К. Ф. ГАУСС

ИЗБРАННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СОЧИНЕНИЯ

Под общей редакцией
С. Г. Судакова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
• МОСКВА • 1958 •

К. Ф. ГАУСС

ТОМ
II

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Под редакцией, с введением и комментариями
Г. В. Багратуни

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Н. Ф. БУЛАЕВСКОГО,
М. Л. РУДШТЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА • 1958 •

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во II том избранных геодезических сочинений К. Ф. Гаусса вошли его работы по высшей геодезии. Наряду с законченными и наиболее выдающимися исследованиями, опубликованными еще при жизни Гаусса, сюда вошли некоторые материалы, не опубликованные при жизни автора, и часть переписки с друзьями по вопросам высшей геодезии и ганноверскому градусному измерению.

Второй том разбит на два отделения.

В первое отделение вошли работы: 1. Решение в общем виде задачи, как изобразить части заданной поверхности на другой заданной поверхности, чтобы сохранилось подобие в бесконечно малых частях. 2. Исследование по вопросам высшей геодезии (первая и вторая статьи). 3. Общие исследования о кривых поверхностях. 4. Рецензия на геодезические и астрономические работы для измерения дуги средней параллели, выполненные в 1821—1823 гг. в Пьемонте и Савое комиссией в составе пьемонтских и австрийских офицеров и астрономов. 5. Краткие аннотации перечисленных работ под общим названием Anzeige, которые Гаусс публиковал в известиях Гёттингенского научного общества. В этих аннотациях в весьма сжатой форме Гаусс изложил все то новое, что достигнуто им в данной области.

Все указанные работы, за исключением рецензий и аннотаций, переведены на русский язык и изданы во второй половине прошлого века. В настоящее время они являются библиографической редкостью. Две первые работы переведены известным русским астрономом и геодезистом А. Тилло и изданы в его труде «Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена» в 1866 г. «Общие исследования о кривых поверхностях» были переведены с латинского дважды. Первый перевод выполнен известным переводчиком с древних языков П. Н. Красновым (К. С-кого) и издан под редакцией профессора Петербургского университета К. А. Поссе. Второй перевод «Общих исследований» сделан М. М. Филипповым и издан в 1895 г. в Казани.

Для настоящего издания сочинений Гаусса перевод выполнил Н. Ф. Булаевский. Он совершенно заново перевел указанные первые две работы. В отношении «Общих исследований» было принято решение в основном придерживаться перевода П. Н. Краснова. При этом Н. Ф. Булаевский подверг работу П. Н. Краснова тщательной проверке по латинскому тексту, устранил ряд шероховатостей стиля и исправил замеченные опечатки. По свидетельству Н. Ф. Булаевского, перевод П. Н. Краснова отвечает всем необходимым требованиям хорошего перевода.

Второе отделение содержит систематизированные заметки Гаусса по геодезической проекции ганноверской триангуляции (современная сис-

тема координат Гаусса-Крюгера), переписка с известными геодезистами и астрономами того времени Шумахером, Ольберсом (1), Бесселем (2), Герлингом (3) и Боненбергом (4), план и начало предполагаемого Гауссом труда по высшей геодезии и ряд извлечений из годовых отчетов Гаусса по ганноверскому градусному измерению. Поскольку Гаусс по одному и тому же вопросу вел переписку со всеми этими учеными, то естественно, что в его письмах имеется ряд неизбежных повторений.

Все работы первого отделения взяты из IV тома полного собрания сочинений Гаусса, а второго — из IX тома.

Перевод материалов второго отделения с немецкого выполнен М. Л. Рудштейном.

Аннотации трудов Гаусса, рецензия градусного измерения по параллели и все материалы второго отделения издаются на русском языке впервые.

Введение и необходимые комментарии составлены Г. В. Багратуни. Во введении в краткой форме освещена деятельность Гаусса в области геодезии и дано краткое содержание его основных теоретических работ с указанием их исторического и современного значения.

Выходом в свет второго тома завершается издание избранных геодезических трудов Гаусса. Теперь широкие круги советских геодезистов имеют доступ к подлинным творениям одного из величайших математиков и геодезистов XIX столетия, труды которого легли в основу современной высшей геодезии.

В отношении изучения трудов Гаусса следует иметь в виду следующее. Еще при жизни Гаусса упрекали в том, что он старается быть малопонятным, чтобы казаться более глубоким. Это несправедливый упрек по отношению Гаусса. Однако верно то, что Гаусс в своих работах не оставлял следов тех аналитических рассуждений, с помощью которых он приходил к окончательным результатам. Этот прием давал Гауссу возможность придать своим трудам большую стройность и исключительную лаконичность. Поэтому при изучении его работ необходимо самостоятельно восстановить все опущенные аналитические выводы, чтобы надлежащим образом уяснить себе окончательные результаты.

С. Г. Судаков,
Г. В. Багратуни

ВВЕДЕНИЕ

Геодезическая деятельность К. Ф. Гаусса

Справедливо считается, что стройность и математическая строгость современной высшей геодезии являются следствием больших усилий и работ крупнейших математиков и деятелей науки прошлого столетия. Геодезические работы Струве, Теннера, Болотова, Савича в России; Пикара, Деламбра, Клеро, Лапласа, Лежандра во Франции; Гаусса, Бесселя, Ганзена в Германии; Эри, Пратта, Кларка в Англии и др. положили прочное начало науке — высшей геодезии.

Интерес Гаусса к вопросам высшей геодезии зародился очень рано, будучи еще 19-летним юношей (в 1796—1800 гг.) он уже занимался решением задачи Потенота. Эта задача привлекла его внимание как оригинальная геометрическая проблема, особенно он заинтересовался ее «опасным кругом». В этот же период он занимался обработкой долготных определений полковника Лекока. Последний для военных целей производил тогда съемку Вестфалии. В марте 1799 г. Лекок послал материалы своих астрономических наблюдений Гауссу для вывода долготы. Все вычисления Гаусс произвел по своим собственным формулам. Полковник Лекок по этому поводу писал: «По части астрономии большую пользу мне принес доктор Гаусс, его вычисления и письма многому меня научили».*

Но обработка чужих наблюдений мало удовлетворяла Гаусса, у него было большое желание самому участвовать в наблюдениях. Однако первые попытки и столкновения с действительностью привели Гаусса к заключению, что у него для этой цели нет достаточных навыков и знаний, нет опыта не только в наблюдениях, но и в черчении.

В 1802 г. он обратился к руководителю геодезических и астрономических работ в Тюрингии Цаху (5), с которым он был знаком, с просьбой разрешить ему приехать в Зееберг и практиковаться в наблюдениях и пользовании астрономическими инструментами. Цах сначала в вежливой форме отказал, указывая на близорукость Гаусса, однако через год разрешил ему участвовать в долготных наблюдениях, производимых с помощью пороховых вспышек, и в базисных измерениях. Интересно отметить, что концы этого базиса вблизи Зееберга были отмечены пушечными стволами, которые после битвы под Иеной были откопаны по приказу властей. Гаусс впоследствии говорил, что базис был потерян самым нелепым образом.

Первые шаги, сделанные Гауссом в геодезии, зародили в нем большие планы. В это время он начал обдумывать вопрос о геодезической съемке герцогства Брауншвейгского и даже в окрестностях города производил любительские полевые измерения. В 1803 г. он писал Ольберсу:

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 18]23].

«Я имею план развития в будущем сети триангуляции по всей стране, к чему мои теперешние измерения являются лишь тренировочными упражнениями».*

Увлечение Гаусса этими работами было так велико, что его друзья начали опасаться, как бы он полностью не отдался занятиям по практической астрономии и геодезии, и стали всячески предостерегать его в этом; особенно заметно было беспокойство Ольберса. Гаусс вынужден был специальным письмом успокоить его: «Не думайте, что эти практические занятия оторвут меня от умственной работы; она станет для меня еще дороже, как родина для путешественника, долго пробывшего на чужбине».** Гаусс был великим мастером сочетания теории и практики; наблюдения были для него средством достичь глубоких практических знаний и результатов.

В последующие годы геодезические интересы Гаусса вследствие политических и семейных обстоятельств несколько ослабели. В 1806 г. Германия потерпела военное поражение от Наполеона, войска которого заняли весь Ганновер; погиб главнокомандующий немецкой армией, — покровитель Гаусса — герцог Брауншвейгский, про которого Лаплас, имея в виду Гаусса, сказал: «он открыл у себя в стране больше чем планету — неземной дух в человеческом облике».

В ноябре 1807 г. при содействии Ольберса перед Гауссом открылись широкие возможности для занятий излюбленной им наукой — астрономией: он стал директором строящейся новой Гёттингенской астрономической обсерватории, оставаясь до конца своих дней в этой должности.

В течение 1807—1816 гг. Гаусс с большой энергией и увлечением занимался фундаментальными астрономическими определениями: собственным движением солнечной системы, наклоном эклиптики, интересовался постоянными прецессии и нутации и в этот же период он создал таблицы аберрации. Работы Гаусса во многом дополняли исследования Бесселя, который в «Фундаментальной астрономии» изложил результаты своих многолетних исследований о постоянных аберрации и нутации, астрономической рефракции; при этом он использовал часть работ Гаусса.

В 1809 г. Гаусс издал свой труд «Теорию движения небесных тел», разработал ряд способов определения широты и долготы места, среди которых следует указать работу «Об одной задаче практической астрономии», в которой предлагается для совместного определения широты и долготы наблюдать три звезды на равных зенитных расстояниях. Однако успешные занятия астрономией не помешали ему заниматься геодезией.

Работы Гаусса в области высшей геодезии до 1816 г. были предварительной подготовкой к широкой деятельности в этой области в последующие годы. Обширные работы его начались с того момента, когда 8 июня 1816 г. он получил известие от Шумахера о начале Датского градусного измерения. Шумахер вначале занимался юридическими науками, затем увлекся астрономией; в Гёттингене с большим интересом слушал он лекции Гаусса по астрономии и способу наименьших квадратов. В 1810 г. он был экстраординарным профессором Копенгагенской обсерватории, в 1813 г. стал директором Маннгеймской обсерватории и в 1815 г. окончательно обосновался в Копенгагене в качестве ординарного профессора. Шумахер и Ольберс были наиболее близкими друзьями Гаусса; переписка между ними составляет шесть томов, впоследствии изданных астрономом Петерсом.

---

* C. F. Gauss. Werke, Bd. IX, S. 23

** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 23.

В 1816 г. Шумахер добился от датского правительства средств для проложения градусного измерения по меридиану от Скагена до Лауенбурга и по параллели от Копенгагена до западного побережья Ютландии. Меридианная дуга должна была иметь длину около 4°,5. В своем обращении к Гауссу Шумахер предлагал ему продолжить дугу меридиана на юг через Ганноверское королевство. Градусное измерение Шумахера—Гаусса имело большие перспективы развития на юг до острова Эльбы и могло дать дугу в 16°. Гаусс мечтал развить свое градусное измерение с таким расчетом, чтобы оно было связано в дальнейшем с триангуляцией Прусского генштаба, работами Герлинга в Кургессене; южнее работ Герлинга в Гессен-Дармштадте, Вюртемберге, Баварии и Австрии геодезические работы были начаты.

Развитие этих работ в дальнейшем привело бы к соединению их с большой англо-французской дугой по меридиану Парижа. На севере Датско-ганноверское градусное измерение могло бы включить в себя триангуляции Бельгии и Нидерландов, выполненные в 1801—1816 гг. Крайенгофом. Следует заметить, что впоследствии Гаусс в «Дополнении к теории комбинаций» показал, что работы Крайенгофа были весьма низкого качества.

Гаусс с большим энтузиазмом воспринял сообщение о начале датского градусного измерения и 5 июля 1816 г. он писал Шумахеру: «Прежде всего, дорогой друг, сердечно желаю успеха прекрасному, большому делу, в которое Вы меня посвятили своим последним письмом. Это градусное измерение в датском королевстве уже само по себе сможет дать нам хорошее представление о фигуре Земли. Я не сомневаюсь в том, что в будущем станет возможно продолжить Ваши измерения к югу через Ганноверское королевство... Мы будем тогда иметь солидную дугу меридиана в $6^1/_2$ градусов, и можно будет потом легко связать эти работы с баварскими триангуляциями»*.

Отсюда заключаем, что Гаусс воздержался от положительного ответа в отношении немедленного начала работ по продолжению дуги на юг, через Ганновер. Незадолго до этого было закончено строительство Гёттингенской обсерватории и для оборудования ее надлежащим образом нужны были большие средства и требовалось приложить много усилий. Кроме этого, Гаусс тогда был занят весьма важными исследованиями по математике. Не последнее место среди причин такого ответа занимало и то, что Гаусс вообще не обладал «пробивной» способностью добывать деньги, а для проложения градусного измерения нужны были большие суммы. В указанном письме Гаусса к Шумахеру имеется любопытное признание Гаусса о своих «способностях» выхлопотать деньги... «Из всех трудных искусств искусство ходатайствовать — это то, к чему я, конечно в ущерб себе — имею меньше всего таланта...».

Поэтому Шумахер, который обладал этим искусством с избытком, взял на себя инициативу прямо обратиться к ганноверскому правительству. Хотя дело с выделением средств затянулось, но в конце концов энергичные действия Шумахера увенчались полным успехом, и 9 мая 1820 г. состоялось решение правительства, которое поручило Гауссу продолжение датского градусного измерения через Ганновер.

Датские измерения начались в июле 1817 г. и к концу полевого сезона была проложена дуга в $1^1/_2$ градуса от Гамбурга до острова Альзен. В следующем году Шумахер пригласил Гаусса принять участие в измерениях южных от Гамбурга треугольников, ставших впоследствии соединительными. Гаусс лично наблюдал 12-дюймовым повторительным

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 33.

кругом Борда ряд углов триангуляции Шумахера. В январе 1820 г. Гаусс обратился к Шумахеру за разрешением еще раз принять участие в его работах, в частности, присутствовать при измерении броккенского базиса вблизи Альтоны.

Пребывание Гаусса на этих работах продолжалось с 12 сентября по 25 октября 1820 г. По возвращении он написал подробный отчет о своей поездке, в котором сказано: «Во время моего пребывания в Голштинии я провел вместе с профессором Шумахером все обусловленные наблюдения, измерения и опыты, далее присутствовал при измерении части базиса и, наконец, выполнил все приготовления и договоренности, касающиеся продолжения градусного измерения»*.

Следует указать, как важный исторический факт, что при измерении броккенского базиса присутствовали, кроме Гаусса, Ольберс, Вальбек, тогда еще ученик Шумахера, молодой Ганзен и В. Я. Струве, который в это время был в заграничной командировке. В введении к «Дуге меридиана» Струве вспоминает об этом.

Броккенский базис длиною в 5 *км,* который служил линейным масштабом для датского и ганноверского градусных измерений, был измерен в прямом и обратном направлениях базисным прибором Репсольда, о котором Гаусс в своем отчете отзывался весьма положительно. Расхождения между прямым и обратным измерениями были незначительны. Но в измерении этого базиса был весьма существенный недостаток: рабочие жезлы никогда не сравнивались с нормальной мерой.

Помимо этого, Гаусс в подготовительный период добывал сведения о ранее выполненных геодезических работах на территории Ганновера. Было известно, что в 1804—1805 гг. оккупационные войска Наполеона для военных целей под руководством генерала Эпейли проложили триангуляцию, которая обходным путем связывала южную часть Ганновера с Гамбургом. Хотя, как выяснилось, триангуляция Эпейли принесла мало пользы Гауссу, зато он узнал о жестокости генерала Эпейли к местному населению. Вот что Эпейли писал в своем отчете начальству:

«Чтобы продвигать работы по рекогносцировке, постройке знаков и наблюдениям, нужно было, не обращая внимания на вопли и слезы крестьян, безжалостно вытаптывать их поля, выставлять стекла в куполах колоколен и устраивать там обсерватории; нужно было уметь пользоваться правом завоевателя и не считаться ни с отказом, ни с сопротивлением, нужно было заставить их уважать все, вплоть до сигналов, воздвигнутых нами в полях и не имевших другой охраны, кроме страха»**.

Полевые работы по ганноверскому измерению были начаты в 1821 г. Первоначально предполагалось, что Гаусс свои измерения начнет со стороны Гамбурга от треугольников Шумахера. Но, поскольку данные о триангуляции Эпейли он не получил вовремя даже при содействии Лапласа и, имея в виду трудности местности, отсутствие транспорта, отдаленность от Гёттингена, он решил начать с южного конца дуги и первым пунктом был выбран Гёттинген.

В апреле 1821 г. Гаусс начал рекогносцировку местности, однако надлежащим образом был отрекогносцирован только первый треугольник, одной из вершин которого был Гёттинген. Общего плана рекогносцировки всего района градусного измерения не было, и единую рекогносцировку так и не осуществили. Это упущение впоследствии принесло массу огорчений и затруднений при работе. Отчасти такое явление, к которому теперь мы относимся весьма отрицательно, объясняется для

* C. F. Gauss. Werke, Bd. IX, S.
** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 27.

того времени отсутствием карт, плохими средствами сообщений, отсутствием опыта и др.

Гаусс в своей деятельности придерживался принципа — не делать последующего шага, не закрепив предыдущий, но на этот раз он отказался от своего принципа. Всесторонняя рекогносцировка была весьма необходимой, так как Гаусс решил прокладывать большие треугольники по довольно сложной местности, где были высокие леса и большие равнины; особые трудности пришлось ему испытывать в районе Люнебургской равнины, покрытой лесами и болотами.

Гаусс крайне отрицательно относился к постройке высоких сигналов, он всегда стремился, где возможно, наблюдения вести с земли. Но там, где возникала крайняя необходимость, он строил невысокие сигналы в виде четырехгранных пирамид 10—12 футов высоты. Он утверждал, что такие сигналы «отчетливо видны издалека». На всех пунктах для установки инструмента строились каменные постаменты 3—4 футов высоты. Естественно, что невысокие сигналы в лесных районах приводили к необходимости вырубки просек большого протяжения. В некоторых случаях вырубка производилась по точно установленному инструменту. Сохранилась запись Гаусса по этому поводу на пункте Гасек: «Эта просека действительно стала торжеством математики; как только упало последнее дерево, я обнаружил пункт Шарнгорст между обеими вертикальными нитями»*.

Закреплению пунктов на местности Гаусс также не уделял никакого внимания, центров не закладывал, даже точка стояния инструмента не отмечалась. Визирной целью часто считался центр круга, очерченного вокруг наконечников гелиотропа.

Угловые измерения были начаты 24 июня 1821 г. на гёттингенской обсерватории. Гаусс лично производил измерение углов 12-дюймовым теодолитом Рейхенбаха способом повторений. Как правило, Гаусс не придерживался определенного количества приемов на пункте, а измерял углы до тех пор, «пока каждый угол не получит то, что ему полагается по праву», исходя из условий видимости, количества направлений и высоты сигнала. Наиболее существенными вопросами в методике угловых измерений вначале для Гаусса были проблемы визирных целей и время наблюдений. К визирным цилиндрам он относился отрицательно из-за сопровождающих их фаз. Опыты, поставленные им с отражательными лампами арганда. привели его к заключению, что они мало приспособлены для ночных наблюдений на значительные расстояния (наибольшие стороны его триангуляции были около 90 *км*). Кроме этого, ночные наблюдения он считал утомительными для наблюдателя, если они повторяются ежедневно. Выбор пал на дневные наблюдения с гелиотропом.

Первая мысль о гелиотропе зародилась у Гаусса еще в 1818 г., когда он наблюдал соединительный треугольник триангуляции Шумахера. При измерении угла Гамбург—Вильзеде—Гогенгорск Гаусс записал в журнале наблюдений: «Гамбург плохо видно, западные окна церкви освещены солнцем и мешают наблюдениям.** Позднее он к этой записи добавил: «Этот опыт послужил первым толчком для изобретения гелиотропа осенью 1820 г.»**.

Когда Гаусс начал наблюдения на втором пункте, первый образец гелиотропа механиком Румифом был уже изготовлен, и опыты с ним привели Гаусса в полный восторг. Он по этому поводу написал Линденау 15 июля 1821 г.

---

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 80.

** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 70.

«Вчера днем я снова начал измерение угла между обсерваторией и Гогенгагеном... мои помощники подняли громкое ликование, и слабенькая блестящая звездочка стала заметна невооруженным глазом на хребте, удаленном на 37 *км*... Невозможно представить себе что-нибудь прекраснее, чем эта визирная цель поздним вечером, когда воздух спокоен и все предметы резко очерчены»*. Надо сказать, что гелиотроп конструкции Гаусса был весьма сложным прибором и совсем не похожим на те, которыми пользуются сейчас.

Особая заслуга принадлежит Гауссу в раскрытии систематических ошибок способа повторений. Он в течение продолжительного времени часто возвращался к исследованию ошибок, присущих методике угловых измерений. Гаусс заметил, что теодолит, которым наблюдал его сын, Иосиф, «самым бесстыдным образом» преуменьшает измеренные углы примерно на величину 1″,194. На основе большого экспериментального материала Гаусс допустил две гипотезы:

1) либо лимб не остается совершенно неподвижным за тот промежуток времени, в котором он предполагается неподвижным;

2) либо алидада не сохраняет своей установки относительно лимба в течение того времени, когда ее установка должна быть неизменяемой.

Многочисленные опыты и исследования подтвердили первую гипотезу. В 1844 г. он писал Герлингу, которого тоже занимали эти вопросы: «Мне думается, что при вращении алидады, вследствие трения цапфы во втулке, последняя, а вместе с ней и лимб несколько увлекается в том же направлении, если где-нибудь есть к тому же зазор, алидада проходит, таким образом, меньшую дугу относительно лимба. Этим объясняется преуменьшение всех углов»**. Впервые он обратил внимание на присутствие этой ошибки еще в 1825 г., когда он работал 12-дюймовым теодолитом. Чтобы совершенно исключить ошибки отсчетов, он при исследовании делал более 50 повторений и для уточнения указанной величины преуменьшения (1″,194) он произвел 650 повторений.

Гауссу принадлежат еще и другие исследования систематических инструментальных ошибок способа повторений. Интересны следующие его замечания, сообщенные в письме к Герлингу.

«Я предположил, что имеется еще одна причина, действующая таким же образом, а именно: трение зажима алидады, вращающегося вокруг лимба. Возможно, что эта вторая причина также дает некоторые ошибки, так как до этого размышления не всегда обращалось достаточное внимание на то, чтобы как следует открепить зажимной винт при свободном движении алидады. Дальнейшее обдумывание убедило меня, что существует еще и третья причина, которая, может быть, действует в такой же степени, как первые две. Это — та сила, которую вкладывают в пальцы, зажимая алидаду. Лимб при этом поворачивается в направлении часовой стрелки, если только есть зазор для поворота. Легко убедиться, что третья причина действует в том же направлении, что и первые две, когда вращение алидады происходит слева направо, и в противоположном, когда алидаду вращают в обратном направлении»***.

Для исключения влияния этих систематических ошибок Гаусс вел в употребление особые пружины, исключающие трение, и изменил обычную методику измерения углов. Стал измерять еще дополнительный до 360° угол. Среднее между непосредственно измеренным углом и его дополнением до 360° было свободно от ошибки за увлекание лимба.

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 72.
** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 144.
*** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 146.

Учитывая систематические ошибки, присущие способу повторений, Гаусс идеалом считал измерение углов во всех комбинациях, который впоследствии окончательно был разработан и применен Шрейбером. Со способом круговых приемов, разработанным В. Я. Струве, Гаусс был знаком и называл его способом Струве, но не пользовался им.

Первые годы (1821—1825 гг.) Гаусс вел наблюдения сам; в 1825—1827 гг. он участвовал в наблюдениях, а начиная с 1828 г. он уже в полевых измерениях не участвовал. Эти работы вели Мюллер, Гартман и старший сын Гаусса — Иосиф, который стал его деятельным помощником. Гаусс говорил друзьям, что все его попытки приучить сына к отвлеченному мышлению оказались тщетными, он имел склонность к практической работе. Вследствие этого сын вскоре оставил изучение права и поступил офицером в артиллерийский корпус; в летнее время его командировали на полевые геодезические работы.

Гауссу не помешала и близорукость вести наблюдения с большим мастерством. На пункте Вильзеде за один день при хорошей видимости он выполнил 150 приемов. Это был не единичный случай. Благодаря невысоким сигналам, тщательности и правильной методике наблюдений Гаусс получал весьма высокую точность измерений горизонтальных углов. Средняя величина невязки в 26 измеренных Гауссом треугольниках — 1″,8 и только в одном треугольнике невязка была 2″,2. Ни одно из направлений при уравнивании не получило поправки более одной секунды, наибольшая поправка оказалась 0″,81. Средняя квадратическая ошибка уравненного направления $\pm$ 0″,48. Анализ произведенных Гауссом наблюдений дает все основания считать, что измерения его по своей точности стоят на уровне современных.

Гаусс строго осуждал всех, кто для увеличения фиктивной точности измерений обрабатывал не весь материал, а занимался отбором; он в обработку включал все измерения, которые были свободны от грубых промахов.

Кроме основных направлений, на пунктах триангуляции Гаусс засекал многочисленные боковые пункты. Гаусс очень любил эти засечки, он придерживался взгляда, что лучше, дешевле и точнее засекать с главных пунктов точным инструментом пункты, лежащие внутри треугольников первого класса, чем строить триангуляцию низших классов малоточным инструментом. Он писал Бесселю:

«Я повсюду засекаю при случае все видимые объекты и так привык к этому занятию и ежедневным вычислениям, связанным с ним, что мне наблюдения и вычисления какой-нибудь колокольни доставляет почти такое же удовольствие, как наблюдения новой звезды. В конце концов, богу безразлично, определяем ли мы положение колокольни с точностью до фута или звезды с точностью до секунды»*.

Астрономическая часть градусного измерения заключалась в определении разности широт Гёттингенской и Альтонской обсерваторий. Эти определения с большой тщательностью выполнил Гаусс зенит-сектором Рамсдена. При наблюдениях были использованы 43 звезды. На Гёттингенской и Альтонской обсерваториях, являвшихся конечными пунктами градусного измерения, было сделано 900 наблюдений, каждая звезда наблюдалась 12 раз.

Результаты астрономических определений по дуге Гаусс изложил в труде „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenith-séctor von Carl Friedrich Gauss". [Определение разности широт между Гёттингенской и Альтонской обсерваториями по наблюдениям с помо-

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 74 103).

щью зенит-сектора Рамсдена, произведенными Карлом Фридрихом Гауссом, 1828].

Кроме разности широт, с особой тщательностью наблюдался астрономический азимут на Гёттингенской обсерватории.

Полевые работы по проложению градусного измерения и его привязки к другим работам были завершены в основном в 1827 г. Начиная с 1828 г., триангуляция развивалась под руководством Гаусса для картографических целей и закончилась лишь к 1844 г.

Математическую обработку материалов измерений Гаусс целиком взял на себя, только небольшую помощь эпизодически оказывал ему его сын. Особое внимание Гаусс уделял уравниванию основных 26 треугольников, измеренных лично им. Сеть уравнивалась строго по способу наименьших квадратов, как свободная за условия фигур и полюсов. Условия азимутов и базиса не возникали, так как был только один базис.

Вычисления всей ганноверской триангуляции, имеющей весьма сложный и запутанный вид, были закончены лишь в 1848 г. 15 марта 1848 г. Гаусс направил в Министерство внутренних дел королевства Ганновера 35 тетрадей, содержащих наблюдения на станциях, 6 тетрадей с абрисами триангуляции и 1 тетрадь со списками плоских прямоугольных координат, т. е. в той системе, которую теперь называем координатами Гаусса—Крюгера. В качестве осевого был принят меридиан Гёттинген—Альтона. Число всех пунктов 2578, к этому следует добавить еще 411 повторных определений. Из этого числа самим Гауссом определено 500 пунктов.

Кроме горизонтальных углов, Гаусс почти на всех пунктах своей триангуляции измерял двусторонние зенитные расстояния. Начало счета высот он отнес к уровню Северного моря и, таким образом, установил абсолютную высоту Гёттингенской обсерватории. К измерению зенитных расстояний Гаусс относился с той же тщательностью, что и к горизонтальным направлениям; наблюдения вёл в одно и то же время 12-дюймовым кругом, делал 20 повторений, не допускал односторонних измерений. Вначале для измерения зенитных расстояний он использовал утренние и полуденные часы, а впоследствии наблюдал только в послеполуденные часы между 3—4 час. В письме к Шумахеру он писал:... «...в то время как в полдень рефракция минимальна, к вечеру она возрастает с необыкновенной регулярностью». Произведя уравнивание высот, он получил ошибку в одной передаче $\pm$ 1,5 *м*.

Из обработки своих наблюдений Гаусс вывел среднее значение коэффициента земного преломления, равное 0,130, и указал, что при малых расстояниях возможны значительные уклонения от этой величины.

При выполнении градусного измерения ему пришлось испытывать все «прелести», связанные с полевыми работами. Гауссу, не отличавшемуся крепким здоровьем, приходилось переносить холод и жару, ветер и дождь, неудобства бытовых условий. Но, как истый ученый, он не жалел своих сил для науки. В письме к Бесселю он писал:

«...Я не могу отказаться от этого предприятия, которое хотя и связано с тысячей трудностей, но несомненно полезно; правда, его мог бы выполнить кто-нибудь другой, в то время как я сам в более приличных условиях занялся бы чем-нибудь получше, но дело в том, что если я не возьму это на себя, то оно наверняка вообще не будет выполнено. Наконец, еще одна вещь, несколько выравнивающая несоответствие, которую я не могу скрыть от Вас — это... проблема заработка и потребности большой семьи»*. Надо сказать, что Гаусс всю жизнь

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI,

находился в материально стесненных условиях. Когда Датская академия наук присудила ему медаль за теорию конформных проекций, он попросил заменить ее деньгами.

Гауссу не удалось полностью осуществить широко задуманный план градусного измерения. Это особенно относится к той части работ, в результате которых должна была быть осуществлена привязка измерений Гаусса—Шумахера к ранее выполненным и находившимся в процессе выполнения пунктам градусного измерения. Шумахер умер в 1850 г., оставив незавершенным начатое им измерение.

Произведенные несколько привязок были неудовлетворительными. Само градусное измерение Гаусса имело существенные недостатки даже для того времени. Базисы не были окончательно определены и между собой не уравнены; градусное измерение опиралось на предварительные результаты броккенского базиса. Система построения триангуляции была весьма сложной и запутанной, не всегда она могла быть целесообразно использована для топографических съемок. Пункты на местности фактически не были закреплены, исключая колоколен, и, спустя 50 лет после смерти Гаусса, они больше не существовали на местности. Это весьма тщательное измерение, при обработке материалов которого было переработано более миллиона цифр, оказалось фактически потерянным для последующих топографических и других работ.

Существенные недостатки градусного измерения Гаусса и его небольшие размеры (2°,1) привели к тому, что последующие исследователи не стали рассматривать его как вполне полноценный материал для вывода формы и размеров Земли.

Однако значение градусного измерения Гаусса для современности заключается в его исторической роли, которую оно сыграло в высшей геодезии. Научно-методическая сторона работы Гаусса навсегда останется большим вкладом в высшую геодезию. Исследования и работы Гаусса в области градусных измерений совершенно по-новому поставили и разрешили многие теоретические и практические вопросы высшей геодезии. На основе исследований Гаусса было затем усилиями многих ученых у нас и за границей воздвигнуто стройное здание современной высшей геодезии.

Все теоретические исследования и практические предложения Гаусса в области высшей геодезии и отчасти способа наименьших квадратов основывались на результатах Ганноверского градусного измерения.

Гаусс изобрел гелиотроп, который до сих пор применяется с успехом; исследовал и установил систематические ошибки способа повторений, четко указал факт существования боковой рефракции — «существование в равнинных районах боковой рефракции я никак не могу подвергнуть сомнению», высказал идею измерения углов во всех комбинациях, разработал общую теорию конформного отображения одной поверхности на другую, в частности, разработал и применил систему прямоугольных плоских координат в конформной проекции эллипсоида на плоскости, впоследствии известной как система координат Гаусса — Крюгера; ввел в высшую геодезию принцип средних аргументов при вычислении разности широт, долгот и азимутов геодезических пунктов; разработал теорию геодезической линии и решение треугольников на любой математической поверхности, образованных этими линиями.

Гаусс один из первых сформулировал основную задачу высшей геодезии — определение формы и размеров Земли и исследование ее нерегулярности, но он нигде не изложил свои взгляды по этим вопросам в систематизированном виде. Однако сохранился ряд ценных его высказываний по этим проблемам, которые не лишены интереса и для нашего

времени. Характерна работа известного немецкого геодезиста Г. Брунса «Фигура Земли» (Берлин, 1878), где автор в своих исследованиях исходит из определений математической фигуры Земли, данных Гауссом и Бесселем.

Еще в 1799 г., обрабатывая материалы французского градусного измерения по меридиану Дюнкерка—Барселоны по способу наименьших квадратов, Гаусс обнаружил неравномерное возрастание длины градуса к северу и, кроме того, он заметил, что значение сжатия получается различным в зависимости от размеров дуги и местоположения ее на поверхности Земли.

Из обработки французской дуги меридиана он получил сжатие 1:150, а с учетом перуанской дуги — 1:334.

Это явление Гаусс объяснил тем, что в действительности фигура Земли отступает от эллипсоида вращения, и заключил, что только с увеличением числа градусных измерений можно окончательно выяснить этот вопрос. Были и другие факты, подтверждающие правильность заключения Гаусса. Широта Броккена из триангуляции Мюффлинга оказалась на 9″ меньше астрономической широты: «Здесь вполне может сказаться влияние гор Гарца, — заметил Гаусс, — ибо на юге они представляют такой значительный массив, в то время как на севере ничего нет»*. Однако вскоре выяснилось, что даже на равнинной местности имеется налицо уклонение отвесной линии; расхождения между астрономическими и геодезическими широтами Альтоны, переданные Гауссом из Гёттингена, получились 5″,2. Гаусс писал Шумахеру в 1823 г.: «Разность между Вашей широтой и астрономическими наблюдениями весьма примечательна. Если она вскоре подтвердится многочисленными определениями, в чём я не сомневаюсь, то это даст решающее для меня доказательство неравномерности распределения направления силы тяжести, причём нельзя сказать, что причина лежит в неправильности видимой поверхности. Мне кажется, что иначе нельзя объяснить это явление, и я не могу согласиться с Вашим предыдущим письмом, если Вы утверждаете, что причину не следует искать нигде, кроме как в применяемом мной сжатии. Совокупность всех наблюдений требует этого или мало от него отличающегося сжатия, и если, как показывает опыт, на большем протяжении всегда оказывается другая кривизна, то это указывает лишь на то, что Земля вообще не есть эллипсоид вращения, а волнообразно отклоняется от эллипсоида, описывающего ее в целом»**.

Поразительно, как мог Гаусс на основе этих ограниченных фактов высказать 134 года назад совершенно правильный взгляд на это сложное явление.

Эти отдельные высказывания Гаусса были им окончательно уточнены в указанной уже нами работе «Определение разности широт Гёттингена и Альтоны» (1828), которая считается образцом сжатого изложения результатов наблюдений и учета всех ошибок при применении способа наименьших квадратов. Вот как он впервые в этом труде определил фигуру Земли:

«То, что мы называем поверхностью Земли в геометрическом смысле, есть не что иное, как та поверхность, которая везде перпендикулярна к направлению силы тяжести, и часть которой образована поверхностью мирового океана. Однако, направление силы тяжести в каждой точке определяется формой твердой части Земли и её неравномерной плотностью, а во внешнем поле Земли, о котором только мы и

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 23.
** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 88--89.

можем судить, эта форма и плотность оказываются крайне нерегулярными: нерегулярность плотности может простираться еще глубоко во внутренние слои и никак не поддается учёту, так как почти нет данных для этого. Геометрическая поверхность есть результат совместного влияния этих неравномерно распределенных элементов, и вместо того, чтобы находить странными существующие недвусмысленные доказательства нерегулярности, следовало бы удивляться, что эта нерегулярность не оказывается еще больше... При таком положении вещей, однако, никто не может считать Землю в целом за эллиптический сфероид вращения, от которого действительная поверхность везде отклоняется то в большей, то в меньшей степени»*.

Это определение по своей строгости и полноте ничем не уступает тем, которые приводятся в современных учебниках.

В дальнейшем Гаусс еще несколько раз возвращался к задачам градусных измерений и определению фигуры Земли. Одним из таких поводов был двухтомный труд по градусному измерению вдоль 45° параллели, опубликованный в 1825—1827 гг. Рецензия на эту работу Гауссом написана в 1830 г.

Мысль о новом градусном измерении по 45° параллели через Вену, Брест и до Урала живо интересовала Гаусса, поэтому он в своей рецензии более глубоко, по сравнению с авторами этого труда, рассматривает ряд вопросов, в частности, об уклонении отвесной линии и причинах, вызывающих его. Между прочим, здесь Гаусс впервые указал на большое принципиальное значение уравнения Лапласа для высшей геодезии (азимуты Лапласа).

Особый интерес вызвало у Гаусса расхождение астрономических и геодезических долгот, достигающих 48″. Гаусс эти расхождения отчасти объяснял притяжением горных цепей Альп, ограничивающих район дуги с севера и с юга. Однако главную причину он видел в нерегулярности Земли: «Добавим, — писал Гаусс, — что чем больше будет тщательно выполненных градусных измерений, тем больше будет распространяться убеждение в том, что такие отклонения следует рассматривать только с учётом их величины, а не как исключение, и что они будут встречаться повсюду в большей или меньшей степени»**.

Последнее замечание Гаусса по данному вопросу относится к 1853 г. В письме к генералу Байеру, руководителю геодезических работ Пруссии, он приводит формулу изменения широты с изменением высоты над уровнем моря. Эта формула дает уравнение геоида Листинга, т. е. потенциала Земли, из которой следует также теорема Клеро.

При различных расчетах Гаусс до 1826 г. пользовался значением большой полуоси и сжатия по Вальбеку. В 1827 г. сотрудник Гаусса, Шмидт, который, по отзывам Гаусса, был превосходным вычислителем, переработал материалы вывода Вальбека с добавлением результатов ганноверского градусного измерения и получил новые значения полуоси и сжатия, которые Гаусс считал вполне удовлетворительными и стал ими пользоваться до 1841 г., когда Бессель опубликовал свою работу по определению земного эллипсоида.

Начиная с 1841 г. и до конца своих дней, Гаусс при геодезических и астрономических вычислениях пользовался размерами и сжатием эллипсоида Бесселя.

* * *

Геодезическую деятельность Гаусса можно разделить на три периода.

---

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 123—124; Bd. IX, S. 49.

** C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 127.

Первый период — 1798—1807 гг., когда Гаусс проявил большой интерес к практическим работам и наблюдениям, чтобы приобрести опыт в наблюдениях и навыки в обращении с инструментами.

Второй период,— 1815—1828 гг.— наиболее яркая страница в истории высшей геодезии; именно в этот период Гауссом были разработаны фундаментальные теоретические и практические проблемы высшей геодезии и способа наименьших квадратов. При этом теоретические работы, начатые в этом периоде, окончательно были завершены лишь спустя 30 лет, уже в третьем периоде (1840—1850 гг.), когда он подвел итог своей геодезической деятельности.

Из теоретических работ второго периода первое место занимает общее решение геометрической проблемы конформного отображения одной поверхности на другой или, как Гаусс часто называл, трансформация поверхностей.

Наиболее существенную часть этой проблемы составляет решение конкурсной задачи, предложенной Датской академией наук в 1822 г., — отобразить части одной поверхности на другую так, чтобы сохранилось подобие в самых малых частях, — было опубликовано впервые в 1825 г. в журнале Шумахера „Astronomische Abhandlungen".

Для объявления конкурса Датская академия наук за несколько лет до этого искала подходящей темы. Шумахер об этом оповестил Гаусса еще в 1816 г. в письме, где он сообщил ему о начале датского градусного измерения. Гаусс в своем ответе 5 июля 1816 г. писал Шумахеру:

«...Я еще не рассматривал конкурсную задачу Вашего Общества... Мне в голову пришла интересная задача, а именно: в общем виде проектировать (отобразить) данную поверхность на другую так, чтобы отображение было подобно оригиналу в самых малых частях. Частный случай, когда первая — поверхность шара, а вторая — плоскость. Стереографическая и Меркаторская проекции — частные решения в этом случае. Требуется, однако, общее решение, охватывающее все частные, и для всех видов поверхностей. Это, должно быть, уже разработано Монжем и Пуансо в Journal phelomathique, только я точно не знаю где, и поэтому еще не мог найти. Так что не знаю, соответствует ли их решение моей идее и исчерпывает ли оно вопрос. В противном случае мне кажется, что это было бы неплохой конкурсной задачей для Вашего общества»*.

Предварительные сведения Гаусса о решении задачи Монжем и Пуансо оказались неточными — они этой проблемой в такой обстановке не занимались. Однако интересно другое — Гаусс ничего не говорит о работах Эйлера и Лагранжа в этой области. Правда, решение Эйлера является тем частным случаем, который упомянул выше Гаусс, но ведь Лагранж решил общую задачу конформного отображения поверхностей вращения на плоскости (1780 г.), и его решение до сих пор сохранило свою научную ценность. Как известно, имеются подобные факты и в других областях математики, где Гаусс должным образом не ссылается на работы своих предшественников. Возможно, что это отчасти объясняется характерной для Гаусса чертой — не копаться в литературе для точного установления того, что сделано до него по данному вопросу. «Начитанность и поиски, — писал он, — не моя стихия». Он часто за литературными справками обращался к своим друзьям и говорил при этом, что литературные поиски доставляют ему весьма небольшое удовольствие.

Методически совершенно новым в работе Гаусса является то, что он ввел новое понятие в уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$, когда

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 41,

координаты x, y, z рассматриваются как функции двух независимых переменных u и t. Это оказалось очень выгодным, так как одно и то же значение независимых переменных u и t будет соответствовать на одной поверхности x, y, z, на другой x', y', z'. Далее, он ввел в теорию поверхностей комплексные числа и пришел к знаменитому общему уравнению конформного отображения в виде

$$x + iy = f(q + il).$$

Кроме этого, он дал новое выражение для линейного элемента поверхности в виде $ds^2 = m(dp^2 + dq^2)$, которое впоследствии стали называть изометрическим.

До опубликования этой работы, начиная с 1815 г., Гаусс работал над различными задачами общей проблемы трансформации поверхностей. Его литературное наследие подтверждает, что к 1821 г. он уже владел стереографической проекцией шара и эллипсоида на плоскости, конформной проекцией эллипсоида на шаре и занимался двойной конформной проекцией эллипсоида на плоскости. К этому времени Гаусс в основном разработал и применил специальную конформную проекцию эллипсоида на плоскости для обработки ганноверской триангуляции.

Правда, все эти решения частных задач были найдены как отдельные заметки в его архиве и стали общим достоянием только после выхода IX тома его трудов в 1903 г. Между прочим, Гаусс хорошо понимал значение разработанной им проекции для ганноверской триангуляции. Вот что он писал Ольберсу в письме от 13 января 1921 г.:

«Я уже несколько лет разрабатываю свой метод для целесообразнейшей обработки наблюдений, так как все, что я об этом читал, я нахожу ничего не стоящим. Например, многие математики прилагают много усилий, чтобы вычислить широты и долготы по расстояниям от меридианов и перпендикуляра к нему с учетом эллипсоидальности Земли... Все это похоже на то, как если бы стали запрягать лошадь позади телеги». Далее, в этом же письме, Гаусс указывает, что промежуточной между триангуляцией, широтами и долготами должна быть система прямоугольных координат в конформной проекции..., с помощью которых каждый пункт может быть отображен на плоскости целесообразнейшим образом». О значении этой системы в этом письме он пишет: «Очень охотно я бы применил свою систему не только к ганноверской триангуляции, но и ко всем связанным с ней, и дал бы, таким образом, единое геометрическое описание значительной части Европы, если бы был в этом поддержан должным образом. Но!!»

Делая свои критические замечания в адрес математиков, которые широты и долготы предлагали вычислить по дуге меридиана и перпендикуляру к нему, Гаусс имел в виду Зольднера и его систему координат.

Прошло уже 135 лет с момента разработки Гауссом теории конформных проекций, и до сих пор она не потеряла своей актуальности для геодезии и математической картографии. Больше того, многие замечания Гаусса явились источником глубоких исследований, однако не все вопросы его наследия в этом направлении рассмотрены до конца.

При решении конкурсной задачи Датской академии наук в 1822 г. Гауссу еще не были известны такие важные понятия, как средний радиус кривизны, геодезическая кривизна, мера кривизны и т. д., хотя он уже до этого занимался теорией геодезической линии. В IX томе имеется заметка под заглавием «Основание моей теории геодезической линии», которую Крюгер относит к концу второго десятилетия прошлого века.

В премированной работе при изображении эллипсоида на сфере за радиус сферы Гаусс берет радиус кривизны первого вертикала, а не средний радиус, как он это делает в последующих работах по высшей геодезии.

Основательные занятия Гаусса по дифференциальной геометрии начались после 1825 г., когда в печати появилась конкурсная задача. Осенью 1825 г. он приступил к разработке той части теории поверхностей, которая касалась высшей геодезии, и первоначально предполагал её положить в основу намеченного им труда по высшей геодезии. Однако углубленные занятия вскоре привели его в широкий мир дифференциальной геометрии, и он задумал создать большой труд по дифференциальной геометрии, впоследствии назвав его «Общие исследования о кривых поверхностях».

Исследования по дифференциальной геометрии оказались очень трудными, и Гаусс считал в дальнейшем, что ни в один период его жизни он не работал так напряженно, как зимою 1826 г., и никогда, как он выражался, не собирал такой бедный урожай со своих трудов. Вот одна из трудных задач, над которой он работал продолжительное время.

Гаусс нашел выражение для меры кривизны через линейный элемент поверхности в геодезических полярных координатах $k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$, где m — приведенная длина геодезической линии. Он знал, что мера кривизны может быть выражена посредством коэффициентов и их частных производных линейного элемента поверхности, заданного в общем виде

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F dp dq + G dq^2.$$

Вычисления, которые он выполнял, продолжительное время не увенчивались успехом, ему никак не удавалось получить общее выражение меры кривизны через E, F и G и их частные производные. И когда в конце концов он доказал эту теорему и получил искомую формулу, то он причислил ее «к самым плодотворным теоремам в учении о кривых поверхностях». Немало хлопот причинило ему распространение теоремы Лежандра на треугольники, образованные геодезическими линиями на любой математической поверхности.

Работая над отдельными задачами дифференциальной геометрии, Гаусс сначала предполагал опубликовать ряд статей по мере решения задач в гёттингенских научных трудах. Затем он оставил эту мысль, решив сначала изложить результаты своих исследований на бумаге и потом думать о форме публикации. Правда, Шумахер, который знал о работах Гаусса, не разделял его мнения, считая целесообразным публикование отдельных статей. На что Гаусс ответил ему в несколько раздраженном тоне: «Вам, видимо, кажется, что я могу принести больше пользы науке, если удовлетворюсь созданием камня, кирпича и т. д., вместо постройки здания, будь то храм или хижина, так как всякое здание тоже ведь сложено из кирпичей. Однако, я не хотел бы построить здание, в котором отсутствовали бы главные части, если бы даже я уделял мало внимания внешней отделке». В связи с упреками в его адрес он часто повторял: «Независимость есть решающее условие углубленной умственной работы»*.

Если не считать решения задачи конформного отображения одной поверхности на другой, то «Общие исследования о кривых поверхно-

* C. F. Gauss. Werke, Bd. XI, S. 113.

стях» являются единственной фундаментальной работой Гаусса по дифференциальной геометрии. Несмотря на небольшой объем этих исследований, они составили целую эпоху в развитии дифференциальной геометрии и высшей геодезии с 1828 г. и до наших дней.

Содержание указанной работы Гаусса подробно изложено в его аннотации, приведенной в этом томе; отметим только наиболее важные вопросы, имеющие большое значение для высшей геодезии:

1. Впервые в ней изложена теория геодезической линии, геодезической кривизны, найдены специальные виды линейного элемента поверхности через прямоугольные сфероидические и полярные геодезические координаты. Введено понятие о приведенной длине геодезической линии, которое затем было разработано Кристофелем.

2. Введена мера кривизны и средняя кривизна в данной точке поверхности, определен средний радиус кривизны и дана формула для его вычисления на любой математической поверхности.

3. Доказана важная для высшей геодезии теорема: «Избыток суммы углов треугольника, образованного геодезическими линиями, над 180° или же недостаток той же суммы на поверхности отрицательной кривизны, равен площади сферического отображения этого треугольника».

4. На этой основе дана теория решения треугольников, образованных геодезическими линиями, на любой математической поверхности, в частности рассмотрены треугольники на поверхности эллипсоида вращения.

5. Введена в высшую геодезию система сфероидических прямоугольных и полярных геодезических координат, установлена взаимосвязь между этими двумя системами координат, употребляемыми в высшей геодезии.

Разумеется, что краткий перечень полностью не исчерпывает всех задач, решенных в этом труде и имеющих принципиальное значение для высшей геодезии.

С выходом в свет в 1828 г. «Общих исследований о кривых поверхностях» завершился второй наиболее плодотворный период геодезической деятельности Гаусса. В 1828 г., по приглашению Александра Гумбольта, Гаусс уехал на съезд естествоиспытателей в Берлин. Здесь он впервые встретился с тогда еще молодым физиком Вебером, который в 1831 г., по инициативе Гаусса, был приглашен профессором в Гёттинген.

Поездка Гаусса в Берлин и его знакомство с Вебером явились поворотным пунктом в его научной деятельности. Начиная с 30-х годов, интерес Гаусса к физике, в частности к магнетизму, превалирует над высшей геодезией. Хотя по-прежнему Гаусс продолжает заниматься обработкой материалов ганноверской триангуляции: в 1834 г. он выполнил большую работу по уравниванию основных треугольников своей системы, руководя полевыми измерениями, но все это он делал для того, чтобы завершить начатое дело. В основном он был поглощен изучением и обработкой материалов многолетних мировых магнитных наблюдений. В исследовании вопросов земного магнетизма он добился исключительного успеха; в науке, как тогда говорили, он переживает свою вторую молодость.

Гаусс полностью оправдал слова Гёте: «У высокоодаренных людей и в старости можно увидеть свежие периоды особой продуктивности». Гаусс в течение 1831—1842 гг. показал силу своего гения в вопросах изучения земного магнетизма. Можно считать, что математика была первой вершиной его достижений, высшая геодезия — второй и магнетизм — третьей и последней.

Когда в 1843 г. Вебер по политическим мотивам был вынужден оставить Гёттинген и выехать в Лейпциг, Гаусс вновь вернулся к своим работам по высшей геодезии и в этом же году опубликовал первую статью под названием «Исследование по вопросам высшей геодезии». Еще в 1822 г., когда Гаусс решил конкурсную задачу Датской академии наук, он обещал в дальнейшем особо рассмотреть приложения своей теории конформного отображения к вопросам высшей геодезии.

Указанная первая статья целиком посвящена решению прямой геодезической задачи методом конформного отображения эллипсоида на шаре. Здесь он впервые употребил термин «конформное изображение». Если в работе 1822 г. при проектировании всей поверхности эллипсоида на шаре характеристическую функцию он брал в виде $f(\upsilon)=\upsilon$ или $f(\upsilon)=\upsilon-i\lg k$, где k — постоянная интеграции, а $i=\sqrt{-1}$, то для изображения небольших участков, которыми в большинстве случаев пользуются в высшей геодезии, Гаусс характеристическую функцию взял в виде $f(\upsilon)=\alpha\upsilon-i\lg k$, т. е. ввел новую постоянную проекции α. При этом определение постоянных Гаусс производил таким образом, чтобы отклонение масштаба от единицы по текущей параллели сводилось к малой величине третьего порядка. Для этой цели масштаб по текущей параллели представляется рядом по возрастающим степеням разности нормальной и текущей широт и первые производные масштаба по широте приравнивались нулю для определения α и k.

Кроме этого, взамен радиуса кривизны первого вертикала был применен средний радиус, введенный им в дифференциальную геометрию «Общими исследованиями о кривых поверхностях». В этой статье Гаусс мыслил себе решение прямой геодезической задачи следующим образом: сначала проектировать триангуляцию на сферу по законам конформной проекции, затем вычислить координаты ее вершин на сфере и, наконец, с помощью специальных таблиц, составленных и приложенных к статье, перейти к геодезическим координатам на эллипсоиде.

Вторая статья «Исследований по вопросам высшей геодезии» появилась в 1846 г. В ней сфера уже рассматривается как математическое средство для преобразования формул, и задача решается на эллипсоиде. Главным достижением этой работы надо считать применение принципа средних аргументов, средней широты и среднего азимута. Окончательные формулы Гаусс получает двумя путями: через преобразования формул для шаровой поверхности и разложением в ряд по строке Тейлора со средними аргументами. Формулы Гаусса применяются и до сих пор, особенно для решения обратной геодезической задачи, для которой они являются наилучшими.

Теоретические работы Гаусса в области высшей геодезии с особым интересом изучались в прошлом у нас в России. Ряд курсов по высшей геодезии, как, например, «Лекции по высшей геодезии» Слудского, «Теория фигуры Земли» Хандрикова и другие, написаны на основе работ Гаусса.

Особенно высоко ценил теоретические работы Гаусса Ф. Н. Красовский, который в предисловии к II части «Руководства» писал: «Та связь геодезии с математикой, которая была в свое время так блестяще и гениально проведена Гауссом и Бесселем, вновь выдвигается советской действительностью».

Глубокое и всестороннее изучение богатого наследия Гаусса может оказать большую помощь советским геодезистам при решении указанной Ф. Н. Красовским задачи.

Г. В. Багратуни

Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten

in den kleinsten Theilen ähnlich wird

von

Carl Friedrich Gauss

Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für MDCCCXXII aufgegebenen Preisfrage „Ab his via sternitur ad maiora“

Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. Schumacher Drittes Heft. Altona, 1825.

Решение в общем виде задачи:

Изображение частей заданной поверхности на другой заданной поверхности с сохранением подобия в бесконечно малых частях.

Карл Фридрих Гаусс

Ответ на предложенную королевским научным обществом в Копенгагене тему на соискание премии в MDCCCXXII (1825) г.

«От этих мест дорога ведет в более высокие страны».
(Ab his via sternitur ad maiora).

«Астрономические статьи», издаваемые Г. Х. Шумахером

Третий выпуск. Альтона, 1825 г.

Вступительные слова Гаусса к статье

Автор статьи полагает, что повторное предложение — дать решение задачи, составляющей ее тему, служит доказательством большого значения, приписываемого теме Копенгагенским научным обществом, назначившим премию для поощрения этого решения. В статье приведено давно найденное автором решение, которое не было представлено раньше, так как он поздно узнал об условиях конкурса. Он сожалеет, что последнее обстоятельство вынудило его ограничиться только наиболее важным и указанием на некоторые вопросы, касающиеся использования его решения в картографии и высшей геодезии; еще не закончив полной разработки вопроса, автор продолжает охотно заниматься дальнейшими исследованиями некоторых частных случаев и подробно разрабатывает многочисленные приложения в высшей геодезии предложенного им решения, опубликование которых он должен был отложить до другого времени и в другом месте.

Декабрь 1822 г.

РЕШЕНИЕ В ОБЩЕМ ВИДЕ ЗАДАЧИ: ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧАСТЕЙ ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ДРУГОЙ ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ С СОХРАНЕНИЕМ ПОДОБИЯ В БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ЧАСТЯХ [1]

1.

Свойства какой-либо кривой поверхности определяются уравнением, связывающим между собой координаты x, y, z каждой точки этой поверхности. На основании такого уравнения можно каждую из этих трёх переменных величин рассматривать как функцию двух других. Но задача примет более общий вид, если ввести еще две новые переменные t, u и каждую из величин x, y, z рассматривать как функции t, u; причём, вообще говоря, определенным значениям t, u всегда будет соответствовать вполне определенная точка поверхности, и наоборот.

2.

Для другой поверхности величины X, Y, Z, T, U имеют такое же значение, как x, y, z, t, u для первой поверхности.

3.

Изобразить первую поверхность на второй — значит найти закон, согласно которому каждой точке первой поверхности должна соответствовать определенная точка второй поверхности. Это получится тогда, когда T и U будут определенными функциями двух переменных величин t и u. Так как изображение должно удовлетворять известным условиям, то такие функции отнюдь не могут быть произвольными. Так как величины X, Y, Z будут функциями t и u, то последние (функции) должны удовлетворять не только условию, принятому для свойств второй поверхности, но и условиям, которым должно удовлетворять получаемое изображение.

4.

Согласно условию королевского научного общества, получаемое изображение должно сохранять подобие в бесконечно малых частях*. Поэтому в первую очередь следует аналитически выразить это требование.

Дифференцируя функции от t, u, через которые выражены x, y, z, X, Y, Z, можно получить следующие уравнения:

$$dx = adt + a'du,\ dy = bdt + b'du,\ dz = cdt + c'du,$$
$$dX = Adt + A'du,\ dY = Bdt + B'du,\ dZ = Cdt + C'du.$$

Для удовлетворения поставленному условию необходимо, во-первых, чтобы бесконечно малые отрезки линий первой поверхности, проходящих через некоторую определенную её точку, были пропорциональны длине соответствующих отрезков на второй поверхности, и, во-вторых, чтобы углы, заключенные между указанными линиями первой поверхности, были равны углам, образуемым соответствующими линиями на второй поверхности.

---

* У Гаусса здесь и дальше повсюду вместо «бесконечно малые» употребляется «самые малые» (kleinsten). И это, конечно, правильно, так как при изображении одной поверхности на другой речь может идти о весьма малых, но конечных частях. Однако у нас и за границей уже давно получили права гражданства «бесконечно малые», причем это обстоятельство до сих пор не приводило к каким-либо недоразумениям в теоретических и практических вопросах геодезии и картографии. Поэтому в настоящем переводе сохранена общепринятая терминология (Прим. ред.).

Длина линейного элемента на первой поверхности равна

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\,dt^2+2(aa'+bb'+cc')\,dt\,du+(a'^2+b'^2+c'^2)\,du^2},$$

а на второй поверхности ей соответствует

$$\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\,dt^2+2\,(AA'+BB'+CC')\,dt\,du+(A'^2+B'^2+C'^2)\,du^2}.$$

Для того чтобы оба эти выражения, независимо от dt и du, находились в указанном выше соотношении, необходимо, чтобы три величины

$$(a^2+b^2+c^2),\ (aa'+bb'+cc'),\ (a'^2+b'^2+c'^2)$$

были соответственно пропорциональны следующим трём величинам:

$$(A^2+B^2+C^2),\ (AA'+BB'+CC'),\ (A'^2+B'^2+C'^2).$$

Если конечным точкам второго линейного элемента на первой поверхности соответствуют значения: t, u и $t+\delta t$, $u+\delta u$, то косинус угла, который он образует с первым линейным элементом, равен

$$\frac{(adt+a'du)(a\delta t+a'\delta u)+(bdt+b'du)(b\delta t+b'\delta u)+(cdt+c'du)(c\delta t+c\delta' u)}{\sqrt{[(adt+a'du)^2+(bdt+b'du)^2+(cdt+c'du)^2]\cdot[(a\delta t+a'\delta u)^2+(b\,\delta t+b'\delta u)^2+(c\delta t+c'\delta u)^2]}}$$

и для косинуса угла между соответствующими линейными элементами на второй поверхности получается совершенно такое же выражение, если только заменить a, b, c, a', b', c'. через A, B, C, A', B', C'. Очевидно, оба выражения равны друг другу, если существует указанная выше пропорциональность, а следовательно, этим будет удовлетворено и второе условие, что станет само собой понятным после некоторых размышлений.

Поэтому аналитическое выражение условия нашей задачи должно быть выражено так:

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{AA'+BB'+CC'}{aa'+bb'+cc'}=\frac{A'^2+B'^2+C'^2}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

Это представляет собой некоторую конечную функцию от t и u; мы будем обозначать его через m^2. Величина m представляет собой отношение, показывающее увеличение или уменьшение длины элементарного отрезка на первой поверхности при изображении его на второй поверхности (смотря по тому, будет ли m больше или меньше единицы). Такое отношение, вообще говоря, изменяется в зависимости от местоположения на поверхности; в частном случае, когда m остается постоянным, получается полное подобие в конечных частях, а если сверх того $m=1$, получается полное равенство, и одна поверхность совпадает с другой.

5.

Обозначим для краткости

$$(a^2+b^2+c^2)\,dt^2+2\,(aa'+bb'+cc')\,dt\,du+(a'^2+b'^2+c'^2)\,du^2=\omega,$$

тогда мы заметим, что дифференциальное уравнение $\omega=0$ можно интегрировать двумя путями. Если трёхчлен ω разложить на два множителя,

линейных относительно dt и du, то один из множителей должен равняться нулю, вследствие чего возможно два различных интегрирования Одно интегрирование соответствует уравнению

$$0=(a^2+b^2+c^2)\,dt+\{aa'+bb'+cc'+$$
$$+i\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')}\}du$$

(где для краткости написано i вместо $\sqrt{-1}$; легко убедиться, что иррациональная часть этого выражения должна быть мнимой); другой интеграл получается при интегрировании совершенно такого же уравнения, если только i заменить через $-i$. Итак, пусть интеграл первого уравнения равен

$$p+iq=\text{const},$$

где p и q — вещественные функции от t и u; в таком случае второй интеграл равен

$$p-iq=\text{const};$$

само собой разумеется, что

$$(dp+idq)\cdot(dp-idq) \text{ или } (dp^2+dq^2)$$

будет одним из сомножителей уравнения ω или должно получиться

$$\omega=n\,(dp^2+dq^2),$$

где n — конечная функция от t и u.

Обозначим через Ω трёхчлен, в который преобразовано выражение

$$dX^2+dY^2+dZ^2,$$

если вместо dX, dY, dZ подставить значения T, U, dT, dU; в таком случае, на основании рассуждений, подобных приведенным выше, мы получим для интегралов уравнения $\Omega=0$ следующие выражения:

$$P+iQ=\text{const},\quad P-iQ=\text{const}$$

и

$$\Omega=N\,(dP^2+dQ^2),$$

где P, Q, N — вещественные функции T и U.

Очевидно, интегрирование следует выполнить (если не принимать во внимание трудности самого процесса интегрирования) до решения нашей основной задачи.

Если подставить в выражения для T, U такие функции от t, u, при которых выполняются условия нашей основной задачи, то Ω примет значение $m^2\omega$, и мы получим

$$\frac{(dP+idQ)\,(dP-idQ)}{(dp+idq)\,(dp-idq)}=\frac{m^2n}{N}.$$

Но легко видеть, что числитель в первой части этого уравнения только тогда делится на его знаменатель, когда

либо $(dP+idQ)$ делится на $(dp+idq)$ и $(dP-idQ)$ на $(dp-idq)$

либо $(dP+idQ)$ делится на $(dp-idq)$ и $(dP-idQ)$ на $(dp+idq)$.

Кроме того, в первом случае $(dP+idQ)$ превращается в нуль, когда $(dp+idq)=0$; или $(P+iQ)$ становится постоянной величиной, когда $(p+iq)$ имеет постоянное значение, т. е. $(P+iQ)$ является только функцией от $(p+iq)$; равно как и $(P-iQ)$ — только функцией от $(p-iq)$. Во втором случае $(P+iQ)$ будет функцией от $(p-iq)$, а $(P-iQ)$ — функцией от $(p+iq)$. Легко видеть, что эти следствия имеют и обрат-

ное значение, т. е. если принять, что $(P+iQ)$, $(P-iQ)$ являются функциями от $(p+iq)$, $(p-iq)$, то Ω без остатка разделится на ω, а следовательно, будет иметь место требуемая пропорциональность.

Легко убедиться, кроме того, что если, например, принять

$$P+iQ=f(p+iq),$$
$$P-iQ=f'(p-iq),$$

то свойства функции f' будут уже определены функцией f. А именно, если при постоянных величинах, которые на деле редко встречаются, будем оперировать только с вещественными величинами, то значение f' должно быть совершенно одинаковым с f, вследствие чего вещественные значения p, q будут всегда соответствовать вещественным значениям P, Q; в противном случае значение f' будет отличаться от f только тем, что в мнимые члены выражения f вместо i всюду придется подставить $-i$.

На основании чего имеем:

$$P=\frac{1}{2}f(p+iq)+\frac{1}{2}f'(p-iq),$$
$$iQ=\frac{1}{2}f(p+iq)-\frac{1}{2}f'(p-iq)$$

или, что то же самое, считая f совершенно произвольной функцией (не исключая постоянных мнимых членов выражения), следует считать P — вещественной, а iQ (при втором виде решения задачи — iQ) — мнимой частью выражения $f(p+iq)$, а поэтому, с помощью исключения, можно выразить T и U в функции t, u. Этим самым стоящая перед нами задача будет решена в общем виде и полностью.

6.

Если $(p'+iq')$ — представляет собой любую функцию от $(p+iq)$ причем p', q' — вещественные функции от p, q, то легко видеть, что

$$p'+iq'=\text{const} \text{ и } p'-iq'=\text{const}$$

будут интегралами дифференциального уравнения $\omega=0$; действительно, оно удовлетворяется при указанных выше

$$p+iq=\text{const} \text{ и } p-iq=\text{const}.$$

Точно так же интегралами дифференциального уравнения $\Omega=0$ будут:

$$P'+iQ'=\text{const} \text{ и } P'-iQ'=\text{const},$$

так как оно вполне удовлетворяется упомянутыми выше

$$P+iQ=\text{const} \text{ и } P-iQ=\text{const},$$

если $(P'+iQ')$ представляет собой любую определенную функцию от $(P+iQ)$, причем P', Q' представляют собой вещественные функции от P, Q. Отсюда ясно, что при решении нашей задачи в общем виде, которое приведено в предыдущем параграфе, можно вместо p, q брать p', q' и соответственно вместо P, Q брать P', Q'. Хотя и не удается достигнуть обобщения с помощью такой замены, но иногда бывает удобнее применять для одних целей первую форму решения, а для других целей — вторую.

7.

Если обозначить функции, полученные дифференцированием произвольных функций f, f' через φ и φ', так что $df(\upsilon)=\varphi(\upsilon)\,d\upsilon$, $d\cdot f'(\upsilon)=\varphi'(\upsilon)\,d\upsilon$, то на основании нашего решения в общем виде имеем:

$$\frac{dP+idQ}{dp+idq}=\varphi(p+iq), \quad \frac{dP-idQ}{dp-idq}=\varphi'(p-iq),$$

а следовательно,

$$\frac{m^2 n}{N} = \varphi\,(p+iq)\cdot\varphi'(p-iq).$$

Тогда масштаб определится по формуле

$$m = \sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{\omega}\cdot\frac{\Omega}{dP^2+dQ^2}\cdot\varphi\,(p+iq)\cdot\varphi'(p-iq)}.$$

8.

Приведем теперь несколько примеров, на основании которых лучше всего выяснится как способ применения данного нами общего решения на практике, так и особенности некоторых обстоятельств, которые надо иметь в виду.

Пусть, во-первых, заданы две плоские поверхности:

$$x=t,\quad y=u,\quad z=0,$$
$$X=T,\quad Y=U,\quad Z=0,$$

на которых мы будем решать нашу задачу.

Интегрирование дифференциального уравнения

$$\omega = dt^2+du^2=0$$

дает тогда два интеграла:

$$t+iu=\text{const}\ \text{и}\ t-iu=\text{const};$$

равным образом два интеграла уравнения $\Omega = dT^2+dU^2=0$ будут равны:

$$T+iU=\text{const},\quad T-iU=\text{const}.$$

Тогда оба решения уравнения в общем виде примут следующую форму:

I. $T+iU=f\,(t+iu),\quad T-iU=f'\,(t-iu);$

II. $T+iU=f\,(t-iu),\quad T-iU=f'\,(t+iu).$

Полученный нами результат можно выразить еще так: если через f обозначается любая функция, то вещественную часть выражения $f(x+iy)$ можно принять равной X, а мнимую часть—или равной Y, или—Y, если отбросить множитель i.

Если пользоваться обозначениями φ, φ' в том смысле, как это сказано в § 7, и принимать, что

$$\varphi\,(x+iy)=\xi+i\eta,\quad \varphi'(x-iy)=\xi-i\eta,$$

где ξ и η, очевидно, являются вещественными функциями x и y, то для первого решения мы имеем:

$$dX+idY=(\xi+i\eta)\,(dx+idy),$$
$$dX-idY=(\xi-i\eta)\,(dx-idy),$$

а следовательно,

$$dX=\xi dx-\eta dy,$$
$$dY=\eta dx+\xi dy.$$

Примем теперь

$$\xi = \sigma \cos \gamma, \qquad \eta = \sigma \sin \gamma,$$
$$dx = ds \cos g, \qquad dy = ds \sin g,$$
$$dX = dS \cos G. \qquad dY = dS \sin G,$$

где ds — линейный элемент первой поверхности; g — угол, образуемый им с осью абсцисс; dS — соответствующий линейный элемент второй поверхности; G — угол, образуемый им с осью абсцисс; тогда на основании приведенных выше уравнений получаем:

$$dS \cdot \cos G = \sigma \cdot ds \cdot \cos (g + \gamma),$$
$$dS \cdot \sin G = \sigma \cdot ds \cdot \sin (g + \gamma),$$

а следовательно, считая σ положительным, что вполне допустимо, имеем:

$$dS = \sigma ds, \quad G = g + \gamma.$$

Таким образом, мы видим (согласно § 7), что σ является отношением элементарного отрезка ds к отрезку dS на другой поверхности и, как это должно быть, не зависит от g; равным образом, показав, что угол γ не зависит от g, мы видим, что все элементарные отрезки, проходящие через некоторую точку на первой плоскости, изобразятся элементарными отрезками на второй плоскости и при этом образуют углы, равные углам между соответствующими отрезками на первой поверхности; причем, как мы можем добавить, они будут располагаться *в том же направлении.*

Если f выбрана как линейная функция, так что $f(\upsilon) = A + B\upsilon$, где постоянные коэффициенты имеют следующий вид:

$$A = a + bi, \qquad B = c + ei,$$

то мы получим

$$\varphi(\upsilon) = B = c + ei,$$

а следовательно,

$$\sigma = \sqrt{c^2 + e^2}, \qquad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{e}{c}.$$

В таком случае масштаб остается постоянным во всех точках, и изображение будет подобно изображаемой фигуре.

Для всякой другой функции f (как это легко доказать) масштаб не остается постоянным, а следовательно, подобие сохраняется только в бесконечно малых частях.

Если надо найти на изображении такие места, которые должны соответствовать определенному числу точек на первой поверхности, то легко можно с помощью линейного интерполирования составить простейшую алгебраическую функцию f, которая удовлетворяет этому условию. Обозначим значения $(x + iy)$ для данных точек a, b, c и т. д. и соответствующие значения $(X + iY)$ через A, B, C и т. д., в таком случае мы должны принять

$$f(\upsilon) = \frac{(\upsilon - b)(\upsilon - c)\ldots}{(a - b)(a - c)\ldots} A + \frac{(\upsilon - a)(\upsilon - c)\ldots}{(b - a)(b - c)\ldots} B + \frac{(\upsilon - a)(\upsilon - b)\ldots}{(c - a)(c - b)\ldots} C + \ldots;$$

это алгебраическая функция от υ, порядок которой на единицу меньше числа заданных точек. Для двух точек, для которых функция будет линейной, следует считать, что имеет место полное подобие.

Этот способ может иметь большое применение в геодезии при исправлении карты, составленной на посредственной основе, но при хорошей съемке деталей, а в целом несколько искаженной, если только на

карте известно правильное положение некоторого числа пунктов. Но само собой понятно, что при такой исправленной карте не следует очень удаляться за пределы из области, которая заключает в себе эти пункты.

Когда производят таким же способом *второе* решение, то оказывается, что все различие с первым заключается в обратном подобии изображения; линейные элементы образуют углы, равные соответственным углам на изображении, но только идут они в обратном направлении, т. е. там, где они были вправо, на изображении они влево. Но такое различие не существенно и пропадает, если на плоскости принять за нижнюю ту сторону, которая прежде считалась верхней. Последнее замечание следует принимать во внимание во всех случаях, когда одна из двух поверхностей будет плоскостью; поэтому в приводимых ниже примерах такого рода мы будем ограничиваться только первым решением.

9.

Рассмотрим теперь изображение на плоскости прямого конуса (второй пример). Уравнение поверхности прямого конуса имеет вид

$$x^2 + y^2 - k^2z^2 = 0,$$

где

$$x = kt \cos u,\ y = kt \sin u,\ z = t;$$

как и прежде примем: $X = T;\ Y = U,\ Z = 0.$

Дифференциальное уравнение

$$\omega = (k^2 + 1)\ dt^2 + k^2t^2du^2 = 0$$

дает два интеграла

$$\lg t \pm i \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u = \text{const.}$$

Следовательно, получаем решение

$$X + iY = f\ (\lg t + i \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u),$$

$$X - iY = f'(\lg t - i \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u),$$

т. е. если f обозначает произвольную функцию, то мы имеем для X — вещественную, а для Y — мнимую часть выражения

$$f\ (\operatorname{tg} t + i \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u),$$

если отбросить множитель i.

Например, примем для значения f некоторую показательную функцию, а именно:

$$f(\upsilon) = he^{\upsilon},$$

где h—постоянная величина и e—основание натуральных логарифмов*, тогда простейшее изображение будет

$$X = ht \cos \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u,\ \ Y = ht \sin \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}\ u.$$

* У Гаусса — гиперболических логарифмов.

Применяя формулы из § 7, получаем

$$n=(k^2+1)\ t^2,\ N=1$$

и, так как $\varphi(\upsilon)=\varphi'(\upsilon)=he^{\upsilon}$,

$$\varphi\left(\lg t+i\sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}u\right)\cdot\varphi'\left(\lg t-i\sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}u\right)=h^2t^2,$$

то, следовательно,

$$m=\frac{h}{\sqrt{k^2+1}},$$

т. е. будет постоянной величиной. Приняв, кроме того,

$$h=\sqrt{k^2+1},$$

мы видим, что изображение полностью совпадает с изображаемой фигурой.

10.

В качестве третьего примера изобразим на плоскости поверхность шара радиуса a. Предположим в этом случае, что

$$x=a\ \cos t\ \sin u,$$
$$y=a\ \sin t\ \sin u,$$
$$z=a\ \cos u,$$

на основании чего получим

$$\omega=a^2\ \sin^2 u\ dt^2+a^2\,du^2.$$

Дифференциальное уравнение $\omega=0$ примет вид

$$dt\mp i\frac{du}{\sin u}=0,$$

а его интегралы равны

$$t\pm i\ \lg\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}u=\text{const}.$$

Обозначив через f произвольную функцию, мы должны тогда принять для X — вещественную, а для iY — мнимую часть выражения

$$f\left(t+i\lg\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}u\right).$$

Приведем теперь два частных случая решения нашей задачи в общем виде.

Если f — линейная функция и $f(\upsilon)=k\upsilon$, то

$$X=kt.\quad Y=k\lg\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}u.$$

Эти формулы можно применить к Земле, если принять, что t — географическая долгота, $(90°-u)$ — широта; очевидно, мы получим тогда проекцию того же типа, как проекция Меркатора. Согласно формуле, приведенной в § 7, для масштаба получается выражение

$$m=\frac{k}{a\ \sin\ u}.$$

Если принять, что f — мнимая показательная функция и простейший вид ее $f(\upsilon) = ke^{i\upsilon}$, то имеем

$$f(t + i \lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} u) = ke^{\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} u + it} = k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \, (\cos t + i \sin t)$$

и

$$X = k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \cos t, \quad Y = k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \sin t,$$

что соответствует, как легко видеть, полярной стереографической проекции.

Предположим в более общем случае, что $f(\upsilon) = ke^{i\lambda\upsilon}$, тогда получим

$$X = k \operatorname{tg}^{\lambda} \tfrac{1}{2} u \cos \lambda t, \qquad Y = k \operatorname{tg}^{\lambda} \tfrac{1}{2} u \sin \lambda t.$$

Для масштаба получим в этом случае

$$n = a^2 \sin^2 u, \qquad N = 1, \qquad \psi(\upsilon) = i\lambda k e^{i\lambda\upsilon},$$

откуда

$$m = \frac{\lambda k \operatorname{tg} \lambda \frac{1}{2} u}{a \sin u}.$$

Мы видим, что здесь изображение всех пунктов, для которых u остается постоянной величиной, будет окружностью, а изображение всех пунктов, для которых постоянной является t — прямой линией; кроме того, различным значениям u соответствуют концентрические окружности. Таким образом, получаем очень удобную картографическую проекцию, если надо изобразить только часть поверхности шара; лучше всего подбирать для λ такое значение, чтобы масштаб для крайних значений u был одинаковой величины; тогда в центре проекции он примет наименьшую величину. Если эти крайние значения u равны u° и u', то мы должны принять

$$\lambda = \frac{\lg \sin u' - \lg \sin u^0}{\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} u' - \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} u^0}.$$

(Если при $u = u^*$ масштаб должен принять среднее значение, то $\lambda = \cos u^*$).

Листы № 19—26 звездной карты проф. Гардинга составлены в этой проекции.

11.

Решение примера в общем виде, рассмотренное в предыдущем параграфе, можно представить еще в другой форме; изящество этого решения побуждает нас привести здесь также и его.

Согласно рассмотренным в § 6 предположениям, выражение

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \, (\cos t + i \sin t)$$

---

* Рукописное добавление Гаусса, помещенное на полях его собственного экземпляра книги. **(Прим. ред.)**.

представляет собой функцию от

$$t + i \lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} u,$$

а решения в общем виде уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} u \, (\cos t + i \sin t) = \frac{\sin u \cos t + i \sin u \sin t}{1 + \cos u} = \frac{x + iy}{a + z}$$

равны

$$X + iY = f\left(\frac{x + iy}{a + z}\right), \quad X - iY = f'\left(\frac{x - iy}{a + z}\right),$$

т. е. X — вещественная и iY — мнимая часть $f\left(\frac{x+iy}{a+z}\right)$, если f — произвольная функция. Вместо $f\left(\frac{x+iy}{a+z}\right)$ можно принять, как легко это видеть, произвольную функцию от $\frac{y+iz}{a+x}$ или от $\frac{z+ix}{a+y}$.

12.

В качестве четвертого примера рассмотрим изображение на плоскости эллипсоида вращения. Пусть a и b — две главные полуоси, тогда

$$x = a \cos t \sin u, \quad y = a \sin t \sin u, \quad z = b \cos u.$$

В таком случае

$$\omega = a^2 \sin^2 u \, dt^2 + (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) \, du^2;$$

если мы для краткости обозначим $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \varepsilon$ (так как ось вращения $b < a$), то дифференциальное уравнение $\omega = 0$ примет вид

$$0 = dt \mp i du \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 u + 1 - \varepsilon^2}.$$

Положим теперь

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} w,$$

где на земном эллипсоиде $(90° — w)$ — географическая широта и t — долгота; подставим это выражение в наше уравнение; оно преобразуется тогда в

$$0 = dt \mp i dw \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w) \sin w};$$

интегрируя его, получаем

$$\text{const} = t \pm i \lg \left\{ \operatorname{ctg} \frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}.$$

Кроме того, если f — произвольная функция, то для X мы примем вещественную, а для iY — мнимую часть выражения

$$f\left(t + i \lg \left\{ \operatorname{ctg} \frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}\right).$$

Если f — линейная функция, например $f(\upsilon) = k\upsilon$, то получим

$$X = kt, \quad Y = k \lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} w - \frac{1}{2} k\varepsilon \lg \frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w},$$

т. е. проекцию, аналогичную проекции Меркатора.

Если примем, что f — мнимая показательная функция $f(\upsilon) = ke^{i\lambda\upsilon}$, то получим

$$X = k\ \mathrm{tg}^{\lambda}\frac{1}{2}w\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda}\cos\lambda t,\quad Y = k\ \mathrm{tg}^{\lambda}\frac{1}{2}w\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda}\sin\lambda t,$$

которая при $\lambda = 1$ аналогична полярной стереографической проекции и вообще представит собой очень удобную проекцию для изображения части земной поверхности, если при этом хотят принять во внимание сжатие Земли.

Что касается второго случая, когда $b > a$, то следует сказать, что его легко непосредственно вывести из изложенного выше; при этом, если удерживать те же обозначения, ε будет мнимым, а $\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$ вещественным. Но для полноты изложения мы приведем также формулы, которые специально относятся к этому случаю, причем в первую очередь примем $\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1} = \eta$. Значение w определяем из формулы

$$\sqrt{1+\eta^2}\,\mathrm{tg}u = \mathrm{tg}w,$$

а дифференциальное уравнение

$$0 = dt \mp i\,dw\cdot\frac{1+\eta^2}{(1+\eta^2\cos^2 w)\sin w}$$

будет иметь интегралы

$$\mathrm{const} = t \pm i\left(\lg\ \mathrm{ctg}\frac{1}{2}w + \eta\,\mathrm{arc\ tg}\eta\ \cos w\right),$$

так что мы должны будем принять X — вещественной, а iY — мнимой частью выражения

$$f\left(t + i\left(\lg\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\ w + \eta\ \mathrm{arc\ tg}\ \eta\ \cos w\right)\right).$$

Противоположность между обоими упомянутыми выше частными случаями здесь сама собой очевидна. В первом случае мы должны принять:

$$X = kt,\quad Y = k\ \lg\ \mathrm{ctg}\frac{1}{2}w + \eta k\ \mathrm{arc\ tg}\eta\ \cos w,$$

во втором

$$X = k\ \mathrm{tg}^{\lambda}\frac{1}{2}w\cdot e^{-\eta\lambda\ \mathrm{arc\,tg}\,\eta\cos w}\cos\lambda t,$$

$$Y = k\ \mathrm{tg}^{\lambda}\frac{1}{2}w\cdot e^{-\eta\lambda\ \mathrm{arc\,tg}\,\eta\cos w}\sin\lambda t.$$

13.

В последнем примере мы рассмотрим в общем виде изображение поверхности эллипсоида вращения на поверхности шара. Для первого мы удержим обозначения предыдущего параграфа, радиус шара примем равным A, тогда

$$X = A\cos T\sin U,\quad Y = A\sin T\sin U,\quad Z = A\cos U.$$

Если воспользоваться здесь решением в общем виде, приведенным в § 5, то для произвольной функции f мы найдем, что T должно быть равно вещественной, а $i \lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} U$ — мнимой части выражения

$$f\left(t + i \lg\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}w \cdot \left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}\right).$$

Простейший способ решения получается, если принять $f(\upsilon)=\upsilon$, тогда

$$T = t, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}U = \operatorname{tg}\frac{1}{2}w \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Этот способ представляет собой чрезвычайно употребительное в высшей геодезии преобразование, о применении которого мы здесь даем только отдельные и краткие намеки. А именно, если на поверхности эллипсоида и шара рассматривать соответствующие один другому пункты с одинаковой долготой и широтами $(90°—w)$ и $(90°—U)$, связанные между собой приведенным выше уравнением, то мы получим систему сравнительно малых треугольников (такими треугольниками всегда приходится пользоваться в действительности при измерениях); на поверхности земного сфероида такие треугольники образованы очень короткими линиями, а на поверхности шара они образуют систему треугольников, углы которых *точно* равны углам соответствующих треугольников на сфероиде; стороны же их так мало отличаются от дуг больших кругов, что в большинстве случаев, когда не требуется большой точности, могут рассматриваться, как отрезки дуг большого круга, но и в тех случаях, когда требуется очень большая точность, легко вычислить с помощью простых формул отклонения их от больших кругов со всей необходимой строгостью. После того как сперва одна сторона треугольника перенесена надлежащим образом на поверхность шара, можно по углам вычислить всю систему совершенно так, как если бы она лежала на этой поверхности, определить затем для всех пунктов системы значения T и U, внося при этом, если понадобится, поправки, и на основании полученных T и U переходить к соответствующим значениям w (это проще всего делать с помощью очень легко составляемых вспомогательных таблиц).

Так как сеть треугольников всегда рассматривается только на очень незначительную часть земной поверхности, указанной цели можно еще легче достигнуть, если несколько обобщить решение в общем виде и принять не функцию $f(\upsilon)=\upsilon$, а $f(\upsilon)=\upsilon+\text{const}$. Очевидно, мы не получим здесь ничего нового, если вводимая нами постоянная будет иметь вещественное значение, потому что тогда T и t будут различаться между собой на эту постоянную величину, а следовательно, начальный меридиан счета долгот окажется неодинаковым. Но совершенно другое получится, если постоянной приписывать мнимое значение. Положим, что она равна $-i \lg k$, тогда

$$T = t, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}U = k\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}w \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

* Мы не говорим здесь о втором решении § 5, которое отличается от приводимого здесь заменой $-T$ на $+T$ и обратным изображением, ни о случае эллипсоида, вытянутого по оси вращения, который, согласно исследованию его в предыдущем параграфе, сам собой получается из сплюснутого эллипсоида.

Чтобы выбрать для k наиболее целесообразное значение, мы должны прежде всего определить масштаб.

Принимая обозначения § 5 и 7, получаем

$$n = a^2 \sin^2 u, \quad N = A^2 \sin^2 U, \quad \varphi(\upsilon) = 1.$$

Следовательно,

$$m = \frac{A \sin U}{a \sin u} = \frac{A \sin U}{a \sin w} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 w} =$$

$$= \frac{A}{a} \cdot \frac{k \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}{\sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} w \cdot (1 - \varepsilon \cos w)^{\varepsilon} + k^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \cdot (1 + \varepsilon \cos w)^{\varepsilon}}};$$

это значение m зависит только от широты. Возможно малого отклонения от полного подобия мы достигаем тогда, когда определяем k так, что m для крайних широт будет сохранять равные значения; отсюда следует, что для средней широты m приближается к наибольшему или наименьшему значению. Обозначим значения w для крайних широт через w° и w', тогда получим

$$k = \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{1}{2} w^0 \cdot (1 - \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w^0)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}} - \frac{\cos^2 \frac{1}{2} w' \cdot (1 - \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w^1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}}{\frac{\sin^2 \frac{1}{2} w' \cdot (1 + \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w')^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}} - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} w^0 \cdot (1 + \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w^0)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}}}.$$

Чтобы исследовать, для какой широты m принимает наибольшее или наименьшее значение, мы имеем

$$\frac{dm}{m} = \operatorname{ctg} U \, du - \operatorname{ctg} w \, dw + \frac{\varepsilon^2 \cos w \sin w \, dw}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 w},$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dw}{\sin w} - \frac{\varepsilon^2 \sin w \, dw}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 w} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \, dw}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 w) \sin w},$$

откуда

$$\frac{dm}{m} = \frac{(1 - \varepsilon^2) \, dw}{\sin w \cdot (1 - \varepsilon^2 \cos^2 w)} (\cos U - \cos w).$$

Отсюда ясно, что m принимает своё наибольшее или наименьшее значение, когда $U = w$; обозначим значение w для этих случаев через W, тогда

$$k = \left(\frac{1 - \varepsilon \cos W}{1 + \varepsilon \cos W}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \text{ или } \cos W = \frac{1 - k^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon \left(1 + k^{\frac{2}{\varepsilon}}\right)};$$

откуда можно вычислить значение W, если k вычислено по приведенной выше формуле. Впрочем, на практике трудно добиться полного равенства значений m на крайних широтах, и мы должны довольствоваться тем, что возьмем для $(90° - W)$ приблизительно среднее значение широты

и на основании его выведем κ. Вообще, связь между U и w выражается формулой

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}U=\operatorname{tg}\frac{1}{2}w.\left\{\frac{(1-\varepsilon\cos W)(1+\varepsilon\cos w)}{(1+\varepsilon\cos W)(1-\varepsilon\cos w)}\right\}^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Для числовых вычислений на практике выгоднее применять ряды различного вида, но здесь мы не будем останавливаться на рассмотрении этого вопроса.

Впрочем, легко видеть, что при $w<W$ и $U>w$, т. е. $(\cos U-\cos w)$ будет отрицательным, равно как и $\frac{dm}{dw}$; а для $w>W$ и $U<w$, $\frac{dm}{dw}$ будет положительным; поэтому ясно, что при $w=U=W$ значение m всегда становится минимальным, а именно:

$$m=\frac{A}{a}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 W}.$$

Итак, подобрав для радиуса шара значение $A=\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 W}}$, получаем изображения бесконечно малых частей эллипсоида для широты $(90°-W)$ не только подобными, но и равными, а для других широт они будут больше.

Выгодно логарифм m разложить в ряд по возрастающим степеням $(\cos U-\cos W)$; для практики достаточно взять его первые члены

$$\lg\operatorname{hyp}.\, m=\lg\left(\frac{A}{a}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 W}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)}\cdot(\cos U-\cos W)^2-$$

$$-\frac{2\varepsilon^4\cos W}{3(1-\varepsilon^2)^2}(\cos U-\cos W)^3+\ldots$$

Если, например, Данию в пределах между широтами 53 и 58° перенести на поверхность шара и принять $W=34°30'$, то при сжатии Земли 1 : 303 изображение ее на границах увеличится только на 1 : 530 000.

Мы ограничиваемся здесь кратким указанием на *один* только способ использования переноса фигур в высшей геодезии, а более полное изложение этого вопроса откладываем до другого места.

14

Нам остается еще рассмотреть один случай, встречающийся при нашем общем решении. В § 5 мы показали, что всегда получается два решения, если существуют либо $(P+iQ)$ — функция от $(p+iq)$ и $(P-iQ)$ — функция от $(p-iq)$, либо $(P+iQ)$ — функция от $(p-iq)$ и $(P-iQ)$ — функция от $(p+iq)$. Теперь мы покажем, что всегда при первом решении фигуры на изображении сохраняют положение такое же, как и изображаемые; при втором решении — расположение их получается обратное; мы дадим теперь критерий, по которому можно заранее (a priori) судить о взаимном их расположении.

В первую очередь заметим, что о полном или обратном подобии можно говорить только тогда, когда существует различие между двумя сторонами на каждой из двух поверхностей, из которых одна сторона рассматривается как верхняя, а другая — как нижняя. Так как такое различие несколько произвольно, то оба решения не имеют существенной разницы; обратное подобие получается только тогда, когда принимается на одной поверхности за нижнюю та сторона, которая прежде рассматривалась как верхняя. При нашем решении такого распознавания нельзя применить, так как поверхности определяются с помощью координат их точек. Если желательно разобраться в этом различии, то нужно

сперва установить свойства поверхности другим способом, который охватывал бы их все. Для этой цели допустим, что свойства первой поверхности определяются уравнением $\psi = 0$, где ψ — данная однородная функция от x, y, z. Во всех точках поверхности значение функции ψ превращается в нуль, а во всех точках пространства, расположенных вне поверхности, ψ в нуль не превращается. Следовательно, при переходе через поверхность, вообще говоря, значения ψ из положительных переходят в отрицательные; при переходе через неё в обратном направлении — из отрицательных в положительные; или иначе, с одной стороны поверхности ψ сохраняют положительное значение, а с другой стороны — отрицательное; первую сторону мы будем считать верхней, а вторую — нижней. То же самое мы примем для второй поверхности, свойства которой определяются уравнением $\Psi = 0$, где Ψ — заданная однородная функция координат X, Y, Z. Продифференцировав эти уравнения, получаем

$$d\psi = e\,dx + g\,dy + h\,dz,$$
$$d\Psi = E\,dX + G\,dY + H\,dZ,$$

где e, g, h — функции от x, y, z, а E, G, H — функции от X, Y, Z.

Так как рассуждения, с помощью которых мы должны дойти до решения поставленной перед собой цели, не трудны, но носят несколько необычный характер, то мы постараемся придать им наибольшую ясность. Примем, что между двумя соответствующими одно другому изображениями на поверхностях, выраженных уравнениями $\psi = 0$ и $\Psi = 0$, вставлено шесть промежуточных изображений на плоскости, так что будем рассматривать всего лишь восемь изображений;

	Соответствующие точки, координаты которых равны:
1. Первоначальное изображение на поверхности, уравнение которой $\psi = 0$	x, y, z
2. Изображение на плоскости	$x, y, 0$
3. „ „ „	$t, u, 0$
4. „ „ „	$p, q, 0$
5. „ „ „	$P, Q, 0$
6. „ „ „	$T, U, 0$
7. „ „ „	$X, Y, 0$
8. Проекция на поверхности, уравнение которой $\Psi = 0$.	X, Y, Z

Сравним между собой эти различные изображения только с точки зрения взаимного *положения* бесконечно малых отрезков, не обращая внимания на изменение их величины. Итак, расположенными подобным образом будем считать два изображения, если из двух элементарных отрезков, проходящих через одну точку, расположенный отрезок справа на одном изображении, на другом соответствует тоже расположенный справа; в противном случае будем называть их расположенными в обратном порядке. На плоскостях № 2 — 7 сторона с положительными значениями для третьей координаты всегда будет рассматриваться как верхняя; напротив, для первой и последней поверхности различие между верхней и нижней сторонами зависит от положительного или отрицательного значения ψ и Ψ, как это уже было установлено выше.

Очевидно, что для всех мест на первой поверхности, в которых при постоянных x и y, вследствие положительного приращения z, указанные места переходят на ее верхнюю сторону, изображение 2 расположено подобно изображению 1; очевидно, так будет всегда, когда h положи-

тельное; при отрицательном h произойдет обратное явление, и изображение будет расположено в обратном порядке.

Точно так же изображения 7 и 8 будут расположены подобно или в обратном порядке в зависимости от того, будет ли H положительным или отрицательным.

Чтобы сравнить между собой изображения 2 и 3, допустим, что в первом из них ds — длина бесконечно малого отрезка от точки с координатами x, y; до другой — с координатами $x+dx$, $y+dy$, а l — наклон её относительно оси абсцисс, возрастающий в направлении, в котором переходят от оси x к оси y, т. е.

$$dx = ds \cos l, \quad dy = ds \sin l.$$

На изображении 3 пусть $d\sigma$ — длина линии, соответствующей ds, а λ — наклон её к оси абсцисс, отсчитываемый в таком же направлении, как сказано выше, так что

$$dt = d\sigma \cos \lambda, \quad du = d\sigma \sin \lambda.$$

Таким образом, сохраняя обозначения § 4, имеем:

$$ds \cdot \cos l = d\sigma \cdot (a \cos \lambda + a' \sin \lambda),$$
$$ds \cdot \sin l = d\sigma \cdot (b \cos \lambda + b' \sin \lambda),$$

а следовательно,

$$\operatorname{tg} l = \frac{b \cos \lambda + b' \sin' \lambda}{a \cos \lambda + a' \sin' \lambda}.$$

Если рассматривать x и y как постоянные, а l и λ как переменные, то после дифференцирования получим

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{ab' - ba'}{(a \cos \lambda + a^1 \sin \lambda)^2 + (b \cos \lambda + b' \sin \lambda)^2} = (ab^1 - ba^1)\frac{d\sigma^2}{ds^2}.$$

Мы видим тогда, что в зависимости от того, будет ли $(ab' - ba')$ положительным *или* отрицательным, l и λ всегда одновременно увеличиваются *или* изменяются в обратном направлении, а следовательно, в первом случае изображения 2 и 3 расположены подобно, а во втором случае — расположены в обратном порядке.

Соединяя этот результат с найденным раньше, получаем, что изображения 1 и 3 расположены подобно или в обратном порядке в зависимости от того, будет ли положительной или отрицательной дробь

$$\frac{ab' - ba'}{h}.$$

Так как на поверхности, уравнение которой $\psi = 0$, имеем

$$edx + gdy + hdz = 0,$$

то, следовательно,

$$(ea + gb + hc)\, dt + (ea' + gb' + hc')\, du = 0;$$

при этом, если всегда считать dt и du произвольными, то, очевидно, что

$$ea + gb + hc = 0, \quad ea' + gb' + hc' = 0$$

тождественно равны, откуда следует, что e, g, h соответственно пропорциональны $(bc' - cb')$, $(ca' - ac')$, $(ab' - ba')$, т. е.

$$\frac{bc' - cb'}{e} = \frac{ca' - ac'}{g} = \frac{ab' - ba'}{h}.$$

Таким образом, при наличии этих трёх выражений или умножив их, сохранив их свойства, на величину $(e^2+g^2+h^2)$, мы можем применять полученное тогда симметричное выражение

$$ebc'+gca'+hab'-ecb'-gac'-hba',$$

как критерий подобного или обратного расположения частей в изображениях 1 и 3.

Совершенно так же подобное или обратное расположение частей в изображениях 6 и 8 зависит от положительного или отрицательного значения величин

$$\frac{BC'-CB'}{E}=\frac{CA'-AC'}{G}=\frac{AB'-BA'}{H}$$

или, еще лучше, от значения симметричного выражения

$$EBC'+GCA'+HAB'-ECB'-GAC'-HBA'.$$

Сравнение изображений 3 и 4 имеет такие же основания, как 2 и 3; подобное и обратное расположение частей зависит от положительного или отрицательного знака выражения

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right);$$

точно так же положительный или отрицательный знаки выражения

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right)\left(\frac{dQ}{dT}\right)$$

определяют подобное или обратное расположение частей в изображениях 5 и 6.

Наконец, что касается сравнения изображений 4 и 5, то мы можем обратиться к анализу, произведенному в § 8; на основании его очевидно, что бесконечно малые части расположены подобно или в обратном порядке в зависимости от того, выбрано ли первое или второе решение, т. е. принято ли

$$P+iQ=f\,(p+iq)\ \text{и}\ P-iQ=f'(p-iq),$$

или

$$P+iQ=f\,(p-iq)\ \text{и}\ P-iQ=f'\,(p+iq).$$

Из всего сказанного выше мы можем вывести заключение, что при перенесении изображения с поверхности, уравнение которой $\Psi=0$, на поверхность, уравнение которой $\psi=0$, оно не только сохраняет подобие в бесконечно малых частях, но и расположено в том же порядке в зависимости от числа отрицательных величин среди следующих четырех выражений:

$$\frac{ab'-ba'}{h},\ \left(\frac{dp}{dt}\right)\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right),\ \left(\frac{dP}{dT}\right)\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right)\left(\frac{dQ}{dT}\right),$$
$$\frac{AB'-BA'}{H}.$$

Если среди них нет ни одной отрицательной величины или их чётное число, то следует выбирать первое решение; если имеется одна или три отрицательные величины, то выбирают второе решение. При противоположном выборе всегда будет получаться обратное расположение частей.

Наконец, можно еще показать, что если приведенные выше четыре величины обозначим через r, s, S, R, то всегда будем иметь:

$$\frac{r\sqrt{e^2+g^2+h^2}}{s}=\pm n, \qquad \frac{R\sqrt{E^2+G^2+H^2}}{S}=\pm N,$$

где n и N имеют такое же значение, как указано в § 5; мы не будем останавливаться на этой теореме, хотя нетрудно найти её доказательство, потому что она не понадобится для нашей цели.

Примечание Гаусса на собственном экземпляре книги. В § 13, рядом с уравнениями, относящимися к изображению, определяемому функцией $j(\upsilon)=\upsilon-i\lg k$, можно привести соответствующие уравнения для функции $f(\upsilon)=\alpha\upsilon-i\lg k$, о которых будет говориться впоследствии, в первой статье „Исследования по вопросам высшей геодезии". (Untersuchungen über Gegenstände höhern Geodaesie).

Untersuchungen
über
Gegenstände der höhern Geodaesie
ERSTE ABHANDLUNG
von
Carl Friedrich Gauss

Der königlichen Societät übergeben MDCCCXLIII october XXIII
Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen
Band II
Göttingen 1844

Исследование по высшей геодезии

ПЕРВАЯ СТАТЬЯ

Карл Фридрих **Гаусс**

Передана королевскому обществу в 1843 г., 23 октября.

Мемуары королевского научного общества в Гёттингене, том II,
Гёттинген, 1844

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ [2]

В тригонометрических геодезических работах, распространенных по всему королевству Ганновер, производившихся частично мною, частично под моим руководством, по способу измерений, особенно в части последующей математической обработки их и получения окончательных результатов, избраны были пути, отличающиеся от обычно применявшихся ранее. Сначала мною было принято решение — после полного завершения полевых измерений описать их в особом труде вместе со всеми применявшимися мною способами работы и получения результатов. Но по причинам, говорить о которых здесь неуместно, это до сих пор не могло быть выполнено. Поэтому я выбираю на будущее время такой способ: лично мною разработанные теоретические вопросы опубликовать в ряде статей; это будет тем выгоднее, что я тогда буду иметь свободу подробнс излагать различные исследования, которые представляют особый интерес и находятся в тесной связи с другими вопросами, хотя последние непосредственно и не применялись в моих полевых измерениях. Это именно и относится к большей части содержания настоящей, первой, статьи.

1.

Я уже дал в 1822 г. в общем виде решение задачи:

Как изобразить части одной поверхности на другой данной поверхности, чтобы сохранилось подобие в бесконечно малых частях.

Оно было напечатано Шумахером в 3-м выпуске „Astronomische Abhandlungen“ (Астрономические статьи). С применением этой задачи в вывсшей геодезии, для которой она является плодотворным вспомогательным средством, ощущалась необходимость дать особое название изображениям, отвечающим указанным выше условиям, поэтому я буду

называть их конформными изображениями или перенесениями (conforme Abbildungen oder Übertragungen), причем этому, прежде неопределенному, прилагательному (конформное) я даю строго определенное математическое значение.

В упомянутой мною статье дано решение в общем виде, которое заключает в себе произвольную функцию; оно применено также ко многим *известным* поверхностям; в последнем примере говорится о конформном перенесении поверхности эллипсоида вращения на поверхность шара, причём в § 13 дано такое определение произвольной функции, которое может быть с выгодой использовано в высшей геодезии. В упомянутой выше статье такое использование было только вкратце намечено, от детального рассмотрения которого я тогда воздержался. Однако вместо этого частного решения я приведу в настоящей статье несколько измененный и гораздо более пригодный для применения в геодезии способ конформного перенесения поверхности эллипсоида на поверхность шара, и при этом укажу все необходимые сведения, связанные с таким использованием.

Решение задачи в общем виде, примененное к эллипсоидальной или сферической поверхности, дает следующую формулу, охватывающую все конформные перенесения одной поверхности на другую

$$T + i \lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} U = f\left(t + i \lg\left\{\operatorname{cgt}\frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - e\cos w}{1 + e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}e}\right\}\right). \qquad (1)$$

Здесь обозначено:

e — эксцентриситет эллипса, вращением вокруг малой оси которого образована эллипсоидальная поверхность;

t и $90° - w$ — долгота и широта некоторой еще не определенной точки на этой поверхности, причем w — угол, образуемый с малой осью и нормалью, проведенной в этом пункте к поверхности;

T и $90° - U$ — долгота и широта соответствующего пункта на поверхности шара;

i — мнимая единица $\sqrt{-1}$;

f — обозначение для любой избранной нами произвольной функции.

Логарифмы всегда берутся гиперболические (натуральные).

Через m обозначается масштаб, который понимается так, что каждый линейный элемент на поверхности эллипсоида относится к соответствующему линейному элементу на поверхности шара, как 1 к m; такое отношение в каждом пункте той и другой поверхности остаётся определенным, но изменяется в различных пунктах.

Простейшее решение получается, когда произвольную функцию просто полагают равной её аргументу, т. е.

$$f(\upsilon) = \upsilon;$$

этот способ перенесения на практике бывает самым удобным, если требуется перенести *всю* поверхность эллипсоида на поверхность шара. В применении к геодезическим вычислениям, где всегда рассматривается только сравнительно малая часть поверхности Земли, гораздо выгоднее, как говорилось выше, добавить к функции постоянную — мнимую часть, т. е. принять

$$f(\upsilon) = \upsilon - i \lg k.$$

Остается тогда определить радиус шара и постоянную k так, чтобы масштаб m, от небольших изменений которого в пределах изображаемой части поверхности особенно зависит удобство её применения в геодези-

ческих вычислениях, был равен единице на средней параллели и весьма мало отличался от единицы на расстоянии нескольких градусов к северу и к югу от неё, т. е. отклонение от 1 остается величиной второго порядка по отношению к расстоянию от средней параллели и, кроме того, заключает еще в себе как множитель сжатие или квадрат эксцентриситета.

Но это преимущество можно значительно увеличить, если вместо такой произвольной функции выбрать несколько измененную, почти столь же удобную для вычислений функцию, в которой добавлена вторая постоянная α

$$f(\upsilon) = \alpha\upsilon - i \lg k.$$

Тогда в нашей власти путем целесообразного определения постоянных добиться того, что отклонение масштаба m от 1 будет величиной третьего порядка по отношению к расстоянию от средней параллели, не считая остающегося еще здесь множителя e^2.

3.

При таком определении функции f формула (1) принимает вид

$$T = \alpha t, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2} U = k \operatorname{tg}^{\alpha}\frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 + e\cos w}{1 - e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \tag{3}$$

и для m легко найти на основании формул, выведенных в часто упоминавшейся выше статье, выражение

$$m = \frac{\alpha A \sin U \cdot \sqrt{1 - e^2 \cos^2 w}}{a \sin w}, \tag{4}$$

если через a обозначать большую полуось эллипсоида и через A — радиус шара.

Логарифмируя уравнение (3) и дифференцируя его, получаем

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{\alpha dw}{\sin w} - \frac{\alpha e^2 \sin w\, dw}{1 - e^2 \cos^2 w}.$$

или

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\alpha (1 - e^2) \sin U}{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w}. \tag{5}$$

Точно так же дифференцирование уравнения (4) даёт

$$d \lg m = \operatorname{ctg} U\, dU - \operatorname{ctg} w\, dw + \frac{e^2 \cos w \sin w\, dw}{1 - e^2 \cos^2 w} =$$

$$= \operatorname{ctg} U\, dU - \frac{(1 - e^2) \cos w\, dw}{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w},$$

следовательно, если с помощью уравнения (5) исключить dU или dw, то получим

$$\frac{d \lg m}{dw} = \frac{(1 - e^2)(\alpha \cos U - \cos w)}{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w}, \tag{6}$$

$$\frac{d \lg m}{dU} = \operatorname{ctg} U - \frac{\cos w}{\alpha \sin U} = \frac{\alpha \cos U - \cos w}{\alpha \sin U}. \tag{7}$$

Дифференцируя еще раз уравнение (7), получаем

$$\frac{d^2 \lg m}{dU^2} = -\frac{1}{\sin^2 U} + \frac{\cos U \cos w}{\alpha \sin^2 U} + \frac{\sin w}{\alpha \sin U}\frac{dw}{dU} = -\frac{1}{\sin^2 U} +$$

$$+ \frac{\cos U \cos w}{\alpha \sin^2 U} + \frac{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin^2 w}{\alpha^2 (1 - e^2) \sin^2 U}. \tag{8}$$

Пусть для определенной широты (нормальной широты) значение m равно единице, для других широт оно отклоняется от единицы только на величины третьего порядка, если рассматривать разности широт как величины первого порядка; тогда, обозначив нормальную широту на эллипсоиде через P, соответствующую ей широту на шаре через Q, для $w = 90° - P$, $U = 90° - Q$, согласно уравнениям (4), (7), (8), получим

$$A = \frac{a \cos P}{\alpha \cos Q \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}, \tag{9}$$

$$\alpha \sin Q = \sin P, \tag{10}$$

$$0 = 1 - \frac{\sin P \sin Q}{\alpha} - \frac{(1 - e^2 \sin^2 P) \cos^2 P}{\alpha^2 (1 - e^2)}$$

или, подставив в последнее уравнение вместо $\sin Q$ его значение из формулы (10), получим

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2}. \tag{11}$$

Поэтому уравнением (11) задано α, если для P выбрано некоторое определенное значение; тогда Q можно определить из уравнения (10) и A — из уравнения (9); наконец, k получается из подстановки $w = 90° - P$, $U = 90° - Q$ в общее уравнение (3), т. е.

$$k = \frac{\operatorname{tg}^{\alpha}(45° + \frac{1}{2}P)}{\operatorname{tg}(45° + \frac{1}{2}Q)} \cdot \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}. \tag{12}$$

4.

Так как постоянные величины A, α, k и нормальную широту на шаре Q следует рассматривать как основные величины с применением их в известной зоне, то вычисление их с помощью P и e желательно производить с особой тщательностью и точностью. Поэтому здесь могут применяться некоторые пригодные для этой цели преобразования; помимо того, преобразование *необходимо,* когда исходят от некоторой определенной широты не на эллипсоиде, а на шаре, т. е. исходят от заданного значения Q, и на основании его вычисляют остальные величины.

Введём три вспомогательных угла φ, ζ, η, так что

$$\sin \varphi = e, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg} \varphi \cos^2 P, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\eta = \sin \zeta \operatorname{tg} P, \tag{15}$$

тогда получим

$$\alpha = \frac{1}{\cos \zeta}, \tag{16}$$

$$\sin Q = \cos \zeta \sin P, \tag{17}$$

$$\cos \eta \cos Q = \cos P, \tag{18}$$

$$\sin \eta = \operatorname{tg} \zeta \operatorname{tg} Q, \tag{19}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(P-Q)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta, \tag{20}$$

$$\sin 2(\zeta-\varphi)=e\cos 2Q. \tag{21}$$

Формула (18) легко получается из формул (15) и (17); точно так же формула (19) — из комбинирования (15), (17), (18); затем формула (20) — из (17), (18), (19) и, наконец, формула (21) — из (14) и (17).

Наиболее точно можно произвести вычисления, если дано P; пользуясь (14), (15), (20), последовательно определяют ζ, η и Q; наоборот, если дано Q, с помощью формул (21), (19), (20) выводят значения ζ, η, P; для контроля можно пользоваться еще одной или несколькими из остальных формул. Если ввести еще четвертый вспомогательный угол Θ по формуле

$$\sin\Theta=e\sin P, \tag{22}$$

то получим

$$\cos\varphi=\cos\zeta\cos\eta\cos\Theta, \tag{23}$$

и формулы (9) и (12) примут вид

$$A=\frac{a\cos P}{\alpha\cos\Theta\cos Q}=\frac{a\cos\eta}{\alpha\cos\Theta}=\frac{a\cos\varphi}{\cos^2\Theta}=\frac{a\cos\varphi}{1-e^2\sin^2 P},$$

$$k=\frac{\operatorname{tg}^{\alpha}(45^\circ+\frac{1}{2}P)}{\operatorname{tg}\,(45^\circ+\frac{1}{2}Q)\ \operatorname{tg}^{\alpha e}(45^\circ+\frac{1}{2}\Theta)}.$$

5.

Я иллюстрирую все правила этой статьи очень точно вычисленным примером, который для лиц, желающих воспользоваться изложенным выше способом при обработке своих наблюдений, может или служить образцом для составления требуемых вспомогательных таблиц, или непосредственно быть вспомогательным средством при вычислениях на бóльшей части умеренного пояса. В большинстве случаев, впрочем, можно довольствоваться *значительно* меньшей точностью.

За нормальную широту я беру 52°40′, которая приблизительно соответствует средней параллели королевства Ганновер, но так как в некоторых отношениях выгоднее для нормальной широты на шаре и на эллипсоиде выбирать круглое число, то я принимаю

$$Q=52^\circ 40'00''.$$

Вычисление я веду на основании новейших размеров Земли, выведенных Бесселем из градусных измерений (см. журнал „Astronomische Nachrichten“ «Астрономические известия», т. 19, стр. 116), в которых за единицу длины принят туаз*,

$$\lg a=6.514\ 823\ 5337,$$

$$\lg\cos\varphi=9.998\ 545\ 8202.$$

* Туаз равен 1949,036 32 *мм* **(Прим. ред.).**

С помощью десятизначных логарифмов отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\varphi &= 4°41'9'',982\ 62\\
\lg e &= 8.912\ 205\ 2079\\
\zeta &= 1°43'\ 26'',804\ 02\\
\eta &= 2\ 15\ 42,340\ 83\\
P &= \ \ 52\ 422,532\ 51\\
\lg \alpha &= 0.000\ 196\ 6553\\
\Theta &= 3°43'34'',246\ 69\\
\lg \frac{1}{k} &= 0.001\ 670\ 8804\\
\lg A &= 6.515\ 207\ 4703
\end{aligned}$$

Если принять установленную законом французскую единицу длины — метр, то

$$\lg A = 6.805\ 027\ 4003.$$

Между тем как десятимиллионная часть четверти земного меридиана по размерам земного эллипсоида Бесселя дает

$$\lg A = 6.804\ 990\ 2365.$$

6.

Вычисление широты на шаре на основании широты на эллипсоиде удобно вести с помощью формулы (3), если речь идёт только о немногих случаях; наоборот, для более обширной работы выгодно пользоваться рядами, вывод которых я привожу ниже.

Я обозначаю неизвестную широту на эллипсоиде или неопределенное ее значение $90° - w$ через $P + p$ и соответствующую широту на шаре или ее значение $90° - U$ через $Q + q$. По теореме Тейлора будем иметь

$$q = \frac{dU}{dw}p - \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dw^2}p^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3U}{dw^3}p^3 - \frac{1}{24}\frac{d^4U}{dw^4}p^4 + \ldots,$$

где производные надо вычислять при $p = 0$, или $w = 90° - P$, $U = 90° - Q$. Последовательное вычисление производных в неопределенном виде дает:

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\alpha\ (1 - e^2)\ \sin\ U}{(1 - e^2\ \cos^2\ w)\ \sin w},$$

$$\frac{d^2U}{dw^2} = \frac{\alpha\ (1 - e^2)\ \sin\ U}{(1 - e^2\ \cos^2 w)^2\ \sin^2 w}\left\{\alpha(1-e^2)\cos U - \cos w + e^2(\cos^3 w - 2\cos w \sin^2 w)\right\},$$

$$\frac{d^3U}{dw^3} = \frac{\alpha\ (1 - e^2)\ \sin\ U}{(1 - e^2\ \cos^2\ w)^3\ \sin^3 w}\Big\{\alpha^2\ (1 - e^2)^2\ (\cos^2 U - \sin^2\ U) -$$

$$- 3\alpha\ (1 - e^2)\ \cos\ U\ [\cos\ w - e^2\ (\cos^3\ w - 2\ \cos\ w\ \sin^2\ w)] +$$

$$+ 2\cos^2\ w + \sin^2\ w - e^2\ (4\ \cos^4\ w - 2\ \sin^4\ w) + e^4\ (2\cos^6\ w -$$

$$- \cos^4\ w\ \sin^2\ w + 6\ \cos^2\ w\ \sin^4\ w)\Big\}.$$

Ради экономии места я не помещаю здесь два следующих производных в неопределенной форме, которые я также вычислил.

Если подставить вместо $\alpha \sin Q$ значение $\sin P$ [согласно формуле (10)] и вместо $\alpha \cos Q$ значение

$$\frac{\cos P}{\cos \zeta \cos \eta} = \frac{\cos \Theta \cos P}{\cos \varphi}$$

[согласно формулам (18), (16), (23)] и для сокращения принять $\cos P = c$, $\sin P = s$, то подстановка $w = 90° - P$, $U = 90° - Q$ даст:

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\cos \varphi}{\cos \Theta},$$

$$\frac{d^2U}{dw^2} = -\frac{3e^2 \cos \varphi}{\cos^3 \Theta} cs,$$

$$\frac{d^3U}{dw^3} = \frac{e^2 \cos \varphi}{\cos^5 \Theta} [3c^2 - 3s^2 + e^2 (12c^2 s^2 + 3s^4)],$$

$$\frac{d^4U}{dw^4} = \frac{e^2 \cos \varphi}{\cos^7 \Theta} cs [16 - e^2 (49c^2 - 13s^2) - e^4 (56c^2 s^2 + 29s^4)],$$

$$\frac{d^5U}{dw^5} = \frac{e^2 \cos \varphi}{\cos^9 \Theta} [-16c^2 + 12s^2 + e^2 (49c^4 - 378c^2 s^2 + 9s^4) + e^4 (628c^4 s^2 + 174c^2 s^4 - 54s^6) + e^6 (268c^4 s^4 + 220c^2 s^6 + 33s^8)].$$

При этом разложении q в ряд по степеням p предполагается, что эти величины выражены в частях дуги, равной радиусу; в противном случае, если нужно выразить q в секундах, а p — в градусах, то первый член ряда надо умножить на 3600, второй член — на $\frac{3600\ \pi}{180} = 20\ \pi$, третий — на $3600 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{1}{9}\pi^2$ и т. д. При таком предположении, применяя формулы к нашему примеру, получаем следующие числовые значения, которые я привожу в такой форме, чтобы в них избегать дробей с большим числом десятичных знаков:

$$q = 359\ 556'',694\ 47 \cdot \frac{p}{100} +$$

$$+ 3\ 041,\ 386\ 524 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 -$$

$$- \quad 946,\ 260\ 563 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^3 -$$

$$- 4\ 135,\ 396\ 057 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^4 +$$

$$+ \quad 227,\ 043\ \ 42 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^5$$

Так как на практике p должно заключать в себе только немногие единицы, то этот ряд очень быстро сходится. Чтобы получить подтверждение справедливости этих чисел, я произвел вычисления для $p = -6$ и для $p = +6$, т. е. для

$$P + p = 46°42'2'',\ 532\ 51 \text{ и для}$$

$$P + p = 58\ 42\ 2,\ 532\ 51,$$

как с помощью разложения в ряд, так и по окончательной формуле (3). Ряд дал:

$$Q + q = 46°40'37'',697\ 94,$$

формула (3) дала:

$$Q + q = 58\ 3944\ ,092\ 85;$$
$$Q + q = 46°40'37'',697\ 94,$$
$$Q + q = 58\ 39\ 44\ ,092\ 83;$$

таким образом, результаты сходятся настолько, как это только допускают десятизначные логарифмы.

7.

Таким же образом логарифм m может быть разложен в ряд, первые члены которого следующие:

$$\lg m = -\frac{\sin^2 2\varphi}{6\cos^4\Theta}\, csp^3 - \frac{\sin^2 2\varphi}{24\cos^6\Theta}\,(c^2 + 11e^2\, s^2)\, p^4 + \frac{\sin^2 2\varphi}{120\cos^8\Theta} \times$$

$$\times \frac{s}{c}[2c^2 - 3s^2 - e^2\,(40c^4 - 20c^2s^2 - 6s^4) - e^4s^2\,(104c^4 + 22c^2\, s^2 + 3s^4)]\, p^5.$$

Я вычислил также (другим путем) следующий за ними член, но только для главной составной части его коэффициента, который был порядка e^2, и нашел

$$+\frac{\sin^2 2\varphi}{720\cos^{10}\Theta}\cdot\frac{1}{c^2}\,(2c^4 - 18c^2\, s^2 - 15s^4)\, p^6.$$

Логарифм, выраженный таким рядом, — натуральный; как и выше принято, p выражено в частях радиуса; если требуются бригговы (десятичные) логарифмы, причём p должно быть дано в градусах, то нужно умножить на модуль логарифмов и вместо p написать $\frac{\pi p}{180}$. В таком виде для нашего примера будем иметь:

$$\lg m = -0{,}004\ 961\ 2433 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^3 -$$
$$-0{,}001\ 732\ 9876 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^4 -$$
$$-0{,}002\ 393\ 772 \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^5 -$$
$$-0{,}012\ 4746\ \ \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^6.$$

Применяя этот ряд к рассмотренным выше отдельным случаям, имеем:

для $p = -6$, $\lg m = +0.000\ 001\ 050\ 448$,
для $p = +6$, $\lg m = -0.000\ 001\ 096\ 531$.

Формула (4), которую можно написать также так:

$$m = \frac{\alpha A \cos(Q+q)\sqrt{1 - e^2\sin^2(P+p)}}{a\cos(P+p)} =$$
$$= \frac{\cos\eta\cos(Q+q)\sqrt{1 - e^2}\sqrt{\sin^2(P+p)}}{\cos\Theta\cos(P+p)},$$

вычисленная по десятизначным логарифмам, дает такие же значения с точностью до десятого знака.

Для обратной задачи, когда задано q и ищется p, решение путем разложения в ряд еще более целесообразно, так как конечная формула (3) в этом случае приводит к цели только косвенным путем. Теорема Тейлора дает

$$p = \frac{dw}{dU} q - \frac{d^2 w}{2 dU^2} q^2 + \frac{d^3 w}{6 dU^3} q^3 - \ldots,$$

где для вычисления производных надо взять такие определенные значения, которые получаются при $q = 0$ или $U = 90° - Q$, $w = 90° - P$. Для неопределенных значений первых трёх производных получаются следующие выражения:

$$\frac{dw}{dU} = \frac{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w}{\alpha (1 - e^2) \sin U},$$

$$\frac{d^2 w}{dU^2} = \frac{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w}{\alpha^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 U} [\alpha (1 - e^2) \cos U - \cos w + e^2 \cos w (\cos^2 w - 2 \sin^2 w)],$$

$$\frac{d^3 w}{dU^3} = \frac{(1 - e^2 \cos^2 w) \sin w}{\alpha^3 (1 - e^2)^3 \sin^3 U} \{\alpha^2 (1 - e^2)^2 (\cos^2 U + 2 \sin^2 U) -$$

$$- 3\alpha (1 - e^2) \cos U \cos w [1 - e^2 (\cos^2 w - 2 \sin^2 w)] +$$

$$+ \cos^2 w - \sin^2 w - e^2 (2 \cos^4 w - 12 \cos^2 w \sin^2 w + 2 \sin^4 w) +$$

$$+ e^4 (\cos^6 w - 11 \cos^4 w \sin^2 w + 6 \cos^2 w \sin^4 w)\}.$$

Равным образом я не помещаю здесь, ради сбережения места, полностью вычисленных мною двух других производных, так как они являются только второстепенными величинами при получении окончательных результатов. Эти результаты мы найдём, подставив $90° - P$, $90° - Q$ вместо w, U и произведя преобразования $\alpha \cos$ и $\alpha \sin U$, приведенные в § 6; причём для сокращения записано c, s вместо $\cos P$, $\sin P$; тогда мы имеем:

$$p = \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi} q - \frac{3e^2}{2 \cos^2 \varphi} csq^2 +$$

$$+ \frac{e^2}{2 \cos^3 \varphi \cos \Theta} \{-c^2 + s^2 + e^2 (5c^2 s^2 - s^4)\} q^3 +$$

$$+ \frac{e^2}{24 \cos^4 \varphi \cos^2 \Theta} cs \{16 + e^2 (41c^2 - 77s^2) - e^4 (101c^2 s^2 - 61s^4)\} q^4 +$$

$$+ \frac{e^2}{120 \cos^5 \varphi \cos^3 \Theta} \{16c^2 - 12s^2 + e^2 (41c^4 - 522c^2 s^2 + 81s^4) -$$

$$- e^4 (538c^4 s^2 - 1536c^2 s^4 + 126s^6) + e^6 (857c^4 s^4 - 1030c^2 s^6 + 57s^8)\} q^5 + \ldots$$

Вычисленное значение для нашего примера отсюда получится в таком же виде, как и выше, т. е. если p выражено в секундах, q — в градусах:

$$\begin{aligned} p = 360\ 443'',852\ 122 \left(\frac{q}{100}\right) - \\ - 3\ 052,\ 649\ 780 \left(\frac{q}{100}\right)^2 + \\ + 1\ 002,\ 642\ 506 \left(\frac{q}{100}\right)^3 + \\ + 4\ 119,\ 589\ 282 \left(\frac{q}{100}\right)^4 - \\ + \quad 431,\ 181\ 623 \left(\frac{q}{100}\right)^5 \ldots \end{aligned}$$

9.

Подобным же образом натуральный логарифм m может быть разложен в ряд по возрастающим степеням q, причем коэффициент при q^6 выведен несколько иным путем и только в своей главной части:

$$\lg m = -\frac{2e^2}{3\cos\varphi\cos\Theta} csq^3 -$$

$$-\frac{e^2}{6\cos^2\varphi\cos^2\Theta} c^2 (1 - 7e^2 s^2)\ q^4 +$$

$$+\frac{e^2}{30\cos^3\varphi\cos^3\Theta}\cdot\frac{s}{c}\{2c^2 - 3s^2 + e^2 (20c^4 - 10c^2 s^2 + 6s^4) -$$

$$- e^4 (59c^4 s^2 - 8c^2 s^4 + 3s^6)\}\ q^5 +$$

$$+\frac{e^2}{180\cos^4\varphi\cos^4\Theta}\cdot\frac{1}{c^2}(2c^4 - 18c^2 s^2 - 15s^4)\ q^6.$$

Числовое значение в нашем примере (выраженное в десятичных логарифмах и в градусах) следующее:

$$\begin{aligned} \lg m = -0.004\ 979\ 6163\ 94 \left(\frac{q}{100}\right)^3 - \\ - 0.001\ 615\ 0307\ \ 6 \left(\frac{q}{100}\right)^4 - \\ - 0.002\ 397\ 3954\ \ \ \left(\frac{q}{100}\right)^5 - \\ - 0.012\ 567\ 1\ \ \ \ \ \left(\frac{q}{100}\right)^6. \end{aligned}$$

10.

При обширных геодезических работах, когда производится перенесение очень многих пунктов со сфероида на шар или обратно, вместо того, чтобы всякий раз прибегать к формулам, было бы лучше вычислить для всех случаев подробные таблицы. Употреблять такие таблицы было бы удобнее, если бы в них принять за аргумент широту на шаре $(Q + q)$, чем если бы выбрать для этой цели широту на сфероиде, так как переход от первой ко второй требуется гораздо чаще, чем наоборот. Впрочем, излишне делать указание для каждого опытного вычислителя, что для построения такой таблицы непосредственно надо вычислить незначительное число членов, на основании которых остальные определяются методами интерполирования с такой же точностью и с очень

малым трудом. Следовательно, для этого придётся прибегнуть к рядам, приведенным в § 8 и 9; и как раз поэтому выгодно, чтобы круглым числом было Q, а не P.

Образец таблицы конформного изображения эллипсоида на шаре

$Q+q$	$P+p$	log m	k	$Q+q$	$P+p$	log m	k
		+					
46° 0′	46° 1′19″,1599	14.46	8″,79	49°30′	49°31′45″,38838	1.566	2 ,012
46 10	46 11 20 ,5834	13.40	8 ,37	49 40	49 41 46 ,44584	1.332	1 ,807
46 20	46 21 21 ,9894	12.40	7 ,95	49 50	49 51 47 ,48596	1.123	1 ,613
46 30	46 30 24 ,3779	11.46	7 ,54				
46 40	46 41 24 ,74900	10.559	7 ,141	50 0	50 1 48 ,50876	0.936	1 ,429
46 50	46 51 26 ,10262	9.709	6 ,754	50 10	50 11 49 ,51425	0,772	1 ,257
				50 20	50 21 50 ,50245	0.628	1 ,096
47 0	47 1 27 ,43878	8.904	6 ,378	50 30	50 31 51 ,47338	0.503	0 ,946
47 10	47 11 28 ,75778	8.146	6 ,012	50 40	50 41 52 ,42705	0.396	0 ,806
47 20	47 21 30 ,05872	7.431	5 ,657	50 50	50 51 53 ,36348	0.305	0 ,678
47 30	47 31 31 ,34250	6.759	5 ,313				
47 40	47 41 32 ,60883	6.129	4 ,979	51 0	51 1 54 ,28270	0.229	0 ,561
47 50	47 51 33 ,85772	5.539	4 ,655	51 10	51 11 55 ,18471	0.167	0 ,454
				51 20	51 21 56 ,06955	0.118	0 ,359
48 0	48 1 35 ,08916	4.988	4 ,343	51 30	51 31 56 ,93722	0.079	0 ,275
48 10	48 11 36 ,30316	4.475	4 ,041	51 40	51 41 57 ,78777	0.050	0 ,202
48 20	48 21 37 ,49973	3.998	3 ,749	51 50	51 51 58 ,62120	0.029	0 ,141
48 30	48 31 38 ,67888	3.556	3 ,469				
48 40	48 41 39 ,84061	3.148	3 ,199	52 0	52 1 59 ,43754	0.015	0 ,090
48 50	48 51 40 ,98494	2.772	2 ,940	52 10	52 12 0 ,23681	0.006	0 ,051
				52 20	52 22 1 ,01905	+0.002	0 ,023
49 0	49 1 42 ,11187	2.427	2 ,692	52 30	52 32 1 ,78428	0.000	0 ,006
49 10	49 11 43 ,22141	2.112	2 ,454	52 40	52 42 2 ,53251	0.000	0 ,000
49 20	49 21 44 ,31358	1.825	2 ,227	52 50	52 52 3 ,26379	0.000	0 ,006
				53 0	53 2 3 ,97814	−0.002	0 ,023

В конце этой статьи я прилагаю таблицы*, в основу которых положено нормальное значение широты $Q = 52°40'$ (как и в рассмотренном выше примере) и которые распространены на двенадцать градусов от 46°40′ до 58°40′ через одну минуту для всех значений аргумента $Q + q$. Они дают соответствующие значения $P + p$ с точностью до пяти десятичных знаков секунды; затем десятичные логарифмы масштаба m с десятью знаками, т. е. в единицах десятого десятичного знака; наконец, еще значения $-\frac{dm}{2m\,dq}$, выраженные в секундах; употребление этого последнего столбца будет объяснено ниже. Я дал таблицы с таким числом десятичных знаков, чтобы они также полностью были достаточны для самого точного вычисления тригонометрических работ, а именно, для вычисления с помощью десятизначных логарифмов. Всякий, кто пользуется этими таблицами для вычисления геодезических измерений внутри данной зоны, будет отбрасывать по желанию несколько последних десятичных знаков, если ему требуется невысокая точность (и этот случай обыкновенно чаще всего бывает). Впрочем, что касается формулы, в какой желательно представлять *результаты* даже одного измерения, то она должна всегда соответствующим образом давать такую точность, которая равна точности самих измерений, так чтобы на основании вычислений всегда можно было опять найти обратным путем наблюдавшиеся величины с такою же точностью, с какой они были измерены. Следовательно, если при этом речь идёт исключительно о поверке долгот и широт, то тригонометрические измерения должны быть невысокой точности и отнюдь не стремиться к истине, если желательно предста-

* Выше помещен образец этих таблиц, причем значение аргумента $Q+q$ взято через 10′. **(Прим. ред.).**

вить результаты только с такой точностью, с какой долготы и широты могут определяться астрономическим путем; в противном случае мы имели бы ложный масштаб (критерий) для суждения о доброкачественности работы и часто просто лишали бы себя наиболее надежных поверок её доброкачественности.

11.

Применение рассмотренного здесь конформного изображения поверхности эллипсоида на поверхности шара при геодезических работах может быть выполнено многими способами; в настоящей статье речь будет идти только о непосредственном способе; другие косвенные способы, которыми пользуются для этой цели, должны быть отнесены ко второй статье.

Непосредственный способ в основном уже вкратце указан в упомянутой выше статье. Система треугольников на поверхности эллипсоида, образованных кратчайшими или так называемыми геодезическими линиями, изображается на шаре системой треугольников, причем углы их точно равны соответствующим углам на сфероиде; стороны же, напротив, если они не являются дугами меридианов, не будут со всей строгостью дугами больших кругов, но отклоняются от них настолько мало, что во многих случаях можно рассматривать их, как совпадающие с ними; или, по крайней мере, когда требуется очень большая точность, можно легко вычислить со всей необходимой точностью их отклонения; причём всегда предполагается, что,

во-первых, треугольники не очень удалены от нормальной параллели;

во-вторых, они сравнительно малы, а именно, стороны треугольников малы по сравнению с длиной земных меридианов, что в действительности всегда бывает на практике.

Это точное совпадение с дугами больших кругов сторон треугольников, перенесенных на поверхность шара, происходит в рассмотренном в настоящей статье способе использования конформного изображения в гораздо большей степени, чем как это предполагалось в упомянутой выше статье. Когда это перенесение производится (согласно § 13) на расстоянии $2^1/_2$ градусов от нормальной параллели, то линии увеличиваются на 1/530 000 длины; предлагаемый здесь способ дает изменение, равное только 1/5 800 000. Затем, после того как сперва одна сторона треугольника перенесена соответственно на поверхность шара, можно вычислить с помощью углов всю систему совершенно так, как если бы она сама лежала на этой поверхности, но обязательно принимая во внимание указанные выше видоизменения; потом определяют значения широт и долгот для всех пунктов и от них переходят к широтам долготам на поверхности эллипсоида или с помощью приведенных выше формул, или для этого пользуются вспомогательными таблицами, приложенными к нашей статье.

12.

Остается еще следующее: определить отклонение перенесенной на поверхность шара геодезической линии от дуги большого круга, заключающейся между теми же конечными пунктами, причем одновременно в каждом отдельном случае нужно решить, следует ли принять во внимание такое отклонение. Эту задачу можно решать несколькими способами. Для настоящей цели, когда редукция представляет собой очень малую величину, наиболее приличным, по-видимому, будет следующий способ.

Пусть L — геодезическая линия на эллипсоиде, неопределенно продолженная; M — конформное изображение ее на поверхности шара; F и G — конечные пункты известного отрезка M; наконец, N — большой круг, проведенный через оба эти пункта. Каждая точка на N будет определена своим расстоянием x от некоторого, сперва произвольного начального пункта на N; каждая точка отрезка M определяется расстоянием по перпендикуляру y от N и до x, проходящим через основание этого перпендикуляра. Эти координаты выражаются в частях радиуса, и поэтому их нужно умножить еще на A, если требуется выразить их в линейной мере, или на 206 265″, если требуется выразить их в секундах дуги.

Элемент M будет выражен через

$$\sqrt{\cos^2 y\, dx^2 + dy^2}$$

или через $\frac{\cos y}{\cos \psi}\, dx$, если принять, что

$$\frac{dy}{\cos y\, dx} = \operatorname{tg}\psi,$$

где ψ — обозначает наклон элемента по отношению к параллельной к N. Чтобы не было неясности, будем считать, что x возрастает справа налево, а y — снизу вверх; таким образом, само собой определится знак синуса положительных ψ.

Обозначенная выше через m величина масштаба при переносе поверхности эллипсоида на поверхность шара может рассматриваться как функция x и y; величина элемента L, которому соответствует элемент M, равна

$$\frac{A \cos y}{m \cos \psi}\, dx,$$

и если для сокращения принять

$$\lg \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2} y) = u,$$

$$\frac{\cos y}{m} = n,$$

где n является функцией от x и y, или, что то же самое, от x и u, то будем иметь

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{du}{dx},$$

и элемент L равен

$$\frac{An}{\cos \psi}\, dx.$$

Следовательно, характер линии M будет определяться условием, что между какими-то определенными пределами интеграл $\int \frac{n}{\cos \psi}\, dx$ или

$$\int n \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}\, dx$$

должен превращаться в минимум; отсюда, на основании правил вариационного исчисления, получится уравнение

$$\frac{dn}{du}\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\,dx = d\,\frac{\frac{ndu}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}}$$

или

$$\frac{dn}{du}\cdot\frac{dx}{\cos\psi} = d\,(n\,\sin\psi).$$

Под выражением $\frac{dn}{du}$ понимается частная производная. Эта формула вполне строгая и имеет общее значение. Но для нашей цели, где рассматривается отрезок кривой M, лежащий только между точками F и G, в которых u и ψ могут иметь только очень малые значения, мы можем взять единицу вместо $\cos\psi$ и $\operatorname{tg}\psi$ вместо $\sin\psi$, тогда будем иметь

$$\frac{dn}{du}\,dx = d\,(n\,\operatorname{tg}\psi)$$

или

$$n\,\operatorname{tg}\psi = \int\frac{dn}{du}\,dx + \text{const},$$

но вместо значений, имеющих в этой формуле n и $\frac{dn}{du}$ на линии M, применим такие, которые получаются в соответствующих пунктах линии N (для $u=0$ или $y=0$), а следовательно, они равны значениям

$$\frac{1}{m}\text{ и }-\frac{dm}{m^2du} = -\frac{dm}{m^2dy}.$$

Для более удобного выполнения дальнейших вычислений следует отсчитывать абсциссы от пункта F или принять в этом пункте $x=0$ и в пункте G, напротив, $x=h$; затем, я полагаю $\frac{dm}{mdy}=l$, которое, вообще, является функцией от x и y, но в данном случае, для ее значения на линии N, т. е. когда $y=0$, можно рассматривать ее как функцию одного только x; наконец, пусть ψ^0, m^0, l^0 — определенные значения ψ, m, l, в пункте F и ψ', m', l' — в пункте G. Приведенная выше формула будет тогда

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m\,\operatorname{tg}\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}\,dx,$$

где интегрирование производится от $x=0$. Допустим, что l и m разложены в ряды по восходящим степеням x:

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' x^2 + \ldots,$$
$$m = m^0\,(1 + \mu x + \mu' x^2 + \ldots),$$

тогда вычисление дает

$$\operatorname{tg}\psi = (1 + \mu x + \mu' x^2 + \ldots)\,\operatorname{tg}\psi^0 -$$
$$-l^0 x - \frac{1}{2}\,(\lambda + l^0\mu)\,x^2 - \left(\frac{1}{3}\,\lambda' + \frac{1}{6}\,\lambda\mu - \frac{1}{6}\,l^0\,\mu^2 + \frac{2}{3}\,l^0\mu'\right)x^3 - \ldots$$

и отсюда, так как $u = \int \operatorname{tg}\psi\, dx$,

$$u = \left(x + \frac{1}{2}\,\mu x^2 + \frac{1}{3}\,\mu' x^3 + \ldots\right) \operatorname{tg}\,\psi^0 -$$

$$-\frac{1}{2}\,l^0 x^2 - \frac{1}{6}(\lambda + l^0\mu)x^3 - \left(\frac{1}{12}\lambda' + \frac{1}{24}\lambda\mu - \frac{1}{24}\,l^0\,\mu^2 + \frac{1}{6}\,l^0\mu'\right) x^4 - \ldots,$$

где нет надобности добавлять постоянных, потому что для $x=0$ также и $u=0$. Так как для $x = h$ также $u=0$, то из этого уравнения получается

$$\operatorname{tg}\,\psi^0 = \frac{1}{2}\,l^0 h + \left(\frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{12}\,l^0\mu\right) h^2 + \left(\frac{1}{12}\,\lambda' - \frac{1}{24}\lambda\mu\right) h^3 + \ldots$$

Если в уравнение для ψ вместо x подставить значение h и вместо $\operatorname{tg}\psi^0$ значение, найденное выше, то получим

$$\operatorname{tg}\psi' = -\frac{1}{2}\,l^0 h - \left(\frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{12}\,l^0\mu\right) h^2 - \left(\frac{1}{4}\,\lambda' + \frac{1}{24}\lambda\mu - \frac{1}{12}\,l^0\mu^2 + \frac{1}{6}\,l^0\mu'\right) h^3 \ldots$$

Так как

$$l' = l^0 + \lambda h + \lambda' h^2 + \ldots,$$
$$m^1 = m^0\,(1 + \mu h + \mu' h^2 + \ldots),$$

то

$$\left(\frac{1}{3}\,l^0 + \frac{1}{6}\,l'\right) h \sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}} = \frac{1}{2}\,l^0 h + \left(\frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{12}\,l^0\,\mu\right) h^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{6}\,\lambda' - \frac{1}{36}\lambda\mu + \frac{7}{144}\,l^0\mu^2 - \frac{1}{12}\,l^0\,\mu'\right) h^3 + \ldots,$$

$$-\left(\frac{1}{6}\,l^0 + \frac{1}{3}\,l'\right) h \sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}} = -\frac{1}{2}\,l^0\,h - \left(\frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{12}\,l^0\mu\right) h^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{3}\,\lambda' + \frac{1}{18}\lambda\mu - \frac{5}{144}\,l^0\mu^2 + \frac{1}{12}\,l^0\mu'\right) h^3 - \ldots,$$

таким образом, оба первых члена этих выражений или члены вплоть до порядка h^2 получились совершенно одинаковыми с приведенными выше значениями $\operatorname{tg}\,\psi^0$, $\operatorname{tg}\,\psi'$, поэтому такие удобные выражения могут быть приняты как достаточно точные значения соответствующих тангенсов, или умноженные на 206 265 как значения самих углов ψ^0 и ψ'.

Длина самой линии L между теми пунктами на эллипсоиде, которым на шаре соответствуют пункты F, G, равна интегралу

$$A\int \frac{\cos y}{m\,\cos\psi}\,dx,$$

взятому от $x = 0$ до $x = h$, но всегда можно принять $\cos\psi = 1$, как и $\cos y$, и для m взять только такое значение, которое действительно для линии M или для $y = 0$, тогда получится интеграл

$$A\int \frac{dx}{m^0\,(1 + \mu x + \mu' x^2 + \ldots)} =$$

$$= \frac{A}{m^0}\left[h - \frac{1}{2}\,\mu h^2 + \left(\frac{1}{3}\,\mu^2 - \frac{1}{3}\,\mu'\right) h^3 - \ldots\right].$$

Для нашей цели всегда достаточно принять

$$\frac{A\,h}{\sqrt{m^0\,m'}},$$

которое точно до малых величин порядка h^2.

13.

Величины l°, l' определяют следующим образом. Пусть χ — угол, взятый в любом месте дуги большого круга N, между нею, направленной в сторону возрастающих x, и меридианом, направленным с севера на юг; угол отсчитывается от меридиана в направлении слева направо; пусть затем S —широта в данном месте, T —долгота, отсчитанная от некоторого меридиана к востоку. Тогда получают:

$$dS = -\cos\chi\,dx + \sin\chi\,dy,$$

$$dT = -\frac{\sin\chi}{\cos S}dx - \frac{\cos\chi}{\cos S}dy$$

и, следовательно, частная производная

$$\frac{dm}{mdy} = \sin\chi\frac{dm}{mdS} - \frac{\cos\chi}{\cos S}\cdot\frac{dm}{mdT}.$$

Так как при нашем конформном изображении m не зависит от долготы, то $\frac{dm}{mdT} = 0$,

$$l = \sin\chi\frac{dm}{mdS}.$$

Обозначим значения χ в пунктах F и G через V^0 и $180^\circ + V'$ (так что, согласно обычной терминологии V^0 обозначает азимут дуги большого круга FG в F, а V' — азимут дуги большого круга GF в G), обозначим также значения (всегда отрицательные) $\frac{206\ 265''\,dm}{2\,mdS}$ в тех же пунктах через $-k^0$, $-k'$, тогда получим:

$$206\ 265''\ l^0 = -2\,k^0\sin V^0,$$

$$206\ 265''\ l^1 = +2\,k'\sin V'.$$

Приведенные в предыдущем параграфе формулы для ψ^0, ψ', выраженные в секундах, если отбросить незначительно отличающиеся в данном случае от единицы множители $\sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}}$, $\sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}}$, будут тогда равны:

$$\psi^0 = -\frac{1}{3}\,h\,(2k^0\sin V^0 - k'\sin V'),$$

$$\psi' = -\frac{1}{3}\,h\,(2\,k'\sin V' - k^0\sin V^0).$$

В приложенных к нашей статье таблицах, в столбце под заголовком k, даны значения k^0 и k', соответствующие значениям S, которые следует искать в первом столбце под заголовком $Q+q$; так как k всегда положительное, а $\sin V^0$ и $\sin V'$ всегда имеют противоположные знаки, то ψ^0 будет отрицательным, а ψ' — положительным, если G лежит к западу от F и наоборот; при вычислениях надо помнить, что в этих формулах h принято выраженным в частях радиуса, следовательно, расстояние между пунктами F, G, заданное в какой-либо мере длины, сперва должно разделить на A, выраженное в той же мере.

Так как в нашем конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара меридиан на первой изобразится меридианом на второй, то очевидно, что каждый элемент L (на эллипсоиде) образует такой же угол с меридианом, как соответственный элемент M (на шаре), и что, следовательно, азимуты геодезических линий в их обоих конечных пунктах соответственно равны $V^0 + \psi^0$ и $V' + \psi'$, но если, наоборот, заданы эти последние, то проекции их на поверхность шара получатся, если внести поправки $— \psi^0$, $— \psi'$; при вычислении этих почти всегда чрезвычайно малых поправок оказывается совершенно безразлично, если в приведенных выше формулах применять азимуты на эллипсоиде вместо V^0, V'.

14.

Чтобы иметь возможность вычислить, согласно приведенным правилам, редукции направлений для перенесения изображений с эллипсоида на шар или обратно, достаточно, правда, приближенно знать длины линий, величины ориентировочных азимутов и широт конечных пунктов, что можно получить только из предварительного вычисления треугольников. Это обстоятельство не существенно, так как предварительное вычисление, шаг за шагом сопровождающее измерения, рекомендуется, кроме того, для различных целей; оно даже необходимо как для центрирования углов, измеренных вне центра, так и для определения сферического и сфероидического избытков суммы углов каждого треугольника. Конечно, для первой цели, при малой величине редукций, всегда уже было бы достаточно совсем грубое приближение, но иногда при точном центрировании, при довольно значительном внецентренном положении места стояния инструмента, может потребоваться значительно большая степень приближения. Поэтому я дал такие правила, чтобы на основании их можно было бы найти все необходимое для самых точных вычислений, *когда* хотят произвести редукции второго рода, или, если *не* хотят делать таковых, то могут опустить все, чем следует пожертвовать. Во всей ганноверской системе треугольников повсеместно редукции настолько малы, что принимать их во внимание кажется совершенно бесцельным; и на всем протяжении зоны в двенадцать градусов по широте, на которой я пользовался вспомогательными таблицами, они оставались в пределах нескольких долей секунды дуги, которыми обыкновенно ограничиваются при вычислениях в большинстве случаев. Чтобы сделать это вполне ясным, я приведу здесь числовые вычисления для двух примеров.

В ганноверской сети треугольников наибольшие редукции встречаются в направлениях сторон треугольника Brocken—Hohehagen—Inselsberg; это был самый большой треугольник и дальше всего расположенный от нормальной параллели; для всех остальных сторон треугольников редукции нигде не превышали двух тысячных долей секунды, и большинство их не достигало значения 0,″001.

Для упомянутых пунктов мы имеем:

	Широта		k
	на эллипсоиде	на шаре	
Brocken	51°48′ 2″	51°46′ 3″	0″,164
Hohehagen	51 28 31	51 26 35	0 ,303
Inselsberg	50 51 9	50 49 16	0 ,687

Логарифмы сторон треугольника в туазах*:

Hohehagen — Inselsberg	4.639 3865
Inselsberg — Brocken	4.735 3929
Brocken — Hohehagen	4.550 2669

Азимуты были следующие:

Точка стояния Brocken	
Inselsberg	5°42′22″
Hohehagen	58 49 8
Точка стояния Hohehagen	
Brocken	238 9 2
Inselsberg	324 23 1
Точка стояния Inselsberg	
Hohehagen	144 55 51
Brocken	185 35 21

Здесь не следует принимать во внимание различие между значениями на сфероиде и на шаре, так как для логарифмов расстояний расхождения появились впервые в восьмом или десятом десятичном знаке; для азимутов — расхождения впервые появились в тысячных долях секунды, и для нашей цели логарифмы с четырьмя десятичными знаками, а азимуты в минутах уже были бы излишней точностью. Вычисление по приведенным выше формулам дает здесь следующие редукции, которые должны быть прибавлены со своими знаками к азимутам на сфероиде, чтобы получились азимуты на шаре.

Brocken—Inselsberg	+ 0″,000 55
Brocken—Hohehagen	+ 0 ,001 96
Hohehagen—Brocken	— 0 ,002 38
Hohehagen—Inselsberg	— 0 ,003 32
Inselsberg—Hohehagen	+ 0 ,004 28
Inselsberg—Brocken	— 0 ,000 83

Углы треугольника на сфероиде (между геодезическими линиями) получат, следовательно, для приведения их к углам сферического треугольника (между дугами больших кругов) следующие изменения:

Brocken	+ 0″,001 41
Hohehagen	— 0 ,000 94
Inselsberg	— 0 ,005 11

Второй пример я заимствую из геодезических работ в Швейцарии,** где самый большой основной треугольник между пунктами: Chasseral, Suchet, Berra — как раз находится на границе, до которой распространены наши вспомогательные таблицы. Для этих пунктов мы имеем:

	Широта		K
	на эллипсоиде	на шаре	
Chasserāl	47° 8′ 1″	47° 6′33″	6″,137
Suchet	46 46 23	46 44 57	6 ,948
Berra	46 40 36	46 39 11	7 ,173

* Переводный логарифм туаза в миллиметры: lg = 3.289 8199. **(Прим. ред.)**.

** I. Eschmann, Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz (И. Эшман. Результаты тригонометрических геодезических измерений в Швейцарии, Цюрих, 1840, стр. 79, 99, 189, 190, 196).

Логарифмы сторон треугольника в метрах:

Suchet—Berra	4.747 4503
Berra—Chasseral	4.713 3766
Chasseral—Suchet	4.780 8768

Азимуты:

Точка стояния	Chasseral	
	Suchet	48°36′41″
	Berra	349 21 54
Точка стояния	Suchet	
	Chasseral	228 10 40
	Berra	280 47 19
Точка стояния	Berra	
	Suchet	101 18 40
	Chasseral	169 27 22

Отсюда получаются редукции азимутов на сфероиде к азимутам на шаре:

Chasseral—Suchet	+ 0″,045 36
Chasseral—Berra	— 0 ,009 66
Suchet—Chasseral	+ 0 ,062 21
Suchet—Berra	+ 0 ,010 14
Berra—Suchet	— 0 ,047 17
Berra—Chasseral	— 0 ,060 39

следовательно, и здесь не обнаруживается влияния на точность вычислений, которая в нашей статье принимается равной десятой доле секунды.

15.

Хотя рассмотренная в § 12 и 13 задача может быть решена на практике с помощью приведенных выше правил с избыточной точностью, но все же стоит труда и даже необходимо ради однородности приводимого ниже исследования дать формулы для одного частного случая, по точности выше еще на один порядок; такой частный случай заключается в том, что линия N пересекает нормальную параллель в точке H, лежащей между F и G. В этом случае выгоднее принять начальной точкой для x не F, как это сделано выше, а H, вследствие чего получается, что при разложении l и m в ряды по возрастающим степеням x в первом случае пропадают первый и второй члены, во втором случае — второй и третий члены и разложения принимают следующую форму:

$$l = \lambda x^2 + \lambda' x^3 + \ldots,$$
$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \ldots.$$

Для нашей цели в этих рядах из коэффициентов требуется только один λ; для этого, на основании приведенной в § 9 формулы для $\lg m$ совместно с формулами § 13, легко вывести следующее выражение:

$$\lambda = -\frac{2e^2 \cos P \sin P \sin \chi \cos^2 \chi}{\cos \varphi \cos \Theta},$$

в котором e, P, φ, Θ имеют приведенное выше значение, а χ — азимут дуги N в точке H.

Если применить приведенные выше ряды к интегрированию уравнений:

$$d\frac{\operatorname{tg}\psi}{m} = -\frac{l\,dx}{m},$$

$$du = \operatorname{tg}\psi\, dx,$$

то получится:

$$\operatorname{tg}\psi = \mathfrak{A}\,(1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \ldots) - \frac{1}{3}\,\lambda x^3 - \frac{1}{4}\,\lambda' x^4 - \ldots,$$

$$u = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,(x + \frac{1}{4}\,\mu x^4 + \frac{1}{5}\,\mu' x^5 + \ldots) - \frac{1}{12}\,\lambda x^4 - \frac{1}{20}\,\lambda' x^5 - \ldots.$$

Введенные интегрированием постоянные $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ определяются при условии, что u должно равняться нулю для обоих значений x, соответствующих точкам F и G. Пусть эти значения равны $x = -\frac{1}{2}(h-\delta)$ и $x = (h+\delta)$, когда δ выражает значение $2x$ для пункта, лежащего посередине между F и G, и, вообще говоря, имеет величину того же порядка, как h, или высшего порядка, если H лежит очень близко от этой середины. Отсюда легко вывести выражение для $\mathfrak{A}$ с точностью до величин порядка h^3 (включительно)

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda\,[(h+\delta)^4 - (h-\delta)^4]}{192\,h} = \frac{1}{24}\,\lambda\delta\,(h^2 + \delta^2).$$

Подставив это значение в ряд для $\operatorname{tg}\psi$ и приняв при этом для переменной x определенные нами значения $-\frac{1}{2}(h-\delta) + \frac{1}{2}(h+\delta)$, получаем также с точностью до величин третьего порядка:

$$\operatorname{tg}\psi^0 = \frac{1}{24}\,\lambda h\,(h^2 - 2h\delta + 3\delta^2),$$

$$\operatorname{tg}\psi' = -\frac{1}{24}\,\lambda h\,(h^2 - 2h\delta + 3\delta^2).$$

В частном случае, являющемся, впрочем, следствием производимого нами исследования, когда к указанному выше условию добавляется еще то обстоятельство, что нормальная параллель лежит посредине между двумя параллелями, на которых находятся пункты F, G, то можно ограничиться следующими выражениями:

$$\operatorname{tg}\psi^0 = \frac{1}{24}\,\lambda h^3,$$

$$\operatorname{tg}\psi' = -\frac{1}{24}\,\lambda h^3,$$

которые точны до величин третьего порядка. Это легко доказать следующим образом. Обозначим широту F через $Q + q$, широту G через $Q - q$, в таком случае сферические треугольники F — H — полюс и G — H — полюс дают уравнения:

$$\sin\,(Q+q) = \sin\,Q\,\cos\,\frac{1}{2}\,(h-\delta) + \cos\,Q\,\sin\,\frac{1}{2}(h-\delta)\,\cos\,\chi,$$

$$\sin\,(Q-q) = \sin\,Q\,\cos\frac{1}{2}(h+\delta) - \cos\,Q\,\sin\,\frac{1}{2}(h+\delta)\,\cos\,\chi,$$

а их сумма, разделенная на $2\cos Q$, дает

$$\operatorname{tg} Q\cdot(\cos q - \cos\tfrac{1}{2}h\cos\tfrac{1}{2}\delta) = -\cos\tfrac{1}{2}h\,\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\chi.$$

Так как очевидно, что $\cos q - \cos\frac{1}{2}h\cos\frac{1}{2}\delta$ — величина второго порядка, то $\sin\frac{1}{2}\delta\cos\chi$ и $\delta\cos\chi$ будут того же порядка, причем, так как λ включает в себя множитель $\cos^2\chi$, то $\lambda h^2\delta$ — четвертого порядка и $\lambda h\delta^2$ — пятого; следовательно, на основании таких соображений отбрасывать эти члены вполне справедливо.

Поэтому окончательный результат нашего рассуждения, при данном предварительном предположении, выражается в следующих формулах, в которых тангенсы ψ^0, ψ' заменены их дугами:

$$\psi^0 = -\frac{e^2\cos P\sin P\sin\chi\cos^2\chi\cdot h^3}{12\cos\varphi\cos\Theta},$$

$$\psi' = +\frac{e^2\cos P\sin P\sin\chi\cos^2\chi\cdot h^3}{12\cos\varphi\cos\Theta}.$$

16.

Вычисление системы треугольников на шаре распадается на три главные части:

1) уравнивание углов на основании всех условных уравнений, какие могут возникнуть в системе треугольников;

2) вычисление сторон треугольников;

3) определение долгот и широт вершин треугольников совместно с ориентированием их сторон.

Преобразование долгот и широт на шаре в долготы и широты на сфероиде производится: для долгот—делением на постоянный делитель α, для широт — при помощи приложенных к статье вспомогательных таблиц или другого рода таблиц, специально составленных по этому образцу, если пришлось выбрать другую нормальную параллель.

Оставляя в стороне, по понятным причинам, два первых вопроса, я добавлю здесь кое-что по поводу третьего вопроса, а именно то, что относится к решению нашей задачи*. Из величины стороны треугольника r, выраженной в дуговой мере, ее азимута T в начальном пункте и широты начального пункта S выводят азимут стороны в другом конечном пункте $T' \pm 180°$, широту его S' и разность долгот обоих пунктов λ Так как это представляет собой не что иное, как решение сферического треугольника, то такая задача заслуживает некоторого внимания, потому что обыкновенно употребляемые формулы требуют здесь некоторого преобразования, если желательно, чтобы результаты (согласно замечанию в § 10) достигали той точности, с которой дано r, не прибегая к помощи многозначных логарифмов. Чтобы дать возможность делать выбор между различными способами решения при постоянном пользовании ими, я прежде всего приведу те формулы, которые основаны на известных элементарных формулах сферической тригонометрии.

* Так как эта задача рассматривается здесь как самостоятельная, то без вреда для дела мы можем дать некоторым буквам иное значение, чем употреблявшиеся выше.

Первый способ

$$\operatorname{tg} s = \cos T \operatorname{tg} r.$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg} T \sin s}{\cos (S - s)},$$

$$\operatorname{tg} S' = \cos \lambda \operatorname{tg} (S - s),$$

$$\sin T' = \frac{\sin T \cos S}{\cos S'}.$$

Второй способ

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} S}{\cos T},$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{\operatorname{tg} T \cos R}{\cos (R - r)},$$

$$\operatorname{tg} S' = \cos T' \operatorname{tg} (R - r),$$

$$\sin\lambda = \frac{\sin r \sin T}{\cos S'} = \frac{\sin r \sin T'}{\cos S}.$$

Третий способ

$$\sin (45° + \tfrac{1}{2} S') \sin \tfrac{1}{2} (T' + \lambda) = \sin \left[45° + \tfrac{1}{2}(S + r)\right] \sin \tfrac{1}{2} T,$$

$$\sin (45° + \tfrac{1}{2} S') \cos \tfrac{1}{2} (T' + \lambda) = \sin \left[45° + \tfrac{1}{2}(S - r)\right] \cos \tfrac{1}{2} T,$$

$$\cos (45° + \tfrac{1}{2} S') \sin \tfrac{1}{2} (T' - \lambda) = \cos \left[45° + \tfrac{1}{2} (S + r)\right] \sin \tfrac{1}{2} T,$$

$$\cos (45° + \tfrac{1}{2} S') \cos \tfrac{1}{2} (T' - \lambda) = \cos \left[45° + \tfrac{1}{2}(S - r)\right] \cos \tfrac{1}{2} T.$$

В отношении краткости вычислений третий способ имеет некоторое преимущество перед двумя другими, хотя они могут дать результаты более точные, т. е.: λ всегда получается с вполне достаточной точностью, но азимут T', если он близок к прямому углу, определяется по первому способу сравнительно с меньшей точностью. Если требуется, чтобы все три искомые величины определялись с одинаковой и, как это рассматривается в соответствии с § 10, с достаточной точностью, то для непосредственного строгого решения задачи наиболее выгодно следующее преобразование, при котором первые две формулы остаются такими же, как и в первом способе.

Четвертый способ:

$$\operatorname{tg} s = \cos T \operatorname{tg} r,$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} T \sin s}{\cos (S - s)},$$

$$\operatorname{tg} t = \sin T \sin r \operatorname{tg} (S - s),$$

$$\sin \tau = \sin T \operatorname{tg} \frac{1}{2} r \sin s,$$

$$\sin \sigma = \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda \cos (S - s),$$

$$S' = S - s - \sigma,$$

$$T' = T - t - \tau.$$

Этот четвертый способ не оставляет желать лучшего в смысле точности, но вычисление, производимое непосредственно в этой форме, требует несколько тягостного интерполирования при определении малых дуг с помощью логарифмов тангенсов и синусов. Однако мы все же можем легко избежать этого недостатка, если разложим тригонометрические функции в ряды; в таком случае мы будем в состоянии, без ущерба для точности, производить вычисления с помощью логарифмов чисел. Будет достаточно, если мы приведем здесь только основные моменты этого преобразования.

Пусть

$$r \cos T = s^0,$$
$$r \sin T = v.$$

Если для краткости обозначить величину дуги в одну секунду, выраженную в частях радиуса, или дробь $\frac{\pi}{648\,000}$ через ρ и рассматривать r, как величину первого порядка, тогда с точностью до величин пятого порядка (исключительно) получится

$$s = s^0(1 + \frac{1}{3}\rho^2 r^2 - \frac{1}{3}\rho^2 s^{0^2} = s^0 (1 + \frac{1}{3}\rho^2 v^2).$$

Положим далее

$$v \operatorname{tg} (S - s) = t^0,$$
$$\frac{v}{\cos (S - s)} = \lambda^0,$$

тогда получим

$$t = t^0 (1 - \frac{1}{6}\rho^2 r^2 - \frac{1}{3}\rho^2 t^{0^2}),$$

$$\lambda = \lambda^0 (1 - \frac{1}{6}\rho^2 s^{0^2} - \frac{1}{3}\rho^2 t^{0^2}),$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho v t^0 (1 - \frac{1}{12}\rho^2 r^2 - \frac{1}{4}\rho^2 s^{0^2} - \frac{1}{4}\rho^2 t^{0^2}),$$

$$\tau = \frac{1}{2}\rho v s^0 (1 + \frac{5}{12}\rho^2 r^2 - \frac{1}{2}\rho^2 s^{0^2})$$

с точностью для t и λ — пятого порядка; для σ и τ — шестого (исключительно). Еще удобнее и притом столь же точно, если при этом пользоваться также непосредственно логарифмами; обозначая для краткости через μ произведение величины 12 ρ^2 на модуль бригговых логарифмов, получаем тогда формулы следующего вида:

$$\lg s = \lg s^0 + 4\mu r^2 - 4\mu s^{0^2},$$
$$\lg t = \lg t^0 - 2\mu r^2 - 4\mu t^{0^2},$$
$$\lg \lambda = \lg \lambda^0 - 2\mu s^{0^2} - 4\mu t^{0^2},$$
$$\lg \sigma = \lg \frac{1}{2}\rho v t^0 - \mu r^2 - 3\mu s^{0^2} - 3\mu t^{0^2},$$
$$\lg \tau = \lg \frac{1}{2}\rho v s^0 + 5\mu r^2 - 6\mu s^{0^2}.$$

Эти пять формул в соединении с предыдущими для s^0, t^0, λ^0, дают пятый способ решения, особенности которого заключаются в том, что приближенные значения величин s, t, λ, σ, τ путем небольших поправок, очень легко вычисляемых при помощи логарифмов, превращаются в точные. Встречаются при этом следующие постоянные, логарифмы которых равны:

$$\lg \rho = 4.685\,574\,8668 \ (-10),$$

$$\lg \frac{1}{2}\rho = 4.384\,544\,8712 \ (-10),$$

$$\lg \mu = 7.929\,752\,7989 \ (-20),$$

или, если эти поправки должны даваться в единицах седьмого десятичного знака,

$$\lg \mu = 4.929\,752\,7989 \ (-10);$$

в этих логарифмах, впрочем, пользуются только первыми цифрами.

17.

Но гораздо проще выразить соотношения между величинами r, S, S', T, T', λ, если исходить из средней величины обеих широт и обоих азимутов. Если мы напишем

$$\frac{1}{2}(S+S') = B, \ \frac{1}{2}(T+T') = A, \ S'-S = b, \ T'-T = a,$$

то в первую очередь мы получаем формулы:

$$\sin\frac{1}{2}r \sin A = \sin\frac{1}{2}\lambda \cos B,$$

$$\sin\frac{1}{2}r \cos A = \cos\frac{1}{2}\lambda \sin\frac{1}{2}b,$$

$$\cos\frac{1}{2}r \sin\frac{1}{2}a = \sin\frac{1}{2}\lambda \sin B,$$

$$\cos\frac{1}{2}r \cos\frac{1}{2}a = \cos\frac{1}{2}\lambda \cos\frac{1}{2}b,$$

откуда, следовательно, по известным A, B, r определятся a и λ по формулам:

$$\sin A \operatorname{tg} B \operatorname{tg}\frac{1}{2}r = \sin\frac{1}{2}a,$$

$$\frac{\sin A \sin\frac{1}{2}r}{\cos B} = \sin\frac{1}{2}\lambda,$$

затем определится b из формулы:

$$\frac{\cos A \operatorname{tg}\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}a} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}b$$

или

$$\frac{\cos A \sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \sin\frac{1}{2}b.$$

Но вместо этих формул, вследствие малости r, a, λ, b, лучше применять следующие формулы, которые гораздо удобнее и точны до пятого порядка (исключительно):

$$a^0 = r \sin A \operatorname{tg} B,$$

$$\lambda^0 = \frac{r \sin A}{\cos B},$$

$$b^0 = r \cos A,$$

$$\lg a = \lg a^0 + \mu r^2 + \frac{1}{2}\mu a^{0^2},$$

$$\lg \lambda = \lg \lambda^0 - \frac{1}{2}\mu r^2 + \frac{1}{2}\mu \lambda^{0^2},$$

$$\lg b = \lg b^0 + \frac{1}{2}\mu a^{0^2} + \mu \lambda^{0^2},$$

где, как это видно, третья поправка равна сумме первой и удвоенной второй.

Правда, для нашей задачи эти формулы не дают непосредственного решения, но их можно применять для контроля или как сокращенное наглядное повторение содержания непосредственного решения. Но кто обладает некоторым навыком в числовых вычислениях, тот легко может воспользоваться ими для косвенного решения; и это решение, особенно когда для иных целей уже раньше получено грубо приближенное значение, имеет преимущество перед всеми другими вследствие своего удобства и точности.

Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodäesie

ZWEITE ABHANDLUNG

von

Carl Friedrich Gauss

Der königl. Societät übergeben MDCCCXLVI Sept. 1
Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Band III
Göttingen, 1847.

Исследования по высшей геодезии

ВТОРАЯ СТАТЬЯ

Карл Фридрих Гаусс

Передана королевскому обществу 1 сентября 1846 г.

Мемуары королевского научного общества в Гёттингене, том III
Гёттинген, 1847 г.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

К основным вопросам высшей геодезии принадлежит задача: на основании длины стороны треугольника на земной поверхности, азимута в ее конечном пункте и географической широты этого пункта вывести азимут на другом пункте, его широту и разность долгот обоих пунктов. Для поверхности шара связь между этими шестью величинами изложена в конце первой статьи в весьма простой форме, приспособленной к самым точным вычислениям; такая форма также легко может быть использована для решения поставленной задачи на сфероиде. Поэтому возникает желание иметь аналогичный метод решения, непосредственно пригодный для эллипсоидальной поверхности; цель настоящей статьи заключается в том, чтобы изложить такой метод. Прежде всего следует еще лучше осветить случай с поверхностью шара. Для более удобных ссылок я оставляю обозначения параграфов числами, идущими в последовательном порядке после первой статьи.

18.

Чтобы иметь возможность лучше судить о степени точности, которая достигается формулами § 17, следует еще вычислить члены последующих порядков; однако не лишнее привести способ, согласно которому такое вычисление может быть проведено сколь угодно далеко.

Я позволю себе сделать некоторые изменения в применявшихся там обозначениях: частично — для бо́льшего удобства при печатании, частично — для того, чтобы в отдельных частях этой статьи внести немного больше симметрии. Обозначим сперва здесь:

r — расстояние между двумя пунктами, если за единицу принять радиус шара;

$B+\frac{1}{2}b$ и $B-\frac{1}{2}b$ — широты первого и второго конечных пунктов r;

$T+\frac{1}{2}t$ и $T-\frac{1}{2}t\pm 180°$ — азимуты линии r в конечных пунктах;

l — разность долгот.

Принято, что азимут, отсчитываемый с юга на запад, и l рассматриваются как положительные, если второй пункт лежит западнее первого.

Тогда должно быть принято:

$$\beta = r\cos T,$$
$$\tau = r\sin T\operatorname{tg} B,$$
$$\lambda = \frac{r\sin T}{\cos B};$$

эти величины обозначают то же самое, что в § 17 обозначено через b^0, a^0, λ^0, а именно, значения b, t, l — с точностью третьего порядка (исключительно) и между ними существует соотношение

$$r^2+\tau^2=\beta^2+\lambda^2.$$

Порядок здесь всегда понимается так, что r считается величиной первого порядка.

Для сокращения напишем

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}r}{r}=m,$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}r}{r}=n.$$

Для намечаемого нами вычисления легче всего воспользоваться разложением в ряд формулы

$$x=\sin y,$$

преобразованной в ряд

$$\lg y=\lg x+\frac{1}{6}x^2+\frac{11}{180}x^4+\frac{191}{5\,670}x^6+\frac{2497}{113\,400}x^8+\ldots,$$

который легко выводится из известного ряда

$$y=x\left(1+\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+\frac{5}{112}x^6+\frac{35}{1152}x^8+\ldots.\right).$$

Применяя ее сперва к уравнению

$$\operatorname{tg} B\sin T\operatorname{tg}\frac{1}{2}r=\sin\frac{1}{2}t$$

или

$$\frac{1}{2}m\tau=\sin\frac{1}{2}t,$$

считая при этом $x = \frac{1}{2} m\tau$, $y = \frac{1}{2} t$, получаем

$$\mathrm{g}\, t = \lg \tau + \lg m + \frac{1}{24} m^2\tau^2 + \frac{11}{2880} m^4\tau^4 + \frac{191}{362\,880} m^6\tau^6 + \frac{2497}{29\,030\,400} m^8\tau^8 + \ldots \quad \text{(I)}$$

Точно так же, применяя тот же метод к уравнению

$$\frac{\sin\ T \sin \frac{1}{2} r}{\cos\ B} = \sin\ \frac{1}{2} l$$

или

$$\frac{1}{2}\, n\lambda = \sin\ \frac{1}{2} l,$$

получаем

$$\lg l = \lg \lambda + \lg n + \frac{1}{24} n^2\lambda^2 + \frac{11}{2880}\ n^4\lambda^4 + \frac{191}{362\,880} n^6\lambda^6 + \frac{2497}{29\,030\,400} n^8\lambda^8 + \ldots \quad \text{(II)}$$

В третьем случае применяем его к уравнению

$$\frac{\cos\ B\ \mathrm{tg} \frac{1}{2} l}{\mathrm{tg}\ T} = \sin\ \frac{1}{2}\, b,$$

которому после подстановок

$$\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\ l = \frac{n\lambda}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}\, n^2\lambda^2}},$$

$$\frac{\cos B}{\mathrm{tg}\ T} = \frac{\beta}{\lambda}$$

придаем следующий вид:

$$\frac{n\beta}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2\lambda^2}} = \sin \frac{1}{2}\, b.$$

Тогда получается:

$$\begin{aligned} \lg b = \lg\ \beta + \lg n + \frac{1}{8}\, n^2\lambda^2 + \frac{1}{64} n^4\lambda^4 + \frac{1}{384} n^6\lambda^6 + \frac{1}{2048} n^8\lambda^8 + \ldots + \\ + \frac{1}{24}\beta^2 (n^2 + \frac{1}{4}\ n^4\lambda^2 + \frac{1}{16} n^6\lambda^4 + \frac{1}{64} n^8\lambda^6 + \ldots) + \\ + \frac{11}{2880}\beta^4 (n^4 + \frac{1}{2}\, n^6\lambda^2 + \frac{3}{16}\, n^8\lambda^4 + \ldots) + \\ + \frac{191}{362\,880}\beta^6\ (n^6 + \frac{3}{4}\, n^8\lambda^2 + \ldots) + \\ + \frac{2497}{29\,030\,400}\beta^8\ (n^8 + \ldots) + \\ + \ldots. \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

или, если собрать вместе члены одного порядка:

$$\lg b = \lg \beta + \lg n +$$
$$+ \frac{1}{24} n^2 (\beta^2 + 3\lambda^2) +$$
$$+ \frac{1}{2880} n^4 (11\beta^4 + 30\beta^2\lambda^2 + 45\lambda^4) +$$
$$+ \frac{1}{362\,880} n^6 (191\beta^6 + 693\beta^4\lambda^2 + 945\beta^2\lambda^4 + 945\lambda^6) +$$
$$+ \frac{1}{29\,030\,400} n^8 (2\,497\ \beta^8 + 11\,460\beta^6\lambda^2 + 20\,790\beta^4\lambda^4 + 18\,900\beta^2\lambda^6 +$$
$$+ 14\ \ 175\lambda^8) + \ldots$$

Чтобы представить уравнения (I), (II), (III) в окончательном виде, в них надо еще подставить:

$$\lg m = \frac{1}{12} r^2 + \frac{7}{1440} r^4 + \frac{31}{90\ 720} r^6 + \frac{127}{4\,838\,400} r^8 + \ldots,$$
$$m^2 = 1 + \frac{1}{6} r^2 + \frac{17}{720} r^4 + \frac{31}{10\ 080} r^6 + \ldots,$$
$$m^4 = 1 + \frac{1}{3} r^2 + \frac{3}{40} r^4 + \ldots,$$
$$m^6 = 1 + \frac{1}{2} r^2 + \ldots,$$

и т. д.

$$\lg n = -\frac{1}{24} r^2 - \frac{1}{2\,880} r^4 - \frac{1}{181\,440} r^6 - \frac{1}{9\ 676\ 800} r^8 - \ldots,$$
$$n^2 = 1 - \frac{1}{12} r^2 + \frac{1}{360} r^4 - \frac{1}{20\ 160} r^6 + \ldots,$$
$$n^4 = 1 - \frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{80} r^4 - \ldots,$$
$$n^6 = 1 - \frac{1}{4} r^2 + \ldots,$$

и т. д.

Мы тогда получаем для логарифмов t, l, b, вернее, для разностей этих логарифмов, т. е. для приближенных значений $\lg \tau$, $\lg \lambda$, $\lg \beta$, сложные ряды:

для $\lg t$ — по четным степеням τ и r и их произведениям,
для $\lg l$ — то же самое, по λ и r,
для $\lg b$ — по β, λ и r,

причем взятые нами числа содержат разложения до величин восьмого порядка (включительно), поэтому t, l, b определяются до величин девятого порядка включительно или одиннадцатого порядка исключительно.

Разложение в ряд $\lg b$ можно произвести также другим способом, а именно, по степеням β, τ и r. Положим, что

$$z = \operatorname{tg} y;$$

в таком случае

$$y = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 - \ldots,$$

откуда

$$\lg y = \lg z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{13}{90} z^4 - \frac{251}{2835} z^6 + \frac{3551}{56\,700} z^8 - \ldots.$$

Применим этот ряд к уравнению

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} t}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} T},$$

после того как с помощью подстановок

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} T = \frac{\tau}{\beta},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} t = \frac{m\tau}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4} m^2 \tau^2}}$$

оно получило следующий вид:

$$\frac{\beta m}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4} m^2 \tau^2}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b;$$

в таком случае получается

$$\lg b = \lg \beta + \lg m + \frac{1}{8} m^2 \tau^2 + \frac{1}{64} m^4 \tau^4 + \frac{1}{384} m^6 \tau^6 + \frac{1}{2048} m^8 \tau^8 + \ldots -$$

$$- \frac{1}{12} \beta^2 (m^2 + \frac{1}{4} m^4 \tau^2 + \frac{1}{16} m^6 \tau^4 + \frac{1}{64} m^8 \tau^6 + \ldots) +$$

$$+ \frac{13}{1440} \beta^4 (m^4 + \frac{1}{2} m^6 \tau^2 + \frac{3}{16} m^8 \tau^4 + \ldots) -$$

$$- \frac{251}{181\,440} \beta^6 (m^6 + \frac{3}{4} m^8 \tau^2 + \ldots) +$$

$$+ \frac{3551}{14\,515\,200} \beta^8 (m^8 + \ldots) +$$

+ и т. д.

или, если собрать вместе члены одного порядка,

$$\lg b = \lg \beta + \lg m -$$
$$-\frac{1}{24} m^2 (2\beta^2 - 3\tau^2) +$$
$$+\frac{1}{2\,880} m^4 (26\beta^4 - 60\beta^2\tau^2 + 45\tau^4) -$$
$$-\frac{1}{362\,880} m^6 (502\beta^6 - 1638\beta^4\tau^2 + 1890\beta^2\tau^4 - 945\tau^6) +$$
$$+\frac{1}{29\,030\,400} m^8 (7\,102\beta^8 - 30\,120\beta^6\tau^2 + 49\,140\beta^4\tau^4 - 37\,800\beta^2\tau^6 + 14\,175\tau^8) -$$

— и т. д.

После подстановки приведенных выше значений для $\lg m$, m^2, m^4 и т. д. получается искомый ряд, который, впрочем, можно непосредственно вывести из первых рядов, расположенных по возрастающим степеням β, λ, r, если вместо λ^2 подставить $r^2 - \beta^2 - \tau^2$.

19.

Для нашей цели достаточно вывести формулы с точностью только до четвертого порядка (включительно), а именно:

$$\lg t = \lg \tau + \frac{1}{24}(2r^2 + \tau^2) + \frac{1}{2880}(14r^4 + 20r^2\tau^2 + 11\tau^4),$$

$$\lg l = \lg \lambda - \frac{1}{24}(r^2 - \lambda^2) - \frac{1}{2880}(r^4 + 10r^2\lambda^2 - 11\lambda^4),$$

$$\lg b = \lg \beta - \frac{1}{24}(r^2 - \beta^2 - 3\lambda^2) - \frac{1}{2880}(r^4 + 10r^2\beta^2 + 30r^2\lambda^2 - 11\beta^4 -$$
$$- 30\beta^2\lambda^2 - 45\lambda^4).$$

Вместо последней формулы можно также пользоваться одной из следующих:

$$\lg b = \lg \beta + \frac{1}{24}(2r^2 - 2\beta^2 + 3\tau^2) + \frac{1}{2880}(14r^4 - 40r^2\beta^2 + 60r^2\tau^2 + 26\beta^4 -$$
$$- 60\beta^2\tau^2 + 45\tau^4),$$

$$\lg b = \lg \beta + \frac{1}{24}(2\lambda^2 + \tau^2) - \frac{1}{2880}(12\beta^2\lambda^2 - 12\beta^2\tau^2 - 14\lambda^4 - 32\lambda^2\tau^2 + \tau^4),$$

$$\lg b = \lg \beta + \frac{1}{24}(2\lambda^2 + \tau^2) - \frac{1}{2880}(12r^2\lambda^2 - 12r^2\tau^2 - 26\lambda^4 - 8\lambda^2\tau^2 - 11\tau^4).$$

Во всех этих формулах r, β, λ, τ, b, l, t выражены в частях радиуса, а логарифмы взяты натуральные. Если, наоборот, все эти семь величин надо выразить в дуговых секундах, а логарифмы должны быть десятичные, то в формулах в дальнейшем получаются только такие изменения: численный коэффициент $\frac{1}{24}$, общий для всех членов второго порядка, должен быть преобразован в $\frac{1}{2}\mu$, а численный коэффициент

$\frac{1}{2880}$, общий для всех членов четвертого порядка, в ν, где μ и ν представляют собой произведения величин $\frac{1}{12}\rho^2$ и $\frac{1}{2880}\rho^4$ на модуль десятичных логарифмов, где ρ (равно как и μ) принято в том смысле, как сказано в § 16. Постоянные множители у них имеют вид:

$$\lg \mu = 7.929\ 752\ 7989\ (-20),$$
$$\lg \nu = 4.920\ 691\ 2908\ (-30).$$

Эти результаты с точностью до величин второго порядка совпадают с приведенными в § 17. Цель проведенного нами дальнейшего разложения в ряды заключалась только в том, чтобы можно было ясно видеть, что даже для самых точных вычислений вполне достаточно членов второго порядка; во всей ганноверской системе треугольников в действительности не было случая, когда бы члены четвертого порядка достигали двух единиц десятого десятичного знака, и только в двух случаях они превосходили *одну* единицу десятого десятичного знака.

20.

Если бы наши формулы, предназначенные для решения приведенной в начале этой статьи задачи, были выведены не на основании широты и азимута, определяемых в одном пункте, а на основании среднего значения этих величин, определяемых в двух пунктах, то решение должно получаться косвенным методом, или, вернее, с помощью постепенных приближений, проводимых сколь угодно далеко. Действие состоит тогда в том, что берут любое приближенное значение T (при отсутствии каких-либо приближенных данных можно взять сперва азимут в первой точке) и по нему вычисляют более точное значение азимута; с помощью этого последнего повторяют все вычисления и продолжают такие же операции дальше, пока не станут получаться не изменяющиеся уже больше результаты.

Следует заметить, что при первых приближениях пользуются только 4 или 5 знаками логарифмов и применяются β и τ вместо исправленных b и t. Кроме того, при вычислении первых приближений обыкновенно еще не заботятся об определении величин λ и l. Если для первого пункта обозначить широту через B^0, азимут через T^0, то формулы будут расположены в следующем порядке:

$$\beta = r \cos T,$$
$$B = B^0 - \frac{1}{2}\beta,$$
$$\tau = r \sin T \operatorname{tg} B,$$
$$T = T^0 - \frac{1}{2}\tau.$$

После того как оказалось, что при употреблении пятизначных логарифмов значение T больше не изменяется, вычисляют λ по формуле

$$\lambda = r \sin T \sec B,$$

и новое вычисление ведут затем семизначными логарифмами, причем логарифмические поправки получают по формулам:

$$\lg b = \lg \beta + \mu\lambda^2 + \frac{1}{2}\mu\tau^2,$$
$$\lg t = \lg \tau + \mu r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2$$

и полагают $B = B^0 - \frac{1}{2} b$, $T = T^0 - \frac{1}{2} t$. Повторение вычисления еще раз обыкновенно дает те же самые или едва заметные изменения результатов; тогда еще раз производят вычисление l по формуле

$$\lg l = \lg \lambda - \frac{1}{2} \mu r^2 + \frac{1}{2} \mu \lambda^2.$$

Чтобы показать на примере скорость, с которой сходятся приближения (она зависит главным образом от того, насколько мало r), я приведу здесь основные этапы вычислений при переходе от вершины треугольника Brocken к пункту Inselsberg. В этом случае мы имеем дело с самой большой стороной треугольника в ганноверской системе треугольников; она значительно длиннее, чем до сих пор встречались при тригонометрических работах.

При обработке конформного изображения на поверхности шара на основе первой статьи были приняты широта Brocken $B^0 = 51°46'3'',6345$, азимут стороны Brocken – Inselsberg $T^0 = 5°42'21'',7704$; логарифм этой стороны в туазах равен 4.735 3929 или в частях радиуса = 8.220 185 43, или в секундах дуги, как предположено в наших формулах, $\lg r = 3.534\,6106$. Предположим сперва, что $T = 5°42'$, тогда получим:

$$\begin{aligned} \beta &= 3\ 408'', \\ B &= 51°17'40'', \\ \tau &= 424'', \end{aligned}$$

а следовательно, приближенное значение

$$T = 5°38'50''.$$

Повторное вычисление тогда дает:

$$\begin{aligned} \beta &= 3\ 407'',9, \\ B &= 51°17'39'',7, \\ \tau &= 420'',55, \\ T &= 5°38'51'',5. \end{aligned}$$

С этим значением T предпринято теперь более точное вычисление, и вместе с тем вычислены логарифмические поправки. В единицах седьмого десятичного знака находим:

$$\begin{aligned} \mu r^2 &= 99{,}76, \\ \mu \lambda^2 &= 2{,}47, \\ \mu \tau^2 &= 1{,}50, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\mu \lambda^2 + \frac{1}{2} \mu \tau^2 = +3,$$

$$\mu r^2 + \frac{1}{2} \mu \tau^2 = +101,$$

$$-\frac{1}{2} \mu r^2 + \frac{1}{2} \mu \lambda^2 = -49$$

и

$$\lg \beta = 3.532\ 4974,$$
$$\lg b = 3.532\ 4977,$$
$$b = 3407'',\ 9852,$$
$$B = 51°17'39'',\ 6419,$$
$$\lg \tau = 2.623\ 8492,$$
$$\lg t = 2.623\ 8593,$$
$$t = 420'',\ 5904,$$
$$T = 5°38'51'',\ 4752.$$

Вновь проделанное повторение вычислений с этим значением T не дает никаких изменений b, а t изменится в 420″,5898. Отсюда получаем:

широта пункта Inselsberg

$$B^0 - \beta = 50°49'15'',6493;$$

азимут стороны треугольника Inselsberg — Brocken

$$T^0 - \tau + 180° = 185°35'21'',1806.$$

Наконец, находим:

$$\lg \lambda = 2.731\ 5487,$$
$$\lg l = 2.731\ 5438,$$
$$l = 538'',9442 = 0°8'58'',9442.$$

Удобство этого способа, без сомнения, ощутимо только тогда, когда пользуются при его применении небольшими механическими приспособлениями, но здесь не место давать указания, как употреблять их. Я ограничусь только замечанием, что, как видно из предыдущего примера четырёхкратного вычисления, его надо вести не в форме четырех отдельных вычислений, а как одно единственное вычисление, причем в каждом новом перевычислении следует добавить или исправить последние цифры. Во всяком случае всегда принято сохранять только последнее вычисление, и как раз в этом заключается большая выгода; особенно при геодезических работах на значительном пространстве, так как тогда всю главную часть вычислений по всем сторонам треугольников получают на возможно малом листе бумаги и в наиболее наглядной форме, пригодной для любой поверки правильности вычислений.

21.

Перехожу к основной задаче, которая требует для поверхности эллипсоида такого же метода, который был дан выше для поверхности шара. Решение этой задачи, на самом деле несколько запутанной, должно производиться двумя совершенно различными путями. Так как один вывод, с которого мы начнем, основан на том же конформном перенесении поверхности эллипсоида на поверхность шара, теорию которого мы развили в первой статье, то отыскание этого решения можно рассматривать как первое косвенное применение этой теории для высшей геодезии (см. § 11).

Поэтому широты двух пунктов на поверхности эллипсоида можно обозначить через $B + \frac{1}{2} b$ и $B - \frac{1}{2} b$; разность их долгот — через l; отрезок геодезической линии между ними (измеренный в любых единицах) — через r; азимуты этой линии в ее первом и втором конечных

пунктах — через $T+\frac{1}{2}t$ и $T-\frac{1}{2}t\pm 180°$. Следовательно, дело заключается в том, чтобы найти b, l и t на основании r, B и T с помощью формул, аналогичных выведенным нами для поверхности шара и совпадающих с ней, когда эксцентриситет равен нулю, или обе полуоси эллипсоида вращения равны между собой и равны единице.

Широту нормальной параллели, лежащей в основе конформного перенесения на поверхность шара, я обозначаю (как выше в § 3) через P — для поверхности эллипсоида и через Q — для поверхности шара; в то же время я принимаю, что эта нормальная параллель выбрана так, что Q равно среднему арифметическому широт обоих соответствующих пунктов на поверхности шара; пусть этими широтами будут $Q+\frac{1}{2}q$ и $Q-\frac{1}{2}q$. Затем a, A, α, e, φ, Θ имеют такие же значения, как в первой статье, в § 2, 3, 4 и следующих; они обозначают:

a — большую полуось эллипсоида или радиус экватора;

A — радиус шара;

1: α — постоянное отношение разности долгот на эллипсоиде к соответствующей разности долгот на шаре;

$e=\sin\varphi$ — эксцентриситет эллипсоида вращения;

$$\sin\Theta = e\sin P.$$

Дугу большого круга, заключающуюся между двумя пунктами на поверхности шара, я обозначаю через s; азимуты этой дуги в первом и втором ее конечных пунктах — через $U+\frac{1}{2}u$ и $U-\frac{1}{2}u\pm 180°$. Принимая еще во внимание, что разность долгот между обоими пунктами равна αl, находим сперва четыре строгие формулы:

$$\sin\tfrac{1}{2}s\cos U=\cos\tfrac{1}{2}\alpha l\sin\tfrac{1}{2}q,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}s\sin U=\sin\tfrac{1}{2}\alpha l\cos Q,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}u=\cos\tfrac{1}{2}\alpha l\cos\tfrac{1}{2}q,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}u=\sin\tfrac{1}{2}\alpha l\sin Q;$$

отсюда приближенно

$$q=s\cos U\cdot(1+\tfrac{1}{24}q^2-\tfrac{1}{24}s^2+\tfrac{1}{8}\alpha^2l^2), \tag{1}$$

$$\alpha l=s\frac{\sin U}{\cos Q}\cdot(1-\tfrac{1}{24}s^2+\tfrac{1}{24}\alpha^2l^2), \tag{2}$$

$$u=s\sin U\operatorname{tg}Q\cdot(1+\tfrac{1}{12}s^2+\tfrac{1}{24}u^2). \tag{3}$$

Нет необходимости напоминать, что в этих трех уравнениях l, q, s, u выражены в частях радиуса. Легко видеть, что они справедливы до пятого порядка (исключительно), в то время как s рассматривается как

величина первого порядка, и что, не понижая степени точности, можно также у заключенных в скобки членов правой части (уравнений) вместо q, αl и u подставить $s\cos U$, $s\frac{\sin U}{\cos Q}$, $s\sin U\operatorname{tg} Q$.

22.

В первую очередь нужно сравнить величины B, b, T, t, r, которые имеют определенное значение на поверхности эллипсоида, с их исправленными значениями на поверхности шара Q, q, U, u, As. Все уравнения, выведенные здесь для этой цели, будут точны по крайней мере вплоть до третьего порядка (включительно); что такое условие достаточно, легко понять из самого вывода.

Если применить к нашим двум пунктам ряды, приведенные в § 8, то величины, обозначенные там через p и q, выразятся, согласно новому обозначению:

для первого пункта — через $B+\frac{1}{2}b-P$ и $\frac{1}{2}q$,

для второго пункта — через $B-\frac{1}{2}b-P$ и $-\frac{1}{2}q$;

тогда получим два уравнения:

$$B+\frac{1}{2}b=P+\frac{\cos\Theta}{2\cos\varphi}q-\frac{3e^2}{8\cos^2\varphi}\cos P\sin P\cdot q^2+$$

$$+\frac{e^2}{16\cos^3\varphi\cos\Theta}[-\cos^2 P+\sin^2 P+e^2(5\cos^2 P\sin^2 P-\sin^4 P)]q^3$$

$$B-\frac{1}{2}b=P-\frac{\cos\Theta}{2\cos\varphi}q-\frac{3e^2}{8\cos^2\varphi}\cos P\sin P\cdot q^2-$$

$$-\frac{e^2}{16\cos^3\varphi\cos\Theta}[-\cos^2 P+\sin^2 P+e^2(5\cos^2 P\sin^2 P-\sin^4 P)]q^3.$$

Складывая и вычитая их, получаем

$$B=P-\frac{3e^2}{8\cos^2\varphi}\cos P\sin P\cdot q^2; \tag{4}$$

$$b=\frac{\cos\Theta}{\cos\varphi}q+\frac{e^2}{8\cos^3\varphi\cos\Theta}[-\cos^2 P+\sin^2 P+e^2(5\cos^2 P\sin^2 P-\sin^4 P)]q^3. \tag{5}$$

Легко, впрочем, видеть, что уравнение (4) точно до величин четвертого порядка, а уравнение (5), напротив, только до величин пятого порядка.

Чтобы сравнить T и t с U и u, нужно воспользоваться формулами, выведенными в конце § 15, основанными на предположении, которое доказано в настоящем исследовании. Следует только при этом иметь в виду, что приведенные там ψ^0 и ψ' не что иное, как здесь $T+\frac{1}{2}t-(U+\frac{1}{2}u)$ и $T-\frac{1}{2}t-(U-\frac{1}{2}u)$; затем помещенное там h — то же самое, как здесь s; наконец, приведенное там χ отличается от величины, обозначенной здесь через U, вообще только на величину второго порядка, но во всяком случае это различие по крайней мере первого порядка.

Таким образом, с точностью до третьего порядка (включительно) получается:

$$T+\frac{1}{2}t=U+\frac{1}{2}u-\frac{e^2\cos P\sin P\sin U\cos^2 U}{12\cos\varphi\cos\Theta}s^3,$$

$$T-\frac{1}{2}t=U-\frac{1}{2}u+\frac{e^2\cos P\sin P\sin U\cos^2 U}{12\cos\varphi\cos\Theta}s^3;$$

и, следовательно, с той же точностью:

$$T=U, \tag{6}$$

$$t=u-\frac{e^2\cos P\sin P\sin U\cos^2 U}{6\cos\varphi\cos\Theta}s^3. \tag{7}$$

Правда, в § 15 сравнение длины геодезической линии на эллипсоиде с дугой большого круга на шаре не развито отдельно для случая, о котором идет речь, но все же его очень легко дополнить. В принятых там обозначениях длина геодезической линии равна

$$A\int\frac{\cos y}{m\cos\psi}dx;$$

интегрирование этого выражения следует производить в пределах от $x=-\frac{1}{2}(h-\delta)$ до $x=+\frac{1}{2}(h+\delta)$. Так как y и ψ — величины третьего порядка, то легко видеть, что отбрасывание множителя $\frac{\cos y}{\cos\psi}$ под знаком интеграла может привести к ошибке седьмого порядка. Таким образом, эта длина с точностью до пятого порядка включительно равна

$$A\int\frac{dx}{m}=A\int dx\cdot(1-\mu x^3-\mu' x^4)=$$

$$=A(x-\frac{1}{4}\mu x^4-\frac{1}{5}\cdot\mu' x^5)+\text{const}=$$

$$=A\left\{h-\frac{1}{8}\left(h^3\delta+h\delta^3\right)\mu-\frac{1}{80}\left(h^5+10h^3\delta^2+5h\delta^4\right)\mu'\right\}.$$

Коэффициенты μ, μ' будут даны, если в ряде

$$m=1-\frac{2e^2\cos P\sin P}{3\cos\varphi\cos\Theta}q^3-\frac{e^2\cos^2 P}{6\cos^2\varphi\cos^2\Theta}(1-7e^2\sin^2 P)\,q^4$$

(который вытекает из § 9) вместо q подставить

$$q=-\cos\chi\cdot x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}Q\sin^2\chi\cdot x^2$$

(простой вывод которого здесь можно не помещать), и результат сличать с выражением для масштаба

$$m=1+\mu x^3+\mu' x^4+\ldots$$

Для нашей теперешней цели нужно доказать только, что искомая длина геодезической линии отличается от Ah не больше, чем на величину пятого порядка. Так как теперь очевидно, что такой величиной

будет $h^5 + 10h^3\delta^2 + 5h\delta^4$, то нет надобности помещать здесь вычисление значения для μ', но для μ берется значение

$$\mu = \frac{2e^2 \cos P \sin P}{3 \cos\varphi \cos\Theta} \cos^3\chi,$$

а так как $\delta \cos\chi$, согласно § 15, — величина второго порядка, то очевидно также, что $(h^3\delta + h\delta^3)\mu$ — величина пятого порядка.

Поэтому, так как h означает то же самое, что теперь обозначается через s, то с точностью до пятого порядка исключительно имеем

$$s = \frac{r}{A}. \tag{8}$$

Наконец, чтобы собрать здесь все, что требуется для дальнейших вычислений, я помещаю еще строгие формулы, применявшиеся уже в первой статье (§ 4, 6 и 3):

$$A = \frac{a \cos\varphi}{\cos^2\Theta}, \tag{9}$$

$$\cos Q = \frac{\cos\Theta \cos P}{\alpha \cos\varphi}, \tag{10}$$

$$\sin Q = \frac{\sin P}{\alpha}$$

и выведенную из двух последних формул

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\cos\varphi \operatorname{tg} P}{\cos\Theta}. \tag{11}$$

23.

Чтобы достигнуть нашей цели, нам нужно теперь просто соответственно скомбинировать эти уравнения.

Сперва из комбинирования уравнений (1), (2), (3) получается, что $q^2 + \alpha^2 l^2 - u^2 - s^2$ является величиной четвертого порядка, поэтому вместо уравнения (2) можно написать

$$l = \frac{s \sin U}{\alpha \cos Q}\left(1 - \frac{1}{24}q^2 + \frac{1}{24}u^2\right)$$

или, если согласно уравнениям (8), (9) и (10),

$$s = \frac{r \cos^2\Theta}{a \cos\varphi}, \quad \alpha \cos Q = \frac{\cos\Theta \cos P}{\cos\varphi},$$

то получим

$$l = \frac{r \cos\Theta \sin U}{a \cos P}\left(1 - \frac{1}{24}q^2 + \frac{1}{24}u^2\right).$$

Далее, $\frac{\cos\Theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}{\cos P}$ на основании уравнения (4); произведя с ним простые выкладки, получим

$$\frac{\cos\Theta}{\cos P} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}{\cos B}\left[1 + \frac{3e^2 \sin^2 P}{8(1 - e^2 \sin^2 P)}q^2\right],$$

которое точно до четвертого порядка; откуда, написав T вместо U, получаем, согласно формуле (6),

$$l=\frac{r\sqrt{1-e^2\sin^2 B}\sin T}{a\cos B}\left[1-\frac{1-10e^2\sin^2 P}{24(1-e^2\sin^2 P)}q^2+\frac{1}{24}u^2\right].$$

После того как в скобках будут подставлены: $\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 P}}b$ вместо q, а также t вместо u и, наконец, B вместо P, что, как легко видеть, можно сделать согласно уравнениям (5), (7), (4), то, не понижая степени точности, получаем

$$l=\frac{k r\sin T}{a\cos B}\left[1-\frac{(1-10e^2\sin^2 B)\cos^2\varphi}{24k^4}b^2+\frac{1}{24}t^2\right], \qquad (I)$$

если, кроме того, для краткости напишем

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 B}=k.$$

24.

Подобным же образом уравнение (1) преобразуется в

$$q=s\cos U\cdot\left(1-\frac{1}{12}q^2+\frac{1}{12}s^2+\frac{1}{8}u^2\right),$$

а также уравнение (5) в

$$b=\frac{r\cos^3\Theta\cos U}{a\cos^2\varphi}\left\{1-\left[\frac{1}{12}+\frac{e^2}{8\cos^2\varphi\cos^2\Theta}\left(\cos^2 P-\sin^2 P-e^2(5\cos^2 P\sin^2 P-\sin^4 P)\right)\right]q^2+\frac{1}{12}s^2+\frac{1}{8}u^2\right\}.$$

С помощью уравнения (4) легко найти для выражения $\cos^3\Theta=(1-e^2\sin^2 P)^{\frac{3}{2}}$ продолженное, насколько это необходимо, разложение в ряд

$$\cos^3\Theta=(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}\left[1-\frac{9e^4\cos^2 P\sin^2 P}{8\cos^2\varphi\cdot(1-e^2\sin^2 P)}q^2\right];$$

вследствие чего приведенное выше уравнение превратится в

$$b=\frac{r(1-e^2\sin^2 B)^{\frac{3}{2}}\cos U}{a\cos^2\varphi}\left\{1-\left[\frac{1}{12}+\frac{e^2}{8\cos^2\varphi\cdot(1-e^2\sin^2 P)}\left(\cos^2 P-\sin^2 P+e^2(4\cos^2 P\sin^2 P+\sin^4 P)\right)\right]q^2+\frac{1}{12}s^2+\frac{1}{8}u^2\right\}$$

или в несколько измененном виде

$$b=\frac{r k^3\cos U}{a\cos^2\varphi}\left\{1-\frac{1}{24\cos^2\varphi\cdot(1-e^2\sin^2 P)}\left[2+e^2-(8e^2-14e^4)\sin^2 P-9e^4\sin^4 P\right]q^2+\frac{1}{12}s^2+\frac{1}{8}u^2\right\}.$$

Если написать еще $\frac{\cos\varphi \cdot b}{\sqrt{1-e^2\sin^2 P}}$ вместо q на основании уравнения (5), $\frac{r^2\,(1-e^2\,\sin^2 P)^2}{a^2\,\cos^2\varphi}$ вместо s^2 на основании (8) и (9) и T и t вместо U и u на основании (6) и (7) и, наконец, B вместо P на основании (4), причем все эти преобразования производятся без ущерба для точности, получим:

$$b=\frac{rk^3}{a\,\cos^2\varphi}\cos T\left\{1-\frac{1}{24k^4}\left[2+e^2-(8e^2-14e^4)\,\sin^2 B-9e^4\,\sin^4 B\right]b^2+\right.$$
$$\left.+\frac{k^4}{12a^2\,\cos^2\varphi}r^2+\frac{1}{8}t^2\right\}. \qquad \text{(II)}$$

25.

Из уравнений (1) и (3) становится ясным, что $q^2\,u$ отличается от $s^3\,\cos^2 U\,\sin U\,\operatorname{tg} Q$ или, согласно (11), от $\frac{s^3\cos\varphi\cos^2 U\sin U\operatorname{tg} P}{\cos\Theta}$ только на величину пятого порядка, поэтому можно написать уравнение (7) также в виде:

$$t=u\left(1-\frac{e^2\,\cos^2 P}{6\,\cos^2\varphi}\,q^2\right)$$

или, если вместо u подставить значение из уравнения (3), а также согласно (8), (9), (11) принять

$$s=\frac{r\,\cos^2\Theta}{a\,\cos\varphi}=\frac{r\,\cos\Theta\,\operatorname{tg}\,P}{a\,\operatorname{tg}\,Q},$$

то мы получим

$$t=\frac{r\cos\Theta\operatorname{tg}\,P\sin U}{a}\left(1+\frac{1}{24}u^2+\frac{1}{12}s^2-\frac{e^2\,\cos^2 P}{6\,\cos^2\varphi}q^2\right).$$

Для $\cos\Theta\,\operatorname{tg}\,P=\sqrt{1-e^2\,\sin^2 P}\,\operatorname{tg}\,P$ находят на основании (4) значение

$$\sqrt{1-e^2\,\sin^2 B}\,\operatorname{tg} B\cdot\left(1+\frac{3e^2-6e^4\,\sin^2 P+3e^4\,\sin^4 P}{8\,\cos^2\varphi\cdot(1-e^2\,\sin^2 P)}\,q^2\right)$$

с такой точностью, как это здесь необходимо, а следовательно,

$$t=\frac{rk\,\operatorname{tg} B\,\sin U}{a}\left[1+\frac{5e^2+(4e^2-14e^4)\sin^2 P+5e^4\sin^4 P}{24\,\cos^2\varphi\cdot(1-e^2\,\sin^2 P)}\,q^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}s^2+\frac{1}{24}u^2\right].$$

Если сделать еще такие же подстановки, как в предыдущем параграфе, то получим следующий окончательный результат:

$$t=\frac{rk\,\operatorname{tg} B\,\sin T}{a}\left[1+\frac{5e^2+(4e^2-14e^4)\,\sin^2 B+5e^4\,\sin^4 B}{24k^4}\,b^2+\right.$$
$$\left.+\frac{k^4}{12a^2\,\cos^2\varphi}r^2+\frac{1}{24}t^2\right]. \qquad \text{(III)}$$

Три формулы (I), (II), (III) заключают в себе собственно решение нашей задачи. Из их вывода можно непосредственно твердо установить, что они точны до третьего порядка включительно. Но в действительности точность их выше еще на один порядок, т. е. ошибка каждой формулы будет пятого порядка; легко можно найти с помощью некоторых промежуточных выводов или доказать также то, что в выражениях подобного им рода не может быть ни одной величины четного порядка; я не останавливаюсь, впрочем, на этом вопросе, так как *второе* положение само собой заключается как результат, получающийся из формул, выведенных в последующих параграфах (§ 26—32).

26.

Излагаемое ниже исследование нужно рассматривать как самостоятельное, независимое от всех предыдущих, поэтому для удобства и чтобы избежать недоразумений следует объяснить все употребляемые в нем обозначения, поскольку они встречаются в первый раз. В большинстве случаев встречаемые нами буквы имеют такие же значения, как в первой статье; но две из них (u и s) представляли там чисто вспомогательные величины, которые больше уже не появлялись в окончательных результатах, а потому здесь могут быть использованы для других целей.

Через две точки поверхности эллипсоида, к которой относится наша задача, проведена геодезическая линия, сперва неопределенной длины, и на ней выбран некоторый произвольный начальный пункт. Отрезок этой линии от начального до неизвестного пункта обозначим через u; угол, который в этом последнем пункте геодезическая линия образует с направлением меридиана в сторону возрастающих u, т. е. с севера на юг, обозначим через X; широту и долготу неизвестного пункта — через Y и Z. Я принимаю, что долготы возрастают с запада на восток, а азимуты X в направлении с юга на запад. Пусть еще, как и всегда до сих пор, большая полуось и эксцентриситет эллипсоида обозначены через a и e, тогда, на основании известных теорем, получим

$$\frac{dY}{du} = -\frac{\cos X \cdot (1 - e^2 \sin^2 Y)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2)\, a}, \tag{1}$$

$$\frac{dZ}{du} = -\frac{\sin X \cdot (1 - e^2 \sin^2 Y)^{\frac{1}{2}}}{a \cos Y}. \tag{2}$$

Далее, на основании известной теоремы, величина

$$\frac{\sin X \cos Y}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 Y}}$$

для всех точек одной и той же геодезической линии остается постоянной; отсюда, дифференцируя логарифм этого выражения, находим

$$\operatorname{ctg} X dX = (\operatorname{tg} Y - \frac{e^2 \cos Y \sin Y}{1 - e^2 \sin^2 Y}) dY = \frac{(1 - e^2) \operatorname{tg} Y}{1 - e^2 \sin^2 Y}\, dY,$$

и, комбинируя это выражение с формулой (1), получаем

$$\frac{dX}{du} = -\frac{\sin X \operatorname{tg} Y \cdot (1 - e^2 \sin^2 Y)^{\frac{1}{2}}}{a}. \tag{3}$$

Обобщим теперь нашу задачу и примем

$$\frac{dX}{du}=x,\quad \frac{dY}{du}=y,\quad \frac{dZ}{du}=z,$$

причем сперва предположим только, что x, y, z — какие-то заданные функции от двух переменных X и Y. Далее, при новом дифференцировании, получается:

$$dx=x^{\mathrm{I}}dX+x^{\mathrm{II}}dY,$$
$$dy=y^{\mathrm{I}}dX+y^{\mathrm{II}}dY,$$
$$dz=z^{\mathrm{I}}dX+z^{\mathrm{II}}dY;$$

затем с помощью еще нового дифференцирования:

$$dx^{\mathrm{I}}=x^{\mathrm{III}}dX+x^{\mathrm{IIII}}dY,\qquad dx^{\mathrm{II}}=x^{\mathrm{IIII}}dX+x^{\mathrm{V}}dY,$$
$$dy^{\mathrm{I}}=y^{\mathrm{III}}dX+y^{\mathrm{IIII}}dY,\qquad dy^{\mathrm{II}}=y^{\mathrm{IIII}}dX+y^{\mathrm{V}}dY,$$
$$dz^{\mathrm{I}}=z^{\mathrm{III}}dX+z^{\mathrm{IIII}}dY,\qquad dz^{\mathrm{II}}=z^{\mathrm{IIII}}dX+z^{\mathrm{V}}dY.$$

Поэтому, поскольку подразумевается, что Z является функцией только от u, то

$$\frac{dZ}{du}=z,$$

$$\frac{d^2Z}{du^2}=xz^{\mathrm{I}}+yz^{\mathrm{II}},$$

$$\frac{d^3Z}{du^3}=xx^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}}+xy^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{II}}+x^{\mathrm{II}}yz^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}}+x^2z^{\mathrm{III}}+2xyz^{\mathrm{IIII}}+y^2z^{\mathrm{V}}.$$

Последовательные производные от X и Y вычисляют подобным же образом или непосредственно выводят из производных от Z, если только в них вместо z без соответственных значков или со значками подставим x и y, взятые тоже с соответствующими значками.

27.

Пусть теперь *определенные* значения, принимаемые четырьмя величинами u, X, Y, Z в двух пунктах, к которым относится наша задача, последовательно равны

для первого пункта $R-\frac{1}{2}r,\ T+\frac{1}{2}t,\ B+\frac{1}{2}b,\ L+\frac{1}{2}l;$

для второго пункта $R+\frac{1}{2}r,\ T-\frac{1}{2}t,\ B-\frac{1}{2}b,\ L-\frac{1}{2}l;$

точно так же для точки на геодезической линии, лежащей посредине между упомянутыми выше пунктами, эти значения соответственно равны R, T, B, L, причем курсивные буквы T, B, L следует хорошо отличать от тех же букв, напечатанных прямым шрифтом (Antiqua).

Пусть восемнадцать неопределенных величин, которые представляются в виде функций от X и Y

$$x,\ x^{\mathrm{I}},\ x^{\mathrm{II}},\ x^{\mathrm{III}},\ x^{\mathrm{IIII}},\ x^{\mathrm{V}},$$

$$y,\ y^{\mathrm{I}},\ y^{\mathrm{II}},\ y^{\mathrm{III}},\ x^{\mathrm{IIII}},\ y^{\mathrm{V}},$$

$$z,\ z^{\mathrm{I}},\ z^{\mathrm{II}},\ z^{\mathrm{III}},\ z^{\mathrm{IIII}},\ z^{\mathrm{V}},$$

а с помощью подстановок $X=\mathrm{T}$, $Y=\mathrm{B}$ принимают следующие значения:

$$\mathrm{f},\ \mathrm{f}^{\mathrm{I}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{II}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{III}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{IIII}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{V}},$$
$$\mathrm{g},\ \mathrm{g}^{\mathrm{I}},\ \mathrm{g}^{\mathrm{II}},\ \mathrm{g}^{\mathrm{III}},\ \mathrm{g}^{\mathrm{IIII}},\ \mathrm{g}^{\mathrm{V}},$$
$$\mathrm{h},\ \mathrm{h}^{\mathrm{I}},\ \mathrm{h}^{\mathrm{II}},\ \mathrm{h}^{\mathrm{III}},\ \mathrm{h}^{\mathrm{IIII}},\ \mathrm{h}^{\mathrm{V}}.$$

С помощью теоремы Тейлора значение Z для $u=R-\frac{1}{2}r$ развернется в ряд

$$\mathrm{L}-\frac{1}{2}r\frac{dZ}{du}+\frac{1}{8}r^2\frac{d^2Z}{du^2}-\frac{1}{48}r^3\frac{d^3Z}{du^3}+\ldots$$

и для $u=R+\frac{1}{2}r$ в

$$\mathrm{L}+\frac{1}{2}r\frac{dZ}{du}+\frac{1}{8}r^2\frac{d^2Z}{du^2}+\frac{1}{48}r^3\frac{d^3Z}{du^3}+\ldots,$$

где производные должны иметь такие определенные значения, которые соответствуют значению $u=R$, т. е.

$$\frac{dZ}{du}=\mathrm{h},$$

$$\frac{d^2Z}{du^2}=\mathrm{fh}^{\mathrm{I}}+\mathrm{\breve{g}h}^{\mathrm{II}},$$

$$\frac{d^3Z}{du^3}=\mathrm{ff}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{I}}+\mathrm{fg}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}}+\mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathrm{gh}^{\mathrm{I}}+\mathrm{gg}^{\mathrm{II}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}}+\mathrm{f}^2\mathrm{h}^{\mathrm{III}}+2\mathrm{fgh}^{\mathrm{IIII}}+\mathrm{\breve{g}}^2\mathrm{h}^{\mathrm{V}}.$$

Так как здесь каждое из двух значений Z соответственно равны $L+\frac{1}{2}l$ и $L-\frac{1}{2}l$, то получаем:

$$L=\mathrm{L}+\frac{1}{8}\left(\mathrm{fh}^{\mathrm{I}}+\mathrm{\breve{g}h}^{\mathrm{II}}\right)r^2, \tag{4}$$

$$l=-\mathrm{h}r-\frac{1}{24}\left(\mathrm{ff}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{I}}+\mathrm{f\breve{g}}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}}+\mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathrm{\breve{g}h}^{\mathrm{I}}+\mathrm{\breve{g}\breve{g}}^{\mathrm{II}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}}+\mathrm{f}^2\mathrm{h}^{\mathrm{III}}+2\mathrm{fgh}^{\mathrm{IIII}}+\mathrm{\breve{g}}^2\mathrm{h}^{\mathrm{V}}\right)r^3, \tag{5}$$

где первое уравнение точно до величины четвертого порядка, а второе — до величин пятого порядка.*

Если принять во внимание, что в приведенном выше разложении Z было заранее предположено, что Z — величина переменная, зависящая от u, производная которой $\frac{dZ}{du}=z$ выражается некоторой функцией от X и Y, то в таком случае найденные результаты можно отнести также непосредственно к любой другой переменной величине, находящейся в таких же условиях, а именно, к X или Y, если только вместо L, L, l и различных h со значками подставить соответственно T, T, t и различные f или B, B, b и различные g. Поэтому уравнение (4), которым мы здесь прежде непосредственно совсем не пользовались, дает нам в первую очередь следующие два уравнения, также точные до величин четвертого порядка

---

* Подсчет порядка точности производится таким образом, чтобы $\frac{r}{a}$ рассматривалась как величина первого разряда. Легко убедиться, что r, r^2, r^3 и т. д. заключают в себе делителей a, a^2 a^3 и т. д.

$$T = \mathrm{T} + \frac{1}{8}(\mathrm{ff}^{\mathrm{I}} + \mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathfrak{g})\, r^2,$$

$$B = \mathrm{B} + \frac{1}{8}(\mathrm{f}\mathfrak{g}^{\mathrm{I}} + \mathfrak{g}\mathfrak{g}^{\mathrm{II}})\, r^2.$$

Отсюда прежде всего следует, что h и h, взятые как значения z, после подстановки T и B или T и B вместо X и Y отличаются одно от другого на величину второго порядка; и хотя это расхождение точно до величин четвертого порядка, оно определяется формулой

$$h = \mathrm{h} + \frac{1}{8}(\mathrm{ff}^{\mathrm{I}} + \mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathfrak{g})\, r^2 \left(\frac{dz}{dX}\right) + \frac{1}{8}(\mathrm{f}\mathfrak{g}^{\mathrm{I}} + \mathfrak{g}\mathfrak{g}^{\mathrm{II}})\, r^2 \left(\frac{dz}{dY}\right),$$

где для частных производных $\left(\frac{dz}{dX}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dY}\right)$ или z^{I}, z^{II} приняты их определенные значения при $X=\mathrm{T}$, $Y=\mathrm{B}$, а именно, h^{I} и h^{II}. Следовательно, с точностью до величин четвертого порядка

$$\mathrm{h} = h - \frac{1}{8}(\mathrm{ff}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{I}} + \mathrm{f}\mathfrak{g}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}} + \mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathfrak{g}\mathrm{h}^{\mathrm{I}} + \mathrm{gg}^{\mathrm{II}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}})\, r^2,$$

и после подстановки этого значения в уравнение (5) мы получим с точностью до пятого порядка исключительно

$$l = -hr + \frac{1}{24}(2\mathrm{ff}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{I}} + 2\mathrm{fg}^{\mathrm{I}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}} + 2\mathrm{f}^{\mathrm{II}}\mathrm{gh}^{\mathrm{I}} + 2\mathrm{gg}^{\mathrm{II}}\mathrm{h}^{\mathrm{II}} - \mathrm{f}^2\mathrm{h}^{\mathrm{III}} - 2\mathrm{f}\mathfrak{g}\mathrm{h}^{\mathrm{IIII}} - \mathfrak{g}^2\mathrm{h}^{\mathrm{V}})\, r^3.$$

На тех же основаниях как h от h будет также отличаться соответственно на величины второго порядка f, f^{I}, f^{II} и т. д.; g, g^{I}, g^{II} и т. д.; h′, h^{II} и т. д. от f. f^{I}, f^{II} и т. д.; g, g^{I}, g^{II} и т. д.; h^{I}, h^{II}, и т. д.; поэтому можно в приведенном выше выражении для l подставить вторые величины вместо первых, не уменьшая точности самого выражения. Следовательно, одинаково с точностью до пятого порядка исключительно получается

$$l = -hr + \frac{1}{24}(2ff^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}} + 2f^{\mathrm{II}}gh^{\mathrm{I}} + 2fg^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{II}} + 2gg^{\mathrm{II}}h^{\mathrm{II}} - f^2h^{\mathrm{III}} - 2fgh^{\mathrm{IIII}} - g^2h^{\mathrm{V}})\, r^3. \qquad (6)$$

На основании приведенного выше замечания можно переменять местами в этом уравнении l с t или b, если только положить

вместо	$h,\ h^{\mathrm{I}},\ h^{\mathrm{II}},\ h^{\mathrm{III}},\ h^{\mathrm{IIII}},\ h^{\mathrm{V}}$,
в первом случае	$f,\ f^{\mathrm{I}},\ f^{\mathrm{II}},\ f^{\mathrm{III}},\ f^{\mathrm{IIII}},\ f^{\mathrm{V}}$,
во втором случае	$g,\ g^{\mathrm{I}},\ g^{\mathrm{II}},\ g^{\mathrm{III}},\ g^{\mathrm{IIII}},\ g^{\mathrm{V}}$,

так что имеем:

$$t = -fr + \frac{1}{24}(2ff^{\mathrm{I}2} + 2f^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}g + 2ff^{\mathrm{II}}g^{\mathrm{I}} + 2f^{\mathrm{II}}gg^{\mathrm{II}} - f^2f^{\mathrm{III}} - 2ff^{\mathrm{IIII}}g - f^{\mathrm{V}}g^2)\, r^3, \quad (7)$$

$$b = -gr + \frac{1}{24}(2ff^{\mathrm{I}}g^{\mathrm{I}} + 2f^{\mathrm{II}}gg^{\mathrm{I}} + 2fg^{\mathrm{I}}g^{\mathrm{II}} + 2gg^{\mathrm{II}\,2} - f^2g^{\mathrm{III}} - 2fgg^{\mathrm{IIII}} - g^2g^{\mathrm{V}})\, r^3. \quad (8)$$

28.

Три формулы (6), (7), (8) заключают в себе все существенное для решения нашей задачи, так что для полного ее решения остается только еще выполнить механические вычисления, а именно, получить значения различных производных и произвести их подстановку. Если мы вместо

неопределенных x, x' ..., y, y'... напишем относящиеся к $X=T$, $Y=B$ определенные f, f^1... g... и для краткости примем

$$\cos B = c,$$

$$\sin B = s,$$

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2 B} = k,$$

то такое вычисление дает следующие восемнадцать значений:

$$f = -\frac{k \sin T}{ac} s,$$

$$f^{\mathrm{I}} = -\frac{k \cos T}{ac} s,$$

$$f^{\mathrm{II}} = -\frac{\sin T}{akc^2}(1 - 2e^2s^2 + e^2s^4).$$

$$f^{\mathrm{III}} = +\frac{k \sin T}{ac} s,$$

$$f^{\mathrm{IIII}} = -\frac{\cos T}{akc^2}(1 - 2e^2s^2 + e^2s^4),$$

$$f^{\mathrm{V}} = -\frac{\sin T}{ak^3c^3}[(2-3e^2)\, s + (e^2+2e^4)\, s^3 - (2e^2+e^4)\, s^5 + e^4s^7],$$

$$g = -\frac{k^3 \cos T}{a(1-e^2)},$$

$$g^{\mathrm{I}} = +\frac{k^3 \sin T}{a(1-e^2)},$$

$$g^{\mathrm{II}} = +\frac{3ke^2 \cos T}{a(1-e^2)} cs,$$

$$g^{\mathrm{III}} = +\frac{k^3 \cos T}{a(1-e^2)},$$

$$g^{\mathrm{IIII}} = -\frac{3ke^2 \sin T}{a(1-e^2)} cs,$$

$$g^{\mathrm{V}} = +\frac{3e^2 \cos T}{a(1-e^2)k}[1 - (2+2e^2)\, s^2 + 3e^2s^4],$$

$$h = -\frac{k \sin T}{ac},$$

$$h^{\mathrm{I}} = -\frac{k \cos T}{ac},$$

$$h^{\mathrm{II}} = -\frac{\sin T}{ac^2k}(1-e^2)\, s,$$

$$h^{\mathrm{III}} = +\frac{k \sin T}{ac},$$

$$h^{\mathrm{IIII}} = -\frac{\cos T}{ac^2k}(1-e^2)\, s,$$

$$h_{\mathrm{V}} = -\frac{(1-e^2)\sin T}{ac^3k^3}(1 + s^2 - 2e^2s^4).$$

29.

Представим теперь три уравнения (7), (8), (6) в следующей форме:

$$t = -fr\ (1 + Fr^2),$$
$$b = -gr\ (1 + Gr^2),$$
$$l = -hr\ (1 + Hr^2),$$

где

$$-fr = \frac{k \sin T \operatorname{tg} B}{a} r,$$

$$-gr = \frac{k^3 \cos T}{a(1-e^2)} r,$$

$$-hr = \frac{k \sin T}{a \cos B} r;$$

последние представляют собой приближенные до величин третьего порядка значения t, b, l; для краткости мы обозначим их через τ, β, λ Каждая из величин F, G, H состоит из следующих семи частей:

$$F = -\frac{1}{12} f^{I2} - \frac{f^I f^{II} g}{12f} - \frac{1}{12} f^{II} g^I - \frac{f^{II} g g^{II}}{12f} + \frac{1}{24} f f^{III} + \frac{1}{12} f^{IIII} g + \frac{f^V g^2}{24f}.$$

$$G = -\frac{f f^I g^I}{12g} - \frac{1}{12} f^{II} g^I - \frac{f g^I g^{II}}{12g} - \frac{1}{12} g^{II2} + \frac{f^2 g^{III}}{24g} + \frac{1}{12} f g^{IIII} + \frac{1}{24} g g^V,$$

$$H = -\frac{f f^I h^I}{12h} - \frac{f^{II} g h^I}{12h} - \frac{f g^I h^{II}}{12h} - \frac{g g^{II} h^{II}}{12h} + \frac{f^2 h^{III}}{24h} + \frac{f g h^{IIII}}{12h} + \frac{g^2 h^V}{24h}.$$

30.

Значения семи составных частей выражения для F по порядку оказываются такими:

$$1)\ -\frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2 c^2} s^2,$$

$$2)\ -\frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2 (1-e^2) c^2} (1 - 2e^2 s^2 + e^2 s^4),$$

$$3)\ +\frac{k^2 \sin^2 T}{12a^2 (1-e^2) c^2} (1 - 2e^2 s^2 + e^2 s^4),$$

$$4)\ +\frac{e^2 k^2 \cos^2 T}{4a^2 (1-e^2)^2} (1 - 2e^2 s^2 + e^2 s^4),$$

$$5)\ -\frac{k^2 \sin^2 T}{24 a^2 c^2} s^2,$$

$$6)\ +\frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2 (1-e^2) c^2} (1 - 2e^2 s^2 + e^2 s^4),$$

$$7)\ +\frac{k^2 \cos^2 T}{24a^2 (1-e^2)^2 c^2} \left[2 - 3e^2 + (e^2 + 2e^4) s^2 - (2e^2 + e^4) s^4\right].$$

Здесь составные части 2 и 6 взаимно уничтожаются; части 1, 4 и 7 дают:

$$+\frac{k^2\cos^2 T}{24a^2(1-e^2)^2}\left[2+3e^2+(2e^2-12e^4)\,s^2+5e^4s^4\right],$$

а части 3 и 5

$$+\frac{k^2\sin^2 T}{24a^2(1-e^2)c^2}\left[2-(1+3e^2)\,s^2+2e^2s^4\right]$$

или, так как $2-(1+3e^2)s^2+2e^2s^4$, равнозначно с $2c^2k^2+(1-e^2)s^2$, то

$$+\frac{k^4\sin^2 T}{12a^2(1-e^2)}+\frac{k^2\sin^2 T}{24a^2c^2}s^2.$$

Кроме того, еще $\frac{k^4\sin^2 T}{12a^2(1-e^2)}$ превращается в

$$\frac{k^4}{12a^2(1-e^2)}-\frac{k^4\cos^2 T}{12a^2(1-e^2)};$$

в таком случае, соединив все части, получаем

$$F=\frac{k^4}{12a^2(1-e^2)}+\frac{k^2\sin^2 T\,\mathrm{tg}^2 B}{24a^2}+\frac{k^2\cos^2 T}{24a^2(1-e^2)^2}\left[5e^2+(4e^2-\right.$$
$$\left.-14e^4)\,s^2+5e^4s^4\right];$$

отсюда, в соответствии с тем, что $t=\tau(1+Fr^2)$, получаем

$$t=\tau\left\{1+\frac{k^4}{12a^2(1-e^2)}r^2+\frac{1}{24}\tau^2+\frac{1}{24k^4}\left[5e^2+(4e^2-14e^4)\,s^2+5e^4s^4\right]\beta^2\right\}. \quad (9)$$

31.

Для семи составных частей G получаются следующие значения:

$$1)\ +\frac{k^2\sin^2 T}{12a^2c^2}s^2,$$

$$2)\ +\frac{k^2\sin^2 T}{12a^2(1-e^2)c^2}(1-2e^2s^2+e^2s^4),$$

$$3)\ -\frac{e^2k^2\sin^2 T}{4a^2(1-c^2)}s^2,$$

$$4)\ -\frac{3e^4k^2\cos^2 T}{4a^2(1-e^2)^2}c^2s^2,$$

$$5)\ -\frac{k^2\sin^2 T}{24a^2c^2}s^2,$$

$$6) + \frac{e^2k^2 \sin^2 T}{4a^2 (1-e^2)} s^2,$$

$$7) - \frac{e^2k^2 \cos^2 T}{8a^2 (1-e^2)^2}\left[1 - (2+2e^2)\ s^2 + 3e^2s^4)\right].$$

Здесь части 3 и 6 взаимно уничтожаются; остальные соединяются вместе: с одной стороны — 1, 2 и 5; с другой стороны — 4 и 7 в следующие выражения:

$$+ \frac{k^2 \sin^2 T}{24a^2(1-e^2)c^2}\left[2 + (1-5e^2)\ s^2 + 2e^2s^4\right],$$

$$- \frac{e^2k^2 \cos^2 T}{8a^2 (1-e^2)^2}\left[1 - (2-4e^2)\ s^2 - 3e^2s^4\right].$$

Так как $2+(1-5e^2)\ s^2+2e^2s^4$ и $2c^2k^2+3\ (1-e^2)\ s^2$ равнозначны, то первый член превратится в

$$\frac{k^4 \sin^2 T}{12a^2 (1-e^2)} + \frac{k^2 \sin^2 T}{8a^2c^2} s^2.$$

Разложим $\frac{k^4 \sin^2 T}{12a^2 (1-e^2)}$ в $\frac{k^4}{12a^2 (1-e^2)} - \frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2 (1-e^2)} (1-e^2s^2)$;

тогда, соединив все части, получим

$$G = \frac{k^4}{12a^2 (1-e^2)} + \frac{k^2 \sin^2 T \operatorname{tg}^2 B}{8a^2} - \frac{k^2 \cos^2 T}{24a^2 (1-e^2)^2}\Big[2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4)\ s^2 - 9e^4s^4\Big];$$

отсюда, так как $b = \beta\ (1 + Gr^2)$, имеем

$$b = \beta\left\{1 + \frac{k^4}{12a^2(1-e^2)} r^2 + \frac{1}{8}\tau^2 - \frac{1}{24h^4}\Big[2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4)\ s^2 - 9e^4s^4\Big]\beta^2\right\}. \qquad (10)$$

32.

Наконец, значения семи составных частей H примут вид:

$$1) - \frac{k^2 \cos^2 T}{a^2c^2} s^2,$$

$$2) - \frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2(1-e^2)c^2}\ (1 - 2e^2s^2 + e^2s^4),$$

$$3) + \frac{k^2 \sin^2 T}{12\,a^2c^2} s^2,$$

$$4) + \frac{e^2k^2 \cos^2 T}{4a^2(1-e^2)} s^2,$$

$$5) -\frac{k^2 \sin^2 T}{24a^2c^2} s^2,$$

$$6) +\frac{k^2 \cos^2 T}{12a^2c^2} s^2,$$

$$7) +\frac{k^2 \cos^2 T}{24a^2(1-e^2)c^2} (1+s^2-2e^2s^4).$$

Члены 1 и 6 взаимно уничтожаются; остальные дают:

$$H=\frac{k^2 \sin^2 T}{24a^2c^2} s^2 - \frac{k^2 \cos^2 T}{24a^2(1-e^2)} (1-10e^2s^2);$$

откуда, в соответствии с тем, что $l=\lambda(1+Hr^2)$, получается

$$l=\lambda\left[1+\frac{1}{24}\tau^2-\frac{1-e^2}{24k^4}(1-10e^2s^2)\beta^2\right]. \qquad (11)$$

Формулы (9), (10), (11), которые заключают в себе решение нашей задачи, отличаются от формул (III), (II), (I) (§ 25, 24, 23) только тем, что у первых в скобках встречаются τ и β там, где у вторых стоят t и b; легко видеть, что в конечных результатах это приводит только к расхождениям пятого порядка; так как первые формулы, как явствует из их вывода, точны до величин пятого порядка, то, следовательно, доказано, что и формулы (1), (II), (III) (§ 23—25), выведенные по первому методу, имеют такую же точность.

33.

Для численного вычисления лучше формулы (9), (10), (11) привести к следующему логарифмическому виду, при котором степень точности их остается неизменной и где M обозначает в них модуль выбранной системы логарифмов:

$$\lg t=\lg\tau+\frac{Mk^4}{12a^2(1-e^2)}r^2+\frac{1}{24}M\tau^2+\frac{M}{24k^4}\left[5e^2+(4e^2-14e^4)s^2+5e^4s^4\right]\beta^2,$$

$$\lg b=\lg\beta+\frac{Mk^4}{12a^2(1-e^2)}r^2+\frac{1}{8}M\tau^2-\frac{M}{24k^4}\left[2+e^2-(8e^2-14e^4)s^2-9e^4s^4\right]\beta^2,$$

$$\lg l=\lg\lambda+\frac{1}{12}M\tau^2-\frac{(1-e^2)M}{24k^4}(1-10e^2s^2)\beta^2.$$

Легко видеть, что во всех выведенных до сего времени формулах величины $t, \tau, b, \beta, l, \lambda$, приняты выраженными в частях радиуса; если эти величины выразить в секундах дуги, причем должны быть сохранены те же обозначения, то следует добавить в формулы для τ, β, λ (§ 29) еще множитель $\frac{1}{\rho}$, но в уравнениях (9), (10), (11), точно так же как и в выведенных из них логарифмических формулах, нужно в члены, содержащие τ^2 или β^2, добавить еще множитель ρ^2, где ρ (равно как и выше в § 16 и 19) обозначает величину дуги в одну секунду, выра-

женную в частях радиуса. Если, кроме того, для μ сохраняют применявшиеся выше значения

$$\mu = \frac{1}{12} M\rho^2$$

и для краткости принять:

$$(1) = \frac{k}{a\rho},$$

$$(2) = \frac{k^3}{a\ (1-e^2)\ \rho},$$

$$(3) = \frac{M k^4}{12a^2\ (1-e^2)},$$

$$(4) = \frac{\mu}{2k^4}\left[\ 5e^2 + (4e^2 - 14e^4)\ s^2 + 5e^4 s^4\ \right],$$

$$(5) = \frac{\mu}{2k^4}\left[\ 2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4)\ s^2 - 9e^4 s^4\right],$$

$$(6) = \frac{(1-e^2)\ \mu}{2k^4}\ (1 - 10e^2 s^2).$$

$$(7) = \frac{1}{2}\ \mu,$$

то решение нашей задачи будет заключаться в следующих шести формулах:

$$\tau = (1)\ r\ \sin\ T\ \operatorname{tg}\ B,$$

$$\beta = (2) r\ \cos\ T,$$

$$\lambda = (1)\ r \sin\ T\ \sec\ B,$$

$$\lg\ t = \lg\ \tau + (3)\ r^2 + (4)\ \beta^2 + (7)\ \tau^2,$$

$$\lg b = \lg\ \beta + (3)\ r^2 - (5)\ \beta^2 + 3\ (7)\ \tau^2,$$

$$\lg\ l = \lg\ \lambda - (6)\ \beta^2 + (7)\ \tau^2.$$

34.

Из семи коэффициентов (1), (2), и т. д. последний представляет собой постоянную величину, а именно:

$$\lg\ (7) = 7.628\ 722\ 8032\ (-20),$$

$$\lg\ 3\ (7) = 8.105\ 844\ 0580\ (-20);$$

остальные являются функциями широты B, как только будут выбраны определенные значения размеров эллипсоида, а следовательно, можно составить таблицы для них по аргументу B. Если такие таблицы имеются в распоряжении, то вычисления по указанному способу на эллипсоиде будут столь же просты, как и вычисления на шаре.

В конце этой статьи я прилагаю такие таблицы (см. образец таблиц) для зоны от 51 до 54° широты, в которых значения B даны через одну минуту; при этом я сделаю следующие замечания.

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51′10°	8.5089376	8.5100835	1.94877	3.32488	4.92771	4.61138
11	72	23	77	3.32495	71	38
12	68	8.5100810	77	3.32502	71	37
13	64	8.5100798	77	09	71	36
14	59	85	77	15	71	36
15	55	73	77	22	70	35
16	51	61	76	29	70	34
17	47	48	76	36	70	34
18	43	36	76	42	70	33
19	39	23	76	49	70	32
20	8.5089335	8.5100711	1.94876	3.32556	4.92770	4.61132
21	31	8.5100699	76	63	69	31
22	26	86	75	69	69	30
23	22	74	75	76	69	29
24	18	61	75	83	69	29
25	14	49	75	90	69	28
26	10	37	75	3.32596	69	27
27	06	24	75	3.32603	68	27
28	8.5089302	12	74	10	68	26
29	8.5089298	8.5100600	74	17	68	25
30	8.5089293	8.5100587	1.94874	3.32623	4.92768	4.61125
31	89	75	74	30	68	24
32	85	62	74	37	68	23
33	81	50	74	44	67	23
34	77	38	73	50	67	22
35	73	25	73	57	67	21
36	69	13	73	64	67	20
37	65	8.5100501	73	70	67	20
38	60	8 5100488	73	77	67	19
39	56	76	73	84	66	18
40	8.5089252	8.5100463	1.94872	3.32691	4.92766	4.61118
41	48	51	72	3.32697	66	17
42	44	39	72	3.32704	66	16
43	40	26	72	11	66	16
44	36	14	72	17	66	15
45	32	8.5100402	72	24	65	14
46	27	3.5100389	71	31	65	14
47	23	77	71	37	65	13
48	19	65	71	44	65	12
49	15	52	71	51	65	11
51°50′	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92763	4.61111

Эти таблицы зависят от элементов эллипсоида только в том случае, если в основу их положено определенное сжатие или определенное значение e, именно то, какое дано в последнем выводе Бесселя, и которое также лежит в основе таблиц, приложенных к первой статье (см. § 5). Для того чтобы численное значение a зависело только от сжатия, за единицу длины принят не туаз или какая-нибудь другая произвольная мера, а одна десятимиллионная часть земного меридиана; поэтому, следовательно, a может быть найдено непосредственно с помощью уравнения

$$\pi a\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 16}e^4-\frac{1\cdot 3\cdot 15}{4\cdot 16\cdot 36}e^6-\frac{1\cdot 3\cdot 15\cdot 35}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64}e^8-\frac{1.3.15.35.63}{4.16.36.64.100}e^{10}-\ldots\right)=$$

$$=20\,000\,000,$$

закон составления которого очевиден, или с помощью тождественного уравнения

$$a=\frac{20\,000\,000}{\pi}\left(1+\frac{1}{4}e^2+\frac{7}{64}e^4+\frac{15}{256}e^6+\frac{579}{16\,384}e^8+\frac{1515}{65\,536}e^{10}+\ldots\right).$$

С упомянутым выше значением e находим:

$$a=6.376\ 851{,}447,$$

$$\lg a=6.804\ 606\ 2999.$$

Понятно, что с применением наших таблиц r также должно быть выражено в тех же единицах; чтобы этого достигнуть, прибавляют к логарифмам

$$0{,}289\ 782\ 7662$$

(согласно значению a, данному Бесселем в туазах, § 5), если r первоначально было выражено в туазах; или вычитают из логарифмов

$$0.000\ 037\ 1638,$$

если r первоначально было дано в узаконенных французских метрах.

Члены, содержащие множители (3), (4) и т. д., могут рассматриваться как поправки, с помощью которых приближенные логарифмы $\lg\tau$, $\lg\beta$, $\lg\lambda$ преобразуются в исправленные $\lg t$, $\lg b$, $\lg l$. Эти поправки во всех случаях, для которых должен применяться наш способ, будут очень малые десятичные дроби, и так как их логарифмы вычисляются обыкновенно с семью знаками, то удобно получать эти поправки также выраженными заранее в единицах седьмого десятичного знака. Это получится, когда коэффициентам (3), (4) и т. д. вместо значений, приведенных в предыдущем параграфе, будут даны значения, бо́льшие в десять миллионов раз, или если увеличить характеристики логарифмов на семь единиц. Таким именно способом они даны в наших таблицах; тогда можно принять:

$$\lg\,(7)=4.62\ 872\ (-10),$$

$$\lg 3\,(7)=5.10\ 584\ (-10).$$

Впрочем, как (3), (4), (5), (6), так равным образом и (1) и (2) — правильные дроби, т. е. характеристики логарифмов отрицательные, но в таблицах они помещены обычным способом, причем самые характеристики логарифмов увеличены на 10 единиц.

О применении наших формул к решению задачи, поставленной в начале статьи, следует теперь повторить все, что было сказано выше (§ 20) относительно решения той же задачи на поверхности шара, почти ничего не изменяя или с маленькими изменениями. Обозначим заданные в действительности величины — широту и азимут в первом пункте через B^0 и T^0, тогда в первую очередь вычислим следующие четыре величины:

$$\beta = (2)\ r \cos T,$$

$$B = B^0 - \frac{1}{2}\beta,$$

$$\tau = (1)\ r \sin T \operatorname{tg} B,$$

$$T = T^0 - \frac{1}{2}\tau$$

на основании приближенного значения T (что мы можем сделать вследствие отсутствия других сведений о T°); значение (2), которое мы должны взять из таблиц по аргументу B, в первый раз можно брать по аргументу B^0, если только по произведенной нами оценке не будет надежды, что мы уже можем получить гораздо более близкое значение B; значение (1) берут из таблиц по только что найденному значению B.

Такое же вычисление повторяют с найденным при помощи четвертого уравнения значением T, причем (1) и (2) берут из таблиц по уже исправленному B; и, в случае надобности, делают таким же образом повторные вычисления, пока результаты не перестанут изменяться, т. е. пока не получится с помощью четвертой формулы то же самое значение T, из которого исходили в последний раз. При всех этих вычислениях применяются только пятизначные логарифмы.

При дальнейших приближениях вычисления ведут с семизначными логарифмами; принимают во внимание логарифмические поправки в $\lg\tau$ и $\lg\beta$ и полагают $B = B^0 - \frac{1}{2}b, T = T^0 - \frac{1}{2}t$. Когда и это вычисление дает неизменяющийся результат, вычисляют также λ и l по формулам, приведенным в конце § 33. Для пояснения приведенных выше правил могут здесь служить основные моменты примера, который, как и в § 20 при вычислении на шаре, заимствован нами из вычисления по стороне треугольника Brocken — Inselsberg.

При вычислении на эллипсоиде широта Brocken равна 51°48′1″, 9294=B^0; азимут стороны Brocken—Inselsberg равен 5°42′21″ 7699=T°.

Логарифм стороны треугольника в туазах с точностью до седьмого десятичного знака будет таким же, как при конформном изображении на поверхности шара, т. е. равен 4.735 3929; следовательно, в единицах, лежащих в основе наших вспомогательных таблиц, $\lg r$=5.025 1757.

Если для первого приближения примем T = 5°42′22″ и из таблиц по аргументу 51°48′ возьмем логарифм $\lg(2)$ = 8.51 004, то получим β = 3 412″, B = 51°19′36″; если принять при этом $\lg$ (1) = 8.50 893, то τ = 425″, T = 5°38′49″ Новое вычисление, произведенное с этим значением T, причем принимаем $\lg$ (2) = 8.51 007 (соответствует найденному выше значению B) дает β = 3 413″, B = 51°19′35″, τ = 420″,5, T = 5°38′51″,5.

По аргументу найденного значения B получаем из таблиц:

$$\begin{aligned}
\lg\,(1) &= 8.508\ 9337,\\
\lg\,(2) &= 8.510\ 0716,\\
\lg\,(3) &= 1.\ 94\ 876,\\
\lg\,(4) &= 3.\ 32\ 553,\\
\lg\,(5) &= 4.\ 92\ 770,\\
\lg\,(6) &= 4.\ 61\ 132.
\end{aligned}$$

Для значения $T = 5°38'51'',5$ сперва находим $\lg\beta = 3.533\ 1341$ или $\beta = 3412''.983$ и, применяя еще один раз β вместо b, имеем $B = 51°19'35'',4379$. С этим значением далее получаем $\operatorname{tg}\tau = 2.623\ 8475$. Затем, в единицах седьмого десятичного знака, находим:

$$\begin{aligned}
(3)\ r^2 &= 99{,}80,\\
(4)\ \beta^2 &= 2{,}46,\\
(5)\ \beta^2 &= 98{,}62,\\
(6)\ \beta^2 &= 47{,}60,\\
3\ (7)\ \tau^2 &= 2{,}26,\\
(7)\ \tau^2 &= 0{,}75;
\end{aligned}$$

на основании их логарифмические поправки будут равны:

для
$$\begin{aligned}
\lg\beta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ &+\ 3,\\
\lg\tau\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ &+ 103,\\
\lg\lambda\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ &-\ 47.
\end{aligned}$$

Это вычисление можно произвести также с прежними значениями $\lg\beta$ и $\lg\tau$, но другого результата не получится; тогда при помощи $\lg b = 3.533\ 1344$ тотчас же получаются значения: $b = 3412''{,}985$ и $B = 51°19'35'',4369$. На $\lg\tau$ это не влияет; мы получаем при этом $\lg t = 2.623\ 8578$, $t = 420''{,}5889$, $T = 5°38'51'',4755$. Если с этим значением T мы пожелаем произвести вычисления еще один раз, то B не получит никакого изменения; для $\lg\tau$ мы найдем $2.623\ 8470$; следовательно, $\lg t = 2.623\ 8573$, $t = 420''{,}5884$ и с их помощью $T = 5°38'51'',4757$. Новое вычисление с этим значением не даст никакого изменения, и, очевидно, можно ограничиться уже полученными выше результатами, так как, если пользоваться семизначными логарифмами, то в четвертом десятичном знаке секунды могут обнаружиться колебания в одну или несколько единиц. Окончательный результат, следовательно, будет такой:

широта пункта Inselsberg $= B° - b = 50°51'8'',9444$;

азимут стороны Inselsberg—Brocken $= 180° + T^0 - t = 185°35'21'',1815$.

Наконец, для разности долгот находим:

$$\begin{aligned}
\lg\lambda &= 2.731\ 3519,\\
\lg l &= 2.731\ 3472,\\
l &= 538''{,}7002 = 0°8'58'',7002.
\end{aligned}$$

Впрочем, здесь не представляется необходимым повторять замечания, сделанные в конце § 20, которые и в этом случае сохраняют свое полное значение.

Disquisitiones generales circa superficies curvas

auctore

Carolo Friderico Gauss

Societāti regiae oblatae d. VIII. october. MDCCCXXVII

Commentationes societātis regiae scientiarum Gottingensis recentiores
Vol. VI
Gottingae MDCCCXXVIII

Общие исследования о кривых поверхностях

Карл Фридрих Гаусс

Представлено королевскому обществу 8 октября 1827 г.

Последние известия Гёттингенского королевского научного общества.
Том VI
Гёттинген, 1828 г.

ОБЩИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ [3]

1.

Исследования, в которых рассматриваются направления различных прямых в пространстве, вообще говоря, станут более простыми и ясными, если прибегнуть к помощи шара радиуса, равного единице, описанного вокруг некоторого произвольного центра; причем отдельные точки этой шаровой поверхности должны означать направления прямых, параллельных радиусам, к ним проведенным. Так как положение всякой точки в пространстве определяется тремя координатами, т. е. тремя расстояниями от трех неподвижных взаимно перпендикулярных плоскостей, то прежде всего следует рассмотреть направление осей, перпендикулярных этим плоскостям. Обозначим точки шаровой поверхности, изображающие эти направления, значками (1), (2), (3); взаимное расстояние между ними есть четверть круга. Наконец, за направление каждой оси примем то, в котором соответственные координаты возрастают.

2.

Не бесполезно сделать краткое перечисление тех предложений, которые часто встречаются в вопросах этого рода.

I. Угол между двумя пересекающимися прямыми измеряется дугой между двумя точками на шаровой поверхности, соответствующими их направлениям.

II. Положение какой угодно плоскости может быть изображено большим кругом шара, плоскость которого параллельна ей.

III. Угол между двумя плоскостями равен двугранному углу между большими кругами, изображающими плоскости, а следовательно, изме-

ряется дугой, соединяющей полюсы этих больших кругов. Таким образом, и наклонение прямой к плоскости измеряется дугой, проведенной перпендикулярно от точки, соответствующей направлению данной прямой, к большому кругу, изображающему положение плоскости.

IV. Если обозначить через x, y, z и x', y', z' — координаты двух точек, через r — расстояние между ними, а через L — точку на поверхности шара, означающую направление прямой от первой точки ко второй, то получим:

$$x' = x + r \cos (1)\, L, \qquad y' = y + r \cos (2)\, L, \qquad z' = z + r \cos (3)\, L.$$

V. Отсюда следует, что вообще

$$\cos^2 (1)\, L + \cos^2 (2)\, L + \cos^2 (3)\, L = 1,$$

и если L' обозначает какую-нибудь другую точку на поверхности шара, то

$$\cos (1)\, L \cos (1)\, L' + \cos (2)\, L \cos (2)\, L' + \cos (3)\, L \cos (3)\, L' = \cos LL'.$$

VI. **Теорема.** *Если обозначим через L, L', L'', L''' четыре точки на шаре и через A угол, образуемый дугами LL' и $L''L'''$ в точке их встречи, то*

$$\cos LL'' \cos L'L''' - \cos LL''' \cos L'L'' = \sin LL' \sin L''L''' \cos A.$$

Доказательство. Пусть, кроме того, буква A обозначает самую точку встречи, тогда

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''.$$

Мы имеем:

$$\cos LL'' = \cos t \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A,$$
$$\cos L'L''' = \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A,$$
$$\cos LL''' = \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A,$$
$$\cos L'L'' = \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A,$$

следовательно,

$$\cos LL'' \cos L'L''' - \cos LL''' \cos L'L'' =$$
$$= \cos A\, (\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' -$$
$$- \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''') =$$
$$= \cos A\, (\cos t \sin t' - \sin t \cos t')\, (\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''') =$$
$$= \cos A \sin (t' - t) \sin (t''' - t'') = \cos A \sin LL' \sin L''L'''.$$

Хотя от точки A расходятся по две ветви каждого большого круга, следовательно, там образуются два угла, дополняющие один другого до 180°, но наш анализ указывает, что надо выбирать те ветви, направления которых совпадают с направлениями от точки L к L' и от точки L'' к L'''. Вместе с этим ясно, что можно выбирать ту или другую точку пересечения больших кругов. Вместо угла A можно также взять дугу между полюсами больших кругов, части которых суть дуги LL' и $L''L'''$. Очевидно, что надо выбирать полюсы так, чтобы они были одинаково расположены относительно наших дуг, т. е. чтобы оба полюса при переходе от L к L' и от L'' к L''' лежали справа, или оба слева.

VII. Пусть L, L', L'' обозначают три точки на поверхности шара и положим для краткости:

$$\cos (1)\, L = x, \quad \cos (2)\, L = y, \quad \cos (3)\, L = z,$$
$$\cos (1)\, L' = x', \quad \cos (2)\, L' = y', \quad \cos (3)\, L' = z',$$
$$\cos (1)\, L'' = x'', \quad \cos (2)\, L'' = y'', \quad \cos (3)\, L'' = z''$$

и

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta.$$

Пусть λ — полюс большого круга, часть которого составляет дуга LL', и притом тот, который лежит относительно этой дуги так, как точка (1) лежит относительно дуги (2) (3). Тогда по только что доказанной теореме $yz' - y'z = \cos (1)\, \lambda \sin (2)\, (3) \sin LL'$ или, так как дуга $(2)\,(3) = 90°$,

$$yz' - y'z = \cos (1)\, \lambda \sin LL';$$

таким же образом,

$$zx' - z'x = \cos (2)\, \lambda \sin LL',$$

$$xy' - x'y = \cos (3)\, \lambda \sin LL'.$$

Умножая эти уравнения соответственно на x'', y'', z'' и складывая, получаем, если принять во внимание вторую теорему пункта V,

$$\Delta = \cos \lambda L'' \sin LL'.$$

Теперь надо различать три случая. *Первый,* когда L'' лежит на том круге, часть которого составляет дуга LL', тогда $\lambda L'' = 90°$ и, следовательно, $\Delta = 0$. Если же L'' лежит вне этого большого круга, то *второй* случай — тот, при котором она лежит с той же стороны, как и λ; *третий,* — если с противоположной. В этих последних случаях точки L, L' L'' образуют сферический треугольник, притом во втором случае лежат в том же порядке, как и точки (1), (2), (3), а в третьем случае — в обратном. Если углы этого сферического треугольника обозначить просто через L, L', L'', а перпендикуляр, опущенный на шаровой поверхности из L'' на сторону LL', через p, то

$$\sin p = \sin L \sin LL'' = \sin L' \sin L'L'' \quad \text{и} \quad \lambda L'' = 90° \mp p,$$

причем верхний знак берется во втором случае, а нижний — в третьем. Итак, отсюда получим

$$\pm\Delta = \sin L \sin LL' \sin LL'' = \sin L' \sin LL'' \sin L'L'' = \sin L'' \sin LL'' \sin L'L''.$$

Очевидно, однако, что первый случай может быть заключен во втором и третьем; также без труда видно, что $\pm\Delta$ означает ушестеренный объем пирамиды, заключенной между точками L, L', L'' и центром шара. Наконец, отсюда же очень легко заключить, что то же самое выражение $\pm\frac{1}{6}\Delta$ вообще выражает объем любой пирамиды, заключенной между началом координат и точками, координаты которых суть: x, y, z; x', y', z' и x'', y'', z''.

3.

Говорят, что кривая поверхность в точке A имеет непрерывную кривизну, если направления всех прямых, проведенных от A к точкам поверхности, бесконечно близким к A, бесконечно мало уклоняются от одной и той же плоскости, проходящей через A; эта же плоскость есть *касательная* к поверхности в точке A. Если же в некоторой точке нельзя удовлетворить этому условию, то непрерывность кривизны нарушается, как это, например, бывает в вершине конуса. Настоящие исследования относятся к таким кривым поверхностям или к таким частям поверхности, в которых ни в одном месте не нарушается непрерывность кривизны. Здесь же мы заметим, что способы для определения положения касательной плоскости в тех особенных точках, где непрерывность нарушается, теряют свою силу и приводят к неопределенности.

4.

Положение касательной плоскости удобнее определяется положением прямой, перпендикулярной к ней в точке A; эта же прямая называется нормалью к самой поверхности. Направление этой нормали обозначим точкой L на вспомогательной шаровой поверхности и положим

$$\cos\,(1)\,L=X,\qquad \cos\,(2)\,L=Y,\qquad \cos\,(3)\,L=Z;$$

координаты точки A обозначим через x, y, z. Пусть далее $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ обозначают координаты другой точки кривой поверхности A'; ds — бесконечно малое расстояние ее от A; наконец, λ — точка шаровой поверхности, изображающая направление элемента AA'.

Таким образом, получим

$$dx=ds\cdot\cos\,(1)\,\lambda,\quad dy=ds\cdot\cos\,(2)\,\lambda,\quad dz=ds\cdot\cos\,(3)\,\lambda,$$

и так как λL должно равняться 90°, то

$$X\cos\,(1)\,\lambda+Y\cos\,(2)\,\lambda+Z\cos\,(3)\,\lambda=0.$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Есть два общих способа для изучения свойств кривых поверхностей. В *первом* пользуются уравнением между координатами x, y, z, которое мы полагаем приведенным к виду $W=0$, где W — функция переменных x, y, z. Пусть полный дифференциал функции W есть

$$dW=Pdx+Qdy+Rdz;$$

на данной поверхности получим

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

а следовательно,

$$P\cos\,(1)\,\lambda+Q\cos\,(2)\,\lambda+R\cos\,(3)\,\lambda=0.$$

Так как это уравнение, равно как и приведенное нами выше, должно иметь место для всевозможных направлений элементов ds на кривой поверхности, то легко видеть, что X, Y, Z должны быть пропорциональны P, Q, R, и так как

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

получим

$$X=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\qquad Y=\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\qquad Z=\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

или

$$X=\frac{-P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\qquad Y=\frac{-Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\qquad Z=\frac{-R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Во *втором* способе координаты рассматриваются как функции от двух независимых переменных p, q. Положим, что после дифференцирования этих функций получится:

$$dx=adp+a'dq,$$
$$dy=bdp+b'dq,$$
$$dz=cdp+c'dq.$$

Подставив эти величины в одну из приведенных выше формул, находим

$$(aX + bY + cZ)\ dp + (a'X + b'Y + c'Z)\ dq = 0.$$

Так как это равенство должно иметь место независимо от значений дифференциалов dp, dq, то, очевидно, получим

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0,$$

откуда находим, что X, Y, Z должны быть пропорциональны величинам:

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'.$$

Полагая далее для краткости

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta,$$

получаем

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta},$$

или

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}.$$

К этим двум способам, обыкновенно, присоединяют *третий,* в котором одна из координат, например z, выражается в функции остальных x, y. Очевидно, этот способ есть не что иное, как частный случай первого и второго; таким образом, если положить

$$dz = t\,dx + u\,dy,$$

то получим

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}.$$

или

$$X = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}.$$

5.

Два решения, найденные в предыдущем параграфе, очевидно, относятся к двум противолежащим точкам шаровой поверхности или к двум противоположным направлениям, что и согласуется с сущностью вопроса, так как нормаль можно провести к каждой из двух сторон кривой поверхности. Если хотим различать между собой две прилегающие одна к другой стороны поверхности и называть одну внешней, а другую внутренней, то можно принять для каждой нормали правильное решение, соответствующее теореме, рассмотренной в § 2 (п. VII), если вместе с тем установлен критерий для различения одной стороны от другой.

При первом способе изображения поверхности критерий этот дается знаком величины W. Говоря вообще, кривая поверхность отделяет части пространства, в которых W получает положительное значение, от тех, в которых значение W отрицательное. Из упомянутой теоремы легко убедиться, что если W получает положительные значения по направлению к внешней стороне и нормаль проведена в ту же сторону, то надо взять первое решение. Впрочем, в каждом случае легко решить, на всей ли поверхности действует одно и то же правило относительно знака W или для разных частей различные; пока коэффициенты P, Q, R имеют конечные значения и не превращаются в нуль все три сразу, закон непрерывности препятствует изменению.

Если мы пользуемся вторым способом, то можем различать две системы кривых линий на поверхности: одна, для которой p — переменное, q — постоянное; другая, для которой q — переменное, p — постоянное. Взаимное положение этих линий относительно внешней стороны поверхности должно определить, какое решение следует принять. Действительно, как скоро три линии, а именно, ветвь кривой первой системы, исходящая из A по направлению возрастающих p, ветвь кривой второй системы, выходящая из точки A по направлению возрастающих q, и нормаль, направленная во внешнее пространство, расположены *подобно* тому, как расположены выходящие из начала координат оси x, y, z (например, как для тех, так и для других трех линий можно считать первую линию направляющейся налево, вторую — направо, третью — вверх), то следует принять первое решение. Если же взаимное положение первых трех линий противоположно взаимному расположению осей x, y, z, тогда имеет место второе решение.

Если принять третье решение, надо проверить, совершается ли переход по направлению к внешней или внутренней стороне, когда z получает положительное приращение, а x, y остаются неизменными. В первом случае для направления внешней нормали действует первое решение, во втором — второе.

6.

Подобно тому как при перенесении направлений нормалей к поверхности на поверхность шара любой данной точке первой поверхности соответствует определенная точка на второй, так и любая линия или фигура на ней изобразится соответственной линией или фигурой на шаре. При сравнении двух фигур, взаимно соответствующих, из которых одна — как бы изображение другой, можно различать два рода вопросов: в одних рассматривается только величина, в других, отвлекаясь от количественного соотношения, рассматривается одно положение.

В первом случае возникает некоторое понятие, которое нам кажется полезным ввести в учение о кривых поверхностях, а именно, мы будем говорить, что некоторая часть кривой поверхности, ограниченная известным контуром, имеет полную кривизну (curvatura integra), которая выражается площадью соответственной фигуры на шаровой поверхности. От этой полной кривизны строго следует отличать кривизну как бы специфическую (quasi specifica), которую будем называть *мерой кривизны*. Эта последняя относится к *точке* на поверхности и означает частное, происходящее от деления полной кривизны элемента поверхности, прилежащего к точке, на самую площадь этого элемента и, следовательно, указывает отношение бесконечно малых площадей на кривой поверхности и на шаре, соответствующих одна другой. Польза этих нововведений, как мы надеемся, вполне уяснится последующим изложением. Что касается терминологии, то думаем, что прежде всего следует обратить внимание на то, чтобы избежать всякой двусмысленности, вследствие чего и не считаем удобным строго придерживаться аналогии с терминологией, общепринятой (хотя не всеми одобряемой) в учении о плоских кривых, следуя которой, мера кривизны должна просто называться кривизной, а полная кривизна — амплитудой. Впрочем, отчего и не допустить некоторого простора в выражениях, лишь бы дело шло о предметах, имеющих значение, и название не было причиной ложного истолкования?

Положение фигуры на поверхности шара может быть или подобно положению соответствующей фигуры на кривой поверхности, или противоположно (обратно); первый случай имеет место, когда пара линий

на кривой поверхности, идущих из одной и той же точки в различных, но не прямо противоположных направлениях, изображается на поверхности шара парой линий, подобно расположенных, т. е. когда изображение линии, лежащей направо, лежит направо же; второй случай, — когда имеет место противоположное. Эти два случая мы различим *знаком* меры кривизны — положительным или отрицательным. Но очевидно, что это различие может иметь место только до тех пор, пока мы на обеих поверхностях выбираем определенную сторону, на которой должна лежать фигура. На вспомогательном шаре всегда за внешнюю сторону будем принимать обращенную от центра; на кривой же поверхности за внешнюю сторону примем или ту, которую рассматриваем как внешнюю, или ту, от которой начинается восставленная нормаль, так как очевидно, что по отношению к подобию фигур ничего не изменится, если на кривой поверхности перенесем на противоположную сторону как фигуру, так и нормаль, лишь бы изображение фигуры всегда представлялось на одной и той же стороне поверхности шара.

Знак плюс или минус, приписываемый нами мере кривизны, сообразно положению бесконечно малой части поверхности, можем распространить также и на полную кривизну конечной части кривой поверхности. Впрочем, если желать рассмотреть этот вопрос во всей его полноте, то понадобились бы некоторые пояснения, которые приводим здесь только вкратце. Пока фигура на кривой поверхности составлена так, что различным точкам внутри ее отвечают также различные точки на поверхности шара, определение наше не нуждается в дальнейшем разъяснении. Всякий же раз, как это условие не действует, необходимо, чтобы некоторые части фигур на поверхности шара принимались в расчет два или несколько раз, вследствие чего, смотря по тому, будет ли положение подобное или обратное, части будут или накладываться одна на другую или взаимно уничтожаться. Самое простое в таком случае: представить фигуру на поверхности, разделенной на такие части, чтобы, рассматриваемые поодиночке, они удовлетворяли упомянутому выше условию, и поодиночке вычислить для них полную кривизну, определяемую по величине площадью соответственной фигуры на поверхности шара, а по знаку — своим положением, и, наконец, всей фигуре приписать полную кривизну, получаемую сложением значений полной кривизны, отвечающих отдельным частям. Таким образом, полная кривизна фигуры вообще равна $\int k d\sigma$, где $d\sigma$ означает элемент площади фигуры, k — меру кривизны в любой ее точке. Что же касается до геометрического значения интеграла, то главнейшие соображения, касающиеся этого предмета, состоят в следующем.

Контуру фигуры на кривой поверхности (при ограничении, упомянутом в § 3) всегда соответствует сомкнутая линия на поверхности шара. Если она нигде не пересекает сама себя (не образует узлов), то делит всю шаровую поверхность на две части, из которых одна соответствует фигуре на кривой поверхности, и ее площадь, принятая со знаком плюс или минус, смотря по тому, лежит ли она относительно своей периферии, как и фигура на кривой поверхности относительно своей, или обратно, выразит полную кривизну последней. Если же эта линия пересекает себя один или несколько раз, то получается сложная фигура, которой, однако, можно также законно приписать известную площадь, как и фигурам без узлов, и эта площадь, правильно понимаемая, всегда выразит собой верную величину полной кривизны. Впрочем, более полное изложение этого вопроса относительно фигур, взятых в самом общем виде, мы должны отложить до другого раза.*

* Несмотря на свое обещание, Гаусс более не возвращался к этому вопросу. **(Прим. ред.).**

7.

Найдем теперь формулу для выражения меры кривизны в любой точке на кривой поверхности. Если $d\sigma$ означает площадь элемента этой поверхности, то $Zd\sigma$ — площадь проекции этого элемента на плоскость координат $x, y;$ равно как, если $d\Sigma$ — площадь соответственного элемента шаровой поверхности, то $Zd\Sigma$ — площадь проекции на ту же плоскость; положительный или отрицательный знак количества Z укажет положение проекции, подобное или обратное положению проектируемого элемента, и очевидно, что эти проекции находятся между собой в таком же отношении (как по величине, так и по направлению), как и самые элементы. Рассмотрим элементарный треугольник на кривой поверхности и положим, что координатами трех точек, образующих его проекцию, будут:

$$\begin{aligned} &x, && y,\\ &x+dx, && y+dy,\\ &x+\delta x, && y+\delta y. \end{aligned}$$

Удвоенная площадь этого треугольника выразится формулой

$$dx\ \delta y - dy\ \delta x,$$

притом взятой со знаком плюс или минус, смотря по тому, будет ли положение стороны между первой и третьей точкой относительно стороны между первой и второй подобно или обратно положению оси координат $y,$ относительно оси координат $x.$

Точно так же, если координатами трех точек, образующих проекцию соответственного элемента шаровой поверхности, отсчитанными от центра шара, будут:

$$\begin{aligned} &X, && Y,\\ &X+dX, && Y+dY,\\ &X+\delta X, && Y+\varepsilon Y, \end{aligned}$$

то удвоенная площадь этой проекции выразится через

$$dX\ \delta Y - dY\ \delta X;$$

относительно знака этого выражения имеет силу сказанное выше соображение. Поэтому мерой кривизны в данном месте кривой поверхности будет

$$k = \frac{dX\ \delta Y - dY\,\delta X}{dx\ \delta y - dy\ \delta x}.$$

Если еще положить, что свойство кривой поверхности выражено согласно третьему из рассмотренных в § 4 видов, то X и Y будут даны в виде функций от величин $x, y,$ откуда

$$dX = \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}\ dy,$$

$$\delta X = \frac{dX}{dx}\delta x + \frac{dX}{dy}\ \delta y,$$

$$dY = \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}\ dy,$$

$$\delta Y = \frac{dY}{dx}\delta x + \frac{dY}{dy}\ \delta y.$$

При подстановке этих значений прежнее наше выражение примет вид

$$k=\frac{dX}{dx}\,\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\,\frac{dY}{dx}.$$

Положим, как и выше, что

$$\frac{dz}{dx}=t, \qquad \frac{dz}{dy}=u,$$

кроме того,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=T, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy}=U, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=V,$$

или

$$dt=Tdx+Udy, \quad du=Udx+Vdy;$$

из ранее выведенных формул имеем:

$$X=-tZ, \quad Y=-uZ, \quad (1+t^2+u^2)\,Z^2=1,$$

откуда

$$dX=-Zdt-tdZ,$$
$$dY=-Zdu-udZ,$$
$$(1+t^2+u^2)\,dZ+Z\,(tdt+udu)=0$$

или

$$dZ=-Z^3\,(tdt+udu),$$
$$dX=-Z^3\,(1+u^2)\,dt+Z^3\,tu\,du,$$
$$dY=+Z^3\,tu\,dt-Z^3\,(1+t^2)\,du,$$

а также

$$\frac{dX}{dx}=Z^3\,[-(1+u^2)\,T+tuU],$$
$$\frac{dX}{dy}=Z^3\,[-(1+u^2)\,U+tuV],$$
$$\frac{dY}{dx}=Z^3\,[tuT-(1+t^2)\,U],$$
$$\frac{dY}{dy}=Z^3\,[tuU-(1+t^2)\,V];$$

подставив эти значения в предыдущее выражение, получим

$$k=Z^6\,(TV-U^2)\,(1+t^2+u^2)=Z^4\,(TV-U^2)=\frac{TV-U^2}{(1+t^2+u^2)^2}.$$

8.

Надлежащим выбором начала и осей координат можно достичь того, что для данной точки A значения величин t, u, U обратятся в нуль. Очевидно, что два первых условия будут выполнены, если за плоскость координат x, y принять плоскость, касательную в этой точке. Если, кроме того, начало координат поместить в самую точку A, то ясно, что выражение для координаты z получит вид

$$z=\frac{1}{2}\,T^0x^2+U^0xy+\frac{1}{2}V^0y^2+\Omega,$$

где Ω порядка высшего, чем второй. Затем повернем положение самих осей x, y на такой угол M, чтобы

$$\operatorname{tg} 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0},$$

тогда легко видеть, что уравнение примет вид

$$z = \frac{1}{2} Tx^2 + \frac{1}{2} Vy^2 + \Omega;$$

таким образом, удовлетворяется и третье условие. Отсюда легко сделать такой вывод:

1. Если кривая поверхность пересечена нормальной плоскостью, проходящей через координатную ось x, то получается плоская кривая, радиус кривизны которой в точке A равен $\frac{1}{T}$, причем знак плюс или минус указывает, будет ли эта кривая вогнутая или выпуклая в том направлении, в котором координаты z положительные.

II. Подобным же образом $\frac{1}{V}$ — радиус кривизны в точке A плоской кривой, происходящей при пересечении кривой поверхности плоскостью, проходящей через оси y, z.

III. Положив $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, получим

$$z = \frac{1}{2} (T \cos^2\varphi + V \sin^2\varphi)\, r^2 + \Omega,$$

откуда следует, что, если провести сечение плоскостью, нормальной к поверхности в A и образующей с осью x угол φ, то получится плоская кривая, радиус которой в точке A

$$= \frac{1}{T \cos^2\varphi + V \sin^2\varphi},$$

IV. Всякий раз, когда имеем $T = V$, радиусы кривизны *всех* нормальных сечений равны между собой. Если же T и V не равны, то очевидно, так как $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ для любого значения угла φ лежит между T и V, радиусы кривизны главных сечений, рассмотренных в п. I и II, относятся к предельным кривизнам, т. е. один к наибольшей, другой к наименьшей кривизне, если T и V одного знака; и, наоборот, один к наибольшей выпуклости, другой к наибольшей вогнутости, если T и V различных знаков. Эти заключения содержат в себе почти все, что впервые дал о кривизне кривых поверхностей знаменитый Эйлер.

V. Мера кривизны кривой поверхности в точке A получает весьма простое выражение $k = TV$, откуда следует:

Теорема. *Мера кривизны в любой точке поверхности равна дроби, числитель которой единица, знаменатель — произведение двух главных радиусов кривизны в нормальных сечениях.*

Вместе с этим ясно, что мера кривизны — положительная для поверхностей выпукло-выпуклых или вогнуто-вогнутых (это различие несущественно) или — отрицательная для выпукло-вогнутых. Если поверхность состоит из частей обоего рода, то на границе их мера кривизны должна обращаться в нуль. О свойствах таких кривых поверхностей, мера кривизны которых повсюду обращается в нуль, будет сказано во многих местах ниже.

9.

Общая формула для меры кривизны, предложенная в конце § 7, самая простая из всех, так как она заключает только пять элементов; к более сложной, заключающей девять элементов, мы придем, если примем первый способ для выражения природы кривой поверхности. Сохраняя обозначения § 4, положим также

$$\frac{d^2W}{dx^2}=P',\quad \frac{d^2W}{dy^2}=Q',\quad \frac{d^2W}{dz^2}=R',$$

$$\frac{d^2W}{dy\,dz}=P'',\quad \frac{d^2W}{dx\,dz}=Q''\quad \frac{d^2W}{dx\,dy}=R'',$$

так что

$$dP=P'dx+R''dy+Q''dz,$$
$$dQ=R''dx+Q'dy+P''dz,$$
$$dR=Q''dx+P''dy+R'dz.$$

Так как мы уже имеем $t=-\frac{P}{R}$, то дифференцированием находим:

$$R^2dt=-RdP+PdR=(PQ''-RP')\,dx+(PP''-RR'')\,dy+$$
$$+(PR'-RQ'')\,dz$$

или, исключив dz с помощью уравнения $Pdx+Qdy+Rdz=0$,

$$R^3dt=(-R^2P'+2PRQ''-P^2R')dx+(PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'')\,dy.$$

Далее, таким же образом получаем

$$R^3du=(PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'')\,dx+(-R^2Q'+2QRP''-Q^2R')\,dy.$$

Наконец, отсюда заключаем

$$R^3T=-R^2P'+2PRQ''-P^2R',$$
$$R^3U=PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'',$$
$$R^3V=-R^2Q'+2QRP''-Q^2R'.$$

Подставив эти величины в формулу § 7, получим для меры кривизны k следующее симметричное выражение:

$$(P^2+Q^2+R^2)^2\,k=P^2(Q'R'-P''^2)+Q^2(P'R'-Q''^2)+R^2(P'Q'-R''^2)+$$
$$+2QR(Q''R''-P'P'')+2PR(P''R''-Q'Q'')+2PQ(P''Q''-R'R'').$$

10.

Еще более сложную формулу, состоящую из пятнадцати элементов, получим, если воспользуемся вторым общим методом для изучения свойств кривых поверхностей. Но имеются важные причины получить именно эту формулу. Удерживая обозначения § 4, положим, что

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\alpha,\quad \frac{d^2x}{dp\,dq}=\alpha',\quad \frac{d^2x}{dq^2}=\alpha''.$$

$$\frac{d^2y}{dp^2}=\beta,\quad \frac{d^2y}{dp\,dq}=\beta',\quad \frac{d^2y}{dq^2}=\beta'',$$

$$\frac{d^2z}{dp^2}=\gamma,\quad \frac{d^2z}{dp\,dq}=\gamma',\quad \frac{d^2z}{dq^2}=\gamma''.$$

Кроме того, для сокращения примем

$$bc' - cb' = A,$$
$$ca' - ac' = B,$$
$$ab' - ba' = C.$$

Замечаем сперва, что имеем $Adx + Bdy + Cdz = 0$, или, $dz = -\frac{A}{C}dx - \frac{B}{C}dy$; так что, если z рассматривается как функция от x, y, то имеем:

$$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C},$$
$$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}.$$

Далее выводим из $dx = adp + a'dq$, $dy = bdp + b'dq$*,

$$Cdp = b'dx - a'dy,$$
$$Cdq = -bdx + ady.$$

Отсюда получаем полные дифференциалы самих t и u**

$$C^3dt = \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady),$$

$$C^3du = \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady).$$

Если же в эти формулы подставим:

$$\frac{dA}{dp} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$

$$\frac{dA}{dq} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$

$$\frac{dB}{dp} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$

$$\frac{dB}{dq} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$

$$\frac{dC}{dp} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$

$$\frac{dC}{dq} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

и заметим, что значения дифференциалов dt, du, таким образом полученных, должны соответственно равняться, независимо от значений диф-

---

* Решением этих уравнений относительно dp и dq.

** При помощи дифференцирования выражений $t = -\frac{A}{C}$, $u = -\frac{B}{C}$.

ференциалов dx, dy, величинам $Tax + Udy$, $Udx + Vdy$, то найдем после некоторых довольно простых выкладок, что

$$\begin{aligned}
C^3T &= \alpha Ab'^2 + \beta Bb'^2 + \gamma Cb'^2 - \\
&\quad - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' + \\
&\quad + \alpha'' Ab^2 + \beta'' Bb^2 + \gamma'' Cb^2, \\
C^3U &= -\alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' + \\
&\quad + \alpha' A\,(ab' + ba') + \beta' B\,(ab' + ba') + \gamma' C\,(ab' + ba') - \\
&\quad - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \\
C^3V &= \alpha Aa'^2 + \beta Ba'^2 + \gamma Ca'^2 - \\
&\quad - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' + \\
&\quad + \alpha'' Aa^2 + \beta'' Ba^2 + \gamma'' Ca^2.
\end{aligned}$$

Если же для сокращения положим:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \tag{1}$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \tag{2}$$
$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'', \tag{3}$$

то

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2, \\
C^3U &= -Da'b' + D'\,(ab' + ba') - D''ab, \\
C^3V &= Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, выполнив вычисления, находим

$$C^6\,(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)\,(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)\,C^2,$$

следовательно, формула для меры кривизны примет вид

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

11.

К только что выведенной формуле присоединим другую, которую нужно причислить к самым плодотворным теоремам в учении о кривых поверхностях. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= E, \\
aa' + bb' + cc' &= F, \\
a'^2 + b'^2 + c'^2 &= G, \\
a\alpha + b\beta + c\gamma &= m, && (4)\\
a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= m', && (5)\\
a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= m'', && (6)\\
a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= n, && (7)\\
a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= n', && (8)\\
a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' &= n'', && (9)\\
A^2 + B^2 + C^2 &= EG - F^2 = \Delta.
\end{aligned}$$

Исключим из уравнений (1), (4), (7) величины β, γ, чего достигнем, если умножим их на $bc'-cb'$, $b'C-c'B$ и $cB-bC$ и сложим, таким образом получим

$$[A\ (bc'-cb')+a\ (b'C-c'B)+a'\ (cB-bC)]\ \alpha=$$
$$=D\ (bc'-cb')+m\ (b'C-c'B)+n\ (cB-bC);$$

это уравнение легко преобразуем в следующее:

$$AD=\alpha\Delta+a\ (nF-mG)+a'\ (mF-nE).$$

Подобным же образом исключение величин α, γ или α, β из тех же уравнений дает:

$$BD=\beta\Delta+b\ (nF-mG)+b'\ (mF-nE),$$
$$CD=\gamma\Delta+c\ (nF-mG)+c'\ (mF-nE).$$

Умножая эти три уравнения на α'', β'', γ'' и складывая, получаем

$$DD''=(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')\ \Delta+m''\ (nF-mG)+n''\ (mF-nE). \quad (10)$$

Равным образом, если рассматривать уравнения (2), (5), (8), получаем

$$AD'=\alpha'\Delta+a\ (n'F-m'G)+a'\ (m'F-n'E),$$
$$BD'=\beta'\Delta+b\ (n'F-m'G)+b'\ (m'F-n'E),$$
$$CD'=\gamma'\Delta+c\ (n'F-m'G)+c'\ (m'F-n'E);$$

если эти уравнения умножить на α', β', γ', то сложение их даст

$$D'^2=(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\ \Delta+m'\ (n'F-m'G)+n'\ (m'F-n'E).$$

При сопоставлении этого уравнения с уравнением (10) получаем

$$DD''-D'^2=(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2)\Delta+$$
$$+E\ (n'^2-nn'')+F\ (nm''-2m'n'+mn'')+G\ (m'^2-mm'').$$

Но очевидно, что

$$\frac{dE}{dp}=2m,\ \frac{dE}{dq}=2m',\ \frac{dF}{dp}=m'+n,\ \frac{dF}{dq}=m''+n',\ \frac{dG}{dp}=2n',\ \frac{dG}{dq}=2n'',$$

или

$$m=\frac{1}{2}\frac{dE}{dp},\qquad m'=\frac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad m''=\frac{dF}{dq}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$
$$n=\frac{dF}{dp}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad n'=\frac{1}{2}\frac{dG}{dp},\qquad n''=\frac{1}{2}\frac{dG}{dq}.$$

Далее, легко заключить, что

$$\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2=\frac{dn}{dq}-\frac{dn'}{dp}=\frac{dm''}{dp}-\frac{dm'}{dq}=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{d^2E}{dq^2}+\frac{d^2F}{dp\,dq}-\frac{1}{2}\frac{d^2G}{dp^2}.$$

Если же эти выражения мы подставим в формулу для меры кривизны, выведенную в конце предыдущего параграфа, то придем к сле-

дующей формуле, составленной из одних величин E, F, G и их частных производных первого и второго порядка:

$$4(EG-F^2)^2\,k = E\left[\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right] +$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp}\right) +$$
$$+ G\left[\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right] -$$
$$- 2\left(EG-F^2\right)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dp\,dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right),$$

12.

Так как вообще имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2,$$

то ясно, что $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$ есть общее выражение линейного элемента на поверхности. Итак, исследование, изложенное в предыдущем параграфе, показывает, что для нахождения меры кривизны не нужны конечные формулы, выражающие координаты x, y, z, как функции переменных p, q; но что достаточно иметь общее выражение величины любого линейного элемента. Рассмотрим некоторые приложения этой весьма важной теоремы.

Предположим, что наша кривая поверхность может быть развернута на другой кривой или плоской поверхности так, что любой точке первой поверхности, определяемой координатами x, y, z, отвечает определенная точка второй поверхности, координаты которой x', y', z'. Тогда, очевидно, x', y', z' могут рассматриваться, как функции переменных p, q, отчего для элемента $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ получается выражение

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2},$$

где E', F', G' означают некоторые функции от p, q. Но самое наименование *развертывания* одной поверхности на другой указывает, что соответственные элементы обеих поверхностей должны быть равны между собой, и поэтому получаем тождество

$$E = E', \qquad F = F', \qquad G = G'.$$

Итак, формула предыдущего параграфа приводит к замечательной теореме:

Теорема. *Если кривая поверхность будет развернута на любой другой поверхности, то при этом мера кривизны в отдельных точках останется неизменной.*

Очевидно также, что *любая конечная часть кривой поверхности после развертывания на другой поверхности удержит ту же полную кривизну.*

Частный случай, которым до сих пор геометры (математики) ограничивали свои исследования, составляют поверхности, развертывающиеся на плоскости. Из нашей теории следует, что мера кривизны таких поверхностей в любой точке равна нулю, поэтому, если их уравнения изображаются по третьему способу, то во всех точках

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = 0;$$

этот критерий, хотя и давно известен, однако по большей части, по крайней мере на наш взгляд, доказывается не с желательной строгостью.

13.

То, что мы изложили в предыдущем параграфе, имеет связь с особым способом рассматривания поверхностей и заслуживает особого внимания геометров. А именно, когда поверхность рассматривается не как предел тела (объем), а как само тело, одно измерение которого принимается исчезающим (бесконечно малым), гибкое, но нерастяжимое, то свойства поверхности зависят частью от формы, в которую она приведена и в которой изучается, частью независимые и остаются неизменными, в какую бы форму она не сгибалась. К этим последним свойствам, открывающим для геометрии новое поле деятельности, должны быть отнесены мера кривизны и полная кривизна в том смысле, в каком эти выражения приняты нами. Сюда же относится учение о геодезических линиях и о многом другом, о чем мы будем говорить впоследствии. При таком способе рассмотрения плоскость и поверхности, развертывающиеся на плоскости, например цилиндрическая, коническая и т. д., рассматриваются как существенно тождественные, и наилучший способ для характеристики таким образом исследуемой поверхности всегда опирается на формулу

$$\sqrt{Ea p^2+2Fdpdq+Gdq^2},$$

выражающую связь элемента поверхности с двумя переменными p, q. Но прежде чем развивать этот предмет далее, следует изложить начало теории геодезических линий на данной кривой поверхности.

14.

Свойства кривой линии в пространстве обыкновенно определяют так, что координаты x, y, z, отвечающие отдельным ее точкам, выражаются в виде функций от одной переменной, которую обозначим через w. Длина такой линии от произвольной начальной точки до точки, координаты которой суть x, y, z, выражается интегралом

$$\int dw \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Если положим, что кривая линия претерпевает бесконечно малое изменение, так что координаты отдельных точек получают вариации δx, δy, δz, то вариация всей длины

$$= \int \frac{dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

это выражение можно преобразовать так

$$\frac{dx\cdot\delta x+dy\cdot\delta y+dz\cdot\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} -$$

$$-\int\left(\delta x\cdot d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\delta y\cdot d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\right.$$

$$\left.+\delta z\cdot d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right).$$

В этом случае, когда линия — кратчайшая между своими крайними точками (т. е. геодезическая линия), известно, что выражение, которое здесь находится под знаком интеграла, должно равняться нулю. Так как линия должна лежать на данной поверхности, для которой имеет место уравнение $Pdx+Qdy+Rdz=0$, то также и вариации δx, δy, δz должны удовлетворять уравнению $P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$, откуда известным путем легко вывести, что дифференциалы

$$d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

соответственно должны быть пропорциональны P, Q, R. Пусть dr — элемент кривой линии; λ — точка на шаровой поверхности, изображающая направление этого элемента; L — точка на шаровой поверхности, изображающая направление нормали к кривой поверхности; наконец, ξ, η, ζ. — координаты точки λ и X, Y, Z — координаты точки L относительно центра шара. Тогда будем иметь:

$$dx = \xi dr, \qquad dy = \eta dr, \qquad dz = \zeta dr,$$

откуда находим, что написанные выше дифференциалы равны $d\xi, d\eta, d\zeta$ И так как величины P, Q, R пропорциональны X, Y, Z, то свойство геодезических линий выражается уравнениями:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}.$$

Впрочем легко видеть, что $\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$ равен дуге на шаровой поверхности, измеряющей угол между направлениями касательных в начале и конце элемента dr, которая равна $\frac{dr}{\rho}$, если ρ изображает радиус кривизны геодезической линии в этой точке; отсюда имеем

$$\rho d\xi = Xdr, \qquad \rho d\eta = Ydr, \qquad \rho d\zeta = Zdr.$$

15.

Положим, что на кривой поверхности от данной точки A исходит бесчисленное множество геодезических линий, которые мы будем различать по углу, образованному каждой из этих линий с первым элементом какой-либо линии этого семейства, принятой за начальную. Пусть φ — этот угол или общая функция его, r — длина такой геодезической линии от точки A до точки, координаты которой x, y, z. Так как определенным значениям переменных r, φ отвечают определенные точки на поверхности, то координаты x, y, z, могут рассматриваться как функции r, φ. Обозначения λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z удержим в том же смысле ,в каком они были приняты в предыдущем параграфе, относя только их к какой угодно точке какой-либо из геодезических линий.

Все геодезические линии длиной r оканчиваются на некоторой другой линии, длину которой, отсчитанную от произвольного начала, обозначим через v. Итак, v может рассматриваться как функция переменных r, φ. Если через λ' обозначить точку на шаровой поверхности, соответствующую направлению элемента dv а через ξ', η', ζ' — координаты этой точки относительно центра шара, то получим

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi'\frac{dv}{d\varphi}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \eta'\frac{dv}{d\varphi}, \qquad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta'\frac{dv}{d\varphi}.$$

Отсюда и на основании формул:

$$\frac{dx}{dr}=\xi, \qquad \frac{dy}{dr}=\eta, \qquad \frac{dz}{dr}=\zeta^*$$

следует, что

$$\frac{dx}{dr}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{dy}{dr}\frac{dy}{d\varphi}+\frac{dz}{dr}\frac{dz}{d\varphi}=\left(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'\right)\frac{dv}{d\varphi}=\cos\lambda\lambda'\cdot\frac{dv}{d\varphi}.$$

Обозначим первую часть этого уравнения, которая есть функция от r и φ, через S; дифференцирование ее по r даст

$$\frac{dS}{dr}=\frac{d^2x}{dr^2}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{d^2y}{dr^2}\frac{dy}{d\varphi}+\frac{d^2z}{dr^2}\frac{dz}{d\varphi}+\frac{1}{2}\frac{d\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]}{d\varphi}=$$

$$=\frac{d\xi}{dr}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{d\eta}{dr}\frac{dy}{d\varphi}+\frac{d\zeta}{dr}\frac{dz}{d\varphi}+\frac{1}{2}\frac{d\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)}{d\varphi}.$$

Но $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, поэтому его дифференциал равен нулю, и по предыдущему параграфу имеем, если и здесь ρ означает радиус кривизны линии r:

$$\frac{d\xi}{dr}=\frac{X}{\rho}, \qquad \frac{d\eta}{dr}=\frac{Y}{\rho}, \qquad \frac{d\zeta}{dr}=\frac{Z}{\rho}.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{dS}{dr}=\frac{1}{\rho}\left(X\xi'+Y\eta'+Z\zeta'\right)\frac{dv}{d\varphi}=\frac{1}{\rho}\cos L\lambda'\cdot\frac{dv}{d\varphi}=0,$$

так как, очевидно λ' лежит на большом круге, полюс которого L. Итак, отсюда заключаем, что S не зависит от r, и поэтому есть функция одного φ, но для $r=0$, очевидно, $v=0$, а потому $\frac{dv}{d\varphi}=0$ и $S=0$ независимо от φ.

---

* Величины x, y, z, рассматриваемые как функции от двух независимых переменных r и φ и $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dz}{dr}$, означают здесь частные производные, взятые по r, а $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dz}{d\varphi}$ — частные производные, взятые по φ. При φ постоянном x, y, z означают координаты точки на геодезической линии, а потому

$$\frac{dx}{dr}, \qquad \frac{dy}{dr}, \qquad \frac{dz}{dr}$$

взяты из формул

$$dx=\xi dr, \qquad dy=\eta dr, \qquad dz=\zeta dr,$$

относящихся к этой линии; при r — постоянном x, y, z означают координаты точки на линии, отсекающей постоянную длину на всех геодезических линиях, и

$$\frac{dx}{d\varphi}, \qquad \frac{dy}{d\varphi}, \qquad \frac{dz}{d\varphi}$$

должны быть взяты из формул:

$$dx=\xi' dv, \qquad dy=\eta' dv, \qquad dz=\zeta' dv,$$

относящихся к этой секущей. **(Прим. ред.).**

Следовательно, всегда должно иметь место $S = 0$ и $\cos \lambda\lambda' = 0$, т. е. $\lambda\lambda' = 90°$. Отсюда следует теорема.

Теорема. *Если на кривой поверхности от некоторой начальной точки провести бесчисленное множество геодезических линий равной длины, то кривая, соединяющая их концы, к каждой из них в отдельности ортогональна.*

Мы считали стоящим труда вывести эту теорему из основного свойства геодезических линий; впрочем, справедливость ее может быть понятна даже без вычислений следующими рассуждениями. Пусть AB, AB'—две геодезические линии одной и той же длины, образующие в вершине A бесконечно малый угол; положим, что оба угла элемента BB' с линиями BA, $B'A$ отличаются на конечную величину от прямого угла, откуда по закону непрерывности один больше, другой меньше прямого. Положим, что угол при B равен $90° - \omega$; возьмем на линии BA точку C так, чтобы $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$; отсюда, так как бесконечно малый треугольник $BB'C$ можно рассматривать как плоский, $CB' = BA \cos \omega$ и, следовательно,

$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega) = AB' - BC(1 - \cos \omega),$$

т. е. переход от точки A к B' через точку C короче кратчайшей линии, что невозможно.

16.

К теореме предыдущего параграфа присоединим еще следующую, которую выражаем так:

Если на кривой поверхности находится какая-нибудь линия, от отдельных точек которой направляются под прямыми углами в одну и ту же сторону бесчисленные геодезические линии равной длины, то кривая, соединяющая их другие концы, пересекает каждую из них под прямым углом.

Для доказательства не надо ничего изменять в предыдущем анализе, кроме того, что φ должно обозначать длину *данной* кривой, отсчитанную от произвольной точки, или, если угодно, функцию от этой длины. Таким образом, все рассуждения и для этого случая останутся справедливыми, но справедливость уравнения $S = 0$ при $r = 0$ теперь содержится в самом условии. Впрочем, эта новая теорема более общая, чем предыдущая, потому что та может считаться заключенной в ней, если принять за данную линию бесконечно малый круг, описанный вокруг центра A. Наконец, напоминаем, что и здесь геометрические соображения могут заменять место аналитических, но мы не останавливаемся на них, так как они довольно просты.

17.

Возвратимся к формуле $\sqrt{E\,dp^2 + 2\,Fdpdq + Gdq^2}$, выражающей вообще величину линейного элемента на кривой поверхности, и прежде всего рассмотрим геометрическое значение коэффициентов E, F, G. Уже в § 5 мы упоминали, что на кривой поверхности можно различать две системы линий: на одной, для каждой линии только p — переменная, а q — постоянная; для другой только q — переменная, а p — постоянная. Любая точка поверхности может рассматриваться как пересечение линии первой системы с линией второй, тогда как длина элемента первой линии, прилежащего к этой точке и соответствующего изменению dp, будет равна $\sqrt{E}\,dp$, а длина элемента второй линии, соответствующего изменению dq, равна $\sqrt{G}\,dq$; наконец, обозначая через ω угол между этими элементами, легко увидеть, что $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Площадь же эле-

ментарного параллелограмма на кривой поверхности между двумя линиями первой системы, которым соответствуют q и $q+dq$, и двумя линиями второй системы, которым соответствуют p и $p+dp$, будет равна $\sqrt{EG-F^2}\,dp\,dq$.

Любая линия на кривой поверхности, не принадлежащая ни к одной из этих систем, получится, если p и q считать функциями некоторой новой переменной, или одну из них за функцию от другой. Пусть s — длина такой кривой, отсчитанная от произвольного начала по какому угодно направлению и принимаемая за положительную. Обозначим через Θ угол, образованный элементом $ds=\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$ с линией первой системы, проведенной через начало элемента, и притом, чтобы не оставалось никакой двусмысленности, положим, что этот угол всегда отсчитывается от той ветви этой линии, по которой значения p растут, и принимается положительным в ту сторону, в которую растут значения q. Понимая это так, легко видеть, что

$$\cos\Theta ds=\sqrt{E}\,dp+\sqrt{G}\cos\omega\,dq=\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\Theta\,ds=\sqrt{G}\,\sin\omega\,dq=\frac{\sqrt{EG-F^2}\,dq}{\sqrt{E}}.$$

18.

Посмотрим, каковы условия, чтобы эта линия была геодезической. Так как длина s выражается интегралом

$$s=\int\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2},$$

то условие минимума требует, чтобы вариация этого интеграла, происходящая от бесконечно малого изменения вида этой линии, равнялась нулю. Вычисление в этом случае удобнее вести, если рассматривать p как функцию от q. При этом условии, если вариация обозначается через δ, получаем

$$\delta s=\int\frac{\left(\frac{dE}{dp}dp^2+\frac{2dF}{dp}dp\,dq+\frac{dG}{dp}dq^2\right)\delta p+\left(2Edp+2Fdq\right)d\delta p}{2ds}=$$

$$=\frac{Edp+Fdq}{ds}\delta p+\int\delta p\cdot\left\{\frac{\frac{dE}{dp}dp^2+\frac{2dF}{dp}dpdq+\frac{dG}{dp}dq^2}{2ds}-d\frac{Edp+Fdq}{ds}\right\}.$$

Известно, что подынтегральная величина должна равняться нулю независимо от δp.

Таким образом,

$$\frac{dE}{dp}dp^2+\frac{2dF}{dp}dpdq+\frac{dG}{dp}dq^2=2dsd\frac{Edp+Fdq}{ds}=2dsd\sqrt{E}\cdot\cos\Theta=$$

$$=\frac{dsdE\cdot\cos\Theta}{\sqrt{E}}-2ds\,d\Theta\cdot\sqrt{E}\sin\Theta=$$

$$=\frac{(Edp+Fdq)\,dE}{E}-2\sqrt{EG-F^2}\,dqd\Theta=$$

$$=\frac{Edp+Fdq}{E}\left(\frac{dE}{dp}dp+\frac{dE}{dq}dq\right)-2\sqrt{EG-F^2}\,dqd\Theta.$$

Итак, отсюда получаем условное уравнение для геодезической линии

$$\sqrt{EG-F^2}\,d\Theta=\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{dE}{dp}dp+\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{dE}{dq}dq+\frac{1}{2}\frac{dE}{dq}dp-$$
$$-\frac{dF}{dp}dp-\frac{1}{2}\frac{dG}{dp}dq,$$

которое можно написать еще так:

$$\sqrt{EG-F^2}\;d\Theta=\frac{1F}{2E}dE+\frac{1}{2}\frac{dE}{dq}dp-\frac{dF}{dp}dp-\frac{1dG}{2dp}\;dq.$$

Впрочем, при помощи уравнения

$$\operatorname{ctg}\Theta=\frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{dp}{dq}+\frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}$$

можно из нашего уравнения исключить угол Θ, таким образом, получится дифференциальное уравнение второго порядка между p и q, однако оно будет сложнее и для приложений окажется менее полезным, чем предыдущее.

19.

Общие формулы, выведенные нами для меры кривизны и для изменения направления геодезических линий в § 11 и 18, становятся гораздо проще, если величины p, q подобраны так, что линии первой системы повсюду пересекают линии второй системы под прямым углом, т. е. так, что вообще имеем $\omega = 90^\circ$ или $F = 0$. Тогда, очевидно, для меры кривизны получим

$$4E^2G^2k=E\frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq}+E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2+G\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp}+G\left(\frac{dE}{dq}\right)^2-2EG\left(\frac{d^2E}{dq^2}+\frac{d^2G}{dp^2}\right),$$

и для изменения угла Θ

$$\sqrt{EG}\,d\Theta=\frac{1}{2}\frac{dE}{dq}dp-\frac{1}{2}\frac{dG}{dp}dq.$$

Между различными случаями выполнения этого условия ортогональности первое место занимает тот, при котором все линии одной из систем, например первой, суть геодезические. Тут, при постоянном q, угол Θ равен нулю, откуда только что написанное уравнение изменения угла Θ показывает, что $\frac{dE}{dq}$ должно быть равно нулю, или, что коэффициент E не зависит от q, т. е. что E должно быть или постоянным или функцией от одного p. Самое простое принять за p длину какой-либо линии первой системы, отсчитанную от этой точки, притом, если все линии первой системы сходятся в одной точке, или, если нет общей точки пересечения, от любой из линий второй системы. Принимая это, ясно, что p и q означают то же, что в § 15 и 16 мы обозначали через r и φ и что $E = 1$. Тогда две предыдущие формулы примут вид:

$$4G^2k=\left(\frac{dG}{dp}\right)^2-2G\frac{d^2G}{dp^2},$$

$$\sqrt{G}d\Theta=-\frac{1}{2}\frac{dG}{dp}\;dq,$$

или, положив $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}, \quad d\Theta = -\frac{dm}{dp}\,dq.$$

Говоря вообще, m — функция от p, q и mdq есть выражение элемента некоторой линии второй системы. В частном же случае, когда все линии p выходят из одной и той же точки, очевидно, что для $p=0$ должно и $m = 0$; далее, если в этом случае за q примем угол, образованный первым элементом любой линии первой системы и элементом произвольно выбранной некоторой из них, заметим, что для бесконечно малого значения p элемент линии второй системы (которая может рассматриваться как круг радиуса p) равен pdq, то для бесконечно малого значения p, $m=p$, и, следовательно, для $p=0$, и $m=0$ и $\frac{dm}{dp} = 1$.

20.

Остановимся еще на том же предположении, что p означает неопределенную длину геодезической линии, проведенной от определенной точки A к любой точке поверхности, и q — угол, образованный первым элементом этой линии и первым элементом какой-нибудь другой геодезической линии, исходящей из точки A. Пусть B — определенная точка на этой линии, для которой $q=0$, и C — другая определенная точка поверхности, для которой значение q обозначим просто через A. Положим, что точки B, C соединены геодезической линией неопределенной длины, отсчитанной от точки B, и обозначим ее, как в § 18, через s, и так же, как и там, обозначим через Θ угол, образованный любым элементом ds с элементом dp; наконец, пусть Θ^0, Θ' — значения угла Θ в точках B, C. Итак, имеем на кривой поверхности треугольник, образованный геодезическими линиями, углы которого при B и C, обозначенные просто этими же буквами, равны: один — дополнению угла Θ^0 до 180°, другой — самому углу Θ'. Но так как наш анализ легко указывает читателю, что все углы принимаются выраженными не в градусах, а в числах, так что угол 57°17′45″, которому отвечает дуга, равная радиусу, принимается за единицу, то следует положить, обозначая через 2π окружность круга, что

$$\Theta^0 = \pi - B, \quad \Theta' = C.$$

Найдем теперь полную кривизну этого треугольника, равную $\int k\,d\sigma$, где $d\sigma$ означает элемент поверхности треугольника; поэтому, так как этот элемент выражается через $m\,dp\,dq$, надо для всей поверхности треугольника вычислить интеграл $\int\int \kappa m\,dp\,dq$. Начнём с интегрирования по p, которое, вследствие того, что $\kappa = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2}$, дает $dq\left(\text{const} - \frac{dm}{dp}\right)$ для полной кривизны площади, лежащей между двумя линиями первой системы, которым отвечают неопределенные значения второй q, $q+dq$; так как эта кривизна должна равняться нулю для $p=0$, то постоянная величина, введенная интегрированием, должна равняться значению $\frac{dm}{dp}$ при $p=0$, т. е. единице. Итак, имеем $dq\left(1 - \frac{dm}{dp}\right)$, где для $\frac{dm}{dp}$ следует принять значение, отвечающее концу этой площади на линии CB. На этой же линии, по предыдущему параграфу, $\frac{dm}{dp}dq = -d\Theta$, отчего наше выражение примет вид $dq + d\Theta$. При втором интегрировании в пределах

от $q=0$ до $q=A$ получаем полную кривизну треугольника, равную $A+\Theta'-\Theta^0=A+B+C-\pi$.

Полная кривизна равна площади той части шаровой поверхности, взятой со знаком плюс или минус, которая соответствует треугольнику, смотря по тому, будет ли поверхность, на которой лежит треугольник, вогнуто-вогнутая или вогнуто-выпуклая; за единицу площади надо принять квадрат, сторона которого равна единице (радиусу шара); при этом условии вся поверхность шара равна 4π Итак, часть шаровой поверхности, соответствующая треугольнику, относится к полной поверхности шара, как $\pm\ (A+B+C-\pi)$ к 4π. Эта теорема, которая, если мы не обманываемся, должна быть отнесена к изящнейшим в теории кривых поверхностей, может быть выражена следующим образом:

Избыток над 180° суммы углов треугольника, образованного геодезическими линиями на вогнуто-вогнутой кривой поверхности, или недостаток до 180° суммы углов треугольника из геодезических линий на вогнуто-выпуклой поверхности измеряется площадью той части шаровой поверхности, которая соответствует данному треугольнику, по направлениям нормалей, если полная поверхность (шара) принята равной 720 градусам.

Общее, в любом многоугольнике с n сторонами, из которых каждая есть геодезическая линия, избыток суммы углов над $(2n-4)$ прямых, или недостаток до $(2n-4)$ прямых (смотря по знаку кривизны поверхности) равняется площади соответственного многоугольника на шаровой поверхности, если вся поверхность шара принята равной 720°, что легко вывести с помощью предыдущей теоремы разделением многоугольника на треугольники.

21.

Придадим снова буквам p, q, E, F, G, ω те общие значения, которые они имели раньше, и положим, что свойство кривой поверхности определяется, кроме того, подобным же образом при помощи двух других переменных p', q', когда неопределенный линейный элемент выражается

$$\sqrt{E'dp'^2+2F'qp'dq'+G'dq'^2}.$$

Тогда любой точке поверхности, определенной данными значениями переменных p, q, будут соответствовать определенные значения переменных p', q', поэтому последние будут функциями от p, q; дифференцированием их получим:

$$dp'=\alpha dp+\beta dq,$$
$$dq'=\gamma dp+\delta dq.$$

Определим геометрическое значение коэффициентов α, β, γ, δ.

Можем рассматривать на кривой поверхности *четыре* системы линий, для которых соответственно q, p, q', p' — постоянные. Если мы предположим, что через данную точку, которой отвечают значения переменных p, q, p', q', проведены четыре линии, принадлежащие каждая к одной из этих систем, то элементы их, соответствующие положительным приращениям dp, dq, dp', dq', равны:

$$\sqrt{E}dp,\quad \sqrt{G}dq,\quad \sqrt{E'}dp',\quad \sqrt{G'}dq'.$$

Обозначим через M, N, M', N' углы, образованные направлениями этих элементов с неподвижным произвольным направлением, отсчиты-

вая их в том направлении, в каком вторая линия лежит относительно первой, чтобы sin $(N—M)$ была величиной положительной; расположенными в том же смысле представим (что возможно) и четвертую относительно третьей так, что и sin $(N'—M')$ — величина положительная. Если, установив это, рассмотрим другую точку, бесконечно близкую к первой и соответствующую значениям переменных

$$p+dp,\quad q+dq,\quad p'+dp',\quad q'+dq',$$

то при небольшом внимании заметим, что вообще, независимо от значений приращений dp, dq, dp', dq',

$$\sqrt{E}\,dp\cdot\sin M+\sqrt{G}\,dq\cdot\sin N=\sqrt{E'}dp'\cdot\sin M'+\sqrt{G'}dq'\cdot\sin N',$$

так как оба эти выражения не что иное, как расстояние новой точки от линии, от которой отсчитываются направления. Но на основании приведенного выше замечания мы имеем $N—M=\omega$; по аналогии положим $N'—M'=\omega'$ и сверх того $N—M'=\psi$. Тогда только что найденное уравнение может быть выражено в виде

$$\sqrt{E}dp\cdot\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}dq\cdot\sin(M'+\psi)=$$
$$=\sqrt{E'}dp'\cdot\sin M'+\sqrt{G'}dq'\cdot\sin(M'+\omega')$$

или

$$\sqrt{E}dp\cdot\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}dq\cdot\sin(N'-\omega'+\psi)=$$
$$=\sqrt{E'}dp'\cdot\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}dq'\cdot\sin N'.$$

Так как, очевидно, уравнение не должно зависеть от начального направления, то его можно выбрать произвольно. Положим во второй формуле $N'=0$ или в первой $M'=0$, тогда найдем уравнения:

$$\sqrt{E'}\sin\omega'dp'=\sqrt{E}\sin(\omega+\omega'-\psi)\,dp+\sqrt{G}\sin(\omega'-\psi)\,dq,$$
$$\sqrt{G'}\sin\omega'dq'=\sqrt{E}\sin(\psi-\omega)\,dp+\sqrt{G}\sin\psi\,dq,$$

так как эти уравнения должны быть тождественны с уравнениями

$$dp'=\alpha dp+\beta dq,$$
$$dq'=\gamma dp+\delta dq,$$

то они дадут следующие выражения для коэффициентов α, β, γ, δ:

$$\alpha=\sqrt{\frac{E}{E'}}\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'},\qquad \beta=\sqrt{\frac{G}{E'}}\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'},$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{E}{G'}}\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'},\qquad \delta=\sqrt{\frac{G}{G'}}\frac{\sin\psi}{\sin\omega'},$$

Сюда надо присоединить уравнения:

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}},\ \cos\omega'=\frac{F'}{\sqrt{E'G'}},\ \sin\omega=\sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}},\ \sin\omega'=\sqrt{\frac{E'G'-F'^2}{E'G'}},$$

вследствие которых четыре предыдущих уравнения могут быть выражены еще так:

$$\alpha\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{EG}\sin(\omega+\omega'-\psi),$$
$$\beta\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{GG'}\sin(\omega'-\psi),$$
$$\gamma\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{EE'}\sin(\psi-\omega),$$
$$\delta\sqrt{E'G'-F'^2}=\sqrt{GE'}\sin\psi.$$

Так как при подстановке $dp' = \alpha dp + \beta dq$, $dq' = \gamma dp + \delta dq$ трехчлен $F'dp'^2 + 2F'dp'dq'^2 + G'dq'^2$ должен перейти в $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$, то мы легко получим

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)\ (\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

и так как, наоборот, второй трехчлен обратно должен перейти в первый через подстановки:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\ dp = \delta dp' - \beta dq',\ (\alpha\delta - \beta\gamma)\ dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

то мы находим:

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} E',$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = -\frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} F',$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} G'.$$

22.

От вполне общего исследования предыдущего параграфа переходим к весьма многообъемлющему приложению, в котором, оставив за p и q общее их значение, за p' и q' принимаем величины, обозначенные в § 15 через r и φ; этими обозначениями мы будем пользоваться и здесь, так что для любой точки поверхности r — есть наименьшее расстояние от определенной точки, а φ — угол при этой точке между первым элементом r и некоторым неподвижным направлением. Таким образом, мы имеем $E'=1$, $F'=0$, $\omega' = 90°$; кроме того, положим $\sqrt{G'} = m$ так что любой линейный элемент равен $\sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$. Отсюда четыре уравнения предыдущего параграфа, выведенные для определения α, β, γ, δ дадут:

$$\sqrt{E}\cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp}, \tag{1}$$

$$\sqrt{G}\cos\psi = \frac{dr}{dq}, \tag{2}$$

$$\sqrt{E}\sin(\psi - \omega) = m\frac{d\varphi}{dp}, \tag{3}$$

$$\sqrt{G}\sin\psi = m\frac{d\varphi}{dq}. \tag{4}$$

Последнее же и предпоследнее уравнения предыдущего параграфа дадут следующие:

$$EG - F^2 = E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F\frac{dr}{dp}\frac{dr}{dq} + G\left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \tag{5}$$

$$\left(E\frac{dr}{dq} - F\frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dq} = \left(F\frac{dr}{dq} - G\frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dp}. \tag{6}$$

Из этих уравнений надо определить величины r, φ, ψ и (если понадобится) m через p и q; очевидно, интегрирование уравнения (5) даст r; когда оно будет найдено, интегрирование уравнения (6) даст φ, и

одно из двух уравнений (1), (2) даст ψ; наконец, m определится одним из двух уравнений (3), (4).

Общее интегрирование уравнений (5), (6) должно ввести две произвольные функции, значение которых легко поймем, если рассудим, что эти уравнения не ограничиваются тем случаем, который мы здесь рассматриваем, но одинаково имеют место и тогда, когда r и φ принимаются в более общем смысле § 16, так что r есть длина геодезической линии, проведенной нормально к определенной, но произвольной линии, а φ — произвольная функция длины той части линии, которая заключается между неопределенной геодезической линией и произвольно выбранной точкой. Общее решение должно заключать все это во всей общности, и произвольные функции тогда только определятся, когда мы назначим ту произвольную линию и ту функцию от ее части, которую φ должно изображать. Для нашего случая можно взять бесконечно малый круг, имеющий центр в той точке, от которой отсчитываются расстояния r, а φ будет означать части этого круга, отделяемые радиусами; отсюда легко понять, что уравнения (5), (6) для нашего случая вполне достаточны, лишь бы то, что остаётся неопределенным, могло быть определено под условием надлежащего выражения r и φ в начальной точке и точках, бесконечно близких к ней.

Что же касается самого интегрирования уравнений (5), (6), то известно, что оно может быть приведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, но по большей части они оказываются столь сложными, что от них получается мало выгоды. Напротив, разложение в ряды, достаточное для практического употребления, всякий раз, когда дело идет о небольших частях поверхности, не подвержено никаким затруднениям, и таким образом, приведенные формулы открывают обильный источник для решения многих очень важных вопросов. Здесь уместно привести один пример для уяснения сущности метода.

23.

Рассмотрим тот случай, когда все линии, для которых p постоянное, суть линии геодезические, прямоугольно пересекающие линию, для которой $\varphi = 0$, и которую мы можем рассматривать как ось абсцисс. Пусть A — точка, для которой $r=0$; D — неопределенная точка на линии абсцисс, $AD=p$; B — неопределенная точка на геодезической линии, нормали к AD в D и $BD=q$, так что p может рассматриваться как абсцисса, q — как ордината точки B; положительные абсциссы мы отсчитываем на той ветви линии абсцисс, на которой $\varphi = 0$, причем r всегда рассматриваем, как положительную величину; положительные ординаты будем считать в ту сторону, в которую φ изменяется от 0 до 180°.

Вследствие теоремы § 16 имеем $\omega = 90°$, $F=0$ и $G=1$; кроме того, положим $\sqrt{E} = n$. Итак, n есть функция от p и q, притом такая, которая при $q=0$ равняется единице. Приложение формулы, выведенной в § 18, к нашему случаю показывает, что на *всякой* геодезической линии должно быть $d\Theta = -\frac{dn}{dp}dp$, где Θ означает угол между элементом этой линии и элементом той линии, для которой q — постоянное; так как сама линия абсцисс здесь есть геодезическая линия и для нее повсюду $\Theta = 0$, то ясно, что для $q=0$ повсюду должно быть $\frac{dn}{dq} = 0$. Итак, отсюда находим, что если разложить в ряд n по возрастающим степеням q, то он должен иметь вид:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \ldots,$$

где f, g, h и т. д. — функции от p; положим, что

$$f = f^0 + f'p + f''p^2 + \ldots,$$
$$g = g^0 + g'p + g''p^2 + \ldots,$$
$$h = h^0 + h'p + h''p^2 + \ldots,$$

и будем иметь:

$$n = 1 + f^0q^2 + f'pq^2 + f''p^2q^2 + \ldots. +$$
$$+ g^0q^3 + g'pq^3 + \ldots. +$$
$$+ h^0q^4 + \ldots. +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

и т. д.

24.

Уравнения § 22 дают для нашего случая:

$$n \sin \psi = \frac{dr}{dp}, \quad \cos \psi = \frac{dr}{dq}, \quad -n \cos \psi = m\frac{d\varphi}{dp}, \quad \sin \psi = m\frac{d\varphi}{dq},$$

$$n^2 = n^2\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \quad n^2\frac{dr}{dq}\frac{d\varphi}{dq} + \frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp} = 0.$$

С помощью этих уравнений, из которых пятое и шестое уже заключаются в остальных, могут быть разложены в ряды r, φ, ψ, m или какие угодно функции этих величин. Приведем здесь наиболее замечательные из этих рядов.

Так как для бесконечно малых значений p, q должно быть $r^2 = p^2 + q^2$, то ряд для разложения r^2 начинается членами $p^2 + q^2$; члены высших порядков получим по методу неопределенных коэффициентов*[4], пользуясь уравнением

$$\left(\frac{1}{n}\frac{dr^2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dr^2}{dq}\right)^2 = 4r^2,$$

а именно:

[1] $$r^2 = p^2 + \frac{2}{3}f^0p^2q^2 + \frac{1}{2}f'p^3q^2 + \left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^{0^2}\right)p^4q^2 + \ldots +$$
$$+ q^2 \qquad + \frac{1}{2}g^0p^2q^3 + \frac{2}{5}g'p^3q^3 +$$
$$+ \left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^{0^2}\right)p^2q^4.$$

Затем мы имеем при помощи формулы $r \sin \psi = \frac{1}{2n}\frac{dr^2}{dp}$:

[2] $$r \sin \psi = p - \frac{1}{3}f^0pq^2 - \frac{1}{4}f'p^2q^2 - \left(\frac{1}{5}f'' + \frac{8}{45}f^{0^2}\right)p^3q^2 - \ldots -$$
$$- \frac{1}{2}g^0pq^3 - \frac{2}{5}g'p^2q^3 -$$
$$- \left(\frac{3}{5}h^0 - \frac{8}{45}f^{0^2}\right)pq^4$$

* Мы считаем излишним выписывать здесь вычисление, которое легко может быть упрощено с помощью некоторого искусства. **(Прим. автора).**

и вследствие формулы $r\cos\psi=\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dq}$

[3] $$r\cos\psi=q+\frac{2}{3}f^0p^2q+\frac{1}{2}f'p^3q+\left(\frac{2}{5}f''-\frac{4}{45}f^{0^2}\right)p^4q+\ldots+$$
$$+\frac{3}{4}\,g^0p^2q^2+\frac{3}{5}\,g'p^3q^2+$$
$$+\left(\frac{4}{5}h^0-\frac{14}{45}f^{0^2}\right)p^2q^3.$$

Одновременно определится и угол ψ. Далее, для вычисления угла φ изящнее разложить в ряд $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$, для чего послужат дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\frac{dr\cos\varphi}{dp}=n\cos\varphi\sin\psi-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dp},$$
$$\frac{dr\cos\varphi}{dq}=\cos\varphi\cos\psi-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dq},$$
$$\frac{dr\sin\varphi}{dp}=n\sin\varphi\sin\psi+r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dp},$$
$$\frac{dr\sin\varphi}{dq}=\sin\varphi\cos\psi+r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dq},$$
$$n\cos\psi\frac{d\psi}{dq}+\sin\psi\frac{d\varphi}{dp}=0,$$

комбинирование которых даёт:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\frac{dr\cos\varphi}{dp}+r\cos\psi\frac{dr\cos\varphi}{dq}=r\cos\varphi,$$
$$\frac{r\sin\psi}{n}\frac{dr\sin\varphi}{dp}+r\cos\psi\frac{dr\sin\varphi}{dq}=r\sin\varphi.$$

Отсюда легко разложить в ряды $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, первые члены которых, очевидно, должны равняться p и q, а именно:

[4] $$r\cos\varphi=p+\frac{2}{3}f^0pq^2+\frac{5}{12}f'p^2q^2+\left(\frac{3}{10}f''-\frac{8}{45}f^{0^2}\right)p^3q^2+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2}g^0pq^3+\frac{7}{20}g'p^2q^3+$$
$$+\left(\frac{2}{5}h^0-\frac{7}{45}f^{0^2}\right)pq^4,$$

[5] $$r\sin\varphi=q-\frac{1}{3}f^0p^2q-\frac{1}{6}f'p^3q-\left(\frac{1}{10}f''-\frac{7}{90}f^{0^2}\right)p^4q-\ldots-$$
$$-\frac{1}{4}g^0p^2q^2-\frac{3}{20}g'p^3q^2-$$
$$-\left(\frac{1}{5}h^0+\frac{13}{90}f^{0^2}\right)p^2q^3.$$

Комбинированием уравнений [2], [3], [4], [5] можно вывести ряд для $r^2\cos(\psi+\varphi)$, и отсюда, разделив на ряд [1], ряд для $\cos(\psi+\varphi)$; от этого же ряда можно перейти к ряду для самого угла $(\psi+\varphi)$. Однако изящнее получить его следующим образом.

Дифференцируя первое и второе из уравнений, приведенных в начале этого параграфа, получаем

$$\sin\psi\frac{dn}{dq}+n\cos\psi\frac{d\psi}{dq}+\sin\psi\frac{d\psi}{dp}=0,$$

комбинируя это выражение с выражением

$$n\cos\psi\frac{d\varphi}{dq}+\sin\psi\frac{d\varphi}{dp}=0,$$

находим:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\frac{dn}{dq}+\frac{r\sin\psi}{n}\frac{d(\psi+\varphi)}{dp}+r\cos\psi\frac{d(\psi+\varphi)}{dq}=0.$$

Прилагая к этому уравнению метод неопределенных коэффициентов, легко получить ряд для $(\psi+\varphi)$, если заметим, что первый член должен равняться $\frac{1}{2}\pi$, где за единицу принят радиус, и 2π означает окружность круга

[6] $$\psi+\varphi=\frac{1}{2}\pi-f^0pq-\frac{2}{3}f'p^2q-\left(\frac{1}{2}f''-\frac{1}{6}f^{0^2}\right)p^3q-\ldots-$$
$$-g^0pq^2-\frac{3}{4}g'p^2q^2-$$
$$-\left(h^0-\frac{1}{3}f^{0^2}\right)pq^3.$$

Нам кажется стоящим труда разложить в ряд также и площадь треугольника ABD. Для этого разложения послужит следующее условное уравнение, которое легко получается с помощью довольно простых геометрических соображений, и в котором S означает искомую площадь.

$$\frac{r\sin\psi}{n}\frac{dS}{dp}+r\cos\psi\frac{dS}{dq}=\frac{r\sin\psi}{n}\int ndq,*$$

где интеграл взят от $q=0$. Отсюда мы получаем по методу неопределен-

* Для вывода этой формулы, где S — площадь треугольника ABD, замечаем, что

$$S=\int_{p_0}^{p}dp\int_0^q npq,$$

где верхний предел первого интегрирования есть значение q, соответствующее линии AB, на которой φ — постоянное. Из уравнения $\varphi=C$, где φ — функция от p и q, и выводится значение q в виде функции от p; второе интегрирование ведется по p между пределами p_0 и p, соответствующими точками A и D. Отсюда имеем

$$dS=\frac{dS}{dp}+\frac{dS}{dq}dq=dp\int_0^q ndq, \tag{1}$$

где dp и dq связаны уравнением

$$\frac{d\varphi}{dp}dp+\frac{d\varphi}{dq}dq=0. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) имеем

$$\frac{dS}{dp}\frac{d\varphi}{dq}-\frac{dS}{dq}\frac{d\varphi}{dp}=\frac{d\varphi}{dq}\int_0^q ndq.$$

ных коэффициентов:

$$[7]\quad S=\frac{1}{2}pq-\frac{1}{12}f^0p^3q-\frac{1}{20}f'p^4q-\left(\frac{1}{30}f''-\frac{1}{60}f^{0^2}\right)p^5q-\ldots-$$
$$-\frac{1}{12}f^0pq^3-\frac{3}{40}g^0p^3q^2-\frac{1}{20}g'p^4q^2-$$
$$-\frac{7}{120}f'p^2q^3-\left(\frac{1}{15}h^0+\frac{2}{45}f''+\frac{1}{60}f^{0^2}\right)p^3q^3-$$
$$-\frac{1}{10}g^0pq^4-\frac{3}{40}g'p^2q^4-$$
$$-\left(\frac{1}{10}h^0-\frac{1}{30}f^{0^2}\right)pq^5.$$

25.

От формул предыдущего параграфа, относящихся к прямоугольному треугольнику, образованному геодезическими линиями, перейдем к общим. Пусть C — другая точка на той же геодезической линии DB, для которой, при прежнем p, буквы q', r' φ', ψ', S' означают то же, что q, r, φ, ψ, S для точки B. Таким образом, получается треугольник между точками A, B, C, углы которого обозначаем через A, B, C; противолежащие стороны — через a, b, c, площадь —через σ, а меру кривизны в точках A, B, C обозначим соответственно через α, β, γ. Итак, считая (что всегда возможно) величины p, q, $q-q'$ положительными, имеем:

$$A=\varphi-\varphi',\ B=\psi,\ C=\pi-\psi',\ a=q-q',\ b=r',\ c=r,\ \sigma=S-S'.$$

Прежде всего выразим площадь σ при помощи ряда. Заменив в формуле [7] все величины, относящиеся к B, теми, которые относятся к C, получим формулу для S', откуда с точностью до величин шестого порядка имеем:

$$\sigma=\frac{1}{2}p\,(q-q')\left\{1-\frac{1}{6}f^0\left(p^2+q^2+qq'+q'^2\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{60}f'p\left(6p^2+7q^2+7qq'+7q'^2\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{20}g^0\left(q+q'\right)\left(3p^2+4q^2+4qq'+4q'^2\right)\right\}.$$

Эта формула с помощью ряда [2]

$$c\sin B=p\,(1-\frac{1}{3}f^0q^2-\frac{1}{4}f'pq^2-\frac{1}{2}g^0q^3-\ldots-)$$

Но по формулам, приведенным в начале § 24,

$$\frac{d\varphi}{dp}=-n\cos\psi,\ \frac{d\varphi}{dq}=\sin\psi,$$

так как $m=1$, откуда и получается приведенное выше уравнение. **(Прим. ред.).**

принимает вид

$$\sigma = \frac{1}{2}\, ac \sin B \left\{1 + \frac{1}{6} f^0 \left(p^2 - q^2 + qq' + q'^2\right) - \right.$$

$$- \frac{1}{60} f'p \left(6p^2 - 8q^2 + 7qq' + 7q'^2\right) -$$

$$\left. - \frac{1}{20} g^0 \left(3p^2 q + 3p^2 q' - 6q^3 + 4q^2 q' + 4qq'^2 + 4q'^3\right)\right\}.$$

Мера кривизны для любой точки поверхности (по § 19, где m, p, q означали то, что теперь n, q, p) равна

$$-\frac{1}{n}\frac{d^2 n}{dq^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hq^2 + \ldots}{1 + fq^2 + \ldots} = -2f - 6gq - (12h - 2f^2)\, q^2 - \ldots$$

Отсюда, если p, q относятся к точке B,

$$\beta = -2f^0 - 2f'p - 6g^0 q - 2f'' p^2 - 6g'pq - (12h^0 - 2f^{0^2})\, q^2 - \ldots$$

и

$$\gamma = -2f^0 - 2f'p - 6g^0 q' - 2f'' p^2 - 6g'pq' - (12h^0 - 2f^{0^2})\, q'^2 - \ldots,$$

и

$$\alpha = -2f^0.$$

Введя эти меры кривизны в ряд для σ, получаем следующее выражение, точное до величин шестого порядка (исключительно):

$$\sigma = \frac{1}{2}\, ac \sin B \left\{1 + \frac{1}{120}\, \alpha\, (4p^2 - 2q^2 + 3qq' + 3q'^2) + \right.$$

$$+ \frac{1}{120}\, \beta\, (3p^2 - 6q^2 + 6qq' + 3q'^2) +$$

$$\left. + \frac{1}{120}\, \gamma\, (3p^2 - 2q^2 + qq' + 4q'^2) \right\}.$$

Точность останется той же, если вместо p, q, q' подставим $c \sin B$, $c\cos B$, $c \cos B - a$, причем тогда получится:

[8] $$\sigma = \frac{1}{2}\, ac \sin B \left\{1 + \frac{1}{120}\, \alpha\, (3a^2 + 4c^2 - 9ac \cos B) + \right.$$

$$+ \frac{1}{120}\, \beta\, (3a^2 + 3c^2 - 12ac \cos B) +$$

$$\left. + \frac{1}{120}\, \gamma\, (4a^2 + 3c^2 - 9ac \cos B) \right\}.$$

Так как из этого уравнения исчезло все, относившееся к линии AD, проведенной нормально к BC, то и точки A, B, C с относящимися к ним величинами можно переставлять; вследствие чего получим с той же точностью:

[9] $$\sigma = \frac{1}{2}\, bc \sin A \left\{1 + \frac{1}{120}\, \alpha\, (3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A) + \right.$$

$$+ \frac{1}{120}\, \beta\, (3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A) +$$

$$\left. + \frac{1}{120}\, \lambda\, (4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A) \right\};$$

$$[10]\quad \sigma = \frac{1}{2} ab \sin C \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha \,(3a^2 + 4b^2 - 9ab \cos C) + \right.$$
$$+ \frac{1}{120} \beta \,(4a^2 + 3b^2 - 9ab \cos C) +$$
$$\left. + \frac{1}{120} \gamma \,(3a^2 + 3b^2 - 12ab \cos C) \right\}.$$

26.

Большую пользу принесет рассмотрение плоского прямолинейного треугольника, стороны которого равны a, b, c; углы же, которые мы обозначим через A^*, B^*, C^*, отличаются от углов треугольника на кривой поверхности, т. е. A, B, C, на величины второго порядка, и стоит труда обстоятельно произвести разложения этих разностей. Однако достаточно только наметить важнейшие моменты вычислений более длинных, чем трудных.

Заменив в формулах [1], [4], [5] величины, относящиеся к B, относящимися к C, мы получим формулы для r'^2, $r' \cos \varphi'$, $r' \sin \varphi'$. Тогда разложение выражения $r^2 + r'^2 - (q - q')^2 - 2r \cos\varphi \cdot r' \cos\varphi' - 2r \sin\varphi' \times \times r' \sin\varphi'$, равного $b^2 + c^2 - a^2 - 2bc \cos A = 2bc \,(\cos A^* - \cos A)$ и комбинирование его с разложением выражения $r \sin\varphi \cdot r\cos\varphi' - r \cos\varphi \times \times r \sin \varphi'$, которое равно $bc \sin A$, дадут следующую формулу:

$$\cos A^* - \cos A = -(q - q')\, p \sin A \left\{ \frac{1}{3} f^0 + \frac{1}{6} f' p + \frac{1}{4} g^0 (q + q') + \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{10} f'' - \frac{1}{45} f^{0^2} \right) p^2 + \frac{3}{20} g' p \,(q + q') +$$
$$\left. + \left(\frac{1}{5} h^0 - \frac{7}{90} f^{0^2} \right) (q^2 + qq' + q'^2) + \ldots \right\}.$$

Отсюда получим с точностью до величин пятого порядка

$$A^* - A = -(q - q')\, p \left\{ \frac{1}{3} f^0 + \frac{1}{6} f' p + \frac{1}{4} g^0 \,(q + q') + \frac{1}{10} f'' p^2 + \right.$$
$$+ \frac{3}{20} g' p \,(q + q') + \frac{1}{5} h^0 (q^2 + qq' + q'^2) -$$
$$\left. - \frac{1}{90} f^{0^2} (7p^2 + 7q^2 + 12qq' + 7q'^2) \right\}.$$

Комбинированием этой формулы с формулой

$$2\sigma = ap \,[1 - \frac{1}{6} f^0 \,(p^2 + q^2 + qq' + q'^2 - \ldots)]$$

и со значениями α, β, γ, приведенными в предыдущем параграфе, мы получаем с точностью до величин пятого порядка:

$$[11]\quad A^* = A - \sigma \left\{ \frac{1}{6} \alpha + \frac{1}{12} \beta + \frac{1}{12} \gamma + \frac{2}{15} f'' p^2 + \frac{1}{5} g' p \,(q + q') + \right.$$
$$+ \frac{1}{5} h^0 \,(3q^2 - 2qq' + 3q'^2) +$$
$$\left. + \frac{1}{90} f^{0^2} \,(4p^2 - 11q^2 + 14qq' - 11q'^2) \right\}.$$

Вполне подобными действиями получим:

$$[12]\quad B^*=B-\sigma\left\{\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{12}\gamma+\frac{1}{10}f''p^2+\frac{1}{10}g'p\ (2q+q')+\right.$$
$$+\frac{1}{5}h^0\ (4q^2-4qq'+3q'^2)-$$
$$\left.-\frac{1}{90}f^{0^2}\ (2p^2+8q^2-8qq'+11q'^2)\right\};$$

$$[13]\quad C^*=C-\sigma\left\{\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{12}\beta+\frac{1}{6}\gamma+\frac{1}{10}f''p^2+\frac{1}{10}g'p\ (q+2q')+\right.$$
$$+\frac{1}{5}\ h^0\ (3q^2-4qq'+4q'^2)-$$
$$\left.-\frac{1}{90}f^{0^2}\ (2p^2+11q^2-8qq'+8q'^2)\right\}.$$

Вместе с тем отсюда выводим, так как сумма $A^*+B^*+C^*$ равна двум прямым, что избыток суммы $A+B+C$ над двумя прямыми равен

$$[14]\quad A+B+C=\pi+\sigma\left\{\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma+\frac{1}{3}\ f''p^2+\frac{1}{2}\ g'p(q+q')+\right.$$
$$\left.+(2h^0-\frac{1}{3}\ f^{0^2})\ (q^2-qq'+q'^2)\right\}.$$

Это последнее уравнение может быть выведено также из формулы [6].

27.

Если кривая поверхность есть шар радиуса R, то

$$\alpha=\beta=\gamma=-2f^0=\frac{1}{R^2};\ f''=0, g'=0,\ 6h^0-f^{0^2}=0 \text{ или } h^0=\frac{1}{24R^4}.$$

Отсюда, формула [14] дает

$$A+B+C=\pi+\frac{\sigma}{R^2},$$

справедливая с абсолютной точностью; формулы же [11] — [13] дадут:

$$A^*=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}\ (2p^2-q^2+4qq'-q'^2),$$
$$B^*=B-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180R^4}\ (p^2-2q^2+2qq'+q'^2),$$
$$C^*=C-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180R^4}\ (p^2+q^2+2qq'-2q'^2),$$

или одинаково точно:

$$A^*=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(b^2+c^2-2a^2),$$
$$B^*=B-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(a^2+c^2-2b^2),$$
$$C^*=C-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180R^4}(a^2+b^2-2c^2).$$

Если пренебречь величинами четвертого порядка, то получится известная теорема, впервые предложенная знаменитым *Лежандром.*

28.

Наши общие формулы, если отбросить члены четвертого порядка, окажутся очень простыми, т. е.

$$A^* = A - \frac{1}{12}\,\sigma\,(2\alpha + \beta + \gamma),$$

$$B^* = B - \frac{1}{12}\,\sigma\,(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

$$C^* = C - \frac{1}{12}\,\sigma\,(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Итак, к углам A, B, C на не шаровой поверхности должны быть приложены неравные приведения, чтобы изменения их синусов стали пропорциональными противоположным сторонам. Вообще говоря, разности между этими приведениями — третьего порядка, а если поверхность мало отличается от шара, то эта разность будет высшего порядка. В треугольниках на поверхности Земли даже самых больших, у которых можно измерить углы, разность эта всегда может считаться нечувствительной. Так, например, в самом большом из треугольников, измеренных в предыдущие годы, между пунктами Hohehagen, Brocken, Inselsberg, где избыток суммы углов был равен 14″,853 48, вычисление дало следующие величины для приведения углов:

Hohehagen	— 4″.951 13
Brocken	— 4,951 04
Inselsberg	— 4,951 31

29.

В заключение мы прибавим еще сравнение площади треугольника на кривой поверхности с площадью прямолинейного треугольника, стороны которого a, b, c. Площадь последнего обозначим через σ^*; она равна $\frac{1}{2}\,bc\,\sin A^* = \frac{1}{2}\,ac\,\sin B^* = \frac{1}{2}\,ab\,\sin C^*$.

Мы имеем с точностью до величин четвертого порядка

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\,\sigma\,\cos A\cdot(2\alpha + \beta + \gamma)$$

или одинаково точно

$$\sin A = \sin A^*\cdot\left[1 + \frac{1}{24}\,bc\,\cos A\cdot(2\alpha + \beta + \gamma)\right].$$

Подставив эту величину в формулу [9], получим с точностью до величин шестого порядка

$$\sigma = \frac{1}{2}\,bc\,\sin A^*\cdot\left\{1 + \frac{1}{120}\,\alpha\,(3b^2 + 3c^2 - 2bc\,\cos A) + \frac{1}{120}\,\beta\,(3b^2 + 4c^2 - \right.$$

$$\left. - 4bc\,\cos A) + \frac{1}{120}\,\gamma\,(4b^2 + 3c^2 - 4bc\,\cos A)\right\},$$

или одинаково точно

$$\sigma = \sigma^* \left\{ 1 + \frac{1}{120} \alpha \, (a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120} \beta \, (2a^2 + b^2 + 2c^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{120} \gamma \, (2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\}.$$

Для шаровой поверхности эта формула примет вид

$$\sigma = \sigma^* \left[1 + \frac{1}{24} \alpha \, (a^2 + b^2 + c^2) \right],$$

вместо которой, как легко можно убедиться, можно с той же точностью принять

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}}.$$

Если ту же формулу применять к кривой, но не шаровой поверхности, то, вообще говоря, ошибка будет пятого порядка и нечувствительна для всех треугольников, какие можно измерять на поверхности Земли.

Göttingische gelehrte Anzeigen

(Гёттингенские научные сообщения)

№ 32, стр. 305—320, 27 февраля 1830 г.

Геодезические и астрономические работы для измерения дуги средней параллели, выполненные в 1821, 1822, 1823 гг. в Пьемонте и Савое комиссией, составленной из пьемонтских и австрийских офицеров генерального штаба и астрономов. Милан, императорская и королевская типография. Том первый, 1825 г., 238 стр. Том второй, 1827 г., 412 стр.

Идея о большом градусном измерении по долготе первоначально была подана Лапласом; сведения о выполненных работах составляют основную часть рассматриваемого труда. Начиная с 1802 г., в Северной Италии французскими инженерами велись обширные триангуляционные работы в первую очередь для военно-топографических целей. Около 1811 г. была закончена сеть треугольников от Фиуме до Турина, причем она простиралась на семь градусов долготы по направлению параллели с широтой 45°. Чтобы сделать эти работы более ценными в научном отношении для изучения фигуры Земли, тогдашнее французское правительство, по просьбе Лапласа, решило продолжить сеть треугольников на запад, вплоть до берегов Атлантического океана, и произвести работы по привязкам, необходимые для градусного измерения по долготе. Начатые немедленно и с большим усердием работы были на некоторое время прерваны, но вскоре также деятельно вновь продолжены в 1818 г.; так что сеть треугольников на французской территории была измерена от Атлантического океана вблизи Бордо вплоть до границ Савойи. Таким образом, для окончания геодезической части работ недоставало только участка, расположенного в государствах короля Сардинии. Правительства этого государства и австрийское, живо сознавая важность для науки такого крупного предприятия, решили произвести в Италии при посредстве комиссии, составленной из астрономов и офицеров обеих стран, как недостающие еще геодезические работы, так и необходимые астрономические наблюдения. Эти работы и составляют содержание реферируемого труда, который, по словам астрономов Карлини и Плана, был отредактирован ими совместно.

Первая часть посвящена исключительно геодезическим работам. Оба конечных восточных пункта сети треугольников во Франции, горы Mont Colombier и Mont Granier (недалеко от г. Шамбери) образуют сторону, от которой начинаются новые измерения, и должны быть проведены до самой западной стороны сети, выполненной в Ломбардии; Massè—Superga (вблизи Турина). Следовало ожидать, что в этой местности, где находятся самые высокие горы Европы, легко образовать большие

треугольники, и для получения связи вполне достаточно очень малого числа промежуточных пунктов, так как расстояние Mont Granier от Superga равно только 150 000 *м*. Но как раз случилось противное: на этом незначительном расстоянии пришлось бороться с очень большими трудностями, так как вершины более высоких гор были совсем не доступны или трудно доступны; строительные материалы для сигналов можно было доставить на них только с очень большими усилиями, а жестокие штормы угрожали целости сигналов и в высшей степени затрудняли самые наблюдения. Чтобы преодолеть эти препятствия, пришлось образовать сравнительно большое число довольно маленьких треугольников; их было шестнадцать, и самая короткая связующая сторона равнялась только 18 671 *м*. Однако мы должны заметить, что в то время в Италии не были еще известны гелиотропы, которые совершенно необходимо иметь на всех сигналах; измерения углов при помощи их производятся на треугольниках любой величины так же легко и точно, как и на самых маленьких.

Для измерения углов применялись восьмидюймовые (20,3 *см*) теодолиты Рейхенбаха. Пьемонтские и австрийские офицеры не делили между собой работу: и те и другие независимо друг от друга определяли все углы системы. Таким образом, для каждого угла получались два определения, которые, в зависимости от числа приёмов, сравнивались между собой и за окончательное значение принималось среднее из них. В большинстве случаев результаты наблюдений пьемонтских офицеров опирались на шесть приёмов, каждый по 10 повторений; эти результаты чаще всего были основаны на двух, в некоторых случаях на трёх или четырех приёмах. Все измерения напечатаны с самыми большими подробностями, но не указан наблюдатель, который производил наблюдения в каждом случае.

При таких обширных работах очень интересно знать точность, полученную при измерении углов. Средством для этого служит сумма углов в отдельных треугольниках, что, конечно, при некоторых обстоятельствах может оказаться несколько неправильным. Если судить по этому признаку об исполненных здесь работах, то, они, без сомнения, дают точность, достойную удивления. Наибольшая ошибка суммы углов у 16 треугольников равна 1″,16; средняя ошибка оказывается равной 0″,70, а следовательно, средняя ошибка отдельного угла — только 0″,40. Поверки за боковые условия не вводились. Но сравнение между собой двойных определений 48 углов указывает вполне определенно на уже гораздо бо́льшую неточность результатов: мы находим здесь 13 результатов, где расхождения превышают 3″, и из них 5, где расхождения превышают 5″: в одном случае как раз в первом треугольнике, определение пьемонтскими офицерами, основанное на 80 повторениях, отличается на 9″,2 от определения австрийских офицеров, опиравшегося на 40 повторений. При таких больших расхождениях нельзя отделаться от подозрения, что правильная оценка настоящей точности зависит еще от каких-то побочных обстоятельств, о которых в рассматриваемом труде нам не дано никаких сведений.

Мы думаем, что должны добавить еще пару замечаний. Из наших собственных измерений мы нашли, что не можем согласиться со способом: всегда ставить на нуль индекс-штрих в начале каждого приёма, потому что благодаря этому способу, при очень большом числе приёмов, всегда приходится в результате иметь одну и ту же постоянную ошибку, зависящую от ошибки делений лимба. В измерениях пьемонт-

ских офицеров всякий раз указывается состояние погоды. В 414 рядах измерений мы насчитываем 320 случаев, когда указан штиль, и 94, когда отмечен ветер; таких благоприятных условий вряд ли можно было ожидать на столь высоко расположенных точках стояния (высота над уровнем моря самой высокой из них равна 3 534 *м*).

Второй том в десяти разделах содержит работы астрономов. В двух первых разделах мы находим определение разностей долгот с помощью наблюдений вспышек пороха; эта работа выполнена была в связи с градусным измерением по долготе. Первые опыты этого рода производились в сентябре 1821 г.; сигналы вспышками пороха подавались на горе Rocca Melone и наблюдались на обсерватории в Милане, удаленной на 170 000 *м*, и на расположенной вблизи горе Mont Cenis. Для определения времени в последнем пункте, в саду гостиницы была сооружена небольшая обсерватория, и в ней установлен пассажный инструмент Фортена, который, по-видимому, не отличался особенно высокими качествами, как это было точно замечено в отношении его важной детали, а именно цапф. Rocca Melone из обсерватории был невидим; чтобы наблюдать сигналы, нужно было уходить на несколько отдаленное место, куда время передавалось хронометром Earnshaw. Наблюдения пассажным инструментом в большинстве случаев отмечались также этим хронометром, но это делалось помощником наблюдателя, по подаваемому им знаку. Все эти обстоятельства, конечно, соединялись вместе и понижали доверие к точности конечных результатов, если даже три отдельных результата, полученные за три дня наблюдений, очень хорошо сходились. Причём наблюдения времени производились здесь по звездам, а в Милане — по кульминациям Солнца; наконец, по-видимому, не исправлялась неперпендикулярность оптической оси пассажного инструмента к его оси вращения; по крайней мере об этом важном обстоятельстве не упоминалось при описании наблюдений.

При работах подобного же рода в 1822 г. к ним приступали во всех отношениях с бóльшей осторожностью. Они производились: с помощью сигналов вспышек пороха на горе Mont Tabor для получения связи горы Mont Cenis с горой Mont Colombier и с помощью вспышек пороха на горе Pierre sur autre для связи горы Mont Colombier с французским пунктом триангуляции Puy d'Usson; одновременно сигналы подавались на горе Mont Colombier, служившие для привязки этого пункта к обсерватории в Женеве.

Определение времени на горе Mont Cenis и на горе Mont Colombier производилось пассажным инструментом Ленуар и Гриндель*; на точке стояния во Франции определения производились повторительным универсальным инструментом (Repetitionskreise) по способу измерения абсолютных высот звезд (см. Connaissance des Temps 1829 и наши Anzeigen от 10 января 1928 г.) На горе Mont Cenis были вынуждены удаляться на расстояние трёх часов пути от гостиницы, чтобы можно было видеть сигналы. Наконец, мы находим еще здесь определение разности долгот между обсерваториями Турина и Милана с помощью сигналов вспышками пороха на горе S. Bernardo di Fenera в различное время в 1823, 1824 гг., причём все условия работы были столь благоприятными, как это только возможно при наблюдениях такого рода.

Третий раздел содержит определения широт гор: Mont Cenis и Mont Colombier и Турина; первых двух — повторительными универсальными инструментами Траутон и Рейхенбаха, а последнего — ме-

* По некоторым обстоятельствам можно заключить, что, по-видимому, в 1822 г. на горе Mont Cenis употреблялся тот же самый пассажный инструмент, хотя здесь указан другой механик.

ридианным кругом Рейхенбаха. Эти последние наблюдения показывают не вполне ту степень согласованности, к которой мы прежде привыкли при работе с подобными инструментами. Авторы сами заметили это и успокоились на том, что в будущем выяснится, существует ли такая аномалия в действительности или она зависит от ошибок в обращении с инструментом. Пишущий эти строки согласен, что при внимании, которого требует к себе этот инструмент, никто, кто не был бы на самом месте, не сможет высказать вероятной догадки о таком явлении, но сама манера, в какой авторы говорят об этой аномалии, побуждает его привести пример из его собственного опыта, как самые незначительные обстоятельства могут иногда повредить наблюдениям. В течение ряда лет существовало прекрасное согласие в наблюдениях на меридианном круге, совершенно подобном находящемуся в Турине, которое только один раз было нарушено на некоторое время; причём *никогда* до этих пор не замечалось, чтобы этот инструмент обнаруживал значительные изменения коллимационной ошибки. Причина ошибки была найдена, после того как безуспешно исследовались различные другие причины; она зависела от узелка на нити, которая была обвязана вокруг оправы трубки уровня для обеспечения её неподвижности; узелок оказался несколько великоват и касался внутренней поверхности трубки; когда он был удален, так что стеклянной трубки касался только немного выступающий конец винта, то тотчас же вновь восстановилось постоянство коллимационной ошибки и прежняя прекрасная сходимость всех наблюдений. В наблюдениях в Турине, о которых идёт речь, мы тоже замечаем значительную изменяемость коллимационной ошибки; мы не говорим о более крупных изменениях в несколько минут, которые, конечно, хорошо известны астрономам, хотя в наблюдениях не упоминается об их причинах, но о более мелких, которые имеют вид случайных. В настоящее время мы имеем прекрасный способ для определения коллимационной ошибки в любой момент без перекладывания инструмента, что очень облегчит разыскание причины подобных аномалий.

В четвертом разделе приведены сведения о привязке Mont Cenis к системе треугольников с помощью особой триангуляции и об измерении небольшого базиса, расположенного на плато горы, а также об астрономическом определении азимута линии, соединяющей пункты Mont Cenis и Bellecombe. Последняя работа выполнена дважды; результаты работы за 1821 и 1822 гг., полученные повторительными универсальными инструментами Траутон и Рейхенбаха, различаются один от другого на 8″,6; из них обоих взято среднее, хотя более поздний результат кажется значительно надежнее.

Равным образом два следующих раздела заключают в себе астрономические определения азимутов линий: Mont Colombier — Mont Granier и Турин (новая обсерватория)—Superga. Во всех трёх случаях этих определений за исходные принимались установленные в меридиане марки для соответствующих пассажных инструментов. Наконец, в шестом разделе мы находим работы, с помощью которых Ориани еще раньше производил на Миланской обсерватории определение азимута для ориентирования стороны французской системы треугольников, перенесенной к направлению: башня Миланского собора — Busto.

В седьмом разделе на основании этих обширных работ выведены результаты градусного измерения по долготе. Измерения отнесены к параллели, на которой радиус кривизны меридиана равен радиусу круга, окружность которого равна всей дуге эллипса меридиана; при сжатии 0,003 24 (1/308,6), принятом за основу, широта этой параллели равна

45°3′29″,2. Геодезические измерения дают для всей дуги этой параллели между меридианами Милана (обсерватория) и d' Usson — 475 121,06 *м*, между тем как из наблюдения сигналов вспышками пороха мы имеем для разности долгот 6°1′41″,7. Эти числа можно рассматривать как главный результат измерений. Сравнение такой дуги параллели с результатом градусного измерения по меридиану даёт сжатие Земли; авторы из такого сравнения их результата с дугой Гринвич-Форментера нашли для сжатия $\frac{1}{241}$. Но как мало достоверности можно достичь этим путем, наиболее бросается в глаза, если вместо всей дуги рассматривать подобным же образом отдельные участки. Так, референт нашел из сравнения той же дуги меридиана с отрезком линии d'Usson—Colombier, что сжатие равно $\frac{1}{169}$; со вторым отрезком Colombier — Mont Cenis равно $\frac{1}{226}$; с четвертым отрезком Милан — Турин — $\frac{1}{110}$; с третьим отрезком Mont Cenis — Турин, наоборот, получилось удлинение $\frac{1}{82}$. Таким образом, в этом отношении немногого можно ждать для более точного определения размеров Земли; но эти результаты тем более важны, потому что они дают новое подтверждение неправильности фигуры Земли, которая как раз больше всего обнаруживается в Северной Италии. Яснее всего выступают эти неправильности, если сравнивать разности долгот, определенные астрономическим путем, с вычисленными из геодезических измерений, для которых была принята наиболее правдоподобная гипотеза о фигуре Земли. Авторы произвели это вычисление, принимая сжатие 0,003 24 и радиус экватора 6 376 986 *м*; таким образом, разности долгот к западу от Милана равны во времени

Пункты	Разности долгот		Расхождения $A - G$
	(A астрономические	(G) геодезические	
Турин	$5^m58^s,85$	$6^m\ 0^s,93$	$-2^s,08$
Mont Cenis	9 0 ,20	8 59 ,49	+0 ,71
Colombier	13 44 ,23	13 43 ,84	+0 ,39
D'Usson	24 6 ,78	24 8 ,02	—1 ,24

Чем менее заметен здесь неправильный ход, тем интереснее становится вопрос, показывают ли определенные из астрономических наблюдений азимуты сторон треугольников аналогичные аномалии. В действительности вопрос обстоит так: согласно теореме, предложенной Лапласом, правда, со специальными ограничениями, но пригодной к широким обобщениям, можно вычислить *a priori* схождение меридианов в виде необходимого и независящего от формы Земли соотношения, с помощью разности долгот, так что несимметричность одних обнаруживается из неправильности других, по мере того как продвигается вперед сеть геодезических линий. Как известно, астрономические определения азимутов произведены с большой тщательностью в четырех основных пунктах: Милане, Турине и на горах Mont Cenis и Mont Colombier; эти результаты ориентирования для трёх последних пунктов авторы сравнили с теми результатами, которые получились при перенесении геодезическим способом ориентирования, произведенного в Милане, причём

ь этих последних в основу были положены приведенные выше размеры Земли. Получены следующие разности.

для Турина	— 5″,5,
для Mont Cenis	— 51, 2,
для Colombier	— 25 ,2.

Следовательно, и здесь также обнаруживаются необыкновенно большие аномалии. Но если, согласно упомянутой выше теореме, вычислить аномалии разностей долгот (что производится делением на умноженный на 15 синус широты Милана и переменой знака), то получаются значения, совершенно отличающиеся от непосредственно найденных, а именно:

Пункт	Вычисленная аномалия	Различие с наблюдавшейся аномалией
Турин	$+0^s,52$	$+2^s,60$
Mont Cenis	+4 ,81	+4 ,11
Colombier	+2 ,34	+1 ,95

Относительно *этого* исследования авторы просто заключают, что аномалии слишком велики, чтобы быть следствием накопления ошибок при измерении углов; следовательно, авторы оставляют нас в потемках относительно того, что мы должны думать об аномалиях. По нашему мнению, эти три числа имеют еще бо́льшее значение, когда они не дают нам неоспоримого масштаба точности самих работ, так как тогда они (если оставить в стороне ошибки вычислений), вплоть до самых незаметных мелочей, могли бы быть не чем иным, как накоплением ошибок, получавшихся при астрономических определениях долгот, определениях азимутов и измерениях углов в треугольниках сети. Можно, конечно, не распределять их между этими отдельными влияниями, но существование общей ошибки, не зависящей от неправильностей фигуры Земли, является неоспоримым фактом; при этом следует в значительной степени отказаться от мнения, которого держались об *абсолютной* точности, достигнутой во всех таких трёх видах работы. Вероятно, каждый из них вносит свою долю в общую ошибку, хотя мы склонны приписывать их больше, чем наполовину, измерению углов треугольников. В рассматриваемом здесь труде мы находим, правда, бо́льшую часть работ, которые представляют собой основную часть описываемых сравнений, но измерения углов между Миланом и пунктом Superga, произведенные в прежние годы французскими инженерами, помещены здесь только в сокращенной форме и уже уравненные, так что нет возможности судить об их точности; впрочем, в ежегоднике Connaissance des Temps 1829 г. стр. 288, мы находим, что ошибка суммы углов достигает там 6″,8. Точно так же при соединении обсерваторий Милана и Турина, по-видимому, не вполне с требуемой точностью был измерен важный треугольник Superga—новая—старая обсерватория Турина. Было бы очень желательно, чтобы для выяснения этого важного вопроса по крайней мере в том, что касается обеих обсерваторий, было бы произведено тамошними астрономами новое геодезическое соединение их, что чрезвычайно легко может быть выполнено, если применять два гелиотропа и использовать пункт S. Bernardo di Fenera, видимый из обеих обсерваторий; поскольку, без всякого сомнения, там имеет видимость хотя бы еще только один из старых пунктов, то для выполнения всей работы необходимо просто измерить четыре угла.

Очень интересную и заслуживающую похвалы работу имеем мы в восьмом разделе — полное повторение градусного измерения по меридиану, выполненного Беккария в 1762—1764 гг. Известно, что результат этого измерения не совпадает с измеренной в других странах длиной градуса; кривизна дуги между конечными пунктами Mondovi и Andrate оказалась значительно меньше, чем должна была быть при нормально предполагаемой фигуре Земли. Новое измерение показало, что при астрономическом определении кривизны Беккария действительно сделал ошибку в 13″,41 (что вполне возможно допустить при несовершенстве его инструмента), но знак этой ошибки оказался противоположным ожидаемому, а следовательно, аномалия еще на столько же увеличилась. Дуга меридиана, вычисленная по геодезическим измерениям на основании указанных элементов (приведенная к конечному пункту Беккария) равна 1°8′18″,91; по астрономическим определениям Беккария эта дуга равна 1°7′44″,30, а по новому определению 1°7′31″,07. Новое измерение произведено с такими хорошими вспомогательными средствами и с такой замечательной тщательностью, что пришлось эту большую разность 47″,84 всецело рассматривать как результат неправильности фигуры Земли; этот весьма замечательный факт такого рода встретился впервые до сего времени в анналах высшей геодезии. Весьма вероятно, что главной причиной этого явления служит притяжение цепей Альп, ограничивающих с севера и с юга район измерений, но равную вероятность имеет неравномерная плотность расположенных под поверхностью слоев Земли, быть может простирающихся на большую глубину. По крайней мере, ничем другим нельзя объяснить подобные расхождения весьма значительной величины, встречающиеся у пунктов, расположенных на совершенно ровной местности (например, аномалия в 21″,9 между Миланом и Пармой). Добавим к этому, что с увеличением числа градусных измерений, проводимых со все большей тщательностью, все больше завоевывает место убеждение, что такие отклонения следует рассматривать только с точки зрения их величины, но не как исключения, и что они встречаются повсеместно бо́льшей или меньшей величины. Авторы дали интересный сравнительный обзор широт 34 пунктов, определенных астрономическими наблюдениями и вычисленных на основании геодезических измерений, рассеянных на пространстве половины Европы и связанных между собой триангуляцией. Конечно, такое исследование нужно рассматривать только как несовершенный опыт, так как оно в большинстве случаев опирается только на ненадежные, отрывочные заметки о геодезических измерениях, потому что, к сожалению, большинство таких измерений во Франции, Италии, Австрии и Баварии остаются еще неопубликованными.

В том же разделе находится, кроме того, еще новое измерение небольшого базиса около Турина, благодаря чему еще лучше будут освещены некоторые обстоятельства, относящиеся к триангуляции, выполненной там Цахом в 1809 г.

В следующем разделе мы находим различные интересные наблюдения и исследования, находящиеся в связи с состоянием атмосферы: одновременные метеорологические наблюдения в гостинице на горе Mont Cenis и в Милане; барометрические определения высоты в первом из этих пунктов и на горе Mont Colombier; тригонометрические определения высот гор: Монблан (4802,7 *м*) и Монте Роза (4619,6 *м*); наконец, исследования над земной рефракцией. Последняя определялась из наблюдений на трех пунктах (Милан, Турин, Мондови), высот трех гор Rocca Melone, Monte Viso и Monte Rosa, причем абсолютные высоты трёх исходных пунктов были приняты известными заранее, а высоты

наблюдавшихся пунктов исключались; этот способ, дающий малую точность, как показали более точные исследования, дал мало схождений. Следовательно, мы можем приписать малый вес конечному результату отношения кривизны Земли ко *всей* рефракции (5,28 к 1); вычисление шести пар взаимных зенитных расстояний между пунктами основных треугольников в среднем даёт нам гораздо меньшее отношение, а именно 1 : 0,1235, которое очень близко совпадает с результатами, полученными при ганноверском и лифляндском градусных измерениях.

Десятый раздел занимается многократно уже рассматривавшейся задачей: на основании широты конечного пункта, заданной стороны треугольника и её азимута в том же пункте найти те же величины для другого конечного пункта и их разность долгот на эллиптическом сфероиде. Вывод заключает в себе только преобразование формул Лежандра и вместо так называемой приведенной широты введена истинная. Формулы точны до величин третьего порядка, если сжатие и сторона треугольника (причем радиус Земли принят за единицу) рассматриваются как величины первого порядка. В применении к приводимым здесь измерениям величины третьего порядка отброшены, потому что в данном случае при использовании их получается достаточная точность. Но это допустимо только в том случае, когда результатами пользуются только для сравнения с астрономическими определениями, где, впрочем, нет необходимости производить вычисления с значительно бо́льшей точностью, чем это дозволено. Но если придерживаться другой точки зрения — вычислять геодезические координаты с такой же точностью, с какой они получаются из самих измерений, так что можно вычислять из них (геодезических долгот и широт) в обратном порядке значения углов по крайней мере с такой точностью, с какой они были получены, то такие упрощенные формулы далеко не достаточны, при очень больших треугольниках, когда нужно было бы даже желать, чтобы можно было принимать во внимание еще члены четвертого порядка. При этой форме вычислений такого результата можно достигнуть очень удобными способами, но здесь не место говорить об этом подробнее, и мы ограничимся тем, что только укажем на такие потребности высшей геодезии. В самом реферируемом труде представляется много случаев, когда чувствуются большие выгоды от подобного способа действия; так, например, на Туринской обсерватори не были использованы при азимутальных определениях сделанные засечки на вершины треугольника Massé, Monte Soglio и Rocca Melone, которые, по нашему предположению, легко должны были бы дать очень ценный контроль и повысить точность результатов.

Anzeige
Göttingische gelehrte Anzeigen
№ 177, S. 1761 — 1768, November 6, 1843

Сообщения

Гёттингенские научные сообщения № 177, стр. 1761—1768, 6 ноября 1843 г.

23 октября надворный советник К. Ф. Гаусс передал королевскому обществу статью под заглавием:

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie, erste Abhandlung

Исследования по высшей геодезии, первая статья, о которой будет дан здесь краткий отчет.

В тригонометрической части выполненного автором в 1821—1827 гг. градусного измерения, а также в позднейших, связанных с ним и распространенных на все королевство Ганновер, геодезических работах, как в способах произведенных измерений, так еще более в последующей математической обработке их результатов, были избраны пути, отличающиеся от применявшихся в прежнее время. Многие из этих принадлежащих Гауссу способов, правда, уже опубликованы; частью им самим в различных давно уже появившихся статьях, частью другими лицами, которые на основании устных или письменных сообщений Гаусса применяли их в своих геодезических работах. Но значительная часть этих способов, именно те, которые больше всего отличаются от употреблявшихся в прежнее время, и понимание которых требует более глубокого математического обоснования, остаются до сих пор не опубликованными. Прежнее намерение у автора было: после полного окончания измерений в особом труде описать их вместе со всеми примененными им способами; но к тому времени обстоятельства, о которых говорить здесь неуместно, потребовали еще отсрочки работы; поэтому автор избрал такой выход из положения: обнародовать в ряде отдельных статей теоретическую часть вопроса, принадлежащую лично ему. При этом получается еще та выгода, что при таком способе можно подготовить и ярче осветить многие исследования, представляющие особый интерес и тесно связанные с другими исследованиями, даже вовсе не применявшимися в измерениях, о которых идет речь; они могли быть описаны еще с большей подробностью, чем при прежнем плане, когда предполагалось равномерное описание всех вопросов.

К числу таких исследований принадлежат именно те, которые составляют предмет данной *первой* статьи. Главное содержание ее составляет способ, с помощью которого система треугольников на эллипсоиде вращения, без всякого ущерба для точности, может быть вычислена так,

как если бы она находилась на поверхности шара. Этот способ основывается на решении более обширной проблемы, которую автор описал в 1822 г., и решение которой было напечатано Шумахером в третьем выпуске «Astronomische Abhandlungen: («Астрономические известия») под заглавием: «Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird». (Общее решение задачи — изображения частей заданной поверхности на другой заданной поверхности с сохранением подобия в бесконечно малых частях). Такого рода изображениям одной поверхности на другой, удовлетворяющим указанному условию, автор дал название *конформные изображения;* он сделал это ради краткости изложения, а также потому, что они вполне заслуживают особого наименования, так как дают очень мощное вспомогательное средство при вычислениях в высшей геодезии; следовательно, это, в прежнее время неопределенное название, здесь всегда будет пониматься в точном и определенном значении. Проекции Меркатора и стереографическая служат общеизвестными примерами конформного изображения поверхности шара на плоскости.

Вряд ли нужно отмечать, что подобие в бесконечно малых частях должно очень отличаться от подобия во всех конечных частях. Последнего можно достигнуть только в частных случаях, если первую поверхность можно развернуть на самой второй поверхности, или на подобной ей поверхности; но вообще в тех случаях, когда конформность заключается *только* в подобии очень малых частей, то *масштаб*, т. е. отношение, в котором находятся соответствующие один другому бесконечно малые отрезки линий на обеих поверхностях, будет переменным числом в различных местах на этих поверхностях. Например, в проекции Меркатора масштаб тем больше, чем дальше отстоит данный пункт от экватора; в стереографической проекции — чем дальше соответствующий пункт находится от глаза.

С каждой заданной поверхности можно получить на некоторой другой заданной поверхности бесконечно много конформных изображений; общее решение охватывает их все вместе, причем оно содержит произвольную (arbitrar) функцию, которая может быть определена по желанию или сообразно обстоятельствам. Если нужно перенести только некоторую часть поверхности, то обыкновенно выгоднее всего подобрать такое конформное изображение, при котором внутри изображаемой площади изменения масштаба оставались бы в возможно тесных пределах.

Задача конформного перенесения поверхности эллипсоида на поверхность шара в данной статье особо поясняется примерами; для общего решения приведено два специальных примера: первый преимущественно пригоден для изображения всей поверхности эллипсоида; второй, наоборот, более целесообразен, так как (как это обыкновенно бывает при определенных применениях в геодезии) он касается вопроса конформного перенесения на поверхность шара незначительной части поверхности Земли, принимаемой за эллипсоидальную. В сколь высокой степени этот второй способ изображения удовлетворяет приведенному в определенном месте требованию, можно понять из одного приведенного выше примера, где изменение масштаба в пределах зоны в пять градусов широты равно $\frac{1}{530\,000}$. В дальнейшем в общих словах указаны главные черты способа, так как вообще они могут быть использованы при конформном изображении, для вычисления системы треугольников, но специальное изложение метода и применение его к этому определенному способу перенесения отнесены мной к позднейшей обработке.

Настоящая статья предназначена для того, чтобы выполнить этот долг, хотя не вполне в том виде, как он был сделан. В основу положено не то решение, которое упоминалось выше, а отличающееся от него третье частное решение задачи, с помощью которого еще полнее достигается имевшаяся в виду цель. На этих страницах мы должны ограничиться тем, что дадим об этом вопросе только общее понятие.

Система треугольников на сфероиде, стороны которых представляют собой так называемые геодезические линии, при конформном перенесении изобразятся на поверхности шара аналогичной системой треугольников, углы в которой, как это уже само собой следует из понятия конформности, будут *точно* равны соответствующим углам первой системы, в то время как стороны, правда, не будут с математической точностью дугами больших кругов, но все же только немного от них отличаются. Теперь можно поступать так, как если бы эти отклонения на протяжении всей системы должны были рассматриваться как совершенно исчезающие на основании заданной точности вычислений; тогда ясно, что после того, как сторона сфероидической системы перенесена на поверхность шара, можно без дальнейших колебаний вычислить всю систему, как бы состоящую из обыкновенных сферических треугольников; и только в конце вычислений переходят от долгот и широт на поверхности шара к долготам и широтам на сфероиде, так как окончательные результаты измерений требуется представить именно в этой форме. Такой переход можно производить или с помощью формул, которые представляют избранный способ перехода, или с помощью заранее вычисленных вспомогательных таблиц. Наоборот, когда такое отклонение становится достаточно заметным, чтобы принять его во внимание, следует каждый из измеренных углов перед точным вычислением на шаре сперва подвергнуть небольшой редукции; благодаря этому вычисления только незначительно увеличатся, если численные значения редукций могут быть легко вычислены.

Способ переноса, описанный в указанной статье, представлен так, что отклонения длины кривых линий, которыми изображены дуги геодезических линий, при перенесении их на поверхность шара рассматриваются всегда как исчезающе малые по сравнению с дугами больших кругов, проведенных между теми же конечными точками, если они взяты вблизи нормальной параллели; эту параллель можно выбрать произвольно и, если все вычисление производится для заранее определенной системы треугольников, лучше всего провести ее через середину всей системы. Чем дальше отходят к северу или к югу от этой нормальной параллели, тем значительнее могут делаться такие отклонения, которые, впрочем, при этом зависят одновременно от длины сторон треугольников и расположения их относительно меридиана; но даже при значительных расстояниях от нормальной параллели они остаются еще столь малыми, что для большинства геодезических измерений вряд ли приходится затратить много труда на их учитывание.

В нашей статье полностью изложена теория всех этих и связанных с ними других вычислений; она пояснена приведенным в ней примером вычислений и снабжена вспомогательными таблицами, которые сперва предназначались для той зоны, в которой расположена ганноверская сеть треугольников, но без всяких препятствий ими можно пользоваться при геодезических измерениях, далеко перешагнувших эту зону; собственно, они распространены на зону в двенадцать градусов по широте, посредине которой проходит избранная нормальная параллель с широтой 52°40″. Эти таблицы вычислены с точностью, вполне достаточной даже для случая, если бы систему треугольников надо было вычислять

десятизначными логарифмами, т. е. со значительно большей точностью, чем это делается в большинстве случаев; впрочем, маленькая экономия, получаемая при отбрасывании пары десятичных знаков, слишком незначительна, чтобы в процессе печатания можно было вставить что-нибудь вместо них.

Так как при вычислениях некоторые понятия могут казаться и достойными и не достойными внимания, то, следовательно, вполне стоит труда оценить их на основании пары примеров, приведенных в статье.

В ганноверской системе треугольников самый большой треугольник, одновременно расположенный дальше от нормальной параллели, это тот, который образован между пунктами Brocken — Hohehagen — Inselsberg. Поэтому в нем встречаются самые большие значения редукций направлений; и действительно, у стороны Hohehagen — Inselsberg редукция азимута в первом конечном пункте составляет — 0″,003 32, а в другом + 0″,004 28. Во всей системе найдутся еще только две стороны, у которых редукции превосходят 0″,001; у всех остальных — они меньше этой величины.

Самый большой треугольник тригонометрических геодезических работ Швейцарии находится между пунктами Chasseral — Suchet — Berra, он соприкасается с южной границей, до которой распространяются вспомогательные таблицы, так что редукции направлений могут еще вычисляться с их помощью. Наибольшая редукция встречается у азимута, взятого от Chasseral на Suchet, и равна + 0″,062 21.

Отсюда видно, что во всей зоне, в которой лежит ганноверская система треугольников, редукция полностью отпадает, если вычисление производится до сотой доли секунды, и что даже во всей зоне в двенадцать градусов по широте, которую охватывают вспомогательные таблицы, можно не обращать внимания на редукции, если в вычислениях необходимо иметь только десятые доли секунды.

Сообщение (Anzeige)

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen № 14, S. 210—217, 1846. September 28 (Известия королевского научного общества в Гёттингене, № 14, стр. 210—217, 28 сентября 1846 г.).

1 сентября надворный советник Гаусс передал королевскому научному обществу статью под заглавием «Исследования по высшей геодезии», вторая статья.

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie zweite Abhandlung.

Здесь дается краткий отчет о ее содержании и связи с первой статьей.

В первой статье изложен новый способ обработки геодезических измерений, основная особенность которого заключается в том, что большинство вычислений — все или почти все — проводятся так, как если бы система треугольников находилась не на сфероидической, а на шаровой поверхности, притом без всякого ущерба для точности результатов. Одна из основных задач в области геодезических вычислений — на основании длины стороны треугольника, представляющей собой геодезическую линию, широты одного из конечных пунктов её и азимута, под которым виден там другой конечный пункт, вывести широту этого другого конечного пункта, видимый оттуда азимут стороны треугольника и разность долгот обоих пунктов, причем этот способ вычисления сведен к простому решению сферического треугольника. Пара страниц в нашей статье все-таки посвящена этой задаче, на том основании, что обычные формулы сферической тригонометрии, если только не пользоваться многозначными таблицами логарифмов, оказываются не вполне достаточными, чтобы обеспечить результатам вполне достаточную точность, а потому оказались необходимыми некоторые преобразования этих формул. Но, кроме того, дозволительно принять во внимание то обстоятельство, что стороны таких треугольников, углы которых измеряются в действительности, в сравнении с размерами всей Земли всегда могут быть только малыми величинами, а потому такие преобразования формул весьма увеличивают их гибкость и удобство при пользовании; действительно, хотя такие преобразованные формулы являются только приближенными, но все же они обеспечивают не только такую же, но даже бо́льшую точность, чем абсолютно строгие формулы; это не следует находить парадоксальным, если принять во внимание, что последними приходится пользоваться всегда с помощью тригонометрических таблиц, точность которых отнюдь не абсолютна, но ограничена известным числом десятичных знаков. Среди различных, указанных для данной цели в первой статье, определенных формул особенно выделяется приведенная в конце комбинация из них, так как она устанавливает

связь между шестью величинами в возможно удобнейшей для вычислений форме и обеспечивает точность, которая в достаточной степени превосходит точность, необходимую на практике измеряемых треугольников. Поэтому должно было появиться желание — иметь в своём распоряжении аналогичные формулы, непосредственно действительные для поверхности эллипсоида; вывод их составляет главное содержание настоящей *второй* статьи.

Между тем как вывод упомянутых формул, действительных для поверхности шара, основан на совершенно элементарных положениях, наоборот, получение соответствующих им формул на поверхности эллипсоида требует ряда довольно запутанных операций, а потому, несомненно, каждому должно быть приятно, если бы удалось указать не один путь для достижения этой цели. Все эти исследования для своих личных работ автор произвёл уже более тридцати лет тому назад и только до настоящего времени не находил особого повода для их опубликования; в настоящей статье он сообщает *два* различных между собой, но в конце концов приводящих к совершенно одинаковым результатам способа их вывода, из которых один опирается на теорию конформного перенесения поверхности эллипсоида на поверхность шара. В этом отношении вторая статья примыкает к первой, хотя, впрочем, обе должны рассматриваться, как совершенно независимые одна от другой, и всякому предоставляется свободный выбор производить геодезические вычисления по методам, рассмотренным подробно или в первой, или во второй статье.

Задача, как перейти от географического положения одного пункта на поверхности сфероида к другому пункту, который связан с ним геодезической линией известной длины и направления, уже давно много раз рассматривалась. Чтобы выбрать из многих других подходящий метод для ее применения, без сомнения, нужно принять во внимание различные обстоятельства. Например, при этом имеет значение, требуется ли решать задачу для одного или небольшого числа конкретных случаев, или для очень большого числа. В последнем случае, если применение метода требовало, быть может, также некоторых подготовительных работ, то важно, чтобы избранный метод всякий раз обеспечивал возможно большее удобство и наглядность окончательных вычислений. Равным образом важно и то обстоятельство, требуется ли все результаты обширных тригонометрических работ давать в форме географических долгот и широт и притом исключительно *только* в *этой* форме, или на основании их (т. е. долгот и широт) для всех пунктов должны быть представлены в другой форме, например, в прямоугольных координатах; в последнем случае не так уже необходимо давать географические положения с самой высокой степенью точности.

Формулы, данные Дюсежуром, Лежандром, Деламбром и др., имеют в виду только первую степень сжатия Земли, что, впрочем, с практической точки зрения не имеет большого значения, так как сжатие земного сфероида представляет собой только малую дробь. Но при этом вовсе не говорится, что с практической точки зрения важным преимуществом можно считать, что новый метод совершенно не зависит от малого значения сжатия. Лучшие из таких способов, правда, могут обеспечить достаточную точность в большинстве случаев, хотя для этого не имеется достаточных математических доказательств. Напротив, можно утверждать, что новым методом можно производить более удобные и требующие значительно меньшего времени вычисления в их существенной части, если подготовлены необходимые материалы. Решение, данное Бесселем в 1825 г., отличается большой математической отдел-

кой, притом не связано с предположением, что расстояние между пунктами мало по сравнению с размерами всего земного сфероида. Теоретически это, без сомнения, преимущество его метода, но при рассмотрении его практической ценности надо принять во внимание следующие обстоятельства.

Метод этот не делает никакого различия между случаями бо́льшего или меньшего расстояния, но требует для всех случаев одинаково длинных вычислений; следовательно, он отказывается от выгод, которые можно извлечь при вычислениях, если пользоваться и другими методами при неодинаково часто встречающихся случаях. Польза при употреблении способа Бесселя ограничена, следовательно, тем случаем, когда оба пункта не связаны непосредственно стороной одного действительно измеренного треугольника, но когда связь между ними осуществляется более значительным рядом треугольников. Только тогда можно спросить, какие необходимы *данные* для решения нашей задачи, а именно: действительная длина соединяющих оба пункта геодезических линий и величина угла, который они образуют с меридианом в одном из конечных пунктов? Если сделать такое определение при помощи вычисления *на шаре* промежуточных треугольников (как это сделал Бессель для простирающегося на небольшое расстояние прусского градусного измерения) для более далеких расстояний, то это оказалось бы менее допустимым, но если такие вычисления должны быть выполнены на сфероиде, то уже само по себе потребуется столько работы, как если бы на каждом последующем пункте определялись широта, долгота и обратный азимут. Впрочем, эти замечания действительны также и для способа решения Айвори (Ivory), который во многом сходен со способом Бесселя, но имеет мало значения для чисто практических целей.

Относительно способа, описанного в настоящей статье, можно еще заметить следующее.

Формулы дают непосредственно *разности* между двумя широтами и между двумя азимутами, а также разность долгот; поэтому получается, что при небольшой величине этих разностей (причём в том, что касается азимутов, то один отсчитывается от точки юга, а другой — от точки севера) точность вычислений не требует применения многозначных таблиц логарифмов. Симметрия и простота формул происходят от того, что они зависят не от широты и азимута в начальном пункте, а от среднего из двух широт и среднего из двух азимутов. Отсюда следует, что формы могут быть использованы для решения упомянутой выше задачи только при косвенном (indirect) способе или способе последовательных приближений. Опытные вычислители при помощи небольших рациональных приемов вряд ли найдут в этих обстоятельствах какие-нибудь неудобства, особенно потому, что почти всегда к тому времени, когда должно начинаться точное вычисление, уже имеются весьма приближенные значения определяемых величин. Впрочем, точными могут быть названы также и другие способы решения задачи, как например способ Бесселя, отчасти отличающийся посредственным характером действий. Но самым существенным остаётся то обстоятельство, что из повторных приближений обычно сохраняют только последнее, полностью содержащее в себе самую сущность вычислений и отличающееся такой краткостью и наглядностью, как никакой другой способ.

Формулы для решения задачи на поверхности сфероида отличаются от таковых же на поверхности шара только тем, что известные вспомогательные величины являются постоянными для последних, в то вре-

мя как для первых они зависят от широты; поэтому их помещают в вспомогательных таблицах, аргументом в которых принята широта. Если под руками имеются такие вспомогательные таблицы, то в каждом конкретном случае вычисление на поверхности сфероида производится с такой же легкостью, как и на поверхности шара. Для зоны от 51 до 54 градусов широты, которая достаточна для ганноверской системы треугольников, такие вспомогательные таблицы приложены в конце нашей статьи; они составлены на основании того значения сжатия, которое вывел Бессель из всех градусных измерений, произведенных до сего времени, и которое уже положено нами в основание в первой статье. Кто хотел бы применить наш метод для системы треугольников, лежащей вне этой зоны, тот должен был бы для своих целей распространить дальше эти вспомогательные таблицы, или, если желательно положить в основу другое сжатие, составить новые вспомогательные таблицы. Там, где идет речь о большой системе треугольников, такая предварительная вспомогательная работа не идёт в расчёт, и затраченный на неё труд богато оплачивается удобством дальнейших вычислений. Наоборот, для случая, когда приходится иметь дело с задачей, для которой нужны одно или два конкретных решения, нашему методу не должно быть дано предпочтение перед другими.

Сообщение (Anzeige)

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 177 Seite 1761 bis 1768. November 5, 1827.

(Гёттингенские научные сообщения № 177, стр. 1761—1768, 5 ноября 1827 г.).

8 октября надворный советник Карл Фридрих Гаусс передал королевскому обществу статью

Disquisitiones generales circa superficies curvas.

(Общие исследования о кривых поверхностях).

Хотя геометры много занимались исследованиями о кривых поверхностях, и результаты их исследований составляют значительную часть области высшей математики, но все же этот предмет еще так далек от того, чтобы считаться исчерпанным, что можно скорее утверждать, что до сих пор возделана только меньшая часть такого в высшей степени плодородного поля. Автор уже в течение нескольких лет старался найти новый подход к решению задачи: как найти все изображения заданной поверхности на некоторой другой поверхности, при которой сохраняется подобие в бесконечно малых частях; цель настоящей статьи — вскрыть еще раз другие точки зрения на этот вопрос и изложить некоторую часть новых научных достижений, касающихся его. Поэтому мы здесь покажем всё, что может быть понято без слишком обширных пояснений, но при этом следует заранее отметить, что как новые понятия, так и наиболее общие теоремы нуждаются отчасти в некоторых ограничениях или в более точном определении; однако этих вопросов мы не можем здесь касаться.

При исследованиях, в которых приходится иметь дело с разнообразными направлениями прямых линий в пространстве, выгодно обозначать эти направления теми пунктами поверхности твердого шара, которые служат конечными точками радиусов, проведенных параллельно им; центр и радиус такого *вспомогательного шара* в данном случае совершенно произвольны; последний можно выбрать в линейных единицах. Этот способ в основном сходен со способом, постоянно применяемым в астрономии, где все направления относят к фиктивному шару бесконечно большого радиуса. Сферическая тригонометрия и некоторые другие теоремы, которым автор дал новое толкование, в отличие от обычного, служат тогда для решения задачи, в которой занимаются сравнением различных встречающихся направлений.

Если, согласно указанному выше способу, направлением нормали в точке кривой поверхности обозначить положение соответствующей точки на поверхности шара, т. е. каждой точке кривой поверхности соответствует, в указанном взаимоотношении, точка на поверхности вспомогательного шара, то, вообще говоря, каждой линии на кривой поверхности будет соответствовать некоторая линия на поверхности вспомогательного шара, а каждому участку первой поверхности — некоторый участок на второй поверхности. Чем меньше отклоняется такой участок от плоскости, тем меньше соответствующий участок на поверхности шара, а потому возникает вполне естественная идея — воспользоваться площадью соответствующего участка шаровой поверхности, как мерой полной кривизны (Totalkrümmung) участка кривой поверхности. Автор называет поэтому такую площадь полной (*ganze Krümmung*) *кривизной* соответственного участка кривой поверхности. Но, кроме величины кривизны, приходится принимать во внимание *положение* соответственных участков, которые, помимо соотношения их величин, могут быть подобными для обоих участков или перевернутыми (обратно расположенными); эти два случая будут различаться положительным или отрицательным знаком, стоящим перед значением полной кривизны. Впрочем, такое различие имеет определенное значение только в том случае, когда фигуры мыслятся на определенных сторонах обеих поверхностей; автор берет их на поверхности шара — на внешней стороне, а на кривой поверхности — на той стороне, к которой предполагается восстанавливать нормали; тогда получается, что положительный знак имеет место при поверхностях выпуклая-выпуклая или вогнутая-вогнутая (когда они не слишком отличаются одна от другой), и отрицательный знак — при поверхностях вогнутая-выпуклая. Если рассматриваемый участок кривой поверхности состоит из неодинаковых в этом смысле частей, то еще необходимы более точные определения, о которых здесь не будем говорить.

Отношение площадей двух соответствующих один другому участков кривой поверхности и поверхности вспомогательного шара приводит тогда к некоторому новому понятию (подобно тому, как например из отношения массы и объёма вытекает понятие плотности). Автор называет *мерой кривизны* (Krümungsmass) в некоторой точке кривой поверхности значение дроби, знаменатель которой равен площади бесконечно малого участка кривой поверхности в этой точке, а числитель равен площади соответствующего участка поверхности вспомогательного шара или полной кривизне этого элемента. Мы видим, что в понимании автора полная кривизна аналогична мере кривизны кривой поверхности, что в кривых линиях называется соответственно амплитудой или просто кривизной; он полагал, что последние выражения были перенесены на кривые поверхности больше по привычке, чем на основании их соответствия смыслу. Впрочем, самые названия имеют меньше значения, чем то обстоятельство, что введение их оправдывается важными положениями.

Решение задачи, как найти меру кривизны в каждой точке некоторой кривой поверхности, представляется в различной форме в зависимости от вида функции, в котором задана кривая поверхность. Простейший вид получается, когда пункты в пространстве, вообще, различаются координатами x, y, z, причём одна координата может быть представлена, как функция двух других; в этом случае получают простейшее выражение для меры кривизны. Но при этом получается замечательная связь между мерой кривизны и кривизной тех кривых линий, которые образуются при пересечении кривой поверхности плоскостями,

перпендикулярными к ней. Известно, что Эйлер впервые показал, что этим свойством обладают те секущие плоскости, которые взаимно пересекаются под прямым углом и у одной из них получается наибольший, а у другой наименьший радиус кривизны, или, точнее, что у них получаются два экстремальных значения кривизны. Тогда на основании приведенного выше выражения для меры кривизны она равна дроби, числитель которой единица, а знаменатель — произведение экстремальных радиусов кривизны. Менее простое выражение получается для меры кривизны, если свойства кривой поверхности определены уравнением, связывающим x, y, z, и еще сложнее, когда свойства кривой поверхности заданы так, что x, y, z представлены в виде функций двух новых переменных величин p, q. В последнем случае выражение содержит пятнадцать элементов, а именно: частные производные первого и второго порядка от x, y, z по p и q; но это само по себе менее важно, чем то обстоятельство, что этим делается переход к другому выражению, которое должно быть вычислено для весьма замечательных теорем в этом разделе науки. При таком способе представления свойств кривой поверхности общее выражение для любого линейного элемента на ней имеет форму

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2} \text{ для } \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

где E, F, G опять будут функциями p и q; упомянутое выше новое выражение для меры кривизны содержит теперь просто (bloss) эти величины и их частные производные первого и второго порядка. В таком случае видно, что для определения меры кривизны просто требуется знать общее выражение линейного элемента, даже не нужно знать выражение для координат x, y, z. Непосредственным следствием этого является замечательная теорема:

Теорема. *Если кривая поверхность или участок её может быть развернут на другой поверхности, то после развертывания мера кривизны в каждом пункте остается неизменной.*

Отсюда вытекает затем как частный случай: на кривой поверхности, которая может развертываться на плоскости, мера кривизны повсюду равна нулю. Тогда тотчас выводится уравнение, характеризующее поверхность, развертывающуюся на плоскости; если z рассматривается как функция от x и y, то

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0,$$

правда, это уравнение уже давно известно, но, по мнению автора, до сего времени оно не было доказано с необходимой строгостью.

Эти теоремы приводят к тому, что теория кривых поверхностей может рассматриваться с новой точки зрения, причём для исследования открывается обширное совершенно нетронутое поле деятельности. Если поверхности рассматриваются не как пределы тел, но как тела исчезающих размеров, и притом сгибаемые, а не растягиваемые, то легко понять, что следует рассматривать два существенно различных представления о них: или предполагается, что поверхность имеет определенную форму в пространстве, или она не зависит от различных форм, которые могут принимать поверхности. Последние именно и будут теми, о которых идёт речь; согласно тому, что было выше указано, к ним относится мера кривизны, но легко видеть, что именно на них, при соединении пунктов геодезическими линиями и т. д., рассматривается построение на поверхности фигур, их углов, их площадей и их полной кривизны. Все эти исследования должны быть основаны на том, что

свойства поверхностей заданы выражением для некоторого определенного линейного элемента в форме $\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$. Автор включил в настоящую статью часть своих исследований, произведенных в этой области, причем он ограничивался такими, которые не слишком удалены от исходных и частично могли бы служить общим вспомогательным средством для многих дальнейших исследований. В нашем сообщении мы ограничимся еще меньшим и будем довольствоваться тем, что приведем только некоторые исследования в качестве образца. Таковыми могут служить следующие теоремы.

Если на некоторой кривой поверхности из одного начального пункта выходит система бесконечно большого числа геодезических линий, то линия, проходящая через их конечные точки, пересекает каждую из них под прямым углом. Если через каждую точку любой линии на кривой поверхности проведены геодезические линии одинаковой длины, перпендикулярные к ней, то все эти линии перпендикулярны к той линии, которая соединяет их конечные пункты. Обе эти теоремы, из которых вторая может рассматриваться как обобщение первой, доказываются как аналитически, так и простыми геометрическими соображениями.

Избыток над двумя прямыми суммы углов треугольника, образованного геодезическими линиями, равен полной кривизне треугольника. При этом принимается за единицу: для углов — угол, которому соответствует дуга, равная радиусу (57°17′45″); а для полной кривизны — кривизна участка поверхности вспомогательного шара, площадь которого равна квадрату со стороной, равной радиусу вспомогательного шара. Очевидно, что эту важную теорему можно выразить еще так: сумма углов треугольника, образованного геодезическими линиями, относится к восьми прямым, как площадь части поверхности вспомогательного шара, равная его полной кривизне, относится ко всей поверхности вспомогательного шара. Вообще, избыток над $(2n-4)$ прямыми суммы углов многоугольника с n сторонами, если эти последние представляют собой геодезические линии, равен полной кривизне многоугольника.

Общие исследования, описанные в настоящей статье, в заключение, применяются также к теории треугольников, образованных геодезическими линиями, из которых мы приведем здесь только пару основных теорем. Пусть a, b, c — стороны такого треугольника (которые рассматриваются, как величины первого порядка); A, B, C — противолежащие им углы; α, β, γ — меры кривизны в вершинах этих углов; σ — площадь поверхности треугольника; в таком случае с точностью до величин четвертого порядка избыток над двумя прямыми суммы углов $A+B+C$ равен $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\sigma$. Затем, пусть с той же точностью углы плоского прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c в том же порядке равны:

$$A-\frac{1}{12}(2\alpha+\beta+\gamma)\sigma,$$

$$B-\frac{1}{12}(\alpha+2\beta+\gamma)\sigma,$$

$$C-\frac{1}{12}(\alpha+\beta+2\gamma)\sigma.$$

Последняя теорема представляет собой обобщение известной теоремы Лежандра, согласно которой с точностью до величин четвертого по-

рядка получаются углы прямолинейного треугольника, если углы сферического треугольника уменьшить на одну треть сферического избытка. Следовательно, на несферической поверхности углам нужно придавать различные по величине редукции; вообще говоря, это различие представляет собой величину третьего порядка; однако, если вся поверхность только немногим отличается от поверхности шара, то редукции содержат, кроме того, еще множитель того же порядка, как отклонение от поверхности шара. Бесспорно, для высшей геодезии важно, чтобы можно было вычислить различие этих редукций и получить таким образом полную уверенность, что они для всех треугольников триангуляции, измеряемых на поверхности Земли, могут рассматриваться как совершенно пренебрегаемые. Так, например, в самом большом треугольнике произведенной автором триангуляции, наибольшая сторона которого почти равна 15 географическим милям*, и в котором превышение над двумя прямыми суммы трёх углов почти равно 15 секундам, три редукции углов к углам прямолинейного треугольника оказались равными: 4″,951 13; 4″,951 04; 4″,951 31. Впрочем, автор вывел недостающие в приведенных выше выражениях члены четвертого порядка, которые получают очень простую форму для поверхности шара, но для треугольников, которые могут измеряться на поверхности Земли, они совсем пренебрегаемы и в приведенном выше примере они уменьшают первую редукцию только на две единицы пятого десятичного знака, а третью увеличивают на такую же величину.

* Длина этой стороны равна около 111 *км*, так как длина одной географической мили равна 7 407,7 *м*. **(Прим. ред.).**

Конформное отображение сфероида на плоскости[6]

(Метод проектирования ганноверской государственной съёмки)

[1]

[Вычисление географической широты и долготы по плоским прямоугольным координатам].

[При конформном переносе поверхности сфероида на плоскость один меридиан, главный меридиан, представляется прямой линией, осью x. Каждый отрезок на оси абсцисс равен части главного меридиана, изображением которой он является.

Пусть a — большая полуось и e — эксцентриситет меридианного эллипса. Пусть некоторой точке на поверхности эллипсоида, широта которой Ф, а долгота λ, соответствуют на плоскости прямоугольные координаты x, y. Пересечению окружности параллели с широтой Ф с главным меридианом принадлежит абсцисса ξ, а конечной точке абсциссы x — широта $\varphi \cdot \xi$ и x являются одновременно соответствующими дугами меридиана от экватора].

Пусть линейный элемент

$$= \sqrt{d\Phi^2 + \left(\Theta\,(\Phi)\right)^2 d\lambda^2}\,.$$

Если

$$\int \frac{d\Phi}{\Theta\,(\Phi)} = f\,(\xi),$$

то

$$f\,(x+iy) = f\,(\xi) + i\lambda = F\,(\Phi) + i\lambda. \qquad (7)$$

[Для сфероида имеем

$$ds^2 = \frac{a^2\,(1-e^2)^2}{(1-e^2\,\sin^2\,\Phi)^3}\,d\,\Phi^2 + \frac{a^2\,\cos^2\,\Phi}{1-e^2\,\sin^2\,\Phi}\,d\lambda^2 =$$

$$= \frac{a^2\,(1-e^2)^2}{(1-e^2\,\sin^2\,\Phi)^3}\left\{ d\Phi^2 + \left(\frac{(1-e^2\,\sin^2\Phi)\,\cos\,\Phi}{1-e^2}\right)^2 d\lambda^2 \right\}.$$

Разлагая $f\,(x+iy)$ по степеням iy, получаем:

$$f\,(\xi) = F(\Phi) = f\,(x) - \frac{1}{2}\,y^2 f^{\mathrm{II}}(x) + \frac{1}{24}\,y^4\,f^{\mathrm{IV}}\,(x) - \ldots$$

$$\lambda = y f^{\mathrm{I}}\,(x) - \frac{1}{6}\,y^3\,f^{\mathrm{III}}\,(x) + \frac{1}{120}\,y^5\,f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots$$

Для $y=0$ $\Phi=\varphi$, следовательно]

$$F(\varphi)=f(x).$$

[Так как $\frac{1}{\Theta(\varphi)}=F'(\varphi)$, то]

$$F'(\varphi)=\frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}.$$

[x возрастает вместе с φ, следовательно]

$$dx=\frac{a(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}},$$

[с этим будем иметь]

$$f^1(x)=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{a\cos\varphi},$$

[и далее]

$$f^{II}(x)=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi}$$

$$f^{III}(x)=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{a^3(1-e^2)\cos^3\varphi}\left\{1+(1-3e^2)\sin^2\varphi+e^2\sin^4\varphi\right\}$$

$$\left[=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{a^3(1-e^2)\cos^3\varphi}\left\{(1-e^2)(2-\cos^2\varphi)+e^2\cos^4\varphi\right\}\right]$$

$$f^{IV}(x)=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2\sin\varphi}{a^4(1-e^2)^2\cos^4\varphi}\left\{5-9e^2+(1-4e^2+15e^4)\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+(e^2-13e^4)\sin^4\varphi+4e^4\sin^6\varphi\right\}\quad\left[=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2\sin\varphi}{a^4(1-e^2)^2\cos^4\varphi}\right\{$$

$$\left.\left\{(1-e^2)^2(6-\cos^2\varphi)+e^2(1-e^2)\cos^4\varphi-4e^4\cos^6\varphi\right\}\right]$$

и т. д.

[Закон дифференцирования следующий]

Полагаем

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}=t\ [\sin\varphi=s]$$

и

$$f^n(x)=t^nu,$$

тогда

$$f^{n+1}(x)=t^{n+1}\left\{nus+\frac{du}{ds}\cdot\frac{(1-s^2)(1-e^2s^2)}{1-e^2}\right\}$$

или, пренебрегая степенями e^2,

$$f^{n+1}(x)=t^{n+1}\left\{nus+\frac{du}{ds}(1-s^2)(1+e^2)(1-s^2)\right)\Big\}.$$

Тогда найдем для

n	u
1	1
2	s
3	$1+s^2+e^2\ (1-s^2)^2$
4	$5s+s^3+e^2\ (1-s^2)^2\ s$

[Подстановка значений $f^{I}(x)$ и $f^{III}(x)$ в равенство для λ даёт:]

$$\lambda=\frac{(1-e^2\ \sin^2\varphi)^{1/2}}{a\ \cos\varphi}\ y-\frac{(1-e^2\ \sin^2\varphi)^{3/2}}{6a^3\ (1-e^2)\cos^3\varphi}\Big(2(1-e^2)-(1-e^2)\cos^2\varphi+$$

$$+e^2\ \cos^4\varphi\Big)\ y^3\ldots$$

[Полагая]

$$F\ (\Phi)=F\ (\varphi)+\omega$$

[где, следовательно,

$$\omega=-\frac{1}{2}\ y^2 f^{II}\ (x)+\frac{1}{24}y^4\ f^{IV}(x)\ldots$$

будем иметь:]

$$\Phi=G\left\{F\ (\varphi)+\omega\ \right\}=\varphi+A\omega+B\omega^2+C\omega^3+\ldots$$

[причём]

$$A=\left[\frac{d\varphi}{dF}=\right]\ \frac{(1-e^2\ \sin\ \varphi^2)\ \cos\ \varphi}{1-e^2}.$$

[Если положить

$$-F^1\ (\varphi)=\frac{d\omega}{d\varphi}$$

то]

$$1+\frac{dA}{d\varphi}\cdot\omega+\frac{dB}{d\varphi}\cdot\omega^2+\frac{dC}{d\varphi}\cdot\omega^3\ldots$$

$$=AF^1+2BF^1\cdot\omega+[3CF^1\cdot\omega^2+4DF^1\cdot\omega^3+]\ldots,$$

[отсюда следует]:

$$AF^1=1 \qquad 2B=AA^1$$

$$2BF^1=A^1 \qquad 3C=AB^1$$

$$3CF^1=B^1 \qquad 4D=AC^1$$

и т. д. и т. д.

$$A^1=-\frac{\sin\varphi}{1-e^2}\ (1+2e^2-3e^2\ \sin^2\varphi),$$

$$B=-\frac{1-e^2\ \sin^2\ \varphi}{2\ (1-e^2)^2}\sin\varphi\cos\varphi\,(1+2e^2-3e^2\sin^2\varphi).$$

[Если в равенство $\Phi=\varphi+A\omega+B\omega^2+\ldots$ подставить значение ω, получим прежде всего

$$\Phi=\varphi-\frac{1}{2}Af^{II}\ (x)\cdot y^2+\left(\frac{1}{24}Af^{IV}(x)+\frac{1}{4}B\left(\left(f^{II}\ (x)\right)^2\right)\right)y^4\ldots;$$

С вышестоящими значениями для A и B и значениями $f^{II}(x)$ и $f^{IV}(x)$, получим

$$\Phi = \varphi - \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2\ \mathrm{tg}\ \varphi}{2a^2\ (1-e^2)}y^2 + \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^3\sin\varphi}{24a^4\ (1-e^2)^3\cos^3\varphi}\Big\{5 -$$

$$-9e^2-(2+7e^2-21e^4)\sin^2\varphi+(10e^2-22e^4)\sin^4\varphi+4e^4\sin^6\varphi\Big\}y^4\ldots$$

[или]

$$\Phi = \varphi - \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2\ \mathrm{tg}\varphi}{2a^2\ (1-e^2)}y^2 + \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^3\sin\varphi}{24a^4\ (1-e^2)^3\cos^3\varphi}\Big\{3\ (1-e^2)^2+$$

$$+(2-11e^2)\ (1-e^2)\cos^2\varphi+10e^2\ (1-e^2)\cos^4\varphi-4e^4\cos^6\varphi\Big\}y^4\ldots$$

[Если положить $\Phi = \varphi - z$, то

$$\lg\ \mathrm{hyp}^*\sin\Phi = \lg\ \mathrm{hyp}\ \sin\varphi - \frac{1}{\mathrm{tg}\ \varphi}z - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\varphi}z^2\ldots;$$

[откуда]

$$\lg\ \mathrm{hyp}\ \sin\Phi = \lg\ \mathrm{hyp}\ \sin\varphi - \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{2a^2\ (1-e^2)}y^2 +$$

$$+\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}{12a^4\ (1-e^2)^2}\Big\{1-7e^2+5e^2\cos^2\varphi-\frac{2e^4}{1-e^2}\cos^4\varphi\Big\}y^4\ldots$$

[2]

[Вычисление сближения меридианов по плоским прямоугольным координатам].

[Сближение меридианов c — это угол, образуемый изображением меридиана с прямой, параллельной к оси x. Пусть x положителен к северу, тогда

$$\mathrm{tg}c = -\frac{dy}{dx},$$

[8]

но из равенства, выражающего на плоскости меридиан с долготой λ

$$\lambda = \mathrm{const} = yf^{I}(x) - \frac{1}{6}y^3f^{III}(x)\ldots,$$

вытекает

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yf^{II}(x) - \frac{1}{6}y^3f^{IV}(x)\ldots}{f^{I}(x) - \frac{1}{2}y^2f^{III}(x)},$$

следовательно, имеем:]

$$\mathrm{tg}\ c = \frac{yf^{II}(x) - \frac{1}{6}y^3f^{IV}(x)\ldots}{f^{I}(x) - \frac{1}{2}y^2f^{III}(x)\ldots}$$

$$\Big[= y\frac{f^{II}(x)}{f^{I}(x)}\Big\{1 - y^2\Big(\frac{1}{6}\frac{f^{IV}(x)}{f^{III}(x)} - \frac{1}{2}\frac{f^{III}(x)}{f^{I}(x)}\Big)\ldots\Big\}.$$

* lg hyp обозначает гиперболический или натуральный логарифм (Прим. ред).

Отсюда получается

$$\operatorname{tg} c = D \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a}\, y \operatorname{tg} \varphi,$$

где

$$\lg \operatorname{hyp} D = \left(-\frac{1}{6} \frac{f^{IV}(x)}{f^{II}(x)} + \frac{1}{2} \frac{f^{III}(x)}{f^{I}(x)} \right) y^2 \ldots$$

$$= -\frac{1}{3} y^2 \frac{(1 - e^2 \sin \varphi^2)^2}{a^2 (1 - e^2)^2} (1 - 3e^2 + 2e^2 \sin^2 \varphi) \ldots$$

[или приближённо]

$$= -\frac{1}{3} \frac{y^2}{a^2} (1 - e^2).$$

[Далее имеем:]

$$c = y \frac{f^{II}(x)}{f^{I}(x)} - \frac{1}{6} y^3 \left\{ \frac{f^{IV}(x)}{f^{I}(x)} - \frac{3 f^{II}(x)\, f^{III}(x)}{(f^{I}(x))^2} + 2 \left(\frac{f^{II}(x)}{f^{I}(x)} \right)^3 \right\} \ldots$$

[или, если положить

$$\frac{f^{II}(x)}{f^{I}(x)} = h(x),$$

то

$$c = y h(x) - \frac{1}{6} y^3 h^{II}(x) \ldots \Big].$$

$$h(x) = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \sin \varphi}{a \cos \varphi}$$

$$h^1(x) = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cdot}{a^2 (1 - e^2) \cos^2 \varphi} \left\{ 1 - 2e^2 \sin^2 \varphi + e^2 \sin^4 \varphi \right\}$$

$$\Big[h^{II}(x) = \frac{2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \sin \varphi}{a^3 (1 - e^2)^2 \cos^3 \varphi} \Big\{ 1 - 3e^2 + (2e^2 + 4e^4) \sin^2 \varphi -$$

$$- (e^2 + 5e^4) \sin^4 \varphi + 2e^4 \sin^6 \varphi \Big\} = \frac{2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \sin \varphi}{a^3 (1 - e^2)^2 \cos^3 \varphi} \Big\{ (1 - e^2)^2 -$$

$$- e^2 (1 - e^2) \cos^4 \varphi - 2e^4 \cos^6 \varphi \Big\} \Big].$$

Следовательно, имеем

$$c = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a} \operatorname{tg} \varphi . y - \frac{1}{3} \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \sin \varphi}{a^3 (1 - e^2)^2 \cos^2 \varphi} \Big\{ 1 - 3e^2 +$$

$$+ (2e^2 + 4e^4) \sin^2 \varphi - (e^2 + 5e^4) \sin^4 \varphi + 2e^4 \sin^6 \varphi \Big\} y^3 \ldots$$

[или]

$$c = \frac{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}}{a} \operatorname{tg} \varphi \cdot y - \frac{1}{3} \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi}{a^3 (1 - e^2)^2 \cos^3 \varphi} \Big\{ (1 - e^2)^2 -$$

$$- e^2 (1 - e^2) \cos^4 \varphi - 2e^4 \cos^6 \varphi \Big\} y^3 \ldots$$

[Можно также получить, если ввести λ:]

$$c = \lambda \sin \varphi - \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \operatorname{tg} \varphi}{6a^3 (1 - e^2)^2} \left\{ (1 - e^2)^2 - 3e^2 (1 - e^2) \cos^2 \varphi - \right.$$

$$\left. - 4e^4 \cos^4 \varphi \right\} y^3 \ldots$$

[3]

Для вычислений наиболее удобны следующие формулы:
Пусть

$$L = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} y}{a \rho \cos \varphi}$$

$$M = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2 \operatorname{tg} \varphi \cdot y^2}{2a^2 (1 - e^2) \rho}$$

$$N = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \operatorname{tg} \varphi \cdot y}{a \rho}.$$

Тогда имеем:

$$\lg \lambda = \lg L - A \cdot L^2,$$

$$\lg (\varphi - \Phi) = \lg M - B \cdot L^2,$$

$$\lg c = \lg N - C \cdot L^2,$$

φ	$\lg A$	$\lg B$	$\lg C$
	— 10	— 10	— 10
50°	5,431 6218	5,510 4149	5,531 3175
3′	8555	2206	95
6	5,432 0889	0263	5,531 3216
9	3222	5,509 8319	36
12	5552	6376	57
15	7881	4432	77
18	5,433 0208	2488	97
21	2532	0544	5,531 3318
24	4854	5,508 8600	38
27	7174	6656	59
30	9494	4712	79
33	5,434 1810	2768	99
36	4124	0823	5,531 3419
39	6438	5,507 8878	39
42	8748	6934	59
45	5,435 1057	4989	79

φ	lg A	lg B	lg C
48	3364	3044	99
51	5668	1100	5,531 3519
54	7971	5,506 9155	38
57	5,436 0271	7210	58
51 0	2570	5265	78

где логарифмы A, B и C наиболее удобно извлекать из приведеннной выше таблицы по аргументу φ. Для вычисления этой таблицы служат формулы:

$$A = H\left\{0{,}75 - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{e^2}{2(1-e^2)}\cos^4\varphi\right\},$$

$$B = H\left\{0{,}75 + \frac{2-11e^2}{4(1-e^2)}\cos^2\varphi + \frac{5e^2}{2(1-e^2)}\cos^4\varphi - \frac{e^4}{(1-e^2)^2}\cos^6\varphi\right\}.$$

$$C = H\left\{1 - \frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi - \frac{2e^4}{(1-e^2)^2}\cos^6\varphi\right\},$$

где $H = \frac{1}{3}k\rho^2 \cdot 10^7$, lg $H = 5.531\ 8128_{-10}$

k — модуль бригговых логарифмов;

$$\rho = \frac{1}{206264.8...}$$

Члены $A \cdot L^2$, $B \cdot L^2$, $C \cdot L^2$ получают в единицах 7-го десятичного знака, а λ, φ — Ф и c — в секундах.

В основе помещенной выше таблицы для логарифмов A, B, C лежит значение сжатия $\frac{1}{302{,}68}$]

[4]

[Имеем также]

$$\lambda = A' \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a} \cdot \frac{y}{\cos\varphi},$$

где

$$\lg \operatorname{hyp} A' = -\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{6}\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{a^2(1-e^2)}y^2...$$

или

$$= -\frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1-e^2}{6a^2}\left(1 - \frac{e^4}{(1-e^2)^2}\cos^4\varphi\right)y^2 ...$$

[и приближённо]

$$= -\frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1-e^2}{6a^2}y^2.$$

[Далее имеем]

$$\Phi = \varphi - B' \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{2a^2\,(1-e^2)}\ \mathrm{tg}\ \varphi \cdot y^2,$$

где [приближённо]

$$\lg\ \mathrm{hyp}\ B' = -\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{a^2} =$$

$$= -\frac{5}{12}\lambda^2 + \frac{1}{6}\,c^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\,c^2 - \frac{5}{12}\,\frac{y^2}{a^2}.$$

Можно также положить

$$c = C'\,\frac{\sqrt{1-e^2\,\sin^2\varphi}}{a}\ \mathrm{tg}\ \varphi \cdot y,$$

где

$$\lg\ \mathrm{hyp}\ C' = -\frac{1}{3}\,c^2 - \frac{1}{3}\left\{\frac{1-e^2\,\sin^2\varphi}{a^2} - \frac{e^2\,(1-e^2\sin^2\varphi)\,\cos^2\varphi)}{a^2(1-e^2)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(1-e^2+2e^2\,\cos^2\varphi)}{} \right\} y^2 \ldots$$

[или приближенно]

$$= -\frac{1}{3}\,c^2 - \frac{1}{3}\,\frac{1-e^2}{a^2}\,y^2\Big].$$

[5]

Если положение точки на плоскости представлено координатами x, y, то можно находить широту Φ этой точки, её долготу λ и сближение её меридиана c следующим образом.

Пусть φ — широта, относящаяся к абсциссе x, если её рассматривать как дугу меридиана,

$$q = \mathrm{compl.}\ \lg \sqrt{1-e^2\,\sin^2\varphi},$$

$$E = \frac{1-e^2}{6a^2} \cdot k \cdot 10^7,$$

$$H = \frac{k \cdot 10^7}{3.206265^2}.$$

[κ — модуль бригговых логарифмов

$$\lg\ B = \lg\frac{206264{,}8\ldots}{a} - q,\quad \lg\ A = \lg\frac{206264{,}8\ldots}{a\,(1-e^2)} - 3q,$$

$$\lg\ C = \lg\frac{206264{,}8\ldots}{2a^2(1-e^2)} - 4q.$$

Таблица 1
(образец)

50°	lg A 8.5101...—10	lg B 8.5089...—10	lg β 4...—10	lg γ 1...—10	lg δ 4...—10	lg ε 1...—10
0′	8.510 1751	8.508 9856	4.62991	1.64957	4.62922	1.40371
1	39	52				1.40370
2	27	48		1.64957		
3	14	43		1.64956		
4	8.510 1702	39			4 62922	
5	8.510 1690	8.508 9835			4.62923	
6	77	8.508 9831				1.40370
7	65	27				1.40369
8	53	28	4.62991			
9	40	19	4.62990			
10	28	8.508,9815			4.62923	
11	15	8.508 9811			4.62924	
12	8.510 1603	06				1.40369
13	8.510 1591	8.508 9802				1.40368
14	78	8.508 9798				
15	66	8.508 9794		1.64956		
16	54	8.508 9790		1.64955	4.62924	
17	41	86			4.62925	
18	29	82				1.40368
19	17	78				1.40367
20	8.510 1504	8.508 9774				
21	8.510 1492	8.508 9769	4.62990			
22	80	65	4.62989		4.62925	
23	67	61			4.62926	
24	55	57				1.40367
25	43	8.508 9753				1.40366

Таблица 2

φ	lg q	φ	lg q (образец)
48° 0′	7925 420	49 0	74.475
4	42.053	4	8191.040
8	58.683	8	8207.599
12	75.309	12	24.154
16	7991.932	16	40.703
20	8008.550	20	57.246
24	25.163	24	73.783
28	41.772	28	8290.315
32	58.376	32	8306.840
36	74.976	36	23.360
40	8091.571		
44	8108.162		
48	24.748		
52	41.329		
56	57.904		

В качестве сжатия принято $\frac{1}{302{,}68}$]

$$\lg E = 2{,}24756\ 29768_{-10},\quad \lg H = 5{,}53181\ 27903_{-10},$$

$$\lg B = 8.50982\ 72984_{-10} - q$$

$$\lg C = \lg \frac{AB}{2.206264{,}8\ldots} = 1.40707\ 38825_{-10} - 4q.$$

[Для вычисления A и B можно непосредственно воспользоваться табл. 1, или извлечь q из табл. 2]

$$\varepsilon = (1)\ By\ \operatorname{tg}\varphi \qquad \lg(1) = -2Ey^2 - Hc^2$$

$$\lambda = (2)\ B\frac{y}{\cdot\cos\varphi} \qquad \lg(2) = +Ey^2 - H\lambda^2$$

$$\Phi = \varphi - (3)\ Cy^2\ \operatorname{tg}\varphi \qquad \lg(3) = -\frac{3}{4}H\lambda^2 - Ey^2 =$$

$$= -\frac{5}{4}H\lambda^2 + \frac{1}{2}Hc^2 =$$

$$= -\frac{3}{4}Hc^2 - \frac{5}{2}Ey^2$$

[lg (1), lg (2), lg (3) получаются в единицах 7-го десятичного знака; ε, λ, $\Phi - \varphi$ получаются в **секундах**]

[Вычисление масштаба n].

[n — есть отношение линейного элемента на плоскости к соответствующему элементу на эллипсоиде.]

Пусть

$$f^{\mathrm{I}}(x) = a$$
$$f^{\mathrm{II}}(x) = b$$
$$f^{\mathrm{III}}(x) = c$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = d$$

и т. д.

[Положим

$$\xi = x - w,$$

тогда из

$$f(x+iy) = f(x-w) + i\lambda];$$

следует

$$f(x) = \frac{1}{2} b \cdot y^2 + \frac{1}{24} d \cdot y^4 - \frac{1}{720} f \cdot y^6 \ldots = f(x) - aw + \frac{1}{2} bw^2 - \frac{1}{6} cw^3 \ldots$$

[Если положить]

$$at = \frac{1}{2} by^2 - \frac{1}{24} d \cdot y^4 + \frac{1}{720} fy^6 \ldots,$$

то

$$t = w - \frac{b}{2a} w^2 + \frac{c}{6a} w^3 \ldots$$

[или обращая]

$$w = t + \frac{b}{2a} t^2 + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{6a}\right) f^3 \ldots;$$

[Следовательно, будет]

$$w = \frac{b}{2a} y^2 + \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{d}{24a}\right) y^4 + \left(\frac{b^5}{16a^5} - \frac{b^3 c}{48a^4} - \frac{b^2 d}{48a^3} + \frac{f}{720a}\right) y^6 \ldots$$

[и]

$$\xi = x - \frac{b}{2a} y^2 + \frac{a^2 d - 3b^3}{24a^3} y^4 - \frac{a^4 f - 15a^2 b^2 d - 15ab^3 c + 45b^5}{720a^5} y^6 \ldots$$

[Так как

$$f^{\mathrm{I}}(\xi) = f^{\mathrm{I}}(x) - wf^{\mathrm{II}}(x) + \frac{1}{2} w^2 f^{\mathrm{III}}(x) - \frac{1}{6} w^3 f^{\mathrm{IV}}(x) + \ldots$$

$$= a - bw + \frac{1}{2} cw^2 - \frac{1}{6} dw^3 + \ldots,$$

то]

$$f^1(\xi) = a \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} y^2 + \left(\frac{1}{24} \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{8} \frac{b^2 c}{a^3} - \frac{1}{8} \frac{b^4}{a^4}\right) y^4 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{720} \frac{bf}{a^2} + \frac{1}{48} \frac{bcd}{a^3} - \frac{1}{12} \frac{b^4 c}{a^5} + \frac{1}{16} \frac{b^6}{a^6}\right) y^6 \ldots \right\}.$$

Имеем

$$f(\xi) = f(x) - \frac{1}{2} by^2 + \frac{1}{24} dy^4 \ldots$$

$$\lambda = ay - \frac{1}{6} cy^3 + \frac{1}{120} ey^5 \ldots;$$

полагая

$$\frac{df(\xi)}{dx} = \left] a\left(1 - \frac{1}{2}\frac{c}{a}y^2 + \frac{1}{24}\frac{e}{a}y^4 \ldots\right) = u\right.$$

$$\left[\frac{d\lambda}{dx} = \right] a\left(\frac{b}{a}y - \frac{1}{6}\frac{d}{a}y^3 + \frac{1}{120}\frac{f}{a}y^5 \ldots\right) = v,$$

[будем иметь]

$$\frac{u}{f^1(\xi)} = \frac{\cos c}{n} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right)y^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{24}\frac{e}{a} - \frac{1}{24}\frac{bd}{a^2} - \frac{3}{8}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{3}{8}\frac{b^4}{a^4}\right)y^4 \ldots$$ [9]

$$\frac{v}{f^1(\xi)} = \frac{\sin c}{n} = \frac{b}{a}y - \left(\frac{1}{6}\frac{d}{a} - \frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3}\right)y_8 \ldots;$$ [9]

[где, как и ранее, c обозначает сближение меридианов; далее получаем:]

$$\frac{1}{n^2} = 1 + \left(-\frac{c}{a} + 2\frac{b^2}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{12}\frac{e}{a} - \frac{5}{12}\frac{bd}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2} - \frac{5}{4}\frac{b^2c}{a^3} + 2\frac{b^4}{a^4}\right)y^4 \ldots$$

[и]

$$2\lg n = \left(\frac{c}{a} - 2\frac{b^2}{a^2}\right)y^2 + \left(-\frac{1}{12}\frac{e}{a} + \frac{5}{12}\frac{bd}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2} - \frac{3}{4}\frac{b^2c}{a^3}\right)y^4 \ldots$$

[Как и в соседних статьях, логарифм здесь гиперболический*].

[7]

[Имеем также]

$$\lg n - ic = \lg f^1(\xi) - \lg f^1(x + iy),$$

[откуда]

$$\lg n = \lg f^1(\xi) - \text{Pars. Real.}^{**} \lg f^1(x + iy).$$

[Итак, имеем]

$$\lg f^1(\xi) = \lg a - \frac{b^2}{2a^2}y^2 + \frac{a^2bd + 3ab^2c - 6b^4}{24a^4}y^4 \ldots,$$

$$\left[f^1(x + iy) = a\left(1 + i\frac{b}{a}y - \frac{1}{2}\frac{c}{a}y^2 - \frac{1}{6}i\frac{d}{a}y^3 + \frac{1}{24}\frac{e}{a}y^4 \ldots\right)\right.$$

$$\lg f^1(x + iy) = \lg a + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)y^2 + \left(\frac{ae - 4bd + 3c^2}{24a^2} - \frac{(b^2 - ac)^2}{4a^4}\right)y^4 \ldots$$

$$\left. + i\left(\frac{b}{a}y - \left(\frac{1}{6}\frac{d}{a} - \frac{1}{2}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\right)y^3 \ldots\right)\right]$$

---

* Гиперболический логарифм равен натуральному логарифму.

** Pars. Real.— действительная часть. **(Прим. ред.)**.

Pars Real. $\lg f^{I}(x+iy) = \lg a + \frac{b^2-ac}{2a^2}y^2 + \frac{a^3e-4a^2bd-3a^2c^2}{24a^4} +$

$$+\frac{12ab^2c-6b^4}{24a^4}y^4\ldots$$

Следовательно,

$$\lg n = \frac{ac-2b^2}{2a^2}y^2 - \frac{a^2e-5abd-3ac^2+9b^2c}{24a^3}y^4$$

$$c = \frac{b}{a}y - \frac{a^2d-3abc+2b^3}{6a^3}y^3\ldots$$

Если в первое равенство подставить для $a=f'(x)$, $b=f''(n)$ и т. д., то получим:]

$$\lg n = \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{2a^2(1-e^2)}y^2 - \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}{12a^4(1-e^2)^3}\Big\{1-3e^2+(e^2+15e^4)\sin^2\varphi-$$

$$-14e^4\sin^4\varphi\Big\}y^4\ldots$$

[где по-прежнему a и e обозначают естественно большую полуось и эксцентриситет].

[8]

Или, полагая

$$\frac{1}{f^{I}(x)} = \Theta(x) = \alpha = \frac{1}{a},$$

$$\Theta^{I}(x) = \beta = -\frac{b}{a^2} = -\sin\varphi,$$

$$\Theta^{II}(x) = \gamma = \frac{2b^2-ac}{a^3},$$

$$\Theta^{III}(x) = \delta = \frac{-6b^3+6abc-a^2d}{a^4},$$

$$\Theta^{IV}(x) = \varepsilon = \frac{24b^4-36ab^2c+6a^2c^2+8a^2bd-a^3e}{a^5}$$

и т. д.,

[будем иметь]

$$\lg n = -\frac{\gamma}{2\alpha}y^2 + \frac{\alpha^2\varepsilon-3\alpha\beta\delta-3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma}{24a^3}y^4\ldots$$

$$n = 1-\frac{\gamma}{2\alpha}y^2 + \frac{\alpha^2\varepsilon-3\alpha\beta\delta+3\beta^2\gamma}{24a^3}y^4\ldots$$

[9]

Имеем также [если положить $\frac{1}{f^{I}(\xi)} = \Theta(\xi)$]

$$\frac{\partial^2\lg n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lg n}{\partial y^2} = -\frac{\Theta^{II}(\xi)}{n^2\Theta(\xi)}.$$

Если теперь

$$\frac{\Theta''(\xi)}{\Theta(\xi)} = -A - By^2 - Cy^4 - \ldots,$$

то будем иметь [полагая $\frac{\partial A}{\partial x} = A'$, $\frac{\partial A'}{\partial x} = A''$ и т. д.]

$$\lg n = \frac{1}{2} Ay^2 + \frac{1}{12}\left(B - A^2 - \frac{1}{2}A''\right)y^4 + \left(\frac{1}{30}C - \frac{1}{360}B'' - \frac{7}{180}AB + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{45}A^3 + \frac{1}{180}A'^2 + \frac{1}{120}AA'' + \frac{1}{720}A^{IV}\right)y^6 \ldots$$

[10]

[Имеем]

$$\lg n = N$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2}{a^2 n^2 (1 - e^2)}$$

или

$$\frac{n\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n\partial^2 n}{\partial y^2} - \left(\frac{n\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \Phi)^2}{a^2 (1 - e^2)}.$$

[Соотношения между x, y и ξ, λ]

[11]

[Обращение рядов для ξ и λ в § 6 даёт, так как в соответствии с § 8:

$a = \frac{1}{\alpha}$, $b = -\frac{\beta}{\alpha^2}$, $c = -\frac{\gamma}{\alpha^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha^3}$, $d = -\frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{6\beta\gamma}{\alpha^3} - \frac{6\beta^3}{\alpha^4}$ и т. д.]

$$x = \xi - \frac{1}{2}\alpha\beta\lambda^2 + \frac{1}{24}\left(\alpha^3\delta - 2\alpha^2\beta\gamma - 5\alpha\beta^3\right)\lambda^4 \ldots$$

$$y = \alpha\lambda - \frac{1}{6}(\alpha^2\gamma - 2\alpha\beta^2)\lambda^3 \ldots$$

[12]

Полагая

$\int e^{-\vartheta(t)} dt = f(t)$, [следовательно, согласно § 8 : $\Theta(t) = e^{\vartheta(t)}$]

и

$\vartheta^{I}(x) = \alpha_1$ [то будем иметь] $f^{II}(x) = (-\alpha_1) f^{I}(x)$

$\vartheta^{II}(x) = \beta_1$ $f^{III}(x) = (\alpha_1^2 - \beta_1) f^{I}(x)$

$\vartheta^{III}(x) = \gamma_1$ $f^{IV}(x) = (-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\beta_1 - \gamma_1) f^{I}(x)$

$\vartheta^{IV}(x) = \delta_1$ $f^{V}(x) = (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2\beta_1 + 4\alpha_1\gamma_1 + 3\beta_1^2 - \delta_1) f^{I}(x)$

[$\vartheta^{V}(x) = \varepsilon_1$ $f^{VI}(x) = (-\alpha_1^5 + 10\alpha_1^3\beta_1 - 10\alpha_1^2\gamma_1 - 15\alpha_1\beta_1^2 + 5\alpha_1\delta_1 +$
$+ 10\beta_1\gamma_1 - \varepsilon_1) f^{I}(x)$]

и т. д. и т. д.

[и ряды для ξ и λ из § 6 переходят в следующие:]

$$\xi = x + \frac{1}{2}\alpha_1 y^2 + \left(\frac{1}{12}\alpha_1^3 + \frac{1}{8}\alpha_1\beta_1 - \frac{1}{24}\gamma_1\right) y^4 +$$

$$+ \left(\frac{1}{45}\alpha_1^5 + \frac{5}{72}\alpha_1^3\beta_1 - \frac{1}{144}\alpha_1^2\gamma_1 + \frac{1}{48}\alpha_1\beta_1^2 - \frac{1}{144}\alpha_1\delta_1 - \frac{1}{72}\beta_1\gamma_1 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{720}\varepsilon_1\right) y^6 \ldots$$

$$\lambda = yf^{\mathrm{I}}(x)\left\{1 - \frac{1}{6}\left(\alpha_1^2 - \beta_1\right)y^2 + \frac{1}{120}\left(\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2\beta_1 + 4\alpha_1\gamma_1 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\beta_1^2 - \delta_1\right) y^4 \ldots\right\}.$$

[13]

[Вычисление плоских прямоугольных координат по географической широте и долготе].

При обратной задаче [вычисление координат x, y по широте Φ и долготе λ] мы обозначаем через g обратную функцию от f, так что $g(f(x)) = x$ и принимаем $F(\Phi) = F$.

Тогда имеем

$$\left[x + iy = g\ (F + i\lambda),\right.$$

$$x = g\ (F) - \frac{\lambda^2}{2}\, g^{\mathrm{II}}\ (F) + \frac{\lambda^4}{24}\, g^{\mathrm{IV}}(F) \ldots$$

$$\left. y = \lambda g^{\mathrm{I}}\ (F) - \frac{\lambda^3}{6} g^{\mathrm{III}}\ (F) + \frac{\lambda^5}{120}\, g^{\mathrm{V}}(F)\ \ldots\right]$$

$$g\ (F) = X$$

[если X обозначает абсциссу пересечения окружности параллели Φ с главным меридианом согласно п. 1, то $f\ (X) = F\ (\Phi)$, и следовательно,

$$\frac{dX}{dF} = \frac{1}{f^{\mathrm{I}}(X)}.$$

С этим будем иметь:]

$$g^{\mathrm{I}}\ (F) = \frac{1}{f^{\mathrm{I}}\ (X)} = \frac{ac}{p} = h,$$

$$c = \cos\ \Phi,\ s = \sin\ \Phi,\ p = \sqrt{1 - e^2\ \sin^2\ \Phi}$$

[a — большая полуось, а e — эксцентриситет].

Для дальнейшего дифференцирования

$$\frac{d\Phi}{dF} = \frac{p^2 c}{1 - e^2}\left[= c + \delta c^3;\ \frac{e^2}{1 - e^2} = \delta\right]$$

или, пренебрегая высшими степенями e^2: $\dfrac{d\Phi}{dF} = c + e^2 c^3$,

откуда

$$\frac{ds}{dF} = \frac{p^2\ (1 - s^2)}{1 - e^2}\ \left[= c^2 + \delta c^4, \frac{dc}{dF} = -\frac{p^2 sc}{1 - e^2} = -\ s\ (c + \delta c^3)\right];\ \frac{dh}{dF} = -\mathrm{sh}.$$

Если, следовательно, $g^n(F)=hu$, где u—рациональная функция от c, то

$$\left[g^{n+1}(F)=-\operatorname{sh}\left\{u+\frac{du}{dc}(c+\delta c^3)\right\}\right.$$ и, пренебрегая высшими степенями e^2]

$$g^{n+1}(F)=-\operatorname{sh}\left\{u+\frac{du}{dc}(c+e^2c^3)\right\};$$

если, однако,

$$g^nF=\operatorname{sh} u,$$

где u — рациональная функция от c, то

$$\left[g^{n+1}(F)=-h\left\{u(1-2c^2-\delta c^4)+\frac{du}{dc}(1-c^2)(c+\delta c^3)\right\}\right.$$

и, пренебрегая высшими степенями e^2],

$$g^{n+1}(F)=-h\left\{u(1-2c^2-e^2c^4)+\frac{du}{dc}(1-c^2)(c+e^2c^3)\right\}.$$

Обозначая для краткости $\frac{e^2}{1-e^2}=\frac{2\omega-1}{(\omega-1)^2}$ через δ [где ω — сжатие], получаем последовательные производные.

$g^{\mathrm{I}}(F)=h,$

$g^{\mathrm{II}}(F)=-hs,$

$g^{\mathrm{III}}(F)=+h(1-2c^2-\delta c^4),$

$g^{\mathrm{IV}}(F)=-hs(1-6c^2-9\delta c^4-4\delta^2c^6),$

$g^{\mathrm{V}}(F)=+h(1-20c^2+(24-58\delta)c^4+(72\delta-64\delta^2)c^6+$
$+(77\delta^2-24\delta^3)c^8+28\delta^3c^{10})$ и т. д.

Следовательно [если теперь x, как и X, отсчитывают от определенной начальной точки, полагая положительным направление к югу, а y имеет тот же знак, что и λ],

$$x=X-\frac{asc}{2\sqrt{1-e^2s^2}}\lambda^2+\frac{asc}{24\sqrt{1-e^2s^2}}\left(1-6c^2-9\delta c^4-4\delta^2c^6\right)\lambda^4\ldots$$

$$y=\frac{ac}{\sqrt{1-e^2s^2}}\lambda-\frac{ac}{6\sqrt{1-e^2s^2}}\left(1-2c^2-\delta c^4\right)\lambda^3+$$
$$+\frac{ac}{120\sqrt{1-e^2s^2}}\left(1-20c^2+(24-58\delta)c^4\ldots\right)\lambda^5\ldots$$

[или также]

$$x=X-\frac{asc}{2p}\lambda^2-\frac{asc}{24p(1-e^2)^2}\left(5-e^2-(6+6e^2)s^2+(9e^2+3e^4)s^4-\right.$$
$$\left.-4e^4s^6\right)\lambda^4\ldots$$

$$y=\frac{ac}{p}\lambda+\frac{ac}{6p(1-e^2)}\left(1-2s^2+e^2s^4\right)\lambda^3\ldots$$

[или]

$$y=\frac{ac}{p}\sin\lambda+\frac{ac^3}{3p\,(1-e^2)}\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2s^2\right)\sin^3\lambda...,$$

откуда можно также принять [если пренебречь высшими степенями e^2]

$$y=\frac{ac}{p}\sin\lambda+\frac{ac^3}{3\sqrt{1-e^2}}\sin^3\lambda$$

[с той же точностью имеем:]

$$x=X-\frac{2asc}{p}\sin^2\frac{1}{2}\lambda\left(1+c^2\,(2+3e^2c^2)\sin^2\frac{1}{2}\lambda\right)=$$

$$=X-\frac{2asc}{p}\sin^2\frac{1}{2}\lambda\left(1+2c^2\,\frac{p^3}{(1-e^2)^{3/2}}\sin^2\frac{1}{2}\lambda\right).$$

[14]

Вычисление сближения меридианов по географическим координатам.

[Сближение меридианов c равно также углу, образуемому с вершиной в точке (Φ,λ) меридианом и кривой, изображение которой на плоскости параллельно оси x. Тогда имеем:

$$\operatorname{tg}c=\frac{-\lambda g^{II}(F)+\frac{1}{6}\lambda^3 g^{IV}(F)...}{g^{I}(F)-\frac{1}{2}\lambda^2 y^{III}(F)...}=-\lambda\,\frac{g^{II}(F)}{g^{I}(F)}+\frac{1}{6}\lambda^3\left(\frac{g^{IV}(F)}{g^{I}(F)}-\right.$$

$$\left.-3\,\frac{g^{II}(F)\,g^{III}(F)}{(g^{I}(F))^2}\right)...\Big]$$

$$\operatorname{tg}c=\lambda\sin\Phi+\frac{1}{3}\lambda^3\sin\Phi\,(1+3\delta\cos^4\Phi+2\delta^2\cos^6\Phi)...$$

[или]

$$\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}\lambda\sin\Phi\left\{1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\lambda\cos^4\Phi\cdot e^2\,\frac{3-e^2-2e^2\sin^2\Phi}{(1-e^2)^2}...\right\}=$$

$$=\operatorname{tg}\lambda\sin\Phi\left\{1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\lambda\cos^4\Phi\cdot e^2\,\frac{3\,(1-e^2)+2e^2\cos^2\Phi}{(1-e^2)^2}...\right\}$$

[или также]

$$c=\lambda\sin\Phi+\frac{1}{3}\lambda^3\sin\Phi\cos^2\Phi\,(1+3\delta\cos^2\Phi+2\delta^2\cos^4\Phi)...$$

[15]

[Переход от азимута на сфероиде к дирекционному углу на плоскости].

Поправка наблюдённого азимута имеет вид

$$-\alpha\,(x'-x)\,\eta+\beta\,(x'-x)\,\eta^3+\gamma\,(y'-y)\,\eta^2,$$

где $\eta=\frac{1}{3}(y'+2y)$

[x, y — плоские координаты точки наблюдения, а x, y — координаты точки, на которую определён дирекционный угол. При этом ось x считается положительной к югу, а ось y — к западу;

$$\alpha=\frac{1}{2a^2\,(1-e^2)\,q^2},$$

$$\beta = \frac{1 - 3e^2 + (e^2 + 15e^4)\ \sin^2\varphi - 14e^4 \sin^4\varphi}{6a^4\ (1 - e^2)^3\ q^3},$$

$$\gamma = \frac{e^2\ \sin\ 2\Phi}{2a^3\ (1 - e^2)^2\ q^{5/2}},$$

$$[q = \frac{1}{1 - e^2\ \sin^2\ \varphi},$$

или в секундах и для бригговых логарифмов]

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}}{q^2};\quad \beta = \frac{\mathfrak{B}}{q^3}\ (1 + \mathfrak{E}\ \sin^2\varphi - \mathfrak{D}\ \sin^4\varphi),\ \gamma = \frac{\mathfrak{E}\sin\ 2\Phi}{q^{\frac{5}{2}}}$$

$$[\mathfrak{A} = \frac{1}{2a^2\ (1 - e^2)\ \rho} \qquad \lg\mathfrak{A} = 1.407\ 0739_{-10}$$

Таблица 1

x (в $м$)	$\lg \frac{10^7}{1 - e^2\ \sin^2\ \varphi}$	I diff	II diff
+ 800 000	14014,096		
		90,289	
78	104,385		9
		90,298	
76	194,683		5
		90,303	
74	284,986		1
		90,304	
72	375,290		2
		90,302	
+ 700 000	465,592		6
		90,296	
68	555,888		9
		90,287	
66	646,175		14
		90,273	
64	736,448		16
		90,257	
62	826,705		20
		90,237	
+ 600 000	14916,942		23
		90,214	
58	15007,156		27
		90,187	
56	097,343		31
		90,156	
54	187,499		34
		90,122	
52	277,621		37
		90,085	
+ 500 000	367,706		42
		90,043	
48	457,749		44
		89,999	
46	547,748		49
		89,950	
44	637,698		52
		89,898	
42	727,596		55
		89,843	
+ 400 000	817,439		59
		89,784	

Таблица 2

x (в м)	φ	$\lg \alpha$ 1,.... —10	$\lg \beta$ 7,.... —30	$\lg \gamma$ 2,.... —20
+ 800 000	44°20′1,″546	1.404 2711	7.31511	2.42106
790 000	25 25,585	621	10	108
780 000	30 49,618	530	09	109
770 000	36 13,646	440	09	110
760 000	41 37,669	350	08	111
+ 750 000	47 1,687	259	07	111
740 000	52 25,700	169	06	110
730 000	44 57 49,708	1.404 2079	05	110
720 000	45 3 13,710	1.404 1988	04	108
710 000	8 37,708	898	03	107
+ 700 000	14 1,701	808	02	105
690 000	19 25,689	718	01	102
680 000	24 49,671	627	00	099
670 000	30 13,649	537	7.31500	096
660 000	35 37,621	447	7.31499	092
+ 650 000	41 1,589	356	98	088
640 000	46 25,551	266	97	084
630 000	51 49,509	176	96	079
620 000	45 57 13,461	1.404 1086	95	073
610 000	46 2 37,408	1.404 0995	94	067
+ 600 000	8 1,350	905	93	061
590 000	13 25,288	815	92	054
580 000	18 49,220	725	92	047
570 000	24 13,147	634	91	039
560 000	29 37,069	544	90	031

$$\mathfrak{B} = \frac{1 - 3e^2}{6a^4\,(1-e^2)^3\,\rho} \qquad \lg\mathfrak{B} = 7.317\ 8248_{-30}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{e^2 + 15e^4}{1 - 3e^2} \qquad \lg\mathfrak{C} = 7.868\ 9880_{-10}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{14e^4}{1 - 3e^2} \qquad \lg\mathfrak{D} = 6.793\ 4664_{-10}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{e^2}{2a^3\,(1-e^2)\,\rho} \qquad \lg\mathfrak{C} = 2.424\ 6792_{-20}$$

$$\rho = \frac{1}{206264{,}8\ldots}\Big]$$

[где использовано значение сжатия $\frac{1}{302{,}68}$ · α, β, γ относятся к аргументу $\frac{1}{3}(x' + 2x) = x + \frac{1}{3}(x' - x)$]

[Таблица для

$$\lg \frac{1}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \lg q]$$

[Табл. 1 вычислена со значением сжатия $\frac{1}{302{,}68}$, исходный пункт для x имеет широту $\varphi = 51°31'48'',70$]

[Таблица для вычисления поправок азимута]

[В основу табл. 2 положено значение сжатия $\frac{1}{302{,}68}$. Значения x следует исправить на 26,264 *м*, если принять для Гёттингена $\varphi = 51°31'47'',85$ вместо $51°31'48'',70$].

[16]

[Отличие проекции геодезической линии от прямой, соединяющей её конечные точки, при конформном отображении кривой поверхности на плоскости].

Очень плодотворным принципом для общей теории кривых поверхностей является следующий.

Отдельные точки кривой поверхности представляют двумя переменными величинами p, q некоторым произвольным способом. Все точки, для которых q постоянно, образуют, таким образом, на поверхности некоторую линию, элемент которой $du = t\,dp$, где t — функция от p и q. Пусть теперь через точку кривой поверхности, определяемую величинами p и q, проведена кратчайшая линия либо из определенной точки, либо перпендикулярно к некоторой заданной линии, длина которой r; таким образом, r является функцией p и q. Если теперь φ — угол между элементом r и элементом du, то

$$\frac{\partial r}{\partial p} = t \cos \varphi.$$

Пусть при подобном (elementähnlichen) отображении на плоскости некоторая кратчайшая линия кривой поверхности отобразится кривой линией, точки которой определяются расстоянием R от начальной точки

и направлением Θ. Пусть масштаб изображения будет n^*, т. е. соответствующие элементы на плоскости и на поверхности относятся между собой как 1 к n^*.

Пусть далее

$$n^* = N + aR + bR^2 + cR^3 + \ldots$$
$$\lg n^* = \lg N + \alpha R + \beta R^2 + \gamma R^3 \ldots,$$

где a, b, c, ...; α, β, γ... обозначают функции от Θ.

Тогда имеем [$dn^* = n^* d \lg n^*$ или]

$$(a + 2bR + 3cR^2 \ldots) = (N + aR + bR^2 \ldots)\ (\alpha + 2\beta R + 3\gamma R^2 \ldots)$$

[и отсюда]

$$a = N\alpha,$$
$$2b = 2N\beta + a\alpha,$$
$$3c = 3N\gamma + 2a\beta + b\alpha$$

и т. д.

[или]

$$a = N\alpha,$$
$$b = N\beta + \frac{1}{2} N\alpha^2,$$
$$c = N\gamma + N\alpha\beta + \frac{1}{6} N\alpha^3$$

и т. д.

Имеем теперь, согласно указанному выше,

$$\frac{\partial r}{\partial R} = n^* \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial r}{R d\Theta} = -n^* \sin \varphi,$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{R d\Theta}\right)^2 = n^{*2};$$

[далее имеем

$$m \frac{\partial (\Theta + \psi)}{\partial R} = n^* \sin \varphi, \qquad m \frac{\partial (\Theta + \psi)}{R d\Theta} = n^* \cos \varphi,$$

где $md\ (\Theta + \psi)$ означает элемент кривой постоянного r; отсюда следует

$$\frac{\partial (\Theta + \psi)}{\partial R} \cos \varphi - \frac{\partial (\Theta + \psi)}{R d\Theta} \sin \varphi = 0$$

[или]

$$\frac{\partial (\Theta + \psi)}{\partial R} \cdot \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial (\Theta + \psi)}{R d\Theta} \cdot \frac{\partial r}{R d\Theta} = 0$$

[ψ и φ обозначают углы, которые образует с R изображение на плоскости геодезической линии в начальной и конечной точках].

Если положить

$$\frac{\partial a}{\partial \Theta} = a', \quad \frac{\partial b}{\partial \Theta} = b' \text{ и т. д.}; \quad \frac{\partial a'}{\partial \Theta} = a'', \quad \frac{\partial b'}{\partial \Theta} = b'' \text{ и т. д.}$$

и заметить, что $a'' = -a$ [так как a имеет вид: $C_1 \cos\Theta + C_2 \sin\Theta$], можно найти из написанного выше:

$$r = NR + \frac{1}{2}\,aR^2 + \left(\frac{1}{3}\,b - \frac{a'^2}{24N}\right)R^3 + \left(\frac{1}{4}\,c - \frac{a'b'}{24N} + \frac{aa'^2}{48N^2}\right)R^4 \ldots;$$

$$n^* \cos\varphi = N + aR + \left(b - \frac{a'^2}{8N}\right)R^2 + \left(c - \frac{a'b'}{6N} + \frac{aa'^2}{12N^2}\right)R^3 \ldots$$

$$-n^* \sin\varphi = \frac{1}{2}\,a'R + \left(\frac{1}{3}\,b' + \frac{aa'}{12N}\right)R^2 + \left(\frac{1}{4}\,c' + \frac{ab'}{24N} - \frac{a'b''}{24N} + \right.$$

$$\left. + \frac{a'^3}{48N^2} - \frac{a^2a'}{24N^2}\right)R^3 \ldots$$

Следовательно,

$$-\sin\varphi = \frac{a'}{2N}\,R + \left(\frac{b'}{3N} - \frac{5aa'}{12N^2}\right)R^2 \ldots -$$

$$-\varphi = \frac{a'}{2N}\,R + \left(\frac{b'}{3N} - \frac{5aa'}{12N^2}\right)R^2 \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\,\alpha' R + \left(\frac{1}{3}\,\beta' - \frac{1}{12}\,\alpha\alpha'\right)R^2 \ldots$$

Из приведённого выше частного дифференциального уравнения находим

$$-\psi = \frac{a'}{2N}\,R + \left(\frac{b'}{6N} - \frac{aa'}{12N^2}\right)R^2 \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\,\alpha' R + \left(\frac{1}{6}\,\beta' + \frac{1}{12}\,\alpha\alpha'\right)R^2 \ldots$$

Пусть, если положение точки на плоскости выражается координатами x, y, где $x = R\cos\Theta$, $y = R\sin\Theta$

$$\lg n^* = \lg N - Ax - By - \frac{1}{2}\,Cx^2 - Dxy - \frac{1}{2}\,Ey^2 \ldots,$$

отсюда будем иметь:

$$\alpha R = -Ax - By \qquad\qquad \alpha' R = Ay - Bx$$

$$\beta R^2 = -\frac{1}{2}\,Cx^2 - Dxy - \frac{1}{2}\,Ey^2 \qquad\qquad \beta' R^2 = (C - E)\,xy - D\,(x^2 - y^2)$$

и т. д. и т. д.

$$\varphi = +\frac{1}{2}\,Bx + \left(\frac{1}{3}\,D + \frac{1}{12}\,AB\right)\left(x^2 - y^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\,Ay + \left(-\frac{1}{3}\,C + \frac{1}{3}\,E - \frac{1}{12}\,A^2 + \frac{1}{12}\,B^2\right)xy \ldots$$

$$\psi = +\frac{1}{2}\,Bx + \left(\frac{1}{6}\,D - \frac{1}{12}\,AB\right)\left(x^2 - y^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\,Ay + \left(-\frac{1}{6}\,C + \frac{1}{6}\,E + \frac{1}{12}\,A^2 - \frac{1}{12}\,B^2\right)xy \ldots;$$

$$r = N\left(R + \frac{1}{2}\,\alpha R^2 + \left(\frac{1}{3}\,\beta + \frac{1}{6}\,\alpha^2 - \frac{1}{24}\,\alpha'^2\right)R^3 \ldots\right)$$

$$\lg r = \lg NR + \frac{1}{2}\alpha R + \left(\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{24}(\alpha^2 - \alpha'^2)\right) R^2 \ldots = \lg N^0 R + \left(\frac{1}{12}\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}(\alpha^2 - \alpha'^2)\right) R^2 \ldots = \lg N^0 R - \frac{1}{24}(C + B^2 - A^2)\, x^2 - \frac{1}{12}(D - 2AB)\, xy -$$

$$- \frac{1}{24}(E + A^2 - B^2) y^2 \text{ и т. д.},$$

если N^0 представляет собой значение n^* для точки в середине прямой, [следовательно,

$$\lg N^0 = \lg N + \frac{1}{2}\alpha R + \frac{1}{4}\beta R^2 \ldots \Big]$$

Пусть теперь,

$$[\lg n =] \lg \frac{1}{n^*} = (e + e'x + e''x^2 + \ldots)(Y + y)^2 +$$
$$+ (f + f'x + f''x^2 + \ldots)(Y + y)^4 +$$
$$+ (g + g'x + g''x^2 + \ldots)(Y + y)^6$$

и т. д.,

где вторая координата [в начальной точке] $= Y$, то имеем:

$$-\lg N = eY^2 + fY^4 + gY^6 \ldots$$
$$A = e'Y^2 + f'Y^4 + g'Y^6 \ldots$$
$$B = 2eY + 4fY^3 + 6gY^5 \ldots$$
$$\frac{1}{2} C = e''Y^2 + f''Y^4 + g''Y^6 \ldots$$
$$D = 2e'Y + 4f'Y^3 + 6g'Y^5 \ldots$$
$$\frac{1}{2} E = e + 6fY^2 + 15gY^4 \ldots$$

и т. д.

При изображении шаровой поверхности радиуса h, n^* от x не зависит и

$$\frac{1}{n^*} = 1 + \frac{1}{2}\frac{(Y+y)^2}{h^2} + \frac{1}{24}\frac{(Y+y)^4}{h^4} \ldots$$

$$\lg \frac{1}{n^*} = \frac{1}{2}\frac{(Y+y)^2}{h^2} - \frac{1}{12}\frac{(Y+y)^4}{h^4} \ldots$$

Следовательно,

$$A = C = D = 0$$

[и]

$$B = \frac{Y}{h^2} - \frac{1}{3}\frac{Y^3}{h^4} \ldots$$

Член $\frac{1}{12} B^2 xy$ [в φ и ψ] не может, таким образом, стать больше, чем $\frac{1}{24}\frac{Y^2}{h^4} R^2$, следовательно, для $R = \lambda$. 100 000 *м*, $Y = \mu$. 400 000 *м* [не более чем] $\lambda^2 \cdot \mu^2 \cdot 0'',008$.

Члены для φ и ψ [по существу, также и для сфероида] исчерпываются формулой $\frac{1}{2}Bx - \frac{1}{2}Ay$, если значения B и A соответственно берутся для точек прямой, отстоящих от начальной на $^2/_3$ и $^1/_3$ её длины. С достаточной точностью они указаны выше в [п. 15].

[Если $A_{\frac{2}{3}}$, $B_{\frac{2}{3}}$ и $A_{\frac{1}{3}}$, $B_{\frac{1}{3}}$ суть вышеуказанные значения A и B, то

$$\varphi = \frac{1}{2} B_{\frac{2}{3}} \cdot x - \frac{1}{2} A_{\frac{2}{3}} \cdot y + \frac{1}{3}(Dx - Cy)\, x + \frac{1}{12}(Ax + By)(Bx - Ay)...$$

$$\psi = \frac{1}{2} B_{\frac{1}{3}} x - \frac{1}{2} A_{\frac{1}{3}} \cdot y + \frac{1}{6}(Dx - Cy)\, x + \frac{1}{12}(Ax + By)\,(-Bx + Ay)...]$$

[17]

Обобщение вышеизложенных основных положений приводит к следующей трактовке.

Пусть p, q — две переменные величины, определяющие различные точки кривой поверхности. Длина кратчайшей линии пусть будет r, а её направление в начале — ψ: пусть, наконец, $\int \rho d\psi$ — длина линии, для которой r=const, и ds — элемент линии на кривой поверхности, который в общем выражается через $\sqrt{Adp^2 + 2Bdpdq + Cdq^2}$.

Положим,

$$dr = gdp + hdq,$$
$$\rho d\psi = Gdp + Hdq.$$

Отсюда

$$g^2 + G^2 = A,$$
$$gh + GH = B,$$
$$h^2 + H^2 = C,$$

следовательно,

$$(A - g^2)\,(C - h^2) = (B - gh)^2$$

[или]

$$\text{I.}\quad AC - B^2 = Ah^2 - 2Bgh + Cg^2$$

$$\left[= A\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2B\,\frac{\partial r}{\partial p}\,\frac{\partial r}{\partial q} + C\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2.\right.$$

Далее имеем]

$$Ah - Bg = G\,(Gh - Hg),$$
$$Bh - Cg = H\,(Gh - Hg),$$

следовательно,

$$\frac{G}{\rho}(Cg - Bh) + \frac{H}{\rho}(Ah - Bg) = 0,$$

т. е.

$$\text{II.}\quad \frac{\partial\psi}{\partial p}(Cg - Bh) + \frac{\partial\psi}{\partial q}(Ah - Bg) = 0.$$

Если углы, образуемые линиями, для которых p = const или q=const, с линиями ψ=const обозначать соответственно M, N, то будем иметь:

$$g = \cos N\sqrt{A}, \quad [G = \sin N\sqrt{A},$$
$$h = \cos M\sqrt{C} \quad H = \sin M\sqrt{C},$$

поэтому:]

$$B = \cos\,(M-N)\,\sqrt{AC}.$$

Если, например,

$$p = R, \qquad x = R\cos\Theta,$$
$$q = \Theta. \qquad y = R\sin\Theta,$$
$$z = 1 + tR^2 + uR^3\ldots,$$

где t, u — функции Θ [то будет]

$$ds = \sqrt{dR^2 + R^2 d\Theta^2 + dz^2},$$

и

$$A = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2, \quad B = \frac{\partial z}{\partial R}\cdot\frac{\partial z}{\partial \Theta}, \quad C = R^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)^2.$$

[Согласно равенству 1 будем иметь, если через t', u' ... обозначить производные от t, u по Θ:

$$(1 + t'^2R^2 + 2t'u'R^3\ldots)\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 + (1 + 4t^2R^2 + 12tuR^3\ldots)\left(\frac{\partial r}{R\partial\Theta}\right)^2 -$$
$$- 2\,(2tt'R^2 + (2tu' + 3ut')\,R^3\ldots)\,\frac{\partial r}{\partial R}\cdot\frac{\partial r}{Rd\Theta} =$$
$$= 1 + (4t^2 + t'^2)\,R^2 + (12tu + 2t'u')\,R^3\ldots,$$

откуда получается

$$r = R^* + \frac{2}{3}\,t^2R^3 + \frac{3}{2}\,tuR^4\ldots$$

[С этим равенство II дает:

$$(1 + (2t^2 + t'^2)\,R^2 + (6tu + 2t'u')\,R^3\ldots)\frac{\partial\psi}{\partial R} +$$
$$+ \left(-\frac{2}{3}tt'R^2 - \left(\frac{1}{2}tu' + \frac{3}{2}ut'\right)R^3\ldots\right)\frac{\partial\psi}{Rd\Theta} = 0.$$

Следовательно, будем иметь

$$\psi = \Theta + \frac{1}{3}\,tt'R^2 + \left(\frac{1}{2}ut' + \frac{1}{6}\,tu'\right)R^3\ldots\Big].$$

ИЗ ПЕРЕПИСКИ ГАУССА

[О формулах для ганноверской триангуляции]

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 18 апреля 1830 г.

...Мне представляется наиболее уместным в Ваших измерениях, поскольку они ограничиваются одним из двух методов, затронутых в моих прежних письмах, чтобы Вы обратили свои результаты в проекции и получили положение отдельных пунктов в координатной форме (in der Coordinaten Form), по которой Вы затем сможете вычислить долготы и широты для всех пунктов, для которых Вы это найдете нужным. При таком ходе потребуется минимальное число наиболее простых вспомогательных таблиц, которые в этом случае могут поместиться на одной восьмушке. В этом случае также легко научить самому характеристичному. Оно может быть изложено в двух пунктах.

I. Модификации при вычислении координат необходимы потому, что поверхность Земли не есть плоскость. Это требует небольшого разъяснения и изготовления маленькой вспомогательной таблицы.

II. Метода для вычисления по заданным координатам точки: 1) долготы, 2) широты, 3) направления ее меридиана в системе координат. Это потребует второго разъяснения и нескольких небольших вспомогательных таблиц. Начнем с этого пункта.

Удаление некоторой точки от экватора, измеренное не в туазах или других подобных мерах, а в $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{90.60}$, $\frac{1}{90.60.60}$ всего земного квадранта, я обозначаю через ψ; широту той же точки через φ. Таким образом, встаёт задача найти φ по ψ. Я исполняю это посредством таблицы, которая даёт одновременно с ψ также $\varphi - \psi$.

Я вычислил табл. 1 с новейшим сжатием Шмидта $\frac{1}{297{,}732}$ от 51 до 56° и делюсь здесь ею с Вами (см. стр. 174).

Если Вы пожелаете распространить дальше эту таблицу или вычислить ее с бо́льшим числом десятичных знаков, то для этого служит формула:

$$\begin{aligned}\varphi = \psi &+ 520'',463\ 3364 \sin 2\psi + \\ &+ \quad 0{,}766\ 0757 \sin 4\psi + \\ &+ \quad 0{,}001\ 5444 \sin 6\psi + \\ &+ \quad 0{,}000\ 0035 \sin 8\psi\end{aligned}$$

Как найти ψ для какой-либо точки на главном меридиане по её x, а также значение ψ, соответствующее начальной точке ψ^0, не требует пояснения, так как это основано на простом правиле. Естественно, что быстрота предшествующего вычисления зависит от выбора единицы длины. Поэтому (и по другим мотивам) я выбрал для моей единицы

Таблица 1

ψ	φ — ψ
51° 0′	8′ 28″,78
10	28,14
20	27,47
30	26,79
40	26,10
50	25,38
52 0	8 24,65
10	23,90
20	23,13
30	22,35
40	21,55
50	20,73
53 0	8 19,90
10	19,05
20	18,18
30	17,30
40	16,40
50	15,48
54 0	8 14,54

ψ	φ — ψ
54° 0′	8′ 14″,54
10	13,59
20	12,63
30	11,64
40	10,64
50	9,62
55 0	8 8,59
10	7,54
20	6,47
30	5,39
40	4,29
50	3,17
56 0	8 2,04

10 000 000-ную долю земного квадранта, называемую мною кратко полуметр, который, однако, отличается от легального метра. Мой метр составляет по размерам Шмидта 443 ^{iin}, 29849. Я поэтому употребляю соотношение

$$\psi = \psi^0 - 0'',0324x\,[= \psi^0 - 0',00054x].$$

Если Вы выберете туазы, Вы должны писать

$$\psi = \psi^0 - 1^0 \frac{x}{57008{,}551}.$$

Если φ^0 дано, Вы можете легко найти ψ^0 также косвенным путём при помощи указанной выше таблицы. Для Гёттингена я положил

$$\psi^0 = 51°23'20'',6082,$$

чему соответствует

$$\varphi^0 = 51°31'47'',85.$$

Следовательно, если, например, $x = -115\,163{,}725$ туазов, будем иметь:

$$\begin{aligned}\psi &= 51°23'20'',6082\\ &+\ 2\ \ 1\ 12\ ,4074\\ &= 53\ 24\ 33{,}02\end{aligned}$$

С этим находим из таблиц

$$\varphi = 53°32'50'',80.$$

Это — широта Вашего меридианного круга, если она будет определена по моей широте с размерами Земли Шмидта.

Это отличается от моего астрономического определения на 5″,53; эти 5″, 53 представляют собой сумму неправильностей фигуры Земли в Гёттингене и Альтоне (собственно, правильнее алгебраическую разность). Широте 53°32′45″,27 соответствовало бы $\psi = 53°24'27'',48$ и если указанное расхождение разделить пополам, то можно также положить

для Гёттингена $\psi = 51°23'17'',84$,
для Альтоны $\psi = 53\ 24\ 30,\ 25$.

Переходя к тому, что составляет главную задачу, я обозначаю заданные координаты через x и y; широту (вычисленную согласно вышеуказанному) той точки, координаты которой x и 0, через φ; искомую долготу (отсчитываемую от главного меридиана) через λ; искомую широту через Φ; угол, образуемый меридианом места с линией равных значений y (сближение меридианов), через c.

Тогда указанные три величины могут быть выражены следующими рядами:

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha y - \beta y^3 + \gamma y^5 - \text{ и т. д.}\\ \Phi &= \varphi - \alpha' y^2 + \beta' y^4 - \gamma' y^6 + \text{ и т. д.}\\ c &= \alpha'' y - \beta'' y^3 + \gamma'' y^5 - \text{ и т. д.},\end{aligned}$$

где коэффициенты $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta$ и т. д. зависят от φ. Однако нет необходимости выходить за пределы y^4 в тех случаях, которыми я ограничиваю применение метода координат, и при этом предположении я нахожу более выгодным несколько видоизменить форму рядов. Именно я полагаю $\alpha y = l$ и пишу:

$$\lambda = \frac{l}{A},$$

$$\Phi = \varphi - \frac{\alpha' y^2}{B},$$

$$c = \frac{\alpha'' y}{C},$$

где A, B, C будут лишь незначительно превышать единицу.

Теперь бригговы логарифмы будут иметь простой вид:

$$\begin{aligned}\lg A &= Dl^2,\\ \lg B &= El^2,\\ \lg C &= Fl^2,\end{aligned}$$

где D, E, F — функции φ, например, $D = \frac{\beta k}{\alpha^3}$, если k — модуль бригговых логарифмов или если выражать в единицах седьмого знака логарифма, то $D = \frac{10^7\,\beta k}{\alpha^3}$ (так это следует понимать в табл. 2).

Таблица 2

φ	lg G	lg H	lg D	lg E	lg F
	— 10	— 10	— 10	— 10	— 10
51° 0′	8.508 9341	1.403 5727	5.43626	5.50708	5.53135
10	299	561	703	643	36
20	258	395	779	578	36
30	216	229	855	513	37
40	175	1.403 5063	5.43931	448	38
50	133	1.403 4898	5.44006	383	38
52 0	8.508 9092	1.403 4733	5.44082	5.50317	5.53139
10	051	568	157	252	40
20	8.508 9010	403	231	187	40
30	8.508 8969	239	306	122	41
40	928	1.403 4074	380	5.50057	41
50	887	1.403 3910	454	5.49992	42
53 0	8.508 8846	1.403 3747	5.44528	5.49927	5.53143
10	805	583	602	862	43
20	764	420	675	797	44
30	723	257	748	732	44
40	683	1.403 3095	821	667	45
50	642	1.403 2932	894	602	46
54 0	8.508 8602	1.403 2770	5.44966	5.49537	5.53146
10	561	609	5.45038	472	47
20	521	447	110	407	47
30	481	286	182	342	48
40	440	1.403 2125	253	278	48
50	400	1.403 1965	324	213	49
55 0	8.508 8360	1.403 1805	5.45395	5.49148	5.53149

Таким образом, нужна еще лишь одна вспомогательная таблица, которую можно было бы так устроить, чтобы она давала по аргументу φ логарифмы α, α', α'', D, E и F. Однако и здесь выгодно внести маленькое изменение. Полагая эксцентриситет $= e$, большую полуось земного экватора $= a$

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}{a \cos \varphi}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}{a \cos\varphi} 206265''$$

$$\alpha' = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2a^2 (1 - e^2)} \cdot 206265'',$$

$$\alpha'' = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a} \operatorname{tg} \varphi \cdot 206265''.$$

Я пишу отсюда:

$$\frac{206265 \cdot \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a} = G,$$

$$\frac{206265 \cdot (1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}{2a^2 (1 - e^2)} = H$$

и беру в свою таблицу вместо логарифмов α, α', α'' логарифмы G и H; этим путём я отчасти экономлю один столбец и частично получаю ту выгоду, что значения этих логарифмов очень медленно изменяются, и я поэтому могу в таблице дать аргумент φ только через 10 минут, тогда как таблица для самих $\lg\alpha$ и т. д. должна иметь неприемлемо большой охват, чтобы быть точной. Все вычисление основывается поэтому на формулах[*]

1) $$l = \frac{Gy}{\cos \varphi},$$

2) $$\lg A = Dl^2,$$

3) $$\lg B = El^2,$$

4) $$\lg C = Fl^2,$$

5) $$\lambda = \frac{l}{A},$$

6) $$\Phi = \varphi - \frac{Hy^2 \operatorname{tg} \varphi}{B},$$

7) $$c = \frac{Gy \operatorname{tg} \varphi}{C}.$$

Эту таблицу я вычислил от $\varphi = 51°$ до $\varphi = 55°$ и сообщаю её Вам, хотя должен заметить, что если Вы выберете другую единицу длины, например туаз, Ваш $\lg G$ в логарифме отношения (в $\lg \frac{864}{443.29849}$) должен быть больше моего и Ваш $\lg H$ вдвое больше. Если Вы несколько позже пожелаете и эту таблицу расширить, я Вам охотно сообщу формулы для D, E и F (для G и H они уже приведены выше).

[* Сравни п. [3], стр. 153].

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 30 апреля 1830 г.

... Я продолжаю теперь о том, что представляют собой вспомогательные таблицы; сегодня сообщаю только формулы для остальных трех столбцов, употребляемых при вычислении долготы, широты и сближения меридианов, но я не знаю, обозначил ли я их в моем прошлом письме через D, E и F.

Числа, логарифмы которых устанавливаются:

$$\text{Долгота . . . . } [D=]\ h\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\varphi+\frac{e^2}{2\,(1-e^2)}\cos^4\varphi\right)$$

$$\text{Широта . . . } [E=]\ h\left(\frac{3}{4}+\frac{2-11e^2}{4\,(1-e^2)}\cos\varphi^2+\frac{5e^2}{2\,(1-e^2)}\cos^4\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{e^4}{(1-e^2)^2}\cos^6\varphi\right).$$

$$\text{Сближение . . . } [F=]\ h\left(1-\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi-\frac{2e^4}{(1-e^2)^2}\cos^6\varphi\right).$$

Здесь $h=\dfrac{k\cdot 10^7}{3\,(206265)^2}$; $k=$ модуль $=0{,}434\ 2945$; $\lg h=5.531\ 8128_{-10}$.

Следует заметить, что эти формулы полные, т. е. это не бесконечные ряды.

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 17 мая 1831 г.

Существует несколько путей для вычисления координат по широтам и долготам; каждый из них имеет свои преимущества. Для того случая, при котором Вы нуждаетесь в подобных вычислениях, наиболее удобно воспользоваться рядами, быстро сходящимися, так что достаточно иметь малое число членов.

Если координаты x, y соответствуют широте φ и долготе λ, то эти ряды имеют следующий вид [*]:

$$x=A-A'\lambda^2-A''\lambda^4-\quad \text{и т. д.}$$
$$y=B\lambda+B'\lambda^3+\quad \text{и т. д.},$$

где A, A', A'' и т. д.; B, B' и т. д. — суть функции φ, числовые значения которых следует вычислить для тех круглых градусов (или полуградусов и т. д.), которые встречаются на карте.

Для вычисления A Вы не нуждаетесь в моих наставлениях, так как оно зависит только от спрямления дуги эллипса. Именно, пусть φ^0 — широта той точки, от которой отсчитываются к югу координаты x; u^0 — её действительное расстояние от экватора и u — неизвестное расстояние от экватора окружности параллели φ (обе величины u и u^0 выражены в тех же единицах, которые выбраны для координат), тогда $A=u^0-u$. Вы можете для этого использовать одну из ранее сообщённых Вам вспомогательных таблиц. Значения других коэффициентов Вы можете вычислить по следующим формулам, которые абсолютно точны:

$$A'=\frac{asc}{2p},$$

$$A''=\frac{asc}{24\,(1-e^2)^2p}(5-e^2-(6+6e^2)\,s^2+(9e^2+3e^4)\,s^4-4e^4s^6),$$

[* Сравни п. [13]. стр. 164].

$$B = \frac{ac}{p},$$

$$B' = \frac{ac}{6\,(1-e^2)\,p}\,(1 - 2s^2 + e^2s^4).$$

При этом надо заметить следующее. Здесь обозначено:
a — радиус экватора, e — эксцентриситет,

$$c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi,\ p = \sqrt{1 - e^2s^2}.$$

Далее, для λ принята в качестве единицы дуга 57°17′45″, следовательно, если желательно в конечном счёте вычислить координаты через каждый градус по λ, то целесообразно сразу же придать к коэффициенту B множитель $\frac{1}{57{,}296} = \frac{3600}{206265} = \frac{\pi}{180}$ и таким же образом коэффициенты A', B', A'' умножить на вторую, третью, четвертую степени $\frac{\pi}{180}$.

Формулы несколько упростятся, если положить $\frac{e^2}{1-e^2} = m$ и их соответственно перестроить. Для своих собственных вычислений я их не привел к этому виду [*]; я предоставляю, таким образом, Вам эту небольшую работу по их преобразованию. Принимая $\varphi^0 = 51°31'47'',85$, сжатие — согласно последнему определению Шмидта и в качестве единицы длины 1 : 10 000 000 часть земного квадранта, я нахожу, полагая, кроме того, $\lambda = n$ градусов.

φ	$x =$			$y =$		
51°	+58947,1	−475,95 n^2	−0,0167 n^4	70180,0 n	−0,737 n^3	
52	−52287,0	−472,16 n^2	−0,0154 n^4	68660,7 n	−0,840 n^3	
53	−163539,8	−467,79 n^2	−0,0140 n^4	67120,2 n	−0,936 n^3	
54	−274811,2	−462,85 n^2	−0,0127 n^4	65559,1 n	−1,026 n^3	
55	−386 100,9	−457,34 n^2	−0,0114 n^4	63977,8 n	−1,109 n^3	

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 25 июня 1831 г.

Что касается вычисления координат, то имеют значение две задачи:

1. По действительной длине R кратчайшей линии на сфероиде, конечные точки которой имеют на изображении соответственно координаты x, y; x', y', найти расстояние на изображении, т. е. величину $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$.

Вот решение обратной задачи. Для всех её случаев с достаточной точностью

$$\lg R = \lg r - k \cdot \frac{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}{2a^2\,(1-e^2)} \cdot \frac{y^2 + yy' + y'^2}{3}.$$

Так как при этом можно знать y и y' не очень точно, то для этого достаточно приближенное вычисление координат, выполняемое так, как если бы все происходило на плоскости. Таким образом, формула служит также для нахождения r по R. k — модуль бригговых логарифмов.

Для действительного вычисления я привел формулу к виду

$$\lg r = \lg R + \left\{\alpha(y+y')^2 + \beta(y-y')^2\right\} q,$$

[* Эти формулы можно найти в п. 13, стр. 157].

где

$$\alpha = \frac{k}{4.206265}, \qquad \beta = \frac{k}{12.206265}, \qquad q = 206265 \cdot \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}{2a^2 (1 - e^2)}.$$

Здесь $\lg \alpha = 3.72130_{-10}$, $\lg \beta = 3.24418_{-10}$.

Для q я имею вспомогательную таблицу, которая зависит только от x и которую я Вам, надеюсь, уже дважды сообщил (см. стр. 176, рения, но не q, вследствие чего таблица зависит не только от единицы табл. 1 (где $H = q$). Очевидно, что α, β не зависят от единицы изме-измерения, но также и от начала x. Следовательно, если Вы употребите другую единицу и другое начало, Вы должны будете мою таблицу только преобразовать.

Впрочем, так Вы получите $\lg r - \lg R$ как десятичную дробь; если желаете иметь это значение сразу в единицах 7-го знака, употребите только $\lg \alpha = 0.72130$, $\lg \beta = 0.24418$.

2. По углу, измеренному в точке P между PP' и PP'', найти угол, соответствующий ему на изображении. Здесь также выступает обратная задача.

Сфероид.	Изображение на плоскости.
P	p
P''	p''
P'	p'

Пусть будут координаты p, p', p'' соответственно

$$x,\ x',\ x'',$$
$$y,\ y',\ y'',$$

тогда

$$P'PP'' = p'pp'' - q^* (x' - x)\left(\frac{2y + y'}{3}\right) + q^{**} (x'' - x)\left(\frac{2y + y''}{3}\right)$$

(искомое в секундах).

Вы можете применить для q^* и q^{**} значение q, соответствующее аргументу x; если Вы пожелаете большей точности, примите для q^* аргумент

$$\frac{2x + x'}{3} = x + \frac{1}{3}\left(x' - x\right),$$

а для q^{**} — аргумент

$$\frac{2x + x''}{3} = x + \frac{1}{3}\ (x'' - x).$$

Я лично привожу всегда $\frac{2y + y'}{3}$ к виду $y + \frac{1}{3}\left(y' - y\right)$ и т. д.

Вы видите, что тогда весь способ сводится к тому, чтобы каждому измеренному азимуту (с P на P') придать поправку $-q(x' - x) \times \times\left(y + \frac{1}{3}(y' - y)\right)$, откуда вытекает то, что я называю азимутом на плоскости. Но под азимутом на сфероиде я понимаю здесь не астрономический азимут, т. е. не угол с истинным меридианом, а с линией, параллельной осевому меридиану, или, строже, с линией на сфероиде, изображение которой на плоскости дает параллель линии абсцисс.

Таким образом, азимут на плоскости всегда $\operatorname{arctg} \frac{y' - y}{x' - x}$.

После того как применены указанные поправки, надо поступать со всеми углами так, как если бы они были все на плоскости, и как после этого вычислять координаты, об этом Вы не нуждаетесь ни в каких указаниях. Очевидно, что для этого вычисления достаточно приближенного значения x, y, x' и т. д., которые можно получить без введения поправок; если желательно все иметь согласующимися в 0″,001, можно во всяком случае улучшить вычисление после того, как x, y и т. д. станут известны с большей точностью.

Впрочем, Вы легко видите, что указанное выше вычисление 1), т. е. переход от R к r, надлежит выполнить только для одной стороны (базис), после чего знание отдельных линий на сфероиде, вообще говоря, не представляет интереса; если же понадобится какой-либо новый базис, может быть применен обратный путь (от r к R). Во всех Ваших случаях R и r близко одинаковы, во всяком случае эти расхождения не влияют заметно на редуцирование углов; в западной части Вестфалии, я, правда, принял это во внимание, но только для «чести» вычисления, так как в действительности это и здесь ничего не дало.

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 9 декабря 1838 г.

Требуемая формула следующая:

$$\begin{aligned}\varphi = \psi &+ (6f^2 + 48f^4 + 426f^6 + 4080f^8\ldots)\ \sin 2\psi + \\ &+ (21f^4 + 336f^6 + 4264f^8\ldots)\ \sin 4\psi + \\ &+ \left(\frac{302}{3}f^6 + 2416f^8\ldots\right)\sin 6\psi + \\ &+ \left(\frac{1097}{2}f^8\ldots\right)\sin 8\psi \qquad \text{и т. д.,}\end{aligned}$$

Так как я довольно много лет не занимался этими вещами, мне стоило прежде всего больших поисков снова найти эту формулу, а после этих новых поисков или вычислений, — чтобы определить значение f, которой не оказалось на листе. Однако $f = \frac{1}{4}$, где e — эксцентриситет эллипса, или, если сжатие есть $\frac{1}{n}$, т. е. $\frac{\text{ось вращения Земли}}{\text{диаметр экватора}} = \frac{n-1}{n}$,

$$\text{то } f = \frac{\sqrt{2n-1}}{4n}.$$

Я употреблял это f по той причине, что если бы я употреблял e, многие коэффициенты стали бы дробями, тогда как здесь они в большинстве случаев целые числа. Числовое вычисление я выполнил сплошь с 10-значными логарифмами.

Об уравнивании сетей

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 2 ноября 1823 г.

.... Я завершил теперь утомительное уравнивание всех моих измерений 1821—1823 гг., составляющих основные треугольники, так что не только суммы углов отдельных треугольников, но и соотношения сторон в пересекающихся четырехугольниках и пятиугольниках точно согласуются между собой именно по строгому принципу вероятностного исчисления sine ira et studio* и без всякого произвола. Не думаю, что последнее можно было бы сказать об измерениях других геодезистов. Во всей системе 76 направлений, т. е. 38 прямо и обратно. Ни для

* „Без ненависти и доброжелательства" — латинская поговорка, означающая „беспристрастно, объективно, по-деловому".

одного из них поправка не составила 1″, наибольшая равна 0″,813 для направления с Nindorf на Гамбург, по которому визирование на башню Михаэлис (Michaelisthurm) было очень затруднено задымленностью воздуха и фазовыми помехами. Следующая за ней поправка равна 0″,788 у направления с Люнебурга на Вильзеде, где хотя объектом визирования был свет гелиотропа, однако установка на деревянном штативе в нише башни наверно не была такой солидной, как на каменном постаменте, и вес наблюдателя при различном положении его влиял на инструмент. Средняя ошибка всех направлений, понимая ее как в моей Theoria Combinationis, равна 0″,486.

Во всей системе образовалось 26 треугольников, в которых я измерил все углы. Наибольшая ошибка суммы углов составляет теперь 2″,175 в треугольнике Nindorf — Hamburg — Timpenberg, где наибольшая вина падает преимущественно на направление Nindorf — Hamburg. Ближайшая по величине ошибка, как уже выше упомянуто, в треугольнике Brocken — Hohehagen—Hils; она составляет 1″,806, и наиболее повинное в том направление Hils — Brocken.

ГАУСС к ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 14 мая 1826 г.

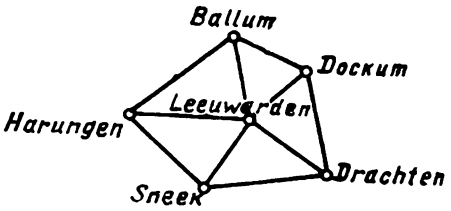
... Значительное время я был занят уравниванием моей угловой системы — очень затруднительной работой (так как я хотел исключить всякий произвол), вследствие того, что при этом все взаимосвязано и в известной степени измерения в Йевере влияют на таковые в Гёттингене. Пожалуй, никогда еще никто не выполнил такого столь сложного решения (Elimination), когда 55 уравнений содержат такое же большое число неизвестных величин. Сегодня я с этим справился, так что все 150 направлений, которые система содержит, так уравнены с возможно меньшими изменениями, что они точно гармонируют одно другому. Среди 150 указанных пять должны были измениться больше чем на 1″ (наибольшую поправку 1″,373 получило направление Гарльсте — Варель), и так называемая средняя ошибка направления составляет 0″,755, намного больше, чем это допустимо при хорошей сходимости на каждой станции, так что существование в равнинных районах боковой рефракции, я никак не могу подвергнуть сомнению; в более возвышенных районах поправка всегда намного меньше.

Точно подготовить все измерения было довольно скучной работой, так как я ничем не хотел пренебречь и для последовательности везде привлек малые поправки. Насколько мне известно, Бессель впервые публично высказался о той из них, которая состоит в том, что азимут кратчайшей линии отличается от азимута нормального сечения. Сам он при этом только пункты рассматривал как расположенные на поверхности сфероида. В большинстве случаев эта редукция составляет только пару тысячных долей секунды; однако, если бы я пожелал ее учесть, я не должен был бы оставить без внимания и другую, обычно более крупную (хотя еще тоже незначительную) и состоящую в том, что пункты, лежащие в одной вертикальной линии, находятся не в одной вертикальной плоскости, откуда проистекает редукция, зависящая от высоты. Она всегда имеет знак, противоположный поправке Бесселя, и уже при умеренных высотах всегда больше ее часто в 4 и 8 раз, так что эта последняя всегда оказывается уничтоженной и далеко превзойденной. Наибольшая величина этой поправки в моей системе имеет место для Lichtenberg — Brocken, где она составляет — 0″,041.

Я сегодня немного ознакомился еще с системой треугольников Крайенгофа во внутренней части Голландии. Я все больше вижу, как

мало я имею причин беспокоиться по поводу моей наибольшей ошибки направления в 1″,4. Проверяя поверхностно измерения Крайенгофа, т. е. суммы 3 углов треугольника и замыкание горизонта, находят повсеместно настолько хорошую сходимость, что можно приписать этим измерениям точность, от которой они все же очень далеки. Для этого нет ничего целесообразнее соединений более чем из 3 пунктов, дающих связанные треугольники (центральные системы). Здесь часто можно найти намного бо́льшие расхождения. Например, система из 6 пунктов* дает отличное замыкание горизонта в Leeuwarden 2″,197. Суммы углов в 5 треугольниках соответственно ошибочны на

1″,432
0, 714
0, 759
2, 842
2, 590,



следовательно, тоже допустимо. Но, если проверить отношения сторон, можно найти, что измерения невозможно объединить без внесения значительно бо́льших изменений в 10 углов на периферии; по способу наименьших квадратов надо их изменить на 3″,8, 3″,6, 3″,6, 3″,3, 3″,0, 2″,7, 2″7, 1″,9, 1″,1, 0″,8; если желательно иметь эти изменения насколько возможно меньшими, надо положить все 10 одинаковыми и равными 3″ каждое **. Таким образом, видно, что при таких измерениях сумма 3 углов часто должна быть ошибочной свыше чем на 10″. Однако полученные значения весьма далеки от этого, значит ясно, что по меньшей мере они подобраны так, чтобы удовлетворять данному условию, откуда, по-видимому, часто должно случаться так, что угол скорее испорчен, чем улучшен, и мера точности его ошибочна. Чтобы иметь возможность надлежащим образом оценивать точность измерений, ничто не должно произвольно исключаться. Легкие поверки посредством суммы 3 углов треугольника и замыкания горизонта слишком соблазнительны, если и не для прямой подделки, то к выбору и исключению, что не намного лучше. К сожалению, некоторые измерения, как Деламбра, не доставляют почти никаких поверок, подобных упомянутым, в противном случае часто можно было бы найти такие же несогласия.

В моей системе я удовлетворен тем, что контроль как того, так и другого рода дает расхождения одинакового порядка. То, что боковая рефракция дает влияние такой же величины, как и невязки в треугольниках Крайенгофа, мне все же представляется сомнительным, так как его стороны всюду так малы, его станции располагаются высоко в воздухе, а Голландия намного меньше покрыта лесами, чем моя северная местность, так что у него свет проходил редко или не так низко над препятствиями, как это часто имело место у меня. Я мог бы таким образом эти аномалии скорее приписать самим измерениям.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 2 мая 1837 г.

.... Что касается вычисления геодезических измерений, то я полностью и со всеми строгостями выполнил решение моих собственных главных треугольников от Гёттингена до Йевера, около 40 треугольников между

* Сравни том IV, стр. 82—87.

** Уравнивание самого Крайенгофа содержит частично еще большие изменения, например, 6″,253 в угол при Drachten — 5″,530 в один из углов при Dockum и т. д.

33 пунктами. Это была очень трудоемкая и продолжительная работа, несмотря на искусные приемы, которые я при этом применил. Чтобы одно это разъяснить Вам в достаточной мере, понадобилось бы маленькая книга, а для ее создания я должен был бы прежде всего снова углубиться, о чем я сейчас совсем не могу думать.

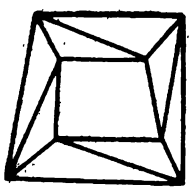
В треугольниках, исполненных позднее моим сыном, Гартманном и Миллером в Вестфалии, Люнебургсхене, Гарце и Везергегенде, как и в прошлогодних, я немного отошел от крайней строгости и сделал это так, что

1) принял во внимание одни условия фигур и соответственно этому уравнял;

2) к этим уравненным числам я подыскивал новые поправки, которые удовлетворяли бы уравнениям сторон. Если взять на себя труд применить этот способ, попеременно повторяя, до тех пор, пока будут получаться неизменные результаты, что я уже предложил в Supplementum и т. д., стр. 28[*], можно достичь, как там показано, в точности тех же результатов, что и при совместном учете всех условий.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ, Гёттинген, 5 июня 1838 г.

Согласно одной теореме (я определенно не знаю, сообщил ли я уже ранее Вам о ней), если в системе треугольников p пунктов соединены l линиями независимо от того, являются ли направления только



односторонними или установлены прямо и обратно, то, помимо условных уравнений (первого и) второго классов (замыкания горизонта и условия фигур), необходимо получить еще $l-2p+3$ независимых одно от другого условных уравнений. Не больше и не меньше. Правда, может случиться, что не все они могут быть приведены к форме третьего класса (уравнений сторон), например, в случае полигона из треугольников. Я не принимаю во внимание это исключение, так как в Вашей системе оно не нужно.

Итак, я считаю

$p=24$ пунктам,

$l=66$, именно 22 односторонних направления,

44 сплошных направления, так что должно быть 21 условное уравнение, и такое количество Вы в действительности имеете. Независимость можно проверить, если p расположить уместным образом, причем я частично должен был отказаться от порядка Ваших чисел 1 ... 112, и упомянутую теорему применить повторно, оставляя p вполне последовательным. Эту поверку Ваши уравнения также выдержали (21 уравнение). В Ваших числах имеется некоторая неясность; 24 и 61 отсутствуют, так что вместе получится (как выше $22+2\cdot 44)=110$ направлений и 112 стоит на неправильном месте.

После этого контроля я не сомневаюсь, что Вы можете смело составить 21 уравнение.

Если я остальное правильно подсчитал, Вы должны иметь 24 условных уравнения 2-го класса.

Только еще на одно обстоятельство при решении я должен обратить Ваше внимание. Если я это возможно уже сделал раньше, то извините мою забывчивость с добрым намерением.

При составлении Ваших таблиц Вы отклоняетесь от моей формы в том, что считаете все направления от одного и того же, тогда как я

* Избранные геодезические сочинения Гаусса, т. I, стр. 75—76.

от направления в известной мере произвольного, вернее от чуждого системе. Поэтому Вы не должны забыть при уравнивании, что все направления одинаково достоверны, или, вернее, одинаково не достоверны и что, следовательно, Вы должны каждый нуль объединять с направлениями, требующими исправления. Между прочим, результатом всегда будет то, что сумма всех поправок на одной станции будет равна нулю.

Я удивляюсь, однако, Вашему бесстрашию предпринять столь большую вычислительную работу. Я не имел бы такой смелости. У моих 33 пунктов условных уравнений 3-го класса (уравнений сторон) было значительно меньше (я полагаю 7)*; решение, при котором сперва принимают во внимание только 2-го класса [условия фигур], было при косвенном способе лёгким, несмотря на большое их число, и ошибки вычислений невозможны, а то обстоятельство, что все направления были измерены прямо и обратно, делало возможным очень облегченные модификации и быстрое получение неизменных результатов. Я опасаюсь, что последнее будет встречаться у Вас в значительно меньшей мере. Если, однако, Вы желаете достичь цели, то нет другого средства, кроме внимательности и терпения.

Если бы я должен был сам вести это вычисление, я не включил бы вовсе в систему те три точки, на которых не велось измерений. Не потому, что я это не одобряю, а лишь из боязни этой большой работы. Если бы все односторонне наблюдённые направления были исключены, уравнивание системы было бы очень легким, но, конечно, от полного учёта надёжность Вашего предприятия очень значительно выигрывает...

Распорядок в четырехугольниках сам по себе произволен, и только с целью устранения этого произвола я следую цитированному Вами правилу, которое не имеет никаких других качеств, кроме того, что Вами правильно угадано.

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 5 июля 1816 г.

Прежде всего мое сердечное поздравление по поводу прекрасного большого предприятия, о котором Вы мне сообщили в Вашем последнем письме. Это градусное измерение в королевстве Дании уже само по себе доставит нам объяснение о виде Земли. Я нисколько не сомневаюсь в том, что в будущем станет возможным продолжить Ваши измерения к югу через королевство Ганновер. Хотя в данную минуту я еще не могу высказать в Ганновере подобного пожелания, так как сама астрономия нуждается еще в большой поддержке, но убежден, что в скором времени наше правительство, также охотно поддерживающее науку, последует славному примеру Вашего прекрасного короля. Мы имели бы тогда уже внушительную дугу меридиана в 6°,5 и легко связались бы также после этих работ с баварскими треугольниками. Последние наверняка измерены с наибольшей тщательностью и приходится сожалеть, что они не опубликованы.

По поводу способа вычислений измеренных треугольников я себе набросал собственный метод, который, однако, для письма был бы слишком пространным. В будущем, если я к тому времени, когда Вы измерите Ваши треугольники, не ознакомлю Вас публично, я с Вами буду об этом подробно советоваться; кстати, я предлагаю свои услуги взять на себя вычисление главных треугольников.

* Их было 12.

По поводу второй части Вашего предприятия, измерения градуса долготы, я имею лишь маленькое сомнение. Я полагаю, что земли датской монархии следует считать скорее плоскими, по меньшей мере не имеющими высоких гор. Если это предположение обоснованно и Вы поэтому вынуждены для определения астрономической разности долгот брать промежуточный пункт или даже несколько, то указанное определение, даже если Вы имеете хорошее оборудование и искусных помощников, будет отягощено некоторой неопределённостью.

Большое преимущество Вы имеете в том обстоятельстве, что Дания уже однажды тригонометрически измерена; я, естественно, не думаю квалифицировать как градусное измерение сами измеренные углы, которые далеки от этого, а лишь отмечаю, что указанные работы сильно облегчат Вам выбор пунктов наблюдений. Именно поиски были для меня при аналогичной работе самым неприятным, так как при этом было зря истрачено так много времени. Я приложил много труда (принимая во внимание будущие работы), чтобы получить от Эпейли[10] измеренный угол в Ганновере, но без результата.

... Мне пришла на ум интересная задача: «вообще заданную поверхность спроектировать (отобразить) на другой так, чтобы изображение было подобно оригиналу в мельчайших частях».

Особый случай имеет место, когда первая поверхность — шар, а вторая — плоскость. Здесь стереографическая и Меркатора проекции являются частными решениями. Однако, хотелось бы иметь общее решение для поверхности любого рода, из которого вытекали бы все частности.

Возможно, что Монж и Пуансо уже потрудились над этим в Journal philomathique (как писал Burckhardt к Lindenau); так как сам я точно не знаю где, я еще не имел возможности искать и поэтому не знаю, соответствуют ли решения этих господ моей идее и исчерпывают ли они вопрос полностью. В противном случае, мне кажется, что этот вопрос мог бы стать хорошей темой для объявляемого Обществом* конкурса на соискание премий.

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 10 сентября 1818 г.

... Я спешу известить Вас, что я получил поручение от нашего министра Arnswaldt предпринять в Люнебурге необходимые измерения для связи ганноверской триангуляции с Вашей и условиться с Вами о всем необходимом для этого. Это вселяет в меня надежду, что в скором времени и само продолжение станет возможным и меня радует то, что благодаря работам, предстоящим в Люнебурге, это продолжение может быть обеспечено...

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 20 мая 1820 г.

... В этой неизвестности[**] я адресую это письмо в Копенгаген и страстно желаю, чтобы оно Вас застало и сразу застало — оно известит Вас о следующем ответе, содержащемся в официальной бумаге графа фон Мюнстера из Лондона на моё прошлогоднее письмо, любезно составленное Вами[***]: «Король разрешил продолжение градусного измерения через королевство Ганновер».

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 4 марта 1821 г.

... Моим первоначальным намерением было начать с Гамбурга и измерять с севера на юг, но, так как, к сожалению, из-за лени писать пись-

* Речь идет о Датской Академии наук.

** О местопребывании Шумахера.

*** Напечатано в томе IV, стр. 482—483.

(Прим. ред.)

ма и ненадёжности чертежников, с которыми я имел дело, я задержался и до настоящего времени еще ничего не имею из необходимых вспомогательных средств, то проистекающие отсюда трудности были бы еще намного больше, если бы я последовал указанному плану. Эта и другие важные причины вынуждают и побуждают меня к противоположному плану, измерять с юга на север...

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Вульфзаде, 18 сентября 1822 г.

... Насколько позволяет судить предварительное обследование местности, непосредственное измерение всей линии от Breithorn до Eschede [Scharnhorst] (длиной 11200 *м*) не будет невозможно. Какой это был бы прекрасный базис!..

ГАУСС К ШУМАХЕРУ [Гёттинген, январь 1825 г.]

... Если бы я сосчитал все большие и малые просеки, прорубленные за время 1821—1824 гг., от таких, когда, возможно, было повалено всего лишь дюжина деревьев, и до самых больших, то получилось бы 16 или 17 просек. Наибольшая по протяжённости была в Бекклинском лесу, недалеко от дороги из Бергена в Зольтау...

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Дангаст, в часе езды от Вареля, 20 июня 1825 г.

... Сам я [у гелиотропа] описываю окружность через его три нижних острия, центр которой рассматривается как визирная цель. У обоих моих последних гелиотропов сам центр тоже отмечен острием, что очень удобно...

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген. 14 января 1829 г.

Так как нам еще мало известно, отклоняется ли фигура Земли от фигуры среднего эллипсоида длинными или короткими волнами, то я такого мнения, что лучше будет всегда класть в основу средний эллипсоид.

Если, однако, я как раз не хочу безусловно отвергать мысль, чтобы положить в основу оскулирующий* эллипсоид, то я могу считать это допустимым только тогда, когда имеется средство определить оскулирующий эллипсоид, т. е. такой, у которого кривизна как по меридиану, так и в перпендикулярном к нему направлении возможно близка к действительной кривизне фигуры Земли. Но это можно получить только с помощью *измерений* в обоих направлениях (из градусных измерений по широте и по долготе).

Если меридиан действительно не эллиптичен, то, без сомнения, можно вычислить эллипс, который соприкасается с двумя частями одной дуги и, пожалуй, может быть назван оскулирующим эллипсом, но вращением этого эллипса вокруг его малой оси** не получится поверхности, которую можно назвать оскулирующим эллипсоидом или, иными словами, между действительным градусом долготы и тем градусом долготы, который вычисляется на основании вращения этого оскулирующего эллипса, нет никакой связи. Смешение их приводило бы к очень большим ошибкам.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 26 декабря 1821 г.

... Прошлое лето я провёл большей частью в приготовлениях к триангулированию и в самом триангулировании... Углы на пунктах Обсерватория, Меридианный знак, Hohehagen, Hils и Brocken измерены; лишь

* Оскулирующими называются кривые линии или поверхности, соприкасающиеся одна с другой не ниже степени 2-го порядка. **(Прим. ред.).**

** О которой можно только сказать, что она параллельна земной оси, но не совпадает с ней и обыкновенно далеко отстоит от неё.

на последнем пункте угол между Inselsberg и другими пунктами не удалось измерить, так как неслыханно плохая погода в течение всего времени нахождения там гелиотропа не давала возможности вести наблюдения. Только один раз в течение получаса можно было с трудом выполнить измерение этого направления, которое, однако, неудовлетворительно сошлось с прежними, также с трудом выполненными измерениями, из коих одно было сделано на дом, а другое на секстант-вице-гелиотроп (Viceheliotrop) Энке за 3 минуты до заката солнца.

То обстоятельство, что я имел в своём распоряжении только один гелиотроп, неимоверно задерживало. Во время моего пребывания на пункте Hils гелиотроп должен был последовательно переходить с Lichtenberg на Meridianzeichen, Brelingerberg и Deister, так же как во время моего пребывания на пункте Brocken он ездил с пункта Lichtenberg на пункты Hils, Hohenagen и Inselsberg. Непосредственно можно было измерить лишь часть углов; на этих двух станциях я выбрал несколько других пунктов, которые были видны сами по себе, и всегда измерял все то, что поддавалось измерению. В четвертом томе Base du systeme mètrique я видел, что французы в Испании поступили таким же образом, но они неправильно комбинировали наблюдения. Когда я в ближайшие годы продолжу мою триангуляцию, дело будет лучше, так как я буду иметь двумя гелиотропами больше. Мой секстант, приспособленный как вице-гелиотроп, я всегда имел при себе и употреблял его для подачи телеграфных знаков. С ним дело идет превосходно, но из-за того, что вице-гелиотроп ограничен угловым отстоянием около 138°, я не всегда мог употреблять его каждый день; в будущем году я для этой цели оставляю при себе один из гелиотропов.

Наибольшее расстояние, на котором свет гелиотропа был виден простым глазом, — это с Brocken на Hohehagen, когда на этом последнем были видны мои телеграфные знаки, подававшиеся с Brocken; расстояние равно $9^1/_3$ географической мили*; этому способствовало, однако, много благоприятных обстоятельств. При расстояниях до 6 миль я хорошо видел свет гелиотропа невооруженным глазом (несмотря на потерю света при употреблении лорнета); когда условия были лишь сносными, а именно, в околополуденные часы свет гелиотропа был виден с Hils на пункте Brocken ($7^1/_2$ мили). Площадь зеркала составляет $2^1/_2$ квадратного дюйма; у обоих новых гелиотропов я взял $6^1/_2$ квадратного дюйма; уменьшать свет можно легко, но при больших расстояниях могут быть случаи, когда желателен более сильный свет. Так, однажды свет приходил с Brelinberger на Hils лишь в течение короткого времени, хотя (или, вернее, потому что) небо было совершенно безоблачным. В такой день прозрачность атмосферы, как правило, наименьшая. Я вспоминаю такой день, когда свет гелиотропа с пункта Deister хотя и был виден хорошо, но не мог быть использован, так как ни один из остальных предметов, в том числе удаленный менее чем на одну милю Einbeck, не был виден.

Свет гелиотропа имеет существенное преимущество перед любым другим сигналом, в связи с чем я часто делал интересные опыты — свет гелиотропа виден тем лучше, чем больше увеличение; земные цели, наоборот (при больших расстояниях), тем хуже, так как видимости последних мешает преимущественно дымка. Например, с Ганновера я совсем не видел Brocken, хотя точно знал его место по высоте и по азимуту. В тот день, когда я получил слабый свет гелиотропа с пункта Inselsberg (лишь по вине погоды, так как при мало-мальски благоприятной атмос-

* Одна географическая миля = 7,4 *км*.

фере свет гелиотропа с площади $2^1/_2$ квадратных дюйма должен быть очень ярким), я хотя и видел его в трубу теодолита довольно хорошо, но не мог увидеть в ней никакого следа очертания горы; напротив, мой помощник видел это очертание вполне сносно в сильную зрительную трубу со слабым увеличением, но мог видеть в нее свет гелиотропа лишь изредка. Объясняется это тем, что при самом сильном увеличении свет гелиотропа остается точкой, и его свет всегда один и тот же, а фон тем темнее, чем больше увеличение и т. д.

Я построил только два больших сигнала: на пунктах Hohehagen и Hils, вероятно, и это не состоялось бы, если бы мой гелиотроп был готов раньше на 6 недель. Сигнал Hils проектируется с пункта Brocken на близкий темный фон; в течение месяца, проведенного мною на пункте Brocken, я вообще видел его 2 раза и только 2 минуты мог видеть его так, чтобы стало возможным измерять угол; сигнал Hohehagen, проектирующийся на удаленные горы Cassel, был чаще видим и даже пару раз мог быть наблюдаем и, несмотря на это, не пошли я туда гелиотропа, я не выполнил бы своих измерений.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 15 ноября 1822 г.

... Об исключительных трудностях ведения триангуляционных работ на Люнебургских полях я мог судить уже по отчету Эпейли, который как раз и объявил это невозможным и проложил свои треугольники для соединения южной части Ганновера с Гамбургом через Бремен вниз по Везеру и потом снова по Эльбе. И все же он имел большие преимущества передо мной; он всюду наблюдал сверху, с сигналов, имея возможность значительно легче добиваться далекой видимости, чем я, наблюдавший повсеместно вдоль плоской земли; при порубках леса он мог принимать во внимание бережливость намного меньше, чем я; повсюду свободный транспорт, свободные рабочие и т. д., тогда, как я должен был за все без исключения платить и часто видеть расходы, далеко превышающими мои предположения; он имел в качестве помощника целую бригаду инженеров и т. д. Эти соображения не могли не вызвать некоторой нерешительности в моих первых рекогносцировочных поездках (в конце апреля). Первоначально все шло лучше, чем я ожидал; я нашел, что Garssen и Falkenberg могут быть связаны с Deister и Lichtenberg непосредственно, но при поисках, как вести треугольники от этих двух пунктов дальше на север к Люнебургу, я нашел местность настолько сложной, что я много раз сомневался в возможности благополучного исхода и опасался необходимости отказаться от всего предприятия. Местность повсюду плоская, никаких командных пунктов, везде лес, отчасти крупными массивами, как Hassel Lüsing, Beckling и т. д., а отчасти бесчисленными перелесками, громоздящимися один перед другим в шахматном порядке. Попытки моего помощника найти что-нибудь пригодное на западной стороне продолжали оставаться безрезультатными; мне самому, наконец, удалось после утомительнейших поисков установить как бы в самом сердце степи два треугольника 9.10 12* [Falkenberg — Hauselberg — Wulfsode] и 10. 12. 13 Hauselberg — Wulfsode — Wilsede]; сам я одновременно убедился в том, что в этом виде работ я потерпел поражение и поэтому отложил дальнейшие поиски возможности связать эти треугольники с южными и продолжить их дальше на север до более позднего времени, когда я буду иметь при себе более сильный вспомогательный персонал (в первую поездку я взял с собой только одного офицера) и все мои инструменты. Поэтому я начал в середине июня действительные наблюдения на пункте Lichtenberg, и моя надежда в последующем в значительной степени сбы-

* Номера пунктов траингуляции Гаусса; этой системой он пользовался часто (Прим. ред.).

лась. Так как была установлена невозможность соединения пункта Garssen с пунктом Hauselberg посредством просеки, то после длительных поисков был найден еще один, более северный пункт 14 (Scharnhorst), подававший бо́льшие надежды. Однако позже это оказалось абсолютно невозможным, так как лес между 10 [Hauselberg] и 14 [Scharnhorst] лежал на слишком высоком или, скорее, на недостаточно низком месте, и я должен считать себя счастливым, что нашел еще другой пункт, Breithorn, с участием которого все окончательно удалось. Тем временем была также открыта с помощью большой просеки линия 9.13 [Falkenberg — Wilsede] и, таким образом, если бы был раньше известен 11 [Breithorn], то пункта 10 [Hauselberg] могло бы и не быть. Однако я сохранил этот пункт и считаю весьма ценным преимуществом то, что в моей системе возникло три четырехугольника, в которых все 6 направлений в действительности измерены прямо и обратно. После того, как предварительно все углы в каждом треугольнике уравнены и приведены к требуемой сумме, понадобились еще лишь очень маленькие изменения, большей частью меньше 0″,1, чтобы привести эти три четырехугольника в полное согласие. Следовало бы пожелать, чтобы при всяком измерении имел место подобный контроль. Имеются измерения, в которых суммы трёх углов всюду удивительно соответствуют и где такой контроль показывает, что многие углы наверняка неверны на 2—3″. Контроль с помощью суммы углов a la portée (по-французски — доступен каждому); с помощью диагоналей — менее доступен, хотя и легок для математика, и невозможно отделаться от предположения, что первый контроль мог временами служить, если и не для подделки наблюдений, то для некоторого отбора их (такую тенденцию можно заметить даже у Деламбера). Севернее Wulfsode был, к счастью, найден Timpenberg, который мог быть связан непосредственно с Гамбургом; рекогносцировавшаяся просека с Timpenberg на Lüneburg не удалась из-за слишком малого понижения местности между ними. Направления с 10 на 11 и с 11 на 14 требовали больших просек. Я всегда считал для себя законом выполнять вычисления (до самой последней строчки) всех измерений, как только я их произвел, и только поэтому оказалось возможным провести все просеки с исключительной точностью, так чтобы ни один ствол не был срублен без надобности, или определить невозможность просеки так рано, как это было возможно. Так, например, я заранее точно знал понижение, которое окажется для 14 [Scharnhorst] в 10 [Hauselberg] или для 20 [Lüneburg] в 19 [Timpenberg]; в первом случае местность оказалась слишком высокой уже впереди леса, а во втором после того как была пройдена узкая визирка длиной 2000 *м*. Из Вильзеде я отрекогносцировал еще один пункт [Nindorf] в 3000 *м* севернее пункта Timpenberg, который непосредственно соединялся с 20 [Lüneburg], 21 [Lauenburg], 23 [Hamburg] и, вероятно, мог быть связан с 19 [Timpenberg], на все расстояние между ними надо было прорубить лес. На пункте Timpenberg я измерил углы между 12 [Wulfsode], 13 [Wilsede], 23 [Hamburg] лишь предварительно, на всех более южных пунктах окончательно, как и на Wilsede. Scharnhorst я посетил последним; этот пункт можно было бы непосредственно связать с пунктами Lichtenberg и Deister легкими просеками, при этом Garssen оказался бы ненужным; однако установить с самого начала пригодность этого пункта было невозможно. Этот пункт, как и многие другие, представляет собой невидное место, о котором совсем нельзя было предположить, что оно имеет столь большое значение. По многим направлениям, например с пункта Lichtenberg на Garssen и с пункта Lichtenberg на Falkenberg, линия идет так низко над препятствиями, что точка визирования при

обыкновенной рефракции возвышается над ними лишь на несколько секунд и только изредка достигает 30—40″; с пункта Falkenberg на Wulfsode и Vice Versa (по латыни — обратно) луч света при более слабой рефракции совсем не проходит и всегда приподнимается лишь в поздние послеполуденные часы. С пункта Lichtenberg я редко видел кое-что на пункте Falkenberg, а обратно свет гелиотропа почти всегда витал в свободном небе (расстояние 85542 *м*). Несмотря на большое расстояние, измерения сходились так же хорошо, а часто даже лучше, чем на малых расстояниях в 10 000 *м*, когда свет гелиотропа еще почти всегда очень силен, хотя на зеркале оставлено непокрытым отверстие всего лишь в несколько квадратных миллиметров. Чтобы выиграть время, я нередко сам наблюдал даже при расстояниях от 3 до 5 миль на мои каменные постаменты высотой $3^1/_2$ фута. Ввиду этого измерения иногда становились несколько менее точными, чем если бы я применял только свет гелиотропа, но тогда я в этом году еще долго не ушел бы так далеко. Наибольшая ошибка суммы трех углов была в этом году 1″,76 и вообще ближайшая бóльшая после треугольника 4.5.6. [Hohehagen — Hils — Brocken], где она составила 3″,7 и должна быть приписана главным образом трудностям визирования на башню Brocken, на которую, когда она в лучах солнца, не может быть сделано точного наведения из-за фазы. Если бы позволило время, я охотно измерил бы углы этого треугольника еще раз. В этом году я часто имел в работе одновременно 3 гелиотропа, один из которых обслуживал мой сын; это в самом деле было великолепное зрелище. Сообщение, которое сделал о гелиотропе некий Schubach в [Astronomischer] Jahrbuch за 1825 г., основано на заблуждении и не имеет с моими гелиотропами ничего общего; последние являются искусными инструментами, устройство которых стоило мне очень большого труда, но которые, я верю, не оставляют желать лучшего. Я поручил изготовить для генерала Мюффлинга экземпляры обеих конструкций, существенно различающихся между собой. Герлинг также получил два; я мог бы теперь, пожалуй, дать их рисунки в шумахеровские Astronomische Nachrichten. Для телеграфирования (сигнализации) и для указания направления противостоящему на большом расстоянии гелиотропу я часто употреблял зеркало в квадратный фут, которое также наклонялось другим способом. Это зрелище, по описанию моего помощника, было в высшей степени прекрасным; на расстоянии 4 миль длительное его рассматривание иногда причиняло невооруженному глазу боль.

Однако довольно об этом.

Я с удовольствием прочитал в Astronomische Nachrichten Шумахера Ваш способ обработки геодезических наблюдений. Вы знаете, что этот вопрос занимал меня уже много лет назад. Так как к Вашим работам нелегко что-либо прибавить, то если бы наши пути встретились, указанное ознакомление сделало бы мою собственную работу излишней. Однако способ, которым я разработал этот вопрос, совершенно отличен от Вашего, и поэтому в будущем при опубликовании моих измерений я окончательно разовью также мои теоретические работы. Я надеюсь, что смогу показать при этом много неожиданного. Но эти исследования связаны с богатой, почти неисчерпаемо богатой областью, и, как в этом, так и во многих других случаях, я часто с грустью чувствую, как мешают мои внешние обстоятельства важным теоретическим работам. Чтобы подобные работы имели успех, надо иметь возможность им целиком отдаться и не отрываться ежечасно на разнообразные дела, такие как чтение лекций, различные мелкие детали, связанные с наблюдениями и их обработкой, и т. д. и т. д.

В жаркое лето напряжение часто было для меня исключительно утомительным, временами настолько, что я полагал, что не выдержу. Большим затруднением при работе в пустынной люнебургской степи является также то, что часто можно было иметь лишь плохое убежище и даже такое только в расстоянии многих миль от места работы. В прохладную погоду, которая больше подходит к моей конституции, я в общем чувствую себя сносно, и теперь я не могу жаловаться на моё здоровье.

Из приведенного выше отчета Вы можете сами увидеть, чего еще не хватает для завершения моей триангуляции, однако настоящего плана на ближайшее лето я еще не могу составить, при этом многое будет зависеть от сотрудничества с Шумахером. Может быть, что, если я ограничусь лишь необходимым, я закончу в апреле и мае треугольники, после чего вернусь сюда; возможно в июле здесь и в августе на более северном пункте (Celle, Harburg, Hamburg?) я выполню измерения с зенитным сектором. Но может также быть, что если я не буду бояться расходов, я проведу на триангуляции все лето, чтобы привести все к возможно большему совершенству.

Несколько дней назад я получил из Мюнхена универсальный инструмент, который я заказал два года назад преимущественно для определения азимута. Тем временем азимут, наблюденный при помощи моего пассажного инструмента и переданный на Гамбург после моей предварительной редукции, не кажется еще отличающимся от того, который сообщил мне Шумахер (он измерил также предварительно угол между пунктами Lüneburg и Wilsede, откуда я посылал ему свет гелиотропа) на 1″,5, и, следовательно, измерение азимута с моей стороны на другие пункты будет, пожалуй, излишним. Буду ли я считать желательным наблюдать этим универсальным инструментом также широты на многих пунктах, будет видно после некоторого периода использования инструмента. Он хорошо изготовлен, но мне кажется, что он будет для употребления недостаточно удобен, особенно для близорукого глаза, который не может особенно хорошо отсчитывать установочные круги. Во всяком случае много наблюдать с ним должно быть очень утомительно. Все мои горизонтальные углы я измерил 12-дюймовым теодолитом, который является превосходным инструментом (см. стр. 216). С зенитным сектором я прошлой зимой выполнил лишь немного измерений, как бы для пробы; оптическая сила и удобство употребления сильно уступают меридианному кругу Рейхенбаха.

Моё градусное измерение, как таковое, не может само по себе доставить очень важного результата, но я не знаю, когда можно ждать завершения шумахеровского. Насколько я знаю, он довел свои треугольники лишь до одной трети всего протяжения, а измерения зенитным сектором на пункте Skagen выполнил его помощник Carоc. Точная длина его базиса (около 6000 *м*) мне еще не известна; лишь этой осенью он хотел связать его с Гамбургом, однако в его последнем письме он об этом не упоминает. Конечно, я мог бы сам измерить базис, и линия между Breithorn и Scharnhorst не представляет для этого на всем ее протяжении (11 220 *м*) непреодолимых препятствий. Но, не говоря уже о больших расходах, я боюсь такой в высшей степени скучной работы. В моих тригонометрических измерениях мне всегда нравится одна интересная черта, их ежедневная обработка всегда доставляет развлечение*. Кроме того, я засекал также все видимые объекты ме-

* Моей манерой наблюдать было всегда измерять то, что допускает хорошее измерение, не считаясь с тем, был ли это непосредственный угол треугольника. На многих станциях я брал некоторые вспомогательные точки, чтобы не бездельничать и тогда, когда светил только один гелиотроп. Как я вижу, французы делали кое-что подобное в Испании, но они слишком неправильно уравняли измерения.

стности, чтобы быть полезным для географии страны, и я должен сказать, что эту работу с её ежедневными вычислениями я так полюбил, что обнаружение, отыскание и вычисление положения новой колокольни доставляло столько же удовольствия, сколько и наблюдения нового светила (для бога это в конце концов тоже совершенно безразлично, определим ли мы положение колокольни с точностью до фута или звезды до секунды). Но в базисных измерениях, поскольку о них зашла речь, я не вижу ничего, что могло бы возбуждать или развлекать разум, и при такой напряженной работе, длящейся почти два месяца, приходится тешить себя надеждой, что когда-нибудь под конец должно получиться некоторое число.

Высокая точность измерения горизонтальных углов с помощью света гелиотропа на самые большие расстояния и точность, с которой можно измерять абсолютные азимуты универсальным инструментом, позволяют мне верить, что в настоящее время можно было бы в благоприятной местности выполнить с большим успехом градусное измерение по параллели, в котором определение разности долгот основывалось бы не на определении времени, а на сближении меридианов. С Пиренеев видна гора Mont Ventoux, с этой последней Альпы, с этих Steiermark, отсюда имеется видимость вплоть до Венгрии и т. д. Правда, точность при этом не возрастает, как у дуги меридиана, как вся длина дуги (собственно геодезическую часть можно при этом рассматривать как безошибочную); итак, если представить себе участки примерно одинакового размера, то при определении градуса по широте точность возрастает пропорционально числу участков, так же как и при определении градуса по долготе, когда разность долгот конечных точек наблюдается астрономически, например, с помощью покрытия звёзд; напротив того, при сближении меридианов лишь пропорционально корню квадратному из числа участков (приблизительно); но я всё же верю, что при очень больших участках этот способ даёт большую точность, чем можно, например, обеспечить при получении разности долгот с помощью определений времени по пороховым вспышкам. Выгоднее всего было бы применение этого способа в северных областях, если бы там была очень далекая видимость. Не найдётся ли такая в Норвегии и Швеции или в некоторых областях России?

... Я сейчас еще занят уравниванием, которое я уже, к сожалению, один раз выполнил понапрасну, так как по ошибке составил для одного пункта неправильную таблицу. При моей обработке любой угол, измеренный, например, на Wilsede, влияет в известной мере на все остальные вплоть до Гёттингена. О некоторых результатах я Вас в будущем извещу. По предварительным вычислениям, принимая широту Гёттингена равной 51°31′48″,7, Гамбург находится на широте 53°33′1″,76 и восточнее Гёттингена на 0°2′2″,97, временно опираясь на базис Цаха как на исходное начало...

ГАУСС К БЕССЕЛЮ, Гёттинген, 5 ноября 1823 г.

... Я употребил часть года на то, чтобы закончить оставшуюся часть моих тригонометрических измерений на севере: от Timpenberg, Nindorf и Lüneburg до Гамбурга; также для предварительного обследования местности, лежащей западнее, по направлению на Бремен, так как наше правительство желает дальнейшего продолжения измерений на запад до голландской границы и для соединения с треугольниками Крайенгофа. Напоследок я посетил еще раз Brocken и Hohehagen, так как отчасти в 1821 г. углы треугольника Hohehagen — Hils — Brocken были измерены при очень неблагоприятных обстоятельствах, а отча-

сти надлежало теперь исполнить неудавшуюся тогда связь пункта Brocken с пунктом Inselsberg, равно как и привязать гессенский пункт Meisner. К моему удовлетворению, эти цели, в большей их части, достигнуты; только Hils я посетил бы охотно еще раз, чтобы измерить там угол точнее; однако позднее время года мне в этом помешало. Если не считать этого обстоятельства, то я могу теперь рассматривать триангуляцию для градусного измерения, в той мере, в какой оно принадлежит моему ведомству, законченной. Астрономические наблюдения сверх тех, что относятся к ориентированию моих первых сторон треугольников, еще не выполнены. Выполню ли я упомянутый выше план продолжения измерений на запад, еще неизвестно. Многое в пользу этого, многое же, пожалуй еще больше, против, не говоря уже о том, что может наступить изменение в моем внешнем положении [*].

... В эти дни я тщательно уравнял систему моих главных треугольников так, что точно гармонируют не только суммы углов каждого отдельного треугольника, но и соотношения сторон в пересекающихся четырехугольниках и пятиугольниках и именно без всякого произвола, без отбора, без исключений, по всей строгости исчисления вероятностей. Это совместно 26 треугольников, в которых все углы лично мною наблюдены. Наибольшая ошибка суммы равна 2″,2 в треугольнике, по одной стороне которого визирование было очень затруднено; ближайшая к ней по величине 1″,8. Ни одно из 76 имеющихся направлений не изменилось при уравнивании на целую секунду, наибольшее изменение составляет 0″,813 для упомянутой выше стороны с Nindorf на Гамбург. То, что я называю в своей новой вероятностной теории средней ошибкой, составляет для направления 0″,48.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 20 ноября 1824 г.

... В этом году я был на 12 пунктах и дошел с треугольниками до Везера (наиболее удаленный пункт в пустоши Garlst между Osterholz и Vegesack). Третьи вершины треугольников я обыкновенно сначала оставлял ненаблюденными, и когда я покидал Бремен в середине августа, мне оставалось еще посетить 6 пунктов. Со всеми ими все шло терпимо, но на последнем, Wilsede, погода меня так мучила, что, несмотря на трёхнедельное пребывание я не совсем справился так, как это удовлетворило бы меня; я должен был под конец установить окончательный срок и в конце октября вернулся в Гёттинген. Я надеюсь в будущем написать Вам подробнее о результатах измерений, о больших трудностях, с которыми я боролся (с одной из них, вечными болотными пожарами, Вы сами знакомы), и о многих интересных явлениях, которые при этом происходили...

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 12 марта 1826 г.

... Большую часть прошлой зимы я провел со своими измерениями в Бременском и Ольденбургском районах. Что касается моих измерений, то их тригонометрическую часть я закончил; моя сторона Varel-Jever включается в треугольники Крайенгофа, но закончена ли она в действительности, я и сам еще не знаю. Мои угловые измерения на пункте Jever дают огромные расхождения с крайенгоферскими, достигающими 15″. Я не могу с уверенностью указать их источника. За мои собственные углы я ручаюсь до одной секунды. Чтобы расхождения стали объяснимыми, я должен допустить, что центр стояния Крайенгофа удален на метр от моего (я наблюдал этажом ниже). Объяснения, которые я получил от Крайенгофа, неудовлетворительны в части центриро-

* Речь идет о назначении в Берлин. [Прим. ред.]

вания; в общем же из этого следует, что его угловые измерения в той местности далеко не имеют такой точности, как мои. Он употреблял в Ostfriesland худший инструмент; из многих серий углов он всегда оставлял лишь те, которые казались наилучше сходящимися (без указания, насколько отклонялись другие), а на пункте Jever даже среди оставленных находятся расхождения в 4″. При этих обстоятельствах мне кажется нецелесообразным распространять дальше мои измерения на Ostfriesland. Его более южные измерения лучше, и связь моих треугольников через оснабрюкские с Bentheim могла бы, без сомнения, дать более достоверные результаты. Но пошатнувшееся состояние моего здоровья делало меня робким, чтобы предлагать свои услуги для таких работ, которые потребовали бы еще одно- или полуторагодичной кампании, и этим летом было бы трудно ожидать в этом отношении чего-либо значительного.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 20 ноября 1826 г.

... Обработка материалов для предполагаемого труда о моих измерениях отнимает у меня много времени. Мои главные треугольники, образуемые 33 пунктами, уже давно окончательно вычислены, но вычисление многих засеченных боковых пунктов, важных для географии значительной части северной Германии, составляет большую работу, так как они до сих пор или совсем не вычислены или вычислены приближенно. Мой список содержит теперь около 250 пунктов, относящихся к северной части моих измерений. Так как мои треугольники связаны через гессенские с баварскими и вюртембергскими, а последние мне любезно сообщил Боненберг (как Экхардт-Дармштадские), мне досадно, что все мои усилия получить баварские до сих пор остались тщетными. Шумахер рассказал мне, что, как сказал ему Зольднер, причина, почему Комиссия в Мюнхене не удовлетворила мою просьбу, заключается в том, что полагают, что я хочу сделать по этим треугольникам вычисления. Так же у меня обстоит дело с австрийскими. Должен же был бы и генерал Мюффлинг ознакомить меня с его треугольниками, к востоку от Seeberg, включающими Берлин и простирающимися через Силезию.

Еще больше затруднений доставляет мне далеко простирающаяся теоретическая часть, часто проникающая в другие разделы математики. Я не вижу здесь другого средства, как лишь отделить от труда некоторые крупные части, чтобы они могли быть развиты самостоятельно и с надлежащей обстоятельностью. В известной мере я уже положил этому начало в моем сочинении об отображении поверхностей с сохранением подобия в малых частях. Другое сочинение, переданное мною королевскому обществу два месяца тому назад, которое, я надеюсь, вскоре будет напечатано, содержит основные положения и методы уравнивания измерений (попутно из него косвенным образом усматривается, как далеки измерения Крайенгофа от той точности, которую им ошибочно приписали). Я, возможно, разработаю в ближайшее время еще третье сочинение, в котором будут развиты в большинстве своём новые положения о кривых поверхностях, кратчайших линиях, об изображении кривых поверхностей на плоскости и т. д. Если бы все эти вопросы должны были быть изложены в моём проектируемом труде, тогда я или изложил бы многое неосновательно, или придал бы труду слишком пестрый вид.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 1 апреля 1827 г.

... Я думаю измерить этой весной зенитным сектором амплитуду дуги между Гёттингеном и Альтоной и очень жажду узнать результат. Ряд

наблюдений, сделанных, начиная с 1824 г., на меридианном круге, дал 2°1′58″; широты (die Polhöhen), которые я принимаю по своим наилучшим наблюдениям, и которые Шумахер указывает для своих, дают на 1 или $1^1/_2$ секунды меньше; наоборот, геодезические измерения, при которых предполагают вид Земли равномерным и принимают размеры Вальбека, дают на 4 или 5 секунд больше, и почти такой же, как этот последний результат, дают вполне одновременные зенитные расстояния зенитных звезд, которые наблюдал я здесь и Henus — в Альтоне — на меридианном круге, с определением нульпункта коллиматорами. Henus сейчас здесь, чтобы помогать мне при наблюдениях сектором; он привез с собой висячий коллиматор Репсольда, однако до сих пор я считаю метод надирной точки через отражения ртутью значительно более точным; все же я думаю, что и тот метод допускает еще улучшение...

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 9 апреля 1830 г.

... Еще много времени похитили у меня тригонометрические измерения после мая 1829 г., хотя я на этот раз и не принимал непосредственного участия в полевых работах. Еще и в данный момент я не совсем закончил обработку измерений предыдущих лет, причем я был лишен какой бы то ни было помощи. Все же я имел от них много радости в связи с результатами, полученными моим сыном в этих работах. Он один проложил большую сеть треугольников от Везера к голландской границе (через оснабрюкские и с многократным соприкосновением с прусской территорией, причем со стороны тамошних чиновников к нему было проявлено любезное отношение), в которой определено, кроме главных пунктов, еще около 250 других. Тригонометрические измерения, выполненные в княжестве Hildesheim другим офицером, одинаково хороши и полны, так что все мензульные планшеты (53, из которых около одной четверти уже снято) могут быть обеспечены опорными пунктами...

ГАУСС К БОНЕНБЕРГУ. Гёттинген, 16 ноября 1823 г.

... Я с удовольствием узнал из Вашего письма кое-что о Ваших измерениях и хотел бы получить об этом нечто более обстоятельное, чем может побудить к этому настоящий ответ.

Во-первых, что касается гелиотропа, то я поручаю изготовление двух совершенно различных видов, основанных на совершенно различных принципах, впрочем, второе устройство я нахожу более удачным... Благодаря возможности, где позволяет местность, применить наибольшие треугольники и начинать там наблюдения сразу без постройки сигналов, стоящих столь много времени и денег, маленький расход на гелиотропы даст большую экономию, что, однако, является меньшим его преимуществом; измерения становятся благодаря этому способными давать точность, на которую можно лишь в редких случаях рассчитывать при наблюдении с сигналов и колоколен. Мои наихудшие треугольники (говоря относительно) — те, в которых визирными объектами служили башни. Вот и все о гелиотропах.

Что касается самих измерений, то у меня нет более страстного желания, чем скорейшая связь с Вами. Я теперь связал свои треугольники с гессенскими, о чём даст Вам представление прилагаемая схема*. Хотя пока действительно измерена лишь часть гессенских треугольников, но уже достаточная, чтобы связать, по меньшей мере предварительно, все пункты, вплоть до пункта Feldberg, с моими. О моих треугольниках, лежащих севернее, Вы знаете из шумахеровских Astronomische Nachrichten, 1, № 24, а северные пункты, прибавившиеся к ним в этом году, Вас, по крайней мере пока, не будут интересовать.

* К копии оригинала письма, находящейся в архиве Гаусса, схема не приложена. **(Прим. ред).**

Таким образом, я предполагаю, что через них дармштадтские, баварские треугольники и мои измерения связаны с Вашими, я, однако, еще не располагаю из последних никакими, а по первым лишь некоторыми отрывочными данными. Если Вы располагаете более полными, Вы меня чрезвычайно обяжете сообщением таких сведений, равно как и о Ваших собственных треугольниках. Но я хотел бы получить углы только редуцированные к центрам без уравнивания ошибок*. Я очень хочу вычислить всё однообразным методом. Связь с пунктами Тюбинеен, Мангейм и Мюнхен интересует меня еще более живо, потому что, к сожалению, первые наблюдения Шумахера в Альтоне, где он основал маленькую хорошую обсерваторию с прекрасным Рейхенбаховским меридианным кругом, совершенно одинаковым с моими, Зольднеровским и Бесселевским, дали широту, не совпавшую на 5″ с переданной от Гёттингена через треугольники. При вычислении я употребил размеры Земли, определённые Вальбеком из совокупности всех доброкачественных градусных измерений: сжатие $\frac{1}{302{,}78}$. Впрочем, мои вычислительные методы столь сильно отличаются от ранее применявшихся, что в письме я об этом не могу дать Вам никакого представления. Я имею намерение, когда будут завершены мои измерения, обработать эти методы в более значительный труд и разъяснить их путём применения к ганноверским и связанным с ними измерениям. Наше правительство склонно распространить ганноверские измерения дальше на запад, вследствие чего они дадут связь с крайенгофскими, а через них с французскими и английскими. Как известно, измерения Крайенгофа опубликованы; это должно делаться в отношении всех хороших триангуляций. Большие треугольники принадлежат в известной мере всему цивилизованному миру, как современным поколениям, так и их потомству, и тем больше, чем более они постепенно приходят в связь между собой.

Хотя треугольники Мюффлинга уже соединились через треугольники, которые проложил Tranchot, с французским градусным измерением, они еще не опубликованы, следовательно, для публики все равно что отсутствуют, и генерал Мюффлинг сам располагает ими лишь в неудовлетворительной форме (злополучные углы между хордами, вероятно, уже приведены к 180°). К сожалению, я убеждаюсь в том, что люди очень мало склонны к связям; я приложил много усилий через официальные дипломатические пути, а также частным, неофициальным путем, чтобы получить из Парижа исполненные Эпейли в 1804 и 1805 гг. ганноверские измерения, но как пустую отговорку получил голый список названий станций, схему сети и немного числовых данных, которые, как это вытекает из моих измерений, несомненно, грубо неверны. Давайте составим из этого исключение. Я повторяю еще раз мою просьбу — сообщить мне результаты Ваших измерений, а также, поскольку я их не могу получить прямо, сообщить мне по-дружески те данные, связанные с нашими, которыми Вы располагаете со стороны, и я охотно предлагаю свои услуги взаимно. Как это было бы хорошо, если бы однажды все измерения, распространяющиеся на Европу, от Шотландии до Баната и от Копенгагена до Генуи и Форментера, были приведены в одну взаимосвязанную систему. В зависимости от моих сил я мог бы охотно заняться предварительными работами, но так как я уже перешел за середину моего жизненного пути, то приниматься за такое обширное дело я должен чем скорее, тем лучше.

---

* Во всяком случае без всех дальнейших результатов вычислений. **(Прим. Гаусса)**

Измерения Герлинга выполнены 12-дюймовым теодолитом Эртеля, вполне равноценным моему и шумахеровскому*. Я нашел, что для моих измерений то, что я называю в своем сочинении «Theoria combinationis observationum и т. д.» средней ошибкой, составляет по многим подсчитанным станциям с хорошими и менее хорошими наблюдениями около $\frac{3''.5}{\sqrt{n}}$, где n — число повторений. При очень жесткой установке, очень благоприятной (т. е. не дрожащей) атмосфере и наблюдениях исключительно на свет гелиотропа она значительно меньше. Все мои измерения дают до настоящего времени 76 главных направлений (38 прямо и 38 обратно) и из уравнивания найдено, что средняя ошибка одного главного направления равна $\pm 0''{,}47$. Из них совместно образуется 26 треугольников, в которых все углы измерены мною; из них некоторые дают пересекающиеся четырехугольники и пятиугольники и уравнивание сделано без произвола, без отбора и исключения, согласно строгим основам вероятностного исчисления, так что в конце концов всё точно увязано. Такие пересекающиеся четырехугольники были бы для многих измерений отличным пробным камнем, когда оказывается, что хотя всюду суммы углов превосходно согласуются, так что невязка, превышающая 1″, редка, но указанным контролем (который не так доступен каждому, как вычисление сферического избытка), если он может быть применен, иногда решительно устанавливается, что в отдельных углах имеются ошибки в 2″, 3″ или и того больше. Наибольшая ошибка в сумме еще не уравненных углов в моих 26 треугольниках была 2″,2, причём одно из направлений на колокольню Michaelis в Гамбурге было очень трудным для наблюдений и при солнечном освещении не совсем свободным от фаз; ближайшая наибольшая ошибка в 1″,8 относится к треугольнику, где также одно направление шло на предмет, исключительно плохо видимый без света гелиотропа. Последний пункт я хотел посетить еще раз и перенаблюдать это направление на свет гелиотропа, однако в том году я не смог этого сделать. Большой треугольник Hohehagen — Brocken — Inselsberg не входит в число 26, угол на пункте Inselsberg измерен Герлингом, моим же наблюдениям на пункте Brocken погода не благоприятствовала, так что я мог засечь Inselsberg только 15 раз (1823); вместе с 15 засечками 1821 г., отличающимися от них меньше чем на 1″, они всё же дают отличное замыкание этого большого треугольника. В такой стране, как Вюртемберг и Гессен, где так много высоких пунктов, измерения являются удовольствием, и большие треугольники легко отыскиваются. Так же обстоит дело в южной части Ганновера. Но в северной, в Люнебургской пустоши, я испытывал невыразимые трудности и предпринятая прошлым летом рекогносцировка на запад, к Бремену, еще не дала никаких результатов для проложения хотя бы только сносных треугольников. Высокими сигналами эти трудности хорошо преодолеваются, но я опасался больших затрат денег и времени и еще больше ущерба в жёсткости постановки инструмента.

Дальше на юг через Osnabrück на Bentheim можно предполагать, что пройти будет легче, но измерения должны будут вестись большей частью по чужой территории.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 13 января 1821 г.

... Если бы в будущем при действительных измерениях с внешними обстоятельствами дело обстояло лучше, чем до сих пор, то я верю, что я мог бы иметь много радости от работы, и тогда я охотно подверг бы

* Последний имеет также от господина Rumpf три гелиотропа второго типа.

себя испытанию продолжения триангуляции на запад, если бы это было мне поручено. Связь с треугольниками Крайенгофа, безусловно, желательна, но где их найти? Я не знаю, опубликованы ли они где-нибудь, и плохой результат с получением треугольников Эпейли ввергает меня в уныние. Лаплас, которому я написал около 9 недель тому назад, тоже ничего мне не ответил. По моему мнению, все хорошо измеренные треугольники I класса должны рассматриваться как нечто такое, на что имеет право все человечество, и постепенно вся Европа должна быть покрыта подобными треугольниками. Уже несколько лет, как я себе составил собственный метод для наиболее целесообразной обработки таких измерений, потому что всё, что я об этом читал, я нахожу весьма малозначительным. Так, например, многие математики приложили много труда к задаче о том, как вычислить широту и долготу по расстоянию от меридиана и перпендикуляра к нему с учетом эллиптического вида Земли, в то время как, насколько я знаю, никто не спросил себя предварительно:

1. Как указанные расстояния, понимаемые как обычно, получить из измерений с такой же большой точностью, потому что представляется, что большинство ведет эти вычисления как на плоскости или дает об этом совершенно неверные или неприменимые указания.

2. Будет ли вообще целесообразно применять эти расстояния в такой форме, так как, несомненно, если желательно определить их достаточно точно из треугольников, то этого можно достичь только из весьма сложных вычислений, точно так же как лишь с большим трудом можно будет перейти от них снова к долготам и широтам. В целом всё это означало бы «запрягать лошадь позади телеги». Если ввести что-нибудь пригодное м е ж д у треугольниками и широтами и долготами, то это должны быть координаты совсем другие, чем обычно понимаемые. Как это происходит в моей теории, я, разумеется, не могу здесь обстоятельно пояснить; замечу лишь, что то, что я ввожу между треугольниками и долготами и широтами, — т а к и е к о о р д и н а т ы, 1) с к о т о р ы м и к а ж д ы й п у н к т м о ж е т б ы т ь н а и б о л е е ц е л е с о о б р а з н о о т о б р а ж е н н а п л о с к о с т и; эти координаты получаются из измеренных треугольников в высшей степени удобно и легко, причем нет необходимости знать очень точно сжатие Земли, и 2) из них также легко получаются снова долготы и широты, но, естественно, надо знать сжатие. Я имею намерение опубликовать эту теорию не ранее, чем вместе с моими будущими измерениями, и прошу прежде всего об этих, обрисованных мною, идеях пока умалчивать. Очень охотно я применил бы её не только к ганноверским треугольникам, но и ко всем другим, связанным с ними, и таким образом дал бы г е о м е т р и ч е с к о е о п и с а н и е большой части Европы, если бы я был надлежаще поддержан материалами. Но!!

Господин фон Мюффлинг все же сообщил мне свои 15 треугольников от Рейна до Зееберга. Предварительно и, конечно, лишь очень грубо, я уже привязал их к Гёттингену. Именно, в 1812 г. я измерил на пункте Hanstein, положение которого относительно Гёттингена определяется из моих угловых измерений в здешней местности, углы между пунктами Гёттингеном, Brocken и Boineburg (2 пункт мюффлинговский) с ошибкой в несколько минут; всё же я думаю, что вытекающее отсюда определение Гёттингена достоверно в пределах 100 *м*. Отсюда следует: разность долгот между Гёттингенской и Зеебергской обсерваториями в единицах времени $3^m 8^s,7$. что очень близко подходит к астрономическим определениям. Отсюда Париж, если он западнее Зееберга на $33^m 35^s$, был бы расположен западнее Гёттингена на $30^m 26^s,3$.

Новая обсерватория лежит на $1^s,9$ восточнее старой, которую я раньше всегда принимал в $30^m23\frac{1^s}{2}$ от Парижа.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 18 апреля 1822 г.

... В основе всех моих вычислений лежат следующие размеры Земли:

$$a = 3\,271\,821 \text{ [туазов]}$$
$$b = 3\,261\,011 \quad \text{„}$$
$$\text{сжатие} = \frac{1}{302{,}68}.$$

Собственно говоря, я хотел принять целиком результат Вальбека: $\frac{1}{302{,}78}$. Но из-за описки я уже давно положил указанное выше значение в основу многих вспомогательных таблиц и считаю перевычисление последних не заслуживающим труда, так как это различие лежит далеко за пределами точности, достигаемой всеми градусными измерениями.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Zeven, 8 июля 1824 г.

Оба Ваших последних любезных письма я получил... Первое из них, касающееся моих наблюдений, сильно меня поразило. Так как Вы отклоняете треугольник Bremen — Brüttendorf — Wentel из-за слишком острого угла при пункте Bremen, то Вы этим одновременно отвергаете, как мне кажется, единственно возможный способ выйти на другую сторону Бремена, так как в треугольнике Bremen — Bottel — Steinberg угол при Бремене будет еще намного острее. С обычной Вашей благосклонностью Вы добавляете, что от этого в указанном треугольнике точность пострадала бы незначительно, потому что я в своих измерениях обеспечиваю очень высокую точность. Само по себе это обстоятельство, правдивость которого я пока оставляю в стороне, нисколько не может меня успокоить. Мой основной принцип состоит в том, что всегда надо наблюдать настолько точно, насколько это возможно. Степень точности наблюдений, велика ли она или мала, всегда обусловливает степень точности, которую можно требовать от результатов, и, по моему мнению, точность наблюдений отнюдь не может сделать хорошим треугольник, сам по себе плохой. По меньшей мере было бы излишним измерять остальные хорошие треугольники с такой же точностью. В крайнем случае, вся система может из-за этого спуститься до уровня намного худших измерений.

Я считал до сих пор предрассудком мнение о том, что треугольники с очень малыми углами невыгодны в отношении точности, поскольку противолежащие острым углам стороны не доставляют переходных сторон. Я считал подобный треугольник с малым углом менее пригодным лишь потому, что с ним получается небольшой продвиг, следовательно, требуется больше времени и расходов, чем при бо́льшем продвиге, но и этот мотив отпадает в тех случаях, когда отыскание и обследование большого треугольника требует почти в два раза больше времени, чем измерение двух треугольников, которые приводят к таким же результатам, из которых один имеет очень острый угол. Несмотря на это, я неполностью поступал согласно этому принципу, а соглашался на треугольник с малым углом не раньше, чем исчерпал почти все возможности, чтобы его избежать (исключая лишь такую возмож-

ность, которая приводила бы к плохим измерениям, т. е. к высоким сигналам Цаха); не потому, что я рассчитывал таким путём выиграть кое-что в точности, а исходя из вполне известного желания придать системе, насколько возможно, помимо внутренней содержательности, так же изящество и законченность.

Так как, однако, тем, что я писал в своём предыдущем письме, я не убедил Вас, и Вы просите тщательностью измерений исправить тот недостаток точности, который получался бы при острых углах, что, по моему мнению, невозможно; я начинаю сам сомневаться в своём прежнем мнении и боюсь, не было ли оно совершенно неправильным; по крайней мере, я не должен надеяться, что смогу убедить других в его правильности. Что касается треугольника Bremen — Brüttendorf — Wentel, то я сам очень неохотно решился бы на него, так как он некрасив и не дает хорошего продвига; что же касается точности, независимо от того, как точны угловые измерения сами по себе, то, принимая углы равными 12, 46, 122°, я вполне сравнил бы ее с той, которая была бы при углах 76, 46, 58°.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 25 февраля 1825 г.

... Теперь еще пару слов о геодезическом нивелировании. По этому вопросу я сам вполне уверен, но не знаю, сумею ли я Вам это вкратце так пояснить, чтобы Вы со мной согласились.

Я всегда считал, что выражение «локальная аттракция» очень плохо выбрано и может легко вызвать противоречивые мнения. Нужно было бы сказать, что направления силы тяжести не следуют тому ходу, который должен иметь место у сфероида. Направление силы тяжести есть равнодействующая притяжения всех составных частей земного тела (и центробежной силы), и при его нерегулярном составе в смысле плотности, равно как и при наличии неровностей на наружной поверхности, оно не может быть таким, как у регулярного сфероида. Но каков бы ни был состав Земли, всегда можно представить, что через каждую точку проходит поверхность, охватывающая всю Землю, к которой направление силы тяжести точно перпендикулярно, и что поверхность взаимосвязанной спокойной жидкости представляла бы именно такую поверхность. Это и есть та поверхность, которая называется горизонтальной (couche de niveau); точкам этой поверхности приписывают одинаковую высоту, нисколько при этом не заботясь о том, отклоняется ли она и насколько от эллиптического сфероида, и высоты над этой поверхностью дает как барометрическое, так и тригонометрическое нивелирование, так что оба они должны всегда одно с другим согласоваться. При этом предполагается лишь, что вдоль каждой стороны треугольника направление силы тяжести изменяется по закону непрерывности (хотя возможно быстрее или медленнее, чем у эллиптического сфероида), и это предположение может внести некоторую неверность лишь тогда, когда на одном из пунктов треугольника имеет место действительная местная аттракция, которая имеет лишь местный характер и ограничивается малым пространством (за пределами которого она не ощутима). Но я убежден, что, по крайней мере, исключая Brocken, подобной местной аттракции не существует в пределах моей и Шумахера триангуляции...

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Геттинген, 9 октября 1825 г.

... В связи с моим будущим трудом по высшей геодезии я начал на днях несколько систематизировать мысли по очень маленькой его

части, касающейся кривых поверхностей. Но я убеждаюсь, что своеобразие моей трактовки этого вопроса вынуждает меня для связи начать издалека, так что я должен даже предпослать свой взгляд на радиус кривизны плоских кривых. Я поэтому почти усомнился, не будет ли удачнее чисто геометрическую часть (в аналитической форме) этого учения, содержащую в новой форме смесь нового и известного, сперва обработать отдельно, отделить её от труда и в качестве одной или двух статей поместить в наших Commentationen. Вопрос о форме этой публикации я могу пока оставить в стороне и продолжу тем временем изложение на бумаге.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 2 апреля 1826 г.

... По поводу моих измерений я могу сказать лишь немногое. В отношении тригонометрической части моё задание в основном выполнено, так как Шумахер хочет мне помочь, я думал предпринять в конце лета наблюдения зенитным сектором. Моё пошатнувшееся здоровье отпугивает меня от продолжения тригонометрических измерений, вместе с тем, между нами говоря, я недавно сообщил в письме к Мюнстеру, что, если понадобится, я готов приложить свои силы к этому и в будущем.

Мои теоретические работы при их очень большом объёме, к сожалению, оставляют еще много пробелов; легче всего было бы помочь себе, если бы я решился объединить сообщения о моих измерениях с изложением всех моих вычислительных методов, но вывод их на основании более высоких принципов отложить на будущие, более счастливые времена для совершенно особого труда. Тогда не было бы никаких препятствий. Сначала я предприму точное уравнивание моих 32 пунктов, которые доставляют 51 треугольник и 146 направлений. Уравнивание высот (намного более легкое занятие) я на этих днях окончил...

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 14 января 1827 г.

... Я полагаю, что уже писал Вам ранее о том, что я нашел неподходящим сделать мой труд, который я предполагаю в будущем написать о моих измерениях, вполне самостоятельным также в теоретическом отношении, если я до этого не рассмотрю отдельно где-нибудь в другом месте по крайней мере большей части этого теоретического материала. Потребовался бы большой объём, чтобы развить основы моих операций, основы же этих основ, если можно так выразиться, вообще не могут войти в этот труд без того, чтобы сделать его пестрым и все же неудовлетворительным. Поэтому я решил изложить различные теоретические вопросы отдельно в нескольких статьях, что только и дает возможность развить эти значительные новые главы математики с известной степенью самостоятельности. Моё сочинение о преобразовании поверхностей является в известной степени первой из таких статей; второе я передал несколько месяцев тому назад королевскому обществу как «Дополнение к теории комбинации» наблюдений и т. д. Оно содержит принципы, которые должны быть применимы как основные положения уравнивания наблюдений, и некоторые примеры из измерений Крайенгофа и моих.

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 1 марта 1827 г.

... Мою статью, или, вернее, мою первую статью о кривых поверхностях, я закончил. Я ее, однако, еще не передам в Общество, так как на Пасху никакой том не выйдет в свет. Обе переданные мною в 1825—1826 гг. статьи о биквадратных остатках и «Дополнение к теории комбинации»

ещё не начаты печатанием. Указанная статья содержит для непосредственного использования в моём будущем труде об измерениях лишь два положения, а именно: 1) то, что требуется для вычисления сферического избытка суммы трех углов над 180° в треугольнике на несферической поверхности, стороны которого — кратчайшие линии, и 2) как в этом случае избыток должен быть распределен не поровну на три угла, с тем чтобы синусы противолежащих сторон стали пропорциональными. Правда, в практическом отношении это весьма несущественно, так как в действительности в самых больших треугольниках, которые могут быть измерены на земле, это неравенство в распределении неощутимо; но достоинство науки всё же требует того, чтобы природа этого неравенства была ясно осознана; уместно воскликнуть: Tantae molis erat!*Однако, более важно, чем решение этих двух задач, то, что эта статья обосновывает некоторые общие принципы, из которых в будущем, в специальном исследовании, можно будет вывести решение многих важных задач.

Я еще раз возвращаюсь к предмету, упомянутому в начале этого письма. Я положил в основу всех моих вспомогательных таблиц и вычислений сжатие Вальбека $\frac{1}{302{,}78}$, но я верю, что все выполненные до настоящего времени градусные измерения, если полностью использовать их данные, показали бы, что сжатие Sabine $\frac{1}{289}$ почти так же хорошо согласуется с ними, и мне кажется, что все имеющиеся к настоящему времени градусные измерения еще весьма малы по протяженности, чтобы можно было заключить сжатие в более тесные границы. Достоверно то, что Земля — неправильное тело; широты (Polhöhen) мест (отвлекаясь от ошибок наблюдений) отклоняются всегда на несколько секунд (и даже то и дело на многие секунды) от тех значений, которые можно вычислить, принимая Землю за какой-нибудь правильный эллипсоид; равным образом отклоняются действительные длины маятника от вычисленных (среднее отклонение длины маятника составляет почти $\frac{1}{30}$ английской линии). Но именно поэтому градусные измерения малой протяженности мало что могут дать для установления вида Земли в целом, и я особенно считаю слишком малой лапландскую дугу. Тем важнее, кажется мне, постепенно приводить в связь все точные триангуляции Европы. Я теперь имею надежду получить данные о баварских треугольниках. Лишь когда будут связаны треугольниками все европейские обсерватории, от Або до Палермо и от Николаева до Дублина, так, что их взаимные относительные положения будут определены со всей точностью, которую могут дать наиболее точные геодезические измерения, тогда можно будет получить достоверные результаты, т. е. наши потомки смогут обо всем судить со значительно большей надежностью...

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 14 июня 1830 г.

... Время, которое остается у меня в это лето свободным для собственной работы, я думаю посвятить продолжению моего сочинения о биквадратных остатках, с тем чтобы эта работа, начало которой датировано 1805 г., приблизилась к своему завершению. Она потребует по меньшей мере двух обширных статей; первоначально я, однако, ограничусь только одной, чтобы первое свободное время, которое у меня окажется, снова посвятить другому предмету, вероятно теоретическим методам высшей геодезии. С давних пор мне суждено предпринимать такие работы, изложение которых не поддается быстрому продвигу...

* „Сколько стоило труда, чтобы этого достигнуть"! **(Прим. ред.).**

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ. Гёттинген, 2 сентября 1837 г.

... Герлинг, закончивший теперь свои тригонометрические измерения в Гессене, организовал еще одну операцию, которая должна послужить для определения разности долгот между пунктом Гёттинген и пунктом Mannheim. Будут подаваться сигналы на двух горах, Meisner и Feldberg, первая из которых видна из моей обсерватории, а вторая из обсерватории Mannheim, но обе одновременно с промежуточной горы у пункта Marburg, где Герлинг наблюдает с хронометром Kessels. Сигналы — это пороховые вспышки ночью и свет гелиотропа днём. Погода не благоприятствует; здесь к настоящему времени наблюдено уже изрядное количество знаков обоих видов, но Герлинг, судя по его последнему письму, еще почти ничего не видел с пункта Feldberg.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 5 октября 1821 г.

Мои сердечные пожелания успеха предпринятому Вами делу. Меня радует, что оно перешло в Ваши руки, так как Вы будете считать своим долгом исполнить всю сеть триангуляции со всей возможной тщательностью. Я нахожу это в высшей степени желательным и всегда сожалею, когда скупятся уже в триангуляции первого класса, желая достигнуть в ней точности, не большей, чем это необходимо для самой конечной цели. Наиболее точное знание относительных положений самых интересных пунктов страны может быть полезным во многих отношениях, не говоря уже о том, что на них наилучшим образом может быть основана детальная съёмка. Было бы наверняка исключительно важно, если бы большая часть Европы была полностью покрыта единой сетью, и постепенно мы к этому придём; каждое государство должно считать за честь так хорошо исполнить свою долю, чтобы она могла быть поставлена в ряд лучших.

Мне кажется, что Вы сделали бы хорошо, если бы выбрали также Meisner за пункт треугольника; Вы этим самым непосредственно свяжетесь по меньшей мере с 5 моими треугольниками и притом, вероятно, с таким же числом мюффлинговских. Я охотно приду в этом деле на помощь и, поскольку это окажется доступным, выполню наблюдения с этой стороны. Гелиотропы чрезвычайно облегчают такие работы, и на пункте Meisner не понадобится никакого другого сооружения, кроме устройства каменного постамента сечением приблизительно $1\frac{3}{4}$ фута и с высотой 3 фута над землей для установки на нём гелиотропа и теодолита и, возможно, порубки нескольких деревьев в случае, если нельзя будет полностью достичь свободной видимости... Начиная от Ганновера, у меня не имеется никакой связи с Вашей триангуляцией; поэтому я исключил из вычислений пункт Köterberg, который прежде прекрасно служил для привязки пункта Hercules. Между тем я точно измерил направление линии Hohehagen — Hercules относительно других имеющихся там линий.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 21 февраля 1822 г.

... Если на пункте Meisner связь с Гёттингенской обсерваторией и с пунктом Inselsberg не может быть осуществлена с одного места, Вам следует использовать обе стоянки. При этом нет большого увеличения объема работы, так как, согласно принципам исчисления вероятностей, углы между объектами, видимыми в этих двух точках, поскольку Вы их обе измеряете, Вам надо измерить в каждой из них лишь половиной того числа повторений, которые Вы исполнили бы, если бы использовали только одну точку. Получения взаимного положения обеих точек Вам будет нетрудно добиться с наибольшей точностью и все же без особых усилий.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 7 ноября 1822 г.

... При очень пологом наклоне зеркала, когда под конец прекращается возможность управления, я всегда применял с прекрасным результатом двойное отражение, при котором гелиотроп питается не самим солнцем, а установленным на земле в подходящем месте ручным зеркалом. Я рекомендую Вам этот прием как достойный подражания...

В горной стране появляется желание измерять тем больше, чем больше расстояния, которые при употреблении гелиотропа не имеют никаких границ. Свет моего большого зеркала размером в один квадратный фут проник с пункта Lichtenberg на Falkenberg почти на 12 миль, даже через густой дым болотного пожара, сквозь который свет от малого зеркала гелиотропа, конечно, не мог проникнуть.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 27 июля 1823 г.

... Я заказал себе у Репсольда новый окуляр к моему теодолиту с невероятно тонкими паутиновыми нитями, отстоящими одна от другой на 29″ (установленные в окуляре Эртеля, тоже весьма тонкие, нити все же толще этих и отстоят одна от другой на 38″). При наблюдении удаленных, более б л е д н ы х земных предметов такое устройство исключительно выгодно; к сожалению, я его получил уже post festum (латинское изречение — «слишком поздно»).

Гамбургская башня, видимая с пунктов Nindorf, Timpenberg и Lüneburg почти всегда при задымленном состоянии воздуха весьма плохо, меня сильно мучила, равно как и башня Lüneburg с Гамбурга, и вообще измерения в тех краях не столь точны, как предыдущие, чему, впрочем, способствовало и постоянное колебание башен. Башня Michaelis в Гамбурге, пока я там был, никогда не была спокойной; горизонтальные маятникообразные колебания часто превышали $\frac{1}{2}$ минуты. Из всех моих триангуляционных пунктов эта башня была самой плохой как станция и (исключая Brocken) как объект наведения. Репсольд изготовляет также новые необыкновенно совершенные уровни, которые он наполняет нефтью вместо винного спирта. Они успокаиваются значительно быстрее прежних.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 3 октября 1823 г.

... Позвольте мне сделать еще несколько замечаний...

1. При наблюдении двух пунктов я всегда начинаю с того, в отношении которого я больше всего опасаюсь, что он может отказать светить.

2. Если второй пункт — свет гелиотропа и нет полной уверенности, что он не откажет светить, то я отсчитываю как обычно. Там, где это опасение весьма мало, я иногда делаю больше 10 измерений, т. е. 15 и даже 20, прежде чем снова отсчитываю. При этом здесь всегда имеет место большой риск. Если много опасений за отказ второго пункта, я отсчитываю после третьего, после второго или вовсе при каждом наблюдении. То же самое, если первый пункт долго не появляется.

3. Если я веду измерения серии направлений и первый пункт отнаблюден, то, прежде чем я освобождаю алидаду, я прошу проследить вручную зрительную трубу, виден ли второй пункт; если он, однако, отказывает светить уже после того, как алидада освобождена, и не появляется больше, то по этой причине измерение все же не потеряно; я засекаю в крайнем случае какой-либо третий пункт и получаю таким образом смешанные углы. При моем посещении пункта Brocken в этот раз такой случай имел место только один раз, когда я взял два раза

(Ilefeld — Hohehagen) и 2 раза (Ilefeld — Hels). Такие смешанные углы хорошо используются в системе pro rata (по латыни — «в соответствующей пропорции») как чистые. В 1821 г. я имел много смешанных углов, позднее реже. Я поэтому имею также на большинстве станций, кроме главных направлений, вспомогательные направления; особенно это было в 1821 г., когда я имел только один гелиотроп. Я охотно выбирал в качестве вспомогательных направлений шпили башен, не слишком удаленных и, по возможности, не сильно уклоняющихся от горизонтальной плоскости. Правда, на пункте Brocken последнее условие не было достижимо. Ruyseburg лежит на 1°37′ ниже горизонта, Hüttenrode на 1°54′ и вехи на пункте Wurmberg, которые я велел в 1821 г. водрузить, а в 1823 г. обновить (хотя и неподалеку, в другом месте), — на 2°13′.

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 19 июля 1827 г.

... Хотя погода благоприятствует моим астрономическим работам не в такой степени, как мне хотелось, я все же надеюсь получить амплитуду дуги между обсерваториями в Гёттингене и Альтоне с точностью до очень малой доли секунды; я взял большое множество звезд и всего выполнил около 900 наблюдений. Остается расхождение в 5″ против вычислений из триангуляции с размерами Земли по Вальбеку, и было бы поэтому очень интересно иметь еще один промежуточный пункт. С сектором это было при данных обстоятельствах невозможно; мы может быть в будущем отнаблюдаем коллективно в Celle с пассажным инструментом, установленным в первом вертикале, как Шумахер до этого в Альтоне, а я потом в Гёттингене... Еще до моей поездки я получил сведения о всех баварских треугольниках, которые связаны с моими через посредство Ваших...

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 12 сентября 1838 г.

... Что касается разности долгот с Парижем, то я никогда ее не выводил из покрытий звезд и т. д., как ее получали Triesnecker, Wurm и пр.; Вы сами так же хорошо, как и я, в состоянии определить э т о т результат. Взамен этого я определил разность долгот Гёттингена и Парижа, которую Вы можете найти в эфемеридах Harding по разности долгот между пунктами Jever и Гёттинген, а также между пунктами Bentheim и Гёттинген по данным моих и соответственно моего сына тригонометрических измерений, с одной стороны, и, с другой стороны, по разностям долгот между пунктами Jever и Bentheim с Парижем, как они установлены Крайенгофом. Нового вычисления по этой причине я не сделал при полном уравнивании всех треугольников, охватывающих замкнутым полигоном Ольденбург; Jever изменился очень мало; можно было бы также совсем исключить Jever и вместо него использовать Emden и Onstwedde, до которых распространились измерения Гартмана. Во всяком случае изменения конечных результатов были бы весьма незначительными. Я считал до сих пор выполнение нового вычисления по этой причине не стоящим труда, так как измерения Крайенгофа, как Вы можете установить из моего «Дополнения к теории комбинаций», намного хуже их репутации.

Третье определение Вы могли бы получить по Альтоне, разность которой с Гёттингеном определена тригонометрически, равно как хронометрически определена разность с Гринвичем. Но лично мною эти данные не получены, и я должен сообщить это Вам...

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 14 ноября 1838 г.

... То, что я еще ничего больше не ответил на Ваше предпоследнее письмо, Вы должны любезно извинить, потому что я едва ли что-нибудь мог добавить к тому, что сообщено в моем последнем письме [от 12 сентября].

Действительно, я ничего существенного не могу добавить, кроме ссылки на журнал Lindenau—Bonnenberger, том IV, стр. 119, где Вы найдете уже установленным взаимное положение старой и новой здешней обсерватории, разве только следующие два замечания:

1. Разность долгот дана в единицах времени.

2. Положение новой обсерватории в указанном месте относится к центру круглого здания, положение которого относительно середины оси меридианного круга Рейхенбаха я, если не ошибаюсь, уже сообщил Вам ранее. Если, однако, Вы хотите сами точно подсчитать относительное положение последнего пункта относительно центра старой обсерватории, то я при этом выписываю из моего списка координат следующее:

	По широте	По долготе
Центр купола	— 3,104	— 7,324
Середина оси меридианного круга Рейхенбаха	0	0
Середина старой обсерватории	— 193,54	+ 541,9

Единицей является метр; в первом столбце плюс (+) означает к югу, во втором плюс (+) к западу.

Если Вы желаете знать моё мнение по вопросу о редукционном числе, которое Вам следует принять для приведения Ваших долгот к Парижу, то я должен сказать, что считаю совершенно безразличным, какое бы число Вы мне ни сообщили, как взятое за исходное. В самом деле, Вы можете выбирать, что хотите, если разность широт или размеры поля действия в этом отношении остаются:

А. В высшей степени малыми для всякой практической цели, например, при вычерчивании карт.

Б. В двадцать или пятьдесят раз больше, чем все относительные разности между всеми Вашими установками.

Так как последнее составляет самую суть Вашей работы, то мне кажется, что высказанное выше моё суждение в достаточной степени оправдывается.

В Вашем предпоследнем письме Вы говорите о расхождениях в разности долгот между Парижем с Гёттингеном, полученных разными путями и достигающих $\frac{3}{4}$ секунды во времени, как об этом значительных. Я бы их так не назвал.

В самом деле, мне представляется, что их можно оставить без внимания, и я показал в моем сочинении о разности широт между Гёттингеном и Альтоной, стр. 73[*]. Если между двумя точками, не очень удаленными одна от другой, найдены геодезическим способом в двух разных вычислениях разности долгот, отличающиеся на 11 секунд дуги, то эта была бы громадная ошибка, указывающая на то, что вкрались очень плохие наблюдения или плохо вычислено.

Но ведь Париж и Гёттинген находятся далеко один от другого. Измерения Деламбра и Крайенгофа, я полагаю, не могут быть сравнены по точности с нашими, они также вычислены существенно различными методами и элементами. Я поэтому не стану удивляться, если найден-

* [C. F. Gauss. Werke, Bd. IX, 1903. S. 49—50.

ная таким образом разность долгот отклонится на несколько секунд от другой, найденной также геодезическим путём, например через Strassburg, Mannheim и т. д.

Но ведь об этом здесь нет никакой речи, а лишь о расхождениях в долготах, определенных астрономически, которые, если точно рассматривать, означают нечто совсем другое, чем геодезические. Первые относятся к направлению вертикальных линий и плоскостей, проходящих через них и параллельных земной оси, последние же к расстояниям на поверхности Земли, которая вовсе не является эллипсоидом, а по отношению к которой эллипсоид может рассматриваться лишь как некоторое приближение.

После такого множества примеров различия в геодезических и астрономических определениях широт надо быть вполне готовыми к расхождениям в долготах того же порядка. Само расхождение в 11″ между двумя пунктами, расположенными один к другому намного ближе, чем Гёттинген и Париж, в сущности ничто. Не было бы, безусловно, ничего особенного, если бы даже вдвое большее расхождение оказалось между Гёттингеном и Marburg.

Не упускайте из виду то, что найденные Вами разности, даже очень хорошие сами по себе, лишь тогда могли бы быть вполне правильными, если бы все наблюдения были совершенными и абсолютно безошибочными (каковыми они не являются). Нет никакого основания ожидать, что

1) вычисленная по геодезическим измерениям (принимая определенные размеры земного эллипсоида) разность между Гёттингеном и Парижем;

2) найденная из астрономических наблюдений;

3) найденная смешанно, а именно геодезически между Гёттингеном и Альтоной и астрономически между Альтоной — Гринвичем — Парижем

должны согласоваться между собой, так как в действительности эти три числа означают весьма различные вещи.

Если я при опубликовании в будущем результатов моих измерений должен буду часть из них дать в виде разностей широт и долгот, я непременно установлю последние не относительно Парижа, который мне вовсе не нужен. Если, однако, исходя из каких-либо оснований, Вы находите целесообразным сообщить Ваши измерения в такой форме, то я повторяю, что считаю совершенно безразличным, какое редукционное число Вы употребите, если только читатель не останется в неведении о том, что находящиеся при этом доли секунды сами по себе не могут претендовать на какое-нибудь точное значение, а лишь могут только служить средством для получения снова любой разности между двумя данными Вами числами с указанной точностью без потери чего бы то ни было из точности Ваших измерений. Не имея намерения опередить Вас, я положил бы в основу, при предположении, изложенном выше, такое число, которое вытекает из данной геодезической связи между Гёттингеном и Парижем, так как расхождение астрономических долгот и азимута с геодезическими в данном случае не подлежит сомнению...

О ганноверской триангуляции

(План и начало сочинения о тригонометрических измерениях в Ганновере) [11]

Восемь разделов

		Приблизительно
1.	Вообще об инструментах и методах, применявшихся при измерениях	40 страниц
2.	Измерение углов главных треугольников	60 „
3.	Малые редукции угловых измерений	12 „
4.	Уравнивание измерений	24 „
5.	Первый способ вычисления треугольников, (на сфероиде)	36 „
6.	Второй способ вычисления треугольников (на плоскости)	60 „
7.	Дополнительные пункты	24 „
8.	Высотные измерения	20 „
	Всего около	276 „
	или	$34\frac{1}{2}$ листа.

В первом разделе следует рассмотреть следующие вопросы: ближайшая цель измерений; особенности местности; объекты визирования; точки стояния; инструменты; способ наблюдений; базис; предварительные вычисления пунктов.

Тригонометрические измерения в ганноверском королевстве

Введение

Первым поводом к тригонометрическим измерениям, выполненным мною в 1821—1825 гг. в королевстве Ганновер, послужило градусное измерение, предпринятое господином государственным советником Шумахером в датских владениях. Если на севере оно нашло свой естественный конечный пункт на северной оконечности Ютландии, то к югу оно было способно к продолжению до самого Средиземного моря. Такое продолжение должно было прежде всего идти на протяжении больше двух градусов по широте через королевство Ганновер, на южной границе которого Гёттингенская обсерватория доставляла возможность к наиболее точному и удобному астрономическому определению. Научная важность подобного предприятия и прочная основа, которую таким путём приобрели бы география королевства и будущие более обширные тригонометрические измерения, не могли ускользнуть от внимания нашего просвещённого правительства, и поэтому в 1820 г. я получил по-

ручение выполнить указанное продолжение датского градусного измерения через ганноверское королевство.

Тригонометрическая часть этой работы была начата летом 1821 г. у южного конца и закончена измерениями на башне Michaelis в Гамбурге летом 1823 г.

Тем временем в соседнем курфюршестве Гессен была начата триангуляция под руководством господина профессора Герлинга, главные треугольники которой предполагалось измерить исключительно хорошими техническими средствами и со всей достижимой точностью. Связь её с ганноверскими треугольниками была тем более важна, что через неё устанавливалась связь с баварской триангуляцией, и соединение в в одно целое исполненных в различных частях Европы триангуляционных измерений приобретало весьма высокое значение. Указанная связь ганноверских и гессенских измерений была исполнена еще осенью 1823 г.; последние остались, однако, с тех пор незаконченными, хотя в той мере, в какой это было необходимо для осуществления минимально возможной связи ганноверских и баварских треугольников, а именно измерение по меньшей мере двух углов в треугольниках, служивших для этой связи, эти измерения были завершены в 1823 г.

Поскольку, таким образом, связь, по меньшей мере, предварительная, северо-немецких и южно-немецких измерений была достигнута, казалось вдвойне важным осуществить связь с большими взаимно связанными системами на западе и поэтому мое первоначальное поручение получило продолжение с тем, чтобы я выполнил также переход от моих треугольников градусного измерения к измерениям Крайенгофа. Поэтому я продолжил с этой целью в 1824 и 1825 гг. новую систему треугольников от Гамбурга до Jever, посредством которой осуществлена связь с голландскими, французскими и английскими триангуляциями, так что уже сейчас все большие измерения, простирающиеся на наиболее развитые части Европы, действительно в единой системе имеются налицо.

Так как тем временем датское градусное измерение оставалось еще незаконченным, я считал необходимым так организовать астрономическую часть моей работы, чтобы ганноверское градусное измерение могло существовать и как законченное целое.

Гёттингенская обсерватория, являющаяся сама главным пунктом системы, от которой все стороны треугольников получили свою ориентировку, образовала собой южный конечный пункт, но к этому добавилось единственное в своем роде обстоятельство, состоящее в том, что и выбор северного конечного пункта не оставлял никакого сомнения: организованная тем временем господином профессором Шумахером обсерватория в Альтоне лежит как раз почти точно в меридиане Гёттингена. Исполненные мною в 1827 г. на обоих пунктах наблюдения 43 звезд с зенитным сектором Рамсдена и полученные по ним разность широт и другие результаты уже опубликованы мною в труде, появившемся в свет в 1828 г.

Тригонометрической части моей работы посвящен настоящий труд. При этом я считал необходимым придать изложению требуемую подробность исходя из двух причин.

При изолированном градусном измерении по широте умеренной протяженности, которое больше ничем не является и не должно являться, можно рассматривать тригонометрическую часть как в известной мере подчинённую, поскольку точность, присущая астрономическим наблюдениям, намного не соответствует точности, достигаемой в тригонометрической части, и, следовательно, в отношении последней нет настоятельной необходимости добиваться наивысшей точности.

Наоборот, при тригонометрической съёмке страны во многих отношениях, безусловно, целесообразно доводить точность определения взаимного положения главных пунктов до такого уровня, какой только допускают состояние техники и обстоятельства, тем более, что это приводит к возможности получать во многих случаях достаточно точные определения второстепенных пунктов со значительно меньшей затратой труда и такими методами, которые без указанной предпосылки вели бы к плохим результатам. Конечно, когда подобная тригонометрическая съемка стоит изолированно, подробное опубликование её составных частей по меньшей мере не представляет общего интереса. Но чем более тригонометрические измерения, выполненные в различных частях Европы, вступают между собой в связь и постепенно приближаются к одному большому целому, тем больше отдельные составные части приобретают характер ценного общественного достояния, значение которого сохраняется на все времена, и тем важнее сберечь их существенные моменты с такой полнотой, чтобы их надёжность в целом, как и в частностях, всегда могла быть проверена.

Другой мотив для подробного описания лежал в особенностях методов, примененных мною как в самих измерениях, так и при методике их обработки, которые отчасти сильно отличаются от ранее употреблявшихся и изложение которых должно быть одной из главных целей настоящего труда. Без сомнения, изложение в общем виде этих методов в связи с текущим применением их в обширной системе измерений — наилучший способ представить его природу в действительном свете и облегчить это применение тем, кто в будущем пожелает воспользоваться ими для подобных измерений.

Первый раздел
ОБЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

1.

Местность между Гёттингеном и Гамбургом в своей южной и северной части весьма различна по природе. Первая — гористая, вершины гор чаще всего более или менее залесены и большинство населенных пунктов расположено так, что башни в них либо вовсе не открывают далекого кругозора или в лучшем случае открывают его в одну сторону. Северная часть, наоборот, равнинная местность, часто залесена, что сильно затрудняет использование отдельных возвышенностей подходящей высоты и часто делает его невозможным; населенных пунктов с башнями, которые подходили бы как вершины треугольников, на большей части этого района совсем нет.

2.

При этих обстоятельствах можно было предвидеть, что на естественные вершины треугольников почти совсем не приходится рассчитывать, а следует на большинстве пунктов строить собственные сигналы, а на других предусмотреть искусственные меры, чтобы сделать их видимыми.

В этом отношении главным фактором является проектируемый размер отдельных треугольников. Ясно, что в очень большой триангуляции, например распространяющейся на часть света, вообще говоря, выгоднее всего для точности целого сделать треугольники насколько возможно большими, и это подходит также для триангуляции меньших размеров, поскольку её рассматривают как составную часть такой большой системы. Но это обобщение остается действительным лишь, поскольку предполагается, что углы в больших треугольниках могут быть измерены с той же, по крайней мере с незначительно меньшей точностью, чем

в малых треугольниках, а это условие отнюдь не имеет места при использовании колоколен или искусственных башен, и моменты, когда подобные предметы позволяют на больших расстояниях иметь высокую точность и надёжность измерений, бывают исключительно редки.

[Извлечения из отчетов правительству о ганноверской триангуляции].

[Из отчета от 7 января 1822 г. «О работах в 1821 г.»].

Из многих работ, относящихся к градусному измерению, образование сети триангуляции и измерение углов требуют наибольшего времени и труда. В ганноверском градусном измерении сеть должна была на севере у Гамбурга включиться в датскую триангуляцию; на юге сама Гёттингенская обсерватория — наиболее естественный конечный пункт градусного измерения, но, чтобы этим путём последнее стало также способным к продолжению на юг, было очень важно включить его в те иностранные триангуляции, которые примыкают к королевству Ганновер с юга. Это касалось измерений, организованных прусским королевским правительством и выполненных с большой тщательностью, равно как и большой триангуляции в Kurhessen, запроектированной в настоящее время к выполнению с максимально достижимой точностью.

Упомянутые прусские измерения в той части, в какой они развиты к настоящему времени, были мне сообщены прошлой зимой; кроме того, я имел случай получить часть измерений, исполненных французским полковником Эпейли в 1804 и последующих годах в Ганновере, и именно в его южной части. Эти и другие материалы, которые могли дать некоторое облегчение в работе по выбору пунктов триангуляции, а также соображение о том, что поблизости к Гёттингену имеются многие мелкие затруднения, неизбежные на начальной стадии подобных работ, но легко устранимые, побудили меня начать триангулирование с южной стороны.

Уже в 1820 г. я положил хорошее начало тем, что обзавелся требуемыми инструментами; я здесь упоминаю лишь о тех, которые относятся непосредственно к геодезической части градусного измерения. Для собственно угловых измерений я заказал у Рейхенбаха (мастерскую, которого полностью перенял его бывший мастер Эртель) двенадцатидюймовый теодолит, изготовление и сдача которого были обещаны на весну 1821 г. (см. стр. 216). Меньший теодолит от английского механика Трав-тона я уже имел на руках благодаря любезной заботе профессора Шумахера.

Особой заботы требовали вспомогательные средства, предназначенные для того, чтобы сделать пункты триангуляции видимыми на больших расстояниях. Так как, по моему мнению, было весьма важно выбрать треугольники насколько возможно большими, то по условиям местности, на которой они должны были располагаться, не оставалось никакой надежды на использование в качестве пунктов триангуляции многих колоколен. Специально построенные сигналы были до сих пор наиболее употребительным средством в подобных случаях; всё же на практике нередко были случаи, когда и это средство оказывалось недостаточным, когда подобные сигналы (так же, как и колокольни) на больших расстояниях, где они проектировались не на небо и, особенно, где они проектировались на тёмный фон, всегда было трудно видеть*

* Мой собственный опыт прошлым летом многократно подтвердил это. Так, например, в течение всего моего более чем четырехнедельного пребывания на пункте Brocken я мог видеть построенный на пункте Hils и удаленный на $7\frac{1}{2}$ миль сигнал только один или два раза в течение немногих минут, а удаленную на 12 миль колокольню Ганновера ни одного раза, несмотря на то, что направление было точно известно.

и еще намного труднее наблюдать. Другие наблюдатели по этим и другим причинам часто (некоторые исключительно) устраивали наблюдения углов ночью, обеспечивая видимость удаленных пунктов триангуляции с помощью больших ламп Argand с очень точными параболическими отражателями. Конечно, эти ночные наблюдения также сопряжены с большими трудностями и неудобствами и в особенности в очень больших треугольниках, так что одно удачное наблюдение должно обычно как бы получаться ценой многих напрасных проб... Хотя я поэтому не был склонен пользоваться исключительно указанным способом наблюдений, тем более, что моим физическим силам трудность постоянного ночного пребывания на горах, в большинстве случев высоких и труднодоступных, была бы не по плечу, я все же должен был, так как никакое другое средство не было до того известно, заранее предусматривать его использование по меньшей мере во многих отдельных случаях, и поэтому я предварительно заказал три такие лампы у Репсольда в Гамбурге и у Körner в Йене. Эти лампы я получил в мае 1821 г., и их эффект во время организованных различных опытов на подходящих расстояниях соответствовал моим ожиданиям.

Так как мне всё мерещились упомянутые большие трудности создания больших сетей на основании опыта, еще раньше, чем я приобрел свой, я обдумывал совершенно новое средство для их устранения. Теоретические исследования убедили меня в том, что солнечный луч, отраженный от весьма малого плоского зеркала, имеет достаточную силу, чтобы быть видимым на самом большом расстоянии, и будет лучше и легче наблюдаться, чем все башни и сигналы, в том числе лучше, чем несколько соединенных вместе ламп Argand ночью. Чтобы сделать эту идею полезной, был необходим особый аппарат или инструмент, при помощи которого можно было бы непрерывно направлять отраженный солнечный свет с наибольшей точностью и надёжностью на любой достаточно удалённый пункт. Хотя я уже, по существу, полностью набросал целесообразную конструкцию, было нелегко получить этот инструмент в исполненном виде, тем более, что это должно было осуществиться через иностранного механика, когда преимущество постоянного устного обсуждения отдельных технических затруднений отпадает, поэтому изготовление по меньшей мере сильно затягивается во времени. Однако эта трудность приблизилась к разрешению как только к Пасхе вернулся наш искусный инспектор Rumpf, отсутствовавший в течение большой части зимы, а вскоре после этого принял на себя изготовление такого инструмента.

Ганноверское градусное измерение имеет существенную и важную особенность в том, что первые стороны триангуляции, исходящие от здешней обсерватории, могли быть ориентированы точнейшим образом при помощи стационарных меридианных инструментов обсерватории. Правда, первоначально кругозор с обсерватории по направлению меридиана не был открыт ни в северном, ни в южном направлении и если бы этот недостаток не был устранен, то не только отсутствовало бы указанное весьма важное преимущество, но это навсегда осталось бы существенным коренным недостатком выбора места для обсерватории. К счастью, первая половина этой трудности уже была преодолена; закрывавшуюся до этого садами Гёттингена видимость на север я открыл уже осенью 1820 г. и поручил установку временного меридианного знака на горе вблизи Weende. Намного бо́льшими оказались трудности к югу от меридиана, где видимость ограничивалась густой, высокой и

простиравшейся на расстояние трех часов ходьбы растительностью. Это препятствие надо было как-то преодолеть...

В это время инспектор Rumpf уже усердно работал над упомянутым выше инструментом, которому я дал имя «Гелиотроп». Но еще до завершения последнего я пришел к мысли приспособить просто зеркальный секстант в качестве некоего заменителя гелиотропа (Viceheliotrop), правда, намного менее совершенного, но при надлежащем обращении одинаково полезного. Опыты, поставленные с ним на расстояния около двух миль, сверх моих ожиданий, подтвердили огромную силу отраженного солнечного света.

[Из отчёта от 31 января 1823 г. «О работах по градусному измерению в 1822 г.»]

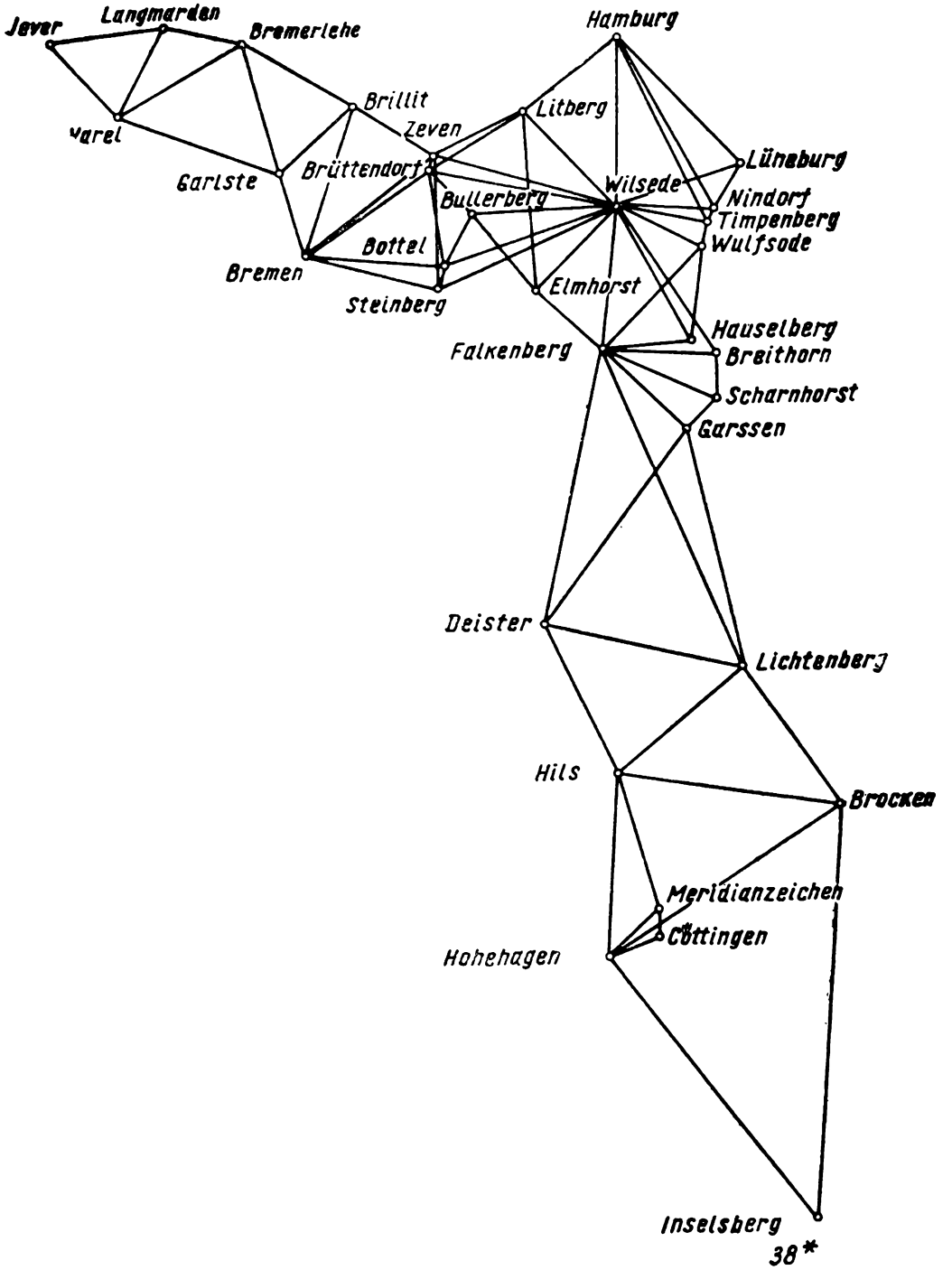
В 1821 г. триангулирование, как наиболее продолжительная часть всего предприятия, было начато и были завершены измерения на 5 пунктах, а именно: на Гёттингенской обсерватории, на Меридианном знаке, на пунктах Hohehagen, Hils и Brocken. Для дальнейшего продолжения были также выбраны четыре пункта, расположенные дальше на север, а именно Lichtenberg, Deister, Wohlenberg в волости Gifhorn и гора у Brelingen в волости Bissendorf. Однако я сам эти пункты еще не посетил и в отношении некоторых из них оставалась проблематичной их способность служить пунктами триангуляции: это надо было решить раньше, чем составлять план первых работ за 1822 г.

Но это была только небольшая часть необходимых предварительных изысканий. Работы приближались к пустоши Lüneburg, очень равнинной местности, где отсутствие командных точек и почти бесчисленное количество больших и малых лесов, покрывающих её в шахматном порядке, чрезвычайно затруднили образование сколько-нибудь значительных треугольников. Я уже знал об этих трудностях из отчётов французского полковника Эпейли, руководившего в 1804 и 1805 гг. французскими измерениями в ганноверском курфюршестве. Этот инженер посчитал трудности местности столь значительными, что объявил образование системы треугольников от Aller до Эльбы невозможным и осуществил связь с неимоверно большим обходом, а именно прокладкой треугольников вдоль Везера до его устья, а затем вверх по Эльбе до Гамбурга, — способ, допустимый как крайнее средство при государственной съемке, но совсем недопустим в градусном измерении.

Эти обстоятельства сделали необходимой до начала собственно измерительных работ рекогносцировочную поездку. В этой поездке, к которой я привлёк из моих трёх помощников только капитана Мюллера, я был занят с 28 апреля до 1 июня и, опуская здесь детали утомительных поисков, приведу лишь главные результаты.

Brelingerberg оказался для связи непригодным, но это более чем компенсировалось удачным открытием, что два пункта, расположенных еще севернее, поле у Garssen и Falkenberg почти в одной миле на северо-восток от Celle, удаленного, в свою очередь, на одну милю к северо-западу от пункта Bergen, могут быть непосредственно связаны с пунктами Lichtenberg и Deister. Таким образом, Wohlenberg оказался излишним и первые измерительные работы были установлены определенно и надежно. Однако в отношении дальнейшего продвига на север я нашел трудности такими, как ожидал; все же мне снова удалось образовать как бы в самом центре пустоши два хороших треугольника между 4 пунктами: Falkenberg, Hauselberg (в волости Hermannsburg), Wulfsode (в волости Ebstorf) и Wilsede (на внешней юго-западной границе волости Winsen an der Luhe). Далее обнаружилась возможность связать Falkenberg с Bilsede посредством просеки через Бекклинский

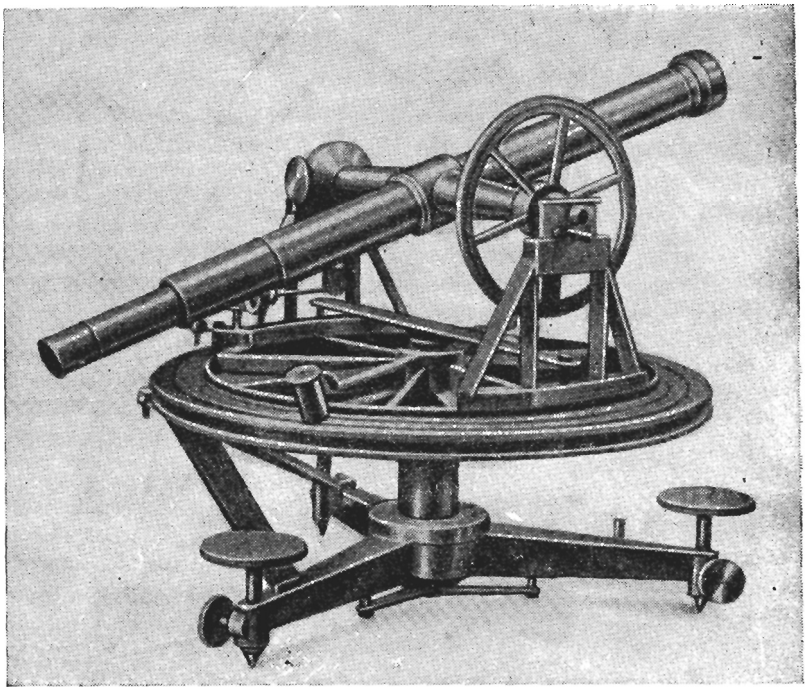
лес и появилась надежда, что пункты Hauselberg и Garssen можно будет соединить при помощи одного или нескольких промежуточных пунктов и просек в разделяющем их лесу. Но относительно подобных просек, без которых в этой местности не обойтись, я считал себя обязанным придерживаться двух правил: во-первых, в меру возможности из-



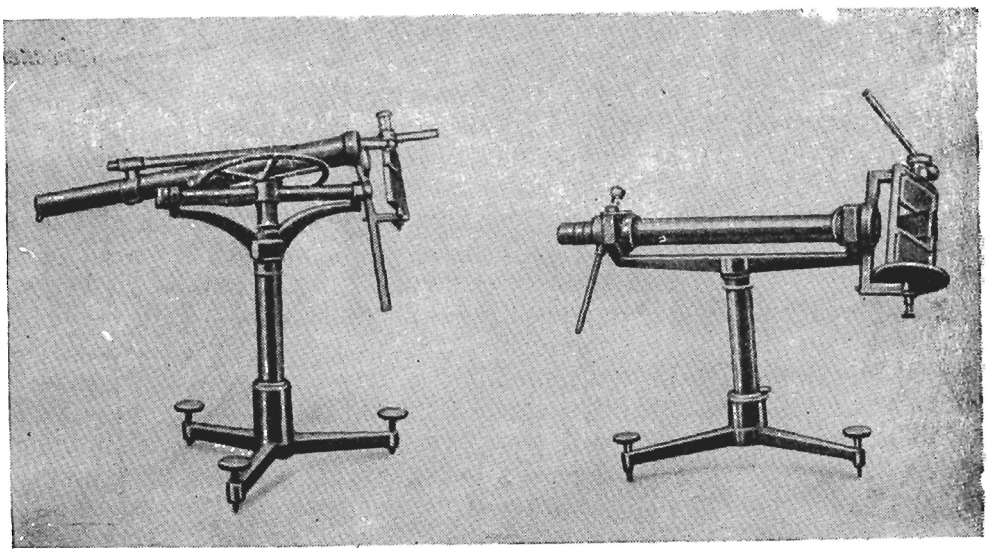
бегать порубки всех ценных пород (таких, как дуб), и, во-вторых, предварительно определять направление просеки с исключительной точностью, чтобы она получалась возможно уже и не требовала бы порубки без надобности ни одного ствола. Но чтобы достичь этого, должны были предшествовать очень точные измерения, отчасти искусно распола-

женные и скомбинированные, выполнимые, кроме того, достаточно точно и с возможно меньшей затратой времени лишь тогда, когда к данной местности пододвинутся основные измерения. Я должен здесь наперед заметить, что и этой цели я впоследствии, к моему величайшему удовлетворению, достиг.

Время между возвращением с рекогносцировочной поездки до начала собственно измерительных работ я употребил на то, чтобы приве-



Главный 12-дюймовый теодолит Гаусса



Гелиотропы системы Гаусса.

сти инструменты в рабочее состояние, приготовить всё необходимое и дать капитану Мюллеру и лейтенанту Гартману инструкции, необходимые для полной связи работ между собой. 16 июня я выехал в Lichtenberg — первый пункт, наблюдаемый в этом году, куда до этого выехал мой сын с частью инструментов.

Действительные работы по измерению углов продолжались в этом году 4 месяца; до середины октября и в течение этого времени было закончено 9 пунктов; в 1821 г. за время, не намного короче этого, удалось сделать только пять; настолько более быстрый продвиг следует приписать главным образом увеличению числа помощников и гелиотропов, но еще важнее полученное благодаря этому повышение точности самих измерений...

Цель триангуляции, как части градусного измерения, состояла в том, чтобы связать Гёттингенскую обсерваторию системой треугольников с датской триангуляцией, и поэтому было выгоднее всего развить треугольники насколько возможно большими, а пункты выбрать на самых высоких местах, обеспечивающих наибольший кругозор. Эти пункты сами по себе большей частью не представляют непосредственного интереса для географии королевства, но я всюду искал возможности сделать свои работы полезными наряду с основной целью, также и для этой последней. Положение всех мест, видимых больше чем с одного главного пункта триангуляции, я тщательно определил, многие с точностью, равной точности положения главного пункта. Я назову из них города Hannover, Braunschweig, Celle, Lüneburg, Neustadt am Rübenberge Burgdorf. Число деревень, положение которых я определил, очень велико. Проложена дорога для распространения этого способа на бо́льшую часть территории или на всю территорию.

[Из отчета от 16 февраля 1825 г. «О тригонометрических работах, исполненных в 1824 г.»]

... Результаты: отчет и прилагаемая карта показывают, что работы 1824 г. доставляют многократные переходы от треугольников прежних лет к Бремену; наиболее простой из них [охватывающий треугольники: Wilsede — Falkenberg — Elmhorst, Wilsede — Elmhorst — Litberg, Wilsede — Litberg — Hamburg, Wilsede — Litberg — Zeven, Wilsede — Zeven — Steinberg и Zeven — Steinberg — Bremen*) обозначен жирными сплошными линиями, и еще два новых треугольника [Zeven — Bremen — Brillit и Brillit — Bremen — Garlste] привязаны к стороне Bremen — Zeven. Если бы можно было указанную простую систему отыскать с самого начала, то, конечно, другие треугольники, обозначенные сплошными тонкими линиями [с вершинами Bullerberg, Bottel и Brüttendorf], полностью отпали бы. Но отчет показывает, после какого множества трудностей представилась возможность прийти к указанному плану, равным образом точное и быстрое осуществление необходимых для этого различных просек также не было бы возможно без предшествующего очень точного знания положения мест. Впрочем, при современном математическом состоянии высшей геодезии и последние треугольники, обозначенные тонкими линиями, ни в коем случае не должны рассматриваться как излишние; напротив, их учет по определенным принципам, которые должны быть установлены, должен привести к повышению точности конечных результатов...

Наконец, еще более важно, что тремя треугольниками, связывающими пять пунктов: Falkenberg, Elmhorst, Wilsede, Litberg и Гамбург, была получена новая связь южных треугольников ганноверского королевства с Гамбургом, которая имеет преимущество перед старой, гораздо более сложной (через Hauselberg, Wulfsode, Timpenberg, Nindorf и Люненбург), а потому, согласно указанным выше основаниям, точность результатов увеличится в два раза.

[Из отчёта от 21 ноября 1827 г. «Относительно дальнейшего расширения работ по градусному измерению»].

---

* Смотри схему триангуляции на стр. 215.

... В 1821—1823 гг. при измерениях цепи треугольников до Гамбурга было израсходовано 11 000 талеров, а в 1824 и 1825 гг. на прокладку оттуда цепи треугольников на запад до Ostfriesland — около 7000 талеров. Следует, однако, вычесть из этой суммы расходы на изготовление инструментов и на доставку английского зенитного сектора из Альтоны в Гёттинген, составивших, вероятно, от 2500 до 3000 талеров, так что расходы на собственно триангулирование составили около 15 000 талеров... Рассматривая обзорную карту, можно видеть, что часть страны, еще не затронутая триангуляцией, не намного больше той площади, которая уже покрыта триангуляцией, и при всем моем незнании трудностей этой местности едва ли вероятно, чтобы они были больше тех, с которыми я боролся, особенно в 1822 и 1824 гг.

Если я, кроме того, замечу, что работы, имеющие своей основной целью улучшение географии страны, даже при полноценном исполнении, все же не требуют того класса точности измерений, который необходим при собственно градусном измерении, тогда надежда на то, что распространение триангуляции на еще не затронутые части королевства обойдется в меньшую сумму (возможно в 12 000 талеров), не покажется необоснованной.

Чтобы подобное триангулирование сделать наиболее полезным для географии, не следует ограничиваться развитием на соответствующей части страны только сети главных треугольников; надо связать с ней определение положения возможно большего числа второстепенных пунктов, а именно таких, которые допускают точное определение и, как правило, сохраняются в течение веков, особенно колоколен, церквей. Учёт этого обстоятельства я сделал своей обязанностью уже при прежних измерениях, хотя оно должно было оставаться подчиненным главной цели, и число пунктов, определенных при указанных измерениях, уже превысило 500...

Такое определение положения большого числа опорных пунктов в числах (именно насколько севернее или южнее, западнее или восточнее от произвольного начального пункта, например, от Гёттингенской обсерватории) с точностью до нескольких футов должно рассматриваться как основная топографическая продукция. Она сохраняет на столетия постоянную ценность, поскольку большинство пунктов остается, даже если с течением времени некоторые утрачены, а возникающие вследствие этого изменения могут быть легко пополнены. Она образует надежную основу для всех детальных съемок; все те неуверенности, которые при отсутствии опорных пунктов затрудняют съемки, искажают их и делают невозможным их соединение в одно целое, свободное от ошибок, в этом случае отпадают; неаккуратные работники получают благодаря этой основе строгий и неизбежный контроль. Каждый мензульный планшет обрабатывается независимо от других, и, значит, ошибки не распространяются на другие листы; в конечном счёте все отдельные листы сами объединяются в точно ориентированное и всюду согласующееся целое. Очевидно, что большие расходы, с которыми связаны детальные съемки значительных пространств, должны в значительной степени снижаться при подобной надёжной постановке. Но эта надёжная постановка не только ускоряет работу; важно в этой связи и то обстоятельство, что благодаря этому употребление мерной цепи становится почти полностью излишним и надобность в ней возникает лишь как исключение, так как триангуляция сама по себе уже доставляет базисы и с такой точностью, какую обычная цепь никогда не могла бы дать.

Также там, где детальные съёмки уже имеются (как в большинстве округов прежнего состава королевства), опорные пункты доставляют

средство для исправления ошибок, возникших при составлении, и для переработки карт, основанных на несовершенных съемочных методах; если они даже в мелких деталях удовлетворительны, новые способны достаточно полно удовлетворять и более высоким запросам.

Что касается правил измерений, направленных на то, чтобы сделать триангуляцию возможно более полезной для пополнения географии, то следует различать уже исполненные измерения от тех, которые должны быть в будущем распространены на другие территории страны.

Для последних достижение точного определения возможно большего числа опорных пунктов должно рассматриваться как главная цель. Наоборот, в уже исполненных измерениях это обстоятельство учитывалось лишь как второстепенное, но так как я, как уже упоминалось, все же имел его постоянно в виду, поскольку оно не задерживает основную работу, то в отношении успеха здесь следует различать северные области от южных.

В северной (бóльшей) половине, т. е. почти от города Hildesheim до самого моря, следовательно в равнинной части страны, результаты в указанном отношении были настолько плодотворны, что не остается, или почти не остается, желать лучшего...

Наоборот, в южной части королевства число точно определенных колоколен намного меньше, так как, отчасти из-за величины треугольников, а отчасти из-за гористого характера местности, лишь немногие колокольни были одновременно видны больше чем с одного пункта триангуляции. Для создания подобной надежной основы с целью пополнения географии королевства, т. е. надежной опоры для детальной съемки южной части Hildesheim и Eichsfeld будет важно большие южные треугольники разбить на несколько меньших, и с помощью измерений на новых вставленных опорных пунктах получить надежную и достаточную основу для этой съемки. Расходы на эти работы я не мог учесть при указанной выше оценке: составление такой сметы — дело еще более щекотливое, но во всяком случае по сравнению с расходами на новую большую триангуляцию в еще не затронутых частях страны они должны быть меньше.

Нет надобности указывать на то, что было бы желательно, чтобы в будущем были опубликованы окончательные координаты всех точно определенных пунктов, когда они образуют законченное целое. В отношении чисто научной части прежних измерений это и без того само собой разумеется...

[Из отчета от 26 июня 1828 г. «Относительно продолжения работ по градусному измерению»].

... Так как детальная съемка еще не заснятых частей страны должна быть основана на триангуляционных работах и обе работы в отношении подлежащих израсходованию денежных средств будут зависеть одна от другой, то необходима предварительная смета общих расходов. Согласно переданной мне господином, тайным советником Hoppenstedt, заметке, площади частей страны, подлежащих съёмке, составляют около 144 квадратных мили; расходы на детальную съёмку, выполняемую офицерами генерального штаба, оцениваются в 200—250 талеров за квадратную милю, к чему надо еще добавить около 21 талера на расходы по копированию карты в 4 экземплярах. Считая, таким образом, вместе 250 талеров на квадратную милю, эти расходы составят около 36 000 талеров, следовательно, с включением расходов на триангуляцию в районах, не имеющих триангуляцию, около 50 000 талеров. Сюда следует присчитать еще тысячу или две тысячи талеров на работы, которые будут нужны, чтобы определить внутри больших южных треуголь-

ников градусного измерения достаточно большое число опорных пунктов для детальной съемки, что я уже исчерпывающе осветил в заявке, поданной мною в ноябре прошлого года. Поэтому, если можно будет расходовать ежегодно на эти работы 5000 талеров (что, помимо обеспеченности денежными средствами, будет также зависеть от наличия персонала), то для полного завершения съемочных работ понадобится приблизительно 10 лет.

По сделанному лично мной, хотя и менее надежному, подсчету, площадь частей страны, подлежащих съемке, 173 квадратных мили; поэтому смета расходов оказалась больше приблизительно на 7000 талеров, а продолжительность работ больше на 1—2 года. Если также установленные 5000 талеров не использовать действительно ежегодно или в среднем, а рассматривать лишь как разовый максимум, то результатом этого будет соответственное увеличение продолжительности всей работы.

Что касается распределения тригонометрических работ по отдельным годам, было бы целесообразно для обеспечения быстрейшего их завершения, как основы для детальной съёмки, сначала употребить на них бо́льшую часть денежных средств, а меньшую на детальную съёмку, пожалуй, в отношении $\frac{2}{3}$ к $\frac{1}{3}$, тогда в последующие годы, когда всюду налицо надёжная основа, когда работники постепенно все больше натренируются и денежные средства будут расходоваться только на это, наверняка будет иметь место более быстрый продвиг. Что касается установления очередности в тригонометрических работах, то при теперешнем положении вещей нет никаких оснований для предпочтения одних другим, кроме необходимости следить за тем, чтобы одновременная детальная съёмка всегда была обеспечена достаточным материалом в виде надёжно определенных пунктов, с тем чтобы она никогда не оказалась в опасности простоя из-за отсутствия такого материала. Более специальное определение было бы пока отчасти невозможным, отчасти ненужным, а отчасти даже нецелесообразным, так как известная степень свободы работать наиболее целесообразно в условиях, складывающихся каждый раз, может лишь способствовать быстрейшему и лучшему продвигу.

Исторический отчёт об измерениях в королевстве Ганновер, выполненных частично надворным советником Гауссом, а частично под его руководством

Различные геодезические работы, о которых я имею здесь вкратце представить исторический отчет, хотя и тесно связаны между собой, имеют различные цели и различный характер. Наиболее наглядно расположить их в той последовательности, в какой их мне поручали и сообразно которой я принимал их выполнение на себя.

I. Ганноверское градусное измерение

Рескриптом от 30 июня 1820 года мне было поручено исполнить градусное измерение через королевство Ганновер, как расширение или продолжение незадолго до этого начатого датского градусного измерения. Под названием градусного измерения понимаются те, отчасти астрономические и отчасти тригонометрические работы, с помощью которых определяется в линейной единице (фут, туаз и т. д.) длина градуса меридиана. Выбирают на концах два достаточно удаленных один от другого пункта на одном меридиане, определяют длину дуги между ними

в футах и т. д. с помощью проложенной между ними сети триангуляции, а число градусов, минут и секунд, соответствующих этой дуге, определяют из астрономических наблюдений на конечных пунктах.

Отсюда следует, что градусное измерение, как таковое, имеет лишь чисто научную цель — внести вклад в математическое значение сжатия земного сфероида, которое, в соответствии с требованиями века, надо знать с большей точностью, и делает необходимым иметь значительно больше того числа градусных измерений, которым должны были довольствоваться ранее. Отсюда далее выясняется, что градусное измерение состоит из двух очень гетерогенных частей: астрономической и геодезической. Не вдаваясь здесь в дальнейшие подробности, я хочу лишь заметить, что тригонометрическую часть (состоящую из 25 главных треугольников от Гёттингена до Гамбурга) я полностью завершил в 1821, 1822 и 1823 гг., а астрономическую — в 1827 г. и что последнюю, равно как и окончательные результаты, я опубликовал в изданном мною труде «Определение разности широт между обсерваториями Гёттингена и Альтоны из наблюдений с зенитным сектором Рамсдена». Обсерватории Гёттингена и Альтоны, которые лишь благодаря случайности лежат точно на одном меридиане, именно и являются конечными точками измеренной дуги меридиана, вся длина которой составляет немного больше двух градусов.

II. Тригонометрическая связь треугольников градусного измерения с треугольниками нидерландской королевской триангуляции

Ближайшей научной целью этого продолжения тригонометрических работ, порученного рескриптом от 8 марта 1824 г., было связать ганноверское градусное измерение с французским и английским. Как известно, последние между собой связаны, и с французскими треугольниками смыкаются измеренные с большой тщательностью треугольники Нидерландов, которые в то время, когда Ostfriesland была объединена с Голландией, до восточной границы этого княжества были продолжены дальше на юг, почти до пункта Bentheim. Я имел, таким образом, выбор между двумя путями для достижения поставленной цели, или надо было идти от самых северных треугольников через Bremen к пункту Jever или от средних через Вестфалию к Bentheim. Первый путь был предпочтителен еще и потому, что этим путем одновременно достигалась связь с Северным морем и достигалось определение абсолютных высот всех треугольников над уровнем моря. Эта триангуляция была выполнена мною в 1824 и 1825 гг. и число всех главных треугольников было этим доведено до 38*.

Об этих тригонометрических измерениях 1821—1825 гг. я хочу добавить еще несколько замечаний, так как они во многих отношениях отличаются от подобных работ, ранее исполненных в других странах.

1. Благодаря применению впервые введенного мною г е л и о т р о п а стали ненужными специальные сигналы, возможны треугольники ранее не практиковавшихся размеров и стала достижимой такая точность, которая ранее без этого вспомогательного средства не достигалась.

2. При исполнении измерений я не ограничивался тем, что необходимо для непосредственной цели (которая, как уже отмечено, имеет прежде всего научное направление), а стремился сделать их без ущерба для основной цели, также плодотворными для географии страны.

* Число независимых треугольников градусного измерения между Гёттингеном и Гамбургом составляет 21, общее число независимых треугольников градусного измерения и его продолжения до пункта Jever (без треугольника Hohehagen — Brocken —Inselsberg) 42.

Поэтому были очень точно определены положения башен в районе расположения тригонометрических пунктов, не только городов, находящихся в полосе треугольников, таких как Гёттинген, Hildesheim, Wolfenbüttel, Braunschweig, Hannover, Celle, Lüneburg, Harburg, Hamburg, Buxtehude, Stade, Verden, Bremen, Oldenburg, Varel, Jever, но также многих сотен малых населенных пунктов, как показывают обзорные карты, приложенные к моим отчетам о работах за каждый год. Этим самым получены опорные пункты и основа для всех последующих детальных съемок, которые будут предприняты в соответствующих районах, и поэтому указанные определения приобретают непреходящее значение.

3. Эти результаты приведены в конечном счёте по моему собственному способу в такую форму, которая доставляет существенные преимущества для дальнейшего плодотворного использования.

III. Тригонометрическая съемка частей страны, не затронутых измерениями 1821—1825 гг.

Исполненные в 1821—1825 гг. геодезические работы содержали (хотя и не предназначавшуюся прежде всего для этой цели) тригонометрическую съемку весьма значительной части ганноверского королевства. Однако признанные всеми преимущества, которые доставляет точная тригонометрическая съемка, обусловили желание не останавливаться на этом. Рескриптом от 28 апреля 1828 г. мне было поручено руководить дальнейшим распространением тригонометрической съемки на все части страны, не затронутые предыдущими работами.

К тому же времени была организована детальная съёмка, которая должна была охватить все части страны, на которые не распространилась исполненная в восьмидесятых годах прошлого столетия мензульная съёмка бывшего ганноверского курфюршества.

Специально руководил этой детальной съемкой полковник Prott, однако эта работа находится в непосредственной связи с тригонометрической съемкой, поскольку результаты последней служат в качестве опоры для мензульной съемки. Какую легкость и надежность приобретают при этом способе мензульные работы, было уже доказано годом раньше при некоторых текущих съемках на пункте Hildesheim, хотя работы выполнялись тогда офицерами, не знавшими до того этого способа.

То, что я должен здесь сказать об этих поставленных под моим руководством тригонометрических измерениях, касается отчасти персонала, который был занят на них, отчасти исполненного до сих пор объёма и, наконец, отчасти еще предстоящих измерений.

А. Персонал

Для тригонометрической съёмки необходимы два совершенно разнородных вида работ: исполнение измерений на соответствующих пунктах в поле и их камеральная обработка для получения окончательных результатов комбинированием и вычислением. Вторую часть работы я до настоящего времени полностью брал на себя, наоборот, первую поручал тем артиллерийским офицерам, которые работали со мной в 1821—1825 гг. в качестве помощников и поэтому имели возможность познакомиться не только с обращением с инструментами, но и с духом и особенностями примененного мною метода работ. Эти офицеры были: капитан Мюллер, тогдашний премьер-лейтенант Гартман и мой старший сын, премьер-лейтенант артиллерийского полка. Лейтенант Гартман, оставивший в 1831 г. военную службу в чине капитана в связи с получением должности в высшей промысловой школе в Ганновере, умер в 1834 г.

B. Измерения в главных треугольниках, исполненные до настоящего времени

Если бы поименованные три офицера могли отдаться исключительно этой работе беспрерывно каждый год в течение всего полевого сезона, давно все было бы окончено. Но многие препятствия, происходящие частично из служебных обстоятельств офицеров, частично из других внешних обстоятельств, были причиной тому, что последние в некоторые годы могли этим заниматься лишь в течение более короткого времени, а в другие годы не занимались вовсе; сюда же относится, кроме уже упомянутой смерти капитана Гартмана, то, что продвигавшаяся детальная съемка, особенно в таких местностях, где колокольни церквей расположены реже, все еще требовала отдельных подготовительных измерений, для которых использовался то один, то другой из указанных офицеров, что отнимало его от основной работы. Ниже приводится обзор по годам того, что до сих пор сделано.

1828. Работа была начата в конце лета, в течение которого капитан Мюллер и лейтенант Гаусс закончили большую часть тригонометрических измерений в Eichsfeld, тогда как лейтенант Гартман выполнял подготовительные измерения в округе Hunnesrück и на части Hildesheim.

1829. Лейтенант Гаусс первоначально выполнил некоторые дополнительные измерения на Eichsfeld. Однако бóльшую часть года он посвятил триангулированию Вестфалии, где он проложил систему треугольников от Везера до Bentheim. Капитан Мюллер мог принять участие в этой работе лишь короткое время, так как вскоре после начала он был отозван с полевых работ для других поручений. Работы лейтенанта Гартмана в этом году состояли из подготовительных работ для детальной съемки сперва в Hildesheime, затем в округах Uchte, Freudenberg и Auburg.

1830. Тригонометрическая съемка восточной части Lüneburg капитана Мюллера и лейтенанта Гаусса; дальнейшее продолжение лейтенантом Гартманом цепи треугольников, измеренной в предыдущем году через Вестфалию, до Ostfriesland.

1831. Этот год мог быть посвящен работе лишь в течение короткого времени; лейтенант Гаусс закончил измерения Lüneburg, лейтенант Гартман в Ostfriesland. Капитан Мюллер совсем не участвовал.

1832. Измерения вовсе не состоялись.

1833. Капитан Мюллер и лейтенант Гаусс триангулировали местность вдоль Везера от Nienburg до Holzminden; капитан Гартман триангулировал Harz.

1834. Только лейтенант Гаусс мог посвятить короткое время работам отчасти для подготовительных измерений в Osnabrück и отчасти для пополнения прошлогодних измерений на Везере.

1835. И в этом году только лейтенант Гаусс мог отлучиться на короткое время для дальнейших подготовительных измерений в Osnabrück на сей раз вместе с помощником доктором Goldschmidt, наблюдателем Гёттингенской обсерватории.

В течение двух последующих лет только капитан Мюллер мог посвятить себя измерениям, а именно: в 1836 г. для триангулирования местности в верховьях Везера между Uslar, Göttingen и Münden; в 1837 г. для дальнейших подготовительных работ по детальной съемке в Osnabrück. Кроме того, капитан Мюллер выполнил в этом году предварительную рекогносцировку области Aller (Aller Gegend) с целью ее триангулирования в будущем.

С. Недостающие измерения главных треугольников

Все перечисленные до сих пор тригонометрические измерения связаны между собой: для охвата всего королевства и образования единого целого не хватает тригонометрической съемки двух больших частей страны, во-первых, области правее и левее Aller и, во-вторых, северной части Бременской области; в первой из них, как уже упомянуто, предварительная рекогносцировка уже выполнена.

Хотя при работах подобного рода невозможно заранее определить сколько-нибудь точно необходимое время и расход, так как более быстрый или более медленный продвиг зависит от многих обстоятельств, частью заранее мало изученных, частью случайных (например, особые трудности данной местности или состояние погоды), все же можно с известной вероятностью принять, что если капитан Мюллер посвятит себя только этим измерениям, он закончит их целиком или бóльшую их часть в два сезона.

Сами по себе последние результаты тригонометрических измерений — это числа, которые устанавливают наиболее точно положение определенных объектов (чаще всего колоколен церквей), и поэтому сохраняют постоянное значение. После завершения всей работы они систематизируются и для большей надежности должны бы храниться в нескольких копиях: одна из них, возможно, на Гёттингенской обсерватории. Должны ли они также опубликовываться в печати, зависит прежде всего от высших решений. Но я не могу не заметить, что карта королевства, составленная Папеном, которая во всех отношениях стоит на уровне самых совершенных работ этого рода, и 22 листа которой (т. е. третья часть всего объема) уже вышли в свет, по своей точности основывается на том, насколько полно лейтенант Гаусс, который взял на себя градуировку и точную накладку всех основных пунктов этой карты, имел в своем распоряжении все относящиеся сюда прежние данные.

В заключение я хочу еще кое-что добавить о подготовительных работах к детальной съёмке. Выполнение этих подготовительных измерений совсем не поддается предварительному определению, так как они, по самой природе вещей, необходимы чуть ли не в течение всей продолжительности самой съёмки. Ибо они как раз состоят в том, чтобы в местностях, где определенные с главных пунктов триангуляции колокольни церквей лежат далеко одна от другой и недостаточны по количеству, чтобы доставить для каждого мензульного планшета достаточное число твёрдых опорных пунктов, установить особые вехи и определить их положение из более мелких треугольников. Однако этим вехам не может быть обеспечена такая надёжная охрана, которая позволяла бы рассчитывать на их уверенную сохранность в течение многих лет. Поэтому, не столько из-за утраты нескольких таких вех, сколько из-за возможного исчезновения некоторых из них до их использования для мензульной съёмки, что привело бы к потере всего труда, затраченного на их определение, подобные подготовительные работы должны всегда предприниматься не больше, чем за год или два до того, как наступает момент для детальной съемки соответствующей местности.

Впрочем, сама детальная съемка в Hildesheim, Eichsfeld и в округах Hunnesrück, Freundenberg, Uchte и Auburg, закончена, а в княжестве Osnabrück уже довольно далеко продвинута, но точный и полный отчёт об этом мог бы дать только полковник Prott, в ведении которого находится эта работа.

Гёттинген, 8 февраля 1838 г.

[Из отчёта от 5 июля 1840 г. «О тригонометрических измерениях» в 1839 г.]

... При оценке системы треугольников не следует упускать из виду, что первоначально предусматривалась не общая государственная съемка, а только градусное измерение от Гёттингена до Holstein, а затем развитие этой системы треугольников для соединения с треугольниками Крайенгофа до Ostfriesland. Сообразно этим целям были выбраны треугольники от Inselsberg до Jever, измеренные лично мною в 1821—1825 гг. (см. схему, стр. 215).

... Остальные, присоединившиеся позднее, явились ответвлениями указанных главных треугольников. Результатом такого порядка выполнения работ является то, что вся триангуляция не повсюду представляется глазу таким целым, как это было бы в том случае, если бы эти обстоятельства учитывались сначала, но сама цель, а именно точное определение назначенных пунктов по всей стране, от этого не пострадала...

[Из отчёта от декабря 1844 г. «О тригонометрических измерениях, исполненных в 1844 г.»]

... Я позволю себе добавить еще несколько слов в отношении всех измерений прошлых лет.

... Результаты [т. е. координаты] ежегодно после обработки измерений вносились в списки и таких частичных списков имеется шестнадцать, содержащих вместе немногим более 3000 определений, однако число самих пунктов могло бы быть несколько меньше за счет седьмой части, в которой некоторые пункты, которые в последующем удалось определить точнее или надёжнее, чем первоначально, вошли больше чем в один список. Во всем королевстве осталось без определения лишь небольшое число колоколен.

Нет надобности распространяться здесь о том, что эти списки служили основой для всех детальных съемок, предпринимавшихся в течение 16 или 17 лет, равно как и для карты Папена; очень важно, однако, чтобы эти числа, которые сохранят свою значимость так долго, как долго будут существовать предметы, не могли быть утрачены. Упомянутые списки хранятся на обсерватории; копии с них имеет также лейтенант Гаусс, который от руки наложил на карты Papen все исходные пункты. Для большей надежности и более удобного использования я теперь объединил отдельные списки в один, который будет содержать около 2600 пунктов.

В дальнейшем может быть признано целесообразным опубликовать в печати этот список или извлечение из него. В настоящее время я, од-

Во-первых, потому, что научное обоснование значения и всестороннее использование этих чисел могут быть даны лишь постепенно в связи с развитием моей математической теории, которую я имею в виду изложить в серии отдельных статей (приблизительно три или четыре). Первая из них* уже напечатана как часть выходящего тома докладов научного общества и имеется в продаже; другие последуют постепенно так скоро, как это будет возможно.

Во-вторых, потому, что числа списка, хотя и достаточно, и даже излишне, точны для любого практического использования, все же для объединения, удовлетворяющего строгим теоретическим требованиям, различных измерений в одну систему нуждаются еще в некоторых (правда, весьма малых) уточнениях и исследованиях.

---

* Исследования по вопросам высшей геодезии. Статья первая. Передана Королевскому обществу 23 октября 1843 г., см. этот том, стр. 38.

В-третьих, потому, что для положения наиболее примечательных пунктов, а именно колоколен церквей в городах, я охотно мог бы приложить наряду с прямоугольными плоскими координатами также географические широты и долготы, которые из-за значительной трудоемкости преобразования могут быть выведены лишь постепенно...

[Об инструментах, необходимых при государственном триангулировании].

... При обширных тригонометрических измерениях, конечно, необходимо применять угломерные инструменты различного класса для отдельных работ. Класс определяется наибольшей или наименьшей точностью, которую следует достичь каждым инструментом, и зависит не только от большего или меньшего совершенства в изготовлении, но и от размеров инструмента. В этом отношении могут быть выделены многие градации; я ограничиваюсь, однако, разделением на три класса.

Изготовленные в Мюнхене теодолиты диаметров в 12 дюймов могут применяться для самых точных угловых измерений на земле. Ко второму классу я причисляю повторительные теодолиты диаметром 8 дюймов из мастерских Рейхенбаха — Эртеля; эти служат для второклассных измерений. Для еще менее точных измерений, например для рекогносцировочных работ, достаточны еще меньшие теодолиты третьего класса, в которых повторения может во всех случаях не возникнуть.

Теодолит первого класса может быть применен для всех работ, в том числе и для второклассных. Причина, почему этого, в общем, не делают, состоит отчасти в том, чтобы беречь большие инструменты, а отчасти в том, что последние, по самой своей природе, труднее переносятся и для своей установки требуют большого оборудования.

В работах по самому градусному измерению, имевших прежде всего научную цель, я применял только один теодолит первого и два третьего класса для рекогносцировок. Все измерения с первым я взял на себя лично.

При новых работах, относившихся непосредственно к географии страны, в процессе которых должно было выполняться множество второклассных и третьеклассных измерений, постоянно применялось несколько теодолитов второго и третьего классов. Один теодолит второго класса (которым обсерватория располагает с 1813 г.) использовал прошлым летом господин капитан Мюллер, выполнил с ним свои первые работы. Другой (не совсем удовлетворительный) принадлежит лично господину лейтенанту Гартману, выполнявшему с ним свои измерения. Английским теодолитом третьего класса, также не особенно хорошим и часто расстраивавшимся, пользовался мой сын, который, впрочем, при наличии еще одного теодолита второго класса, мог бы с успехом работать также с ним.

Более целесообразный теодолит третьего класса был мною заказан еще весной 1828 г. в Мюнхене; он доставлен осенью, стоил небольших денег и был для второклассных работ и рекогносцировки более пригодным, чем ранее упомянутый английский. Подобный теодолит приобрел к тому же времени господин капитан Мюллер при моем посредничестве. Таким образом, рекогносцировочные работы, если бы не увеличился персонал, были бы достаточно обеспечены.

Но для измерений второго класса имелось до сих пор слишком мало средств. Поэтому я еще осенью заказал еще один 8-дюймовый теодолит, поставка которого была установлена по меньшей мере на апрель этого года.

Что же касается измерений первого класса, которые я до сих пор брал только на себя, то я надеялся, что позднее можно будет постепенно обучить подобным точным работам и других офицеров и было бы весьма желательно, если бы можно было по меньшей мере применить два пригодных для этого инструмента. Поэтому еще прошлой осенью, помимо заказа на 8-дюймовый теодолит, я заказал бы одновременно еще один 12-дюймовый, если бы я еще тогда не имел видов на получение подобного 12-дюймового теодолита другим путем, без израсходования на это капитала из триангуляционных средств. Я знал, что было желательно приобрести такой инструмент для Академии Генерального штаба. После различных запросов по этому поводу Эртелю в Мюнхене я действительно заказал, по просьбе подполковника Prott, один такой 12-дюймовый теодолит, который, как можно было надеяться, будет изготовлен в течение лета и прежде всего будет нести полезную службу в руках капитана Мюллера, когда последний получит требуемую тренировку.

Мюнхенская цена на инструменты этого рода была исключительно умеренной: 12-дюймовый теодолит (см. стр. 216), который я употреблял с 1822 г. для всех угловых измерений при градусном измерении, стоил только 800 гульденов (легкое золото); упомянутый выше 8-дюймовый (правда, за 16 лет несколько износившийся, но еще вполне пригодный) — 400 гульденов. Оба теодолита таких же размеров, заказанные в настоящее время соответственно для Академии Генерального штаба и тригонометрической съемки, будут иметь еще значительно меньшую цену, так как я предписал во многих отношениях более простое устройство (без ущерба для основной конструкции инструмента).

При работах значительного масштаба весьма целесообразно для более быстрого продвига, для надлежащей связи одного с другим, а поэтому также в отношении общих расходов, иметь возможность применить весьма заметное число теодолитов. По частному сообщению ближайшим летом во Франции будут в работе 160 теодолитов. Но в нашей маленькой стране при ограниченном персонале, который может быть использован на тригонометрических измерениях и уже обладает в некоторой степени опытом, я считаю, что мы можем, по крайней мере для начала, довольствоваться наличным, находящимся на работах, инструментарием. К этому следует добавить, что, как я имел честь сообщить устно, в герцогстве Брауншвейг также проектируется тригонометрическая съёмка, для которой я уже тоже заказал 12-дюймовый теодолит, и что, вероятно, дело так сложится, что эти измерения с обоюдной выгодой будут взаимосвязаны и смогут быть проводимы попеременно.

Об ошибках измерений

ГАУСС К ОЛЬБЕРСУ Gnarrenburg, июль 1825 г.

Я не могу без досады оглянуться на мои 5-летние измерения; по завершению последних я вижу себя приблизительно в таком же положении и с такими же чувствами, какие имеют довольно много, пожалуй большинство, людей, когда они приближаются к окончанию жизни с чувством, что если бы с накопленным и уже поздно прояснившимся и созревшим опытом можно было бы начать со свежими силами, то во многом получилось бы гораздо больше удовлетворения. Что касается измерений, то я теперь убежден в том, что:

1. Теодолит, построенный так, как мой, дает все углы преуменьшенными, а именно, в среднем хотя и на очень маленькую, но при обычном отличном качестве инструмента, при наблюдениях лишь в хо-

роших условиях, все же очень точно определенную величину, — почти не зависящую от величины угла; кажется, что она вызывается главным образом первым вращением, когда цапфа все же в известной мере как-будто присосалась к втулке, которая, конечно, по мере изнашивания инструмента может стать больше. Мои измерения на пункте Jever, которые как раз были поставлены ex professo («обстоятельно»), чтобы попутно определить эту величину, дают для нее 0″,4, и я не думаю, что это значение ошибочно на 0″,1. К сожалению, мои прежние измерения не доставляют таких убедительных средств для определения, так как я, хотя и с самого начала подозревал о существовании такого источника ошибок, всё же полагал, что его следует считать слишком малым, если не равным нулю. Если бы я, вместо градусного измерения, производил съёмку и, вследствие этого, имел бы случай для наблюдений по всему кругу горизонта, то я, несомненно, раньше пришел бы к такому выводу. Будущей зимой я постараюсь определить эту величину для каждого года, поскольку это будет возможно. Я сейчас убежден в том, что, во-первых, при постоянном учёте этой величины, во-вторых, при воздержании от наблюдений, когда условия неблагоприятны, и, в-третьих, при учёте двух других обстоятельств, которые будут упомянуты ниже, измерения на свет гелиотропа могут получить почти невероятную точность, от которой я, к сожалению, ещё очень далёк.

Измерения, выполненные в Гёттингене в 1823 г., доставили мне указанную величину равной 0″,140, но с весом только 47 повторений; при этом вероятная ошибка была почти $\pm$ 0″,140, так что можно держать пари один против одного, что указанная величина не выходит за пределы 0 и + 0″,28. Измерения на пункте Timpenberg с 1823 г. дали величину + 0″,070 с весом 28. Если их объединить, то значение для 1823 г. получится + 0″,114 с весом 75. Я постепенно обработаю все станции и тогда вычислю окончательно влияние этой ошибки.

2. Следует наблюдать не иначе как при благоприятных условиях, когда воздух не колеблется, инструмент не содрогается от ветра и его установка устойчива. Конечно, в этом случае часто в течение многих недель вовсе нельзя наблюдать и редко это возможно больше чем в течение 1—2 часов в день, исключая, пожалуй, станции, расположенные на высоких горах; зато 50 таких наблюдений стоят больше чем 500, исполненных при неблагоприятных обстоятельствах. Наши инструменты, собственно говоря, слишком хороши для обыкновенного состояния атмосферы, если их качество полностью используется; ошибки от колебаний атмосферы в десять раз больше неизбежных ошибок, зависящих от инструмента. Это, пожалуй, относится и к астрономическим наблюдениям.

3. Если только возможно, свет гелиотропа должен проходить совершенно свободно, но там, где этого нет, ни в коем случае не следует устанавливать его между нитями, надо всегда наводить одну нить; при биссецировании сигнала гелиотропа может, впрочем, получаться постоянная ошибка, действующая в одном направлении и достигающая, быть может, $1\frac{1}{2}$ — 2″ Хотя я всегда полагал, что такая ошибка может возникнуть, я без длительного опыта не думал, что она так велика. Я раньше часто визировал одной нитью, но, правда, тогда, когда свет появлялся свободно, и не замечал тогда существенного различия; я оставил этот способ наблюдений, о чем сейчас сожалею, потому что он для меня намного труднее, и я, в общем с известным правом, считал, что одной нитью я не смогу визировать так точно, как биссектором.

4. При всем этом я убежден, что боковая рефракция существует, сохраняя постоянную величину в периоды дня, пригодные для наблюдений, когда свет проходит близко к деревьям и т. д.

Указанные выше обстоятельства (п. 1—3) все же влияют во многих треугольниках не так сильно, чтобы ими объяснить большие невязки в сумме углов, и они могли бы уменьшить невязку, например, треугольника Garlste — Lehe — Varel, где она составляет 4″,9, вряд ли больше чем на $1\frac{1}{2}$ —2 секунды; оставшаяся невязка еще слишком велика, чтобы в ней можно было винить случайные ошибки наблюдений. К моему большому огорчению подобная боковая рефракция наверняка имеет место для стороны Brillit — Lehe и именно в том смысле, что и здесь углы становятся преуменьшенными; очень дорогостоящая просека сначала шла слишком влево, она была несколько расширена и Lehe стал видимым, но так близко к правой стороне просеки, что боковая рефракция наверняка повлияет. Я попробую приказать найти некоторые выступающие толстые ветки и убрать их, однако нет уверенности, что они будут найдены и даже в этом случае изображение останется всё же очень близко к правой стене. К сожалению, во всех случаях весьма вероятно, что угол при Lehe этим сильно искажен, и я не имею охоты возвращаться туда еще раз; было бы хорошо, если бы это было возможно, открыть видимость с Brillit и с Zeven на Bremervörde, который должен быть виден с Lehe, но, к сожалению, в направлении Brillit —Bremervörde, помимо плодовых деревьев, стоит еще, кажется, крестьянский дом, хотя я еще этого точно не знаю, так как не имею данных для того, чтобы указать с некоторой надёжностью азимут.

Впрочем, я уверен, что эта новая связь внесет много ясности в наблюдения. Угол на пункте Brillit между пунктами Zeven и Бремен как будто улучшается, т. е. увеличивается на 2″, вследствие чего невязка становится равной $2\frac{1''}{2}$ вместо $4\frac{1''}{2}$; однако и этот остаток наверняка не может быть отнесён за счёт ошибок измерений; именно, указанная выше первая ошибка для Бремена почти полностью исключается прямыми и обратными наблюдениями, а способ визирования также может иметь лишь малое влияние, так как, при значительных расстояниях и обычной плохой видимости сигналов, источники света (т. е. гелиотропы) хорошо видны, если они открыты.

ГАУСС К ШУМАХЕРУ. Гёттинген, 14 августа 1825 г.

...Этим летом меня очень мучили значительные невязки в моих наблюдениях. Я сейчас убеждён, что в равнинных местностях при близком прохождении луча над лесом или вдоль него может иметь место сильная боковая рефракция, которая в часы, пригодные для наблюдений, всегда влияет в одном направлении, но равным образом достоверно то, что она соединяется с другими источниками ошибок, на след которых я теперь почти напал, особенно следующих двух: 1. Визирование на свет гелиотропа между нитями, тем более когда он слаб, не годится, если он плохо виден, а, например, находится эксцентрично в фонаре башни, которая достаточно хорошо видна. Отсюда могут проистекать постоянные ошибки более чем в 2″; с тех пор как я в этом убедился, я всегда визировал в этих случаях одной нитью и таким путем отчасти достигал значительного уменьшения расхождений. 2. Теодолит, устроенный так, как наши, даёт решительно все углы преуменьшенными, и среднее значение этой ошибки (которая представляется мало зависящей от величины угла) допускает весьма точное определение, а по мере

изнашивания инструмента может увеличиваться. На пункте Brillit я нашел 0″,723, при этом вероятная ошибка была менее 0″,1. На пункте Jever она оказалась около 0″,5. Я еще не уверен, является ли главным источником ошибки торможение круга лимба (особенно, если он имеет шарообразную форму); или гильза, несущая поверительную трубу; или винт, прикрепляющий её к подставке инструмента; эта гильза в моём инструменте изрядно изношена и для опыта я буду теперь закреплять круг лимба непосредственно к подставке инструмента, причём поверительную трубу я совсем уберу; я считаю её не только бесполезной при прочной установке инструмента, но и вредной, так как её гильза служит промежуточной инстанцией для закрепления круга лимба к подставке инструмента и увеличивает опасность сдвига лимба, если первоначально он был прочно установлен. Я очень хотел бы когда-либо исчерпывающе поговорить с Вами об этих вопросах и обменяться опытом и мнениями.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 29 октября 1843 г.

... Речь идет об одном опыте, который часто мучил меня, а именно, что теодолиты конструкции Рейхенбаха имеют тенденцию давать все углы преуменьшенными. Возможно, что и Вы сделали подобные опыты, я охотно обменялся бы с Вами мнениями.

При наблюдениях углов в моем градусном измерении с 1821 по 1823 г. и при последующем расширении сети моих треугольников в 1824 и 1825 гг. я употреблял два различных 12-дюймовых теодолита (верньеры с точностью 4″, увеличением около 35×): один из них, одолженный мне Шумахером, был получен от самого Рейхенбаха и использован только в 1821 г., другой — от Эртеля, вполне тождественный первому и являющийся собственностью обсерватории — с 1822 по 1825 г. У первого я этого явления совсем не заметил, у другого в течение первых трёх лет и начала 1825 г. тоже нет; только в течение последней половины измерений я его заметил, правда в меньшем размере, но все же так очевидно, что нельзя в этом сомневаться. Ниже приводится разъяснение по меньшей мере главного источника. Для краткости я называю оба предмета через *A* и *B* и предполагаю, что *B* расположено вправо от *A* и что всегда первое визирование делается на *A*, второе на *B*. После того как отсчитали и навели на *A*, освобождают и вращают алидаду, чтобы навести на *B*. Но предположение о том, что во время этого движения сам круг стоит абсолютно неподвижно, при всех условиях ненадёжно; существует малейшая, сама по себе незаметная непрочность в закреплении лимба, в результате которой вращение алидады немножко увлекает круг в том же направлении (слева направо); разность отсчетов будет, следовательно, преуменьшать угол. При любом числе повторений окончательный результат будет преуменьшен.

Когда я это осознал, я нашел (на пункте Jever) выход из положения в том, что к повторениям, исполненным обычным образом, прибавлялось такое же число повторений, в которых алидада вращалась справа налево, т. е. получался угол, дополнение до 360°. В этом случае все углы всегда были больше, чем в первом случае, и разность в среднем составлявшая около 2″, казалась совсем не зависящей или по меньшей мере зависящей незначительно от величины угла. Среднее из обоих результатов могло, таким образом, считаться действительным значением угла и, в действительности, все результаты, полученные таким способом, как на этом пункте, так и на всех остальных, были вполне удовлетворительными. Таким образом, оказалось, что этот теодолит в его тогдашнем состоянии давал все углы, измеренные обычным образом, преуменьшенными на величину около секунды.

Движение всего круга от первого отсчёта до первого визирования, затем от $\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}$ и т. д. до $\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}$ и т. д. визирования всегда выполнялось справа налево (при углах $< 180°$); конечно, по меньшей мере мыслимо, что и в этом случае могут иметь место систематические ошибки. Именно, лежит ли причина непрочного скрепления отчасти в закрепительных винтах, в гайках или в шарах, может иметь место во время вращения всего круга некоторый сдвиг отсчета вследствие трения алидадной цапфы о поддерживающие ее снизу пружины, который в данном случае оказывает обратное влияние, приводящее к преувеличению угла. Я, однако, предположил, что это влияние неощутимо. Потребовалось бы много времени, чтобы получить объяснение этого a posteriori. Нет надобности упоминать о том, что я всегда заботился о том, чтобы закрепительные винты ходили не слишком легко.

Несомненно, что где-то должна быть непрочность соединения, но трудно определить, где преимущественно. После этого я поручил сделать в этом теодолите изменение с тем, чтобы устранить непрочность, которая могла бы, предположительно, иметь место при тех вращательных движениях, которыми передвигают поверительную трубу. Именно, я совсем устранил поверительную трубу, бесполезную при прочной установке инструмента, и рычаг торможения круга соединил непосредственно к ноге сильными наколенниками. Но после указанного изменения с этим инструментом выполнено слишком мало измерений, чтобы можно было надёжно судить об этом эффекте.

При более поздних измерениях с 1828 по 1843 г. мои офицеры употребляли три других теодолита:

1) Гартман — 8-дюймовый теодолит Рейхенбаха, уже с 1813 г. находящийся в собственности обсерватории;

2) Мюллер — 12-дюймовый теодолит Эртеля, принадлежащий ганноверскому генеральному штабу (получен мною), вполне одинаковый с первым, но без вертикального круга и поверительной трубы;

3) мой сын — 8-дюймовый теодолит Эртеля, также без вертикального круга и поверительной трубы, но со зрительной трубой такой же силы, что и у № 2. Верньер дает отсчет до 10″. У № 1 это явление не было замечено; впрочем, инструмент был в работе только два года; угловые измерения всюду дают хорошие результаты. Зрительная труба меньшей оптической силы, но Гартман всегда устанавливал более сильную трубу, принадлежащую лично ему. Я упоминаю об этом обстоятельстве лишь для того, чтобы разъяснить, почему этот теодолит после этого уже не употреблялся.

О теодолите № 2 я пишу теперь только по памяти и не могу в данный момент точно сказать, когда указанное явление начало обнаруживаться. Если я не ошибаюсь, то в первые годы особых признаков этого явления не наблюдалось, но в более позднее время оно было несомненным и по меньшей мере в два раза больше, чем у инструмента, которым я пользовался. Последний часто разбирался, чистился, а также, если мне не изменяет память, был снабжен новыми закрепительными винтами от Hohnbaum в Ганновере, но ошибка не была устранена. Я всегда настойчиво рекомендовал покойному Мюллеру упомянутое выше средство. Я, однако, не думаю, что он его всегда последовательно применял.

С теодолитом № 3 мой сын выполнил в 1829, 1830, 1831, 1833 гг. весьма обширные измерения; углы (кстати сказать, на каждом пункте, как правило, измерялись все комбинации между всеми главными направлениями, как Вы это можете видеть также из работ Герлинга) всегда согласовались, к полному моему удовлетворению, по меньшей

мере так же хорошо, а часто еще лучше, чем мюллеровские с № 2, и указанная ошибка обнаруживалась, во всяком случае, в незначительной мере.

Начиная с 1834 г., этот теодолит употреблялся в течение 5 или 6 лет в магнитной обсерватории, затем, временами Goldschmidt использовал его при угловых измерениях, однако, слишком простых, чтобы при этом мог возникать вопрос об указанной выше ошибке.

Этот самый теодолит № 3 мой сын снова применил прошлым летом для измерения главных углов. Хотя на пунктах, где было измерено большинство углов (башни на пункте Hamburg и Stade), обстоятельства были во многих отношениях неблагоприятными, все же теперешняя величина этой отрицательной ошибки, составляющей 3—4″, решительным образом обнаружилась. До отправки теодолит был здесь почищен и осмотрен и нигде никакой непрочности не было замечено. Все же мой сын нашел конец закрепительного винта круга изрядно стершимся и поэтому наблюдения первого дня, когда это обстоятельство не было замечено, были отброшены; после этого старательно избегали пользоваться этим винтом и от этого никакой непрочности в закреплении не было замечено. Я велю этот теодолит снова доставить сюда и попробую, нельзя ли путем изменений устранить ошибку или хотя бы ее влияние. Я велю сделать новые зажимы (щеки зажимов); я еще не решил, следует ли велеть сделать совсем новые винты с принадлежностями из опасения попасть из огня да в полымя. Так как Вы получили малый теодолит от Meyerstein, то я прошу Вас подвергнуть именно эту сторону работы очень тщательному исследованию и результат сообщить мне конфиденциально. Я имею еще одну идею относительно средства, которое хотя и не может устранить ошибку (скрытая непрочность), но, как я надеюсь, может её обезвредить.

Как известно, цапфа алидады и бюкса этой цапфы, которая в свою очередь является цапфой лимбового круга, опираются снизу каждая на пружины. Эти пружины я хочу велеть так изменить, чтобы напряжение можно было легко и мгновенно усиливать или ослаблять. Эти изменения напряжения надо всегда во время измерений так чередовать, чтобы при вращении алидады пружины, на которые опирается ее цапфа, были напряжены, а пружины, которые упираются в баксу, почти совсем не напряжены и, наоборот, когда вращается весь круг. Meyerstein надеется суметь надлежащим образом устроить такое изменение, и я ожидаю от этого большого успеха. Жаль лишь, что в моей обсерватории нельзя получить установки, пригодной для подобных исследований, ибо имеется видимость на мало подходящие объекты и, наконец, зимнее время для моего очень чувствительного организма может сказаться неблагоприятно. Я все же хочу, по меньшей мере, испытать и попытаться сделать то, что в моих силах.

Если Вы сами также имели подобный опыт и по этому поводу производили различные относящиеся к этому исследования, Вы меня очень обяжете сообщением об этом. Для теодолитов подобной конструкции это действительно жизненный вопрос. У кругов Борда, в силу их конструктивного принципа, эта ошибка совсем не может возникнуть; здесь нет никаких оснований для того, чтобы движение алидады смещало положение нижней зрительной трубы против лимба и, равным образом, движение всего круга мало смещает положение алидады относительно лимба. Можно строить теодолиты по этому принципу, но это совсем другие инструменты, чем инструменты Рейхенбаха; если я не ошибаюсь, Шумахер имеет такой от Gamley (у которого, однако, нижняя зрительная труба играет совсем другую роль); я, однако, не знаю подробностей его устройства...

Удивительно, насколько отличаются вещи, изложенные на бумаге, от тех, которые они вызывают, когда еще только обдумываются. Просматривая бегло вышестоящие строки, мне показалось, что непредубежденному читателю, не производившему никаких собственных опытов, одно обстоятельство покажется более важным, чем я его считал до сих пор, именно то, что все теодолиты вначале совсем не обнаружили этого явления или обнаружили его лишь в неощутимой мере. Следовательно, должен иметь место какой-то износ, и я поэтому при всех обстоятельствах велю изготовить новые винты, гайки и шары, хотя, как уже говорилось, у этих частей в отдельности не замечено какого-либо колебания от нормы. Я, однако, проверю, не позволит ли обнаружить кое-какие колебания подобного рода намного более сильная труба.

ГАУСС К БЕССЕЛЮ. Гёттинген, 15 августа 1844 г.

... Вопрос, по поводу которого я с Вами переписывался в последний раз, а именно тенденция повторительных т е о д о л и т о в преуменьшать углы, продолжал сильно беспокоить меня прошлой зимой. Существует только одна причина того, что круг не остается абсолютно неподвижным во время тех манипуляций алидады, при которых предполагается, что он останется неподвижным. Но изменения, которые я поручил сделать, показали себя очень эффективными не только в течение многочисленных пробных измерений, которые я сам произвел с января по март, но и при дальнейшем употреблении этого инструмента моим сыном. Результаты прошлого года были частично так плохи, что их надо было полностью отбросить, в то время как в этом году они так хороши, как это только можно ожидать от инструмента такого размера. Основное изменение состоит в том, что цапфа алидады и ее бакса (которая в свою очередь образует цапфу лимба) подпираются каждая сама по себе опорными пружинами так, что каждую из этих опорных пружин можно независимо от другой по желанию и мгновенно натягивать и ослаблять (полностью или частично). В этом случае при работе постоянно планомерно чередуются состояния этих пружин, так что, включая все, для каждого повторения надо выполнить 19 операций (в том числе отсчет); последовательный ряд этих операций выполняется, однако, настолько механически, что можно работать почти так же быстро, как и при обыкновенном устройстве.

[Вычисление средней ошибки отсчета, включая ошибку деления теодолита]

ГАУСС К ГЕРЛИНГУ. Гёттинген, 17 апреля 1844 г.

... О другом контрольном вычислении наблюдений теодолитом (имеющем цель определить среднюю ошибку отсчета, включая ошибку деления) я оставляю за собой право написать Вам в другой раз. Я уже выполнил эти вычисления для 19 лет, и они доставили мне много удовольствий. Именно я вычислил для каждого полного отсчёта $a-b+c-d=l$, где (не принимая во внимание градусы) a, b, c, d обозначают 4 отсчёта. Это l (несмотря на эксцентриситет, даже на несколько изменяющийся эксцентриситет) должно быть постоянным; оно переменно только в результате ошибки отсчёта и ошибки деления. Полагая среднее значение из очень многих n отсчётов равным λ (для данного теодолита оно поддается очень точному определению из многих наблюдений и должно быть неизменным) и $\frac{\Sigma(l-\lambda)^2}{n-1}=k^2$, то $\frac{1}{2}k$ — ожидаемая средняя ошибка при отсчитывании одного индекса и $\frac{1}{4}k$ — ожидаемая средняя ошибка

при отсчитывании всех четырех индексов. Я нашел последнюю, т. е. $\frac{1}{4}k$, из полных отсчётов:

[Г о д	Число отсчетов	Средняя ошибка]
1821	410	1″,25
1822	717	1 ,57
1823	449	1 ,61
1824	843	1, 60
1825	609	1 ,55
1822 — 1825	2618	1 ,58

Из столь близкой сходимости результатов за 1822—1825 гг. уже можно заключить, что отклонившееся значение за 1821 г. неслучайно; в действительности штрихи теодолита Шумахера были еще немного точнее, чем у моего собственного. Тот относится еще к тому времени, когда Рейхенбах сам владел мастерской; мой был заказан у Рейхенбаха, но все же изготовлен под его присмотром Эртелем. У моего 8-дюймового (от 1829 г.) деления заметно менее точны, чем у 8-дюймового от Рейхенбаха, который я приобрел в 1813 г.; однако, тот имеет намного лучшую зрительную трубу.

Я вижу, что самое существенное по этому вопросу я Вам написал, и отмечу лишь для полноты существенное сокращение указанного вычисления. Именно, если $\Sigma l = n\lambda$, то

$$\Sigma\,(l-\lambda)^2 = \Sigma l^2 - 2n\lambda^2 + n\lambda^2 = \Sigma l^2 - n\lambda^2 \left[= \Sigma l^2 - \frac{(\Sigma l)^2}{n}\right],$$

следовательно,

$$k = \frac{\Sigma l^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\lambda^2 \left[= \frac{\Sigma l^2}{n-1} - \frac{(\Sigma l)^2}{n(n-1)}\right].$$

Для определения ошибки, происходящей от ошибок деления и отсчета, все полные отсчеты по теодолиту, общим числом 449 (из наблюдений 1823 г.), были рассмотрены следующим образом.

Сумма отсчётов по первому и третьему индексам без суммы отсчётов по второму и четвертому равна l

$$\Sigma l = +133,$$
$$\Sigma l^2 = 18521,$$

следовательно, среднее значение $l = \left[\frac{133}{449} =\right] + 0'',30 = \lambda,$

среднее значение $(l-\lambda)^2 = \left[\frac{1}{448}\left(18521 - \frac{133^2}{449}\right) =\right] 41{,}254.$

Следовательно, средняя ошибка при одном верньере, включая ошибку деления,

$$\left[\frac{\sqrt{41{,}254}}{2} =\right] \pm 3'',211.$$

Для теодолита Шумахера 410 отсчётов 1821 г. дали

$$\Sigma l = -1896,$$
$$\Sigma l^2 = 18\,982.$$

Среднее значение $l = -4'',62 = \lambda$.

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 24{,}97$.

Средняя ошибка отсчёта одного верньера, включая ошибку деления, $= \pm 2'',499$.

Теодолит дал в 1822 г. из 717 отсчетов

$$\Sigma l = +212,$$
$$\Sigma l^2 = 28\,433.$$

Среднее значение $l = +0'',30 = \lambda$.

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 39{,}623$.

Средняя ошибка отсчёта при одном верньере, включая ошибку деления, $= \pm 3'',147$.

Результат так близко гармонирует с результатом 1823 г., что мы можем оба объединить. Имеем, таким образом, из 1166 отсчётов:

$$\Sigma l = +345,$$
$$\Sigma l^2 = 46\,954,$$
$$\lambda = +0'',296.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 40{,}216$.

Среднее значение при одном верньере $= \pm 3'',1708$. Число случаев появления отдельных значений l без учета знака было:

[l	Число	l	Число	l	Число]
0″	45	6″	133	11″	38
1	106	7	104	12	24
2	108	8	82	13	15
3	123	9	84	14	9
4	113	10	52	15	4
5	126				

В 1824 г. теодолит дал из 843 отсчётов

$$\Sigma l = +104,$$
$$\Sigma l^2 = 34\,506,$$
$$\lambda = +0'',12.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 40{,}966$.

Средняя ошибка при одном верньере, включая ошибку деления, $= \pm 3'',200$.

Итак, из всех трёх лет [1822—1824] 2009 отсчётов

$$\Sigma l = +449,$$
$$\Sigma l^2 = 81\,460,$$
$$\lambda = +0'',2235.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 40{,}518$.

Средняя ошибка одного верньера $= \pm 3'',1827$. Число случаев появления отдельных значений l без учёта знака было:

[l	Число	l	Число	l	Число]
0″	80	7″	191	14″	13
1	182	8	155	15	6
2	185	9	138	16	1
3	195	10	101	17	1
4	205	11	63	18	—
5	217	12	38	19	1
6	214	13	23		

По кругу [Борда] было сделано [в 1823 г.] 46 полных отсчётов. Получается

$$\Sigma l = -174,$$
$$\Sigma l^2 = 1534,$$
$$\lambda = -3'',78.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 19,46$.

Средняя ошибка отсчета одного верньера, включая ошибку деления, $= \pm 2'',206$.

В 1821 г. круг дал 92 отсчёта:

$$\Sigma l = -650,$$
$$\Sigma l^2 = 11\,578,$$
$$\lambda = -7'',07.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 76,767$.

Средняя ошибка отсчёта одного верньера, включая ошибку деления, $= \pm 4'',381$.

В 1822 г. по кругу было сделано 137 отсчетов; они дали:

$$\Sigma l = -543,$$
$$\Sigma l^2 = 6155,$$
$$\lambda = -3'',96.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 29,432$.

Средняя ошибка отсчёта при одном верньере, включая ошибку деления, $= \pm 2'',713$.

Если позволить себе объединить измерения 1822 и 1823 гг., то будем иметь [при 183 отсчетах]

$$\Sigma l = -717,$$
$$\Sigma l^2 = 7689,$$
$$\lambda = -3'',92.$$

Среднее значение $(l-\lambda)^2 = 26,812$.

Средняя ошибка отсчета при данном верньере, включая ошибку деления, $= \pm 2'',589$.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

(1). Ольберс Генрих Вильгельм (1758—1840), по образованию врач, крупный немецкий астроном XIX века. Ольберс имел частную астрономическую обсерваторию в Бремене и занимался в основном наблюдением и вычислением орбит комет. Им открыты 7 комет, одна из которых носит его имя, и две малые планеты: Палладу и Весту. По вычислениям Гаусса Ольберс в 1801 г. впервые обнаружил потерянную после открытия её первую малую планету Цереру.

Наибольшим достижением Ольберса в астрономии, помимо открытия комет и планет, является способ определения орбит комет по трем наблюдениям, изложенный в его классическом труде „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen"

Ольберс с готовностью помогал и покровительствовал молодым астрономам, в частности, на первых порах Бесселю. Ольберса постоянно интересовали градусные измерения, особенно датские и ганноверские; он присутствовал на наблюдениях Гаусса в Гамбурге и базисных измерениях Шумахера в Броккене. Он всячески содействовал успешному завершению этих работ.

Наряду с Шумахером Ольберс был самым близким другом Гаусса, их обширная переписка издана в двух томах в 1900 и 1909 гг. в Берлине.

(2). Бессель Фридрих Вильгельм (1784—1846) — один из крупнейших астрономов и геодезистов XIX века.

Бессель был профессором Кёнингбергского университета и директором астрономической обсерватории там же до конца своих дней. Он произвел обширные астрономические наблюдения (75011 звезд), разработал теорию ошибок астрономических инструментов, открыл личное уравнение наблюдателя, сделал ряд существенных теоретических дополнений к способу наименьших квадратов, разработанному Гауссом, исследовал ряд важных вопросов астрономии и высшей геодезии.

Совместно с Байером руководил градусными измерениями в Восточной Пруссии, где применил свой базисный прибор и способ уравнивания триангуляции. Результаты этих работ изложил в совместном с Байером труде «Gradmessung in Ostpreußen".

Бессель разработал метод вычисления геодезических координат при значительных расстояниях между заданными пунктами.

Переписка Гаусса и Бесселя по вопросам астрономии и высшей геодезии издана Прусской Академией наук в 1880 г. в Берлине.

(3). Герлинг Христиан Людвиг (1788—1864), ученик Гаусса, астроном и геодезист, был директором Гамбургской астрономической обсерватории, руководил в 1822 г. Кургессенской триангуляцией, к которой Гаусс затем привязал свои южные треугольники.

В 1843 г. Герлинг издал свой труд по способу наименьших квадратов под заглавием: „Die Ausgleichungs rechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der Kleinesten Quadrate", сыгравший положительную роль в практическом применении способа наименьших квадратов в геодезии.

Эту книгу Герлинг посвятил Гауссу со следующими словами: «Тот, кто подобно Вам разбрасывает во все стороны плодоносные семена безусловно, хочет иногда видеть, что с ними стало... И вот одно из этих семян дало плод, который считаю достаточно зрелым для того, чтобы предложить его моим гостям».

Герлинг находился в постоянной переписке с Гауссом, которая до сих пор еще не издана.

(4). Боненберг Иоганн-Готлиб Фридрих (1765—1831), ученик Цаха, профессор математики и астрономии университета в Тюрингии. Совместно с Линденау заведовал астрономической обсерваторией и издавал журнал «Zeitschrift für Astronomie und Verwand Wissenschaften" Гаусс в 1816 г. для этого журнала написал статью: «Определение точности наблюдений» (см. Избранные геодезические сочинения Гаусса, том I, стр. 121—129).

Боненберг руководил триангуляцией Вюртенберга, на основе которой затем была составлена карта Швабии на 55 листах. Между Гауссом и Боненбергом шла оживленная переписка во время привязки Ганноверской триангуляции к Вюртенбергской. Боненберг известен как автор одного из решений задачи Потенота.

(5). Цах Франц-Ксавер (1754—1822), астроном, директор созданной им астрономической обсерватории в Зееберге, близ города Готы. Руководил первоначальными геодезическими работами в Тюринге, которые потом были продолжены Боненбергом. Определил астрономические долготы по наблюдениям на пороховые вспышки. Он также измерил впервые базисы вблизи Зееберга базисным прибором Репсольда; при этих измерениях присутствовал Гаусс.

В 1798 г. Цах основал журнал «Geographisch Ephemeridem», который сыграл весьма заметную роль в развитии астрономии.

Цах известен как автор большого количества работ и таблиц по различным вопросам измерительной астрономии.

[1]. Рукопись работы была передана Гауссом Датской Академии наук в 1822 г. на соискание премии, назначенной для решения общей задачи конформного изображения одной поверхности на другую. Премия была присуждена Гауссу в 1823 г. Интересно в связи с этим отметить, что в 1823 г. в печати появилось сообщение о том, что все работы, представленные на соискание премии Академии, были отклонены. Это сообщение стало известно Гауссу и сильно его огорчило. Он обратился к Шумахеру с просьбой вернуть ему работу. Но Шумахер успокоил его, сообщив, что речь идёт о других работах и по другому вопросу.

Впервые работа была опубликована в журнале Шумахера «Astronomische Abhandlungen» в 1825 г. Настоящий перевод полностью соответствует тексту IV тома полного собрания сочинений Гаусса.

Как указано во вступительном слове Гаусса, он до передачи работы на соискание премии, начиная с 1815 г., занимался различными задачами конформного изображения одной поверхности на другую. В его литературном наследии имеется ряд заметок в этом направлении. Все они опубликованы в IX томе и носят следующие заглавия:

1. Конформное двойное проектирование сфероида на шаре и на плоскости. 2. Эллиптический сфероид (к переносу его на шар). 3. Сте-

реографическая проекция шара на плоскости. 4. Проектирование шара на плоскости посредством проекции Меркатора. 5. Стереографическое изображение сфероида на плоскости. 6. Конформный перенос сфероида на боковую поверхность конуса. 7. Конформное отображение сфероида на плоскости (метод проектирования ганноверской триангуляции). Часть последней заметки даётся в этом томе (см. стр. 148—173).

Как в переводе этой статьи, так и в последующих полностью сохранены обозначения Гаусса; исключение сделано только в отношении написания квадратов. Гаусс всегда писал вместо квадрата двойную букву, например вместо $a^2 = aa$.

[2]. Хотя «Исследования по вопросам высшей геодезии» хронологично появились значительно позже премированной работы, но, поскольку они являются естественным её продолжением и дальнейшим развитием, то здесь они следуют за ней непосредственно.

Когда эти статьи были закончены? До сих пор точно не установлено. Во всяком случае, они были в основном завершены задолго до их опубликования. Например, на собственном экземпляре журнала Шумахера, где была напечатана статья о конформном отображении, Гаусс сделал следующее примечание:

«В § 13, рядом с уравнениями, которые относятся к изображению, определенному функцией $f(\upsilon) = \upsilon - i \lg k$, можно привести соответствующее уравнение для функции $f(\upsilon) = \alpha\upsilon - \iota \lg k$, о которых будет говориться впоследствии, в первой статье «Исследований по вопросам высшей геодезии».

А вот что писал Гаусс Бесселю еще 15 ноября 1822 г.:

«Я с удовольствием прочитал в Astronomische Nachrichten Шумахера Ваш способ обработки геодезических наблюдений. Вы знаете, что этот вопрос занимал меня уже много лет назад. Так как к Вашим работам нелегко что-либо прибавить, то если бы наши пути встретились, указанное ознакомление сделало бы мою собственную работу излишней. Однако способ, которым я разработал этот вопрос, совершенно отличен от Вашего, и поэтому в будущем при опубликовании моих измерений я окончательно разовью также и мои теоретические работы. Я надеюсь, что смогу показать при этом много неожиданного».

После Гаусс в течение более 10 лет (1831—1842 гг.) был поглощен изучением земного магнетизма и только в 1843 г. он вновь вернулся к своим исследованиям по высшей геодезии.

Первая статья была доложена гёттингенскому научному обществу 23 октября 1843 г., а появилась в печати в мемуарах того же общества в 1844 г.

Вторая статья была доложена 1 сентября 1846 г. и опубликована в том же органе в 1847 г. Эта работа Гаусса по высшей геодезии была последней.

[3]. 8 октября 1827 г. работа «Общие исследования о кривых поверхностях» была передана Гауссом гёттингенскому научному обществу. Последнее опубликовало её в VI томе своих научных известий.

Первоначально исследования по дифференциальной геометрии были задуманы как отдельный раздел труда по высшей геодезии. Гаусс писал Ольберсу 9 октября 1825 г.

«В связи с моим будущим трудом по высшей геодезии я начал на днях несколько систематизировать мысли по очень маленькой его части, касающейся кривых поверхностей. Но я убеждаюсь, что своеобразие моей трактовки этого вопроса вынуждает меня для связи начать издалека, так что я должен даже предпослать свой взгляд на радиус кривизны плоских кривых. Я поэтому почти усомнился, не будет ли удач-

нее чисто геометрическую часть (в аналитической форме) этого учения, содержащую в новой форме смесь нового и известного, сперва обработать отдельно, отделить её от труда и в качестве одной или двух статей поместить в наших известиях».

Как только исследование было закончено, Гаусс обработал его для отдельной работы по дифференциальной геометрии, которая является самым большим его вкладом в высшую геометрию. С точки зрения стиля и лаконичности изложения эта работа является весьма характерной для Гаусса. Именно здесь он в полной мере осуществил свой принцип — «...не оставлять лесов, которые служили для постройки памятника, представляемого на обозрение публики». Гаусс в своем труде действительно не оставил никаких следов своих аналитических рассуждений, которые он производил, чтобы получить окончательные результаты. Вследствие этого изучение этой работы Гаусса является весьма трудной задачей.

[4]. Метод неопределённых коэффициентов, на который указывает Гаусс, в своем наиболее простом виде заключается в следующем.

Пусть в первом приближении имеем

$$r^2 = p^2 + q^2 + a_1 p^2 q + a_2 p q^2 + \qquad (1)$$

где r — длина дуги геодезической линии между заданными точками; p и q — прямоугольные сфероидические координаты конечного пункта дуги геодезической линии, если начало координат совпадает с первой точкой; a_1 и a_2 — суть неопределенные коэффициенты.

Из выражения (1)

$$\frac{\partial r^2}{\partial p} = 2p + 2a_1 pq + a_2 q^2,$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial q} = 2q + a_1 p^2 + 2a_2 pq$$

или, удерживая члены третьего порядка в отношении p и q, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial r^2}{\partial p}\right)^2 &= 4p^2 + 8a_1 p^2 q + 4a_2 p q^2 \\ \left(\frac{\partial r^2}{\partial q}\right)^2 &= 4q^2 + 4a_1 p^2 q + 8a_2 p q^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Приняв в первом приближении $n = 1$, из формул (1) и (2) получим

$$4r^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4a_1 p^2 q + 4a_2 p q^2 = 4p^2 + 4q^2 + 12a_1 p^2 q + 12a_2 p q^2.$$

Из сравнения правой и левой частей равенств следует, что $4a_1 = 12a_1$ и $4a_2 = 12a_2$, следовательно, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$.

Так как при $p = 0$, $r = q$ и при $q = 0$ $r = p$, то, естественно, что члены $b_1 p^3$, $b_2 q^3$... и т. д. не должны входить в формулу для r^2.

Пусть во втором приближении будет

$$r^2 = p^2 + q^2 + a_3 p^3 q + a_4 p^2 q^2 + a_5 p q^3. \qquad (3)$$

Имеем

$$\frac{\partial r^2}{\partial p} = 2p + 3a_3 p^2 q + 2a_4 p q^2 + a_5 q^3,$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial q} = 2q + a_3 p^3 + 2a_4 p^2 q + 3a_5 p q^2.$$

Примем для второго приближения

$$\frac{1}{n}=1-f^0q^2.$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{n}\frac{\partial r^2}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial r^2}{\partial q}\right)^2=4r^2=4p^2+4q^2+16a_3pq^3+8(2a_4-f^0)p^2q^2+16a_5pq^3. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что

$$4p^2+4q^2+4a_3p^3q+4a_4p^2q^2+4a_5pq^3=4p^2+4q^2+16a_3pq^3+8(2a_4-\\-f^0)p^2q^2+16a_5pq^3.$$

Или $4a_3=16a_3$, $16a_4-8f^0=4a_4$ и $4a_5=16a_5$.

Следовательно,

$$a_3=0, \qquad a_4=\frac{2}{3}f^0 \text{ и } a_5=0.$$

Таким образом, из второго приближения получаем

$$r^2=p^2+q^2+\frac{2}{3}f^0p^2q^2.$$

В третьем приближении можно принять

$$r^2=p^2+q^2+\frac{2}{3}f^0p^2q^2+a_6p^3q^2+a_7p^2q^3. \quad (5)$$

Из выражения (5) имеем:

$$\frac{\partial r^2}{\partial p}=2p+\frac{4}{3}f^0pq^2+3a_6p^2q^2+2a_7pq^3,$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial q}=2q+\frac{4}{3}f^0p^2q+2a_6p^3q+3a_7p^2q^2.$$

Приняв в третьем приближении

$$\frac{1}{n}=1-f^0q^2-f'pq^2-g^0q^3,$$

получим

$$\left(\frac{1}{n}\frac{dr^2}{dp}\right)^2=4p^2-\frac{8}{3}f^0p^2q^2+(12a_6-8f')p^3q^2+(8a_7-8g^0)p^2q^3,$$

$$\left(\frac{1}{n}\frac{dr^2}{dp}\right)^2+\left(\frac{\partial r^2}{\partial q}\right)^2=4r^2=4p^2+4q^2+\frac{8}{3}f^0p^2q^2+(20a_6-8f')p^3q^2+\\+(20a_7-8g^0)p^2q^3. \quad (6)$$

Из сравнения правых частей формул (4), (5) и (6) следует, что

$$20a_6-8f'=4a_6 \text{ и } 20a_7-8g^0=4a_7,$$

т. е.

$$a_6=\frac{1}{2}f', \qquad a_7=\frac{1}{2}g^0.$$

Для четвертого приближения можно принять

$$r^2=p^2+q^2+\frac{2}{3}f^0p^2q^2+\frac{1}{2}f'p^3q^2+\frac{1}{2}g^0p^2q^3+a_8p^4q^2+a_7p^3q^3+\ldots$$

Прилагая вышеприведенный процесс к четвертому приближению, получим значения неопределенных коэффициентов a_8 и a_9. Понятно, что можно удерживать члены более высокого порядка, чем это у Гаусса, но в практических задачах бо́льшей точности не требуется.

Проф. М. Н. Сергеев в статье «Об одном применении метода неопределенных коэффициентов»* в несколько ином виде приводит подробности вычислений по методу неопределенных коэффициентов для получения формул Гаусса.

[5]. Вывод формул (1) — (6) § 24 иным методом, но для этой цели имеется у Ганзена в §118 его «Геодезических исследований» (см. А. Тилло «Геодезические исследования Гаусса, Бесселя, Ганзена», стр. 276—277).

[6]. Связанного изложения конформной проекции эллипсоида на плоскости для проектирования ганноверской триангуляции Гаусс не оставил. То, что здесь дается, является наиболее существенной частью заметок и отрывочных изложений Гаусса, собранных из различных источников его литературного наследия. В формулах и вычислениях Гаусса в ряде мест вкрались ошибки и опечатки; все они были тщательно проверены и исправлены Крюгером, который их приводит в своих комментариях к IX тому трудов Гаусса. Кроме этого, Крюгер в квадратных скобках поместил необходимые вводные пояснения, отсутствовавшие в заметках Гаусса. Заметки Гаусса пронумерованы Крюгером, номера стоят в квадратных скобках.

Обработка материалов ганноверской триангуляции по способу наименьших квадратов и вычисления прямоугольных плоских координат пунктов производил сам Гаусс. Для вычисления прямоугольных координат им был составлен ряд вспомогательных таблиц, приведенных в IX томе. В настоящее время эти таблицы не имеют практического значения, поэтому здесь они опущены, но образцы наиболее важных в методическом отношении таблиц даны в соответствующих местах.

[7]. Это основное уравнение может быть получено по общим правилам конформного отображения плоскости на эллипсоиде.

Квадрат линейного элемента плоскости в обозначениях Гаусса равен:

$$\omega = dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

а поверхности эллипсоида вращения

$$\Omega = M^2 d\Phi^2 + N^2 \cos^2\Phi d\lambda^2, \tag{2}$$

где M — меридианный радиус кривизны,
N — радиус кривизны первого вертикала.

Обозначим

$$\frac{M d\Phi}{N \cos \Phi} = dF(\Phi) = df(\xi), \tag{3}$$

поэтому

$$F(\Phi) = f(\xi) = \int \frac{M d\Phi}{N \cos \Phi}. \tag{4}$$

Квадрат масштаба изображения будет

$$m^2 = \frac{1}{n^2} = \frac{N^2 \cos^2 \Phi \, [dF(\Phi)^2 + d\lambda^2]}{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \frac{N^2 \cos^2 \Phi \; d\,(F(\Phi) + i\lambda) \; d\,(F(\Phi) - i\lambda)}{d\,(x + iy) \; d\,(x - iy)}. \tag{5}$$

* Сборник научно-технических и производственных статей ГУГК, вып. XIV. 1946 г., стр. 57—62.

Поскольку масштаб не должен зависеть от дифференциалов, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x+iy)=F(\Phi)+i\lambda=f(\xi)+i\lambda$$

или

$$f(x-iy)=F(\Phi)-i\lambda=f(\xi)-i\lambda. \qquad (6)$$

Можно эти уравнения получить общим методом Гаусса.

Интеграл дифференциального уравнения $\omega=0$ даёт $x\pm iy=\text{const}$, а из дифференциального уравнения $\Omega=0$ следует

$$F(\Phi)\pm i\lambda=\text{const}.$$

Если мы теперь допустим, что плоскость конформно изображается на эллипсоиде, то должны ставить условие

$$F(\Phi)+i\lambda=f(x+iy)$$

или

$$F(\Phi)-i\lambda=f(x-iy).$$

Согласно принятому обозначению $F(\Phi)=f(\xi)$, поэтому

$$f(x+iy)=f(\xi)+i\lambda=F(\Phi)+i\lambda,$$

т. е. то, что имеется у Гаусса.

[8]. Знак минус получается от того, что Гаусс азимуты и дирекционные углы отсчитывает от южного конца меридиана по ходу часовой стрелки, причём у Гаусса y положительные к западу.

[9]. Формулы Гаусса

$\frac{u}{f'(\xi)}=\frac{\cos c}{n}$ и $\frac{v}{f'(\xi)}=\frac{\sin c}{n}$ можно получить из выражения для m^2.

Имеем

$$m^2=\frac{1}{n^2}=N^2\cos^2\Phi f'(x+iy)\,f'(x-iy),$$

где

$$f'(x+iy)=\frac{d(F(\Phi)+i\lambda)}{d(x+iy)}=\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)},$$

$$f'(x-iy)=\frac{d(F(\Phi)-i\lambda)}{d(x-iy)}=\frac{df(x-iy)}{d(x-iy)},$$

но

$$f'(x+iy)\,f'(x-iy)=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2$$

Известно, что $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}c$, где c — сближение меридианов на плоскости, или

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\operatorname{tg}^2c=\frac{1}{\cos^2c};\ 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\operatorname{ctg}^2c=\frac{1}{\sin^2c}.$$

Делая тождественное преобразование, получаем

$$1.\ \frac{1}{\cos^2 c}=\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2}{\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2}\ \text{или}\ \frac{\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2}{\cos^2 c}=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2.$$

$$2.\ \frac{1}{\sin^2 c}=\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2}\ \text{или}\ \frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2}{\sin^2 c}=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{n^2}=N^2\cos^2\Phi\,\frac{\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2}{\cos^2 c},$$

$$\frac{1}{n^2}=N^2\cos^2\Phi\,\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2}{\sin^2 c}.$$

Приняв обозначение Гаусса $f'(\xi)=\frac{1}{N\cos\Phi}$, будем иметь

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{f'(\xi)}\,\frac{\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)}{\cos c},$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{f'(\xi)}\cdot\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)}{\sin c}$$

или

$$\frac{d\lambda}{dy}=\frac{1}{n}f'(\xi)\cos c=u,$$

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{1}{n}f'(\xi)\sin c=v.$$

[10]. Много раз Гаусс в дальнейшем упоминает триангуляцию полковника наполеоновской армии Эпейли, под руководством которого для картографических целей была проложена сеть триангуляции, соединяющая ганноверское королевство с Гамбургом. Гаусс хотел для своего градусного измерения воспользоваться этими работами для рекогносцировки и постройки знаков. Но его попытки долгое время не увенчивались успехом. Только в 1827 г., когда Гаусс закончил своё градусное измерение, он получил через посредство Лапласа от французского военного министерства таблицу треугольников с весьма ограниченными сведениями о местонахождении пунктов и построенных на них сигналах.

[11]. По свидетельству Крюгера, план труда по высшей геодезии, который в основном должен был содержать описание методики измерений и математическую обработку материалов ганноверского градусного измерения, был найден в архиве Гаусса на маленьком листе бумаги. Введение и незаконченный первый раздел располагались на двух листах, сложенных вместе в форме книги.

Когда Гаусс начал заниматься этим трудом, точно не установлено. Но, по всей вероятности, это было не раньше 1823—1826 г., когда фактически было закончено градусное измерение. Как только Гаусс вплотную стал обдумывать детали своего труда, он пришел к заключению, что все то, что он хотел изложить там, ему не удастся. Он об этом пишет в письме к Бесселю от 20 ноября 1826 г. (см. стр. 195). Письмо заключается следующими словами: «Если бы все эти вопросы должны были быть изложены в моем предполагаемом труде, тогда я или изложил бы многое неосновательно, или придал бы труду слишком пёстрый вид».

В дальнейшем Гаусс полностью отказался от своего плана и нашел для себя более целесообразным изложить все принципиальные вопросы высшей геодезии в отдельных трактатах. Эта мысль была им осуществлена полностью в ряде работ, помещенных в этом томе.

Г. В. Багратуни

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 1

Введение 3

I отделение

Решение в общем виде задачи:
Изображение частей заданной поверхности на другой заданной поверхности с сохранением подобия в бесконечно малых частях 19

Исследование по высшей геодезии 38

Первая статья . . . . . —

Вторая статья 63

Общие исследования о кривых поверхностях 92

Рецензия на работу: «Геодезические и астрономические работы для измерения дуги средней параллели, выполненные в 1821, 1822 и 1823 гг. . . 127

Сообщения (Anzeigen) 135

II отделение

Конформное отображение сфероида на плоскости 148

Из переписки Гаусса 173

О ганноверской триангуляции 209

Комментарии и примечания 237

Редактор изд-ва Ф. И. Хромченко Техн. ред. В. В. Романова

Корректоры: Ф. И. Хромченко

Т—08315. Сдано в набор 3/I 1958 г. Подп. к печати 8/VIII 1958 г.

Формат бумаги 70 × 108 1/16 Бум. л. 7,75 Печ. л. 15,5

Усл. п. л. 21,24 Уч.-изд. л. 17,75. Тираж 2000. экз. Зак. № 28.

Цена 12 р. 50 к. + переплет 1 р. 50 к.

Рижская картфабрика, Б. Алтонавас, 43.

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
31	4 сверху	$\})$	$\})^*$.	Корр.
36	11 снизу	$\psi=0$	$\Psi=0$	Тип.
	12 снизу	$\Psi=0$	$\psi=0$	Тип.
137	2 снизу	$52°40''$	$52°40'$	Корр.
149	1 снизу	$(1+e^2)\,(1-s^2)\}$.	$(1+e^2(-s^2))\}$.	Корр.
159	10 сверху	$y_\varepsilon \ldots;$	$y^3 \ldots;$	Тип.
161	11 сверху	$-\left(\frac{n\partial}{\partial x}\right)^2$	$-\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2$	Корр.
170	2 сверху	$+\frac{1}{24}(\alpha^2-\alpha'^2)R^2$	$+\frac{1}{24}(\alpha^2-\alpha'^2)\Big)R^2$	Ред.
177	6 сверху	$\alpha=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}=$ $=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}\cdot 206\,265''$	$\alpha=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}\cdot 206265''$	Ред.
180		строки 6 и 7 сверху поменять местами		Тип.
181	19 снизу	$=\frac{1}{4}$	$=\frac{1}{4}e$	Тип.
207	14 снизу	об этом	об очень	Тип.

КОНТРОЛЕР №_____

При обнаружении дефекта, просьба возвратить книгу вместе с ярлыком для обмена по адресу: гор. Рига, Б. Алтонавас, д. № 43. Картографическая фабрика.

Расходы по пересылке возмещаются фабрикой.