, q = \beta x, r = \gamma x, s = \delta x, \dots$ функции v, v', v'', \dots превратятся соответственно в $-m + \lambda x, -m' + \lambda' x, -m'' + \lambda'' x$, то, очевидно, получится тождественное уравнение

$$(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots) x^2 - (\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \dots) x = x x,$$

т. е. получим

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \dots = 0, \quad x + \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \dots = 0,$$

но отсюда необходимо должно получиться $\lambda = 0, \lambda' = 0, \lambda'' = 0, \dots$ а следовательно, $x = 0$. Отсюда ясно, что все функции V, V', V'', \dots составлены так, что значения их не изменяются, если p, q, r, s, \dots увеличиваются или уменьшаются на какие-либо величины, пропорциональные $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, но мы уже упоминали выше, что такие случаи, в которых определение неизвестных явно невозможно, если даже даны истинные значения функций V, V', V'', \dots не относятся к нашему исследованию.

Впрочем, к рассмотренному здесь случаю можно легко привести и все остальные, когда функции V, V', V'', \dots не линейные. Действительно, обозначим через $\pi, \chi, \rho, \sigma, \dots$ приближенные значения неизвестных p, q, r, s (которые мы можем легко вывести, если из μ уравнений $V = M, V' = M', V'' = M'', \dots$ мы сперва воспользуемся только ν уравнениями) и вместо неизвестных введем другие p', q', r', s', \dots , причем предположим, что $p = \pi + p', q = \chi + q', r = \rho + r', s = \sigma + s', \dots$; в таком случае ясно, что значения этих новых неизвестных так малы, что можно пренебречь их квадратами и произведениями, так что уравнения сами по себе сделаются линейными. Но если, после окончания вычислений значения неизвестных p', q', r', s', \dots окажутся, вопреки ожиданиям, столь малы, что будет не безопасно отбросить их квадраты и произведения, то быструю помощь в этом случае окажет повторение операции (если вместо $\pi, \chi, \rho, \sigma, \dots$ взять исправленные значения p, q, r, s, \dots).

Поэтому всякий раз, когда существует одна только неизвестная p , для определения которой найдены значения функций $ap + n$, $a'p + n'$, $a''p + n''$, ..., соответственно равные M , M' , M'' , ..., и при том из наблюдений одинаковой точности, то вероятнейшее значение p

$$= \frac{am + a'm' + a''m'' + \dots}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots} = A,$$

если вместо $M - n$, $M' - n'$, $M'' - n''$, ... мы напишем m , m' , m'' ...

Чтобы оценить теперь степень точности, которую мы приписываем этому значению, предположим, что вероятность ошибки Δ в этих наблюдениях выразится через

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}.$$

Тогда вероятность, что истинное значение p равно $A + p'$, будет пропорциональна функции

$$e^{-h^2 [(ap - m)^2 + (a'p - m')^2 + (a''p - m'')^2 + \dots]},$$

если вместо p подставить $A + p'$. Показатель степени этой функции можно привести к виду

$$-h^2 [a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots] (p^2 - 2pA + B),$$

где B не зависит от p , следовательно, наша функция пропорциональна функции

$$e^{-h^2 (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots) p'^2}.$$

Итак, ясно, что значению A надо приписать такую точность, как если бы она была найдена из непосредственных наблюдений, точность которых относится к точности первоначальных наблюдений, как $h \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}$... относится к h или как $\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}$... относится к единице.

Исследованию о степени точности, приписываемой значениям неизвестных, если их имеется большое число, следует предпослать более внимательное рассмотрение функции $v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots$, которую мы будем обозначать через W .

I. Предположим, что

$$\frac{1}{2} \frac{dW}{dp} = p' = \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \varepsilon s + \dots$$

и

$$W - \frac{p'^2}{\alpha} = W',$$

тогда, очевидно, $p' = P$, и так как

$$\frac{dW'}{dp} = \frac{dW}{dp} - \frac{2p'}{\alpha} \frac{dp'}{dp} = 0,$$

то функция W' не зависит от p . Коэффициент $\alpha = a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots$, очевидно, всегда будет положительной величиной.

II. Затем, предположим, что

$$\frac{1}{2} \frac{dW'}{dq} = q' = \lambda' + \beta'q + \gamma'r + \delta's + \dots$$

и

$$W' - \frac{q'^2}{\beta'} = W''$$

тогда будем иметь

$$q' = \frac{1}{2} \frac{dW}{dq} - \frac{p'}{\alpha} \frac{dp'}{dq} = Q - \frac{\beta}{\alpha} p' \quad \text{и} \quad \frac{dW''}{dq} = 0,$$

откуда ясно, что функция W'' не зависит от p и q . Этого не произойдет, если β' равно нулю. Но очевидно, что W' получается из $v^2 + v'^2 + v''^2 + \dots$, если величина p будет выведена из v, v', v'', \dots при помощи уравнения $p' = 0$, следовательно, после такого исключения β' будет суммой коэффициентов при q^2 в v^2, v'^2, v''^2, \dots , но сами коэффициенты в действительности представляют собой квадраты и все вместе не могут сделаться нулями, за исключением случая, который мы выше уже исключили из наших исследований, когда все неизвестные остаются неопределенными. Поэтому очевидно, что β должна быть положительной величиной.

III. Положим далее, что

$$\frac{1}{2} \frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma''r + \delta''s + \dots$$

и

$$W'' - \frac{r'^2}{\gamma''} = W''',$$

тогда получим

$$r' = R - \frac{\gamma}{\alpha} p' - \frac{\gamma'}{\beta'} q'$$

и W''' не зависит ни от p , ни от q , ни от r . Впрочем, коэффициент γ должен быть положительным, что можно доказать по способу, описанному в пункте II. Действительно, легко видеть, что γ'' — сумма квадратов при r^2 в v^2, v'^2, v''^2, \dots , после того как величины p и q исключены из v, v', v'', \dots при помощи уравнений $p' = 0, q' = 0$.

IV. Подобным же образом, приняв, что

$$\frac{1}{2} \frac{dW'''}{ds} = s' = \lambda''' + \delta'''s + \dots \quad \text{и} \quad W^{IV} = W''' - \frac{s'^2}{\delta'''},$$

мы получим

$$s' = S - \frac{\delta}{\alpha} p' - \frac{\delta'}{\beta'} q' - \frac{\delta''}{\gamma''} r',$$

W^{IV} не зависит от p, q, r, s и δ''' — величина положительная.

V. Точно так же, если, помимо p, q, r, s , имеются и другие неизвестные, то можно пойти в своих рассуждениях еще дальше, так что мы, наконец, будем иметь

$$W = \frac{1}{\alpha} p'^2 + \frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\gamma'''} s'^2 + \dots + \text{const},$$

где все коэффициенты $\alpha, \beta', \gamma'', \delta'''$, ... — положительные величины.

VI. Вероятность любой системы определенных значений величин p, q, r, s, \dots пропорциональна* функции $e^{-h^2 W}$, так что если значение величины p остается переменной (indeterminata), то вероятность системы определенных значений остальных величин будет пропорциональна интегралу $\int e^{-h^2 W} dp$, взятому в пределах от $p = -\infty$ до $p = +\infty$, который по теореме Лапласа

$$= h^{-1} \alpha^{-1/2} \pi^{1/2} e^{-h^2 \left[\frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \dots \right]}.$$

Следовательно, упомянутая выше вероятность пропорциональна функции $e^{-h^2 W'}$. Равным образом, если, кроме того, рассматривать q как величину переменную, то тогда вероятность системы определенных значений r, s, \dots будет пропорциональна интегралу

$$\int e^{-h^2 W'} dq,$$

взятому в пределах от $q = -\infty$ до $q = +\infty$, который

$$= h^{-1} \beta'^{-1/2} \pi^{1/2} e^{-h^2 \left[\frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \dots \right]}$$

или пропорционален функции $e^{-h^2 W''}$. Совершенно подобным же образом, если рассматривать r как переменную, вероятность остальных величин s и т. д. будет пропорциональна функции $e^{-h^2 W'''}$ и т. д. Предположим, что число неизвестных дошло до четырех, тогда выведенное нами заключение останется справедливым как для большего, так и для меньшего числа неизвестных. Вероятнейшее значение s будет тогда равно $-\frac{\lambda'''}{\delta'''}$, и вероятность, что оно отличается от истинного на величину σ ,

будет пропорциональна функции $e^{-h^2 \delta''' \sigma^2}$, откуда заключаем, что меру относительной точности, приписываемую этому определению, следует выразить через $\sqrt{\delta'''}$, если принять, что мера точности, приписываемая первоначальным наблюдениям, принята равной единице.

183.

Согласно методу, изложенному в предыдущем параграфе, мера точности может быть удобно выражена только для той неизвестной, которой при исключении отведено последнее место; чтобы избежать этого неудобства, следует вывести коэффициент δ''' другим способом. Из уравнений:

* Равна произведению функции

$$e^{-h^2 \left(\frac{1}{\alpha} p'^2 + \frac{1}{\beta} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \dots \right)}$$

на постоянный множитель

$$\frac{h^y \sqrt{\alpha \beta' \gamma'' \delta'''} \dots e^{-h^2 \text{const}}}{(\sqrt{\pi})^y},$$

где const означает последний постоянный член выражения W . (Рукописное прим. Гаусса на латинском языке).

$$P = p',$$

$$Q = q' + \frac{\beta}{\alpha} p',$$

$$R = r' + \frac{\gamma'}{\beta'} q' + \frac{\gamma}{\alpha} p',$$

$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r' + \frac{\delta'}{\beta'} q' + \frac{\delta}{\alpha} p'$$

следует, что p', q', r', s' можно выразить через P, Q, R, S .
Таким образом

$$p' = P,$$

$$q' = Q + \mathfrak{A} P,$$

$$r' = R + \mathfrak{B}' Q + \mathfrak{A}' P,$$

$$s' = S + \mathfrak{C}'' R + \mathfrak{B}'' Q + \mathfrak{A}'' P,$$

где $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''$ — некоторые определенные величины. Тогда получим (если число неизвестных ограничим четырьмя):

$$s = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''} P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''} Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''} R + \frac{1}{\delta'''} S.$$

Отсюда мы выводим следующее заключение. Вероятнейшие значения неизвестных p, q, r, s, \dots , выведенные при помощи исключения из уравнений $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0, \dots$, очевидно, выразятся в линейной форме через P, Q, R, S , если мы на некоторое время будем рассматривать P, Q, R, S, \dots как переменные величины; в таком случае получим:

$$p = L + AP + BQ + CR + DS + \dots,$$

$$q = L' + A'P + B'Q + C'R + D'S + \dots,$$

$$r = L'' + A''P + B''Q + C''R + D''S + \dots,$$

$$s = L''' + A'''P + B'''Q + C'''R + D'''S + \dots,$$

.....

Отсюда вероятнейшие значения p, q, r, s, \dots , очевидно, будут соответственно равны L, L', L'', L''', \dots и приписываемая этим значениям мера точности выразится соответственно через $\sqrt{\frac{1}{A}}, \sqrt{\frac{1}{B'}}, \sqrt{\frac{1}{C''}}, \sqrt{\frac{1}{D'''}} \dots$, если принять, что точность первоначальных наблюдений равна единице. То, что мы раньше показали относительно определения неизвестной s (для которой δ''' соответствует $\frac{1}{D'''}),$ можно распространить и на все остальные неизвестные, производя только их перестановку*.

* Если степень точности величин a, b, c, \dots равна $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, то степень точности величины $x = a + b + c + \dots$ будет равна

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}}$$

(Рукописное прим. Гаусса на латинском языке).

Чтобы пояснить примером предыдущие исследования, допустим, что из наблюдений, точность которых принята одинаковой, было найдено

$$\begin{aligned} p - q + 2r &= 3, \\ 3p + 2q - 5r &= 5, \\ 4p + q + 4r &= 21, \end{aligned}$$

но на основании четвертого наблюдения, которому приписывается только половинная точность, получилось

$$-2p + 6q + 6r = 28.$$

Вместо этого последнего уравнения мы введем следующее:

$$-p + 3q + 3r = 14$$

и допустим, что оно получилось на основании наблюдения одинаковой точности с предшествующими.

Тогда мы будем иметь:

$$\begin{aligned} P &= 27p + 6q - 88, \\ Q &= 6p + 15q + r - 70, \\ R &= q + 54r - 107, \end{aligned}$$

и отсюда при помощи исключения получаем:

$$\begin{aligned} 19\,899p &= 49\,154 + 809P - 324Q + 6R, \\ 19\,899q &= 70\,659 - 324P + 1458Q - 27R, \\ 19\,899r &= 38\,121 + 6P - 27Q + 369R. \end{aligned}$$

Отсюда получатся вероятнейшие значения неизвестных:

$$\begin{aligned} p &= 2,470, \\ q &= 3,551. \\ r &= 1,916, \end{aligned}$$

и приписываемая этим определениям относительная точность, если принимать равной единице точность первоначальных наблюдений, будет равна:

$$\begin{aligned} \text{для } p & \dots \dots \dots \sqrt{\frac{19\,899}{809}} = 4,96, \\ \text{для } q & \dots \dots \dots \sqrt{\frac{19\,899}{1458}} = 3,69, \\ \text{для } r & \dots \dots \dots \sqrt{\frac{19\,899}{369}} = 7,34. \end{aligned}$$

Вопрос, которым мы до сих пор занимались, может подать повод для многих элегантных аналитических исследований, на которых, однако, мы здесь не остановимся, чтобы слишком не отвлекаться от нашей цели. На этом же основании мы должны воздержаться до другого случая для изложения приемов, при помощи которых можно указать способ, который быстрее всего приведет численные вычисления к окончательным результатам. Здесь мы позволим себе добавить только одно

замечание. Если приходится иметь дело с большим числом функций или предполагаемых уравнений, то вычисление их, обыкновенно, бывает утомительным, потому что коэффициенты, на которые умножаются первоначальные уравнения, чтобы вывести P, Q, R, S , в большинстве случаев представляют собой мало удобные для вычисления десятичные дроби. Если в таком случае не стоит затрачивать труд на вычисления, производимые с наибольшей точностью, при помощи таблиц логарифмов, то часто бывает достаточно вместо этих множителей употреблять другие, более удобные для вычисления, которые лишь немногим отличаются от первых. Такая вольность не приведет к ощутительным ошибкам, за исключением случая, когда мера точности при определении неизвестных оказывается намного меньше, чем точность первоначальных наблюдений.

186.

Впрочем, принцип, что квадраты разностей между наблюдаемыми и вычисленными величинами должны дать наименьшую сумму, может рассматриваться следующим образом, даже независимо от теории вероятностей.

Если число неизвестных равно числу независимых наблюдаемых величин, то первые можно определять так, что они точно удовлетворяют вторым. Но если число неизвестных меньше числа наблюдений, то нельзя добиться вполне точного согласования, если только наблюдения не имеют абсолютной точности. В таком случае следует постараться получить, по возможности, наилучшее согласование или как можно больше уменьшить расхождения, но в этом требовании по самой природе вещей содержится что-то неопределенное. Конечно, если бы существовала такая система значений неизвестных, *все* разности в которой были бы соответственно меньше, чем в других системах, то без всякого сомнения ее следовало бы предпочесть другим; тем не менее остается свобода выбора между двумя системами, из которых одна дает лучшее согласие между одними наблюдениями, а вторая — между другими; и, очевидно, могут быть предложены различные принципы, на основании которых удовлетворяется приводимое выше условие. Обозначим разности между наблюдаемыми и вычисленными величинами через $\Delta, \Delta', \Delta'', \dots$; приведенное выше условие удовлетворяется не только, если $\Delta^2, \Delta'^2, \Delta''^2 + \dots$ будет минимум (в чем и заключается наше условие), но даже когда $\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4 + \dots$ или $\Delta^6 + \Delta'^6 + \Delta''^6 + \dots$, или вообще сумма любых четных степеней Δ превратится в минимум. Но из всех этих принципов наш наиболее простой, так как при других мы будем вынуждены производить очень сложные вычисления. Впрочем, наш принцип, которым мы пользуемся с 1795 г., еще недавно был изложен известным *Лежандром* в его труде «*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris, 1806» («Новые способы определения орбит комет»), где приведено много других свойств этого принципа, которые мы здесь, для краткости, пропускаем.

Если мы примем, что четный показатель степени бесконечно велик, то мы придем к такой системе, в которой наибольшие разности будут сколь угодно малы.

Знаменитый *Лаплас* при решении линейных уравнений, число которых больше числа неизвестных, пользовался другим принципом, предложенным уже в свое время известным *Босковицем*, что сумма всех абсолютных значений разностей должна равняться минимуму. Можно легко показать, что система значений неизвестных, полученная на основании

одного этого принципа, необходимо* должна точно удовлетворять стольким уравнениям из числа предложенных, сколько имеется неизвестных, так что остальные уравнения принимаются во внимание постольку, поскольку они *способствуют принятому уже решению при выборе*; так, например, если уравнение $V = M$ принадлежало к числу тех, которые не удовлетворялись, то система значений, полученных согласно установленному нами принципу, ничуть не изменится, хотя бы вместо значения M наблюдалась какая-нибудь другая величина N , если только разности $M - n$ и $N - n$, где n обозначает вычисленное значение, имеют один и тот же знак. Впрочем, *Лаплас* в некотором отношении изменил этот принцип, добавив к нему новое условие, а именно: требуется, чтобы сумма разностей, независимо от ее знака, равнялась нулю. При этом получится, что число правильно составленных уравнений на одно меньше числа неизвестных, но приведенное нами выше замечание остается все же в силе, если имеется по меньшей мере только два неизвестных.

187.

От этих общих исследований обратимся вновь к нашей собственной теме, ради которой они были предприняты. Прежде чем приступить к наивозможно точному определению орбиты из большего числа наблюдений, чем это необходимо, требуется уже иметь приближенное определение ее, которое немногим отличается от всех данных наблюдений. Искомыми величинами в нашей задаче будут рассматриваться поправки, которые следует внести в приближенные значения этих элементов, чтобы получилось наиболее точное согласие между наблюденными и вычисленными величинами. Так как можно предположить, что искомые поправки так малы, что нужно пренебречь их квадратами и произведениями, то изменения, получаемые вычисленными геоцентрическими местами небесного тела, могут быть вычислены по дифференциальным формулам, приведенным во втором разделе первой книги этого труда**. Тогда геоцентрические места, вычисленные согласно исправленным элементам, выразятся в виде линейных функций поправок элементов и сравнение их с наблюденными местами приведет, согласно изложенным выше принципам, к определению вероятнейших значений. Все эти действия настолько просты, что не нуждаются в дальнейших пояснениях; само собой очевидно, что можно использовать любое число наблюдений, и притом сделанные любым промежутком времени. Этим же методом можно пользоваться для исправления *параболических* орбит комет, если имеется сравнительно длинный ряд наблюдений и требуется получить возможно лучшее согласование между вычисленными и наблюдавшимися величинами.

188.

Описанный выше способ годится главным образом для случаев, когда желательно иметь наибольшую точность, но очень часто встречаются случаи, когда без больших колебаний можно отступить от нее, если при этом можно значительно сократить объем вычислений, особенно в тех случаях, когда наблюдения не охватывают слишком большого промежутка времени, при том еще не предполагается получить так на-

* За исключением особых случаев, когда решение остается в известном смысле неопределенным.

** «Теории движения небесных тел» (Прим. ред.).

зывается окончательную орбиту. В таких случаях с большим успехом может применяться описываемый ниже способ.

Из всего списка наблюдений выбирают два полных геоцентрических места L и L' и на основании приближенных элементов орбиты небесного тела вычисляют для соответствующих моментов его расстояния от Земли. Затем соответственно этим расстояниям составляют три гипотезы: в первой из них удерживают вычисленные расстояния; во второй гипотезе — изменяют первое расстояние; оба эти изменения могут производиться в любых размерах, так как предполагается, что эти расстояния остаются неточными. Согласно этим трем гипотезам, приведенным ниже,

	Гипотеза I	Гипотеза II	Гипотеза III
Расстояние,* соответствующее первому месту	D	$D + \delta$	D
Расстояние, соответствующее второму месту	D'	D'	$D' + \delta'$

вычисляют три системы элементов по способам, изложенным в книге первой (этого труда), на основании двух мест L и L' , а затем при помощи этих элементов вычисляют геоцентрические места небесного тела, соответствующие всем другим наблюдениям. Пусть они будут равны (если писать здесь только долготы и широты или прямые восхождения и склонения)

в первой системе M, M', M'' . . .

во второй системе $M + \alpha, M' + \alpha', M'' + \alpha''$. . .

в третьей системе $M + \beta, M' + \beta', M'' + \beta''$. . .

Затем, пусть наблюденные места будут равны N, N', N'' .

Так как небольшим изменениям расстояний D, D' соответствуют пропорциональные изменения отдельных элементов и вычисленных на основании их геоцентрических мест, то можно предположить, что геоцентрические места, вычисленные на основании четвертой системы элементов, построенной для расстояний от Земли $D + x\delta, D' + y\delta'$, соответственно будут равны $M + \alpha x + \beta y, M' + \alpha'x + \beta'y, M'' + \alpha''x + \beta''y, \dots$ Тогда, на основании предыдущих исследований, величины x, y определятся так, что они, как нельзя лучше, будут согласовываться с $N, N', N'' \dots$ (если принять в расчет относительную точность наблюдений). Исправленная система наблюдений может быть выведена или на основании L, L' и $D + x\delta, D' + y\delta'$ или, по известным правилам, из трех первых систем элементов при помощи простого интерполирования.

Этот способ отличается от описанного выше только тем, что он точно удовлетворяет двум геоцентрическим местам и после того возможно точнейшим образом — остальным, между тем как, согласно другому способу, ни одному наблюдению не отдается предпочтения перед другими, но ошибки, по возможности, распределяются между всеми наблюдениями. Следовательно, описанный в предыдущем параграфе способ будет считаться менее пригодным, чем первый, только тогда,

* Еще удобнее вместо самих расстояний пользоваться их округленными логарифмами (Прим. Гаусса).

когда геоцентрические места L , L' примут на себя некоторую часть ошибок, для всех же остальных мест ошибки значительно уменьшатся, но в большинстве случаев этого можно было избежать целесообразным подбором наблюдений L , L' так, чтобы это расхождение не могло превышать известных границ. Конечно, следует стремиться, чтобы для определения L , L' были приняты такие наблюдения, которые не только обладают большой точностью, но, кроме того, на элементы, выведенные на основании их и расстояний, не будут особенно влиять небольшие изменения геоцентрических положений небесного тела. Поэтому не очень благоразумно было бы выбирать наблюдения, произведенные через небольшие промежутки времени или очень близко к геоцентрическим положениям небесного тела в моменты его противостояния или соединения.

ДОБАВЛЕНИЕ* К «ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ»

К § 183

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОЙ ОШИБКИ РЕЗУЛЬТАТА, ПОЛУЧЕННОГО ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Предположим, что способ вычислений (алгоритм), который мы списали в томе I «Göttingenses Commentationes» в статье «Исследование об эллиптических элементах Паллады» («Werke», Bd. VI) приводит к следующим уравнениям для определения неизвестных величин p, q, r, s :

$$\begin{aligned} [A =] 0 &= \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \bar{\epsilon} s, \\ [B =] 0 &= \lambda' + \beta' q + \gamma' r + \delta' s, \\ [C =] 0 &= \lambda'' + \gamma'' r + \bar{\epsilon}'' s, \\ [D =] 0 &= \lambda''' + \delta''' s. \end{aligned}$$

Величины π, χ, ρ, σ определяют из уравнений:

$$\alpha\pi = \text{вероятная ошибка наблюдений,}$$

$$\beta\pi + \beta'\chi = 0,$$

$$\gamma\pi + \gamma'\chi + \gamma''\rho = 0,$$

$$\delta\pi + \delta'\chi + \delta''\rho + \delta'''\sigma = 0,$$

в таком случае вероятная ошибка p равна

$$\sqrt{\alpha\pi^2 + \beta'\chi^2 + \gamma''\rho^2 + \delta'''\sigma^2}$$

Еще изящнее получим так: из уравнений

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = u,$$

$$\beta' q + \gamma' r + \delta' s = u',$$

$$\gamma'' r + \delta'' s = u'',$$

$$\delta''' s = u'''$$

получаем при помощи исключения

$$p = p^{\circ} u + p' u' + p'' u'' + p''' u''',$$

$$q = q' u' + q'' u'' + q''' u''',$$

$$r = r'' u'' + r''' u''',$$

$$s = s''' u''',$$

* Это добавление найдено в принадлежавшем Гауссу экземпляре „Berliner Astronomisches Jahrbuch“ за 1818 г.

тогда вероятнейшими значениями будут:

$$\begin{aligned}
 - p &= p^{\circ} \lambda + p' \lambda' + p'' \lambda'' + p''' \lambda''', \\
 - q &= q' \lambda' + q'' \lambda'' + q''' \lambda''', \\
 - r &= r'' \lambda'' + r''' \lambda''', \\
 - s &= s''' \lambda'''.
 \end{aligned}$$

Вероятнейшими ошибками этих определений, если принять, что вероятная ошибка наблюдений равна единице, будут:

$$\begin{aligned}
 \text{для } p & \dots \dots \dots \sqrt{\alpha p^{\circ 2} + \beta' p'^2 + \gamma'' p''^2 + \delta''' p'''^2}, \\
 \text{„ } q & \dots \dots \dots \sqrt{\beta' q'^2 + \gamma'' q''^2 + \delta''' q'''^2}, \\
 \text{„ } r & \dots \dots \dots \sqrt{\gamma'' r''^2 + \delta''' r'''^2}, \\
 \text{„ } s & \dots \dots \dots s \sqrt{\delta'''} = \sqrt{\frac{1}{\delta'''}} , \\
 \text{„ } r & \dots \dots \dots \sqrt{\frac{1}{\gamma''} + \frac{\delta''^2}{\gamma''^2 \delta'''}} .
 \end{aligned}$$

**Disquisitio de Elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus
annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809 auctore
Carolo Friderico Gauss**

Societati Regiæ tradita XXV. nov. MDCCCX
Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis recentiores. Vol. T

**Исследование
об эллиптических элементах Паллады
на основании противостояний
1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809 годов**

Передано научному Гёттингенскому обществу 25 ноября 1810 г.
Последние сочинения Гёттингенского научного общества, т. I,
Гёттинген, 1811*

10.

... Я предполагаю получить эллиптические элементы (орбиты планеты), которые точно удовлетворяют не тем или другим противостояниям ее, но возможно близко удовлетворяют всем наблюдавшимся до сего времени. Что касается способа, при помощи которого можно это сделать, то я уже вкратце описал его в § 187 «Теории движения небесных тел»; но так как самый вопрос, который я затронул там в общем виде, в частном случае, когда наблюдавшиеся места находятся вблизи противостояния, допускает некоторые сокращения, и, кроме того, в упомянутом труде не приведены те практические приемы, благодаря которым я давно уже привык считать способ наименьших квадратов более удобным в этом деле. Надеюсь, что я не доставлю особых неприятностей астрономам, если приведу здесь соответствующие вычисления в несколько более распространенном виде. Так как все дело заключается в определении *поправок* к приближенным значениям элементов, относительно которых было принято, что они не сильно отклоняются от всех полученных из наблюдений мест, то вся работа распадается на две части: во-первых, следует составить линейные уравнения, которые получаются из отдельных наблюдаемых мест, а затем вывести из этих уравнений наиболее надежные значения неизвестных.

11.

Пусть на основании приближенных значений орбиты мы вычислим следующие величины:

L — средняя долгота планеты для любой эпохи;

t — число дней, прошедших от этой эпохи до момента наблюдений;

* Отрывок из указанной работы Гаусса, касающийся способа наименьших квадратов, на который, как видно из предыдущего, несколько раз ссылается Гаусс

μ — среднее суточное сидерическое движение* в секундах;

π — долгота перигелия;

$e = \sin \varphi$ — эксцентриситет орбиты;

a — большая полуось;

r — радиус-вектор планеты;

v — истинная аномалия;

E — эксцентрическая аномалия;

Ω — долгота восходящего узла;

i — наклон орбиты;

u — аргумент широты планеты;

λ — геоцентрическая долгота планеты;

γ — геоцентрическая широта;

β — гелиоцентрическая широта;

R — расстояние Земли от Солнца;

Предположим, что из наблюдений получаются:

α — гелиоцентрическая долгота;

β' — геоцентрическая широта.

Наконец, обозначим через dL , $d\mu$, $d\pi$ и т. д. поправки величин L , μ , π и т. д.

Отсюда имеем: $dL + td\mu$ — поправка средней долготы;

$dL + td\mu = d\pi$ — поправка средней аномалии;

кроме того, на основании § 15 и 16 «Теории движения небесных тел».

$$dv = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} (dL + td\mu - d\pi) + \frac{a^2}{r^2} (2 - e \cos E - e^2) \sin E d\varphi,$$

$$dr = \frac{r}{a} da + a \operatorname{tg} \varphi \sin v (dL + td\mu - d\pi) - a \cos \varphi \cos v d\varphi.$$

Затем поправка аргумента широты равна

$$du = dv + d\pi - d\Omega$$

и, согласно § 52 «Теории движения небесных тел» поправка гелиоцентрической долготы равна

$$d\lambda = d\Omega - \operatorname{tg} \gamma \cos (\lambda - \Omega) di + \frac{\cos i}{\cos^2 \gamma} du.$$

Отсюда получается:

$$\begin{aligned} d\lambda = & \frac{a^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 \gamma} dL + \\ & + \frac{ta^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 \gamma} d\mu + \\ & + \left(\frac{\cos i}{\cos^2 \gamma} - \frac{a^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 \gamma} \right) d\pi + \\ & + \frac{a^2 \cos i}{r^2 \cos^2 \gamma} (2 - e \cos E - e^2) \sin E d\varphi + \\ & + \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2 \gamma} \right) d\Omega - \\ & - \operatorname{tg} \gamma \cos (\lambda - \Omega) di. \end{aligned}$$

* Сидерическое движение здесь следует понимать как перемещение между звездами.

Так как, кроме того, мы имеем:

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}} \mu &= \text{const}, \\ r \sin (\beta - \gamma) &= R \sin \beta, \\ \text{tg } \gamma &= \text{tg } i \sin (\alpha - \Omega), \end{aligned}$$

то после дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{da}{a} &= -\frac{2}{3} \frac{d\mu}{\mu}, \\ \frac{dr}{r} + \text{ctg } (\beta - \gamma) \cdot (d\beta - d\gamma) &= \text{ctg } \beta d\beta \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{\sin \beta \cos (\beta - \gamma)}{\sin \gamma} d\gamma - \frac{\sin \beta \sin (\beta - \gamma)}{r \sin \gamma} dr, \\ d\gamma &= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2i} di - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \text{ctg } (\alpha - \Omega) d\Omega, \end{aligned}$$

откуда, подставляя выведенное значение dr , получаем

$$\begin{aligned} d\beta &= -\frac{a \sin \beta \sin (\beta - \gamma) \text{tg } \varphi \sin v}{r \sin \gamma} dL + \\ &+ \left\{ \frac{2 \sin \beta \sin (\beta - \gamma)}{3 \mu \sin \gamma} - \frac{at \sin \beta \sin (\beta - \gamma) \text{tg } \varphi \sin v}{r \sin \gamma} \right\} d\mu + \\ &+ \frac{a \sin \beta \sin (\beta - \gamma) \text{tg } \varphi \sin v}{r \sin \gamma} d\pi + \\ &+ \frac{a \sin \beta \sin (\beta - \gamma) \cos \varphi \cos v}{r \sin \gamma} d\varphi + \\ &+ \frac{2 \sin \beta \cos (\beta - \gamma) \cos \gamma}{\sin 2i} di - \\ &- \sin \beta \cos (\beta - \gamma) \cos \gamma \text{ctg } (\alpha - \Omega) d\Omega. \end{aligned}$$

Тогда мы получим значения гелиоцентрической долготы и геоцентрической широты на основании исправленных значений элементов $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, а потому каждое противостояние даст два уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda + d\lambda, \\ \beta' &= \beta + d\beta. \end{aligned}$$

12.

Применяя эти правила к шести противостояниям Паллады, приведенным в § 2 этой статьи, и производя вычисления для второй системы

элементов, схема которых дана в § 3, мы получаем следующие двенадцать уравнений*:

Из *первого* противостояния, для которого найдено, что вычисленная долгота равна $277^{\circ}36'20'',07$

и геоцентрическая широта равна $+46^{\circ}26'29'',19$

$$0 = -183'',93 + 0,79363 dL + 143,66 d\mu + 0,39493 d\pi + \\ + 0,95920 d\varphi - 0,18856 d\Omega + 0,17387 di,$$

$$0 = -6'',81 - 0,02658 dL + 46,71 d\mu + 0,02658 d\pi - \\ - 0,20858 d\varphi + 0,15946 d\Omega + 1,25782 di.$$

Из *второго* противостояния, для которого вычисленная долгота равна $337^{\circ}0'36'',04$

и геоцентрическая широта равна $+15^{\circ}1'46'',71$:

$$0 = -0'',06 + 0,58880 dL + 358,12 d\mu + 0,26208 d\pi - \\ - 0,85234 d\varphi + 0,14912 d\Omega + 0,17775 di,$$

$$0 = -3'',09 + 0,01318 dL + 28,39 d\mu - 0,01318 d\pi - \\ - 0,07861 d\varphi + 0,91704 d\Omega + 0,54365 di.$$

* Чтобы сделать возможным перевычисление числовых данных, мы приводим здесь упомянутые выше сведения о шести наблюдавшихся противостояниях, помещенные в § 2, и систему элементов II, заимствованную из § 3:

Время противостояния для меридиана Гёттингена				Число дней от начала 1803 г.	Гелиоцентрическая долгота	Геоцентрическая широта
1803	Июнь	30.	$0^h27^m32^s$	181,019 120	$277^{\circ}39'24'',0$	$+46^{\circ}26'36'',0$
1804	Август	30.	4 58 27	608,207 257	$337^{\circ}0'36'',1$	$+15^{\circ}1'49'',8$
1805	Ноябрь	29.	11 15 4	1064,468 796	$67^{\circ}20'42'',9$	$-54^{\circ}30'54'',9$
1807	Май	4.	14 37 41	1585,609 502	$223^{\circ}37'27'',7$	$+42^{\circ}11'25'',6$
1808	Июль	26.	21 17 32	2034,887 176	$304^{\circ}2'59'',7$	$+37^{\circ}43'53'',7$
1809	Сентябрь	22.	16 10 20	2457,673 843	$359^{\circ}40'4'',4$	$-7^{\circ}22'10'',1$

II. Эллиптические элементы Паллады, полученные из противостояний 1804, 1805, 1807 и 1809 гг.

Эпоха средней долготы 1803 г. для меридиана

Гёттингена . . . $221^{\circ}34'56'',7$

Среднее суточное тропическое движение . . . $770'',4467$

Долгота перигелия 1803 г. $121^{\circ}5'22'',1$

Долгота восходящего узла 1803 г. $172^{\circ}28'46'',8$

Наклон орбиты $34^{\circ}37'31'',5$

Эксцентриситет ($= \sin 14^{\circ}10'4'',08$) $0,2447624$

Логарифм большой полуоси (орбиты) $0,4422276$

(Подстрочное прим. немецких переводчиков).

Из *третьего* противостояния, для которого вычисленная долгота равна $67^{\circ}20'42'',88$

и геоцентрическая широта равна $-54^{\circ}31'3'',88$:

$$0 = - 0'',02 + 1,73436 dL + 1846,17 d\mu - 0,54603 d\pi - \\ - 2,05662 d\varphi - 0,18833 d\Omega - 0,17445 di,$$

$$0 = - 8'',98 - 0,12606 dL - 227,42 d\mu + 0,12606 d\pi - \\ - 0,38939 d\varphi + 0,17176 d\Omega - 1,35441 di.$$

Из *четвертого* противостояния, в котором вычисленная долгота равна $223^{\circ}37'25'',39$

и геоцентрическая широта равна $+42^{\circ}11'28'',07$:

$$0 = - 2'',31 + 0,99584 dL + 1579,03 d\mu + 0,06456 d\pi + \\ + 1,99545 d\varphi - 0,06040 d\Omega - 0,33750 di,$$

$$0 = + 2'',47 - 0,08089 dL - 67,22 d\mu + 0,08089 d\pi - \\ - 0,09970 d\varphi - 0,46359 d\Omega + 1,22803 di.$$

Из *пятого* противостояния, для которого вычисленная долгота равна $304^{\circ}2'59'',71$

и геоцентрическая широта равна $+37^{\circ}44'31'',82$:

$$0 = + 0'',01 + 0,65331 dL + 1329,09 d\mu + 0,38994 d\pi - \\ - 0,08439 d\varphi - 0,04305 d\Omega + 0,34268 di,$$

$$0 = + 38'',12 - 0,00218 dL + 38,47 d\mu + 0,00218 d\pi - \\ - 0,18710 d\varphi + 0,47301 d\Omega - 1,14371 di.$$

Из *шестого* противостояния, для которого вычисленная долгота равна $359^{\circ}34'46'',67$

и геоцентрическая широта равна $-7^{\circ}20'12'',13$,

$$0 = - 317'',73 + 0,69957 dL + 1719,32 d\mu + 0,12913 d\pi - \\ - 1,38787 d\varphi + 0,17130 d\Omega - 0,08360 di,$$

$$0 = + 117'',97 - 0,01315 dL - 43,84 d\mu + 0,01315 d\pi + \\ + 0,02929 d\varphi + 1,02138 d\Omega - 0,27187 di.$$

Из этих двенадцати уравнений мы выкинем десятое, так как наблюдаемая геоцентрическая широта слишком сомнительна.

13.

Так как не представляется возможным определить все шесть неизвестных так, чтобы они удовлетворяли всем одиннадцати уравнениям, т. е. чтобы отдельные функции неизвестных, находящиеся в правых частях уравнений, одновременно равнялись нулю, то постараемся получить такие значения их, при которых квадраты этих функций дадут наименьшую сумму. Действительно, легко заметить, если представить в общем виде линейные функции неизвестных p, q, r, s, \dots

$$\begin{aligned} n + ap + bq + cr + ds + \dots &= w, \\ n' + a'p + b'q + c'r + d's + \dots &= w', \\ n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \dots &= w'', \\ n''' + a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \dots &= w''', \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

то, чтобы

$$\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2 + \dots = \Omega$$

было минимум, условные уравнения должны быть такими:

$$\begin{aligned} a\omega + a'\omega' + a''\omega'' + a'''\omega''' + \dots &= 0, \\ b\omega + b'\omega' + b''\omega'' + b'''\omega''' + \dots &= 0, \\ c\omega + c'\omega' + c''\omega'' + c'''\omega''' + \dots &= 0, \\ d\omega + d'\omega' + d''\omega'' + d'''\omega''' + \dots &= 0, \\ \dots & \end{aligned}$$

или, если для краткости обозначим

$$\begin{aligned} an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \dots &\text{ через } [an], \\ a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots &\text{ через } [aa], \\ ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \dots &\text{ через } [ab], \\ b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \dots &\text{ через } [bb], \\ bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \dots &\text{ через } [bc], \\ \dots & \end{aligned}$$

то p, q, r, s, \dots должны определяться при помощи исключения из приводимых ниже уравнений:

$$\begin{aligned} [an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \dots &= 0, \\ [bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \dots &= 0, \\ [cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \dots &= 0, \\ [dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \dots &= 0. \\ \dots & \end{aligned}$$

Если число неизвестных p, q, r, s, \dots довольно велико, то исключение их потребует очень длинной и скучной работы, которую можно существенно сократить следующим образом. Помимо коэффициентов $[an], [aa], [ab], \dots$ (число которых равно $\left(\frac{1}{2}\mu^2 + 3\mu\right)$, если число неизвестных равно μ), я добавляю еще полученное из вычислений

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 + \dots = [nn],$$

откуда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Omega = [nn] + 2[an]p + 2[bn]q + 2[cn]r + 2[dn]s + \dots + \\ + [aa]p^2 + 2[ab]pq + 2[ac]pr + 2[ad]ps + \dots + \\ + [bb]q^2 + 2[bc]qr + 2[bd]qs + \dots + \\ + [cc]r^2 + 2[cd]rs + \dots + \\ + [dd]s^2 + \dots + \\ \dots \end{aligned}$$

Обозначим затем

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s \dots \text{ через } A,$$

тогда очевидно, что те члены $\frac{A^2}{[aa]}$, которые содержат p , имеются в функ-

ции Ω а потому $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ будет функцией, не содержащей p . Положим теперь

$$\begin{aligned}
 [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} &= [nn, 1], \\
 [bn] - \frac{[an][ab]}{[aa]} &= [bn, 1], \\
 [cn] - \frac{[an][ac]}{[aa]} &= [cn, 1], \\
 [dn] - \frac{[an][ad]}{[aa]} &= [dn, 1], \\
 &\dots, \\
 [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} &= [bb, 1], \\
 [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} &= [bc, 1], \\
 [bd] - \frac{[ab][ad]}{[aa]} &= [bd, 1], \\
 &\dots, \\
 &\dots,
 \end{aligned}$$

в таком случае получим

$$\begin{aligned}
 \Omega - \frac{A^2}{[aa]} &= [nn, 1] + 2 [bn, 1] q + 2 [cn, 1] r + 2 [dn, 1] s + \dots + \\
 &+ [bb, 1] q^2 + 2 [bc, 1] qr + 2 [bd, 1] qs + \dots + \\
 &+ [cc, 1] r^2 + 2 [cd, 1] rs + \dots + \\
 &+ [dd, 1] s^2 + \dots + \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Эту функцию мы будем обозначать через Ω' ...

Подобным же образом, если положить

$$[bn, 1] + [bb, 1] q + [bc, 1] r + [bd, 1] s + \dots = B,$$

то $\Omega' - \frac{B^2}{[bb, 1]}$ будет функцией, не содержащей q , которую мы обозначим через Ω'' . Подобным же образом примем

$$\begin{aligned}
 [nn, 1] - \frac{[bn, 1]^2}{[bb, 1]} &= [nn, 2], \\
 [cn, 1] - \frac{[bn, 1][bc, 1]}{[bb, 1]} &= [cn, 2], \\
 &\dots, \\
 [cc, 1] - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} &= [cc, 2], \\
 &\dots,
 \end{aligned}$$

а также

$$[cn, 2] + [cc, 2] r + [cd, 2] s + \dots = C,$$

откуда $\Omega'' - \frac{C^2}{[cc, 2]}$ будет функцией, которая не содержит r . Продолжаем действовать таким же способом и дальше, пока в ряде $\Omega, \Omega', \Omega'' \dots$ не дойдем до члена, в котором не содержится ни одного неизвестного; он будет равен $[nn, \mu]$, если число неизвестных p, q, r, s, \dots обозначим через μ . Итак, мы получаем

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb, 1]} + \frac{C^2}{[cc, 2]} + \frac{D^2}{[dd, 3]} + \dots + [nn, \mu].$$

Но так как $\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 + \dots$ по самой своей природе не может принимать отрицательного значения, то легко доказать, что делители $[aa], [bb, 1], [cc, 2], [dd, 3] \dots$ обязательно должны быть *положительными* (но для краткости я не приведу здесь более пространного доказательства). Отсюда тотчас же следует, что Ω превратится в минимум, если $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0, \dots$. Итак, из этих μ уравнений должны будут определяться неизвестные p, q, r, s, \dots , что весьма легко можно будет сделать в обратном порядке, так как, очевидно, последнее уравнение содержит только одну неизвестную, предпоследнее — две и т. д. Вместе с тем этот способ рекомендует себя тем, что минимальное значение суммы Ω становится само собой известным, так как очевидно, что оно равняется $[nn, \mu] \dots$

14.

Применим теперь эти правила к нашему примеру, где p, q, r, s, \dots соответственно равны $dL, d\mu, d\pi, d\varphi, d\Omega, di$. На основании тщательных вычислений я нашел следующие числовые значения:

$[nn] = + 148\ 848$	$[ce] = + 0,06400$	$[bf, 1] = + 73,45$
$[an] = - 371,09$	$[cf] = + 0,26341$	$[cc, 1] = + 0,71769$
$[bn] = - 580\ 104$	$[dd] = + 12,00340$	$[cd, 1] = + 1,09773$
$[cn] = - 113,45$	$[de] = - 0,37137$	$[ce, 1] = - 0,05852$
$[dn] = + 268,53$	$[df] = - 0,11762$	$[cf, 1] = + 0,26054$
$[en] = + 94,26$	$[ee] = + 2,28215$	$[dd, 1] = + 11,12064$
$[fn] = - 31,81$	$[ef] = - 0,36136$	$[de, 1] = - 0,50528$
$[aa] = + 5,915\ 69$	$[ff] = + 5,62456$	$[df, 1] = - 0,18790$
$[ab] = + 7203,91$		$[ee, 1] = + 2,26185$
$[ac] = - 0,09344$	Откуда я затем вывел	$[ef, 1] = - 0,37202$
$[ad] = - 2,28516$	$[nn, 1] = + 125\ 569$	$[ff, 1] = + 5,61905$
$[ae] = - 0,34664$	$[bn, 1] = - 138\ 534$	Подобным же образом получим из них
$[af] = - 0,18194$	$[cn, 1] = - 119,31$	$[nn, 2] = + 117\ 763$
$[bb] = + 10\ 834\ 225$	$[dn, 1] = - 125,18$	$[cn, 2] = - 115,81$
$[bc] = - 49,06$	$[en, 1] = + 72,52$	$[dn, 2] = - 153,95$
$[bd] = - 3229,77$	$[fn, 1] = - 43,22$	$[en, 2] = + 84,57$
$[be] = - 198,64$	$[bb, 1] = + 2\ 458\ 225$	$[fn, 2] = - 39,08$
$[bf] = - 143,05$	$[bc, 1] = + 62,13$	$[cc, 2] = + 0,716\ 12$
$[cc] = + 0,719\ 17$	$[bd, 1] = - 510,58$	$[cd, 2] = + 1,110\ 63$
$[cd] = + 1,133\ 82$	$[be, 1] = + 213,84$	

$[ce, 2] = -0,06392$	$[en, 3] = +74,23$	$[fn, 4] = +4,33$
$[cf, 2] = +0,25868$	$[fn, 3] = +2,75$	$[ee, 4] = +2,22346$
$[dd, 2] = +11,01463$	$[dd, 3] = +9,29213$	$[ef, 4] = -0,37766$
$[de, 2] = -0,46088$	$[de, 3] = -0,36175$	$[ff, 4] = +5,48798$
$[df, 2] = -0,17265$	$[df, 3] = -0,57384$	
$[ee, 2] = +2,24325$	$[ee, 3] = +2,23754$	Отсюда
$[ef, 2] = -0,37841$	$[ef, 3] = -0,35532$	$[nn, 5] = +96\,418$
$[ff, 2] = +5,61686$	$[ff, 3] = +5,52342$	$[fn, 5] = +17,11$
		$[ff, 5] = +5,42383$
Откуда затем	Точно так же отсюда	
$[nn, 3] = +99\,034$	$[nn, 4] = +98\,963$	И наконец
$[dn, 3] = +25,66$	$[en, 4] = +75,23$	$[nn, 6] = +96\,364$

Для определения неизвестных мы имеем тогда следующие шесть уравнений:

$$\begin{aligned}
 0 &= + 17'',11 + 5,42383 di, \\
 0 &= + 75'',23 + 2,22346 d\Omega - 0,37766 di, \\
 0 &= + 25'',66 + 9,29213 d\varphi - 0,36175 d\Omega - 0,57384 di, \\
 0 &= - 115'',81 + 0,71612 d\pi + 1,11063 d\varphi - 0,06392 d\Omega + 0,25868 di, \\
 0 &= - 138534'' + 2458225 d\mu + 62,13 d\pi - 510,58 d\varphi + 213,84 d\Omega + \\
 &\quad + 73,45 di, \\
 0 &= - 371'',09 + 5,91569 dL + 7203,91 d\mu - 0,09344 d\pi - 2,28516 d\varphi - \\
 &\quad - 0,34664 d\Omega - 0,18194 di;
 \end{aligned}$$

из них мы выводим

$$\begin{aligned}
 di &= - 3'',15, & d\pi &= + 166'',44, \\
 d\Omega &= - 34'',37, & d\mu &= + 0'',054335, \\
 d\varphi &= - 4'',29, & dL &= - 3'',06.
 \end{aligned}$$

Итак, исправленные эллиптические элементы планеты, которые лучше всего удовлетворяют всем шести противостояниям, будут следующие:

Эпоха средней долготы 1803, приведенная к меридиану Гёттингена	221°34'53'',64
Среднее суточное тропическое движение	770'',5010
Долгота перигелия 1803	121° 8' 8'',54
Долгота восходящего узла 1803	172°28'12'',43
Наклон орбиты	34°37'28'',35
Эксцентриситет (= $\sin [14^\circ 9' 59'',79]$)	0,2447424
Логарифм большой полуоси	0,4422071.

15.

Подставив только что найденные значения поправок $dL, d\mu, \dots$ в двенадцать уравнений § 12, мы получим следующие разности между

значениями гелиоцентрических долгот и геоцентрических широт, полученных из наблюдений и вычисленных на основании исправленных элементов.

В противостоянии года	Р а з н о с т и	
	в долготе	в широте
1803	-111",00	- 8",31
1804	+ 59 ,18	- 36 ,67
1805	+ 19 ,92	+ 0 ,07
1807	+ 85 ,77	+ 25 ,01
1808	+135 ,88	+ 28 ,72
1809	-216 ,54	+ 83 ,01

Определение точности наблюдений

(Напечатано в журнале «Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften», издаваемом Б. Линденау и И. Г. Боненбергом, т. I, стр. 185, вып. за март и апрель 1816 г.).

1.

При обосновании так называемого способа наименьших квадратов было принято, что вероятность ошибки Δ выражается формулой

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

где π равно половине окружности, e — основание неперовых логарифмов, h — некоторая постоянная величина, которую, согласно § 178 «Теории движения небесных тел», можно считать мерой точности наблюдений. Применяя способ наименьших квадратов к отысканию вероятнейших ошибок тех величин, от которых зависят наблюдения, обыкновенно считают величину h неизвестной; отношение точности результата к точности наблюдений также не зависит от h . Между тем знание этой величины само по себе интересно и поучительно, и я хочу в дальнейшем показать, каким образом при помощи самих наблюдений определить значение h .

2.

Сначала я предположу некоторые примечания, поясняющие наш вопрос. Для краткости обозначу значение интеграла

$$\int \frac{2 e^{-t^2} dt}{\sqrt{\pi}},$$

вычисляемого при $t=0$, через $\Theta(t)$. Некоторые отдельные значения дадут представление о ходе этой функции. Так, мы имеем:

0,5000000	=	$\Theta(0,4769363)$	=	$\Theta(\rho)$
0,6000000	=	$\Theta(0,5951161)$	=	$\Theta(1,247790 \rho)$
0,7000000	=	$\Theta(0,7328691)$	=	$\Theta(1,536618 \rho)$
0,8000000	=	$\Theta(0,9061939)$	=	$\Theta(1,900032 \rho)$
0,8427008	=	$\Theta(1)$	=	$\Theta(2,096716 \rho)$
0,9000000	=	$\Theta(1,1630872)$	=	$\Theta(2,438664 \rho)$
0,9900000	=	$\Theta(1,8213864)$	=	$\Theta(3,818930 \rho)$
0,9990000	=	$\Theta(2,3276754)$	=	$\Theta(4,880475 \rho)$
0,9999000	=	$\Theta(2,7510654)$	=	$\Theta(5,768204 \rho)$
1	=	$\Theta(\infty)$		

Вероятность, что ошибка наблюдений лежит в пределах $-\Delta$ и $+\Delta$ или, не обращая внимания на знак, не больше Δ .

$$= \int \frac{he^{-h^2x^2} dx}{\sqrt{\pi}},$$

если интеграл взят в пределах от $x = -\Delta$ до $x = +\Delta$, или в два раза больше, чем тот же интеграл, взятый в пределах от $x = 0$ до $x = \Delta$, следовательно,

$$= \Theta(h\Delta).$$

Вероятность, что ошибка не меньше $\frac{\rho}{h}$, равна, следовательно, $\frac{1}{2}$, или равна вероятности для противоположного случая; эту величину $\frac{\rho}{h}$ мы будем называть *вероятной ошибкой* и обозначать через r . Наоборот, вероятность, что ошибка превосходит $2,438664r$, равна только $\frac{1}{10}$; вероятность, что ошибка превосходит $3,818930$, равна только $\frac{1}{100}$ и т. д.

3.

Допустим теперь, что при m действительно произведенных наблюдениях получились ошибки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, и исследуем, какие тогда можно вывести заключения относительно значений h и r . Сделаем два предположения, что истинное значение h равно или H или H' ; в таком случае вероятности, с которыми можно ожидать ошибки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, относятся, как

$$\begin{aligned} & He^{-H^2\alpha^2} \times He^{-H^2\beta^2} \times He^{-H^2\gamma^2} \times \dots \\ & \text{к } H'e^{-H'^2\alpha^2} \times H'e^{-H'^2\beta^2} \times H'e^{-H'^2\gamma^2} \times \dots, \end{aligned}$$

т. е. как

$$H^me^{-H^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)} \text{ к } H'^me^{-H'^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)}$$

В таком же соотношении, следовательно, находятся вероятности, что H или H' будут истинными значениями h , как это видно из результатов этих ошибок (см. «Теорию движения небесных тел», § 176); или вероятность каждого значения пропорциональна величине

$$h^me^{-h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots)}.$$

Вероятнейшее значение h , следовательно, такое, для которого эта величина равна максимуму, найденному по известным правилам,

$$= \sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}}.$$

Вероятнейшее значение r будет, следовательно, равно

$$= \rho \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}{m}} = 0,6744897 \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots}{m}}.$$

Этот результат имеет общее значение, будет ли m большим или меньшим.

Легко понять, что при таком определении h и r они тем менее точны, чем меньше m . Выведем затем степень точности, которую можно приписать этому определению для случая, когда m — большое число. Для краткости обозначим через H найденное вероятное значение h

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}}$$

и заметим, что вероятность того, что H представляет собой истинное значение h , относится к вероятности, что таким истинным значением будет $H + \lambda$, как

$$H^m e^{-\frac{m}{2}} : (H + \lambda)^m e^{-\frac{m(H + \lambda)^2}{2H^2}}$$

или как

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\lambda}{H} + \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{H^2} - \frac{1}{5} \frac{\lambda^3}{H^3} + \dots\right)}$$

Второй член будет иметь заметную величину по сравнению с первым, если $\frac{\lambda}{H}$ — малая дробь, поэтому мы позволили себе пользоваться следующим отношением вместо приведенного выше:

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}}$$

Это значит: вероятность, что истинное значение h лежит между $H + \lambda$ и $H + \lambda + d\lambda$, очень близка к

$$= K e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}} d\lambda,$$

где K — постоянная величина, которую следует определить так, что интеграл

$$\int K e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}} d\lambda,$$

взятый между надлежащим образом подобранными пределами для λ , равен единице. В данном случае вместо таких пределов, когда благодаря большому значению величины m очевидно, что

$$e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}}$$

становится очень малой величиной, если только $\frac{\lambda}{H}$ перестает быть малой дробью, можно принять пределами интегрирования $-\infty$ и $+\infty$, откуда получается

$$K = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{m}{\pi}}.$$

При этом вероятность, что истинное значение h лежит между $H - \lambda$ и $H + \lambda$,

$$= \Theta \left(\frac{\lambda}{H} \sqrt{m} \right),$$

следовательно, эта вероятность равна $\frac{1}{2}$, если

$$\frac{\lambda}{H} \sqrt{m} = \rho \dots$$

Следовательно, одинаково возможно, что истинное значение h лежит между

$$H \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right) \text{ и } H \left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right),$$

или что истинное значение r находится между

$$\frac{R}{1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}}} \text{ и } \frac{R}{1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}}},$$

если через R мы обозначим найденное в предыдущем параграфе вероятнейшее значение r . Эти пределы можно назвать *вероятными пределами истинных значений h и r* ; очевидно, мы имеем право принять здесь за вероятные пределы истинного значения r следующие величины:

$$R \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right) \text{ и } R \left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right).$$

5.

В предыдущем исследовании мы исходили из той точки зрения, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ представляют собой определенные и заданные величины, и искали величины вероятностей так, чтобы истинные значения h и r лежали в определенных пределах. Но вопрос можно рассматривать также с другой стороны: приняв наперед, что ошибка наблюдений подчинена какому-то определенному закону вероятностей, определяют вероятность, с которой можно ожидать, что сумма квадратов m ошибок наблюдений лежит между известными пределами. Такая задача, при условии, что m — большое число, решена уже *Лапласом*, равным образом как и задача, когда определяют вероятность, что сумма m ошибок наблюдений сама лежит между известными пределами. Это исследование легко можно еще более обобщить, но я ограничусь тем, что приведу здесь результат.

Обозначим через $\varphi(x)$ вероятность ошибки наблюдений x , так что $\int \varphi(x) dx = 1$, если интеграл взят в пределах от $x = -\infty$ до $x = +\infty$. В тех же пределах мы вообще будем обозначать через $K^{(n)}$ значение интеграла

$$\int \varphi(x) x^n dx.$$

Пусть затем $S^{(n)}$ будет сумма

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \dots$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ обозначают m каких-то ошибок наблюдений; члены этой суммы, даже и для нечетного n , должны быть все положительные.

Так как $mK^{(n)}$ — вероятнейшее значение $S^{(n)}$ и вероятность, что истинное значение $S^{(n)}$ лежит между пределами $mK^{(n)} - \lambda$ и $mK^{(n)} + \lambda$,

$$= \Theta \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)^2})}} \right).$$

Следовательно, вероятные пределы $S^{(n)}$ будут

$$mK^{(n)} - \rho \sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)^2})}$$

и

$$mK^{(n)} + \rho \sqrt{2m(K^{(2n)} - K^{(n)^2})}.$$

Этот результат имеет одинаковое общее значение для каждого закона ошибок. Применим его к случаю, где

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

тогда мы найдем

$$K^{(n)} = \frac{\Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}},$$

буква Π дана в том же значении, в каком и в нашей статье: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* («Общие исследования по поводу бесконечного ряда»), напечатанной в издании: *Commentationes novae societatis Göttingensis*, т. II («Новые сочинения Гёттингенского общества», п. 5, § 28).

Итак,

$$K = 1, \quad K' = \frac{1}{h \sqrt{\pi}}, \quad K'' = \frac{1}{2h^2}, \quad K''' = \frac{1}{h^3 \sqrt{\pi}},$$

$$K^{IV} = \frac{1 \cdot 3}{4h^4}, \quad K^V = \frac{1 \cdot 2}{h^5 \sqrt{\pi}}, \quad K^{VI} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5h^6}, \quad K^{VII} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{h^7 \sqrt{\pi}}, \dots$$

Итак, вероятнейшее значение $S^{(n)}$ равно

$$\frac{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}}$$

и вероятные пределы истинного значения $S^{(n)}$ равны

$$\frac{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \rho \sqrt{\frac{2 \left(\Pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{\pi} \right)}{m \left(\left(\Pi \frac{1}{2}(n-1) \right)^2 - 1 \right)}} \right\}$$

и

$$\frac{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \rho \sqrt{\frac{2 \left(\Pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{\pi} \right)}{m \left(\left(\Pi \frac{1}{2}(n-1) \right)^2 - 1 \right)}} \right\}.$$

Примем, как и прежде,

$$\frac{\rho}{h} = r,$$

так что r представляет собой вероятную ошибку наблюдений, тогда вероятнейшее значение величины

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S^{(n)} \sqrt{\pi}}{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}},$$

очевидно, равно r ; и вероятные пределы этой величины равны

$$r \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{\Pi(n - \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{\pi}}{(\Pi \frac{1}{2}(n-1))^2} - 1 \right)} \right\}$$

и

$$r \left\{ 1 + \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{\Pi(n - \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{\pi}}{(\Pi \frac{1}{2}(n-1))^2} - 1 \right)} \right\}.$$

Можно также с равным успехом утверждать, что r лежит в пределах между

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S^{(n)} \sqrt{\pi}}{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}} \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{\Pi(n-1) \cdot \sqrt{\pi}}{(\Pi \frac{1}{2}(n-1))^2} - 1 \right)} \right\}$$

и

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S^{(n)} \sqrt{\pi}}{m \Pi \frac{1}{2}(n-1)}} \left\{ 1 + \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{\Pi(n-1) \cdot \sqrt{\pi}}{(\Pi \frac{1}{2}(n-1))^2} - 1 \right)} \right\}.$$

Для $n = 2$ эти пределы равны

$$\rho \sqrt{\frac{2 S''}{m}} \left\{ 1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right\} \quad \text{и} \quad \rho \sqrt{\frac{2 S''}{m}} \left\{ 1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}} \right\},$$

т. е. вполне совпадают с найденными выше (§ 4). Вообще для четного n пределы будут следующие:

$$\rho \sqrt[2]{2} \sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1)}} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{(n+1)(n+3) \dots (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} - 1 \right)} \right\}$$

и

$$\rho \sqrt[2]{2} \sqrt[n]{\frac{S^{(n)}}{m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1)}} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{(n+1)(n+3) \dots (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} - 1 \right)} \right\}$$

и для нечетного n

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S^{(n)} \sqrt{\pi}}{m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2}(n-1)}} \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \pi}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1))^2} - 2 \right)} \right\}$$

и

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S^{(n)} \sqrt{\pi}}{m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2}(n-1)}} \left\{ 1 + \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \pi}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1))^2} - 2 \right)} \right\}.$$

6.

Я привожу еще численные значения для простейших функций:
Вероятные пределы значения r

$$\begin{aligned} \text{I. } & 0,8453473 \sqrt{\frac{S'}{m}} \left(1 \mp \frac{0,5095841}{\sqrt{m}} \right), \\ \text{II. } & 0,6744897 \sqrt[3]{\frac{S''}{m}} \left(1 \mp \frac{0,4769363}{\sqrt{m}} \right), \\ \text{III. } & 0,5771897 \sqrt[3]{\frac{S'''}{m}} \left(1 \mp \frac{0,4971987}{\sqrt{m}} \right), \\ \text{IV. } & 0,5125017 \sqrt[4]{\frac{S''''}{m}} \left(1 \mp \frac{0,5507186}{\sqrt{m}} \right), \\ \text{V. } & 0,4655532 \sqrt[5]{\frac{S^{\text{V}}}{m}} \left(1 \mp \frac{0,6355080}{\sqrt{m}} \right), \\ \text{VI. } & 0,4294972 \sqrt[6]{\frac{S^{\text{VI}}}{m}} \left(1 \mp \frac{0,7557764}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что наиболее выгодным из всех является способ определения II. Сто ошибок наблюдений, полученных по этой формуле, дают такой же надежный результат, как 114, полученных по формуле I, 109 — по III; 133 — по IV; 178 — по V; 271 — по VI.

Впрочем, для вычислений формула I самая удобная, поэтому ею всегда пользуются, так как она немногим менее точна, чем формула II, а также в случаях, когда неизвестна сумма квадратов ошибок, или ее не хотят знать.

7.

Еще удобнее, хотя значительно менее точный, будет следующий способ: распределяют m ошибок наблюдений (называемых абсолютными) по их величине и обозначают через M самую среднюю из них, если число ошибок нечетное, или арифметическое среднее из двух самых средних из них, если число ошибок четное. Остается показать, чего, впрочем, мы не можем сделать здесь, что при большом числе наблюдений r будет вероятнейшим значением M , и вероятные пределы M равны

$$r \left(1 - e^{\rho^2} \sqrt{\frac{\pi}{8m}} \right) \text{ и } r \left(1 + e^{\rho^2} \sqrt{\frac{\pi}{8m}} \right),$$

или вероятные пределы значения r равны

$$M\left(1 - e^{\rho^2} \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \text{ и } M\left(1 + e^{\rho^2} \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

или в числах

$$M\left(1 \mp \frac{0,7520974}{\sqrt{m}}\right).$$

Следовательно, этот способ только немногим точнее, чем применение формулы VI, и следует принять во внимание 249 ошибок наблюдений, чтобы достичь того же успеха, какой дают 100 ошибок наблюдений по формуле II.

8.

Применение некоторых из этих способов к ошибкам 48 наблюдений прямых восхождений Полярной, полученных *Бесселем* и помещенных на стр. 234 «Астрономического ежегодника» за 1818 г., издаваемого *Боде*, дало:

$$S' = 60'',46; \quad S'' = 110'',600; \quad S''' = 250'',341118.$$

Отсюда получаются вероятнейшие значения для r :

по формуле I	1'',065,	вероятнейшая ошибка	= ± 0'',078
„ „ II	1'',024,	„ „	= ± 0'',070
„ „ III	1'',001,	„ „	= ± 0'',072
согласно § 7	1'',045,	„ „	= ± 0'',113,

т. е. согласие их, которого едва ли можно было ожидать. Сам *Бессель* дает величину 1'',067; по-видимому, он производил вычисления согласно формуле I.



Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии*

(Выдержка из письма к Г. С. Шумахеру. Журнал «Astronomische Nachrichten» («Астрономические известия») 1822 г., т. I, стр. 81.

По вашей просьбе посылаю вам некоторые правила для применения способа наименьших квадратов к одной задаче практической геометрии: определить положение пункта на основании измеренных на нем горизонтальных углов между другими пунктами, положение которых точно известно**. Правда, вопрос носит совершенно элементарный характер, и всякий, кто знаком со способом наименьших квадратов, может легко вывести эти правила; между тем эта задача является одной из самых нужных в практической геометрии, и очень часто ею пользуются лица, которые не совсем хорошо знакомы с этим вопросом и которым поэтому было бы приятно знать соответствующие формулы.

Пусть координатами одного из известных пунктов будут a , b ; первые отсчитываются в положительном направлении от севера к югу, вторые — от востока к западу; является ли осью абсцисс истинный меридиан или нет, не имеет значения; точно так же x , y — приближенные координаты определяемого пункта; dx , dy — еще неизвестные их поправки. Значения φ и r определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b - y}{a - x}, \quad r = \frac{a - x}{\cos \varphi} = \frac{b - y}{\sin \varphi},$$

причем φ берут в том квадрате, в котором r получается положительным; кроме того, полагают

$$\alpha = \frac{206\,265''(b - y)}{r^2}, \quad \beta = -\frac{206\,265''(a - x)}{r^2}.$$

Тогда азимут первого пункта, взятый со второго (направление оси абсцисс принимают за нулевое),

$$= \varphi + \alpha dx + \beta dy,$$

где оба последних члена выражены в секундах.

По отношению ко второму пункту, положение которого известно, величины φ' , α' , β' ; по отношению к третьему пункту — величины φ'' , α'' , β'' и т. д. обозначают такие же величины, как φ , α , β , по отношению к первому пункту.

* Практической геометрией во времена Гаусса называли геодезию.

** Подразумевается задача Потенота или обратная многократная засечка (Прим. ред.).

Пусть измерения углов на определенном пункте производились теодолитом один раз без повторений, причем труба инструмента, не сдвигавшегося с места, последовательно наводилась на различные уже известные пункты; тогда, если h, h', h'', \dots обозначают отсчитанные углы, выражения

$$\begin{aligned}\varphi &= h + \alpha dx + \beta dy, \\ \varphi' &= h' + \alpha' dx + \beta' dy, \\ \varphi'' &= h'' + \alpha'' dx + \beta'' dy\end{aligned}$$

должны все получать одни и те же значения после подстановки в них истинных значений dx и dy если наблюдения были абсолютно точны; следовательно, если приравнять три из них друг другу, то можно получить значения dx и dy путем исключения. Если наблюдалось только три известных пункта, то больше ничего не остается делать; если число их больше, то ошибки измерений углов могут быть полностью уравнены, если сложить все приведенные выше выражения и потом сумму разделить на число их; разность между полученными таким образом частным и каждым приведенным выше выражением приравнивают нулю и обрабатывают полученные уравнения по способу наименьших квадратов.

Напротив, если измерения углов производились независимо одно от другого, то каждое из них тотчас же дает уравнение между неизвестными dx и dy ; все эти уравнения затем надо комбинировать по способу наименьших квадратов, причем, если желательно, можно принимать во внимание несколько различную точность углов. Так, например, если найдено, что угол между первым и вторым пунктом равен i , между вторым и третьим равен i' и т. д., причем углы всегда отсчитывались слева направо по ходу часовой стрелки, то получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha) dx + (\beta' - \beta) dy &= 0, \\ \varphi'' - \varphi' - i' + (\alpha'' - \alpha') dx + (\beta'' - \beta') dy &= 0, \\ \dots &\dots\end{aligned}$$

Если измерения углов имеют одинаковую точность, то из этих уравнений составляют два нормальных уравнения: первое из них получают последовательным умножением на соответствующие коэффициенты при dx , т. е. первое уравнение умножают на $(\alpha' - \alpha)$, второе — на $(\alpha'' - \alpha')$ и т. д., а потом складывают их; второе нормальное уравнение получают подобным же умножением на коэффициенты при dy и тоже складыванием их. Если, наоборот, измерения углов неодинаковой точности, например первое, основаны на μ повторений, второе — на μ' и т. д., тогда нужно перед складыванием уравнений в обоих случаях последовательно умножить их на число μ и т. д. Из двух составленных таким образом нормальных уравнений определяют затем при помощи исключения неизвестные dx и dy (эти правила приведены для тех лиц, которым неизвестен еще способ наименьших квадратов и которым, может быть, полезно напомнить, что при этих умножениях следует тщательно обращать внимание на знаки у $\alpha' - \alpha$ и т. д.). Наконец, я еще замечу, что при этом должны быть уравнены *только* ошибки измерения углов, в то время как координаты известных пунктов рассматриваются как *точные*.

Я поясню эти правила для второго случая на основании полученных мною сведений об измерении углов на Holkensbastion в Копенгагене, хотя, по-видимому, приводимые нами правила там не совсем точно оправдываются; при столь малых расстояниях небольшие ошибки в заданных координатах, достигающие нескольких десятых фута, оказывают

гораздо большее влияние, чем ошибки в измерении углов; поэтому не следует удивляться, что после самого тщательного уравнивания остается разница в углах, значительно большая, чем это можно допустить при измерении углов. Для нашей цели, когда мы хотим дать только пример вычислений, это обстоятельство не имеет значения.

Углы, измеренные на Holkenbastion.

Friedrichsberg—Petri	73°35'22",8
Petri—Erlösersturm	104 57 33 ,0
Erlösersturm—Friedrichsberg	181 27 5 ,0
Friedrichsberg—Frauenturm	80 37 10 ,8
Frauenturm—Friedrichsturm	101 11 50 ,8
Friedrichsturm—Friedrichsberg	178 11 1 ,5

*Координаты, вычисленные относительно Копенгагенской обсерватории (в парижских футах)**

Petri	+ 487,7 + 1007,7
Frauenturm	+ 710,0 + 684,2
Friedrichsberg	+ 2430,6 + 8335,0
Erlösersturm	+ 2940,0 — 3536,0
Friedrichsturm	+ 3059,3 — 2231,2

Приближенные координаты приняты для пункта наблюдений:

$$x = + 2836,44, \quad y = + 444,33.$$

На основании их находим следующие азимуты:

Petri	166°30'42",56 + 19,92 dx + 83,04 dy
Frauenturm	173 33 50 ,54 + 10,80 dx + 95,78 dy
Friedrichsberg	92 56 39 ,46 + 26,07 dx + 1,34 dy
Erlösersturm	271 29 25 ,38 — 51,79 dx — 1,35 dy
Friedrichsturm	274 45 41 ,48 — 76,56 dx — 6,38 dy .

Вычисленный угол Friedrichsberg — Petri будет тогда равен:

$$73°34'3",10 — 6,15 dx + 81,70 $dy$$$

из сравнения с углом, полученным из наблюдений, составляет уравнение

$$— 79",70 — 6,15 dx + 81,70 dy = 0.$$

Точно таким же способом получаем пять других уравнений:

$$\begin{aligned}
 &+ 69",82 — 71,71 dx — 84,39 dy = 0 \\
 &+ 9 ,08 + 77,86 dx + 2,69 dy = 0 \\
 &+ 0 ,28 — 15,27 dx + 94,44 dy = 0 \\
 &+ 0 ,04 — 87,36 dx — 102,16 dy = 0 \\
 &— 3 ,42 + 102,63 dx + 7,72 dy = 0.
 \end{aligned}$$

Считая, что точность наблюдений одинакова, из этих шести уравнений получаем два нормальных уравнения:

$$\begin{aligned}
 &+ 29\,640 dx + 14\,033 dy = + 4168" \\
 &+ 14\,033 dx + 33\,219 dy = + 12\,383"
 \end{aligned}$$

* Парижский фут равен 0,325 м. (Прим. ред.).

и из них значения

$$dx = - 0,05; \quad dy = + 0,40,$$

или исправленные координаты пункта Holkenbastion

$$+ 2836,39 \quad \text{и} \quad + 444,73.$$

После подстановки значений dx и dy расхождения между углами, вычисленными и полученными из наблюдений, остаются еще слишком великими, чтобы их можно было приписать измерениям; это доказывает, как сказано выше, что координаты известных пунктов ошибочны не на десятые доли фута, поэтому, разумеется, и сами поправки, найденные нами, остаются несколько сомнительными.

Положенные в основу наших вычислений приближенные координаты пункта Holkenbastion вычислены *непосредственно* при помощи четвертого и пятого приведенных выше углов. Хотя непосредственный способ вычислений следует рассматривать как почти известный, но для полноты я приведу его еще здесь в том виде, в каком я его обычно применяю.

Пусть a, b — координаты первого известного пункта (такой пункт выбирают из трех известных произвольно); координаты второго пункта будут выражены в форме

$$a + R \cos E, \quad b + R \sin E;$$

координаты третьего пункта — в форме

$$a + R' \cos E', \quad b + R' \sin E'.$$

Искомые координаты пункта, с которого мы производим наблюдения, обозначим через

$$a + \rho \cos \varepsilon, \quad b + \rho \sin \varepsilon.$$

Затем пусть наблюденный угол между первым и вторым пунктом равен M , между вторым и третьим пунктом равен M' . Я предполагаю заранее, что эти углы отсчитывались слева направо и, если они превышали 180° , их уменьшали на 180° или, что то же самое, если угол, отсчитываемый в обратном направлении, был меньше 180° , то вместо него принималось дополнение до 180° *

Затем я принимаю, что

$$\frac{R}{\sin M} = n, \quad \frac{R'}{\sin M'} = n',$$

$$E - M = N, \quad E' - M' = N'$$

(там, где это нужно, прежде прибавляют 360°). Сделав такое предположение, мы будем иметь два уравнения:

$$\rho = n \sin (\varepsilon - N), \quad \rho = n' \sin (\varepsilon - N'),$$

переписанные в виде

$$n = \frac{1}{\rho} \sin (\varepsilon - N), \quad n' = \frac{1}{\rho} \sin (\varepsilon - N'),$$

решаются как задача, помещенная на стр. 82 «Теории движения небесных тел». Одно из ее решений приводит к следующему правилу:

* Цель, которую здесь преследовали, заключалась в том, чтобы всегда получать величины n и n' положительными и притом поменьше обращать внимания на алгебраические знаки. (Прим. Гаусса).

Я принимаю, что n' больше, по крайней мере не меньше, чем n , это допустимо, так как совершенно произвольно, какой пункт рассматривать вторым или третьим. Пусть

$$\frac{n}{n'} = \operatorname{tg} \zeta,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(N' - N)}{\operatorname{tg}(45^\circ - \zeta)} = \operatorname{tg} \psi.$$

Тогда получится

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(N + N') + \psi.$$

После того как будет найдено ε , можно вычислить ρ по одной из приведенных выше формул или лучше по обеим.

В нашем примере мы будем рассматривать Frauenthurm как первый пункт, Friedrichsberg предварительно как второй и Friedrichsthurm как третий,

$$a = + 710,0$$

$$b = + 684,2$$

$$E = 77^\circ 19' 31'', 92$$

$$E' = 308^\circ 51' 45'', 77$$

$$\lg R = 3.8944205$$

$$\lg R' = 3.5733549$$

$$M = 99^\circ 22' 50'', 20$$

$$M' = 101^\circ 11' 50'', 80$$

(согласно сделанному выше замечанию)

$$N = 337^\circ 56' 42'', 72$$

$$N' = 207^\circ 39' 54'', 97$$

$$\lg n = 3.9002650$$

$$\lg n' = 3.5817019.$$

Так как здесь $n > n'$, то переменим порядок и положим

$$N = 207^\circ 39' 54'', 97$$

$$N' = 337^\circ 56' 42'', 72$$

$$\lg n = 3.5817019$$

$$\lg n' = 3.9002650.$$

После этого найдем

$$\zeta = 19^\circ 39' 3'', 87, \quad \psi = 80^\circ 45' 31'', 69, \quad \varepsilon = 353^\circ 33' 50'', 53$$

и $\lg \rho = 3.3303990$, тогда координаты Holkensbastion равны

$$+ 2836,441 \quad \text{и} \quad + 444,330.$$



Определение долгот хронометрическими рейсами

(Извлечение из письма Г. К. Шумахеру, напечатано в журнале «Astronomische Nachrichten» («Астрономические известия»), т. V, стр. 227, 1826 г. См. также «Gauss Werke» («Труды Гаусса», т. VI, стр. 455—459))

Пусть $\Theta, \Theta', \Theta'', \dots$ моменты времени (общим числом n), в которые хронометр отступал относительно местного времени пунктов, долготы которых x, x', x'', \dots , на величины a, a', a'', \dots . Я заранее принимаю, что показания хронометра $\Theta, \Theta', \Theta'', \dots$ приведены ко времени одного и того же пункта. Пусть суточный ход хронометра равен u , тогда, если хронометр идет совершенно правильно, мы будем иметь $n-1$ уравнений:

$$a - \Theta u - x = a' - \Theta' u - x' = a'' - \Theta'' u - x'' = a''' - \Theta''' u - x''' = \dots$$

Для того чтобы этих уравнений было достаточно при определении неизвестных величин x, x', x'', \dots , следует или считать одну из величин x, x', x'', \dots заданной, или предполагать, что наблюдения в одном и том же месте производились, по крайней мере, два раза, т. е. две из величин x, x', x'', \dots одинаковы. Если равными будут не больше, чем две величины, то задача получается вполне определенной. В противном случае она становится определенной с избытком и тогда нужно так определять неизвестные величины, чтобы $n-1$ уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= a - a' + (\Theta' - \Theta) u - x + x', \\ 0 &= a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u - x' + x'', \\ 0 &= a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'') u - x'' + x''', \\ &\dots \end{aligned}$$

удовлетворялись возможно точнее, так как всегда несовершенства, которыми страдают все хронометры, не допустят точного удовлетворения всех уравнений. Но очевидно, что нельзя придавать одинаковый вес всем этим уравнениям, так как в действительности величины

$$\begin{aligned} a - a' + (\Theta' - \Theta) u - x + x', \\ a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u - x' + x'', \\ \dots \end{aligned}$$

просто выражают суммы всех отклонений от среднего хода, который хронометр имел в промежутки времени $\Theta' - \Theta, \Theta'' - \Theta', \dots$; если речь идет о хорошем хронометре, которому можно приписать действительно средний ход, а не постепенно изменяющийся в каком-нибудь одном направлении, то средняя ожидаемая ошибка такой суммы должна быть принята пропорциональной квадратному корню из промежутков времени.

Поэтому, следовательно, приведенным выше уравнениям, при обработке их по правилам способа наименьших квадратов, нужно приписать неодинаковые веса, обратно пропорциональные промежуткам времени $\Theta' - \Theta, \Theta'' - \Theta', \Theta''' - \Theta'', \dots$

Решение тогда не представит никаких затруднений, и мы получим как вероятнейшие значения u, x, x', x'', \dots , так и их относительную точность. Здесь я сделаю еще несколько замечаний.

1) Если первое и последнее наблюдения сделаны в одном и том же месте, то вероятнейшее значение u будет точно таким, какое только получается из сравнения двух крайних наблюдений. Вычисление будет тогда чрезвычайно простым, так как согласно теореме, которую легко доказать, вероятнейшее значение u , подставленное в уравнения, или, что то же самое, сами наблюденные по хронометру моменты могут быть приведены к одному фиктивному хронометру, ход которого равен нулю.

2) Если уравнениям просто приписаны веса

$$\frac{1}{\Theta' - \Theta}, \frac{1}{\Theta'' - \Theta'}, \dots$$

то за единицу веса, который находят для окончательных определений долгот, принимают в основе точность, ожидаемую от того же хронометра, если при его известном ходе определяется разность долгот с промежутком времени в одни сутки (если только моменты $\Theta, \Theta', \Theta'', \dots$ выражены в сутках). Но чтобы сравнить результаты, полученные разными хронометрами неодинакового качества, нужно ввести еще один множитель, который зависит от качества каждого хронометра. Чтобы его найти, положим, что значения величин

$$\begin{aligned} a - a' + (\Theta' - \Theta) u - x + x', \\ a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u - x' + x'', \\ a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'') u - x'' + x''', \\ \dots \end{aligned}$$

если вместо u, x, x', x'', \dots подставить найденные для них вероятнейшие значения, равные

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \dots \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2}{\Theta' - \Theta} + \frac{\lambda'^2}{\Theta'' - \Theta'} + \frac{\lambda''^2}{\Theta''' - \Theta''} + \dots = S.$$

Пусть затем ν — число всех неизвестных величин и $m = \sqrt{\frac{S}{n - \nu - 1}}$, тогда упомянутый выше особый множитель для каждого отдельного хронометра пропорционален $\frac{1}{m^2}$ или $\frac{n - \nu - 1}{S}$. Можно рассматривать m как среднее ожидаемое отклонение от среднего суточного хода.

3) Приведенные выше правила действительны для хронометра, у которого не заметно значительного изменения хода. В противном случае, если ряд наблюдений не чрезмерно длинный, можно удовлетвориться тем, что примем изменение суточного хода пропорциональным времени, так что придется внести еще одну неизвестную величину; тогда уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} 0 &= a - a' + (\Theta' - \Theta) u + (\Theta'^2 - \Theta^2) v - x + x', \\ 0 &= a' - a'' + (\Theta'' - \Theta') u + (\Theta''^2 - \Theta'^2) v - x' + x'', \\ 0 &= a'' - a''' + (\Theta''' - \Theta'') u + (\Theta'''^2 - \Theta''^2) v - x'' + x''', \\ &\dots \end{aligned}$$

Вряд ли было бы рационально заниматься и дальше этим вопросом и ввести еще одну неизвестную величину и еще член уравнения вида $(\Theta^3 - \Theta^2)w$. Хронометры, которые имеют сильные изменения среднего хода и эти изменения носят неправильный характер, я предпочел бы совершенно исключить из вычислений, так как даваемые ими результаты или будут обладать значительно меньшей точностью по сравнению с результатами, полученными другими хронометрами, или гораздо труднее будет выразить в числах их точность, требуемую для сравнения. Поэтому я воздержусь от описания очень запутанной теории таких случаев, так как в приведенном ниже примере достаточно пояснено все сказанное выше.

4) Что касается решения уравнений по способу наименьших квадратов, то может быть не лишнее помнить, что в большинстве случаев бывает хорошо образовывать неизвестные величины из известной части (если возможно приблизительной) и поправочных неизвестных частей (следовательно, очень маленьких). Хотя этот совет и прежде много раз давался, и само собой понятно был выгоден в этом деле, но нам казалось уместным вновь о нем напомнить, так как я вижу, что о нем так часто забывают, чем без надобности усложняют численные вычисления и с большей легкостью могут делать ошибки.

Из 36 хронометров я вычислил следующие 5:

		№ 1	№ 4	Брегет 3056	Кессель 1252	Барро 904
Гринвич:						
30 июня	3 ^m 22 ^s	— 8 ^m 17 ^s ,14	+ 1 ^m 2 ^s ,37			
25 июля	2 15	10 44 ,39	1 32 ,15	+30 ^m 59 ^s ,75	+50 ^m 29 ^s ,31	+48 ^m 29 ^s ,20
28 „	3 13	11 0 ,69	1 36 ,96	30 50 ,07	50 39 ,69	48 40 ,24
2 августа	1 15	11 28 ,48	1 44 ,44	30 31 ,78	50 52 ,14	48 58 ,87
17 „	10 28	12 59 ,40	2 6 ,24	29 35 ,69	51 38 ,66	49 57 ,83
25 „	7 27	13 47 ,98	2 15 ,84	29 10 ,48	52 2 ,45	50 27 ,15
10 сентября	7 40	15 24 ,47	2 40 ,36			
Гельголанд:						
3 июля	3 40	—40 8 ,00	—30 26 ,84			
22 „	12 40	42 2 ,02	30 3 ,89	— 0 20 ,34	+18 48 ,39	+16 47 ,39
5 августа	1 48	43 18 ,11	29 43 ,35	1 10 ,24	19 26 ,77	17 37 ,51
11 „	13 9	43 35 ,77	29 33 ,43	1 32 ,75	19 47 ,22	18 1 ,30
30 „	19 30	45 53 ,08	29 7 ,96	2 40 ,67	20 47 ,68	19 17 ,03
6 сентября	3 6	46 31 ,56	28 58 ,94	3 4 ,55	21 6 ,56	19 43 ,80
7 „	8 42	46 38 ,72	28 56 ,71			
Альтона:						
6 августа	5 55	—51 38 ,95	—37 55 ,76	— 9 28 ,50	+11 16 ,25	+ 9 28 ,48
9 „	12 35	51 57 ,35	37 50 ,03	9 38 ,81	11 27 ,76	9 40 ,30
31 „	9 57	54 10 ,33	37 21 ,30	10 56 ,68	12 35 ,96	11 5 ,92
4 сентября	22 12	54 39 ,16	37 15 ,21	11 15 ,36	12 48 ,10	11 24 ,49
Бремен:						
13 августа	0 2	—47 50 ,65	— 33 16 ,49	— 5 23 ,37	+16 5 ,83	+14 21 ,86

Для образца я привожу здесь вычисление хронометра *Брегета* 3056. Долгота Гельголанда принята равной нулю; долгота Гринвича — рав-

ной $-x$; Альтоны — равной $+y$. Бремен я здесь исключаю, потому что в нем наблюдения производились один раз, и контроля для него не имеется.

Время я считаю от момента первого сравнения английских хронометров (Гринвич, 30 июня, 3^ч22^м).

Тогда, подставляя вместо показаний хронометра *Брегета* показания фиктивного хронометра, ход которого равен нулю, я нахожу, что они равны:

θ	θ
22,4 + 60 ^с ,20	42,4 + 59 ^с ,88
25,0 + 1949,60 — x	48,3 + 1949,60 — x
28,0 + 1950,87 — x	56,2 + 1952,74 — x
32,9 + 1950,29 — x	61,6 + 61,32
35,9 + 59,08	62,2 — 432,53 + y
37,1 — 434,98 + y	66,8 — 434,98 + y
40,4 — 433,49 + y	68,0 + 60,19

Приведенные выше уравнения получаются такими, что x и y нельзя смешать один с другим, поэтому дальнейшие вычисления будут еще удобнее. Для x мы имеем четыре определения:

$$\begin{aligned}
 + 1889^{\text{с}},40; & \quad \text{вес } \frac{1}{2,6} = 0,38 \\
 + 1891,21; & \quad \cdot \frac{1}{3,0} = 0,33 \\
 + 1889,72; & \quad \cdot \frac{1}{5,9} = 0,17 \\
 + 1891,42; & \quad \cdot \frac{1}{5,4} = 0,19
 \end{aligned}$$

Следовательно, $x = + 1890^{\text{с}},36$; вес = 1,07. Подобным же образом получаем

$$y = + 494^{\text{с}},12; \quad \text{вес} = 3,83.$$

После подстановки этих значений показания фиктивного хронометра относительно гельголандского времени равны:

θ	λ
22,4	+ 60 ^с ,20
25,0	59,24 — 0 ^с ,96
28,0	60,51 + 1,27
32,9	59,93 — 0,58
35,9	59,08 — 0,85
37,1	59,14 + 0,06
40,4	59,14 + 1,49
42,4	60,63 — 0,75
48,3	59,88 — 0,64
56,2	59,24 + 3,14
61,6	62,38 — 1,06
62,2	61,32 + 0,27
66,8	61,59 — 2,45
68,0	59,14 + 1,05
68,0	60,19

Следовательно, $S = 6,02$, $m = \sqrt{\frac{6,02}{13-3}}$, откуда средняя ожидаемая ошибка равна для $x \dots 0^c,75$; для $y \dots 0^c,40$.

Все вычисленные мною 5 хронометров дают:

		Средняя ошибка	Вес
Брегет	$x = 1890^c,36$	$0^c,75$	1,78
Кессельс	1893 ,29	0 ,67	2,23
Барро	1892 ,32	0 ,49	4,16
Англ. 1	1892 ,39	0 ,43	5,41
„ 4	1892 ,52	0 ,35	8,16
<hr/>			
Среднее	$x = 1892 ,35$		21,74
Брегет	$y = 494 ,12$	0 ,40	6,25
Кессельс	493 ,89	0 ,36	7,72
Барро	493 ,67	0 ,26	14,79
Англ. 1	493 ,98	0 ,29	11,89
„ 4	494 ,16	0 ,24	17,36
<hr/>			
Среднее	$y = 493 ,96$		58,01

Наконец, в последнем столбце, озаглавленном «вес», помещены величины, равные $\frac{1}{(\text{средняя ошибка})^2}$, следовательно, за единицу точности принимается такая точность, при которой ожидаемая средняя ошибка равна 1^c , так что, например, для Альтоны ожидаемая средняя ошибка равна $\frac{1^c}{\sqrt{58,01}} = 0,13^c$; между тем было бы благоразумнее числа последнего столбца рассматривать как отношения, и абсолютную точность выводить из разностей значений окончательных результатов, полученных по отдельным хронометрам для x и y . Впрочем, точность конечных результатов, полученная таким путем, оказывается несколько большей, чем в действительности, так как определения времени в Гринвиче, Гельголанде и Альтоне не имеют абсолютной точности, а следовательно, каково бы ни было число хронометров, полученная из такого источника ошибка должна повлиять на конечные результаты.

Определение долготы Бремена можно выполнить следующим образом. Обозначим эту долготу через z — к востоку от Гельголанда, тогда из сравнения показаний хронометра *Брегета* с фиктивным хронометром получим

$$- 165^c,52 + z.$$

Следовательно,

из сравнения предыдущих результатов наблюдений $z = 225^c,40$; вес $\frac{1}{1,4} = 0,7$,

„ „ последующих „ „ $z = 224^c,76$; „ $\frac{1}{4,5} = 0,2$

225,24 0,9

Вес 0,9 надо умножить еще на $\frac{10}{6,02}$.

Таким образом, 5 хронометров дают:

		Вес
Брегет	225 ^c .24	1,5
Кессельс	225 ,84	1,9
Барро	225 ,39	3,6
Англ. 1	226 ,04	2,9
• 4	224 ,86	4,3
	<hr/>	
	225 ,42	14,2

Но долгота Бремена, которая поэтому оказывается равной 268^c,54 к западу от Альтоны, конечно, всегда зависит от точности определения времени в Бремене, а такое расхождение дает величину, по-видимому, меньшую на несколько секунд. Из моей триангуляции видно, что башня *Ansgariusthurm* находится к западу от Гёттингена на 273^c,51 (во времени); следовательно, обсерватория *Ольберса* находится к западу на 271^c,9.

Сообщения (Anzeigen)

(Göttingische gelehrte Anzeigen — Гёттингенские научные сообщения, 26 февраля 1821 г., часть 33, стр. 321—327).

15 февраля г-н надворный советник Гаусс передал королевскому научному обществу свое исследование под заглавием: «Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior» («Теория комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам», часть первая), предметом которого являются важнейшие применения теории вероятностей.

Все наблюдения, которые касаются определения величин из области действительного чувственного мира, никогда не могут иметь *абсолютной* точности; с какой бы тщательностью и с какими бы совершенными инструментами они не производились, они всегда остаются только приближенными, подверженными большим или меньшим ошибкам. Здесь речь идет не о таких ошибках, источники которых точно известны и величина которых при известных наблюдениях всякий раз может быть вычислена, так как такие ошибки могут быть приняты в расчет в получаемых из наблюдений величинах и, что то же самое, должны считаться как бы несуществующими. Наоборот, совершенно другое получается с ошибками, называемыми случайными, которые происходят от несовершенства органов чувств наблюдателя, вследствие различных непредвиденных и не поддающихся учету недостатков инструментов и различных незакономерно (по крайней мере для нас) действующих помех, зависящих от внешних условий (например, влияние колебаний атмосферы на видимость, отсутствие устойчивости установки инструмента). Эти случайные ошибки не должны быть *оставлены без внимания*, и наблюдатель может только *уменьшить* их тщательной внимательностью при наблюдениях и увеличением числа наблюдений, но, после того как наблюдатель сделал свое дело, математику надлежит оценить по строгим математическим принципам точность наблюдений и выведенных из них путем вычислений величин, и что важнее всего, в тех случаях, когда связанные с наблюдениями величины могут быть выведены при помощи различных комбинаций, указать тот вид комбинации, при котором получаются возможно малые ошибки.

Хотя случайные ошибки сами по себе не подчиняются никакому закону, но встречаются без всякого порядка в одном наблюдении в большем, в другом — в меньшем числе; кроме того, достоверно известно, что при некотором определенном способе наблюдений, когда индивидуальные особенности наблюдателя и его приборов (инструментов) рассматриваются как вполне определенные ошибки, получающиеся вследствие каждой простой причины, заключены не только в известных

пределах, но все возможные в этих пределах ошибки имеют некоторую определенную вероятность, которую можно ожидать чаще или реже в зависимости от величины ошибки. Тот, который имел бы точное и полное представление об особенностях подобной причины ошибок, был бы в состоянии определить эти границы и взаимосвязь между вероятностью отдельных ошибок и их величиной; подобно тому как в играх на счастье (азартных играх), зная все их правила, можно рассчитать пределы возможного выигрыша и проигрыша и их относительные вероятности. То же самое можно сказать о полной ошибке, полученной от совместного действия простых причин ошибок. Эти соображения не ограничиваются непосредственными наблюдениями, но применимы также к величинам, выводимым через наблюдения. В действительности, конечно, почти всегда мы не имеем в своем распоряжении способа, который давал бы заранее закон вероятностей ошибок.

От нашего произвола частично зависит, как вообще мы будем судить о недопустимости некоторого определенного способа наблюдений. Для этого можно или просто выбрать за критерий величину предельных возможных ошибок, или при этом принимать во внимание большую или меньшую вероятность отдельных возможных ошибок. Последний способ, по-видимому, более приемлем. Но и это соображение может быть осуществлено различными способами. Можно, как это делали до сих пор вычислители, принять за критерий так называемую вероятную (но не *вероятнейшую*) ошибку, которая такова, что все возможные ошибки, превышающие ее, в совокупности имеют такие же вероятности, как в совокупности все ошибки, меньшие ее. Но *гораздо выгоднее* пользоваться для этой цели вместо вероятной *средней* ошибкой, сделав при этом предварительное предположение, что она определена на основании еще не установившегося понятия о правильном способе ее определения. Каждой ошибке приписывают некоторый определенный «момент», зависящий от ее величины; умножают этот момент на ее вероятность и складывают произведения; ошибка, момент которой равен этой сумме, должна рассматриваться как средняя. Но опять-таки от нашего *произвола* зависит, какую функцию величины ошибки мы выберем для ее момента, лишь бы только величина ее оставалась положительной и была бы большей для более крупных ошибок, чем для малых. Автор выбрал простейшую функцию такого рода, а именно — квадрат; но этот выбор связан еще с некоторыми другими чрезвычайно важными преимуществами, которых не имеет ни одна другая функция. Впрочем, могла быть принята и любая другая степень с четными показателями; чем больше выбран ее показатель степени, тем ближе она подходила бы к принципу, по которому крайние ошибки служат критерием точности. Напротив, один большой математик* принял такое понятие средней ошибки, при котором он считал, что моменты ошибок равны, когда они положительные, и приводят к противоположным величинам, когда они отрицательные; следует заметить, что такое предположение противоречит принципу математической непрерывности; что оно столь же произвольно, как и всякое другое; что результаты получаются с значительно меньшей простотой и удовлетворительностью, и что само собой также кажется естественнее, что момент ошибки увеличивается в большей пропорции, чем она сама, причем, очевидно, что легче дважды сделать определенную ошибку, чем один раз двойную.

Эти пояснения нужно было предпослать изложению вопросов данного исследования, для которого настоящая статья представляет как бы первую главу.

* Имеется в виду Лаплас (Прим. ред.).

Если величины, значения которых найдены из наблюдений, определенным образом связаны с таким же числом неизвестных величин, то, вообще говоря, значения неизвестных величин следует вывести из наблюдений при помощи вычислений. Конечно, эти величины будут правильны только приблизительно, поскольку правильны были сами наблюдения; одной теории вероятностей здесь нечего делать, теория вероятностей сама по себе сможет только оценить точность наблюдений, если можно сделать предположение об этой точности. Если число неизвестных величин больше числа наблюдений, то первые нельзя определить из последних. Но если число неизвестных меньше числа наблюдений, то задача определяется с избытком, тогда возможно бесконечно большое число комбинаций, чтобы из наблюдений вывести неизвестные величины, которые, конечно, все должны приводить к одинаковым результатам, если бы наблюдения имели абсолютную точность, но благодаря существующим условиям получаются результаты, более или менее отличающиеся один от другого. Следует выбрать из этого бесконечного разнообразия комбинаций наиболее целесообразную, т. е. такую, в которой получается возможно наибольшая точность результатов; бесспорно, это одна из важнейших задач в применении математики к наукам о природе.

Автор настоящей статьи, впервые исследовавший эту задачу в 1797 г. при помощи основных законов теории вероятностей, скоро убедился, что разыскание *вероятнейших* значений неизвестных величин было бы невозможным, если не будет известна функция, которая представляет собой вероятность ошибок. Но так как этого нет, то ничего не остается больше, как гипотетически принять такую функцию. Ему казалось, что наиболее естественно сперва избрать обратный путь и поискать функцию, которую следует положить в основу рассуждений, если из этой функции должно вытекать общепризнанное удовлетворительное правило для всех простейших случаев на практике, именно, что среднее арифметическое из многих найденных значений одной и той же неизвестной величины, полученных из наблюдений одинаковой достоверности, должно считаться за вероятнейшее. Отсюда получается, что вероятность ошибки x должна быть принята пропорциональной показательной функции вида $e^{-h^2x^2}$ и тогда необходимо принять как имеющий общее значение тот самый метод, к которому автор пришел уже несколько лет назад на основании других соображений. Этот метод, который он затем, в особенности с 1801 г., имел возможность применять почти ежедневно в различных астрономических вычислениях и к которому пришел также *Лепандр*, теперь всеми употребляется под названием способа наименьших квадратов, и обоснование его при помощи теории вероятностей, равным образом как и определение точности результатов, а также других связанных с ним исследований, подробно развиты в труде автора «Теория движения небесных тел».

Маркиз *Лаплас*, который после этого рассматривал этот вопрос с новой точки зрения, причем он не искал вероятнейших значений неизвестных, но наиболее целесообразную комбинацию наблюдений, пришел к замечательному результату, что, если число наблюдений рассматривать как бесконечно большое, то способ наименьших квадратов всегда и независимо от вида функции, выражающей вероятность ошибок, будет наиболее целесообразной комбинацией.

Отсюда видно, что оба способа обоснования оставляют желать лучшего. Первый способ в совершенно гипотетической форме зависит от вероятности ошибок, и если ее (эту форму зависимости) не признавать, то найденные по способу наименьших квадратов значения неизвестных величин будут не более вероятными, чем среднее арифметическое в по-

лученном прежде простейшем случае. Второй способ оставляет нас в неизвестности, что именно пришлось бы делать при незначительном числе наблюдений. Способ наименьших квадратов тогда теряет право на свой ранг закона, вытекающего из теории вероятностей, но рекомендует себя только тем, что упрощает связанные с ним вычисления.

Автор в настоящей статье вновь предпринял это исследование, причем он исходил из такой же точки зрения, как и Лаплас, но понятие о средней ожидаемой ошибке он устанавливал на другом, и как ему казалось, уже более естественном свойстве; он надеялся, что друзья математики с удовольствием увидят, как способ наименьших квадратов с его новым приведенным здесь обоснованием появится вообще, как наиболее целесообразная комбинация наблюдений, и при том не приблизительно, но со всей математической строгостью, причем функция вероятности может быть какой угодно, и число наблюдений может быть большим или малым.

С основным вопросом тесно связано множество замечательных других исследований, но объем их вынудил автора отложить изложение большей части их до следующего (второго) исследования.

Из встречающихся в настоящем (первом) исследовании мы позволяем себе привести здесь только один результат. Если неизвестна функция, выражающая относительную вероятность каждой отдельной ошибки, то, естественно, будет также невозможно определить вероятность того, что ошибка находится в заданных пределах; несмотря на это, если только всегда более крупные ошибки встречаются реже или, что то же самое, имеют меньшую вероятность, чем меньшие по величине, то должна существовать вероятность, что ошибка будет находиться в пределах от $-x$ и до $+x$, причем обязательно больше (по крайней мере не меньше) чем $\frac{x}{m} \sqrt{\frac{1}{3}}$, если x меньше $m \sqrt{\frac{3}{4}}$, и не меньше чем $\left(1 - \frac{4m^2}{9x^2}\right)$, если x больше $m \sqrt{\frac{3}{4}}$, где m — средняя ожидаемая ошибка наблюдений. Если $x = m \sqrt{\frac{3}{4}}$, то легко видеть, что оба выражения совпадают.

2.

(Göttingische gelehrte Anzeigen — Гёттингенские научные сообщения, 24 февраля 1823 г., часть 32, стр. 313—318).

Представленное 2 февраля королевскому научному обществу надворным советником Гауссом исследование под заглавием: *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior* (Теория комбинации наблюдений, подверженных минимальным ошибкам, часть последующая) стоит в непосредственной связи с его прежней статьей, о которой в нашем журнале уже было сделано сообщение (26 февраля 1821 г.). Напомним вкратце, что ее целью было обосновать на новых началах так называемый способ наименьших квадратов так, что этот способ является не приближенным, а доказанным со всей математической строгостью; он не ограничен случаем очень большого числа наблюдений и не зависит от гипотетического закона распределения вероятностей ошибок наблюдений, но обладает полной общностью как наиболее целесообразный вид комбинации наблюдений.

Настоящая вторая часть исследования заключает в себе дальнейшее изложение этого вопроса в виде теорем и задач, находящихся с ним в самой тесной связи. Направлению этого журнала не соответствовало бы, если бы мы шаг за шагом излагали эти исследования; этого не

нужно уже потому, что сама статья находится уже в печати. Поэтому мы ограничимся тем, что приведем здесь только содержание некоторых исследований, которые могли быть легче изложены в отдельности.

Значения неизвестных величин, получающихся по способу наименьших квадратов, которые можно назвать *наиболее надежными значениями*, будут найдены посредством определенного исключения и приписываемые этим определениям веса — посредством неопределенного исключения, как это уже известно из «Теории движения небесных тел»; в новом виде здесь аргюги доказано, что при известных предположениях такое исключение всегда возможно. Вместе с тем доказано, что существует замечательная симметрия между коэффициентами, полученными при неопределенном исключении.

Поскольку легко и ясно можно обозреть в общих чертах эти операции по исключению, постольку нельзя не отрицать, что в действительности численное выполнение их, при значительном числе неизвестных, будет затруднительным. Что касается *определенного* исключения, целью которого является получение наиболее надежных значений неизвестных величин, то автор уже в «Теории движения небесных тел» показал способ, в котором непосредственные вычисления сокращены так, как только это допускает природа вещей; способ этот подробно изложен в помещенной в первом томе изданий: «Commentationes societatis regiae Scientiarum Göttingensis recentiores» (Последние сочинения Гёттингенского королевского научного общества), в статье «Disquisitio de elementis ellipticis Palladis» (Исследование об эллиптических элементах Паллады). Этот способ прежде всего дает то преимущество, что вес определения одной неизвестной величины, которая при вычислении рассматривается как последняя, получается сам собой. Так как порядок неизвестных величин совершенно произвольный, а следовательно по желанию любую из них можно принять за последнюю, то этот способ можно считать достаточным во всех случаях, где требуется знать вес только для *одной* из неизвестных величин, тогда удастся избавиться от трудоемкого неопределенного исключения.

С тех пор как у вычислителей-астрономов стала чувствоваться сделавшаяся столь всеобщей привычка применять способ наименьших квадратов к трудным астрономическим вычислениям, как, например, к окончательному определению орбит комет, где число неизвестных доходит до шести, тогда возникла потребность — определять вес *всех* наиболее надежных значений неизвестных величин более удобным способом, чем при помощи неопределенного исключения. Так как усилия некоторых математиков* найти такой способ не имели успеха, то старались помочь себе выйти из затруднения только следующим образом: указанный выше прием вычисления проделывали с переменной порядка неизвестных величин столько раз, сколько было неизвестных величин, причем каждая из них поочередно занимала последнее место. Нам, однако, кажется, что таким искусственным способом ничего не удалось выиграть. Поэтому автор подверг этот важный вопрос особому исследованию и дает новый прием вычислений для определения весов значений *самых* неизвестных величин, по-видимому, обладающий гибкостью и краткостью, на какую только способен по своей природе этот вопрос.

Наиболее надежное значение некоторой величины, являющейся заданной функцией неизвестных величин нашей задачи, будет найдено, если вместо последней подставить ее наиболее надежное значение, полу-

* Например, Плана, см. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, Bd. VI, S. 258.

ченное по способу наименьших квадратов. Но еще остается не рассмотренная до сего времени задача, как найти вес, приписываемый этому определению. Приведенное здесь решение этой задачи заслуживает внимания астрономов-вычислителей в тем большей степени, что многие из них ранее не вполне правильно решали подобные задачи.

Сумма квадратов разностей между непосредственно наблюдаемыми величинами и теми их значениями, выражения которых являются функциями неизвестных величин после подстановки в последние наиболее надежных значений (в случае, если наблюдения имеют неодинаковый вес, то эти квадраты перед их суммированием должны быть сперва умножены на соответствующие веса), очевидно, образует абсолютный минимум. Лишь только одной из неизвестных величин будет дано значение, отличающееся от наиболее надежного, то подобная сумма, как это могут также показать и остальные неизвестные величины, всегда получится больше, чем упомянутый выше минимум. Но остальные неизвестные величины могут быть определены только *одним* способом так, что увеличение суммы, по возможности, мало, или, что сумма представляет собой относительный минимум. Произведенное здесь автором исследование ведет к нескольким интересным истинам, которые освещают с разных сторон весь вопрос.

Иногда случается, что после того, как уже произведены обширные вычисления во всех деталях над рядом наблюдений, получались сведения о новом наблюдении, которое было бы желательно также использовать. Во многих случаях было бы желательно, если только это не было необходимо, вновь начать всю работу сначала по исключению неизвестных; однако можно найти изменения наиболее надежных величин и их весов, происходящие вследствие введения этого нового наблюдения. Поэтому автор особо рассмотрел здесь эту задачу, а также родственную ей, когда уже принятому наблюдению приписывают другой вес, чем было прежде, и без повторения вычислений с самого начала хотят получить изменения конечных результатов.

В особой статье, помещенной в журнале «*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*» (1816 г., март и апрель), автор показал, как можно приблизительно найти вероятную ошибку ряда наблюдений (которая до сего времени употребляется, как мера их точности) на основании достаточного числа действительных ошибок наблюдений; но этот способ, равным образом как и употребление вероятной ошибки, зависит от гипотетической формы величины вероятности отдельных ошибок, как это и должно быть. В первой части этой статьи показано, как из таких же данных приблизительно найти среднюю ошибку наблюдений (как более целесообразную меру их точности). При этом всегда остается сомнение, что редко или почти никогда нельзя знать со всей строгостью истинную величину некоторого числа действительных ошибок наблюдений. На практике и до сего времени в основу всегда берут разности между тем, что дают наблюдения, и результатами вычислений над найденными по способу наименьших квадратов наиболее надежными значениями неизвестных величин, от которых зависят наблюдения. Но так как мы не имеем права наиболее надежные значения считать истинными, то легко можно убедиться, что при помощи этого способа мы всегда должны получать вероятные и средние ошибки несколько меньшими по величине, а потому приписывать наблюдениям и выведенным на основании их результатам большую точность, чем они действительно имеют. Конечно, в случае, когда число наблюдений во много раз больше числа неизвестных величин, такая неточность имеет небольшое значение, однако отчасти достоинство науки требует, чтобы полно и определенно

было рассмотрено, насколько при этом велика опасность сделать ошибку; отчасти, действительно, часто бывает, что в важных случаях результаты вычислений получались согласно этому ошибочному способу, причем не было дано никакого предварительного указания. Поэтому автор подверг этот вопрос особому исследованию, которое привело его к замечательному и в высшей степени простому результату, чтобы среднюю ошибку, полученную по указанному выше ошибочному способу, превратить в правильную, умножают ее только на

$$\sqrt{\frac{\pi - \rho}{\pi}},$$

где π — число наблюдений и ρ — число неизвестных величин.

Последнее исследование касается еще разыскания степени точности, которая должна быть приписана определению средней ошибки, но полученные результаты этих исследований можно прочесть в самой статье.

3.

(Göttingische gelehrte Anzeigen — Гёттингенские научные сообщения, 25 сентября 1826 г., часть 153, стр. 1521—1527).

16 сентября надворный советник Гаусс представил королевскому научному обществу следующие исследования: Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (Добавление к теории комбинации наблюдений, подверженных минимальным ошибкам)

При всех прежних работах относительно применения теории вероятностей к наиболее целесообразному использованию наблюдений, особенно также при рассмотрении этого вопроса в пятом томе «Computationes recentiores» (Последние сочинения), положено в основу определенное предположение относительно формы задачи, которое, конечно, согласуется с большинством случаев, встречающихся на практике. Это предположение состоит в том, что наблюдаемые величины зависят известным образом от некоторых неизвестных величин (элементов), т. е. представляют собой известные функции этих элементов. Чтобы задача вообще касалась этого случая, необходимо, чтобы число элементов было меньше числа наблюдаемых величин, следовательно, они зависят одни от других.

Между тем нередко бывают случаи, когда мысленно установленного предположения непосредственно не имеет места, т. е., когда наблюдаемые величины еще не заданы в форме известных функций некоторых неизвестных элементов, и сразу не видно, каким образом можно их привести к такой форме; когда, напротив, взамен того дана взаимная зависимость наблюдаемых величин (которые, естественно, должны быть заданы каким-нибудь образом) при помощи известных условных уравнений, которым, по самой природе вещей, с необходимой точностью должны удовлетворять их истинные значения. Правда, при более близком рассматривании видно, что этот случай отличается от другого не принципиально, а скорее формально, и действительно, согласно теории, легко может быть приведен к нему. Часто приходится иметь дело с неестественным обходным путем, применение которого влечет за собой значительно более трудные вычисления, чем само решение, вполне соответствующее первоначальному виду задачи. Вот этот вопрос и представляет собой предмет настоящей статьи, и решение задачи, которое дается как целое самостоятельное и независимое от предыдущей задачи, имеет

такую гибкость, что даже может с успехом применяться во многих случаях, в которых уже само собой удовлетворялось предположение, лежащее в основе старых методов.

Основная задача представляется здесь в таком виде. Если из величин v, v', v'', \dots , между которыми одна или несколько удовлетворяют условным уравнениям данной системы, встречается другая величина, некоторым образом зависящая от нее, например, она может быть выражена функцией u , то она может определяться бесконечно различными способами из первой, или будет выражаться бесконечно многими другими функциями; но естественно, что все они дают одни и те же результаты, если подставлены истинные значения v, v', v'', \dots , которые удовлетворяют всем условным уравнениям. Но если имеются только приближенные значения v, v', v'', \dots , которые всегда только и получаются из наблюдений ограниченной точности, то выведенные из них величины не могут иметь никакой претензии на абсолютную точность; различные функции, применяемые для выражения u , вообще говоря, не одинаковые, но, что самое важное, они дают результаты не одинаковой точности. Задача заключается теперь в том, чтобы из бесконечного разнообразия функций, при помощи которых могут быть выражены неизвестные величины, выбрать такие, при которых можно ожидать, что результат получится с возможно большей точностью.

Статья дает два решения этой задачи. Первое решение достигает цели наиболее коротким путем, если в действительности нужно вывести только одну неизвестную из наблюдений величину, вид зависимости которой заранее известен. Но ближайшее рассмотрение этого решения немедленно приведет к замечательной теореме, что для неизвестной величины точно получается такое значение, которое дает наиболее целесообразная комбинация наблюдений, если в наблюдения внесены известные поправки, вычисленные по определенным правилам и затем подставленные в любую функцию, которая выражает неизвестную величину. Эти поправки имеют свойство, что они удовлетворяют всем условным уравнениям, а также что среди всех возможных систем, обладающих такими же свойствами, сумма квадратов поправок (если предполагается, что наблюдения имеют одинаковую точность) возможно мала. Таким образом видно, что вследствие этого получилось вместе с тем новое обоснование способа наименьших квадратов и это *уравнение* наблюдений, совершенно независимое от функции u , дает второй способ решения, который имеет большое преимущество перед первым, когда надо наиболее целесообразно вывести из наблюдений более чем одну из неизвестных величин. Действительно, благодаря этому для каждой из неизвестных наблюдений будут заранее подготовлены для практического применения. Только при этом втором решении нужно еще привести особую рекомендацию, а именно: определять степень точности, которая достигается при каждом отдельном решении. Для всех этих вопросов в статье имеются исчерпывающие и, по возможности, простые правила; естественно, что перечень их привести здесь мы не в состоянии. Равным образом, мало мы можем здесь входить в подробности относительно всесторонних исследований, произведенных по поводу основных задач и тесно связанных с ними вопросов. Мы приведем здесь только одну замечательную теорему, которая даст правила для получения всегда одного и того же результата при окончательном уравнении наблюдений; правила эти могут применяться при первоначальных наблюдениях или при наблюдениях уже приближенно уравненных, если это последнее понятие принимать в том смысле, в каком оно подробнее определено в статье, в которой оно понимается как частный случай, когда предпри-

нято уравнивание наблюдений, хотя и производимое согласно установленным правилам, но имеющее в виду только часть условных уравнений.

Последнюю часть статьи составляют два тщательно разработанных примера применения способа наименьших квадратов, заимствованных частью из геодезических работ генерала фон Крайенгофа, частью из работ самого автора при прокладывании им триангуляции в королевстве Ганновер; эти примеры могут служить как пояснением применения теории, так и в особенности более ярким освещением различных обстоятельств, касающихся этих работ.

Тригонометрические работы в особенности принадлежат к таким полевым работам, в которых находит применение теория вероятностей, и именно находит применение в той форме, в какой она рассматривается в этой статье. Как раз здесь разработан вопрос об измерениях, которых выполнено больше, чем это безусловно необходимо, и что таким образом одни измерения могут многократно контролировать другие. Только пользуясь строгими законами теории вероятностей, можно извлечь из этих случаев всю ту выгоду, которую из них можно получить, и дать результатам наибольшую точность, на которую они способны. Но, кроме того, эти законы дают вместе с тем средство — определять точность самих измерений и основанных на них результатов. Наконец, они служат для того, чтобы дать выбор наиболее целесообразной системы треугольников из большого числа таких систем, из которых такой выбор возможен. И все это производится согласно твердым и достоверным правилам, не допуская никакого произвола. Но так как надлежащая оценка и наиболее полное использование измерений возможны только тогда, когда они обладают полнотой и достоверностью, то было бы поэтому очень желательно, чтобы все более значительные и претендующие на особую точность измерения этого рода всегда были известны со всеми необходимыми подробностями. Однако обыкновенно этого не бывает, когда сообщают только конечные результаты отдельных измерений углов. Если такие конечные результаты образованы согласно правильным основным принципам, причем все отдельные ряды наблюдений, не заключающие, конечно, грубых ошибок, получены таким же способом, то без сомнения вред не так велик, как если бы были удержаны только те ряды, которые лучше всего подходят к наиболее подходящим условиям поверки, как, например, суммы углов отдельных треугольников или суммы углов, расположенных вокруг точки. Если все же применяют негодный способ, то тогда, происходит ли это вследствие незнакомства с истинными основными принципами правильной теории или вследствие скрытого желания приписать измерениям видимость более высокой точности, мера правильной оценки наблюдений и выведенных из них результатов оказывается утерянной; обыкновенная поверка точности на основании суммы углов отдельных треугольников и суммы углов на пунктах, где измеренные углы охватывают весь горизонт, по-видимому, должна показать точность измерений, но она, может быть, очень далеко отстоит от такой точности; и если имеются под руками другие способы поверки, как, например, соотношения сторон в замкнутых полигонах или направления диагоналей, то эти способы могут обнаружить более крупные ошибки. Но, наоборот, если существует упомянутое сейчас подозрение и уравнивание наблюдений пытаются производить на основании способов поверки, не считаясь с точными правилами теории вероятностей, то всегда приходится бродить в потемках и вводить поправки большие, часто значительно большие, чем это необходимо, а вследствие этого легко может случиться, что получится *слишком* неблагоприятное суждение о произведенных измерениях. Эти замечания показывают важ-

ность как достаточно подробного знакомства, так и основанного на строгих математических принципах комбинирования геодезических измерений; но, очевидно, такие замечания в большей или меньшей степени действительны для наблюдений такого рода, как астрономические, физические и т. п., имеющие дело с количеством, если разнообразие случаев, происходящих при этом, дает средство для их взаимного контроля.

4.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen* — Гёттингенские научные сообщения
17 июня 1809 г.)

Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium, Auctore Carolo Frid. Gauss, Hamburgi, 1809. — Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям, сочинение Карла Фридриха Гаусса, Гамбург, 1809 г.

Выдержка из авторского сообщения «**Carl Gauss Werke**» («Труды Карла Гаусса», т. VI, стр. 59—60).

Для более точной обработки элементов орбиты небесного тела применяют, вместо возможно меньшего числа наблюдений, такое их количество, какое только можно иметь в своем распоряжении. Как при этом поступают, говорится в третьем разделе. Здесь нами рассмотрена основная сущность одного в высшей степени важного вопроса для каждого применения математики в вещественном мире: как для получения наилучших результатов наиболее целесообразным способом комбинировать наблюдения и измерения, которые вследствие несовершенства наших органов и приборов неизбежно всегда подвержены ошибкам, если даже и небольшим. Основные принципы, рассмотренные здесь, которые применялись автором уже в течение 14 лет и уже давно были сообщены им своим друзьям — астрономам, приводят к тому самому способу, который несколько лет тому назад описал *Лежандр* под названием «*Способа наименьших квадратов*» в своем труде: «**Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes**» (Новые методы для определения орбит комет). Обоснование способа, предлагаемого автором, носит вполне оригинальный характер. Дальнейшего развития автором этого способа надо ожидать в будущем.

5.

(*Göttingische gelehrte Anzeigen* — Гёттингенские научные сообщения
13 декабря 1810 г.).

Выдержка из авторского сообщения, напечатанная в «**Carl Gauss Werke**» («Труды Карла Гаусса»), т. VI, стр. 61 и 64.

25 ноября проф. *Гаусс* передал королевскому научному обществу следующую статью:

Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. (Исследование об эллиптических элементах Паллады на основании противостояний 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809 годов).

Вычисление четвертой системы элементов орбиты проведено на основании принципов, изложенных в 3-м разделе 2-й книги «Теории движения небесных тел», и настоящая статья дает к этому описанию много добавлений, которые, вероятно, будут интересны астрономам. Во-первых, дано удобное вычисление дифференциальных изменений гелиоцентрических долгот и геоцентрических широт на основании диф-

ференциальных изменений отдельных элементов. Затем дан особый способ, как определять неизвестные величины согласно упомянутым выше принципам. Пусть, именно, ω , ω' , ω'' , ... — наперед заданные линейные функции неизвестных величин p , q , r , ... и пусть сумма $\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots$ должна быть наименьшей величиной, тогда легко получается столько линейных уравнений, сколько и неизвестных величин, которые надо определить при помощи исключения из этих уравнений. Но такое исключение представляет собой в высшей степени тягостную работу, если число неизвестных сколько-нибудь велико, и еще потому, что каждое уравнение заключает в себе неизвестные величины. Проф. Гаусс весьма существенным образом сократил эту работу, так как, хотя он ведет в обратном порядке решение линейных уравнений, которых столько же, сколько и неизвестных, но эти уравнения составлены так, что только первое из них содержит все неизвестные величины, а во втором — их меньше на p , в третьем — на p и q , в четвертом — на p , q и r и т. д., поэтому определение неизвестных величин в обратном отнимает мало труда. Кроме того, этот способ имеет еще преимущество в том, что заранее принято, что $\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots$ имеет наименьшее значение, и тогда сравнение ее с вычисленной впоследствии, когда в ω , ω' , ω'' , ... подставлены найденные значения неизвестных величин, может быть использовано для контроля вычислений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	1
Введение	3
Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам	17
Первая часть	—
Вторая часть	37
Дополнение к теории комбинации наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам	59
Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям	89
Исследование об эллиптических элементах Паллады на основании противостояний 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809 годов	111
Определение точности наблюдений	121
Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии	129
Определение долгот хронометрическими рейсами	135
Сообщения (Anzeigen)	141

Редактор изд-ва Ф. И. Хромченко

Техн. ред. В. В. Романова

Корректоры: В. А. Григорьева и З. Н. Колеганова

Т—05334

Сдано в набор 2/1 1957 г.

Подп. к печати 1/VI 1957 г.

Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$

Бум. л. 4,9 + 1 вкл.

Печ. л. 9,75 + 1 вкл.

Усл. п. л. 13,35 + 1 вкл.

Уч.-изд. л. 10.

Тираж 2300.

Зак. № 5.

Цена 7 р. + переплет 1 р. 50 к.

Рижская картфабрика, Алтонавас, 43