

У. КАУЛА

СПУТНИКОВАЯ  
ГЕОДЕЗИЯ





**THEORY OF SATELLITE  
GEODESY**  
**APPLICATIONS OF SATELLITES TO  
GEODESY**

**WILLIAM W. KAULA**  
**Institute of Geophysics and Planetary Physics**  
**University of California at Los Angeles**

**Blaisdell Publishing Co.**  
**A Division of Ginn and Co.**  
**Waltham, Massachusetts — Toronto — London**  
**1966**



У. КАУЛА

**СПУТНИКОВАЯ ГЕОДЕЗИЯ**  
Теоретические основы

Перевод с английского  
П. П. МЕДВЕДЕВА  
Под редакцией  
Н. П. ГРУШИНСКОГО

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**  
Москва 1970

В небольшой монографии видного американского специалиста изложены теоретические основы использования искусственных спутников для изучения фигуры и гравитационного поля Земли и других планет и спутников солнечной системы.

Автор знакомит читателя с гравитационным полем Земли, с геометрией орбит спутников и динамикой их движения, с методами наблюдения спутников и обработкой результатов наблюдений, а также со способами вывода искомых параметров, определяющих форму и размеры планеты. Написана книга просто и ясно, содержит лишь самый необходимый математический аппарат.

Книга представит большой интерес для геодезистов, гравиметристов, астрономов, инженерно-технических работников; она может служить также хорошим учебным пособием для студентов соответствующих специальностей.

*Редакция космических исследований,  
астрономии и геофизики*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Запуск советского искусственного спутника Земли 4 октября 1957 г. возвестил о начале космической эры. С тех пор прошло всего 12 лет, а уже появились новые отрасли науки, тесно связанные с космическими исследованиями, и многие „старые“, классические науки получили новые средства для решения своих проблем. Так случилось и с геодезией. Появление искусственных спутников Земли дало в руки геодезистов новое средство изучения Земли и ее гравитационного поля.

В приложении к геодезии искусственные спутники помогают решать три основных задачи: 1) создание визирной цели с хорошо известными координатами, которая наблюдается из точек Земли, удаленных друг от друга до 20 000 км. Наличие таких визирных целей позволяет построить пространственную триангуляцию, связывающую континенты, острова и любые удаленные точки на земной поверхности; 2) осуществление аэрофотосъемки с больших высот при любых, сложных для обычной авиации, условиях и на любых расстояниях от аэродромов; 3) измерение основных параметров фигуры и гравитационного поля Земли.

В первых двух задачах искусственный спутник играет пассивную роль, даже если он используется (в первом случае) не как простой визир, а посылает собственные сигналы. В третьей задаче, при решении проблем динамической геодезии, сам искусственный

спутник по существу является измерительным прибором. Двигаясь по законам небесной механики в гравитационном поле Земли, он испытывает все влияния этого поля: характер его движения определяется гравитационным полем Земли со всеми его аномалиями. Следовательно, и наоборот, по характеру движения спутника можно изучать гравитационное поле Земли — его правильную часть и аномальные отклонения от нее. Применение искусственных спутников в геодезии расширяет возможности этой науки как геометрического метода изучения Земли, смыкая ее с небесной механикой, астрономией и даже физикой верхней атмосферы.

Уже на первых порах использования искусственных спутников для изучения гравитационного поля и фигуры Земли было определено сжатие Земли с точностью, почти на два порядка более высокой, чем это удавалось сделать до тех пор геометрическим или гравиметрическим методом. Вскоре после этого были получены характеристики трехосности и полярной асимметрии Земли. Широким фронтом ведутся работы по построению сетей пространственной триангуляции, что позволит в короткий срок создать единую мировую геодезическую основу. Уже удастся вывести гравитационные характеристики сравнительно малых областей.

Методы космической геодезии и гравиметрии и решаемые с их помощью задачи не укладываются в рамки национальных границ. В силу своего глобального характера они перерастают из национальных в международные. Именно поэтому как космические исследования в широком плане, так и решение задач спутниковой геодезии вызвали к жизни широкое международное сотрудничество.



Предлагаемая советскому читателю — специалисту в области геодезии и гравиметрии — книга У. Каулы „Спутниковая геодезия. Теоретические основы“ является, пожалуй, первым достаточно подробным и последовательным изложением теории и основных методов этого предмета. Автор широко понимает термин „спутниковая геодезия“, включая сюда вопросы изучения гравитационного поля и фигуры Земли. У. Каула, хорошо известный в кругах советских небесных механиков, геодезистов и гравиметристов, уже давно и плодотворно работает в области применения искусственных спутников для изучения фигуры и гравитационного поля Земли.

Советский читатель уже знаком с переведенной на русский язык работой Каулы под сходным названием „Космическая геодезия“. Однако новая книга совсем не повторяет предыдущую. Здесь излагаются основы изучения гравитационного поля и фигуры Земли по возмущениям орбит искусственных спутников. Несколько непривычны кое-какие принятые в книге обозначения. Однако, заменив некоторые из них (например, необычный  $\operatorname{tg}^{-1}x$  на привычный  $\operatorname{arctg} x$ ), мы не сочли целесообразным заменять некоторые обозначения, уже встречавшиеся в переводной литературе. Так, мы сохранили необычное для советских геодезистов обозначение сжатия через  $f$  (обычно у нас оно обозначается через  $\alpha$ ), сохранили также обозначение суммы пренебрежимо малых членов порядка квадрата сжатия в виде  $O(f^2)$ . В своем изложении автор использует аппарат матричного анализа, мало знакомый широкому кругу геодезистов. Это делает изложение материала сжатым, но зато не всегда простым для понимания. Однако матричный метод неизбежно придется использовать, особенно в связи со все

расширяющимся применением электронных вычислительных машин, так что встреча с ним в книге будет только полезной. И даже если читателю покажутся трудными некоторые выводы, он найдет в этой книге много полезных формул и сведений из области применения искусственных спутников для изучения гравитационного поля и фигуры Земли, начиная от возмущения орбит и до обработки наблюдений спутника.

Можно быть уверенным, что книга У. Каулы встретит хороший прием у советских геодезистов, гравиметристов и астрономов.

*Н. Грушинский*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Одна из задач настоящей книги состоит в том, чтобы показать развитие и применение известных положений классической физики (закона всемирного тяготения Ньютона) и математики (евклидовой геометрии) к решению специфических задач, связанных с изучением Земли; другая — в том, чтобы изложить и объяснить некоторые математические методы, разработанные в последнее время для использования искусственных спутников Земли в геодезии.

Стремясь сделать эту книгу возможно более полезной для решения первой из названных задач, автор исходил из предположения, что читатель имеет математическую и физическую подготовку только в объеме первого курса высшей школы. Поэтому, хотя и предполагается, что читатель знаком с основами теории потенциала и аналитической геометрии, в книге даются все необходимые сведения о таких разделах математики, как сферические функции и матрицы, в том объеме, в каком это необходимо в данной книге.

Вторая задача приводит к необходимости ввести более сложные понятия, чем это нужно для понимания физических принципов, в связи с чем возникают трудности при попытке объединить обе задачи. Однако тот факт, что подобные трудности встречаются в применении простых положений физики, а также то, что

примененные математические методы позволяют эффективно преодолеть их, пожалуй, наиболее поучительно для читателя.

Я искренне благодарен Р. Уилсону и Б. Колану из Калифорнийского университета (Лос-Анджелес), К. Уиттену, М. Хоутайну и другим сотрудникам Береговой и геодезической службы США (Вашингтон) за их замечания к первоначальным планам работы, Р. Джерстену из Авиационно-космической корпорации (Лос-Анджелес) за критический просмотр окончательного варианта рукописи и Элизабет Доути за ее внимательность и терпеливость при подготовке машинописного текста и разнообразные исправления.

*У. Каула*

## ТАБЛИЦА ОБОЗНАЧЕНИЙ

<i>Символ</i>	<i>Определение</i>	<i>Размерность</i>	<i>Впервые использован в уравнении</i>
<i>A</i>	Площадь поперечного сечения спутника	$L^2$	(3.152)
<i>A</i>	Азимут		(4.18)
<i>a</i>	Большая полуось эллипса	$L$	(1.36)
<i>a<sub>e</sub></i>	Средний экваториальный радиус Земли	$L$	(3.53)
<i>b</i>	Малая полуось эллипса	$L$	(1.36)
<i>C</i>	Матрица коэффициентов при поправках к наблюдениям		(5.41)
<i>C<sub>D</sub></i>	Коэффициент сопротивления, зависящий от формы спутника		(3.152)
<i>C<sub>lm</sub></i>	Коэффициент при косинусе сферической гармоники в разложении потенциала		(1.31)
<i>c</i>	Скорость света	$LT^{-1}$	(4.35)
<i>E</i>	Эксцентриская аномалия		(3.13)
<i>E</i>	Эллиптический интеграл 2-го рода		(3.143)
<i>e</i>	Эксцентриситет		(3.9)
<i>F</i>	Сила	$LM\Gamma^{-2}$	(1.1)
<i>F</i>	Силовая функция, относенная к единице массы	$L^2T^{-2}$	(3.32)
<i>F</i>	Эллиптический интеграл 1-го рода		(3.135)
<i>F<sub>lmp</sub></i>	Функция наклонения		(3.61)
<i>f</i>	Сжатие эллипса		(1.36)
<i>f</i>	Истинная аномалия		(3.9)
<i>f</i>	Фокусное расстояние	$L$	(4.36)
<i>f</i>	Частота	$T^{-1}$	(5.5)
<i>f</i>	Вектор остаточных разностей		(5.27)

Символ	Определение	Размерность	Впервые использован в уравнении
$O$	Элемент Делоне, момент количества движения, отнесенный к единице массы, $[\mu a(1 - e^2)]^{1/2}$	$L^2 T^{-1}$	(3.41)
$G_{lprq}$	Функция эксцентриситета		(3.66)
$g_e$	Ускорение силы тяжести на экваторе	$LT^{-2}$	(1.38)
$H$	Элемент Делоне $[\mu a(1 - e^2)]^{1/2} \cos i$	$L^2 T^{-1}$	(3.41)
$h$	Момент количества движения, отнесенный к единице массы, $r^2 \dot{\lambda}$	$L^2 T^{-1}$	(3.4)
$h$	Элемент Делоне, долгота узла $\Omega$ или $(\Omega - \theta)$		(3.138)
$h$	Высота	$L$	(4.50)
$I$	Единичная матрица		(2.20)
$i$	Наклонение		(2.29)
$J_n$	Коэффициент зонального члена в разложении потенциала		(1.38)
$J_{22}$	Коэффициент члена разложения потенциала, выражающего эллиптичность экватора		(6.10)
$K$	Матрица ковариации линейного преобразования наблюдения $CWC^T$		(5.45)
$K_{lmpq}$	Коэффициент в синусоидальной частной производной по коэффициенту в разложении потенциала		(4.27)
$k$	Гравитационная постоянная $6,670 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \times \text{сек}^2$	$L^3 M^{-1} T^{-2}$	(1.1)
$k$	Модуль эллиптического интеграла		(3.134)
$L$	Элемент Делоне $\mu^{1/2} a^{1/2}$	$L^2 T^{-1}$	(3.41)
$l$	Индекс порядка сферической гармоники		
$l_T$	Вектор, отнесенный к местной отвесной линии	$L$	(1.16) (4.17)

Символ	Определение	Размерность	Впервые использован в уравнении
$M$	Масса Земли	$M$	(1.1)
$M$	Средняя аномалия		(3.19)
$M$	Матрица коэффициентов поправок к параметрам		(5.27)
$m$	Масса малого тела	$M$	(1.1)
$m$	Индекс степени сферической гармоники		(1.19)
$m$	Отношение центростремительного ускорения к ускорению силы тяжести на экваторе		(1.38)
$N$	Матрица коэффициентов нормальных уравнений		(5.53)
$n$	Среднее движение	$T^{-1}$	(3.20)
$n$	Номер или порядок гармоники		(5.1)
$0$	Нулевая матрица		(5.43)
$O_i$	Измеренная величина		(4.32)
$P$	Матрица линейного преобразования ошибок		(5.63)
$P_{lm}$	Присоединенная функция Лежандра		(1.30) (4.32)
$P_j$	Параметр		
$p$	Индекс в функции наклона $F$		(3.61)
$p$	Вектор количества движения, отнесенный к единице массы	$L^2T^{-1}$ или $LT^{-1}$	(3.83)
$pi$	Момент количества движения, отнесенный к единице массы	$L^2T^{-1}$ или $LT^{-1}$	(3.83)
$p_T$	Вектор, отнесенный к осям камеры, неподвижным относительно инерциальной системы отсчета	$L$	(4.16)
$Q_{lm}$	Амплитуда сферической гармоники в разложении возмущающей функции		(3.121)
$q$	Индекс в функции эксцентриситета $G$		(3.67)

Символ	Определение	Размерность	Впервые использован в уравнении
$q$	Радиус-вектор, отнесенный к плоскости орбиты	$L$	(3.23)
$q$	Радиус-вектор, или вектор углового положения, в канонических переменных	$0$ или $L$	(3.83)
$q_i$	Радиус-вектор или угол в канонических переменных	$0$ или $L$	(3.83)
$R$	Функция радиуса в сферической гармонике		(1.14)
$R$	Возмущающая функция	$L^2T^{-2}$	(3.40)
$R_E$	Средний радиус Земли	$L$	(4.68)
$R_i(\theta)$	Матрица поворота относительно оси $i$ на угол $\theta$		(2.6)
$R_{xq}$	Матрица поворота при преобразовании координат из системы $q$ в $x$		(2.26)
$r$	Координата по радиусу-вектору или расстояние	$L$	(1.1)
$r, \dot{r}, \ddot{r}$	Векторы положения, скорости и ускорения	$L, LT^{-1}, LT^{-2}$	(3.1)
$S$	Производящая функция канонического преобразования		(3.96)
$S_{Im}$	Коэффициент при синусе сферической гармоники в разложении потенциала		(1.31)
$S_{Iml}$	Поверхностная сферическая гармоника		(1.31)
$s$	Вектор свободных членов нормальных уравнений		(5.53)
$s_k$	Элемент кеплеровской орбиты		(3.27)
$T$	Кинетическая энергия, отнесенная к единичной массе	$L^2T^{-2}$	(3.32)
$T$	Интервал наблюдений для получения временных рядов	$T$	(5.1)
$T_{Iml}$	Коэффициент в разложении по сферическим функциям		(1.27)



Символ	Определение	Размерность	Впервые использован в уравнении
$t$	Время	$T$	(3.4)
$U$	Потенциал силы тяжести отсчетного эллипсоида	$L^2T^{-2}$	(1.38)
$u$	Величина $1/r$ , обратная радиусу	$L^{-1}$	(3.5)
$\mathbf{u}$	Радиус-вектор, отнесенный к координатам, жестко связанным с Землей	$L$	(2.24)
$V$	Гравитационный потенциал, отнесенный к единице массы	$L^2T^{-2}$	(1.3)
$\mathbf{V}$	Матрица ковариаций параметров		(5.50)
$V_0$	Гравитационный потенциал эллипсоида относимости	$L^2T^{-2}$	(1.38)
$v$	Скорость	$LT^{-1}$	(3.34)
$W$	Потенциал силы тяжести	$L^2T^{-2}$	(1.35)
$\mathbf{W}$	Матрица ковариаций наблюдений		(5.38)
$\mathbf{x}$	Радиус-вектор в инерциальной системе координат	$L$	(2.24)
$\mathbf{x}$	Вектор поправок к наблюдениям		(5.27)
$\mathbf{y}$	Вектор временного ряда		(5.1)
$\{x, y\}$	Координаты на пластинке	$L$	(4.36)
$z$	Зенитное расстояние		(4.18)
$\mathbf{z}$	Вектор поправок к параметрам		(5.27)
$\alpha$	Прямое восхождение		(3.54)
$\delta$	Склонение		(4.16)
$\varepsilon$	Ошибка		(4.34)
$\theta$	Гринвичское звездное время		(2.24)
$\kappa$	Угол крена камеры		(4.18)
$\Delta$	Функция долготы в сферической гармонике		(1.14)
$\lambda$	Долгота		(1.9)
$\lambda$	Вектор множителей Лагранжа		(5.42)
$\lambda_{lm}$	Долгота в разложении потенциала по сферическим функциям		(3.122)
$\mu$	Синус широты $\sin \varphi$		(1.21)

Символ	Определение	Размерность	Впервые использован в уравнении
$\mu$	Произведение гравитационной постоянной на массу Земли $kM$	$L^3T^{-2}$	(3.1)
$\mu$	Показатель преломления		(4.50)
$\nu$	Радиус кривизны в первом вертикале	$L$	(4.8)
$\rho$	Плотность	$ML^{-3}$	(1.5)
$\sigma^2$	Порядковая дисперсия сферической гармоники		(5.13)
$\Phi$	Функция широты в сферической гармонике		(1.14)
$\varphi$	Широта		(1.9)
$\psi$	Долгота, измеренная от малой оси экваториального эллипса		(3.130)
$\Omega$	Долгота восходящего узла		(2.28)
$\omega$	Скорость вращения Земли $\dot{\theta}$	$T^{-1}$	(1.35)
$\omega$	Аргумент перигея		(2.30)

**Таблица числовых значений некоторых постоянных**

<i>Сим-вол</i>	<i>Постоянная</i>	<i>Значение</i>
$A/m$	Наиболее часто встречающееся значение отношения площади поперечного сечения к массе спутника для баллонов	0,02—0,20 $см^2/г$ , 30—100 $см^2/г$
$a_e$	Большая полуось Земли	6 378 153 ± 8 м
$b$	Малая полуось Земли	6 356 768 ± 8 м
$C_D$	Коэффициент атмосферного торможения	2,4 ± 0,2
$C_{Im}$	Коэффициент в разложении потенциала	См. табл. 3
$c$	Скорость света	299 792,5 ± 0,5 км/сек
$f$	Сжатие Земли	1/298,25 ± 0,01
$g_e$	Значение ускорения силы тяжести на экваторе	978,0284 ± 0,0013 $см/сек^2$
$J_l$	Зональный гармонический коэффициент в разложении потенциала	См. табл. 4
$J_{22}$	Коэффициент эллиптичности экватора	1,8 ± 0,1 · 10 <sup>-6</sup>
$k$	Гравитационная постоянная	6,670 ± 0,002 · 10 <sup>-8</sup> $см^3/г · сек^2$
$kM$	Произведение гравитационной постоянной на массу Земли	3,986009 ± 0,000010 · 10 <sup>14</sup> $м^3/сек^2$
$m$	Отношение центростремительного ускорения к ускорению силы тяжести на экваторе	0,0034678
$R_E$	Средний радиус Земли	6371,0 км
$S_{Im}$	Коэффициент в разложении потенциала	См. табл. 3
$t$	Время: в планетарных единицах ( $k=1$ , $M=1$ , $a_e=1$ ) единица времени	806,8137 сек
$v$	Скорость: для близких спутников	6—8,5 км/сек

<i>Сим-вол</i>	<i>Постоянная</i>	<i>Значение</i>
$\lambda_{22}$	Долгота большой полуоси экваториального эллипса	$14^{\circ},5 \pm 1^{\circ},5 \text{ W}$
$\mu$	<i>kM</i>	$3,986009 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2$
$\mu$	Показатель преломления	$< 1,000390$
$\rho$	Плотность атмосферы на высоте	500 км: $15 \cdot 10^{-17} - 4 \cdot 10^{-14} \text{ г/см}^3$ 1000 км: $2 \cdot 10^{-19} - 10^{-16} \text{ г/см}^3$ 1500 км: $1,5 \cdot 10^{-20} - 8 \cdot 10^{-18} \text{ г/см}^3$
$\sigma_I^2$	Порядковая дисперсия гармоник в разложении потенциала	$\sim 160 \cdot 10^{-12}/I^3$
$\omega = \dot{\theta}$	Скорость вращения Земли	$0,7292115085 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$

## ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

---

### 1.1. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Наиболее известное явление в окружающем нас физическом мире — это земное тяготение. Сила притяжения двух материальных точек с массами  $m$  и  $M$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга, определяется законом всемирного тяготения Ньютона

$$F = k \frac{mM}{r^2}, \quad (1.1)$$

где  $k$  — гравитационная постоянная. Объединив (1.1) с уравнением

$$F = ma,$$

выражающим второй закон Ньютона, получим ускорение точки с массой  $m$  относительно центра масс двух точек

$$a = \frac{kM}{r^2}. \quad (1.2)$$

Это ускорение есть модуль вектора, направленного вдоль линии, соединяющей две точки. Вектор  $\mathbf{a}$ , соответствующий (1.2), можно найти, выразив ускорение в виде градиента скалярной величины, называемой потенциалом. Так,

$$\mathbf{a} = \nabla V, \quad (1.3)$$

где

$$V = \frac{kM}{r}. \quad (1.4)$$

В (1.4)  $V$  в соответствии с правилом знаков, принятым в астрономии и геофизике, положительно. В физике  $V$  обычно считают отрицательной величиной.

Если  $m$  пренебрежимо мало по сравнению с  $M$ , уравнения (1.3) и (1.4) соответствуют системе координат с началом в центре масс притягивающего тела с массой  $M$ . Общее ускорение нескольких тел с массами  $M_i$ , расположенных на расстояниях  $r_i$ , можно представить как градиент потенциала, равного сумме потенциалов  $V_i$ , определяемых формулой (1.4). Если эти частицы образуют единое сплошное тело с переменной плотностью  $\rho$ , суммирование можно заменить интегрированием по объему тела. Таким образом,

$$V = k \iiint \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz. \quad (1.5)$$

Для составляющей  $a_x$  вектора  $\mathbf{a}$ , полученного из потенциала точечной массы, определяемого (1.4), имеем

$$a_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -kM \frac{x}{r^3}, \quad (1.6)$$

а для второй производной

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = kM \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right). \quad (1.7)$$

Аналогичные выражения получим для производных потенциала по  $y$  и  $z$ . Складывая три вторых производных, получим уравнение Лапласа

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= kM \left( -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Такой же результат можно получить для каждого элемента с массой  $\rho dx dy dz$  в выражении, заданном уравнением (1.5), и, следовательно, для их суммы.

Выбор системы координат (прямоугольной или какой-либо другой), наиболее пригодной для решения физической задачи, обычно зависит от геометрии поверхности тела. Форма Земли, близкая к сферической, приводит к выбору сферических координат.

Таким образом,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\z &= r \sin \varphi,\end{aligned}\tag{1.9}$$

где  $r$  — радиус-вектор,  $\varphi$  — широта и  $\lambda$  — долгота, измеряемая к востоку (т. е. против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси  $z$  по направлению к началу координат). Обозначение, использованное в уравнении (1.9), принято в геодезии; в математике же обычно используют угол  $\theta$ , являющийся дополнением широты до  $90^\circ$ , а долготу обозначают  $\varphi$ .

Для преобразования уравнения Лапласа (1.8) к сферическим координатам необходимы частные производные сферических координат по прямоугольным. Эти частные производные можно получить, дифференцируя (1.9) по  $r$ ,  $\varphi$  и  $\lambda$  и решая систему полученных уравнений относительно  $dr$ ,  $d\varphi$ ,  $d\lambda$ :

$$\begin{aligned}dr &= \cos \varphi \cos \lambda dx + \cos \varphi \sin \lambda dy + \sin \varphi dz, \\d\varphi &= -\frac{1}{r} \sin \varphi \cos \lambda dx - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \lambda dy + \\&\quad + \frac{1}{r} \cos \varphi dz, \\d\lambda &= -\frac{1}{r \cos \varphi} \sin \lambda dx + \frac{1}{r \cos \varphi} \cos \lambda dy.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Затем, развернув значение  $\partial V/\partial x$  и введя полученные производные от  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \\&= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \varphi \cos \lambda - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \sin \varphi \cos \lambda - \frac{\sin \lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Дифференцируем второй раз по  $x$ ; тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \cos \varphi \cos \lambda + \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} \right) \frac{1}{r} \sin \varphi \cos \lambda + \right. \\&\quad \left. + \frac{\sin \lambda}{r \cos \varphi} \left( \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial r} \right) \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \text{Аналогичные члены} \times \\&\quad \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Найдя таким способом

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

и взяв их сумму, получим уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$r^2 \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1.13)$$

## 1.2. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Для выражения вариаций потенциала  $V$  в сферических координатах было бы удобно представить  $V$  в виде

$$V = R(r) \Phi(\varphi) \Lambda(\lambda). \quad (1.14)$$

Подставив уравнение (1.14) в (1.13) и разделив на  $R\Phi\Lambda$ , получим

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left( \cos \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + \frac{1}{\Lambda \cos^2 \varphi} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (1.15)$$

Поскольку первый член уравнения (1.15) зависит только от  $r$ , он должен быть постоянным и равным, например,  $l(l+1)$ . Выполняя дифференцирование и умножая на  $R$ , получим

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0. \quad (1.16)$$

Форма уравнения (1.16), в котором величина  $R$  и каждая ее производная умножаются на эквивалентную степень  $r$ , означает, что  $R$  имеет вид  $r^k$ . Подставляя эту величину в (1.16) и решая полученное уравнение относительно  $k$ , получим  $l$  и  $-l-1$  как два возможных решения, или

$$R = Ar^l + Br^{-l-1}, \quad (1.17)$$



где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Поскольку в интересующем нас случае потенциал в свободном пространстве на бесконечности стремится к нулю,  $A$  должно быть равно нулю.

Подставив вместо первого члена в уравнение (1.15)  $l(l+1)$  в согласии с (1.16) и умножив (1.15) на  $\cos^2 \varphi$ , получим уравнение с разделенными переменными

$$l(l+1)\cos^2 \varphi + \frac{\cos \varphi}{\Phi} \frac{d}{d\varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (1.18)$$

Поскольку только последний член уравнения (1.18) является функцией  $\lambda$ , он должен быть постоянным. Полагая эту постоянную равной  $-m^2$ , получаем

$$\Lambda = C \cos m\lambda + S \sin m\lambda, \quad (1.19)$$

где  $C$  и  $S$  — произвольные постоянные. Подставляя  $-m^2$  вместо члена с  $\Lambda$  в (1.18) и умножая на  $\Phi/\cos^2 \varphi$ , получаем уравнение, зависящее только от  $\varphi$ . Таким образом,

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left( \cos \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\cos^2 \varphi} \right] \Phi = 0, \quad (1.20)$$

или, подставляя  $\mu$  вместо  $\sin \varphi$ ,

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d\Phi}{d\mu} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Phi = 0. \quad (1.21)$$

Уравнение вида (1.21) при  $m=0$ , известное как уравнение Лежандра, решается в предположении, что  $\Phi$  представлена разложением в ряд по степеням  $\mu$  [1]. В случае  $m \neq 0$  наличие знаменателя  $1 - \mu^2$  затрудняет разложение  $\Phi$  в степенной ряд и уравнение следует решать методом последовательных приближений. Удобно предположить, что  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi = (1 - \mu^2)^{m/2} v(\mu), \quad (1.22)$$

откуда получается уравнение для  $v$ . Тогда

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 v}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dv}{d\mu} + (l-m)(l+m+1)v = 0. \quad (1.23)$$

Полагая

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mu^i, \quad (1.24)$$

подставляя (1.24) в уравнение (1.23) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой из степеней  $\mu$ , получим рекуррентную зависимость между коэффициентами степенного ряда. Из коэффициентов при  $\mu^k$  имеем

$$a_{k+2} = \frac{k(k+2m+1) - (l-m)(l+m+1)}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad (1.25)$$

Чтобы найти наибольшее возможное значение  $k$ , полагаем числитель в (1.25) равным нулю и разрешаем полученное уравнение относительно  $k$ . В результате получим

$$k_{\max} = l - m. \quad (1.26)$$

Следовательно,  $m \leq l$ , и если  $\mathbf{v}$  представить в виде конечного ряда по степеням  $\mu$ , допустимые степени будут равны  $l - m - 2t$ , где  $t$  — любое неотрицательное целое число  $\leq (l - m)/2$ . Подставим  $(l - m - 2t)$  вместо  $k$  и введем обозначение  $T_{lmt}$  вместо  $a_k$ . Затем, чтобы получить более компактное выражение, воспользуемся взаимным сокращением некоторых членов в числителе, и уравнение (1.25) примет вид

$$T_{lmt} = - \frac{(l - m - 2t + 1)(l - m - 2t + 2)}{2t(2l - 2t + 1)} T_{lm(t-1)}. \quad (1.27)$$

В этом решении остается еще определить  $T_{lm0}$ . Поскольку в выражении (1.14) содержатся, согласно (1.17) и (1.19), произвольные постоянные  $BC$  и  $BS$ , значение  $T_{lm0}$  также является произвольным; любое изменение принятого значения  $T_{lm0}$  приведет к обратно пропорциональному изменению  $BC$  и  $BS$ . Полученное путем дифференцирования  $T_{lm0}$  обычно определяют как (см. [4])

$$T_{lm0} = \frac{(2l)!}{2^l l! (l - m)!}. \quad (1.28)$$

Подставляя в (1.27) последовательные значения  $T_{lmt}$  начиная с  $T_{lm0}$  из (1.28), получаем

$$T_{lmt} = \frac{(-1)^t (2l - 2t)!}{2^l t! (l - t)! (l - m - 2t)!}. \quad (1.29)$$

Решение  $\Phi$  уравнения (1.20) или (1.21), соответствующее конкретной паре индексов  $l, m$ , называется присоединенной функцией Лежандра  $P_{lm}(\sin \varphi)$ , или  $P_{lm}(\mu)$ ; таким образом, имеем

$$P_{lm}(\sin \varphi) = \cos^m \varphi \sum_{t=0}^k T_{lmt} \sin^{l-m-2t} \varphi, \quad (1.30)$$

где  $k$  — целая часть  $(l - m)/2$ .

Полное действительное решение уравнения Лапласа (1.13) с учетом (1.17) (при  $A = 0, B = 1$ ), (1.19) и (1.30) будет иметь вид

$$V = \sum_{lmi} \frac{1}{r^{l+1}} S_{lmi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \varphi) \times \\ \times [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda], \quad (1.31)$$

где индекс  $i$  в первом члене обозначает  $\cos m\lambda$  или  $\sin m\lambda$ . Помимо этих действительных решений существуют мнимые, но они неприменимы к интересующей нас задаче теории потенциала.

Важным свойством поверхностных сферических гармоник  $S_{lmi}$  является их ортогональность, а именно свойство:

$$\int_{\text{Сфера}} S_{lmi} S_{hki} d\sigma = 0 \quad \text{при } l \neq h, \text{ или } m \neq k, \\ \text{или } i \neq j \quad (1.32)$$

при интегрировании по поверхности сферы. Благодаря этому свойству сферические гармоники служат естественным средством общего представления функций на сферической поверхности аналогично рядам

Фурье для функций одной переменной. Интеграл от  $S_{lm}^2$  при  $C_{lm}$  или  $S_{lm}$ , равных единице, равен

$$\int_{\text{Сфера}} S_{lm}^2 d\sigma = \left[ \frac{(l+m)!}{(l-m)! (2l+1) (2-\delta_{0m})} \right] 4\pi, \quad (1.33)$$

где символ Кронекера  $\delta_{0m}$  равен единице при  $m=0$  и нулю при  $m \neq 0$ . Множитель  $(l+m)!/(l-m)!$

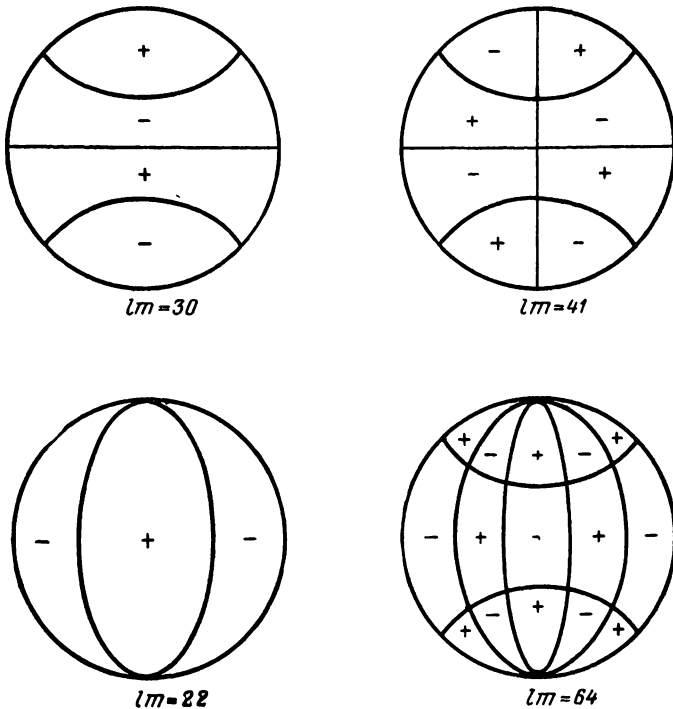


Рис. 1. Примеры сферических гармоник.

показывает, что величина функций (а следовательно, и коэффициентов) будет сильно меняться с изменением индекса  $m$ . Чтобы в численных расчетах было проще сравнивать коэффициенты, как пра-

вило, удобнее пользоваться нормированными функциями, например:

$$\bar{S}_{lmi} = \left[ \frac{(l-m)! (2l+1) (2-\delta_{0m})}{(l+m)!} \right]^{1/2} S_{lmi}. \quad (1.34)$$

Сферические гармоники удобнее всего характеризовать их нулями. Поверхностная сферическая гармоника  $S_{lmi}$  в интервале  $\pi$  имеет  $(l-m)$  нулей по меридиану и  $m$  нулей по параллели. Некоторые примеры расположения этих нулей показаны на рис. 1.

### 1.3 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЛИпсоиДА

Форма Земли, аппроксимируемая наиболее близко фигурой геоида, или средним уровнем моря (за вычетом метеорологических влияний), определяется не только гравитационным потенциалом  $V$ , но и потенциалом центробежных сил. Объединение этих двух потенциалов дает так называемый потенциал силы тяжести

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi, \quad (1.35)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Из наблюдений установлено, что геоид аппроксимируется эллипсоидом вращения с точностью порядка  $10^{-5}$  радиуса-вектора. Форму этого эллипсоида обычно характеризуют сжатием

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad (1.36)$$

где  $a$  — экваториальный, а  $b$  — полярный радиусы. Величина  $f$  — равна приблизительно  $3,353 \cdot 10^{-3}$ . Поэтому для исследования отклонений истинного гравитационного поля Земли от „нормального“, имеющих порядок  $10^{-5}$ , необходимо в разложении потенциала  $V_0$ , выраженном через массу  $M$ , радиус  $a$ , скорость вращения  $\omega$  и сжатие  $f$ , удержать члены порядка  $f^2$ . Далее, чтобы связать результаты, полученные по наблюдениям искусственных спутников, с результатами, полученными гравиметрическим путем, желательно связать параметры  $kM$  и  $C_{20}$

эллипсоида, полученного в первом случае, с параметрами  $g_e$  и  $f$  эллипсоида, построенного по гравиметрическим данным. Из-за сложности алгебраических преобразований при получении этой связи мы будем удерживать в приведенном выводе только члены, пропорциональные  $f$ .

Вследствие симметрии эллипсоида вращения радиус-вектор можно представить как сумму четных зональных гармоник:

$$r = r_0(1 + \alpha_2 P_{20} + \alpha_4 P_{40} + \dots), \quad (1.37)$$

где  $P_{20}$ ,  $P_{40}$  определяются из уравнений (1.29) и (1.30).

Обычно потенциал силы тяжести для эллипсоида относимости, так называемый „нормальный“ потенциал, представляют в виде

$$U = \frac{kM}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_{20} - J_4 \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_{40} - \dots \right] + \frac{1}{3} \frac{g_e m}{a} r^2 (1 - P_{20}), \quad (1.38)$$

где

$$m = \frac{\omega^2 a}{g_e}, \quad (1.39)$$

$g_e$  — ускорение силы тяжести на экваторе.

Разложение (1.37) в биномиальный ряд дает

$$r^n = r_0^n \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{10} \alpha_2^2 + \left[ n\alpha_2 + \frac{n(n+1)}{7} \alpha_2^2 \right] P_{20} + \left[ n\alpha_4 + \frac{9n(n-1)}{35} \alpha_2^2 \right] P_{40} + \dots \right\}, \quad (1.40)$$

где используется

$$P_{20}^2 = \frac{18}{35} P_{40} + \frac{2}{7} P_{20} + \frac{1}{5}. \quad (1.41)$$

Подставляя (1.40) в (1.38), используя (1.41) и пренебрегая членами  $P_{20}$ ,  $P_{40}$  и  $P_{40}^2$ , получим выражение для потенциала  $U$  на поверхности эллипсоида:

$$U = U_0(g_e, m, r_0, \alpha_2, a, kM, J_2) + C_2(g_e, m, r_0, \alpha_2, a, kM, J_2) P_{20} + C_4(g_e, m, r_0, \alpha_2, \alpha_4, a, kM, J_2, J_4) P_{40}, \quad (1.42)$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{kM}{r_0} + \frac{g_e m}{3a} r_0^2 + O(f^2), \\ C_2 &= -\frac{kM}{r_0} \left[ \alpha_2 + J_2 \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \right] - \frac{g_e m}{3a} r_0^2 + O(f^2), \\ C_4 &= O(f^2). \end{aligned}$$

Если поверхность эллипсоида является эквипотенциальной, то потенциал  $U$  должен быть постоянным и равным  $U_0$ . Поэтому коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$  должны быть порознь равны нулю, что дает два уравнения, выражающие  $kM$ ,  $J_2$  и  $J_4$  через другие параметры. Третье уравнение получается из условия, что отрицательная величина радиальной производной от  $U$  должна быть равна ускорению силы тяжести  $g_e$  на экваторе. Таким образом,

$$-g_e = \frac{-kM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{8} J_4 \right) + g_e m. \quad (1.43)$$

Решая полученные таким образом три уравнения относительно  $kM$ ,  $J_2$  и  $J_4$ , получим

$$\begin{aligned} kM &= a^2 g_e \left[ 1 + \frac{3m}{2} + \frac{3\alpha_2}{2} + O(f^2) \right], \\ J_2 &= -\frac{m}{3} - \alpha_2 + O(f^2), \\ J_4 &= O(f^2). \end{aligned}$$

Чтобы выразить  $r_0$ ,  $\alpha_2$ , и  $\alpha_4$  в функции общепринятых параметров эллипсоида  $a$  и  $f$ , используем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (1.44)$$

Преобразуя при помощи (1.9) прямоугольные координаты в сферические, используя (1.36) для исключения  $b$ , решая полученное уравнение относительно  $r^2$  и применяя разложение в биномиальный ряд для  $r$ , получаем

$$r = a \left[ 1 - \left( f + \frac{3}{2} f^2 + \dots \right) \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} f^2 \sin^4 \varphi - \dots \right]. \quad (1.45)$$

Интегрируя (1.45) от 0 до 1 по переменной  $\sin \varphi$ , находим  $r_0$ :

$$r_0 = a \left[ 1 - \frac{f}{3} + O(f^2) \right],$$

а затем  $\alpha_2$  и  $\alpha_4$ :

$$\alpha_2 = -\frac{2f}{3} + O(f^2),$$

$$\alpha_4 = O(f^2).$$

Подстановка этих выражений в уравнения для  $kM$ ,  $J_2$  и  $J_4$  дает окончательное решение:

$$kM = a^2 g_e \left( 1 - f + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} mf + \dots \right), \quad (1.46)$$

$$J_2 = \frac{2}{3} f \left( 1 - \frac{1}{2} f \right) - \frac{1}{3} m \left( 1 - \frac{3}{2} m - \frac{2}{7} f \right) + \dots, \quad (1.47)$$

$$J_4 = -\frac{4}{35} f (7f - 5m) + \dots \quad (1.48)$$

Таким образом, в космической геодезии можно рассматривать гравитационное поле Земли как нормальный потенциал эллипсоида вращения (1.38) плюс небольшие отклонения, выражаемые суммой сферических гармоник (1.31).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Apostol T. M.*, Calculus, vol. II, Blaisdell Publ. Co., New York, 1962.
2. *Bomford G.*, Geodesy, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1962 (русский перевод: Г. Бомфорд, Геодезия, Геодезиздат, М., 1958).
3. *Heiskanen W. A., Vening-Meinesz F. A.*, The Earth and Its Gravity Field, McGraw-Hill Book Co., New York, 1958.
4. *Hobson E. W.*, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge Univ. Press, London, 1931.
5. *Jeffreys H.*, The Earth, Its Origin, History and Physical Constitution, 4th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1959 (русский перевод: Г. Джеффрис, Земля, ее происхождение, история и строение, ИЛ, М., 1960).
6. *Jung K.*, Figure der Erde, Handbuch der Physik, Bd. 47, 1956, S. 534—639.
7. *Kaula W. M.*, Determination of the Earth's Gravitational Field, Rev. Geophys., 1, 507—552 (1963).
8. *Kellogg O. D.*, Foundations of Potential Theory, Dover Publ., New York, 1953.



## МАТРИЦЫ И ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТЫ

---

### 2.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задачей настоящей главы является описание идеального случая, а именно равномерного вращения Земли в безвоздушном пространстве относительно инерциальной системы координат. Этот идеальный случай будет использован в гл. 3 при выборе системы координат для исследования динамики орбиты близкого спутника, а также в гл. 4 при описании искусственных спутников и изменений в системе координат. Прежде чем дать описание геометрии орбиты и некоторых методов анализа данных, рассмотренных в гл. 5 и 6, перечислим основные положения матричной алгебры.

### 2.2 ОБОЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦ

Вектор  $\mathbf{x}$ , или  $\{x_1, x_2, x_3\}^T$ , можно преобразовать в другой вектор  $\mathbf{y}$  с помощью линейного преобразования:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) можно сокращенно записать в виде

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

или

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}. \quad (2.3)$$

Прямоугольная таблица  $\mathbf{A}$  чисел  $a_{ij}$  называется матрицей. Матричная алгебра включает правила алгебраических действий с таблицами чисел, таких, как в преобразовании (2.1) или в более сжатой форме (2.3).

В данной работе нас будут интересовать преобразования одной системы координат в другую, а также составление и решение задач, исходя из обобщенного принципа наименьших квадратов. Основные правила матричной алгебры следующие.

Числа  $a_{ij}$ , входящие в матрицу, называются *элементами*.

В соответствии с принятым обозначением матриц первый индекс  $i$  означает строку, а второй индекс  $j$  — столбец. Например,

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Число строк  $m$  и число столбцов  $n$  называют размерами матрицы. Приведем некоторые типы матриц.

1. *Вектор*, или матрица-столбец, — матрица, которая имеет только один столбец. Векторы обозначаются строчными буквами, набранными жирным шрифтом, например:

$$\mathbf{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

2. *Квадратная* матрица имеет одинаковое число строк и столбцов.

3. *Ортогональная* матрица — квадратная матрица, определитель которой  $|a_{ij}| = \pm 1$ , а обратная матрица равна ее транспонированной матрице [см.(2.11) и (2.20)].

4. Матрица *вращения* — ортогональная матрица, определитель которой равен  $+1$ . Нас интересуют главным образом матрицы вращения размера  $3 \times 3$ .

Матрицы вращения обозначают  $\mathbf{R}_l(\theta)$ , если их элементы  $r_{lm}$  удовлетворяют следующим правилам:

$$\begin{aligned} j &\equiv i \pmod{3} + 1, & k &\equiv j \pmod{3} + 1, \\ r_{ii} &= 1, & r_{ij} &= r_{ji} = r_{ik} = r_{ki} = 0, \\ r_{jj} &= r_{kk} = +\cos \theta, & r_{jk} &= +\sin \theta, r_{kj} = -\sin \theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эти правила соответствуют правой системе координат и положительным углам поворота для вращения против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения по направлению к началу координат. Например,

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Матрицы вращения называют также матрицами направляющих косинусов.

5. *Диагональная* матрица — матрица, все элементы которой  $a_{ij}$  удовлетворяют условию

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (2.8)$$

6. *Единичная* матрица — диагональная матрица вращения, т. е. все  $a_{ii}$  равны 1. Единичную матрицу обычно обозначают  $\mathbf{I}$ .

7. *Нулевая* матрица — матрица, все элементы которой равны нулю. Нулевую матрицу обычно обозначают  $\mathbf{0}$ .

8. *Симметрическая* матрица — матрица, все элементы которой  $a_{ij}$  удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (2.9)$$

9. *Антисимметрическая*, или *кососимметрическая*, матрица — матрица, элементы которой  $a_{ij}$  удовлетворяют условию

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad (2.10)$$

Матрица  $\mathbf{B}$ , транспонированная по отношению к  $\mathbf{A}$ , есть матрица, элементы которой  $b_{ij}$  удовлетворяют условию

$$b_{ij} = a_{ji}. \quad (2.11)$$

Матрицу, транспонированную по отношению к  $\mathbf{A}$ , обычно обозначают через  $\mathbf{A}^T$ .

В матричной алгебре рассматриваются следующие действия над матрицами.

1. Сумма  $\mathbf{C}$  двух матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковых размеров есть матрица, элементы  $c_{ij}$  которой получены в соответствии с правилом

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (2.12)$$

Операция суммирования матриц обозначается так:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (2.13)$$

2. Разность  $\mathbf{D}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  определяется подобным же образом и обозначается как

$$\begin{aligned} d_{ij} &= a_{ij} - b_{ij}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. Произведение  $\mathbf{P}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть матрица, элементы  $p_{ik}$  которой удовлетворяют условию

$$p_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}. \quad (2.15)$$

Следовательно, число столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  должно быть равно числу строк матрицы  $\mathbf{B}$ . Произведение матриц обозначается

$$\mathbf{P} = \mathbf{AB}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.1)–(2.3) представляют собой произведение матриц, в котором  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{P}$  являются векторами. Умножение матриц удовлетворяет ассоциативному свойству

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad (2.17)$$

но, вообще говоря, не удовлетворяет коммутативному, т. е.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}; \quad (2.18)$$

кроме того,

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (2.19)$$

Если определитель  $|a_{ij}|$  квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля, то существует одна и только одна

матрица, называемая *обратной* матрицей  $\mathbf{A}$  и обозначаемая  $\mathbf{A}^{-1}$ , для которой

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2.20)$$

Элементы  $\mathbf{A}^{-1}$  можно представить в виде

$$a_{ji}^{-1} = \frac{K_{ij}}{|a_{ij}|}, \quad (2.21)$$

где  $K_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  в определителе  $|a_{ij}|$ , т. е. умноженный на  $(-1)^{i+j}$  минор, полученный из  $|a_{ij}|$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Дифференцирование и интегрирование матрицы производятся путем дифференцирования и интегрирования отдельно каждого элемента, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} & \frac{\partial a_{12}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial x} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x} & \frac{\partial a_{22}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial x} & \frac{\partial a_{m2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

и аналогично для интегрирования.

*Якобиан* — это матрица частных производных элементов одного вектора относительно частных производных элементов другого вектора; она имеет следующий вид:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (y_1, y_2, y_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Если элементы  $\mathbf{A}$  в (2.3) не являются функциями элементов  $\mathbf{x}$ , то  $\mathbf{A}$  — якобиан  $\mathbf{y}$  по отношению к  $\mathbf{x}$ .

Если в (2.3) определитель  $\mathbf{A}$  равен 1, тогда  $\mathbf{A}$  — матрица вращения и (2.3) выражает поворот осей координат.

### 2.3. ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТЫ

По причинам, которые будут ясны из гл. 3, целесообразно отнести положение спутника к прямоугольным координатам  $\mathbf{q}$ , связанным с эллипсом,

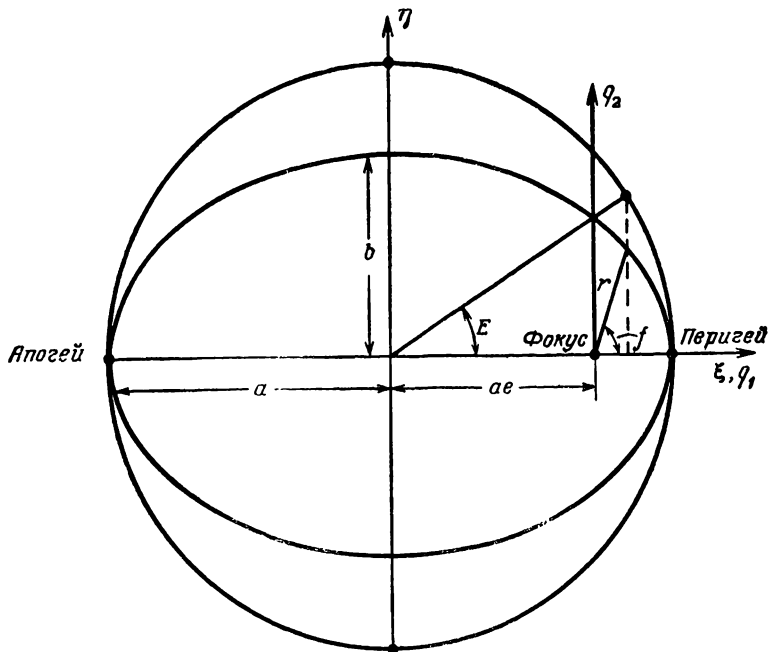
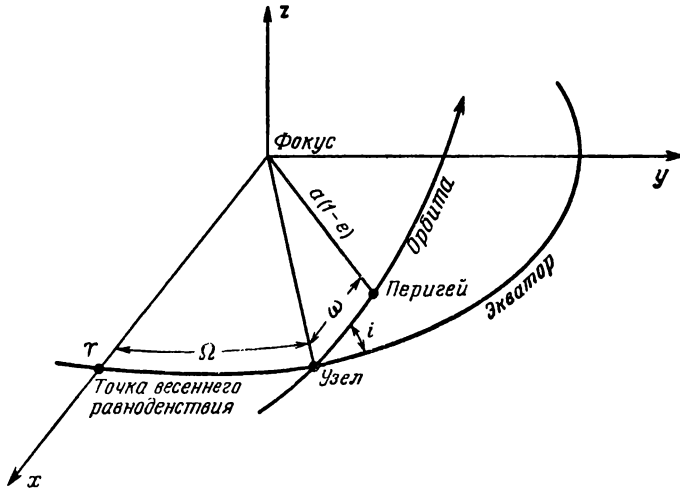


Рис. 2. Орбитальный эллипс.

который наклонен к плоскости экватора, как показано на рис. 2 и 3. Геодезистов интересуют координаты, фиксированные по отношению к поверхности Земли, поэтому необходимо связать их с координатами, к которым отнесен этот эллипс.

Пусть координаты, фиксированные по отношению к поверхности Земли, будут представлены системой прямоугольных координат  $\mathbf{u}$  с осью  $u_1$  (или  $u$ ), на-

правленной вдоль линии с широтой и долготой, равными  $0^\circ$ , осью  $u_2$  (или  $v$ ), направленной вдоль линии с широтой  $0^\circ$  и долготой  $90^\circ$  E, и осью  $u_3$  (или  $w$ ), направленной к Северному полюсу Земли. Связь



Р и с. 3. Ориентация орбиты.

устанавливается при помощи инерциальной системы координат  $x$  с осью  $x_1$ , направленной к точке весеннего равноденствия, точке, в которой орбита Солнца пересекает экватор; с осью  $x_2$ , расположенной в плоскости экватора на  $90^\circ$  восточнее оси  $x_1$ , и осью  $x_3$ , направленной к Северному полюсу. Угол между точкой весеннего равноденствия и гринвичским меридианом, имеющим долготу  $0^\circ$ , известен как гринвичское звездное время.

Следовательно, для Земли, равномерно вращающейся против часовой стрелки вокруг оси, неподвижной относительно инерциального пространства, переход от системы координат  $u$ , фиксированной по отношению к поверхности Земли, к инерциальной системе координат  $x$  будет простым поворотом по часовой стрелке вокруг оси  $w$  (или  $z$ ) на угол  $\theta$ ,

равный гринвичскому звездному времени. Следуя обозначению, принятому в (2.7), будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_3(-\theta) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}. \quad (2.24)$$

Выполнив умножение в (2.24), получим

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y &= u \sin \theta + v \cos \theta, \\ z &= w. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Используя другое обозначение для индексов в матрице вращения, обозначающих векторы, преобразованные поворотом, получаем

$$\mathbf{R}_{xu} = \mathbf{R}_3(-\theta) \quad (2.26)$$

и для обратного перехода

$$\mathbf{R}_{ux} = \mathbf{R}_3(\theta). \quad (2.27)$$

Для перехода от системы координат  $\mathbf{x}$  к системе координат  $\mathbf{q}$  с осью  $q_1$ , направленной в точку эллипса, ближайшую к началу координат (называемую перигеем), с осью  $q_2$ , лежащей в плоскости орбиты (как изображено на рис. 2), и осью  $q_3$ , направленной по нормали к плоскости орбиты, необходимо прежде всего выполнить поворот против часовой стрелки вокруг оси  $z$  (ось 3) от точки весеннего равноденствия до точки пересечения плоскости орбиты с экватором, называемой узлом (рис. 3). Это вращение обозначим

$$\mathbf{R}_3(\Omega). \quad (2.28)$$

Затем поворот против часовой стрелки вокруг оси  $x$  (ось 1) для перехода от плоскости экватора к плоскости орбиты определим как

$$\mathbf{R}_1(i) \mathbf{R}_3(\Omega). \quad (2.29)$$

И наконец, поворот против часовой стрелки вокруг оси 3 от узла к перигею будет равен

$$\mathbf{R}_{qx} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{R}_1(i) \mathbf{R}_3(\Omega), \quad (2.30)$$



где  $\Omega$ ,  $i$  и  $\omega$  тождественны углам Эйлера, связывающим оси координат  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{x}$ . Для обратного преобразования имеем

$$\mathbf{R}_{xq} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega). \quad (2.31)$$

Используя (2.6) и выполняя перемножение матриц, получим матрицу

$$\mathbf{R}_{xq} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega, & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega, & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega, & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega, & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

которая будет необходима в разд. 3.2. Для единичных векторов, направленных вдоль осей  $\mathbf{q}$ , положение которых по отношению к осям  $\mathbf{x}$  известно, часто используется другое обозначение, а именно через направляющие косинусы  $P$ ,  $Q$ ,  $W$ :

$$\mathbf{R}_{xq} = \{P, Q, W\}. \quad (2.33)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Brouwer D., Clemence G. M.*, Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York—London, 1961 (русский перевод: Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, изд-во «Мир», М., 1964).
2. *Frazer R. A., Duncan W. I., Collar A. R.*, Elementary Matrices, Cambridge Univ. Press, London, 1938.
3. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1950 (русский перевод: Г. Гольдштейн, Классическая механика, ГИТТЛ, М., 1957).
4. *Hawkins G. A.*, Multilinear Analysis for Students in Engineering and Science, John Wiley and Sons, New York, 1963.
5. *Kaula W. M.*, Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 5, № 2, 104—133 (1961) (русский перевод: У. М. Каула, Анализ орбит спутников для геодезических целей, в кн. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 135—143).
6. *Veis G.*, Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., 3, № 9, 95—161 (1960) (русский перевод: Г. Вейс, Геодезическое использование искусственных спутников Земли, изд-во «Недра», М., 1967).

## ДИНАМИКА ОРБИТЫ СПУТНИКА

---

### 3.1. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Предположим, что в соответствии с уравнением (1.2) точку с пренебрежимо малой массой притягивает другая точечная масса  $M$ . Предположим далее, что начало координат находится в точке  $M$ . Тогда, обозначив  $kM$  через  $\mu$ , уравнение (1.2) для ускорения точки можно представить в векторной форме:

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{kM\mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.1)$$

Это так называемые уравнения движения.

Из (3.1) следует, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и вектор ускорения  $\ddot{\mathbf{r}}$  коллинеарны. Если экваториальной плоскостью считать плоскость, определяемую радиусом-вектором и вектором скорости  $\dot{\mathbf{r}}$ , точка будет постоянно находиться в этой плоскости, поскольку отсутствует составляющая ускорения по нормали к экваториальной плоскости. Поэтому в уравнениях (1.9) преобразования прямоугольных координат в сферические можно приравнять нулю широту  $\varphi$  и ее производные по времени  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$ . Дважды дифференцируя (1.9) по времени, получим уравнение (3.1) в полярных координатах:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda, \\ y &= r \sin \lambda, \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \lambda - r\dot{\lambda} \sin \lambda, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \lambda + r\dot{\lambda} \cos \lambda, \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \lambda - 2\dot{r}\dot{\lambda} \sin \lambda - r\ddot{\lambda} \sin \lambda - r(\dot{\lambda})^2 \cos \lambda = - \frac{\mu \cos \lambda}{r^2},$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \lambda + 2\dot{r}\dot{\lambda} \cos \lambda + r\ddot{\lambda} \cos \lambda - r(\dot{\lambda})^2 \sin \lambda = - \frac{\mu \sin \lambda}{r^2}.$$

Начало отсчета долготы произвольно, так что  $\lambda$  также можно приравнять нулю (но не  $\dot{\lambda}$  или  $\ddot{\lambda}$ ). Тогда уравнения движения примут вид

$$\ddot{r} - r(\dot{\lambda})^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (3.2)$$

$$r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} = 0. \quad (3.3)$$

После умножения (3.3) на  $r$  становится очевидным, что уравнение тотчас же интегрируется, и получается

$$r^2\dot{\lambda} = h, \quad (3.4)$$

где  $h$  — постоянная величина. Уравнение (3.4) показывает, что момент количества движения  $r^2\dot{\lambda}$  сохраняется. Интегрируем (3.2), заменяя  $1/r$  на  $u$ . В этом случае

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}.$$

Из (3.4)

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{r^2}{h},$$

откуда

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{r^2}{h} = -\frac{\dot{r}}{h}.$$

Кроме того,

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\dot{r}}{h} \right) \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{\ddot{r}}{h} \frac{r^2}{h} = -\frac{\ddot{r}}{u^2 h^2}$$

или

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\lambda^2}. \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.2) выражение для  $\dot{\lambda}$  из (3.4) и  $\ddot{r}$  из (3.5), а также всюду заменяя  $r$  на  $1/u$ , получим

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) легко проинтегрировать:

$$\frac{1}{r} = u = A \cos(\lambda - \lambda_0) + \frac{\mu}{h^2}. \quad (3.7)$$

Если в уравнение эллипса (рис. 2), записанное в координатах с началом, расположенным в центре,

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (3.8)$$

подставить вместо  $\xi$ ,  $\eta$  и  $b^2$  соответственно  $ae + r \cos f$ ,  $r \sin f$  и  $a^2(1 - e^2)$ , а затем решить полученное квадратное уравнение относительно  $r$ , его положительным корнем будет

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos f)},$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e}{a(1 - e^2)} \cos f. \quad (3.9)$$

Из сравнения (3.7) и (3.9) видно, что (3.7) есть уравнение эллипса в координатах с началом, расположенным в фокусе, и что

$$\lambda - \lambda_0 = f, \quad (3.10)$$

$$A = \frac{e}{a(1 - e^2)}, \quad (3.11)$$

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (3.12)$$

Размеры и форму орбиты, по которой движется точка, можно определить большей полуосью эллипса  $a$  и эксцентриситетом  $e$ , а положение точки на эллипсе — истинной аномалией  $f$ . Положение точки в орбитальной плоскости можно установить также с помощью системы координат  $\mathbf{q}$ , описанной в разд. 2.3. и изображенной на рис. 2. Для полного определения положения точки необходимо знать три угла Эйлера, показанных на рис. 3 и названных в соотношениях (2.28)–(2.30) углами поворота: долгота узла  $\Omega$ , наклонение  $i$  и аргумент перигея  $\omega$ .

В некоторых случаях удобнее определять положение точки на эллипсе с помощью эксцентрической аномалии  $E$ . Как показано на рис. 2, эксцентрическая аномалия есть центральный угол, стягиваемый дугой касательной к эллипсу окружности радиуса  $a$  и образованный большей полуосью и радиусом, проведенным из точки окружности с координатой  $\xi$ , равной координате  $\xi$  точки на эллипсе.

В соответствии с рис. 2 получим

$$q_1 = \xi - ae = a(\cos E - e). \quad (3.13)$$

Затем, используя (3.8), найдем

$$q_2 = \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (3.14)$$

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = a(1 - e \cos E). \quad (3.15)$$

Для определения характера движения точки по ее орбите используем (3.4), заменив  $\lambda$  на  $f$ . Уравнение (3.4) проще интегрировать, если истинную аномалию заменить эксцентрической. Дифференцируя (3.9) по  $f$ , получим

$$\frac{dr}{df} = -\frac{r^2 d(1/r)}{df} = \frac{r^2 e}{a(1 - e^2)} \sin f.$$

Если, согласно рис. 2, вместо  $r \sin f$  подставить  $q_2$ , то

$$dr = \frac{req_2}{a(1 - e^2)} df. \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.15) и (3.14), получим

$$dr = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} q_2 dE. \quad (3.17)$$

Преобразуем (3.4), введя значения  $r$  из (3.15),  $h$  из (3.12) и исключив  $\lambda$  с помощью (3.16) и (3.17). Тогда

$$a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) dE = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} dt. \quad (3.18)$$

Интегрирование уравнения (3.18) дает

$$E - e \sin E = M, \quad (3.19)$$

где

$$M = n(t - t_0)$$

и

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}. \quad (3.20)$$

В этих выражениях  $t_0$  — момент прохождения перигея. Величина  $M$  — средняя аномалия, а  $n$  — среднее движение. Уравнение (3.19) называют уравнением Кеплера, а (3.20) есть выражение третьего закона Кеплера.

Отнесенный к единице массы момент количества движения  $h$ , величина которого определяется выражениями (3.4) или (3.12), можно представить также в виде векторного произведения радиуса-вектора и вектора скорости:

$$\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.21)$$

Инерциальные прямоугольные координаты можно выразить через кеплеровы элементы с помощью матрицы вращения  $\mathbf{R}_{xq}$ , определяемой выражением (2.32):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R}_{xq} \{\Omega, i, \omega\} \mathbf{q} \{a, e, M\}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}_{xq} \{\Omega, i, \omega\} \dot{\mathbf{q}} \{a, e, M\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где из (3.13), (3.14) и рис. 2

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

а из (3.13) — (3.18)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix} \frac{na}{1-e \cos E} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{bmatrix} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Используя (3.9), (3.20) и (3.24), получим для квадрата скорости  $v$ :

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 = \\ &= \frac{n^2 a^2}{(1-e^2)} (\sin^2 f + e^2 + 2e \cos f + \cos^2 f) = \\ &= \frac{\mu}{a(1-e^2)} [(2 + 2e \cos f) - (1 - e^2)] = \\ &= \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

Затем, соблюдая принятое в физике правило знаков, для полной энергии, отнесенной к единице массы, получим

$$T - V = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (3.25)$$

Чтобы выполнить обращение соотношений (3.22), т. е. чтобы перейти от прямоугольных координат к кеплеровым элементам, для определения долготы узла  $\Omega$  и наклона  $i$  можно использовать тот факт, что вектор  $\mathbf{h}$  из (3.21) перпендикулярен плоскости орбиты. Из рис. 3 следует, что

$$\Omega = \operatorname{arctg} \frac{h_1}{-h_2},$$

$$i = \operatorname{arctg} \frac{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}{h_3},$$

где  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  — компоненты  $\mathbf{h}$ . Пусть затем в орбитальной плоскости

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_1(i) \mathbf{R}_3(\Omega) \mathbf{x},$$

откуда

$$\omega + f = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1}.$$

Кроме того, необходимо иметь в виду, что

$$\dot{r} = \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{r};$$

из (3.25)

$$a = \frac{r\mu}{2\mu - rv^2};$$

из (3.12)

$$e = \left(1 - \frac{h^2}{\mu a}\right)^{1/2}.$$

Далее из (3.15), (3.17) и (3.18) получим

$$\cos E = \frac{a-r}{ae},$$

$$\sin E = \frac{r\dot{r}}{e(\mu a)^{1/2}},$$

и, наконец, из (3.23)

$$f = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}.$$

### 3.2. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Все сделанные в предыдущих разделах выводы применимы исключительно к движению в чисто центральном поле. В спутниковой геодезии нас интересуют по большей части аномалии гравитационного поля, проявляющиеся в отклонениях движения спутника от правильного, происходящего в центральном поле сил. Тогда уравнение (3.1) следует заметить на

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V,$$

где  $V$  имеет нецентральную структуру, как, например, в (1.31) или (1.38). Однако даже для такого нецентрального поля кеплеровский эллипс и его ориентацию можно рассматривать в качестве системы координат вместо прямоугольных или полярных координат, аналогично использованию геодезической широты, долготы и высоты для определения положения в системе координат, фиксированной по отношению к поверхности Земли. В любой момент времени положение спутника в геоцентрической инерциальной системе координат может быть определено прямоугольными составляющими векторов положения  $\{x, y, z\}$  и скорости  $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ . Вместо этих шести параметров можно использовать шесть элементов кеплеровского эллипса  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$ . Зависимость между обеими системами координат может быть установлена путем поворота системы координат, заданной в плоскости орбиты и связанной с точкой перигея, к инерциальной системе координат, связанной с центром Земли, как определено уравнениями (3.22).

Кеплеровский эллипс  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$ , соответствующий положению  $\mathbf{r}$  и скорости  $\dot{\mathbf{r}}$  точки в определенный момент времени, называют мгновенной, или оскулирующей, орбитой. Если потенциальное поле  $V$  отличается от центрального, этот эллипс будет непрерывно изменяться. Однако если поле отличается от центрального незначительно (что имеет место для Земли), следует ожидать, что параметры эл-



липса будут изменяться медленно и что эллипс, следовательно, может представлять систему координат, удобную для определения положения и скорости точки. Задача заключается в том, чтобы преобразовать уравнения из прямоугольных координат в координаты (или, как их чаще называют, элементы) кеплерова эллипса. Прежде всего перейдем от векторных обозначений к скалярным. Затем, рассматривая составляющие скорости и положения как переменные, заменим систему трех уравнений движения второй степени системой из шести уравнений первой степени. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt} x_i = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $x_i$ ,  $\dot{x}_i$  обозначают соответственно инерциальные прямоугольные составляющие положения и скорости. Скорости их изменения  $dx_i/dt$  и  $d\dot{x}_i/dt$  в (3.26) можно представить как функции скоростей изменения  $ds_k/dt$  шести кеплеровых элементов, где  $s_k$  — любой из элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $M$ ,  $\omega$  или  $\Omega$ . Следовательно,

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.27)$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.28)$$

где  $\partial x_i / \partial s_k$  получены дифференцированием (3.22) и (3.23), а  $\partial \dot{x}_i / \partial s_k$  — дифференцированием (3.22) и (3.24). В средних частях формул (3.27) и (3.28) введена условная запись, которая означает, что имеет место суммирование по повторяющимся в произведении индексам. Знак суммирования будет далее опущен. Для того чтобы закончить преобразование, поочередно для каждого элемента  $s_i$  1) умножим (3.27) на  $-\partial \dot{x}_i / \partial s_i$ ; 2) умножим (3.28) на  $\partial x_i / \partial s_i$  и 3)

сложим полученные уравнения. Получим

$$-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \dot{x}_i + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (3.29)$$

или

$$[s_l, s_k] \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s_l}, \quad (3.30)$$

если суммирование выполняется по  $k$ . Выражение

$$[s_l, s_k] = \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \quad (3.31)$$

называют скобками Лагранжа, а

$$F = V - T \quad (3.32)$$

— силовой функцией. В физике принято считать силовую функцию отрицательной и равной по модулю полной энергии.  $V$  — отрицательная величина, равная модулю потенциальной энергии, а  $T$  — соответственно кинетической. Поэтому, суммируя по  $i$ , находим

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i. \quad (3.33)$$

Описанный выше метод был впервые разработан Лагранжем. В небесной механике этот метод обычно используется для представления  $x_i$ ,  $\dot{x}_i$  в функции времени  $t$  и отнесения ряда кеплеровых элементов на момент  $t_0$ , называемый эпохой. В этом случае кинетическая энергия  $T$  и главный член  $\mu/r$  потенциала  $V$  не появляются в правых частях уравнений. Теперь возникают две основные задачи: 1) получение скобок Лагранжа  $[s_l, s_k]$  и 2) преобразование потенциала  $V$  как функции прямоугольных или полярных координат, например (1.31), в функцию кеплеровых элементов.

Выражение (3.31) показывает, что  $[s_l, s_k] = -[s_k, s_l]$  и  $[s_k, s_k] = 0$ ; существует пятнадцать различных скобок Лагранжа, определяемых с помощью дифференцирования (3.22). Свойством скобок Лагранжа, облегчающим их вычисление, является их инвариантность

по отношению к времени. Теперь можем написать

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} [s_l, s_k] &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_l \partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial s_l \partial t} - \\
 &\quad - \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial s_l \partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_k \partial t} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \right] - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[ \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \ddot{x}_i \right] - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[ \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \ddot{x}_i \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{\partial (\mu/r)}{\partial x_i} \right] - \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial (\mu/r)}{\partial x_i} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial s_l \partial s_k} - \frac{\partial^2 (\mu/r)}{\partial s_l \partial s_k} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial s_l \partial s_k} + \frac{\partial^2 (\mu/r)}{\partial s_l \partial s_k} = 0. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Тогда  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$ , появляющиеся в выражении (3.22) для  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$ , и их производные могут быть вычислены в любой удобной точке, например в перигее, где  $E=0$ . Вычисляя  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$  в перигее и используя (3.22) – (3.24) в (3.31), получим

$$\begin{aligned}
 \text{а) } [s_l, s_k] &= \left( \frac{\partial r_{i1}}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_k} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial r_{i1}}{\partial s_k} \right) na^2 \sqrt{1-e^2}, \\
 &\quad \text{если } s_l = \Omega, i \text{ или } \omega \text{ и если } s_k = \Omega, i \text{ или } \omega; \\
 \text{б) } [s_l, s_k] &= a(1-e) \frac{\partial r_{i1}}{\partial s_l} \left( r_{i1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_k} + r_{i2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} \right) - \\
 &\quad - \frac{\sqrt{1-e^2} na}{1-e} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_l} \left( r_{i1} \frac{\partial q_1}{\partial s_k} + r_{i2} \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \right), \quad (3.35) \\
 &\quad \text{если } s_l = \Omega, i \text{ или } \omega \text{ и } s_k = a, e, M;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } [s_l, s_k^1] = & r_{i1} r_{i1} \left( \frac{\partial q_1}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_k} - \frac{\partial q_1}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_l} \right) + \\
 & + r_{i1} r_{i2} \left( \frac{\partial q_1}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} - \frac{\partial q_1}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_l} \right) + \\
 & + r_{i2} r_{i1} \left( \frac{\partial q_2}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_k} - \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_l} \right) + \\
 & + r_{i2} r_{i2} \left( \frac{\partial q_2}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} - \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_l} \right),
 \end{aligned}$$

если  $s_l = a, e$  или  $M$  и  $s_k = a, e$  или  $M$ .

В (3.35)  $r_{i1}$  и  $r_{i2}$  являются элементами  $R_{xq}$  [см. (2.32)]. Например,  $[\Omega, i]$  в соответствии с (а) из (3.35) и (2.32) равно

$$\begin{aligned}
 [\Omega, i] = & \left( \frac{\partial r_{i1}}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial i} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial r_{i1}}{\partial i} \right) na^2 \sqrt{1-e^2} = \\
 = & [(-\sin \Omega \cos \omega - \cos \Omega \cos i \sin \omega) \sin \Omega \sin i \cos \omega - \\
 & - (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega) \cos \Omega \sin i \cos \omega - \\
 & - (\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \sin \Omega \sin i \sin \omega - \\
 & - (\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos i \cos \omega) \cos \Omega \sin i \sin \omega] na^2 \times \\
 & \times \sqrt{1-e^2} = -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Полный ряд отличных от нуля результатов таков:

$$\begin{aligned}
 [\Omega, i] = -[i, \Omega] = & -na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i, \\
 [\Omega, a] = -[a, \Omega] = & \frac{1}{2}(1-e^2)^{1/2} \cos i na, \\
 [\Omega, e] = -[e, \Omega] = & -\frac{na^2 e \cos i}{(1-e^2)^{1/2}}, \quad (3.37) \\
 [\omega, a] = -[a, \omega] = & \frac{1}{2}(1-e^2)^{1/2} na, \\
 [\omega, e] = -[e, \omega] = & -\frac{na^2 e}{(1-e)^{1/2}}, \\
 [a, M] = -[M, a] = & -\frac{na}{2}.
 \end{aligned}$$

Подстановка выражений (3.37) в (3.30) и решение системы из шести уравнений относительно  $ds_k/dt$

дают

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial F}{\partial \omega}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial F}{\partial e}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i}, \\
 \frac{dM}{dt} &= - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Обычно силовую функцию представляют в виде

$$F = \frac{\mu}{r} + R - T = \frac{\mu}{2a} + R \tag{3.39}$$

согласно (3.25). Функцию  $R$ , содержащую все члены  $V$ , кроме главного, называют возмущающей функцией. Следовательно, во всех уравнениях (3.38), кроме последнего,  $F$  можно заменить на  $R$ ; последнее уравнение, с учетом (3.20), примет вид

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}. \tag{3.40}$$

Симметрия и сходство скобок в (3.37) дают возможность предположить, что дальнейшие упрощения можно произвести изменением кеплеровых переменных. Попытаемся найти такую систему переменных  $L, G, H$ , чтобы

$$\begin{aligned}
 [M, L] &= 1, & [M, G] &= 0, & [M, H] &= 0, \\
 [\omega, L] &= 0, & [\omega, G] &= 1, & [\omega, H] &= 0, \\
 [\Omega, L] &= 0, & [\Omega, G] &= 0, & [\Omega, H] &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Единственная ненулевая скобка в (3.37), содержащая наклонение  $i$ , — это первая. Из (3.31) следует, что

$$[\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial i} = [\Omega, i] = -na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i, \quad (3.42)$$

откуда

$$H = na^2(1-e^2)^{1/2} \cos i. \quad (3.43)$$

Для контроля найдем (помня, что  $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ )

$$[\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial e} = [\Omega, e], \quad [\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial a} = [\Omega, a]. \quad (3.44)$$

Аналогично из  $[\omega, G] \partial G / \partial e$  и  $[M, L] \partial L / \partial a$  имеем

$$G = na^2(1-e^2)^{1/2} \quad (3.45)$$

и

$$L = na^2 = \mu^{1/2} a^{1/2}. \quad (3.46)$$

Таким образом, получаем следующие более простые уравнения Делоне:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial M}, & \frac{dM}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \omega}, & \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \Omega}, & \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

При использовании переменных Делоне обозначения  $M, \omega, \Omega$  обычно заменяются обозначениями  $l, g, h$  [введенные здесь  $h$  не следует смешивать с  $h$ , определенным уравнениями (3.4) и (3.12)].

### 3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Чтобы преобразовать потенциал, выраженный через сферические функции (1.31), к кеплеровым элементам, используем некоторые тригонометрические

тождества, а именно:

$$\begin{aligned} \cos mx &= \operatorname{Re} \exp(mjx) = \operatorname{Re} (\cos x + j \sin x)^m = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \cos^{m-s} x \sin^s x, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где  $\operatorname{Re}$  обозначает действительную часть,  $j = \sqrt{-1}$ , а  $\binom{m}{s}$  — биномиальный коэффициент:

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \sin mx &= \operatorname{Re} [-j \exp(mjx)] = \operatorname{Re} [-j (\cos x + j \sin x)^m] = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^{s-1} \cos^{m-s} x \sin^s x, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \sin^a x \cos^b x &= \left[ -\frac{j}{2} (e^{jx} - e^{-jx}) \right]^a \left[ \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \right]^b = \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^a} \sum_{c=0}^a \binom{a}{c} e^{(a-c)jx} (-1)^c e^{-c jx} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2^b} \sum_{d=0}^b \binom{b}{d} \cdot e^{(b-d)jx} e^{-d jx} = \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^{a+b}} \sum_{c=0}^a \sum_{d=0}^b \binom{a}{c} \binom{b}{d} e^{(a+b-2c-2d)jx} (-1)^c = \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^{a+b}} \sum_{c=0}^a \sum_{d=0}^b \binom{a}{c} \binom{b}{d} (-1)^c [\cos(a+b-2c-2d)x + \\ &\quad + j \sin(a+b-2c-2d)x], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b), \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b),$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} \sin(a+b) - \frac{1}{2} \sin(a-b).$$

Пусть, далее, произвольный член из (1.31) равен

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda). \quad (3.53)$$

Чтобы сделать  $C_{lm}$  и  $S_{lm}$  безразмерными, вынесем множитель  $\mu a_e^l$ , где  $a_e$  — экваториальный радиус

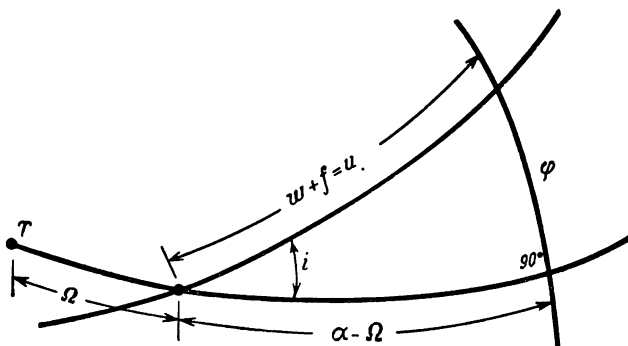


Рис. 4. Треугольник, образованный орбитой, экватором и меридианом.

Земли, за скобки. Затем вместо  $m\lambda$  подставим  $[m(\alpha - \Omega) + m(\Omega - \theta)]$ , где  $\alpha$  — прямое восхождение, а  $\theta$  — гринвичское звездное время. Тогда

$$\begin{aligned} \cos m\lambda &= \cos m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - \theta) - \\ &\quad - \sin m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - \theta), \\ \sin m\lambda &= \sin m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - \theta) + \\ &\quad + \cos m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - \theta). \end{aligned} \quad (3.54)$$

В сферическом треугольнике, образованном орбитой, экватором и меридианом спутника (рис. 4), имеем

$$\begin{aligned} \cos(\omega + f) &= \cos(\alpha - \Omega) \cos \varphi + \sin(\alpha - \Omega) \sin \varphi \cos \frac{\pi}{2}, \\ \cos \varphi &= \cos(\omega + f) \cos(\alpha - \Omega) + \sin(\omega + f) \sin(\alpha - \Omega) \cos i, \end{aligned}$$



откуда

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \Omega) &= \frac{\cos(\omega + f)}{\cos \varphi}, \\ \sin(\alpha - \Omega) &= \frac{\sin(\omega + f) \cos i}{\cos \varphi},\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + f). \quad (3.56)$$

Используя (3.48) и (3.50) для замены функций  $(\alpha - \Omega)$  в (3.54) и подставляя в него (3.55), получим

$$\begin{aligned}\cos m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \frac{\cos^{m-s}(\omega + f) \sin^s(\omega + f) \cos^s i}{\cos^m \varphi} \times \\ &\quad \times [\cos m(\Omega - \theta) + j \sin m(\Omega - \theta)], \\ \sin m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \frac{\cos^{m-s}(\omega + f) \sin^s(\omega + f) \cos^s i}{\cos^m \varphi} \times \\ &\quad \times [\sin m(\Omega - \theta) - j \cos m(\Omega - \theta)].\end{aligned}\quad (3.57)$$

Если в выражение (1.30), являющееся определением  $P_{lm}$ , вместо  $\sin \varphi$  подставить (3.56), а затем подставить (1.30) и (3.57) в (3.53), сокращая  $\cos^m \varphi$ , то получим

$$\begin{aligned}V_{lm} &= \frac{\mu a^l e}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \sin^{l-m-2t} i \operatorname{Re} [(C_{lm} - jS_{lm}) \times \\ &\quad \times \cos m(\Omega - \theta) + (S_{lm} + jC_{lm}) \sin m(\Omega - \theta)] \times \\ &\quad \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \sin^{l-m-2t+s}(\omega + f) \cos^{m-s}(\omega + f) \cos^s i,\end{aligned}\quad (3.58)$$

где  $k$  — целая часть  $(l - m)/2$ .

Из (3.58) с помощью (3.51) при  $a = l - m - 2t + s$  и  $b = m - s$  получим

$$\begin{aligned}
 V_{lm} = & \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \sin^{l-m-2t} i \operatorname{Re} [(C_{lm} - jS_{lm}) \cos m(\Omega - \theta) + \\
 & + (S_{lm} + jC_{lm}) \sin m(\Omega - \theta)] \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \cos^s i \frac{[-j]^{l-m-2t+s}}{2^{l-2t}} \times \\
 & \times \sum_{c=0}^{l-m-2t+s} \sum_{d=0}^{m-s} \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{d} (-1)^c \times \\
 & \times [\cos(l-2t-2c-2d)(\omega+f) + \\
 & \quad + j \sin(l-2t-2c-2d)(\omega+f)]. \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Преобразовывая с помощью (3.52) произведение тригонометрических функций  $(\Omega - \theta)$  и  $(\omega + f)$  в (3.59) и опуская члены с нечетными степенями коэффициента  $j$  (поскольку при действительном  $V_{lm}$  такие члены сокращаются), имеем

$$\begin{aligned}
 V_{lm} = & \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \sin^{l-m-2t} i (-1)^{k+t} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{\cos^s i}{2^{l-2t}} \times \\
 & \times \sum_{c=0}^{l-m-2t+s} \sum_{d=0}^{m-s} \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{d} (-1)^c \times \\
 & \times \left\{ \left[ \begin{array}{l} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{array} \right]_{l-m}^{l-m \text{ чет}} \cos [(l-2t-2c-2d)(\omega+f) + m(\Omega - \theta)] + \right. \\
 & \left. + \left[ \begin{array}{l} S_{lm} \\ C_{lm} \end{array} \right]_{l-m}^{l-m \text{ чет}} \sin [(l-2t-2c-2d)(\omega+f) + m(\Omega - \theta)] \right\}. \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

Желательно далее преобразовать (3.60) таким образом, чтобы члены с одним и тем же аргументом  $[(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega - \theta)]$  были сгруппированы вместе. Подстановка  $p$  вместо  $(t+c+d)$  в свою очередь приводит к исключению одного индекса из произведения. Наиболее удобной представляется подстановка  $p-t-c$  вместо  $d$ . Пределы суммирования по  $d$  устанавливают ограничения на возможные значения  $c$ ,

которые следует брать такими, чтобы биномиальные коэффициенты не были равны нулю. Кроме того, необходимо, чтобы  $t \leq p$ . Тогда выражение для  $V_{lm}$  примет вид

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r l^{-1}} \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \times \\ \times \left\{ \left[ \begin{array}{c} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{array} \right]_{l-m}^{l-m \text{ чет}} \cos [(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] + \right. \\ \left. + \left[ \begin{array}{c} S_{lm} \\ C_{lm} \end{array} \right]_{l-m}^{l-m \text{ чет}} \sin [(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] \right\}, \quad (3.61)$$

где в результате подстановки (1.29) имеем

$$F_{lmp}(i) = \sum_t \frac{(2l-2t)!}{t!(l-t)!(l-m-2t)! 2^{2l-2t}} \sin^{l-m-2t} i \times \\ \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}. \quad (3.62)$$

Здесь  $k$  — целая часть  $(l-m)/2$ ,  $t$  изменяется от 0 до  $p$  или  $k$  (в зависимости от того, что меньше), а суммирование выполняется по всем значениям  $c$ , при которых биномиальные коэффициенты отличны от нуля. Формула вида (3.62) пригодна только для расчетов на вычислительной машине. При вычислениях вручную удобнее пользоваться таблицей; выражения для  $F_{lmp}(i)$  до  $lmp = 444$  приведены в табл. 1.

Для получения возмущающей функции, соответствующей (3.38), необходимо выполнить окончательное преобразование, которое состоит в замене  $r$  и  $f$  в (3.61) на  $a$ ,  $M$  и  $e$ :

$$\frac{1}{r^{l+1}} \left[ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right] [(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] = \\ = \frac{1}{a^{l+1}} \sum_q G_{lpq}(e) \times \\ \times \left[ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right] [(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\theta)].$$

Таблица 1

Функция наклонения  $F_{lmp}(i)$  [уравнение (3.62)]

$l$	$m$	$p$	$F_{lmp}(i)$
2	0	0	$-3 \sin^2 i/8$
2	0	1	$3 \sin^2 i/4 - 1/2$
2	0	2	$-3 \sin^2 i/8$
2	1	0	$3 \sin i (1 + \cos i)/4$
2	1	1	$-3 \sin i \cos i/2$
2	1	2	$-3 \sin i (1 - \cos i)/4$
2	2	0	$3 (1 + \cos i)^2/4$
2	2	1	$3 \sin^2 i/2$
2	2	2	$3 (1 - \cos i)^2/4$
3	0	0	$-5 \sin^3 i/16$
3	0	1	$15 \sin^3 i/16 - 3 \sin i/4$
3	0	2	$-15 \sin^3 i/16 + 3 \sin i/4$
3	0	3	$5 \sin^3 i/16$
3	1	0	$-15 \sin^2 i (1 + \cos i)/16$
3	1	1	$15 \sin^2 i (1 + 3 \cos i)/16 - 3 (1 + \cos i)/4$
3	1	2	$15 \sin^2 i (1 - 3 \cos i)/16 - 3 (1 - \cos i)/4$
3	1	3	$-15 \sin^2 i (1 - \cos i)/16$
3	2	0	$15 \sin i (1 + \cos i)^2/8$
3	2	1	$15 \sin i (1 - 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	2	$-15 \sin i (1 + 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	3	$-15 \sin i (1 - \cos i)^2/8$
3	3	0	$15 (1 + \cos i)^3/8$
3	3	1	$45 (1 + \cos i) \sin^2 i/8$
3	3	2	$45 \sin^2 i (1 - \cos i)/8$
3	3	3	$15 (1 - \cos i)^3/8$
4	0	0	$35 \sin^4 i/128$
4	0	1	$-35 \sin^4 i/32 + 15 \sin^2 i/16$
4	0	2	$(105/64) \sin^4 i - (15/8) \sin^2 i + 3/8$
4	0	3	$-(35/32) \sin^4 i + (15/16) \sin^2 i$
4	0	4	$(35/128) \sin^4 i$
4	1	0	$-(35/32) \sin^3 i (1 + \cos i)$
4	1	1	$(35/16) \sin^3 i (1 + 2 \cos i) - (15/8) (1 + \cos i) \sin i$
4	1	2	$\cos i (15 \sin i/4 - 105 \sin^3 i/16)$
4	1	3	$-(35/16) \sin^3 i (1 - 2 \cos i) + (15/8) \sin i (1 - \cos i)$
4	1	4	$(35/32) \sin^3 i (1 - \cos i)$
4	2	0	$-(105/32) \sin i (1 + \cos i)^2$
4	2	1	$(105/8) \sin^2 i \cos i (1 + \cos i) - (15/8) (1 + \cos i)^2$
4	2	2	$(105/16) \sin^2 i (1 - 3 \cos^2 i) + (15/4) \sin^2 i$
4	2	3	$-(105/8) \sin^2 i \cos i (1 - \cos i) - (15/8) (1 - \cos i)^2$
4	2	4	$-(105/32) \sin^2 i (1 - \cos i)^2$
4	3	0	$(105/16) \sin i (1 + \cos i)^3$
4	3	1	$(105/8) \sin i (1 - 3 \cos^2 i - 2 \cos^3 i)$

Продолжение

$l$	$m$	$p$	$F_{lmp}^{(l)}$
4	3	2	$-(315/8) \sin^3 i \cos i$
4	3	3	$-(105/8) \sin i (1 - 3 \cos^2 i + 2 \cos^3 i)$
4	3	4	$-(105/16) \sin i (1 - \cos i)^3$
4	4	0	$(105/16) (1 + \cos i)^4$
4	4	1	$(105/4) \sin^2 i (1 + \cos i)^2$
4	4	2	$(315/8) \sin^4 i$
4	4	3	$(105/4) \sin^2 i (1 - \cos i)^2$
4	4	4	$(105/16) (1 - \cos i)^4$

Чтобы получить долгопериодические члены (члены, в которых отсутствует  $M$ ), можно усреднить (3.61) относительно  $M$ , т. е. проинтегрировать (3.61) по  $M$  от 0 до  $2\pi$ , а затем разделить на  $2\pi$ . Тогда из (3.4), (3.12) и (3.20) найдем

$$dM = \frac{r^2 df}{a^2 (1 - e^2)^{1/2}}, \quad (3.63)$$

а из (3.9)

$$\frac{r^2}{r^{l+1}} = \left[ \frac{(1 + e \cos f)}{a(1 - e^2)} \right]^{l-1}. \quad (3.64)$$

Разлагая  $(1 + e \cos f)^{l-1}$  в биномиальный ряд, используя (3.51), (3.52) и опуская члены, содержащие мнимую часть, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{l+1}} \left[ \frac{\cos}{\sin} \right] [(l - 2p)(\omega + f) + m(\Omega - \theta)] dM = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^{l+1} (1 - e^2)^{l-1/2}} \sum_{b=0}^{l-1} \binom{l-1}{b} \left(\frac{e}{2}\right)^b \sum_{d=0}^b \binom{b}{d} \frac{1}{2} \times \\ & \times \left\{ \left[ \frac{\cos}{\sin} \right] [(l - 2p)\omega + (l + b - 2p - 2d)f + m(\Omega - \theta)] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\cos}{\sin} \right] [(l - 2p)\omega + (l - b - 2p + 2d)f + m(\Omega - \theta)] \right\} df = \\ & = \frac{1}{a^{l+1}} G_{lp(2p-l)}(e) \left[ \frac{\cos}{\sin} \right] [(l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta)]. \quad (3.65) \end{aligned}$$

Здесь

$$G_{lp(2p-l)}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{l-1/2}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{l-1}{2d+l-2p'} \times \\ \times \binom{2d+l-2p'}{d} \left(\frac{e}{2}\right)^{2d+l-2p'}, \quad (3.66)$$

где

$$p' = p \quad \text{для } p \leq \frac{l}{2}, \\ p' = l - p \quad \text{для } p \geq \frac{l}{2}.$$

Множитель  $1/2$ , участвующий в суммировании по  $d$  в (3.65), исчезает, так как два члена, удовлетворяющие условию долгопериодической вариации, при котором  $(l-2p) \pm (b-2d) = 0$ , представляют собой симметрично расположенные коэффициенты разложения в биномиальный ряд, а следовательно, их можно комбинировать, подставляя вместо  $b$  в (3.66)  $(2d+l-2p')$ .

Для короткопериодических членов  $l-2p+q \neq 0$  разложение  $G_{lpq}(e)$  гораздо сложнее; мы приведем здесь лишь результат одного из решений [14, стр. 256]:

$$G_{lpq}(e) = (-1)^{|q|} (1+\beta^2)^l \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{lpqk} Q_{lpqk} \beta^{2k}, \quad (3.67)$$

где

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}; \\ P_{lpqk} = \sum_{r=0}^h \binom{2p'-2l}{h-r} \frac{(-1)^r}{r!} \left( \frac{(l-2p'+q')e}{2\beta} \right)^r, \quad (3.68)$$

$$h = k + q', \quad q' > 0; \quad h = k, \quad q' < 0,$$

и

$$Q_{lpqk} = \sum_{r=0}^h \binom{-2p'}{h-r} \frac{1}{r!} \left( \frac{(l-2p'+q')e}{2\beta} \right)^r, \quad (3.69)$$

$$h = k, \quad q' > 0; \quad h = k - q', \quad q' < 0; \\ p' = p, \quad q' = q \quad \text{для } p \leq l/2; \\ p' = l - p, \quad q' = -q \quad \text{для } p > l/2.$$

Выражения для  $G_{lpq}(e)$  до  $lpq = 442$  приведены в табл. 2, составленной на основе более подробных таблиц Кейли [4].

Таблица 2

Функция эксцентриситета  $G_{lpq}(e)$   
из уравнений (3.66)–(3.69) или таблиц Кейли [4]

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$G_{lpq}(e)$
2	0	-2	2	2	2	0
2	0	-1	2	2	1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$
2	0	0	2	2	0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$
2	0	1	2	2	-1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$
2	0	2	2	2	-2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$
2	1	-2	2	1	2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$
2	1	-1	2	1	1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$
			2	1	0	$(1 - e^2)^{-3/2}$
3	0	-2	3	3	2	$e^2/8 + e^4/48 + \dots$
3	0	-1	3	3	1	$-e + 5e^3/4 + \dots$
3	0	0	3	3	0	$1 - 6e^2 + 423e^4/64 + \dots$
3	0	1	3	3	-1	$5e - 22e^3 + \dots$
3	0	2	3	3	-2	$127e^2/8 - 3065e^4/48 + \dots$
3	1	-2	3	2	2	$11e^2/8 + 49e^4/16 + \dots$
3	1	-1	3	2	1	$e(1 - e^2)^{-5/2}$
3	1	0	3	2	0	$1 + 2e^2 + 239e^4/64 + \dots$
3	1	1	3	2	-1	$3e + 11e^3/4 + \dots$
3	1	2	3	2	-2	$53e^2/8 + 39e^4/16 + \dots$
4	0	-2	4	4	2	$e^2/2 - e^4/3 + \dots$
4	0	-1	4	4	1	$-3e/2 + 75e^3/16 + \dots$
4	0	0	4	4	0	$1 - 11e^2 + 199e^4/8 + \dots$
4	0	1	4	4	-1	$13e/2 - 765e^3/16 + \dots$
4	0	2	4	4	-2	$51e^2/2 - 321e^4/2 + \dots$
4	1	-2	4	3	2	$(3e^2/4)(1 - e^2)^{-7/2}$
4	1	-1	4	3	1	$e/2 + 33e^2/16 + \dots$
4	1	0	4	3	0	$1 + e^2 + 65e^4/16 + \dots$
4	1	1	4	3	-1	$9e/2 - 3e^3/16 + \dots$
4	1	2	4	3	-2	$53e^2/4 - 179e^4/24 + \dots$
4	2	-2	4	2	2	$5e^2 + 155e^4/12 + \dots$
4	2	-1	4	2	1	$5e/2 + 135e^3/16 + \dots$
			4	2	0	$(1 + 3e^2/2)(1 - e^2)^{-7/2}$

Окончательный результат преобразования  $V_{lm}$ , заданного в сферических координатах (3.53), в орбитальные координаты можно представить в

следующем виде:

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \theta), \quad (3.70)$$

где

$$S_{lmpq} = \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{bmatrix}_{l-m}^{\substack{\text{чет} \\ \text{нечет}}} \times \\ \times \cos [(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)] + \\ + \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix}_{l-m}^{\substack{\text{чет} \\ \text{нечет}}} \sin [(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)]. \quad (3.71)$$

### 3.4. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Как рассматривалось в гл. 1, главным членом в разложении гравитационного потенциала, определяющим в основном возмущающую функцию  $R$ , является  $V_{20}$ , поскольку  $C_{20}$  (или  $-J_2$ ) по меньшей мере в 100 раз больше любого другого  $C_{lm}$ . Следовательно,

$$V_{20} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \sum_{pq} F_{20p}(i) G_{2pq}(e) \cos [(2-2p)\omega + (2-2p+q)M]. \quad (3.72)$$

Исходя из предположения, что коэффициенты в  $V_{20}$  имеют приблизительно одинаковую величину, следует ожидать, что члены в (3.72), которые не содержат  $M - (2-2p+q) = 0$ , будут оказывать значительно большее влияние после интегрирования, нежели члены, содержащие  $M$ , поскольку полный цикл последних равен относительно короткому интервалу времени, за который спутник делает полный оборот. Предел суммирования в (3.66) показывает, что членов с индексами  $(p, q)$ , равными  $(0, -2)$  и  $(2, 2)$ , не существует, поэтому единственный член  $V_{20}$ , в котором отсутствует  $M$ , это

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 F_{201}(i) G_{210}(e). \quad (3.73)$$



Вычисляя  $F_{201}$  с помощью (3.62),  $G_{210}$  с помощью (3.66) и подставляя вместо  $F$  в уравнения Лагранжа (3.38)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2a} + V_{2010}, \text{ получим} \\ \frac{da}{dt} = 0, \\ \frac{de}{dt} = 0, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu C_{20} a_e^2}{n(1-e^2)^{1/2} a^5} \left[ -\operatorname{ctg} i \frac{\partial F_{201}}{\partial i} G_{210} + \frac{(1-e^2)}{e} F_{201} \frac{\partial G_{210}}{\partial e} \right] = \\ = \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^2 a^2} [1 - 5 \cos^2 i], \\ \frac{di}{dt} = 0, \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mu C_{20} a_e^2 G_{210}}{n(1-e^2)^{1/2} a^5 \sin i} \cdot \frac{\partial F_{201}}{\partial i} = \frac{3n C_{20} a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i, \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{\mu C_{20} a_e^2 F_{201}}{n a^5} \left[ -\frac{1-e^2}{e} \cdot \frac{\partial G_{210}}{\partial e} + 6G_{210} \right] = \\ = n - \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3 \cos^2 i - 1). \end{aligned} \tag{3.74}$$

При  $C_{20}$ , равном примерно  $-0,0010827$ , и наиболее характерных параметрах орбиты геодезического спутника ( $e = 0,01$  и  $a = 1,12a_e$ ) приведенные формулы дают

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &\approx + 3,55 (5 \cos^2 i - 1) \text{ град/сутки}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &\approx - 6,70 \cos i \text{ град/сутки}, \\ \frac{dM}{dt} &\approx 14,37 + 0,0093 (3 \cos^2 i - 1) \text{ об/сутки}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Наблюдения показывают, что вековые движения, определяемые (3.75), являются основным возмущением орбит спутников, используемых в геодезических целях. Эти спутники достаточно высоки для того, чтобы на них не оказывало чрезмерного воздействия атмосферное сопротивление, но в то же время они довольно низки, так что их движение подвергается

достаточным возмущениям, вызванным вариациями гравитационного поля Земли. Следовательно, чтобы изучить влияние некоторой возмущающей функции  $R$  (например, члена  $V_{lm}$  в разложении потенциала), интегрирование уравнений движения (3.38) в первом приближении можно выполнить при таком условии. Предположим, что в правых частях уравнений учитываются лишь такие вариации элементов по времени, которые являются вековыми скоростями  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{M}$ , плюс любые другие скорости изменения, не связанные с орбитой (например, скорость вращения Земли  $\dot{\theta}$ ). При этом предположении интегрирование (3.38) с одним членом из (3.70) (а именно  $V_{lmpq}$ ) в качестве возмущающей функции даст

$$\begin{aligned} \Delta a_{lmpq} &= \mu \alpha_e^l \frac{2F_{lmp} G_{l\rho q} (l-2p+q) S_{lmpq}}{na^{l+2} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \\ \Delta e_{lmpq} &= \\ &= \mu \alpha_e^l \frac{F_{lmp} G_{l\rho q} (1-e^2)^{1/2} [(1-e^2)^{1/2} (l-2p+q) - (l-2p)] S_{lmpq}}{na^{l+3} e [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \\ \Delta \omega_{lmpq} &= \mu \alpha_e^l \times \\ &\times \frac{\left[ (1-e^2)^{1/2} e^{-1} F_{lmp} (\partial G_{l\rho q} / \partial e) - \operatorname{ctg} i (1-e^2)^{-1/2} \left( \frac{\partial F_{lmp}}{\partial i} \right) G_{l\rho q} \right] \bar{S}_{lmpq}}{na^{l+3} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \\ \Delta i_{lmpq} &= \\ &= \mu \alpha_e^l \frac{F_{lmp} G_{l\rho q} [(l-2p) \cos i - m] S_{lmpq}}{na^{l+3} (1-e^2)^{1/2} \sin i [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \\ \Delta \Omega_{lmpq} &= \\ &= \mu \alpha_e^l \frac{(\partial F_{lmp} / \partial i) G_{l\rho q} \bar{S}_{lmpq}}{na^{l+3} (1-e^2)^{1/2} \sin i [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \\ \Delta M_{lmpq} &= \mu \alpha_e^l \frac{[-(1-e^2) e^{-1} (\partial G_{l\rho q} / \partial e) + 2(l+1) G_{l\rho q}] F_{lmp} \bar{S}_{lmpq}}{na^{l+3} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где  $\bar{S}_{lmpq}$  — интеграл от  $S_{lmpq}$ .

Характерными примерами возмущений, полученными из (3.76) с использованием (3.62), (3.66) и (3.71), являются:

1) долгопериодические возмущения эксцентриситета, вызываемые  $C_{30}$  („грушевидность“):

$$\begin{aligned} \Delta e_{301(-1)} + \Delta e_{3021} &= -\frac{\mu a_e^3 (1-e^2)^{1/2}}{na^6 e \dot{\omega}} \sum_{p=1}^2 F_{30p} G_{3p(2p-3)} S_{30p(2p-3)} = \\ &= \frac{3\mu a_e^3 C_{30} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right)}{2na^6 (1-e^2)^2 \dot{\omega}} \sin \omega; \end{aligned} \quad (3.77)$$

2) возмущения средней аномалии с полусуточным периодом, вызываемые  $C_{22}$  и  $S_{22}$  („эллиптичность экватора“):

$$\begin{aligned} \Delta M_{2210} &= \frac{[-(1-e^2)e^{-1}(\partial G_{210}/\partial e) + 6G_{210}]\mu a_e^2 F_{221}\bar{S}_{2210}}{na^5(\dot{\Omega} - \dot{\theta})} = \\ &= \frac{9\mu a_e^2 \sin^2 i}{4na^5(1-e^2)^{3/2}(\dot{\Omega} - \dot{\theta})} [-C_{22} \sin 2(\Omega - \theta) + S_{22} \cos 2(\Omega - \theta)]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

### 3.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Поскольку  $C_{20}$  приблизительно в 1000 раз превосходит большинство других коэффициентов  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  разложения гравитационного поля, следует ожидать, что при решении задач, связанных с движением близкого спутника, кроме линейных возмущений от  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  в соответствии с (3.76), необходимо учитывать также нелинейные возмущения от  $C_{20}$  до членов порядка  $(C_{20})^2$ . Иными словами, в правой части уравнений движения (3.38) следует принять во внимание линейные возмущения элементов, вызванные  $C_{20}$ . Если задача решается путем численного интегрирования (3.38) с соответствующим шагом (или, как в данном случае, путем численного интегрирования уравнений (3.26) в прямоугольных координатах), влияния более высокого порядка будут

учитываться автоматически. Например, если записать уравнения (3.38) в виде

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i [s_j, t] \equiv \dot{s}_i \{a, e, i, M, \omega, \Omega, t\},$$

где  $s_i$  — обозначение любого кеплерова элемента, интегрирование по времени с шагом  $\Delta t$  можно произвести с помощью стандартного метода Рунге — Кутты

$$\begin{aligned} \omega_i &= \dot{s}_i [s_j(t), t] \Delta t, \\ x_i &= \dot{s}_i \left[ s_j(t) + \frac{\omega_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \Delta t, \\ y_i &= \dot{s}_i \left[ s_j(t) + \frac{x_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \Delta t, \\ z_i &= \dot{s}_i [s_j(t) + y_j, t + \Delta t] \Delta t, \\ s_i(t + \Delta t) &= s_i(t) + \frac{\omega_i}{6} + \frac{x_i}{3} + \frac{y_i}{3} + \frac{z_i}{6}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Превосходный обзор методов численного интегрирования, используемых в вычислениях орбит спутников, сделан Контом [5]. Однако для достижения большего соответствия с дальнейшим применим аналитический метод интегрирования уравнений (3.38). Итак,

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i(s_0) + \frac{\partial \dot{s}_i}{\partial s_j} \Delta_1 s_j = \frac{d}{dt} (\Delta_1 s_i) + \frac{d}{dt} (\Delta_2 s_i),$$

где  $s_i$  — обозначение любого кеплерова элемента.

После вычитания из решения в первом приближении  $d(\Delta_1 s_i)/dt$  получим

$$\frac{d}{dt} (\Delta_2 s_i) = \frac{\partial \dot{s}_i}{\partial s_j} \Delta_1 s_j, \quad (3.80)$$

где  $\Delta_1 s_j$  найдено с помощью (3.76). Однако применение этого метода непосредственно к уравнению (3.80) потребовало бы громоздких алгебраических преобразований. Затруднительным было бы даже вычисление наиболее важного возмущения второго порядка, обусловленного влиянием  $(C_{20})^2$  на вековое движение, из-за необходимости учитывать взаимодействие между

всеми периодическими членами. Поэтому для вековой части  $\Delta_2 s_i$  имеем

$$\Delta_2 \dot{s}_i = \left( \frac{\partial \dot{s}_{i20pq}}{\partial s_j} \Delta_1 s_{i20pq} - \text{Периодические члены} \right), \quad (3.81)$$

где суммирование выполняется по  $j$ ,  $p$  и  $q$ . Чтобы использовать (3.81) для вычисления  $\Delta_2 \{\dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M}\}$  с точностью до  $e^{2k}$ , необходимо вычислить  $10 \times 3 \times 2k$  членов, подставив (3.72) в (3.38), для того чтобы получить  $\dot{s}_{i20pq}$  и  $\Delta_1 s_{i20pq}$ . Затем (учитывая, что  $V_{20}$  не является функцией  $\Omega$ ) для получения  $\partial \dot{s}_{i20pq} / \partial s_j$  необходимо выполнить дифференцирование  $5 \times 6 \times 2k \times 3$  раз и, наконец, следует произвести такое же число умножений.

Вычисления можно несколько упростить, если представить  $V_{20}$  в замкнутой форме (3.61), вычисляя  $F_{20p}(i)$  с помощью (3.62) —

$$V_{20} = C_{20} \frac{\mu}{r} \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 \left[ \left( \frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{4} \sin^2 i \cos 2(\omega + f) \right], \quad (3.82)$$

используя частные производные эллиптического движения, полученные из (3.9) — (3.19), и в самую последнюю очередь производя усреднение по времени. Этот метод был использован при разработках ряда теорий. Однако стремление достичь более удовлетворительных результатов в изучении задач близкого спутника, т. е. добиться более ясного понимания, более точного, более эффективного решения, заставляет обратиться к значительно более раннему этапу, чем уравнения Лагранжа (3.38). В некоторых наилучших решениях потенциал был выражен в виде разложения в ряд по эллипсоидальным гармоническим функциям; в других решениях с целью получить формульную запись, удобную для выполнения численного приближения, были использованы элементы, существенно отличающиеся от кеплеровых.

Решение, которое будет приведено, получено из уравнений Делоне (3.47). Чтобы упростить уравнения, заменим  $L$ ,  $G$ ,  $H$  обозначениями  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,

а  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  — обозначениями  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  (не смешивать с вектором  $\mathbf{q}$  в плоскости орбиты). Тогда уравнение (3.47) запишется в следующем виде:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (3.83)$$

Поскольку из (3.83)

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} = 0, \quad (3.84)$$

имеем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.85)$$

В случае возмущающего потенциала (3.70) производная  $\partial F/\partial t$  в явном виде имеет смысл

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (3.86)$$

Таким образом, производная  $\partial F/\partial t$  является чисто периодической. Следовательно, если известно решение для движения, представленного каноническими переменными  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  с постоянной силовой функцией  $F'$ , близкой к  $F$ , решение для  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  может быть найдено в виде решения для  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  плюс разложение разностей  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{q} - \mathbf{q}')$  в ряд Тейлора. Можно произвести одно за другим несколько подобных преобразований; в самом общем виде последовательность таких преобразований для близкого спутника будет следующей:

$$\begin{aligned} F(L, G, H, l, g, h, t) &\rightarrow F'(L', G', H', -, g', h', -) \rightarrow \\ &\rightarrow F''(L'', G'', H'', -, -, h'', -) \rightarrow \\ &\rightarrow F'''(L''', G''', H''', -, -, -, -). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Последнее преобразование, очевидно, можно выполнить в виде

$$\begin{aligned} p_i''' &= \text{const}_i, \\ q_i''' &= q_{i0}''' + \text{const}_i(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.88)$$

В случае возмущающего потенциала  $V_{20}$ , определяемого выражениями (3.72) или (3.82), последнее

преобразование в (3.87) излишне, поскольку потенциал не содержит долготы узла  $h$ .

Тот факт, что движения  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  и  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  получены по одним лишь скалярам  $F$  и  $F'$  соответственно, дает возможность предположить, что преобразование рядов Тейлора можно также представить как функции только скалярных величин. Начнем с двух скалярных величин

$$\begin{aligned}x &= \sum_i p_i \dot{q}_i + F, \\y' &= - \sum_i \dot{p}'_i q'_i + F'.\end{aligned}\tag{3.89}$$

Докажем, что между фиксированными точками  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$  вариации интегралов  $x$  и  $y'$  при небольших изменениях  $(\delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{q})$  траектории движения будут равны нулю. Таким образом, имеем выражения

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i + F \right) dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( - \sum_i \dot{p}'_i q'_i + F' \right) dt &= 0,\end{aligned}\tag{3.90}$$

представляющие собой формулировку принципа Гамильтона.

Поскольку переменная  $x$  есть функция  $p_i$ ,  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ , первый из интегралов можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial x}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial x}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt.\tag{3.91}$$

Из (3.83) и (3.89) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0,\tag{3.92}$$

что исключает первый член подинтегрального выражения в (3.91). Для второго члена, согласно (3.89), имеем

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}.\tag{3.93}$$

В третьем члене заменим  $\delta\dot{q}_i$  на  $d(\delta q_i)/dt$  и выполним интегрирование по частям. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \left( \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (3.94)$$

Первый член этого выражения обращается в нуль, так как вариации  $\delta q_i$  в конечных точках равны нулю. Из (3.89) следует, что  $\partial x / \partial \dot{q}_i = p_i$ ; поэтому, используя (3.93) и (3.94) для преобразования подынтегрального выражения в (3.90), получим выражение

$$\left( \frac{\partial F}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) \delta q_i = 0, \quad (3.95)$$

которое равно нулю согласно (3.83). Аналогичные преобразования проделаем для второго равенства (3.90).

Принцип Гамильтона (3.90) показывает, что неопределенные интегралы являются непрерывными функциями, и их разность можно представить как функцию только  $S$ . Таким образом, подынтегральные выражения отличаются самое большее на величину полной производной  $S$  по времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt} dt = S(t_2) - S(t_1). \quad (3.96)$$

$S$  есть функция как переменных  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , так и  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ ; однако если  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  необходимо представить через  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  плюс разложение соответствующих разностей в ряды Тейлора, только половина из двенадцати переменных  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}')$  являются независимыми и  $S$  можно выразить как функцию двух любых из четырех групп переменных. Чаще всего используют выражение

$$S = S(\mathbf{q}, \mathbf{p}'). \quad (3.97)$$

Затем из (3.90), (3.96) и (3.97), суммируя по повторяющимся индексам, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial p'_i} \dot{p}'_i + \frac{\partial S}{\partial t} = p_i \dot{q}_i + F + \dot{p}'_i q'_i - F'. \quad (3.98)$$



Поскольку  $q_i$  и  $p'_i$  независимы, для обоих значений  $dS/dt$  в (3.98) коэффициенты  $\dot{q}_i$  и  $\dot{p}'_i$  соответственно должны быть равны. Таким образом,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i}, \quad (3.99)$$

откуда следует

$$F' = F - \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.100)$$

$S$  называется определяющей или производящей функцией, а ее использование в преобразовании  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  в соответствии с (3.87) известно как метод Цейпеля. При использовании этого метода  $S$ ,  $F'$  и  $F$  разлагают в ряды в соответствии с величиной рассматриваемых членов. Поэтому

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots, \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} F'_0(\mathbf{p}') + F'_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}') + F'_2(\mathbf{p}', \mathbf{q}') + \dots = \\ = F_0(\mathbf{p}) + F_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + F_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \dots - \int \frac{\partial F}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (3.102)$$

$S_0$  должна иметь такой вид, чтобы в случае невозмущенного движения соблюдались равенства  $p_i = p'_i$ ,  $q_i = q'_i$ , т. е. чтобы

$$S_0 = q_i p'_i. \quad (3.103)$$

Подставляя (3.103) в (3.101), дифференцируя (3.101) по  $q_i$ ,  $p'_i$ , а затем подставляя результат в (3.99), получаем

$$\begin{aligned} p_i &= p'_i + \frac{\partial S_1}{\partial q_i} + \frac{\partial S_2}{\partial q_i} + \dots, \\ q_i &= q'_i - \frac{\partial S_1}{\partial p'_i} - \frac{\partial S_2}{\partial p'_i} - \dots \end{aligned} \quad (3.104)$$

Раскладывая  $F$  в (3.100) в ряд Тейлора по  $(p_i - p'_i)$  и  $(q_i - q'_i)$  и подставляя значения для  $(p_i - p'_i)$  и

$(q_i - q'_i)$  из (3.104), получаем

$$F - \frac{\partial S}{\partial t} = F_0(\mathbf{p}') + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\partial F_0}{\partial p'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial q_i} + F_1(\mathbf{p}', \mathbf{q}') - \frac{\partial S_1}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial F_0}{\partial p'_i} \frac{\partial S_2}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial p'_i \partial p'_j} \left( \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial S_1}{\partial q_j} \right) + \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial p'_i} \frac{\partial S_1}{\partial q_i} + F_2(\mathbf{p}', \mathbf{q}') - \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} &F'_0, \\ &+ F'_1, \\ &+ F'_2, \\ &+ \frac{\partial F'_1}{\partial q'_i} \frac{\partial S_1}{\partial p'_i}. \end{aligned} \right. \quad (3.105)$$

Затем приравняем члены одинакового порядка в  $F$  и  $F'$ . Эти уравнения определяют члены в  $S$ , поскольку  $F'$ , как правило, содержит на одну переменную меньше  $F$ , и, следовательно, любые члены в  $F$ , зависящие от этой пропущенной переменной, должны быть вычислены с помощью  $S$ .

В задаче, представляющей интерес для геодезии, будем иметь, используя (3.39) и (3.46),

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu^2}{2L^2}, \\ F_1 &= V_{20}, \\ F_2 &= V_{lm \neq 00, 20}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Рассмотрим задачу, в которой  $V_{20}$  представлено уравнением (3.72), а  $F_2 = 0$ . Тогда из первой строки (3.105)

$$F'_0 = \frac{\mu^2}{2L'^2}. \quad (3.107)$$

Из второй строки (3.105) выберем  $F'_1$  для того, чтобы устранить все члены, не являющиеся функциями  $M$  или  $q_1$ . Тем самым

$$F'_1 = \frac{\mu C_{20}}{a'} \left( \frac{a_e}{a'} \right)^2 F_{201}(i') G_{210}(e') = V'_{2010}, \quad (3.108)$$

поскольку из (3.66)  $G_{20(-2)}$  и  $G_{222}$  равны нулю. В таком случае оставшийся член во второй строке можно

использовать в решении для  $\partial S_1/\partial q_1$ , поскольку  $F_0$  [из (3.106)] является функцией только  $p_1$ :

$$\frac{\partial S_1}{\partial M} = \frac{\partial S_1}{\partial q_1} = \frac{L^3}{\mu^2} \frac{\mu C_{20}}{a'} \left(\frac{a_e}{a'}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{pq \neq 10} F'_{20p} G'_{2pq} \cos [(2-2p)\omega + (2-2p+q)M] \quad (3.109)$$

и

$$S_1 = \frac{L^3}{\mu^2} \frac{\mu C_{20}}{a'} \left(\frac{a_e}{a'}\right)^2 \sum_{pq \neq 10} \frac{F'_{20p} G'_{2pq}}{2-2p+q} \sin [(2-2p)\omega +$$

$$+ (2-2p+q)M]. \quad (3.110)$$

Производные от функции  $S_1$  используются далее в (3.104) для получения короткопериодических возмущений в элементах, которые будут соответствовать элементам, представленным выражениями (3.76). При выводе производных по  $L'$ ,  $G'$  и  $H'$  удобно использовать частные производные кеплеровых элементов по элементам Делоне. Из них отличны от нуля

$$\frac{\partial a}{\partial L} = \frac{2L}{\mu},$$

$$\frac{\partial e}{\partial L} = \frac{G^2}{L^3 e}, \quad \frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{G}{L^2 e}, \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial i}{\partial G} = \frac{H}{G^2 \sin i}, \quad \frac{\partial i}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin i}.$$

При переходе к третьей и четвертой строкам (3.105) нас интересуют главным образом члены в левой части, содержащие  $(\partial S_1/\partial q_1)^2$  и  $(\partial F_1/\partial p_i) \cdot (\partial S_1/\partial q_i)$ , которые не имеют периодического множителя, поскольку каждый из членов, содержащих косинус в  $F_1$  и  $\partial S/\partial q_i$ , умножается на самого себя. В результате появляются вековые члены движения  $M$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  в  $F'_2$ , зависящие от  $C_{20}^2$ .

В следующем преобразовании от  $F'$  к  $F''$  исключаются члены, содержащие аргумент перигея  $\omega'$ . В этом преобразовании из двух первых строк (3.105) следует, что  $F''_0$  и  $F''_1$  соответственно равны  $F'_0$  и  $F'_1$  из-за отсутствия периодических членов. Поскольку  $S'$  не содержит  $M$ , оба члена третьей строки равны

нулю; в четвертой строке имеются два ненулевых члена:

$$\frac{\partial F'_1}{\partial G''} \cdot \frac{\partial S'_1}{\partial \omega'} + F'_2 = F''_2. \quad (3.112)$$

Из (3.83)  $\partial F'_1 / \partial G'' = \dot{\omega}$  и в соответствии с (3.74) содержит множитель  $(1 - 5 \cos^2 i)$ . Следовательно, в выражении для  $\partial S'_1 / \partial \omega'$  мы получим множитель  $(1 - 5 \cos^2 i)^{-1}$ , и решение становится неопределенным в случае наклона, примерно равного  $\arccos \sqrt{1/5}$ . Этот случай следует рассматривать как резонанс.

Подробное изложение применения метода Цейпеля в виде, представленном формулами (3.106), дано Брауэром [2], а также Брауэром и Клеменсом [3]. Окончательные вековые и долгопериодические возмущения с учетом членов порядка  $J_2^2$  имеют вид

$$\begin{aligned} M' &= M''_0 + n_0 t \left\{ 1 + \frac{3}{2} \gamma'_2 \eta (-1 + 3\theta^2) + \right. \\ &\quad + \frac{3}{32} \gamma'^2_2 \eta [-15 + 16\eta + 25\eta^2 + (30 - 96\eta - 90\eta^2) \theta^2 + \\ &\quad + (105 + 144\eta + 25\eta^2) \theta^4] \left. + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \gamma'_2 \eta^3 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \sin 2\omega'' \right\}, \\ \omega' &= \omega''_0 + n_0 t \left\{ \frac{3}{2} \gamma'_2 (-1 + 5\theta^2) + \frac{3}{32} \gamma'^2_2 [-35 + 24\eta + \right. \\ &\quad + 25\eta^2 + (90 - 192\eta - 126\eta^2) \theta^2 + (385 + 360\eta + 45\eta^2) \theta^4] \left. \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{16} \gamma'_2 [(2 + e''^2) - 11(2 + 3e''^2) \theta^2 - \\ &\quad - 40(2 + 5e''^2) \theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} - 40e''^2 \theta^6 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega'', \\ &\quad (3.113) \\ \Omega' &= \Omega''_0 + n_0 t \left\{ -3\gamma'_2 \theta + \frac{3}{8} \gamma'^2_2 [(-5 + 12\eta + 9\eta^2) \theta + \right. \\ &\quad + (-35 - 36\eta - 5\eta^2) \theta^3] \left. \right\} - \frac{1}{8} \gamma'_2 e''^2 \theta [11 + 80\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + \\ &\quad + 200\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega'', \\ e' &= e'' + \frac{1}{8} \gamma'_2 e'' \eta^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2\omega'', \\ i' &= i'' - \frac{1}{8} \gamma'_2 e''^2 \operatorname{ctg} i'' [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2\omega'', \end{aligned}$$

где  $\eta = (1 - e''^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \cos i''$ ,  $\gamma_2' = a_e^2 J_2 / (2a''^2 \eta^4)$  и  $n_0 = \mu^{1/2} a''^{-3/2}$ . Постоянными интегрирования в теории Брауэра являются средние элементы, а именно постоянные составляющие  $a''$ ,  $e''$ ,  $i''$  и изменяющиеся вековым образом составляющие  $M_0''$ ,  $\omega_0''$ ,  $\Omega_0''$  в эпоху соответственно (3.88).

Кроме членов с  $J_2^2$  существуют и могут оказаться значительными члены второго порядка двух других видов.

1. Если принимаются во внимание короткопериодические возмущения в средней аномалии  $M$ , следует учесть также и возмущения в  $M$ , являющиеся результатом изменений в среднем движении  $n$ , вызванных возмущениями большой полуоси. Из (3.80) следует, что

$$\Delta_2 M = \int \frac{\partial n}{\partial a} \Delta_1 a dt. \quad (3.114)$$

Используя (3.76) для  $\Delta_1 a$  и подставляя  $-3n/2a$  вместо  $\partial n / \partial a$ , получим

$$\Delta_2 M_{lmpq} = - \frac{3\mu a_e^l F_{lmp} G_{lpq} \bar{S}_{lmpq} (l - 2p + q)}{a^{l+3} [(l - 2p) \dot{\omega} + (l - 2p + q) \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]^2}. \quad (3.115)$$

2. При  $l$  нечетном и  $m = 0$  взаимодействия между периодическими возмущениями  $\Delta_1 e_{lp(2p-1)}$ ,  $\Delta_1 i_{lp(2p-1)}$  и вековыми движениями  $\dot{\Omega}_{2010}$  и  $\dot{\omega}_{2010}$  могут оказывать значительное влияние на периодические возмущения  $\Delta \Omega_{lp(2p-1)}$ ,  $\Delta \omega_{lp(2p-1)}$  и  $\Delta M_{lp(2p-1)}$ . Используя снова (3.80) и обозначив индекс  $lp(2p-1)$  через  $r$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Omega_r &= \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial e} \int \Delta_1 e_r dt + \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial i} \int \Delta_1 i_r dt = \\ &= \frac{3C_{20n}}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{4e \cos i}{(1-e^2)} \int \Delta_1 e_r dt - \sin i \int \Delta_1 i_r dt\right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

При выводе (3.116) были использованы уравнения (3.74). Подобные выражения могут быть получены также для  $\Delta_2 \omega_r$  и  $\Delta_2 M_r$ .

## 3.6. РЕЗОНАНС

Методы, изложенные в настоящей главе, не касались двух классов орбит:

1) орбит, эксцентриситет которых  $e$  или наклонение  $i$  так близки к нулю, что долгота узла  $\Omega$ , аргумент перигея  $\omega$  или средняя аномалия  $M$  становятся неопределенными и имеют настолько большие возмущения, что вычисление положения и скорости становится невозможным;

2) орбит, для которых скорости вековых изменений аргументов в некоторых членах возмущающей функции (3.70) могут быть настолько близки к нулю, что их периодические возмущения становятся преобладающими. Это случай резонанса, при котором вместо векового движения возникает либрация:

$$(l - 2p) \dot{\omega} + (l - 2p + q) \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \approx 0. \quad (3.117)$$

Трудности, характерные для первого класса орбит и связанные с эксцентриситетом или наклоном, близким к нулю, до некоторой степени кажущиеся, поскольку они не обусловлены каким-либо физическим явлением, а есть следствие выбора координат, и могут быть устранены переходом к другим элементам. При переходе к канонической системе элементов  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , например к элементам Делоне (3.43), (3.45) и (3.46), используют два вида преобразований для двух любых пар индексов:

$$\begin{aligned} p'_i &= p_i, & q'_i &= q_i \pm q_j, \\ p'_j &= p_j \mp p_i, & q'_j &= q_j, \end{aligned} \quad (3.118)$$

и для любого  $i$

$$p'_i = \sqrt{2p_i} \cos q_i, \quad q'_i = \sqrt{2p_i} \sin q_i.$$

Подобные преобразования можно применить к любой паре или последовательно к двум парам индексов.

Трудности, характерные для второго класса орбит, вполне реальны; здесь имеет место фактически существующее изменение в поведении орбиты. Наиболее подробно уже был рассмотрен случай „критического

наклонения“  $\arccos \sqrt{1/5}$ , при котором, как указывалось в связи с (3.112),

$$\dot{\omega} \approx 0. \quad (3.119)$$

Этот случай представляет наибольший интерес, во-первых, потому, что он действительно проявляется при реализации проектов спутников связи, а во-вторых, потому, что позволяет получить информацию о гравитационном поле; он имеет место при

$$\dot{\omega} + \dot{M} + \dot{\Omega} - \dot{\theta} \approx 0. \quad (3.120)$$

Спутник со средней вековой скоростью (3.120) будет входить в резонанс с любой сферической гармоникой  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , которая приводит к появлению членов с интегралом, содержащим в качестве аргумента множитель, кратный  $(\omega + M + \Omega - \theta)$ . Приближенные расчеты, в которых  $n$  заменяется на  $\theta$  и используется закон Кеплера (3.20), показали, что большая полуось для случая (3.20) составляет около 6,6 радиуса Земли. Поэтому из-за присутствия члена  $(a_e/a)^l$  в возмущающей функции (3.70) преобладающее влияние будут оказывать те члены, для которых  $l$  мало, в частности  $S_{22}$  и  $S_{22}$ .

Чтобы в возмущающей функции (3.70) получить под интегралом в качестве аргумента величину, кратную  $(\omega + M + \Omega - \theta)$ , нужно, чтобы  $(l - 2p) = m$ . Поэтому  $l - m$  должно быть четным, а  $p = (l - m)/2$ . Величина  $q$  при этом должна быть равна нулю. Пусть

$$Q_{lm} = \frac{\mu}{a} \sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2} \left[ \frac{a_e}{a} \right]^l F_{lm, (l-m)/2}(i) G_{l, (l-m)/2, 0}(e) \quad (3.121)$$

и

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{m} \arctg \left( \frac{S_{lm}}{C_{lm}} \right). \quad (3.122)$$

На основании (3.70) возмущающую функцию для случая резонанса можно записать в виде

$$R = \sum_{(l-m) \text{ чет}} Q_{lm} \cos m (\omega + M + \Omega - \lambda_{lm} - \theta). \quad (3.123)$$

Поскольку в эту возмущающую функцию входит средняя аномалия  $M$ , в соответствии с первым из уравнений движения (3.38) будет иметь место возмущение большой полуоси

$$\dot{a} = -\frac{2}{na} \sum_{(l-m) \text{ чет}} m Q_{lm} \sin m(\omega + M + \Omega - \lambda_{lm} - \theta). \quad (3.124)$$

Это возмущение в свою очередь вызывает ускорение в долготе спутника относительно Земли. Пусть

$$\lambda_A = \omega + M + \Omega - \theta, \quad (3.125)$$

где индекс  $A$  введен для того, чтобы показать, что это астрономическая долгота в орбите, а не обычная геодезическая долгота, отсчитываемая по экватору. Используя третий закон Кеплера (3.20), получим

$$\ddot{\lambda}_A = \ddot{M} = \frac{\partial n}{\partial a} \dot{a} = \frac{3}{a^2} \sum_{(l-m) \text{ чет}} m Q_{lm} \sin m(\lambda_A - \lambda_{lm}). \quad (3.126)$$

Двойное интегрирование (3.126) методом, подобным тому, который был применен при получении (3.115), приведет к большому значению  $\Delta\lambda_A$ , так как появляется малый делитель  $(n - \theta)^2$ . Кроме того, появятся члены с делителем  $(n - \theta)$ , полученные при использовании возмущающей функции (3.123) для интегрирования уравнений движения (3.38) таким же способом, как это делалось при получении (3.76). Однако как (3.76), так и (3.115) получены в предположении, что в первом приближении орбита представляет собой эллипс, имеющий вековую прецессию. Подобные приближения вблизи резонанса обычно теряют силу, в связи с чем уравнение (3.126) нужно рассматривать особо.

Умножая (3.126) на  $2\dot{\lambda}_A$ , в качестве нулевого интеграла с постоянной интегрирования  $K$  получим

$$(\dot{\lambda}_A)^2 = K - \frac{6}{a^2} \sum_{(l-m) \text{ чет}} Q_{lm} \cos m(\lambda_A - \lambda_{lm}). \quad (3.127)$$



Определим постоянную интегрирования  $K$  как комбинацию начальной долготы  $\lambda_{A0}$  и скорости  $\dot{\lambda}_{A0}$ :

$$K = (\dot{\lambda}_{A0})^2 + \frac{6}{a^2} \sum_{(l-m) \text{ чет}} Q_{lm} \cos m (\lambda_{A0} - \lambda_{lm}). \quad (3.128)$$

Поскольку  $(\dot{\lambda}_A)^2$  должно быть положительным, из (3.127) имеем условие

$$K \geq \frac{6}{a^2} \sum_{(l-m) \text{ чет}} Q_{lm} \cos m (\lambda_A - \lambda_{lm}). \quad (3.129)$$

Если постоянная интегрирования  $K$  достаточно мала, условие (3.129) будет препятствовать изменению долготы  $\lambda_A$  по полному циклу — от 0 до  $2\pi$ . Если  $\lambda_{A0}$  в (3.128) таково, что делает основной член  $Q_{22} \cos 2(\lambda_{A0} - \lambda_{22})$  близким к  $-Q_{22}$ , иными словами, если  $\lambda_{A0}$  близко к  $\lambda_{22} = \pm \pi/2$  (долгота малой оси экваториального эллипса), то малые значения  $K$  наиболее правдоподобны. Относя долготы к этой малой оси с помощью подстановки

$$\psi = \lambda_A - \lambda_{22} - \frac{\pi}{2} \quad (3.130)$$

и принимая во внимание только члены из (3.127) с  $lm = 22$ , получим

$$(\dot{\psi})^2 = K + \frac{6}{a^2} Q_{22} \cos 2\psi = K + \frac{6}{a^2} Q_{22} [1 - 2 \sin^2 \psi]. \quad (3.131)$$

Максимальное отклонение  $\psi_m$  от малой оси, таким образом, будет соответствовать нулевому значению  $(\dot{\psi})^2$ :

$$\sin \psi_m = \left[ \frac{Ka^2}{12Q_{22}} + \frac{1}{2} \right]^{1/2}. \quad (3.132)$$

Из (3.131) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \left[ K + \frac{6Q_{22}}{a^2} - \frac{12Q_{22}}{a^2} \sin^2 \psi \right]^{1/2} = \\ &= \left[ \frac{12Q_{22}}{a^2} (\sin^2 \psi_m - \sin^2 \psi) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

В связи с тем, что

$$k^2 = \frac{1}{\sin^2 \psi_m}, \quad (3.134)$$

переноса  $dt$  в правую, а функции от  $\psi$  в левую часть уравнения и интегрируя (3.133), получим

$$t = \frac{ak}{(12Q_{22})^{1/2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{[1 - k^2 \sin^2 \psi]^{1/2}} = \frac{ak}{(12Q_{22})^{1/2}} F(k, \psi). \quad (3.135)$$

Здесь  $F$  — эллиптический интеграл первого рода, который для случаев, когда  $k < 1$ , подробно рассмотрен, например, в руководстве Хенкока [7]. Применительно к данной задаче и в интересующих нас случаях, которые содержат либрацию,  $k > 1$ . Чтобы вычислить результирующий интеграл, используем преобразование

$$F(k, \psi) = \frac{1}{k} F\left[\frac{1}{k}, \arcsin(k \sin \psi)\right]. \quad (3.136)$$

Следовательно, полный цикл эллиптического интеграла  $F$  в (3.135) составляет  $(4/k) F(1/k, \pi/2)$ , а время полного периода

$$T = \frac{2a}{(3Q_{22})^{1/2}} F\left(\frac{1}{k}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.137)$$

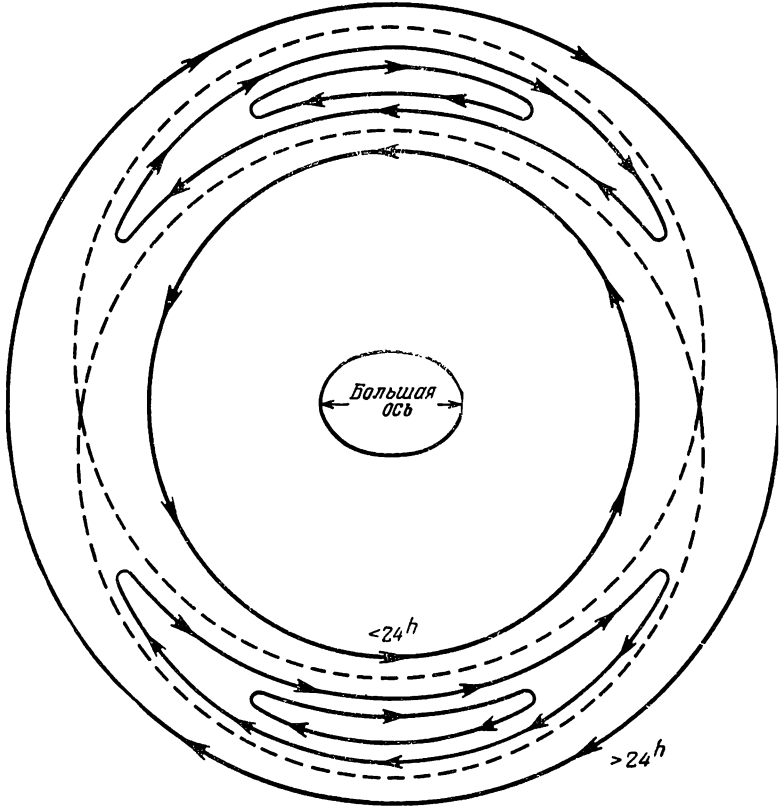
Если  $k > 1$ , а начальная долгота  $\lambda_0$  достаточно близка к стабильному значению  $\lambda_{22} \pm \pi/2$ , то  $\sin \psi$  должен меняться в пределах  $\pm(1/k)$ , и спутник, таким образом, будет либрировать относительно минимальной долготы  $\lambda_{22} + \pi/2$ . Если  $k < 1$  или если начальная долгота  $\lambda_0$  находится вне пределов либрации,  $\psi$  может принимать любое значение, т. е. спутник будет испытывать смещение на протяжении всего пути вокруг Земли. Считая, что в зоне возможного резонанса среднее движение спутника  $n$  должно быть больше, чем скорость вращения Земли  $\theta$ , и меньше ее за пределами этой зоны, можно схематически представить области либрации в системе отсчета, связанной с Землей, как показано на рис. 5.

Исследование резонанса можно также выполнить методом, подобным примененному в уравнениях (3.83) — (3.105), т. е. методом Цейпеля. Чтобы исключить появление времени в явном виде через угол  $\theta$

в возмущающей функции (3.123), можно ввести третью угловую переменную  $q_3$ , равную

$$h = \Omega - \theta. \quad (3.138)$$

Затем с целью использования уравнений движения (3.83) к силовой функции  $F$  необходимо прибавить  $\theta H$ .



Р и с. 5. Схематическое изображение орбит с периодом, близким к 24 час, в системе отсчета, связанной с Землей.

Принимая во внимание в возмущающей функции (3.123) только член с  $lm = 22$ , заменяя  $\cos 2(\omega + M + h - \lambda_{22})$  на  $2 \cos^2(\omega + M + h - \lambda_{22}) - 1$  и разлагая  $F$

на составляющие в соответствии с (3.102), получим

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu^2}{2L^2} + \theta H, \\ F_1 &= 2Q_{22} \cos^2(\omega + M + h - \lambda_{22}), \\ F_2 &= -Q_{22}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Если применить, как в (3.105), преобразование Цейпеля, будем иметь

$$F_0 \left. \begin{aligned} &+ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial M} + \frac{\partial F_0}{\partial H'} \frac{\partial S_1}{\partial h} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial M} \right)^2 + F_1 \\ &+ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial M} + \frac{\partial F_0}{\partial H'} \frac{\partial S_2}{\partial h} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F'_0 \\ + F'_2. \end{array} \right. \quad (3.140)$$

Здесь  $F'_1$  не входит в правую часть (3.140), так как соответствующая часть функции  $F$  является периодической, и, следовательно, должно войти в  $S_1$ . Поскольку  $M$  и  $h$  появляются только в виде суммы  $(M + h)$ , частные производные  $\partial S_1 / \partial M$  и  $\partial S_1 / \partial h$  равны. Таким образом, явление резонанса проявляется в виде малого коэффициента при этой производной, так как из (3.139), (3.46) и (3.20)  $\partial F_0 / \partial L' = -n'$ . Именно по этой причине в (3.140) и было внесено изменение по сравнению с (3.105), выразившееся в переносе члена  $(\partial S_1 / \partial M)^2$  во вторую строку. После подстановки  $\psi$  из (3.130) и (3.125) вторая строка в (3.140) принимает вид

$$(\theta - n') \frac{\partial S_1}{\partial \psi} + \frac{3n'}{2L'} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \right)^2 + 2Q_{22} \sin^2 \psi = 0. \quad (3.141)$$

Решая квадратное уравнение (3.141) относительно  $\partial S_1 / \partial \psi$  и интегрируя, получим

$$S_1 = - \frac{(\theta - n') (\psi \pm E) L'}{3n'}, \quad (3.142)$$

где

$$E = E(k, \psi) = \int_0^\psi (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi \quad (3.143)$$

— эллиптический интеграл второго рода, модуль которого

$$k^2 = \frac{12Q_{22}n'}{(\theta - n')^2 L'}. \quad (3.144)$$

Для определения долготы  $\lambda_A$  относительно точки, фиксированной по отношению к Земле, можно использовать (3.104), находя производные определяющей функции относительно  $L'$ ,  $G'$ ,  $H'$ . После длинных алгебраических преобразований и исключения малых членов получим результат, подобный (3.137).

Метод, представленный выражениями (3.121) — (3.137), очень похож на метод Аллана [1]. Морандо [12] применил к задаче, кратко характеризуемой уравнениями (3.138) — (3.144), преобразование Цейделя. Другой уже предложенный ранее вариант возможного резонанса в соответствии с (3.117) основан на соотношении

$$\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \theta) \approx 0. \quad (3.145)$$

Отсюда следует, что для средних эксцентриситетов  $(l - 2p)$  и, следовательно,  $l$  должны быть нечетными. Большая полуось должна удовлетворять условию

$$a = \left[ \frac{\mu}{n^2} \right]^{1/3} = \left[ \frac{\mu}{(m\theta)^2} \right]^{1/3} \approx \left[ \frac{17}{m} \right]^{2/3} a_e > a_e. \quad (3.146)$$

Поскольку  $l \geq m$  и в уравнениях (3.76) для возмущений появляется множитель  $a^{-(l+3/2)}$ , гармоники более высокой степени  $m$ , несмотря на уменьшение величины коэффициентов с увеличением  $l$ , должны оказывать большее влияние. Тогда для частного случая

$$m \approx 17 \left[ \frac{a_e}{a} \right]^{3/2} \quad (3.147)$$

возмущающая функция на основе (3.70) будет иметь вид

$$R = \frac{\mu a_e^{m+1-k}}{a^{m+2-k}} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{a} \right)^{2i} F_{lmp}(i) G_{lp0}(e) S_{lmp0}, \quad (3.148)$$

где

$$\begin{aligned} k &= m \pmod{2}, \\ l &= m + 2j + 1 - k, \\ p &= \frac{m - k}{2} + j. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Например, при  $a \approx 1,196 a_e$  имеем  $m = 13$ ;  $l = 13, 15, 17, \dots$  и  $p = 6, 7, 8, \dots$ .

В случае, если  $\theta$  равно одному обороту в сутки, для любого спутника будет существовать по крайней мере один член с периодом, равным двум или более суткам. Следовательно, член  $\Delta_2 M$  второго порядка в средней аномалии из (3.115) становится преобладающим как следствие появления в знаменателе квадрата скорости. В таком случае из (3.76) и (3.115) получим возмущение вдоль трассы:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \Delta\Omega \cos i + \Delta\omega + \Delta_1 M + \Delta_2 M = \\ &= \frac{\mu a_e^{m+1-k}}{a^{m+4-k} [\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{a}\right)^{2j} F_{lmp} \bar{S}_{lmp0} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{n} \left[ H(e) \frac{\partial G_{lpo}}{\partial e} + 2(l+1) G_{lpo} \right] - \frac{3G_{lpo}}{[\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

где

$$H(e) = \frac{\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)}{e} = \frac{e}{2} - \frac{3e^3}{8} - \frac{5e^5}{16} - \dots \quad (3.151)$$

Поскольку выражения в фигурных скобках имеют противоположные знаки, скорость  $[\dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]$ , имеющая знак, обратный среднему движению  $n$ , будет давать наибольший эффект.

### 3.7. ДРУГИЕ ЭФФЕКТЫ

Кроме возмущений, вызываемых вариациями гравитационного поля Земли, орбиты близких спутников подвержены также возмущениям, вызываемым гравитационным притяжением Солнца и Луны, давлением солнечного излучения и сопротивлением атмо-

сферы. Эти эффекты особенно важны при исследовании долгопериодических и вековых возмущений с целью определения зональных гармоник. Гравитационные возмущения от Солнца и Луны можно вывести аналитическим способом, подобным тому, который был использован в (3.76). В возмущениях, вызываемых давлением солнечного излучения, наиболее важным является эффект земной тени, но поскольку он затрудняет их аналитический вывод, для вычисления обычно применяют численное интегрирование или численный гармонический анализ.

При использовании модели верхней атмосферы вычисление возмущений орбит, вызываемых сопротивлением атмосферы, становится еще более сложным; следовательно, в этом случае также нужно применить численные методы. Однако при этом возникает дополнительная трудность, состоящая в том, что даже самые лучшие модели атмосферы недостаточно учитывают возможные значительные изменения плотности; поэтому не имеет смысла производить сложные вычисления возмущений при помощи моделей. Вместо этого обычно на основе орбитальных данных определяют несколько параметров, выражающих основные возмущения из-за атмосферного сопротивления, и по этим параметрам вычисляются некоторые эффекты второго порядка.

На высотах, характерных для геодезических спутников, аэродинамическая сила сопротивления может быть представлена выражением

$$F_d = \frac{C_D}{2} A \rho v^2, \quad (3.152)$$

где  $C_D \approx 2,4$  зависит от формы спутника и условия отражения молекул воздуха от поверхности спутника,  $A$  — площадь поперечного сечения спутника,  $\rho$  — плотность атмосферы,  $v$  — скорость спутника относительно атмосферы. Вектор аэродинамической силы сопротивления всегда направлен противоположно вектору скорости, и поэтому его влияние не усредняется, как гравитационные эффекты, вращением Земли или орбиты.

Следовательно, происходит потеря энергии, которая приводит, согласно закону Кеплера (3.20), к уменьшению большой полуоси орбиты и ускорению спутника, компенсирующему возрастание гравитационного притяжения. Это ускорение вызывает в средней аномалии гораздо большие возмущения, чем в любом другом кеплеровом элементе. Следовательно, произвольные параметры, аппроксимирующие влияние сопротивления атмосферы (плюс обычно влияние давления солнечного излучения), являются, как правило, коэффициентами  $M_j$  временного ряда, представляющего изменение средней аномалии относительно ее значения в эпоху:

$$\Delta M_d = \sum_{j=2}^{j \max} M_j (t - t_0)^j. \quad (3.153)$$

Ряд начинается с  $M_2$ , поскольку  $M_0$  есть одна из постоянных интегрирования, а  $M_1$  совпадает с  $a_0$  вследствие закона Кеплера (3.20). Уравнение (3.20) позволяет получить также вызываемые сопротивлением атмосферы возмущения большой полуоси в соответствии с (3.153):

$$\Delta a_d = - \frac{2a^{5/2}}{3\mu^{1/2}} \sum_{j=2}^{j \max} j M_j (t - t_0)^{j-1}. \quad (3.154)$$

Плотность атмосферы настолько быстро уменьшается с увеличением высоты, что даже для небольших эксцентриситетов влияние атмосферного сопротивления можно рассматривать как действие дополнительного импульса в перигее. Таким образом, потеря энергии может быть непосредственно связана с радиусом перигея  $r_p$ ; из (3.25) следует, что

$$\Delta v^2 = 2\Delta T_p = \mu\Delta \left[ \frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right] = \mu\Delta \left[ \frac{(1+e)}{a(1-e)} \right]. \quad (3.155)$$

Поскольку  $\Delta T_p < 0$  и  $\Delta a < 0$ , обязательно  $\Delta e < 0$ . В первом приближении  $r_p$  можно считать величиной постоянной, поскольку она не подвергается воздействию сил, действующих под прямым углом. Счи-



тая  $r_p$  постоянной, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta a_d (1 - e) - a \Delta e_d, \\ \Delta e_d &= \frac{\Delta a_d}{a} (1 - e) = \\ &= - \frac{2a^{3/2}}{3\mu^{1/2}} (1 - e) \sum_l j M_l (t - t_0)^{l-1}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Скорость вековых движений узла и перигея, обусловленная сжатием  $C_{20}$  (или  $J_2$ ), зависит от большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$ . Следовательно, изменение в  $a$  и  $e$  вызовет ускорение узла и перигея:

$$\Delta \Omega_d = \int \Delta \dot{\Omega}_d dt = \int \left[ \frac{\partial \dot{\Omega}(C_{20})}{\partial a} da_d + \frac{\partial \dot{\Omega}(C_{20})}{\partial e} \Delta e_d \right] dt. \quad (3.157)$$

Вычислив с помощью (3.74)  $\dot{\Omega}(C_{20})$  и  $\dot{\omega}(C_{20})$ , подставив значения  $\Delta a_d$  и  $\Delta e_d$  из (3.154) и (3.156), после интегрирования получим

$$\begin{aligned} \Delta \Omega_d &= \frac{\cos i}{2(1-e^2)^2} \left[ \frac{7-e}{1+e} \right] C_{20} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \Delta M_d, \\ \Delta \omega_d &= \frac{4-5 \sin^2 i}{4(1-e^2)^2} \left[ \frac{7-e}{1+e} \right] C_{20} \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \Delta M_d. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Кроме возмущений, представленных уравнениями (3.153), (3.154), (3.156) и (3.158) и обусловленных плотностью атмосферы, существуют вариации в движении атмосферы, оказывающие влияние на орбиту, поскольку скорость  $v$  в (3.145) измеряется относительно атмосферы. Такие вариации нагляднее всего проявляются в наклонении, которое не подвержено воздействию изменений плотности атмосферы. В частности, у большинства орбит отмечается наличие векового уменьшения наклона, что можно было бы объяснить вращением атмосферы вместе с Землей, но со скоростью, нерегулярно изменяющейся по отношению к равномерному вращению. Следовательно, при рассмотрении эффектов, связанных с вариациями в движении атмосферы, можно исходить из представления

наклонения в виде полиномов, подобно (3.153) — (3.158).

Учет влияния атмосферного сопротивления является наиболее слабым местом в динамике орбит спутников. Короткопериодические возмущения, имеющие большое значение в определении тессеральных гармоник и поправок к координатам станций, следует рассматривать как статистическую задачу, что и сделано в гл. 5. С целью определения зональных гармонических коэффициентов долгопериодические возмущения в большой полуоси, эксцентриситете и наклонении необходимо либо учитывать, применяя полиномы, подобные (3.154), либо тщательно усреднять, используя изменения в узле  $\Delta\Omega$  и перигее  $\Delta\omega$ . Подробное изложение динамической теории возмущений, вызываемых сопротивлением атмосферы (главным образом с целью определения свойств атмосферы), можно найти в книге Кинг-Хили [11] и обзорной статье Яккиа [8].

### 3.8. ВЫВОДЫ

Целью настоящей главы явилась разработка теории орбит близких спутников в части геодезического приложения, т. е. в описании особенностей, связанных с гравитационным полем Земли. Поэтому приведенное изложение не претендует на полное и всеобъемлющее рассмотрение вопросов, связанных с орбитами близких спутников. Особое внимание уделяется аспектам, представляющим наибольший интерес для геодезии, таким, как разложение возмущающей функции, представляющей вариации гравитационного поля, по сферическим гармоникам, и не затрагиваются другие вопросы, представляющие меньший интерес для геодезии. С целью достижения более точного понимания и подготовки основы для более эффективного подхода к таким специальным задачам, как использование 24-часовых орбит, также было уделено больше внимания основной теории, чем это необходимо для ее практического применения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Allan R. R.*, Perturbations of a Geostationary Satellite: 1, The Ellipticity of the Equator, *Planet. Space Sci.*, **11**, № 11, 1325—1334 (1963).
2. *Brouwer D.*, Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag, *Astron. J.*, **64**, 378—397 (1959).
3. *Brouwer D., Clemence G. M.*, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York — London, 1961 (русский перевод: *Д. Брауэр, Дж. Клеменс*, *Методы небесной механики*, изд-во «Мир», М., 1964).
4. *Cayley A.*, Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion, *Mem. Roy. Astron. Soc.*, **29**, 191—306 (1861).
5. *Conte S. D.*, The Computation of Satellite Orbit Trajectories, *Advan. Computers*, **3**, 1—76 (1962).
6. *Cook A. H.*, The Contribution of Observations of Satellites to the Determination of the Earth's Gravitational Potential, *Space Sci. Rev.*, **2**, № 3, 355—437 (1963).
7. *Hancock H.*, *Elliptic Integrals*, Dover Publ., New York, 1917 (переиздано в 1968 г.).
8. *Jacchia L. G.*, Variations in the Earth's Upper Atmosphere as Revealed by Satellite Drag, *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 973—991 (1963).
9. *Kaula W. M.*, Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, *Geophys., J. Roy. Astron. Soc.*, **5**, № 2, 104—133 (1961) (русский перевод: *У. М. Каула*, Анализ орбит спутников для геодезических целей, в кн. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 135—143).
10. *Kaula W. M.*, Gravitational and Other Perturbations of a Satellite Orbit, *Dynamics of Rockets and Satellites*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1965, p. 179—215.
11. *King-Hele D. G.*, *Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere*, Butterworth and Co., London, 1964 (русский перевод: *Д. Кинг-Хилли*, Теория орбит искусственных спутников в атмосфере, изд-во «Мир», М., 1966).
12. *Morando B.*, Orbits de Resonance des Satellites de 24 h., *Bull. Astron.*, **24**, 47—67 (1963).
13. *Mueller I. I.*, *Introduction to Satellite Geodesy*, Frederick Ungar Publ. Co., Inc., New York, 1964 (русский перевод: *И. Меллер*, Введение в спутниковую геодезию, изд-во «Мир», М., 1967).
14. *Tisserand F.*, *Traité de Mécanique Celeste*, vol. 1: *Perturbations des Planetes d'après la Methode de la Variation des Constantes Arbitraires*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1889 (переиздано в 1960 г.).

## ГЕОМЕТРИЯ НАБЛЮДЕНИЙ СПУТНИКОВ

---

### 4.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

До сих пор рассматривалась теория движения материальной точки в гравитационном поле Земли безотносительно к наблюдателю. Поэтому была введена только геометрия, необходимая для преобразований потенциала и изучения орбиты. В этой главе мы рассматриваем геометрию, связанную с наблюдениями спутника; приводим дифференциальные соотношения для всех величин, касающихся наблюдений; рассматриваем изменения в системе отсчета, среду, в которой выполняются наблюдения, и т. д.

### 4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

В гл. 2 мы пользовались прямоугольной системой координат  $\{u, v, w\}$ , фиксированной в теле Земли. Однако в геодезии более широко используют эллипсоидальные координаты  $\varphi$  (широта),  $\lambda$  (долгота) и  $h$  (высота). Поэтому необходимо знать, как связаны эти эллипсоидальные координаты с прямоугольными. На рис. 6 показано меридиональное сечение эллипсоида вращения. Подставив  $p^2$  вместо  $u^2 + v^2$  из (1.44) или (3.8), имеем

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1, \quad (4.1)$$

где  $a$  — экваториальная, а  $b$  — полярная полуоси эллипсоида. Далее, из рис. 6 и (4.1)

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{dp}{dw} = \frac{a^2}{b^2} \frac{w}{p} = \frac{w}{p(1-e^2)}, \quad (4.2)$$

где  $e$  — эксцентриситет, определяемый в соответствии с рис. 2. Кроме того, из рис. 6

$$\cos \varphi = \frac{p}{v}, \quad (4.3)$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{w}{v(1-e^2)}. \quad (4.4)$$

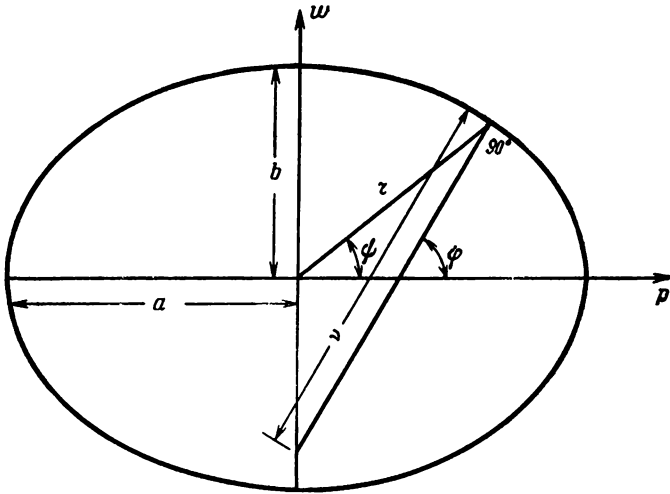


Рис. 6. Меридиональный эллипс.

Возвращаясь к эллипсоиду и учитывая высоту  $h$ , имеем

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u = (v + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ v = (v + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ w = [v(1 - e^2) + h] \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Чтобы определить  $v$ , используем (4.3) и (4.1) и получим

$$v^2 \cos^2 \varphi = p^2 = -\frac{a^2}{b^2} w^2 + a^2. \quad (4.6)$$

Далее из (4.4) и (4.6)

$$v^2(1 - \sin^2 \varphi) = - \frac{1}{(1 - e^2)} v^2(1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi + a^2, \quad (4.7)$$

откуда

$$v = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (4.8)$$

В итоге получаем выражение для связи эксцентриситета и сжатия:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \left( \frac{a - b}{a} \right)^2 + 2 \frac{ab - b^2}{a^2} = f^2 + 2(1 - f)f = 2f - f^2. \quad (4.9)$$

Во всех соотношениях, полученных до сих пор, в качестве начала координат был использован центр Земли. Однако для связи их с результатами наблюдений, произведенных на станции с координатами  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ , необходимо выполнить переход от центра Земли к местоположению станции. Используя индекс  $T$  для обозначения „топоцентрических“ координат, отнесенных к такой точке, имеем

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{R}_{xu} \mathbf{u}_T = \mathbf{R}_{xu} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (4.10)$$

или

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{R}_{xq} \mathbf{q} - \mathbf{R}_3(-\theta) \mathbf{u}_0, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{R}_{xq}$  определяется в соответствии с (2.32), а  $\mathbf{R}_3(-\theta)$  — в соответствии с (2.24).

Чтобы получить относительные скорости или скорости изменения топоцентрических координат, помимо скорости спутника необходимо учитывать также скорость вращения Земли, которая приводит к перемещению станции по отношению к инерциальной системе координат:

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{R}_{xq} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{R}_{xu}}{\partial \theta} \mathbf{u}_0 \dot{\theta}, \quad (4.12)$$

где  $\dot{\mathbf{q}}$  определяется уравнением (3.24). Уравнение (4.12) справедливо как для возмущенной, так и для невозмущенной орбит. Вектор скорости в (3.26) представлен величинами  $\dot{x}_i$ , которые однозначно вычисляются по оскулирующим кеплеровым элементам

из преобразований, приведенных в конце разд. 3.1. Поэтому, даже если все кеплеровы элементы имеют ненулевые скорости изменения, существенными являются только ускорения. С другой стороны, скорость может быть отнесена к координатам, неподвижно связанным с Землей:

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{R}_{uq} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{uq}}{\partial \theta} \mathbf{q} \dot{\theta}. \quad (4.13)$$

Используя сумму квадратов прямоугольных координат  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , получим расстояние  $r$  от станции до спутника:

$$r = [\mathbf{x}_T^T \mathbf{x}_T]^{1/2}. \quad (4.14)$$

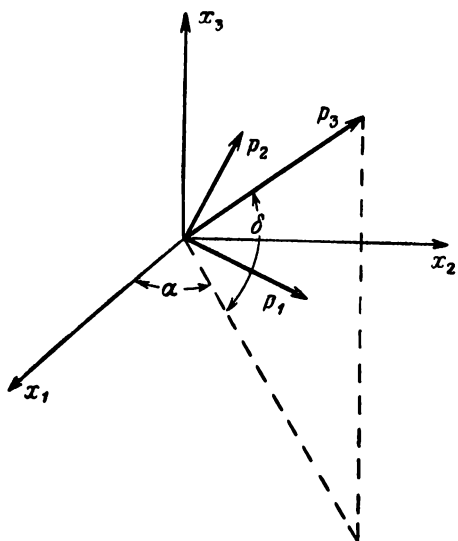
Затем, если продифференцировать (4.14) и принять во внимание (4.12), получим скорость изменения расстояния \*):

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{x}_i = \mathbf{x}_T^T \left[ \mathbf{R}_{xq} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{R}_{xu}}{\partial \theta} \mathbf{u}_0 \dot{\theta} \right] \frac{1}{r}. \quad (4.15)$$

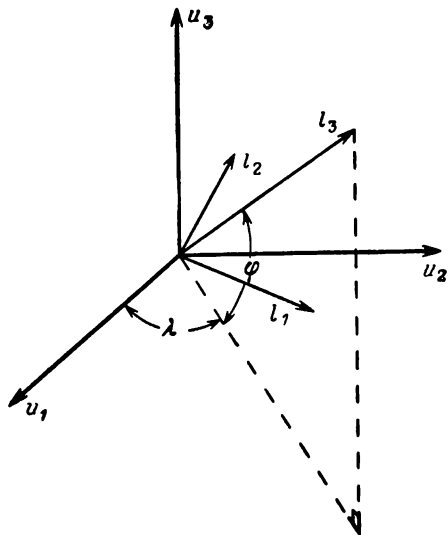
Для различных видов наблюдений оказываются удобными различные системы координат. Формулы перехода от одной системы к другой путем соответствующих поворотов осей можно вывести, пользуясь рис. 7 и 8, выполнив отдельные повороты по аналогии с выводом выражений (2.24) — (2.30) и применив правила (2.6) записи матриц поворота. Для координат в системе  $\mathbf{p}$  с третьей осью, направленной в точку инерциальной системы отсчета с прямым восхождением  $\alpha$  и склонением  $\delta$  (целесообразной для применения при фотографическом изображении спутника на фоне звездного неба), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_T &= \mathbf{R}_{px} \mathbf{x}_T = \mathbf{R}_3 \left( \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_2 \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \mathbf{R}_3(\alpha) \mathbf{x}_T = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \\ \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta \sin \alpha & \sin \delta \end{bmatrix} \mathbf{x}_T. \end{aligned} \quad (4.16)$$

\*) Радиальную составляющую скорости. — Прим. перев.



Р и с. 7. Переход от инерциальной системы координат к системе, связанной с осью камеры.



Р и с. 8. Переход от системы координат, связанной с Землей, к местной системе координат.



Для координат в системе  $l$  с третьей осью, направленной к местному зениту  $(\varphi, \lambda)$ , имеем

$$l_T = R_{lu} u_T = R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) R_3(\lambda) u_T. \quad (4.17)$$

Если не касаться динамики орбиты, спутник можно рассматривать просто как высокий объект наблюдения (точку) и сам фотоснимок можно использовать

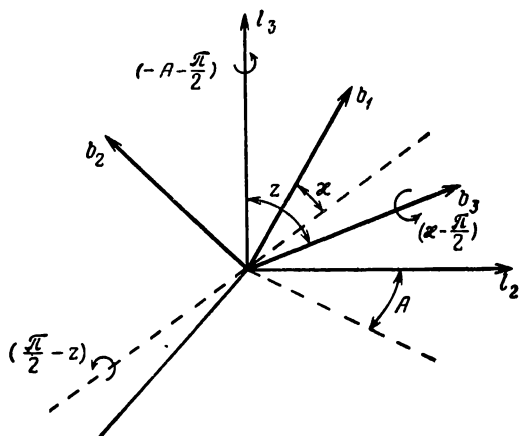


Рис. 9. Преобразования в наземной фотограмметрической системе координат.

для получения элементов ориентировки. Поэтому в данном случае вместо общих систем  $u_T$  или  $x_T$  удобнее пользоваться чисто местной системой координат. Применяв для случая фотографирования спутника с поверхности Земли преобразование координат, представленное на рис. 9 и используемое обычно в наземной фотограмметрии, получим

$$b_T = R_3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) R_2\left(\frac{\pi}{2} - z\right) R_1\left(-A - \frac{\pi}{2}\right) R_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) l_T, \quad (4.18)$$

где  $x$  — угол крена,  $z$  — зенитное расстояние, а  $A$  — азимут, измеренный по часовой стрелке от точки севера. Координаты вспышки на фотоснимке, полученном

камерой с фокусным расстоянием  $f$ , будут, таким образом, равны  $fb_1/b_3$  и  $fb_2/b_3$ . Для фотоснимка Земли, полученного со спутника, можно записать преобра-

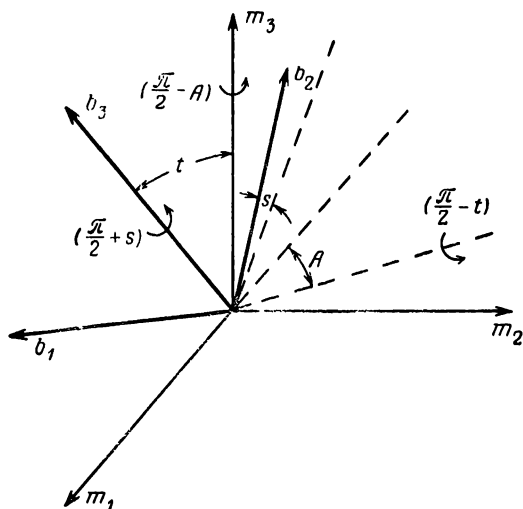


Рис. 10. Преобразования в аэрофотограмметрической системе координат.

зование координат, представленное на рис. 10 и используемое в аэрофотограмметрии:

$$\mathbf{b}_T = \mathbf{R}_3\left(\frac{\pi}{2} + s\right) \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathbf{R}_1\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \mathbf{R}_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{m}_T, \quad (4.19)$$

где  $s$ ,  $t$  и  $A$  — соответственно углы крена, наклона и азимута. В следующем разделе при установлении дифференциальных соотношений для использования в уравнениях наблюдений мы снова вернемся к уравнениям (4.14) — (4.19).

#### 4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ

Если нужно сравнить вычисленные направления, расстояния, скорости изменения расстояния и т. д. с наблюдениями, то для учета известных поправок или для определения поправок из наблюдений нужно

знать дифференциальные соотношения, связывающие измеренные величины с параметрами, которые следует уточнить.

В тех случаях, когда используется орбита спутника, в качестве его промежуточных координат при всех видах наблюдений применяют координаты  $\mathbf{x}$  и составляющие скорости  $\dot{\mathbf{x}}$  в инерциальной прямоугольной системе отсчета. Следовательно, необходимо иметь частные производные этих координат по параметрам, определяющим орбиту: шесть постоянных интегрирования;  $kM$ ,  $J_2$ ; коэффициенты  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , характеризующие гравитационное поле, а также некоторые параметры, используемые для определения модели сопротивления атмосферы или солнечного давления. Все вариации в положении спутника, рассмотренные в гл. 3, были выражены через оскулирующие кеплеровы элементы  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$ . Поэтому прежде всего необходимо получить частные производные  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$  по этим переменным. Дифференцируя (4.11), для того чтобы найти  $d\mathbf{x}/ds$ , получим

$$d\mathbf{x} = \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial (\Omega, i, \omega)} \mathbf{q} \mid \mathbf{R}_{xq} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial (a, e, M)} \right] \begin{bmatrix} d\Omega \\ di \\ d\omega \\ da \\ de \\ dM \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Производные от  $\mathbf{R}_{xq}$  можно получить прямым дифференцированием (2.32) или дифференцируя поочередно соответствующие компоненты произведения матриц в (2.31). Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \mathbf{R}_3(-\Omega)}{\partial \Omega} \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) = \begin{bmatrix} -\sin \Omega & -\cos \Omega & 0 \\ \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \Omega \cos \omega - \cos \Omega \cos i \sin \omega, & \sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega, & \cos \Omega \sin i \\ \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega, & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega, & \sin \Omega \sin i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Чтобы получить производные от  $\mathbf{q}$ , необходимо принять во внимание зависимость от эксцентриситета

через эксцентрическую аномалию  $E$  или истинную аномалию  $f$ , а также через расстояние  $r$ . После дифференцирования (3.13) и (3.14), используя выражения для  $\partial E/\partial e$  из (3.19), получим

$$\frac{\partial q}{\partial(a, e, M)} = \begin{bmatrix} \cos E - e & -a \left(1 + \frac{\sin^2 E}{1 - e \cos E}\right) & -\frac{a \sin E}{1 - e \cos E} \\ \sqrt{1 - e^2} \sin E & a \sqrt{1 - e^2} \sin E \left(\frac{\cos E}{1 - e \cos E} - \frac{e}{1 - e^2}\right) & \frac{a \sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{a} & -a - \frac{q_2^2}{r(1 - e^2)} & -\frac{aq_2}{r \sqrt{1 - e^2}} \\ \frac{q_2}{a} & \frac{q_1 q_2}{r(1 - e^2)} & \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} (q_1 + ae) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Для выражения дифференциала вектора скорости  $d\dot{\mathbf{x}}$  через оскулирующие элементы дифференцируем (4.12):

$$d\dot{\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial(\Omega, i, \omega)} \dot{\mathbf{q}} \mid \mathbf{R}_{xq} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial(a, e, M)} \right] \begin{bmatrix} d\Omega \\ di \\ d\omega \\ da \\ de \\ dM \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где новыми компонентами, согласно (3.24), являются лишь

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial(a, e, M)} = \begin{bmatrix} \frac{n \sin E}{2(1 - e \cos E)} & \frac{na \sin E [e - 2 \cos E + e \cos^2 E]}{(1 - e \cos E)^3} & \frac{na(e - \cos E)}{(1 - e \cos E)^3} \\ -\frac{n \sqrt{1 - e^2} \cos E}{2(1 - e \cos E)} & \frac{na[(\cos E - e)^2 - (1 - e \cos E) \sin^2 E]}{\sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E)^3} & \frac{-na \sqrt{1 - e^2} \sin E}{(1 - e \cos E)^3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{q}_1}{2a} & \dot{q}_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[2 \left(\frac{q_1}{r}\right) + \frac{e}{1 - e^2} \left(\frac{q_2}{a}\right)^2\right] & -n \left(\frac{a}{r}\right)^3 q_1 \\ -\frac{\dot{q}_2}{2a} & \frac{n}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[\frac{q_1^2}{r} - \frac{1}{a(1 - e^2)} q_2^2\right] & -n \left(\frac{a}{r}\right)^3 q_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Как показано в гл. 3, оскулирующие элементы  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$  являются функциями постоянных интегрирования, параметров гравитационного поля ( $kM$  и коэффициентов  $C_{lm}$  и  $S_{lm}$ ), а также других параметров, отражающих влияния сопротивления атмосферы, солнечного давления и т. д. Чтобы получить частные производные по постоянным интегрирования, которыми являются *средние* кеплеровы элементы (т. е. элементы, не содержащие периодических возмущений, как, например, параметры  $\{a''_0, e''_0, i''_0, M''_0, \omega''_0, \Omega''_0\}$  окончательной промежуточной орбиты, полученные путем канонических преобразований выражений (3.105) — (3.113)), можно использовать простейшее представление орбиты в виде эллипса с постоянными интегрирования  $a, e, i$ , а также узлом и перигеем, прецессирующими под влиянием сжатия  $C_{20}$ , как следует из (3.74). Поэтому

$$\frac{\partial(a, e, i)}{\partial(a''_0, e''_0, i''_0)} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial(a, e, i)}{\partial(M''_0, \omega''_0, \Omega''_0)} = \mathbf{O}, \quad \frac{\partial(M, \omega, \Omega)}{\partial(M''_0, \omega''_0, \Omega''_0)} = \mathbf{I}$$

и

$$\frac{\partial(M, \omega, \Omega)}{\partial(a''_0, e''_0, i''_0)} = \begin{bmatrix} -\left[ \frac{3n}{2a} + \frac{21\mu a_e^2 C_{20} (3 \sin^2 i - 2)}{8na^5 (1-e^2)^{3/2}} \right] \Delta t, & \frac{9\mu a_e^2 (3 \sin^2 i - 2) C_{20} e \Delta t}{4na^5 (1-e^2)^{5/2}}, & \frac{9\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i \Delta t}{4na^5 (1-e^2)^{3/2}} \\ -\frac{21\mu a_e^2 C_{20} (1-5 \cos^2 i) \Delta t}{8na^5 (1-e^2)^2}, & \frac{3\mu a_e^2 C_{20} e (1-5 \cos^2 i) \Delta t}{na^5 (1-e^2)^3}, & \frac{15\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i \Delta t}{4na^5 (1-e^2)^2} \\ -\frac{21\mu a_e^2 C_{20} \cos i \Delta t}{4na^5 (1-e^2)^2}, & \frac{6\mu a_e^2 C_{20} e \cos i \Delta t}{na^5 (1-e^2)^3}, & -\frac{3\mu a_e^2 C_{20} \sin i \Delta t}{2na^5 (1-e^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) получено дифференцированием (3.74), а  $\partial n / \partial a''_0 = -3n/2a$  — дифференцированием уравнения (3.20), выражающего третий закон Кеплера. В выражении (4.25)  $\Delta t$  — разность времен между моментом наблюдения и эпохой, к которой относятся элементы  $a''_0, e''_0, i''_0$ . Если эта разность времен  $\Delta t$  такова, что элементы матрицы (4.25), за исключением  $-3n/2a$ ,

малы по сравнению с единицей (для 10 или менее суток), этими элементами можно пренебречь.

Чтобы найти частные производные по постоянным интегрирования, которыми являются оскулирующие кеплеровы элементы в эпоху  $a_0, e_0, i_0, M_0, \omega_0, \Omega_0$ , необходимо правую часть уравнения (4.25) умножить на якобиан  $\partial(a''_0, e''_0, i''_0, M''_0, \omega''_0, \Omega''_0)/\partial(a_0, e_0, i_0, M_0, \omega_0, \Omega_0)$ . Недиagonальные элементы этой таблицы будут представлять собой производные периодические возмущения и, следовательно, будут содержать множитель  $C_{20}$ . Поэтому они будут значительными только в том случае, если множитель (4.25) велик по сравнению с единицей: например,  $\partial M/\partial a''_0$ . Так, для частной производной средней аномалии  $M$  по любому из оскулирующих элементов  $s_{j0}$  в некоторую эпоху необходимо добавить

$$- \frac{3n}{2a} \Delta t \frac{\partial \Delta a_{20}}{\partial s_{j0}},$$

где  $\Delta a_{20}$  находится из (3.76), причем в знаменателе учитываются только члены с  $M$ :

$$\begin{aligned} \Delta a_{20} = & \\ = & \frac{2a_e^2 C_{20}}{a} \sum_{pq \neq 10} F_{20p} G_{2pq} \cos [(2-2p)\omega_0 + (2-2p+q)M_0]. \end{aligned}$$

Для получения частных производных оскулирующих элементов по коэффициентам разложения гравитационного поля можно воспользоваться уравнениями (3.76). Например, подставляя из (3.71) в (3.76) выражение для  $S_{lmpq}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial C_{lm}} = & \mu a_e^l \sum_{p,q} \frac{2F_{lmp} G_{lpq} (l-2p+q)}{na^{l+2} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]} \times \\ \times & \begin{cases} \cos & \text{для } (l-m) \text{ чет.} \\ \sin & \text{для } (l-m) \text{ нечет.} \end{cases} [(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Поскольку влияние коэффициентов  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  на элементы и вариации в  $a$ ,  $e$ ,  $i$  мало, можно записать частные производные (4.26) в виде суммы синусоидальных функций с постоянными коэффициентами и аргументами, изменяющимися пропорционально времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_l}{\partial (C_{lm} \text{ или } S_{lm})} = & \\ = \sum_{p, q} K_{lmpq}(a, e, i) \begin{bmatrix} \cos \\ \text{или} \\ \sin \end{bmatrix} & [(l-2p)(\omega_0 + \dot{\omega} \Delta t) + \\ + (l-2p+q)(M_0 + \dot{M} \Delta t) + m(\Omega_0 + \dot{\Omega} \Delta t - \theta_0 - \dot{\theta} \Delta t)], & \end{aligned} \quad (4.27)$$

где, например, при  $s_i = a$

$$K_{lmpq} = \mu a_e^l \frac{2F_{lmp} G_{lpq} (l-2p+q)}{na^{l+2} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]}.$$

Уравнения (3.76), на основе которых получено (4.27), были выведены в предположении, что возмущения, обусловленные влиянием гравитационного поля, проявляются в виде колебаний, наложенных на вековым образом перемещающийся эллипс. Таким образом, выражение (4.27) справедливо в тех случаях, когда постоянные интегрирования не содержат возмущений, т. е. являются средними элементами, например параметрами окончательной промежуточной орбиты, определяемыми путем канонического преобразования (3.105) — (3.113).

Однако если метод вычисления орбиты использует постоянные интегрирования, содержащие возмущения (как в случае численного интегрирования с начальными условиями в виде оскулирующих элементов или векторов положения и скорости в некоторую эпоху), то влияние возмущения в эту же эпоху следует

исключить, т. е. (4.27) нужно заменить на

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_l}{\partial (C_{lm} \text{ или } S_{lm})} = & \\ = \sum_{p, q} \left\{ K_{lmpq}(a, e, i) \begin{bmatrix} \cos \\ \text{или} \\ \sin \end{bmatrix} [(l-2p)(\omega_0 + \omega \Delta t) + \right. & \\ + (l-2p+q)(M_0 + \dot{M} \Delta t) + m(\Omega_0 + \dot{\Omega} \Delta t - \theta_0 - \dot{\theta} \Delta t)] - & \\ - \sum \frac{\partial s_l}{\partial s_{l_0}} K_{lmpq}(a, e, i) \begin{bmatrix} \cos \\ \text{или} \\ \sin \end{bmatrix} [(l-2p)\omega_0 + & \\ + (l-2p+q)M_0 + m(\Omega_0 - \theta_0)] \left. \right\}. & \quad (4.28) \end{aligned}$$

Объединяя (4.20), (4.23), (4.25) и (4.27) или (4.28), можно записать

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}}{\partial \{a, e, i, M, \omega, \Omega\}} \left[ \frac{\partial \{a, e, i, M, \omega, \Omega\}}{\partial \{a_0'', e_0'', i_0'', M_0'', \omega_0'', \Omega_0''\}} \times \right. & \\ \times d \begin{bmatrix} a_0'' \\ e_0'' \\ i_0'' \\ M_0'' \\ \omega_0'' \\ \Omega_0'' \end{bmatrix} + \sum_{l, m} \frac{\partial \{a, e, i, M, \omega, \Omega\}}{\partial \{C_{lm}, S_{lm}\}} \left( \frac{dC_{lm}}{dS_{lm}} \right) + & \\ \left. + \sum \frac{\partial \{a, e, i, M, \omega, \Omega\}}{\partial \{\text{другие параметры}\}} d \{\text{другие параметры}\} \right]. & \quad (4.29) \end{aligned}$$

Для каждого вида наблюдений необходима соответствующая модификация расстояния, скорости изменения расстояния или вектора положения (4.14)–(4.19), чтобы получить вычисленный эквивалент наблюдаемых величин. В общем случае для любого наблюдения

$$O_l \neq C_l, \quad (4.30)$$

где  $O_l$  — наблюдаемая величина,  $C_l$  — вычисленное значение той же величины.



Процесс дифференциальной коррекции заключается в том, чтобы определить поправки к наблюдениям  $dO_i$  и поправки  $dP_j$  к параметрам  $P_j$ , так чтобы

$$O_i + dO_i = C_i + \sum_j \frac{\partial C_i}{\partial P_j} dP_j \quad (4.31)$$

или

$$(O - C)_i = \sum_j \frac{\partial C_i}{\partial P_j} dP_j - dO_i. \quad (4.32)$$

Как уже говорилось, некоторые из параметров  $P_j$  оказывают влияние на орбиту. Влияние этих параметров на вычисленное значение  $C_i$  для конкретного наблюдения можно полностью представить вектором положения  $\mathbf{x}$  или скорости  $\dot{\mathbf{x}}$  в момент измерения, т. е. можно записать

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_j} = \frac{\partial C_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial P_j} + \frac{\partial C_i}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial P_j}, \quad (4.33)$$

где суммирование выполняется по индексу  $k$  от 1 до 3, а производные  $\partial x_k / \partial P_j$  и  $\partial \dot{x}_k / \partial P_j$  определяются выражением (4.29). Почти во всех возможных случаях (за исключением одного) эти производные вполне можно считать общими для всех видов наблюдений. Единственным исключением является влияние поправки времени или ошибки  $\varepsilon(t)$ . Поскольку такая ошибка приводит к смещению вычисленного положения спутника вдоль орбиты, ее можно определить по вариации средней аномалии  $dM$ , умноженной на скорость изменения  $M$  со временем, т. е. по среднему движению  $n$ , вычисленному на основе третьего закона Кеплера (3.20). Таким образом,

$$\frac{\partial C_i}{\partial \varepsilon(t_i)} = \left[ \frac{\partial C_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial M} + \frac{\partial C_i}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial M} \right] n, \quad (4.34)$$

где  $\partial x_k / \partial M$  или  $\partial \dot{x}_k / \partial M$  вычисляются по формулам (4.20) или (4.23) соответственно. Производную  $\partial C_i / \partial \varepsilon(t_i)$  используют также для вычисления поправки за время распространения сигнала или эффект „планетной

абберации". После вычисления расстояния  $r$  по формуле (4.14) такой поправкой будет

$$dC_{i, a} = - \frac{\partial C_i}{\partial e(t_i)} \frac{r}{c}, \quad (4.35)$$

где  $c$  — скорость света.

В тех случаях, когда производятся синхронные наблюдения спутника и данные об орбите не используются, координаты  $x_k$  или составляющие вектора скорости координат  $\dot{x}_k$  сами становятся параметрами, т. е.  $\partial x_k / \partial P_j$  и  $\partial \dot{x}_k / \partial P_j$  в (4.33) — единичные матрицы.

Следовательно, остается рассмотреть отдельно каждый вид наблюдений, начиная в (4.32) слева направо.

1. Характеристика наблюдений  $O_i$ , как введено математической формулировкой задачи, включает: изменяются ли, преобразуются или комбинируются непосредственно измеренные величины перед фактическим использованием в вычислениях и каким образом.

2. Вычисленные величины  $C_i$  нужно сравнить с наблюдаемыми  $O_i$ . При вычислении  $C_i$  можно вводить различные поправки, которые, согласно (4.32), можно также ввести в  $O_i$  с обратным знаком, и наоборот. На этом этапе обычно вводят поправки, связанные с влияниями окружающей среды, такими, как рефракция и т. д. Поскольку при определении нескольких различных рядов параметров  $P_j$  модели будет, как правило, использоваться один и тот же ряд наблюдений  $O_i$ , с точки зрения вычислений наиболее целесообразно: а) вводить в качестве поправок к наблюдениям  $O_i$  такие поправки, которые не меняются при любых вероятных изменениях параметров  $P_j$ , и б) учитывать в качестве поправок к вычисленным величинам  $C_i$  такие влияния, которые могут изменяться с возможным изменением параметров  $P_j$ .

3. Выбор математической модели путем отбора ряда уточняемых параметров  $P_j$  и вычисление частных производных  $\partial C_i / \partial P_j$ .

4. Поправка к наблюдению  $dO_i$ , очевидно, должна учитывать в соответствии с (4.32) все разности

$(O - C)_i$ , которые нельзя объяснить поправками к параметрам  $dP_j$ . Следовательно, эта поправка должна устранить все расхождения, вызванные несовершенством математической модели, заданной параметрами  $P_j$ . Поэтому поправки  $dO_i$  могут быть во многих случаях вызваны причинами, которые вообще не являются следствием ошибок в наблюдениях в обычном смысле. В рассматриваемом здесь случае орбит близких спутников такая ситуация будет весьма вероятной из-за того, что в нашей модели не учитывается в полной мере влияние атмосферного торможения. Такие ситуации будут неизбежно возникать, если принять во внимание уровень наших знаний. Поскольку подобные ошибки возникают вследствие влияния внешних условий, управлять которыми значительно сложнее, чем измерительной аппаратурой, гораздо более вероятно, что они должны зависеть друг от друга: чем ближе друг к другу эти ошибки по времени, тем, как правило, ближе они по знаку и величине. Статистические оценки такой зависимости мы будем рассматривать в следующей главе; здесь же рассмотрим порядок величин и степень корреляции различных влияний, для того чтобы решить, где и как необходимо вводить те или иные поправки, а также чтобы выбрать соответствующий метод статистической обработки.

#### 4.4. УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ИЗ УГЛОВЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Основной метод угловых наблюдений состоит в фотографировании спутника на фоне звездного неба. Непосредственно измеряемыми величинами в этом случае являются прямоугольные координаты изображений спутника и звезд на снимке, а также моменты времени экспозиции, определяемые в системе эталонного времени, передаваемого по радио. Геометрия оптической системы камеры показана на рис. 11. Координаты  $(x_0, y_0)$ , измеренные на снимке, можно рассматривать как проекции прямоугольных координат спутника в системе координат с осью  $Z$ , совпадающей

с осью камеры, на фокальную плоскость, отстоящую на расстоянии  $f$  от фокуса камеры. Если ось камеры установить по прямому восхождению и склонению  $(\alpha, \delta)$  опорных звезд, взятых из каталога, то вычисленные значения координат  $(x_c, y_c)$  можно определить из (4.16). Следовательно,

$$C_i = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{p_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{p_x} \mathbf{x}_T, \quad (4.36)$$

где координата  $p_3$  совпадает с расстоянием  $r$ . Координаты  $(x_c, y_c)$  часто называют стандартными координатами и обозначают  $(\xi, \eta)$ .

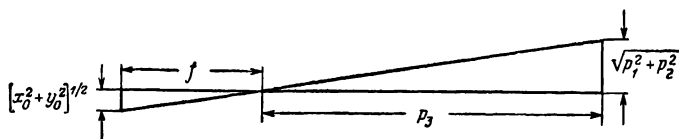


Рис. 11. Геометрия оптической системы камеры.

Обычно учитывают следующие поправки.

1. Изменения в прямом восхождении и склонении  $(\alpha, \delta)$  звезд под влиянием прецессии и нутации с момента, к которому относится звездный каталог, до момента, к которому отнесены вычисления по формуле (4.36). Эти изменения велики, но точно известны и рассмотрены далее, в разд. 4.6. Моментом времени, к которому отнесены вычисления, считают эпоху, к которой отнесены орбитальные постоянные интегрирования; ею обычно является средний момент наблюдений, включенных в обработку. Это связано с тем, что желательно производить динамические вычисления как можно проще, используя инерциальную систему отсчета, в которой основное возмущение — сжатие Земли — будет симметрично относительно экватора. Выбор подобного момента определяется выбором орбиты, а не наблюдений, и, следовательно, указанные изменения рассматриваются как поправки к вычисленным величинам  $C_i$  или  $\{x_c, y_c\}$ , а не к наблюдаемым  $O_i$  или

$\{x_0, y_0\}$ . Тем не менее основная часть этих изменений (при переходе от эпохи каталога к моменту наблюдения) вводится иногда в наблюдаемые величины  $O_i$ , но поскольку эта поправка известна, выгода от такого уменьшения числа поправок в  $C_i$  незначительна.

2. Поправки сигналов времени даются службами времени через некоторое время после выполнения наблюдений (см. разд. 4.6).

Перечислим в порядке возрастающей важности величины, которые следует рассматривать как неизвестные.

1. Ошибки орбитальных параметров в правой части уравнения (4.29).

2. Ошибки в координатах камеры либо относительно центра масс Земли, либо по отношению к другой станции на поверхности Земли, что представляло бы интерес в случае синхронных наблюдений спутника без использования данных об орбите.

Дифференциальное выражение  $dC_i$ , объединяющее эти два вида ошибок, можно получить подстановкой вместо  $\mathbf{x}_T$  в (4.36) выражения из (4.11) и последующим дифференцированием. Таким образом,

$$dC_i = \begin{bmatrix} \frac{f}{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{p_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{p,x} [d\mathbf{x} - \mathbf{R}_3(-\theta) d\mathbf{u}_0]. \quad (4.37)$$

В (4.37)  $d\mathbf{u}_0$  — вектор поправок к координатам станции; вектор поправок к координатам спутника  $d\mathbf{x}$  при использовании данных об орбите может быть представлен выражением (4.29) или тремя поправками к самим параметрам в системе синхронных наблюдений; члены из третьего столбца  $-f p_1/p_3^2$ ,  $-f p_2/p_3^2$  по малости приняты равными нулю.

3. Ошибка времени, возникающая либо вследствие вариаций во времени прохождения сигнала, либо вследствие несовершенства синхронизации затвора камеры или световой вспышки на спутнике с системой отсчета времени. Такие ошибки не должны превышать  $\pm 0^s,001$  или  $\pm 0^s,002$ ; если же они достигают

значительной величины, то ошибки в направлении движения изображения спутника можно считать равносильными частным производным, вычисляемым по формуле (4.34).

4. Ошибки в измеренных координатах спутника на снимке, возникающие из-за вариаций в атмосферной рефракции („мерцание“), или из-за неравномерностей слежения за спутником, или из-за ошибок самих измерений на снимке. Независимо от источника эта ошибка носит чисто дифференциальный характер. Значит, изображение спутника подвержено искажениям, отличающимся от искажений изображений звезд. Поскольку атмосферное мерцание и неравномерность слежения быстро меняются со временем, эти источники ошибок будут более серьезными, когда средний момент экспозиции спутника отличается от среднего момента экспозиции звезд. Наиболее существенными эти источники ошибок будут тогда, когда ошибки имеют место в очень коротком интервале времени, например когда источником света является вспышка. Ошибки такого рода имеют величину  $\pm 2''$  или  $\pm 3''$ , а ошибка мерцания приблизительно обратно пропорциональна диаметру объектива камеры. С другой стороны, ошибка измерения на снимке будет наиболее значительной в том случае, когда характер изображения спутника максимально отличается от характера изображений звезд. Например, это имеет место для камеры, работающей в режиме слежения за звездами, когда звезды изображаются точками, а спутник — прерывистым следом. Ошибки такого рода колеблются от  $\pm 2$  до  $5$  *мк*, или от  $\pm 0'',5$  до  $2'',0$ . Если на одном и том же снимке имеется несколько изображений каждого класса (спутника и звезды), в качестве дополнительных неизвестных при обработке измерений снимка желательно включать дифференциальные смещения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  между различными классами изображений.

5. Ошибки координат звезд в каталоге могут быть  $\pm 0'',5$ ; в некоторых случаях желательно использовать многократные изображения звезды, не вклю-

ченной в каталог, — тогда координаты звезды представляют собой два дополнительных неизвестных.

6. Внешнее ориентирование камеры. Чтобы установить ориентировку осей камеры по отношению к внешней системе, необходимы три угла. Если наблюдения производят с камерой на экваториальной установке, то эти углы определяются как функции вектора  $\mathbf{p}_T$  (4.16). В этом случае углами ориентирования являются прямое восхождение  $\alpha$ , склонение  $\delta$  оси камеры и расхождение  $d\kappa$  в наклоне или крене относительно оси  $p_3$  между предполагаемым направлением оси  $p_1$  и действительным направлением на полюс мира от  $(\alpha, \delta)$ . Если же наблюдения произведены с неподвижной камерой (так, что оси камеры были неподвижны относительно Земли), то они, следовательно, определяются как функции вектора  $\mathbf{b}_T$  (4.18). В этом случае углами ориентирования, как показано на рис. 9, являются крен  $\kappa$ , зенитное расстояние  $z$  и азимут  $A$ .

В любом случае, чтобы получить углы ориентирования для конкретного снимка сравнением вычисленных и измеренных на снимке координат нескольких звезд, можно полагать, что каждая звезда с прямым восхождением  $\alpha$  и склонением  $\delta$  лежит на сфере единичного радиуса. Таким образом,

$$\mathbf{x}_s = \begin{cases} \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \delta \sin \alpha, \\ \sin \delta, \end{cases} \quad (4.38)$$

а вычисленные координаты  $(x_c, y_c)$  на снимке, которые получены путем соответствующего преобразования (4.36), равны

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{p_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3(d\kappa) \mathbf{R}_{p,x} \mathbf{x}_s \quad (4.39)$$

для камер, имеющих экваториальное движение, и

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{\rho_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{\rho_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{bl} \mathbf{R}_{lu} \mathbf{R}_{ux} \mathbf{x}_s \quad (4.40)$$

для неподвижных камер, где  $\mathbf{R}_{bl}$ ,  $\mathbf{R}_{lu}$  и  $\mathbf{R}_{ux}$  получены из (4.18), (4.17) и (2.27) соответственно.

7. Внутреннее ориентирование камеры, или центрирование, и выбор масштаба. Центр снимка, установленный по координатным меткам и используемый в качестве начала отсчета при измерениях на компараторе, может не совпадать с осью камеры. Следовательно, необходимо определить координаты  $x_p$ ,  $y_p$  точки пересечения осей камеры, называемой главной точкой, по отношению к координатам на снимке. Кроме того, чтобы получить поправку масштабного соотношения между расположением фотографического изображения  $(x_0, y_0)$  и внешним расположением объекта  $\mathbf{p}_T$  или  $\mathbf{b}_T$ , необходимо знать фокусное расстояние  $f$ . Элементы центрирования  $(x_p, y_p)$ , так же как и масштабный множитель  $f$ , относительно постоянны, и поэтому их определяют только в результате эпизодических калибровок.

8. Дисторсия камеры. В правильно спроектированной камере дисторсия объектива должна иметь величину менее  $10 \mu\text{к}$  и действовать по радиусу от главной точки. Следовательно, ее можно выразить в виде полинома нечетных степеней радиальной координаты  $r$  (четные степени исключаются вследствие симметрии и непрерывности). Таким образом,

$$\delta_v = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots \quad (4.41)$$

В действительности основной коэффициент  $k_0$  невозможно выделить из масштабного множителя  $f$ . Дисторсия постоянна, так что другие коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , ... можно определить при проведении эпизодических калибровок по элементам внутреннего ориенти-



рования и масштабным параметрам. Тогда в измеренные координаты  $(x_0, y_0)$  вводят поправки

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \frac{\delta r}{r}. \quad (4.42)$$

9. Дифференциальная атмосферная рефракция. Вблизи горизонта вертикальная составляющая атмосферной рефракции может в значительной степени отличаться для изображений спутника и звезды. В этом случае атмосферную рефракцию можно представить в виде степенного ряда по тангенсам зенитного расстояния, а коэффициенты этого степенного ряда можно рассматривать как дополнительные неизвестные параметры. Поскольку параметры рефракции являются функцией зенитного расстояния, необходима местная система координат.

При наблюдениях спутника все ошибки (3)–(9) характерны для определенной камеры или определенного прохождения. Эти ошибки входят в уравнение (4.37) с поправками к параметрам, внешним по отношению к определенным наблюдениям, только через независимые величины  $\{x_0, y_0\}$ . Два поворота  $\{\alpha, \delta\}$ , использованные в матрице  $R_{px}$ , которые также определяют по снимку, связаны с  $\{x_0, y_0\}$ . Поскольку следящие камеры имеют узкое поле зрения, в публикациях результатов фотографических наблюдений принято рассматривать линию, соединяющую камеру и спутник с координатами  $\alpha$  и  $\delta$ , как ось камеры, причем в этом случае  $\{x_0, y_0\}$  равны нулю. Очевидно, нецелесообразно одновременно с неизвестными поправками к положению спутника  $dx$  и станции  $du_0$  включать в уравнивание поправки к элементам ориентирования камеры, к рефракции и т. д. Поэтому дисторсию и параметры внутреннего ориентирования обычно определяют во время выполнения калибровок; параметры внешнего ориентирования, дифференциальные смещения и рефракцию определяют при предварительном уравнивании отдельно для каждого снимка, а результаты выражают в виде окончательных значений  $\{x_0, y_0\}$  и  $\{\alpha, \delta\}$ , которые используются в (4.36) и (4.37). Более подробно см. об этом у Брауна [1].

Существуют два других типа уравнений угловых наблюдений, менее точных, чем те, которые даны для фотографических наблюдений. Во-первых, имеются теодолиты, которые позволяют измерять зенитное расстояние и азимут. Вычисленное значение наиболее удобно получить из компонент вектора  $\mathbf{l}_T$  [где  $\mathbf{l}_T$  вычисляется по формуле (4.17)]:

$$C_i = \begin{bmatrix} z_c \\ A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_3} \\ \operatorname{arctg} \frac{l_1}{l_2} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

откуда

$$(O - C)_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cosec} \frac{z}{r} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_1(-z) \times \\ \times \mathbf{R}_3(-A) \mathbf{R}_{lu} [\mathbf{R}_3(\theta) d\mathbf{x} - d\mathbf{u}_0] - dO_i. \quad (4.44)$$

Во-вторых, существуют интерферометры, которые позволяют определить направляющий косинус базиса, определяемого двумя антеннами, с помощью которых измеряют разность фаз радиосигнала, принимаемого со спутника. Вычисленный направляющий косинус равен

$$C_i = \left[ \frac{\sin A}{r}, \frac{\cos A}{r}, 0 \right] \mathbf{l}_T, \quad (4.45)$$

где  $A$  — азимут оси, вычисленный по  $l_1, l_2$  согласно (4.39), а  $\mathbf{l}_T$  вычисляются по формуле (4.17). Уравнение наблюдений в этом случае имеет вид

$$(O - C)_i = \mathbf{N}' \mathbf{R}_{lu} [\mathbf{R}_3(\theta) d\mathbf{x} - d\mathbf{u}_0] - dO_i, \quad (4.46)$$

в котором

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} \frac{\sin A}{r} - \frac{l_1^2 \sin A + l_1 l_2 \cos A}{r^3}, & \frac{\cos A}{r} - \\ - \frac{l_1 l_2 \sin A + l_2^2 \cos A}{r^3}, & - \frac{l_3 (l_1 \sin A + l_2 \cos A)}{r^3} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

#### 4.5. УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ РАССТОЯНИЯ И СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАССТОЯНИЯ

Скорость изменения расстояния спутника определяют доплеровским методом, в котором измеряют сдвиг частоты радиосигнала, вызванный движением спутника по орбите. Непосредственно измеряемой величиной в этом методе является число доплеровских циклов за определенный стандартный интервал времени, равный, например, одной секунде. В результате деления этого числа циклов на длину интервала получается средняя доплеровская частота для рассматриваемого интервала. Доплеровскую частоту  $\Delta f_i$  через заданную частоту  $f_i$  и скорость света  $c$  можно связать со скоростью изменения расстояния  $\dot{r}$  соотношением

$$\Delta f_i = \frac{f_i}{c} \dot{r} + \frac{\alpha}{f_i}. \quad (4.48)$$

Второй член в (4.48) служит для учета влияния ионосферной рефракции; он обратно пропорционален  $f_i$ , поскольку влияние ионизированной среды на скорость распространения радиосигнала обратно пропорционально  $f_i^2$ . Поскольку плотность ионов в произвольный момент времени известна не очень точно, параметр  $\alpha$  необходимо рассматривать в качестве неизвестного. Таким образом, использование двух уравнений вида (4.48) позволяет получить измеренное значение скорости изменения расстояния  $\dot{r}_0$ :

$$O_i = \dot{r}_0 = c \frac{f_1 \Delta f_1 - f_2 \Delta f_2}{f_1^2 - f_2^2}. \quad (4.49)$$

Вычисленное значение  $C_i$  скорости изменения расстояния дано выражением (4.15). На ошибку времени распространения сигнала влияет тропосферная рефракция. Ее учитывают путем введения известной поправки в измеренное значение скорости изменения расстояния  $\dot{r}_0$ . Влияние этой рефракции на расстояние выражают через интеграл от показателя преломления  $\mu$  по пути прохождения сигнала; поэтому ее влияние на скорость изменения расстояния будет

представлено скоростью изменения этого интеграла со временем:

$$\delta \dot{r} = - \frac{d}{dt} \int_0^r \mu ds = - \int_0^r \frac{d\mu}{dt} ds = - \int_0^r \frac{d\mu}{dh} \frac{dh}{dz} \frac{dz}{dt} ds. \quad (4.50)$$

Здесь  $ds$  — бесконечно малое приращение вдоль пути прохождения сигнала (отличие этого пути от прямой

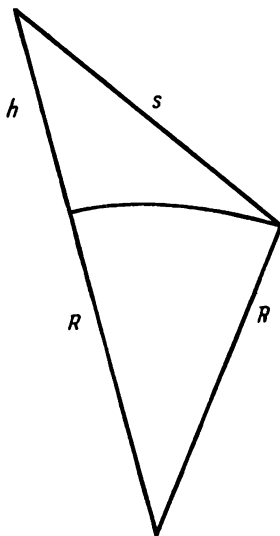


Рис. 12. Связь высоты и расстояния.

станция — спутник для данной задачи пренебрежимо мало),  $z$  — зенитное расстояние, вычисленное по  $I_T$  из (4.39), а  $h$  — высота над поверхностью Земли, вычисленная по формуле (рис. 12)

$$h = \sqrt{R^2 + s^2 + 2Rs \cos z} - R. \quad (4.51)$$

Дифференцирование по времени в (4.50) можно внести под знак интеграла, так как все изменения в положении спутника  $s$  имеют место на высотах, где нет тропосферной рефракции. Рефракционное

влияние  $(\mu - 1)$  обычно выражают в виде экспоненциальной функции от  $h$ . Скорость изменения зенитного расстояния  $dz/dt$  вычисляют, используя законы движения спутника по орбите. Все эти сложности делают более удобным применение метода численного интегрирования для вычисления  $\delta\dot{r}$ . Величина  $\delta\dot{r}$  для спутников, наблюдаемых под углом более  $15^\circ$  над горизонтом, составляет менее  $10 \text{ см/сек}$ , но резко увеличивается в случае меньших высот над горизонтом. Поскольку неопределенность  $(\mu - 1)$  составляет приблизительно 10% ее величины, желательно не производить наблюдений под углом, меньшим  $15^\circ$  над горизонтом.

Чтобы найти дифференциальную поправку к вычисленной скорости изменения расстояния, зависящую от скорости спутника и координат станции, продифференцируем выражение (4.15):

$$\begin{aligned} dC_i = d\dot{r}_i &= d\left(\frac{\mathbf{x}_T \cdot \dot{\mathbf{x}}_T}{r}\right) = \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{x}_T \cdot \left[ d\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial R_3(-\theta)}{\partial \theta} d\mathbf{u}_0 \dot{\theta} \right] + \\ &+ \left[ \frac{d\mathbf{x} - R_3(-\theta) d\mathbf{u}_0}{r} - \frac{\mathbf{x}_T \cdot (d\mathbf{x} - R_3(-\theta) d\mathbf{u}_0)}{r^3} \cdot \mathbf{x}_T \right] \cdot \dot{\mathbf{x}}_T. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Другими величинами, которые должны рассматриваться как неизвестные ошибки, но которые обычно определяют на предварительном этапе, являются:

1) ошибка в излучаемой на спутнике частоте, постоянной в течение всего прохождения;

2) в некоторых случаях ошибка в излучаемой на спутнике частоте, которая смещается в течение всего прохождения;

3) эффект ионосферной рефракции высокого порядка, не учтенный параметром  $\alpha$  в (4.48);

4) вариации тропосферной рефракции по отношению к вычисленным ее значениям с использованием модели  $d\mu/dh$  в (4.50);

5) „шум“ или нарушение непрерывности получения результатов наблюдений, вызванное „провалами“

в подаче сигнала, а также другие ошибки инструментального характера.

Учет этих ошибок наблюдений, как правило, совмещают с процессом объединения данных. Обычно на одном прохождении может быть получено до 400 точек с доплеровской информацией. Однако для получения ценной геодезической информации достаточно иметь менее шести точек на одном прохождении — вероятно, порядка трех. Поскольку скорость изменения расстояния резко меняется за одно прохождение, целесообразно определять произвольные параметры не непосредственно по скорости изменения расстояния, а по остаточным разностям измеренных скоростей изменения расстояний  $\dot{r}_o$  по отношению к их вычисленным значениям  $\dot{r}_c$  с использованием номинальной орбиты. Например, для  $n$  точек и  $m+1$  параметров условие способа наименьших квадратов имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left[ (\dot{r}_{oi} - \dot{r}_{ci}) - \sum_{j=0}^m a_j (t_i - t_0)^j \right]^2 = \min, \quad (4.53)$$

где для определения коэффициентов  $a_j$  полинома можно использовать  $t_0$  — время средней точки прохождения. Тогда для нескольких выбранных моментов  $t_k$  объединенную скорость изменения расстояния  $\dot{r}_a$  можно записать как

$$\dot{r}_a = \dot{r}_c(t_k) + \sum_{j=0}^m a_j (t_k - t_0)^j. \quad (4.54)$$

Представление в виде полинома позволяет также исключить путем сглаживания некоторые ошибки. Объединенные скорости изменения расстояний можно затем использовать как наблюдения  $O_i$  в уравнениях наблюдений (4.32), в которых значения частных производных  $\partial C_i / \partial P_j$  вычисляются путем комбинации (4.29) и (4.52). Не обязательно, чтобы доплеровская информация на прохождении была в конечном счете представлена объединенными скоростями изменения расстояний  $\dot{r}_a$ ; можно использовать и другие параметры; такие, например, как ошибки видимого положения

спутника на траектории и отклонений от нее или ошибки отклонения от средней частоты. Более подробно об обработке результатов доплеровских измерений см. у Гайера [3, 4] и Хопфилда [5].

При измерениях расстояния непосредственно измеренными величинами являются либо промежутки времени между посланным и принятым локационными импульсами, либо сдвиги фаз принятого сигнала по отношению к посланному когерентному сигналу. Измерения расстояний производят или на частотах более  $10^3$  МГц, или же, в целях исключения влияния ионосферной рефракции, путем использования двойных частот, подобно (4.48) — (4.49). В этих измерениях также необходимо учитывать тропосферную рефракцию и выполнить объединение результатов измерений, подобно соотношениям (4.47) и (4.50) — (4.51). Вычисленное значение расстояния получают из (4.14), откуда поправка к нему имеет вид

$$dr = \frac{1}{r} \mathbf{x}_T \cdot [d\mathbf{x} - \mathbf{R}_3(-\theta) du_0]. \quad (4.55)$$

#### 4.6. ВРЕМЯ И ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ

Время измеряют по отсчетам какого-либо типа повторяющегося явления. Идеальным временем для использования в качестве системы отсчета при орбитальных наблюдениях спутников может служить „гравитационное“ время, т. е. время, которое в точности совпадает с временем, принятым в качестве независимой переменной при рассмотрении динамики орбиты спутника в гл. 3. В том случае, если все виды движения по орбите согласуются с принципами, на которых основаны динамические выводы (а это условие до сих пор соблюдалось с учетом, там, где это необходимо, релятивистских поправок), идеальным повторяющимся явлением, которое можно рассматривать в качестве стандарта времени, может быть наиболее точно известный период обращения. Таким наиболее точно известным периодом является период обращения Луны вокруг Земли. Время, определяемое по движению Луны, называется эфемеридным време-

нем (ЕТ). (Хотя точнее всего ЕТ выводят по движению Луны, формально это время определяют периодом движения Земли вокруг Солнца на эпоху 1900.0.) Однако эфемеридное время не используют непосредственно для временной привязки наблюдений искусственных спутников. Соответствующие службы времени дают вместо него атомное время  $A1$ , измеряемое резонансной частотой колебания атомов цезия. Было установлено, что атомное время  $A1$  не расходится с ЕТ и что оно вполне заменяет ЕТ при использовании спутников в геодезических целях.

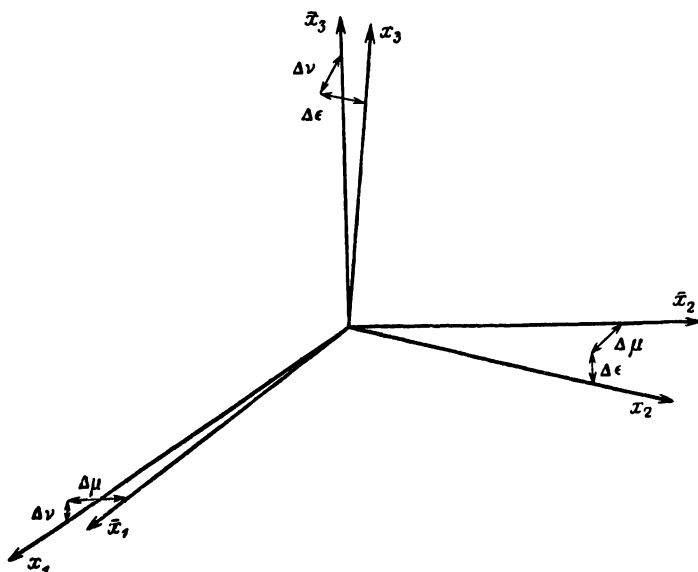
Приведенные выше уравнения были записаны в предположении, что система координат  $x$ , определяемая осью  $x_1$ , направленной к точке весеннего равноденствия, и осью  $x_3$ , направленной вдоль оси вращения Земли, неподвижна относительно инерциального пространства. В действительности же ось вращения и точка весеннего равноденствия непрерывно меняют свое положение под воздействием прецессии и нутации Земли. Последние являются следствием особенностей гравитационного влияния Луны, связанных с отклонениями Земли от однородного сферического тела. В любой момент  $t$  экватор и точка весеннего равноденствия, к которым отнесены координаты  $x$  (истинные координаты) точки, неподвижной по отношению к центру Земли, и инерциальная система отсчета могут быть связаны дифференциальным поворотом  $R_{x\bar{x}}$ , примененным к координатам  $\bar{x}$  (средним координатам), имеющим только чисто вековое изменение (а именно в виде полинома по  $t$ ). Поскольку  $R_{x\bar{x}}$  представляет собой дифференциальный поворот, можно положить косинусы равными единице, синусы — равными соответствующим углам, а произведения синусов — равными 0. При этих условиях общий поворот можно представить в виде произведения поворотов вокруг каждой из трех координатных осей в любой последовательности. Обычно применяют поворот против часовой стрелки вокруг оси 2 на угол  $\Delta\nu$  (называемый нутацией в склонении) и поворот по часовой стрелке вокруг осей 1 и 3: на угол  $-\Delta\epsilon$  (называемый нутацией в наклонении) и угол  $-\Delta\mu$



(называемый нутацией в прямом восхождении) (рис. 13). В таком случае

$$\mathbf{R}_{x\bar{x}} = \mathbf{R}_1(-\Delta\epsilon)\mathbf{R}_2(\Delta\nu)\mathbf{R}_3(-\Delta\mu) = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\epsilon \\ \Delta\nu & \Delta\epsilon & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Средние координаты  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  обычно представляют в виде средних координат на эпоху  $t_0$ , а  $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$  — поворотом по часовой стрелке вокруг оси 3 на угол



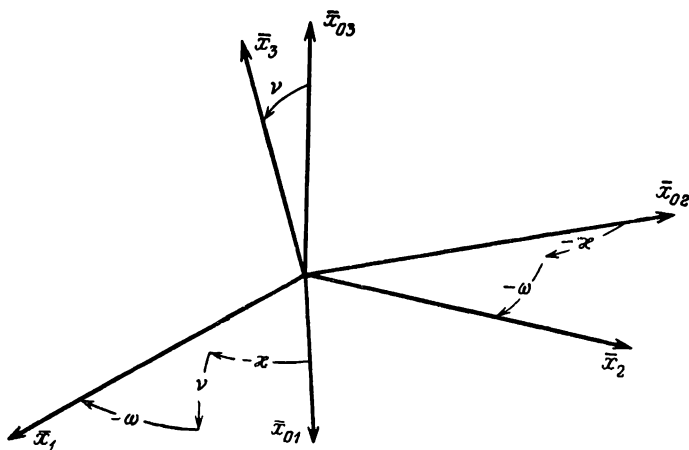
Р и с. 13. Углы нутации.

—  $(\kappa + \omega)$ , называемый прецессией в прямом восхождении, и поворотом против часовой стрелки вокруг оси 2 на угол  $\nu$ , называемый прецессией в склонении. Прецессия в прямом восхождении делится на две равные составляющие:  $\kappa$  — вдоль среднего экватора на эпоху  $t_0$  и  $\omega$  — вдоль среднего экватора на эпоху  $t$

(рис. 14). Тогда

$$\mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}_0} = \mathbf{R}_3(-\omega) \mathbf{R}_2(\nu) \mathbf{R}_3(-\chi). \quad (4.57)$$

Мы выразили влияние прецессии и нутации применительно к прямоугольным координатам, отнесенным к экватору и точке весеннего равноденствия. На практике подобные повороты нельзя применить к координатам спутника в любой произвольной системе координат. Эти координаты всегда, от начала



Р и с. 14. Углы прецессии.

и до конца обработки, следует относить к фиксированной системе координат, так чтобы основное возмущение, обусловленное сжатием Земли, было бы наиболее симметричным относительно выбранного экватора. Экватор в такой системе координат должен, следовательно, представлять собой истинный экватор, отнесенный к средней эпохе вычисляемой орбитальной дуги. Что же касается точки весеннего равноденствия, то любое выбранное ее положение можно считать одинаково удобным. Одни исследователи используют точку весеннего равноденствия, определяемую ее положением на эпоху 1950.0, другие — истинное положение точки весеннего равноденствия

на эпоху орбиты. Однако с целью установления соответствия с координатами, использованными для орбитальной дуги, следует применять повороты в двух других случаях.

1. Прямое восхождение и склонение  $(\alpha, \delta)$  в фотографических наблюдениях обычно относят к системе координат звездного каталога или к какой-либо другой стандартной системе, определяемой, например, средним экватором и равноденствием на эпоху 1950.0. Следовательно, повороты (4.56) и (4.57) необходимо применить к единичному вектору, представляющему собой направление  $(\bar{\alpha}_0, \bar{\delta}_0)$ :

$$\begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x\bar{x}} \mathbf{R}_{\bar{x}\bar{x}_0} \begin{bmatrix} \cos \bar{\delta}_0 \cos \bar{\alpha}_0 \\ \cos \bar{\delta}_0 \sin \bar{\alpha}_0 \\ \sin \bar{\delta}_0 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$ , эквивалентные направляющим косинусам, приведенным в (4.58), могут быть также получены непосредственно по формулам [10, стр. 243–244]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha}_0 + (\chi + \omega) + \Delta\mu + (\nu + \Delta\nu) \sin \bar{\alpha}_0 \operatorname{tg} \bar{\delta}_0 - \Delta\varepsilon \cos \bar{\alpha}_0 \operatorname{tg} \bar{\delta}_0, \\ \delta &= \bar{\delta}_0 + (\nu + \Delta\nu) \cos \bar{\alpha}_0 + \Delta\varepsilon \sin \bar{\alpha}_0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Если координаты  $\mathbf{x}$  на орбите отнесены к истинному экватору и истинному равноденствию, (4.59) следует использовать в приведенном виде. Если же дуга отнесена к истинному экватору и некоторому среднему равноденствию, тогда  $\Delta\mu$  нужно опустить, а прецессия  $(\chi + \omega)$  должна соответствовать периоду времени от эпохи, к которой отнесено  $\bar{\alpha}_0$ , до среднего равноденствия эпохи, к которой отнесены координаты  $\mathbf{x}$ .

Удобной мерой отсчета времени при вычислениях орбиты спутника являются модифицированные юлианские дни, или MJD, для которых 1 января 1950 года соответствует значение 33282,0, а 0 января 1960 года — значение 36933,0. При использовании  $t$ ,

выраженного в MJD, имеем следующие соотношения:

$$T = \frac{t - 33281,923}{365,242},$$

$$\Omega_0 = -0,338(T - 0,61),$$

$$\lambda_{\odot} = 2\pi(T - 0,219),$$

$$\kappa = 0,0001117T + O(10^{-7}),$$

$$\omega = 0,0001117T + O(10^{-7}),$$

$$\nu = 0,0000969T - O(10^{-7}),$$

$$\Delta\mu = -[76,48 \sin \Omega_0 + 5,64 \sin 2\lambda_{\odot} + O(1,0)] \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta\nu = -[33,3 \sin \Omega_0 + 2,5 \sin 2\lambda_{\odot} + O(0,4)] \cdot 10^{-6}, \quad (4.60)$$

$$\Delta\epsilon = [44,7 \cos \Omega_0 + 2,7 \sin 2\lambda_{\odot} + O(0,4)] \cdot 10^{-6}.$$

Здесь  $\Omega_0$  — долгота узла лунной орбиты, а  $\lambda_{\odot}$  — долгота Солнца. Значение MJD, равное 33281,923, соответствует началу бесселева года 1950.0, к которому отнесены средние места звезд.

2. Гринвичское звездное время  $\theta$ , использованное в уравнениях наблюдений (4.37)–(4.55), следует рассматривать как угол между гринвичским меридианом в момент наблюдения и равноденствием, выбранным в качестве начала отсчета для координат  $x$  на орбите. Таким образом, в одном и том же вычислении орбиты  $\theta$  должно содержать те же самые членки, являющиеся следствием движения точки весеннего равноденствия, что и любое прямое восхождение на экваторе. Если дано среднее звездное время  $\bar{\theta}_{00}$  на эпоху  $t_{00}$ , средняя скорость  $\dot{\theta}$  вращения Земли относительно инерциального пространства и координаты  $x$ , отнесенные к истинному равноденствию эпохи  $t_0$ , то для времени  $t$  имеем

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{00} + \dot{\theta}(t - t_{00}) + (\dot{\kappa} + \dot{\omega})(t_0 - t_{00}) + \Delta\mu(t_0). \quad (4.61)$$

В том случае, если координаты  $x$  отнесены к среднему равноденствию, член  $\Delta\mu$  следует опустить.

Время обычно дается в сутках, часах, минутах и секундах:

$$t = d + \frac{h}{24} + \frac{m}{1440} + \frac{s}{86400}. \quad (4.62)$$

Таким образом, в практических вычислениях более удобна следующая формула (где  $\bar{\theta}$  взято по модулю  $2\pi$ ):

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_{00} + (\dot{\theta} + \dot{\lambda} + \dot{\omega} - 2\pi)(t - t_{00}) + 2\pi\left(\frac{h}{24} + \frac{m}{1440} + \frac{s}{86400}\right) + (\dot{\lambda} + \dot{\omega})(t_0 - t) + \Delta\mu(t_0). \quad (4.63)$$

Приведем некоторые числовые значения:

$$\begin{aligned} t_{00} &= 36933,0, \\ \bar{\theta}_{00} &= 1,72218613, \\ (\dot{\theta} + \dot{\lambda} + \dot{\omega} - 2\pi) &= 0,0172027913, \\ \dot{\lambda} + \dot{\omega} &= 0,611 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Черта над обозначением звездного времени  $\bar{\theta}$  в (4.61) и (4.63) означает, что эти уравнения основаны на предположении, что Земля вращается с постоянной скоростью вокруг оси, фиксированной по отношению к земной коре, к которой отнесены также координаты  $\mathbf{c}_0$  станций слежения в уравнениях наблюдений (4.37)–(4.55). Такое предположение неверно: перемещения масс в атмосфере Земли вызывают вариации в положении полярной оси порядка 5 м и по времени 0<sup>s</sup>03. Смещение вдоль экватора 0<sup>s</sup>036 $a_e$  составляет приблизительно 14 м; поэтому, если мы заинтересованы в получении такой точности, гринвичское звездное время для его использования в (4.37)–(4.55) должно быть предварительно исправлено в соответствии с формулой (4.63).

С перемещениями оси вращения Земли и изменениями скорости ее вращения связаны три системы времени, определяемые вращением Земли и называемые всемирным временем (UT):

1) UT0 относится к мгновенному вращению вокруг мгновенной оси: именно это время можно получить из наблюдений прохождений звезд через меридиан обсерватории, расположенной на поверхности Земли.

2) UT1 относится к мгновенному вращению вокруг средней оси и определяется Международной службой широты в результате усреднения наблюдений,

проведенных в течение шести лет. Интервал в шесть лет был выбран потому, что он является наименьшим общим кратным вынужденного годового и свободного 14-месячного колебания широты.

3) UT2 относится к аппроксимации среднего вращения вокруг средней оси: оно отличается от UT1 на величину вычисляемой сезонной вариации, равной приблизительно  $0^{\circ}03$ .

Вводя поправки в гринвичское звездное время, мы рассматриваем только вращение вокруг оси З. Поэтому в наблюдениях искусственных спутников целесообразно использовать UT1. Если орбита вычисляется в системе атомного времени A1, мы должны ввести в среднее звездное время  $\bar{\theta}$ , согласно (4.63), окончательную поправку  $\Delta\theta$ . Тогда

$$\theta = \bar{\theta} + \Delta\theta = \bar{\theta} + \theta(UT1 - A1). \quad (4.65)$$

Поскольку UT1 является величиной, получаемой по наблюдениям, разность  $(UT1 - A1)$  невозможно выразить формулой. Бюллетени сигналов времени, дающие разности между UT2, UT1, UT0, A1 и передаваемыми сигналами времени, публикуются ежеквартально Королевской Гринвичской обсерваторией и Морской обсерваторией США. Разность  $UT1 - A1$  составляет приблизительно  $2^{1/2}$ .

#### 4.7. УСЛОВИЯ ВИДИМОСТИ

В ряде случаев требуется установить, можно ли наблюдать спутник при заданном сочетании положения станции слежения и спутника. Наиболее очевидное условие видимости заключается в том, чтобы спутник находился над горизонтом станции слежения:

$$l_3 > 0, \quad (4.66)$$

где  $l_3$  — вертикальная составляющая в системе координат  $l_T$ , определяемая выражением (4.17). Из (4.17) имеем

$$l_3 = kR_{lu} [R_3(\theta) R_{xq}q - u_0] > 0, \quad (4.67)$$

где  $\mathbf{k}$  — результат перестановки  $\{0, 0, 1\}$  единичного вектора по оси 3.  $\mathbf{kR}_{lu}\mathbf{u}_0$  есть приближенное выражение для радиуса-вектора станции по отношению к центру Земли.  $\mathbf{R}_{lu}$  постоянно во времени, а  $\mathbf{R}_{xq}$ , определяемое уравнением (2.32), медленно меняется с движением перигея и узла. Таким образом, для заданных суток можно записать (4.67) более точно, а именно:

$$[r_{31}, r_{32}, r_{33}] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{bmatrix} - R_E > 0, \quad (4.68)$$

где  $r_{ij}$  — элементы  $\mathbf{R}_{lu}$ ,  $\mathbf{R}_3(\theta)$  определено выражением (2.7),  $s_{ij}$  — элементы  $\mathbf{R}_{xq}$ ,  $\mathbf{q}$  дано формулой (3.23), а  $R_E$  — радиус Земли. Выполнив перемножения в (4.68), получим условие прохождения спутником горизонта:

$$f(\theta)\cos E + g(\theta)\sin E - h(\theta) = 0, \quad (4.69)$$

где

$$f(\theta) = a[(r_{31}\cos\theta - r_{32}\sin\theta)s_{11} + \\ + (r_{31}\sin\theta + r_{32}\cos\theta)s_{21} + r_{33}s_{31}], \\ g(\theta) = a\sqrt{1-e^2}[(r_{31}\cos\theta - r_{32}\sin\theta)s_{12} + \\ + (r_{31}\sin\theta + r_{32}\cos\theta)s_{22} + r_{33}s_{32}], \\ h(\theta) = R_E + ef(\theta). \quad (4.70)$$

Если подставить  $\sqrt{1-\cos^2 E}$  вместо  $\sin E$ , решить полученное квадратное уравнение относительно  $\cos E$ , выполнить далее подобную подстановку для  $\cos E$  и решить относительно  $\sin E$  с целью исключения неопределенности при определении эксцентрической аномалии  $E$ , то получим

$$\cos E = \frac{fh \pm g\sqrt{f^2 + g^2 - h^2}}{f^2 + g^2}, \\ \sin E = \frac{gh \mp f\sqrt{f^2 + g^2 - h^2}}{f^2 + g^2}. \quad (4.71)$$

Условие видимости будет соответствовать действительному решению, т. е.

$$f^2 + g^2 > h^2. \quad (4.72)$$

Для любого конкретного оборота спутника  $0 < M < 2\pi$  гринвичское звездное время можно записать в виде

$$\theta = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}}{\dot{M}} M, \quad (4.73)$$

где  $\theta_0$  — звездное время в перигее, а  $\dot{M}$  вычислено с помощью (3.20) и (3.74). Для сочетания конкретной станции, определяемой матрицей  $\mathbf{R}_{iu}$ , конкретного дня, определяемого  $\mathbf{R}_{xq}$ , и конкретного оборота, определяемого  $\theta_0$ , установить, выполняется ли условие видимости спутника, можно методом приближений, приняв в качестве первого приближения

$$1) \quad \theta = \theta_0 = \frac{\dot{\theta}}{\dot{M}} \pi; \quad (4.74)$$

затем

- 2) вычисляем  $f$ ,  $g$ ,  $h$  с помощью (4.70);
- 3) проверяем выполнение условия (4.72);
- 4) в случае удовлетворения этого условия определяем оба корня  $E_1$  и  $E_2$  из (4.71);
- 5) снова вычисляем  $\theta$  из (3.19):

$$\theta = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}}{2\dot{M}} [E_1 + E_2 - e(\sin E_1 + \sin E_2)]; \quad (4.75)$$

6) возвращаемся к этапу (2) до тех пор, пока изменения в  $E_1$  и  $E_2$  не станут незначительными.

Для анализа пересечения орбитой спутника тени Земли можно применить аналогичную схему приближений. Пусть имеется геоцентрическая система координат  $\mathbf{s}$  с осью  $s_1$ , направленной к Солнцу. Тогда условие пересечения тени Земли можно записать в виде (рис. 15)

$$\begin{aligned} s_1 &< 0, \\ s_2^2 + s_3^2 &= R_E^2, \end{aligned} \quad (4.76)$$

или

$$s_1 = -\sqrt{r^2 - R_E^2}. \quad (4.77)$$



Гелиоцентрические координаты  $s$  можно связать с координатами  $x$ , отнесенными к экватору и равноденствию, с помощью элементов орбиты Солнца относительно Земли. Поскольку эта орбита определяет точку весеннего равноденствия, долгота ее узла всегда равна нулю. Тогда из рис. 3 следует, что

$$R_{sx} = R_3(\omega + f) R_1(\varepsilon) = R_3(\lambda_{\odot}) R_1(\varepsilon), \quad (4.78)$$

где  $\lambda_{\odot}$  — долгота Солнца из (4.60), а  $\varepsilon$  — наклонение эклиптики к экватору, равное  $23^{\circ} 27'$ . В таком слу-

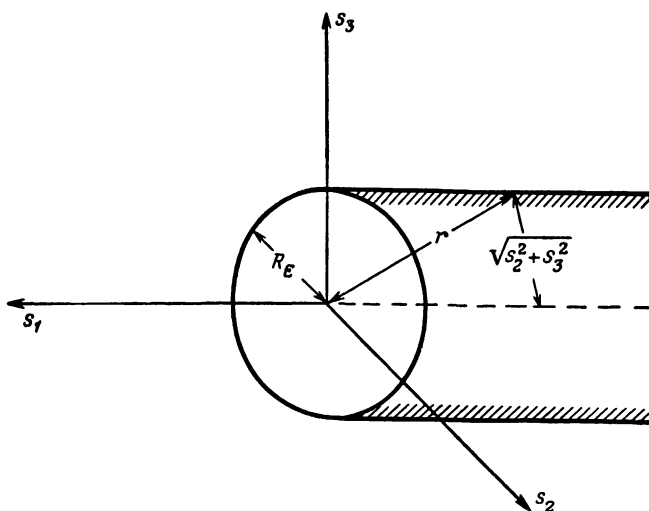


Рис. 15. Орбита и зона тени.

чае (4.77) можно записать в форме, зависящей только от параметров, связанных с орбитами Солнца и спутника, а именно:

$$s_1 = iR_{sx}R_{xq} = -\sqrt{r^2 - R_E^2}, \quad (4.79)$$

где  $i$  — результат транспонирования  $\{1, 0, 0\}$  единичного вектора вдоль оси 1, или

$$\begin{aligned} r_{11}a(\cos E - e) + r_{12}a\sqrt{1 - e^2}\sin E = \\ = -\sqrt{a^2(1 - e\cos E)^2 - R_E^2}, \quad (4.80) \end{aligned}$$

где  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  — элементы  $\mathbf{R}_{sx}\mathbf{R}_{xq}$ ;  $\mathbf{q}$  определено в соответствии с (3.23), а  $r$  — в соответствии с (3.15). Уравнение (4.80) можно переписать, подобно (4.69), в следующем виде:

$$f \cos E + g \sin E - h(E) = 0, \quad (4.81)$$

где имеем

$$\begin{aligned} f &= r_{11}a, \\ g &= r_{12}a \sqrt{1 - e^2}, \\ h(E) &= r_{11}ae - \sqrt{a^2(1 - e \cos E)^2 - R_E^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Отличия этих формул от (4.69)–(4.70) заключаются в том, что теперь  $f$ ,  $g$  (будучи функциями  $\lambda_\odot$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ) изменяются гораздо медленнее, тогда как  $h(E)$  имеет быстрое, но небольшое изменение, поскольку является функцией аномалии  $E$  или  $M$ , содержащей малый множитель (эксцентриситет  $e$ ). Поэтому снова можно применить решение методом приближений с использованием (4.71) и (4.72). Чтобы быть уверенными в том, что условие (4.72) выполняется, начальное значение  $h(E)$  должно приводить к минимальному значению  $h^2$ , т. е. нужно:

- 1) положить  $\cos E = 1$ ;
- 2) вычислить  $f$ ,  $g$ ,  $h$  в соответствии с (4.82);
- 3) проверить выполнение условия (4.72);
- 4) если условие (4.72) выполняется, найти оба корня  $E_1$  и  $E_2$  уравнения (4.71);
- 5) используя (4.82), заново вычислить  $h(E_1)$ ,  $h(E_2)$  и
- 6) вернуться к этапу (2), выполняя последовательные приближения по отдельности для  $E_1$  и  $E_2$  до тех пор, пока их изменения не станут незначительными.

Задачу отыскания пересечения линии горизонта и земной тени можно также решить графически; см. работы Вейса [11, 13].

Термин „условия видимости“ в дополнение к геометрическим условиям, рассмотренным выше, должен также включать вопросы, связанные с силой сигнала и его затуханием в атмосфере, причем решение по-

следнего вопроса становится чрезвычайно трудным, если использовать фотографические наблюдения, выполненные при облачной погоде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown D. C.*, An Advanced Reduction and Calibration for Photogrammetric Cameras, AF Cambridge Res. Lab. Tech. Rep. 64-40, 1964.
2. *Gaposchkin E. M.*, Differential Orbit Improvement (DOI-3), Smithsonian Astrophys. Obs. Special Rep. 161, 1964.
3. *Guier W. H.*, Studies on Doppler Residuals — I: Dependence on Satellite Orbit Error and Station Position Error, Johns Hopkins Univ. Appl. Phys. Lab. Rep. TG-503, 1963.
4. *Guier W. H.*, Ionospheric Contributions to the Doppler Shift at VHF from Near Earth Satellites, Johns Hopkins Univ. Appl. Phys. Lab. Rep. CM-1040, 1963.
5. *Hopfield H. S.*, The Effect of Tropospheric Refraction on the Doppler Shift of a Satellite Signal, J. Geophys. Res., **68**, № 18, 5157—5168 (1963).
6. *Kaula W. M.*, Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **5**, № 2, 104—133 (1961) (русский перевод: *У. М. Каула*, Анализ орбит спутников для геодезических целей, в кн. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 135—143).
7. *Kaula W. M.*, Celestial Geodesy, Adv. Geophys., **9**, 191—293 (1962) (русский перевод: *В. М. Каула*, Космическая геодезия, изд-во «Недра», М., 1966).
8. *Mueller J. I.*, Introduction to Satellite Geodesy, Frederick Ungar Publ. Co. Inc., New York, 1964 (русский перевод: *И. Меллер*, Введение в спутниковую геодезию, изд-во «Мир», М., 1967).
9. Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, Explanatory Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac, H. M. Stationary Office, London, 1961.
10. *Smart W. M.*, Spherical Astronomy, 4th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1944.
11. *Veis G.*, Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., **3**, № 9, 95—161 (1960) (русский перевод: *Г. Вейс*, Геодезическое использование искусственных спутников Земли, изд-во «Недра», М., 1967).
12. *Veis G.* (ed.), The Use of Artificial Satellites for Geodesy, vol. I, Proc. 1st Intl. Symp. on the Use of Artificial Satellites for Geodesy, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963.
13. *Veis G.*, Optical Tracking of Artificial Satellites, Space Sci. Rev., **2**, № 2, 250—296 (1963).

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

---

### 5.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В гл. 3 мы рассматривали возмущения орбиты близкого спутника, представленной шестью величинами  $\{x, \dot{x}\}$  или  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$  относительно времени  $t$ . Эти возмущения можно представить в виде периодических колебаний, наложенных на вековым образом изменяющуюся модель, т. е. в виде 6-мерного векторного временного ряда. Поскольку вопрос статистического исследования временных рядов в последнее время привлек к себе большое внимание, можно было бы использовать некоторые результаты этого исследования для решения задач, связанных с геодезическим использованием спутников. Однако в последнем разделе гл. 4 было высказано предположение, что использование временных рядов для спутника связано с некоторой трудностью, возникающей из-за определенных геометрических ограничений при выполнении наблюдений.

В гл. 4 рассмотрено составление уравнений наблюдений, включающих два вида поправок: поправки к параметрам  $dP_j$  и поправки к наблюдениям  $dO_i$ . Решению систем таких уравнений на основе обычного и обобщенного принципа наименьших квадратов также уделяется большое внимание. Однако, как уже было указано, и здесь существуют свои трудности. Так называемые поправки к наблюдениям  $dO_i$ , безусловно, устраняют ту часть расхождений между математической моделью и действительностью, которая не содержит ошибок случайного характера, ожидаемых при хорошо организованных инструментальных наблюдениях. Мы полагаем, что оба этих

статистических метода анализа орбиты и наблюдений спутника можно успешно использовать совместно.

### 5.2. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Пусть  $\mathbf{y}(t)$  — непрерывная функция времени, которая может быть вектором любой размерности. Для любого интервала времени  $T$  эта функция может, очевидно, быть представлена с любой желаемой степенью точности как сумма синусоидальных членов. Таким образом, имеем

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \mathbf{a}_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + \mathbf{b}_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

где для данного  $\mathbf{y}(t)$  при  $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \frac{2 - \delta_{0n}}{T} \int_0^T \mathbf{y}(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt, \\ \mathbf{b}_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{y}(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Равенства (5.2) следуют из свойства ортогональности:

$$\int_0^T \begin{bmatrix} \sin \\ \text{или} \\ \cos \end{bmatrix} \frac{2\pi n}{T} t \begin{bmatrix} \sin \\ \text{или} \\ \cos \end{bmatrix} \frac{2\pi m}{T} t dt = 0, \quad m \neq n. \quad (5.3)$$

Если  $\mathbf{y}(t)$  представляет собой «достаточно хорошую» ограниченную функцию, величина коэффициентов  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$  будет, как правило, уменьшаться с возрастанием  $n$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

Если  $\mathbf{y}$  по мере увеличения интервала  $T$  остается в тех же пределах, то разложение в ряд Фурье (5.1) остается справедливым, и если сумма квадратов коэффициентов  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$ , представляющая собой вариацию

в пределах определенной полосы частот  $\Delta f$ , приближается к постоянной величине, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{C}(f, \Delta f, T) = \text{const}, \quad (5.5)$$

где для каждого элемента  $C_i$  матрицы  $\mathbf{C}$ , соответствующего элементам  $a_{in}$ ,  $b_{in}$  векторов  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$ ,

$$C_i(f, \Delta f, T) = \sum_n (a_{in}^2 + b_{in}^2), \quad (5.6)$$

$$T \left[ f - \frac{\Delta f}{2} \right] \leq n \leq T \left[ f + \frac{\Delta f}{2} \right].$$

Следовательно, в этом случае  $\mathbf{y}(t)$  можно представить как предел

$$\mathbf{y}_p(t) = \sum_{k=1}^l [\mathbf{c}_k \cos 2\pi f_k t + \mathbf{d}_k \sin 2\pi f_k t] + \int_0^{\infty} [\mathbf{g}(f) \cos 2\pi f t + \mathbf{h}(f) \sin 2\pi f t] df, \quad (5.7)$$

где производится суммирование конечного ряда дискретных частот (линейный спектр) и интегрирование непрерывной вариации плотности  $\mathbf{g}(f)$ ,  $\mathbf{h}(f)$  по частоте (непрерывный спектр), а индекс  $p$  означает периодичность. Очевидно, что для достаточно малого  $\Delta f$  элемент  $C_i$  матрицы  $\mathbf{C}(f_k, \Delta f, \infty)$  равен  $(c_{ik}^2 + d_{ik}^2)$ .

Однако условие (5.5) может и не выполняться, когда значения  $\mathbf{y}(t)$  не остаются заключенными в определенных пределах, а увеличиваются, уменьшаются или все в большей степени колеблются во времени. В этом случае  $\mathbf{y}(t)$  необходимо представить в виде

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_s(t) + \mathbf{y}_p(t), \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{y}_p(t)$  взято из уравнения (5.7), а

$$\mathbf{y}_s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{z}_j(t - t_j)^j, \quad (5.9)$$

индекс  $s$  означает „вековой“. В этом случае для достаточно большого интервала  $T$  преобладающее из-

менение в  $y$  будет всегда выражено вековой частью  $y_s$ . В данном случае нижние пределы  $z_j$ ,  $z_1$  и  $z_2$ , могут быть значительно меньше, чем нижние пределы  $a_n$ ,  $b_n$ , а  $z_j$  может с возрастанием  $j$  быстро стремиться к нулю, так что при коротких и средних интервалах  $T$  станет возможным рассмотрение  $y$  как периодической функции  $y_p$ . Если значения  $z_j$  известны, это очень просто сделать одним лишь вычитанием  $y_s$ . Однако если значения  $z_j$  неизвестны, всегда будет иметь место некоторое искажение  $a_n$ ,  $b_n$ , так как для  $z_j$  не выполняется условие ортогональности (5.3).

Известно, что функция  $y_p$  — стационарная функция, поскольку ее статистические свойства постоянны во времени. Основным статистическим свойством этой функции является ее среднее квадратическое значение. Поскольку  $y_p$  не является радиусом-вектором и его различные компоненты могут даже иметь разные размерности, целесообразно рассматривать этот средний квадрат в качестве вектора (а не скалярного произведения), каждая составляющая  $y_i^2$  которого равна

$$\begin{aligned} \sigma^2 [y_i] &= E [y_i^2] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^l [c_{ik}^2 + d_{ik}^2] + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [g_i^2(f) + h_i^2(f)] df df' \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) является следствием свойства ортогональности (5.3), в котором  $T$  меняется от нуля до бесконечности. Уравнение (5.10) можно привести к более общему виду двумя способами. Во-первых, может существовать ненулевое среднее произведение  $E \{y_i y_j\}$  (вариация) и, во-вторых, ненулевое среднее произведение  $E \{y_i(t) y_i(t + \tau)\}$  (ковариация). Вариация будет в большинстве случаев известной функцией дисперсии — по заданным  $c_{ik}^2$ ,  $d_{ik}^2$ ,  $g_i^2$ ,  $h_i^2$  для одной составляющей могут быть вычислены эти величины и для других составляющих, но это не выполняется

для ковариаций. Умножив  $y_{ip}(t)$  на  $y_{ip}(t + \tau)$  из (5.7) и преобразовав произведения синусов и косинусов в суммы, используя (5.3), получим

$$\begin{aligned} \text{Cov}_i(\tau) &= E[y_i(t)y_i(t + \tau)] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^l [(c_{ik}^2 + d_{ik}^2) \cos 2\pi f_k \tau] + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [g_i^2(f) + h_i^2(f)] \cos 2\pi f \tau df df \right\}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Оскулирующие кеплеровы элементы  $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$  орбиты близкого спутника можно представить соответствующей комбинацией уравнений (3.113), (3.76) и (3.153)–(3.158). Большую часть (более 99%) возмущений при этом можно рассматривать как известные, включая и основные вековые члены  $\dot{M}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ , обусловленные главными членами  $kM$  и  $J_2$ , а также  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $di/dt$ ,  $\ddot{M}$ ,  $\ddot{\Omega}$ ,  $\ddot{\omega}$ , возникающие при использовании простых моделей атмосферы и радиационного давления. В исследовании временных рядов  $y(t)$  представляют интерес остаточные отклонения действительного движения по отношению к известной его части. Этот временной ряд будет содержать значительные по величине члены  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $di/dt$ ,  $\ddot{M}$ ,  $\ddot{\Omega}$ ,  $\ddot{\omega}$  из-за недостаточной точности модели атмосферы. Однако эти шесть членов можно сократить до двух, если представить остальные как функции ускорения в средней аномалии и скорости вращения атмосферы. Для интервалов  $T$  наблюдений за спутниками, представляющих интерес для геодезии, непостоянство баланса атмосферного сопротивления можно представить в виде непрерывного спектра в (5.7). Чтобы сравнить этот спектр сопротивления со спектром, возникающим вследствие вариаций гравитационного поля, нужно вычислить порядок величин рассматриваемых ускорений. Примем для вычисления сопротивления наиболее часто встречающиеся значения:  $C_D = 2,4$ ,  $A/m = 0,05 \text{ см}^2/\text{г}$ ,  $v = 7,5 \text{ км/сек}$  и самое неблагоприятное



значение  $\rho \leq 10^{-14}$  г/см<sup>3</sup> (см. табл. числовых значений). Если эти числовые значения подставить в (3.152) для оценки ускорения силы сопротивления атмосферы, то можно использовать следующие значения:

$$\sigma\{a_d\} \leq \pm 2,4 \cdot 0,05 \cdot 10^{-14} \cdot (7,5 \cdot 10^5)^2 / 2 \approx \\ \approx \pm 3 \cdot 10^{-4} \text{ см/сек}^2.$$

Для оценки ускорения, обусловленного вариациями гравитационного поля, получим производную по радиусу-вектору члена  $V_{22}$  в разложении (3.53) потенциала для большой полуоси, равной  $8 \cdot 10^3$  км, и  $J_{22} = 1,5 \cdot 10^{-6}$ :

$$\sigma(a_g) \approx \pm 3,986 \cdot 10^{20} \cdot (6,378 \cdot 10^8)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} / (8 \cdot 10^8)^4 \approx \\ \approx \pm 6 \cdot 10^{-4} \text{ см/сек}^2.$$

Следовательно, даже для далеко не идеальной орбиты спутника ускорение, вызванное вариациями гравитационного поля, сравнимо с ускорением, обусловленным сопротивлением атмосферы (плотности атмосферы, равные  $10^{-14}$  г/см<sup>3</sup>, существуют только на высотах ниже 600 км на освещенной Солнцем стороне Земли). Более того, ускорение, обусловленное сопротивлением атмосферы, разветвляется в непрерывный спектр, тогда как в соответствии с преобразованием (3.70) спектр  $V_{lm}$  для малого эксцентриситета почти полностью ограничен всего лишь  $(l+1)$  линиями: для  $V_{22}$  — тремя линиями, одна с частотой около двух циклов в день и две с частотой около двух циклов за обращение.

Для интервала  $T$  непрерывный спектр плотности амплитуды  $g(f_k)$  будет поглощать дискретный член амплитуды, меньший  $c_k = g(f_k)/T$ , как показано в (5.1) — (5.2). Если предположить, что среднее квадратическое значение ускорения, обусловленного атмосферным сопротивлением,  $\sigma^2\{a_d\}$ , имеет однородное распределение от значения частоты, равного 1 циклу за обращение  $(1/P)$ , и ниже, то плотность  $g^2(f_k)$  будет  $P\sigma^2\{a_d\}$ . Для интервала  $T$  эффективное число частотных полос будет  $T/P$ , а изменчивость  $\sigma_f^2\{a_d\}$

в конкретной полосе —  $P\sigma^2\{a_d\}/T$ . Следовательно, интервал  $T$  для определения гравитационного ускорения определенной частоты не должен быть очень большим, чтобы гравитационное ускорение можно было выделить на фоне ускорения, обусловленного сопротивлением атмосферы. Поэтому

$$c_k \approx \frac{\sigma\{a_g\}}{\sqrt{l+1}} \gg \sigma\{a_d\} \sqrt{\frac{P}{T}}.$$

Поскольку ускорения непосредственно не наблюдают, с целью сравнения их изменчивости на различных частотах при получении спектра вариаций радиуса-вектора лучше использовать метод интегрирования выражения

$$\sigma_f\{\Delta s\} = \frac{\sigma_f\{a\}}{(2\pi f)^2}.$$

С целью сравнения выводов числовых оценок  $\pm 3 \cdot 10^{-4}$  см/сек<sup>2</sup> для гравитационного ускорения  $\sigma\{a_g\}$  и на основе предположения, что для величин менее  $1/P$  имеет место равномерное распределение  $\sigma^2\{a_d\}$ , примем  $P$  равным 96 мин, а интервал  $T$  — трем месяцам. Тогда для частоты  $f$ , заданной в циклах за сутки,

$$\sigma_f\{\Delta s_d\} = \frac{\sigma\{a_d\} \sqrt{P/T}}{(2\pi f)^2} = \pm \frac{3 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{1}{15} \cdot 90}}{(2\pi f/86400)^2} = \pm \frac{15}{f^2} \text{ м.}$$

Для частоты, равной двум циклам в день, возмущение составит, таким образом, приблизительно  $\pm 4$  м, а возмущение от гравитационного ускорения  $\pm 6 \cdot 10^{-4}/\sqrt{3}$  см/сек<sup>2</sup> при той же самой частоте  $\pm 165$  м. Однако для более низкой частоты возмущение, вызванное атмосферным сопротивлением, будет, очевидно, гораздо больше — например, для частоты, равной одному циклу в месяц, оно составит  $\pm 13,5$  км. Это изображено схематически на рис. 16 и характерно для высоты перигея, равной приблизительно 600 км при продолжительности наблюдений около трех месяцев. При более продолжительном

времени интегрирования для любого из эффектов спектр круто поднимается по направлению к нижней границе частоты. Даже если эти эффекты могли бы иметь значительно меньшую амплитуду, чем влияние атмосферного сопротивления низкой частоты, условие ортогональности (5.3) тем не менее позволяет

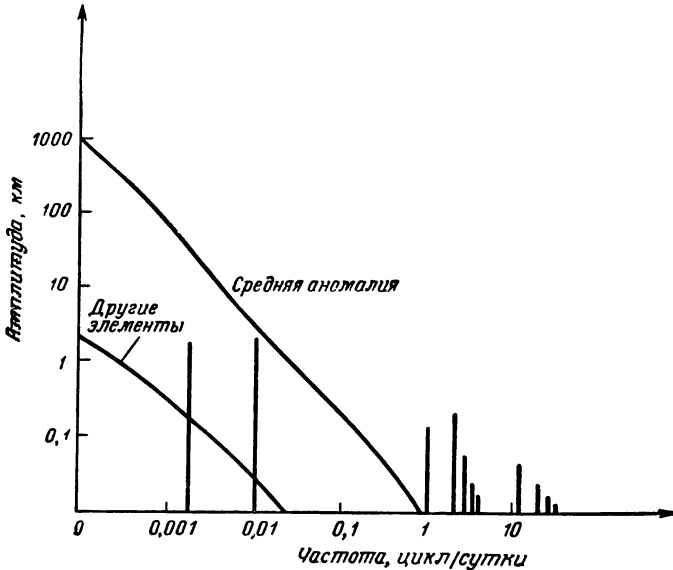


Рис. 16. Спектр вариаций орбиты спутника.

точно определить дискретные высокочастотные возмущения, вызванные тессеральными гармониками  $V_{lm}$ , для которых  $m \neq 0$  при условии, что  $y(t)$  наблюдаются полностью и непрерывно. Однако, как указывалось в гл. 4, наблюдения считаются неполными, если измеряются только одна или две из шести составляющих, содержащихся в  $y$ : расстояние, радиальная составляющая скорости или координаты, измеренные на фотопластинке. Они также являются дискретными из-за геометрических условий видимости, рассмотренных в разд. 4.7. Следовательно, временной ряд, который необходимо рассмотреть, представляет собой не векторный временной ряд  $y(t)$ ,

а его линейное преобразование, умноженное на функцию «окна». Кроме того, этот временной ряд будет содержать члены, возникшие от других источников, кроме  $y$ , например вследствие ошибок в определении положения станций и т. д.:

$$w(t) = \frac{\partial w}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial w}{\partial u} u. \quad (5.12)$$

Якобиан  $\partial w/\partial y$  состоит из частных производных от измеряемых параметров по оскулирующим элементам, как показано в уравнениях (4.37)–(4.51), и сам является функцией времени. Функция «окна»  $I(t)$  равна единице для периода наблюдений и нулю в остальное время. Функция  $u$  ошибок в определении положения станции будет в период наблюдений равна этой ошибке и нулю в остальное время.

По сравнению со спектром самой орбиты спутника  $\partial w/\partial y$ ,  $I(t)$  и  $\partial w/\partial u$  имеют сложные спектры, преимущественно с высокими частотами. Следовательно, амплитуды в  $w(t)$  от дискретного спектра, обусловленного гравитационными причинами, будет трудно отличить от фона непрерывного спектра атмосферного сопротивления. Простой гармонический анализ в этом случае будет недостаточен; вместо него необходимо применить способ наименьших квадратов или (что то же самое) минимизацию суммы квадратов. Поскольку такой процесс включает квадраты и произведения, представляют интерес статистические свойства орбитального временного ряда, выраженного дисперсиями (5.10) и ковариациями (5.11).

Дискретные дисперсии  $\{c_{ik}^2 + d_{ik}^2\}/2$ , возникающие в результате вариаций гравитационного поля Земли, можно вычислить по оценкам дисперсий коэффициентов  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  сферических гармоник в разложении гравитационного потенциала. Эти оценки наиболее надежно получены из автоковариационного анализа силы тяжести в виде порядковых дисперсий  $\sigma_l^2$ , определяемых уравнением

$$\sigma_l^2 = \sum_m (\bar{C}_{lm}^2 + \bar{S}_{lm}^2), \quad (5.13)$$

где  $\bar{C}_{lm}$  и  $\bar{S}_{lm}$  — коэффициенты нормированных сферических гармоник, введенные уравнением (1.34). Приближенная формула для  $\sigma_l^2$ , полученная на основе автоковариационного анализа силы тяжести, имеет вид

$$\sigma_l^2 \approx \frac{160 \cdot 10^{-12}}{l^3}. \quad (5.14)$$

Из уравнений (5.13) и (5.14) следует

$$\sigma \{\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}\} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{2l+1}} \approx \pm \frac{10^{-5}}{l^2}. \quad (5.15)$$

Заданная частота  $f_k$  в (5.7) будет, исходя из (3.71), соответствовать ряду комбинаций индексов  $l, m, p, q$  в разложении по сферическим функциям, выраженном через орбитальные элементы. Таким образом,

$$f_k = \frac{1}{2\pi} [(l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]. \quad (5.16)$$

Членом с наиболее низкой степенью, приводящим к данной частоте  $f_k$ , будет тот, для которого

$$l = m, \text{ если } m \neq 0 \text{ или } 1. \quad (5.17)$$

Другие члены в этом ряду будут иметь

$$\begin{aligned} l &= m + 2j, \\ p &= p_l = p_0 + j, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где  $j$  — любое целое число. Следовательно, из уравнений (5.15) и (4.27)

$$E \left[ \frac{1}{2} (c_{ik}^2 + d_{ik}^2) \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_l^2}{2l+1} K_{ilmr}^2, \quad (5.19)$$

где  $l$  и  $p$  получены из (5.18), а  $K_{ilmr}$  — коэффициент в частной производной кеплерова элемента орбиты по  $C_{lm}$  согласно (4.28).

Для оценок спектрального представления эффекта атмосферного сопротивления  $\frac{1}{2} [\mathbf{g}^2(f) + \mathbf{h}^2(f)]$  следует произвести анализ остаточных разностей, возникающих

при расчетах орбит. Эффект атмосферного сопротивления оказывает настолько сильное влияние на среднюю аномалию, что из-за неточности имеющихся в настоящее время данных нет смысла рассматривать его влияние на другие элементы. В результате анализа орбит с целью изучения влияния атмосферного сопротивления обычно определяют скорость изменения периода  $\dot{P}$ . Автоковариационный анализ  $\dot{P}$ , как правило, приводит к экспоненциальному уменьшению спектральной функции с увеличением частоты:

$$\sigma_f^2\{\dot{P}\} = D \langle \dot{P} \rangle^2 \exp(-qf), \quad (5.20)$$

где  $\langle \dot{P} \rangle$  — среднее значение скорости изменения периода.

Связь между синусоидальными вариациями  $\dot{P}$  и  $\ddot{M}$  будет следующей:

$$\Delta \ddot{M} = -\frac{n^2}{2\pi} \Delta \dot{P} = -\frac{n^2}{2\pi} \cos 2\pi f t. \quad (5.21)$$

Дважды интегрируя и возводя в квадрат, получим выражение

$$\sigma_f^2\{M\} = \frac{n^4}{64\pi^6 f^4} D \langle \dot{P} \rangle^2 \exp(-qf). \quad (5.22)$$

Для частоты  $f$ , измеряемой числом циклов за сутки, значение  $D$  оценивают равным 0,6, а  $q = 19,2$ . Практически включение частоты  $f$  в знаменатель означает, что всегда должен быть применен какой-то способ для устранения низкочастотных влияний атмосферного сопротивления — обычно с использованием произвольных степенных многочленов по средней аномалии и ограничение продолжительности орбитальной дуги. Если для дуги с продолжительностью  $W$  используются  $h$  полиномов, нижний предел неустраненных частот будет приблизительно  $h/2W$ .

Как указывалось раньше, поправка к наблюдению  $dO_i$  в уравнении наблюдений (4.32) должна устранить все расхождения между математической

моделью и реально существующими условиями. Тогда долю  $\sigma^2\{O_i\}$  в дисперсии величин  $dO_i$  из-за пренебрежения коэффициентами  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  получим из уравнения (5.19):

$$\Delta_{lm}\sigma^2\{O_i\} = \sum_{p, q} \left[ \frac{\partial O_i}{\partial s_h} K_{hlmpq} \frac{\sigma_i^2}{2l+1} K_{klmpq} \frac{\partial O_i}{\partial s_k} \right], \quad (5.23)$$

где  $(s_h, s_k)$  включает либо два элемента из  $(a, e$  или  $i)$ , либо два из  $(M, \omega$  или  $\Omega)$ ; влияния на  $\sigma^2$  векторных произведений равны нулю. Соответствующий вклад в ковариацию  $dO_i$  и  $dO_j$  составляет

$$\begin{aligned} \Delta_{lm} \text{Cov}\{O_i O_j\} = \sum_{p, q} \left[ \frac{\partial O_i}{\partial s_h} K_{hlmpq} \frac{\sigma_i^2}{2l+1} K_{klmpq} \frac{\partial O_i}{\partial s_k} \right] \times \\ \times \cos[(l-2p)(\omega_i - \omega_j) + (l-2p+q)(M_i - M_j) + \\ + m(\Omega_i - \Omega_j - \theta_i + \theta_j)]. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Подобным образом для влияния атмосферного сопротивления имеем

$$\Delta_d \sigma^2\{O_i\} = \left[ \frac{\partial O_i}{\partial M} \right]^2 \int_{h/2W}^{\infty} \sigma_f^2\{M\} df, \quad (5.25)$$

$$\Delta_d \text{Cov}\{O_i, O_j\} = \frac{\partial O_i}{\partial M} \frac{\partial O_j}{\partial M} \int_{h/2W}^{\infty} \sigma_f^2\{M\} \cos 2\pi f(t_i - t_j) df. \quad (5.26)$$

### 5.3. МИНИМИЗАЦИЯ СУММЫ КВАДРАТОВ

В уравнении (4.32) мы установили стандартную форму для уравнения наблюдений, из которой следует, что различие между наблюдаемой величиной и величиной, рассчитанной по математической модели, должно состоять из сочетания поправок к тем параметрам, на которых базируется математическая модель, и поправки к наблюдению. Обычно мы должны рассматривать систему уравнений наблюдений, число которых гораздо больше, чем число параметров модели, в которые нужно внести поправки. Запишем

систему уравнений наблюдений (4.32) в матричной форме. Таким образом,

$$-\mathbf{x} + \mathbf{M} \mathbf{z} = \mathbf{f}, \quad (5.27)$$

$n \times 1 \quad n \times m \quad m \times 1 \quad n \times 1$

где  $m < n$  и

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dO_1 \\ \vdots \\ dO_i \\ \vdots \\ dO_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial P_1} & \frac{\partial C_1}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial P_m} \\ \frac{\partial C_2}{\partial P_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial C_n}{\partial P_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial C_n}{\partial P_m} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} dP_1 \\ dP_2 \\ \vdots \\ dP_l \\ \vdots \\ dP_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} O_1 - C_1 \\ O_2 - C_2 \\ \vdots \\ O_i - C_i \\ \vdots \\ O_n - C_n \end{bmatrix}.$$

Выводы уравнения (4.32) и других уравнений в гл. 4, имеющих отношение к уравнениям наблюдений, основаны на предположении, что поправки были дифференциалами. Это предположение равносильно тому, что член  $dP_j dP_k$  при разложении в ряд Тейлора для  $(O_i + dO_i - C_i)$  является пренебрежимо малым:  $(O_i + dO_i - C_i) =$

$$= \sum_l \frac{\partial C_i}{\partial P_l} dP_l + \frac{1}{2} \sum_{l,k} \frac{\partial C_i}{\partial P_l} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial P_k} dP_l dP_k + \dots, \quad (5.29)$$

что в свою очередь означает, что  $\partial C_i / \partial P_l$  в уравнении (5.29) и, следовательно,  $\mathbf{M}$  в уравнении (5.27) можно считать постоянными. Таким образом, урав-



нение (5.27) представляет собой систему линейных уравнений. Вектор  $\mathbf{f}$  можно рассматривать как координаты некоторой точки в  $n$ -мерном пространстве, а вектор  $\mathbf{x}$  — как поправки к этим координатам. Отсюда

$$\mathbf{Mz} = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

— это система уравнений, которая одновременно представляет собой линейную форму в  $n$ -мерном пространстве, и поэтому можно выразить  $m$  элементов  $\mathbf{z}$  через  $n$  элементов  $\mathbf{f} + \mathbf{x}$  выбором и решением системы  $m$  уравнений из (5.27). Например, если  $n = 3$ , а  $m = 1$ , уравнение (5.27) станет системой уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 + m_{11}z_1 &= f_1, \\ -x_2 + m_{21}z_1 &= f_2, \\ -x_3 + m_{31}z_1 &= f_3, \end{aligned} \quad (5.31)$$

которую можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{m_{21}}{m_{11}}(f_1 + x_1) &= (f_2 + x_2), \\ \frac{m_{31}}{m_{11}}(f_1 + x_1) &= (f_3 + x_3). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Два линейных уравнения с тремя неизвестными  $(f_1 + x_1)$ ,  $(f_2 + x_2)$  и  $(f_3 + x_3)$  являются выражением прямой линии в трехмерном пространстве. Как правило, точка  $(f_1, f_2, f_3)$ , определяемая из наблюдений, не будет лежать на этой линии. Желаемой поправкой  $(x_1, x_2, x_3)$  будет, очевидно, та, которая является кратчайшим расстоянием от точки до этой линии, что означает выполнение условия минимума поправок к наблюдениям. В прямоугольной системе координат и при условии, что масштаб одинаков во всех направлениях, этот минимум будет равен

$$\sum_i x_i^2 = \min. \quad (5.33)$$

Однако уравнения (5.27) можно точно так же отнести и к косоугольным системам координат с различным масштабом в направлении каждой из координатных

осей; в этом случае (5.33) нужно переписать следующим образом:

$$\sum_{ij} g_{ij} x_i x_j = \min \quad (5.34)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} = \min. \quad (5.35)$$

Далее задача состоит в том, чтобы определить (при условии, что имеется ряд наблюдений  $O_i$  с дисперсиями  $\sigma_i^2$  и ковариациями  $\text{Cov}\{O_i, O_j\}$ ) соответствующие значения  $g_{ij}$  для подстановки их в (5.34) и (5.35). Если наблюдения не коррелированы (т. е. все ковариации равны нулю), тогда целесообразно выбрать

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \frac{1}{\sigma_i^2}, \\ g_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (5.36)$$

поскольку квадрату вводимой поправки может быть таким образом придан вес, пропорциональный ее ожидаемой среднеквадратичной величине. Если мы имеем ряд  $n$  коррелированных наблюдений  $\mathbf{x}$ , всегда можно найти его линейное преобразование (2.3) по отношению к другому ряду  $n$  некоррелированных наблюдений  $\mathbf{y}$ , так как для определения  $n^2$  чисел в матрице преобразования  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (5.37)$$

существует  $n^2$  условных уравнений, которые должны быть удовлетворены с учетом связи между матрицами ковариаций  $\mathbf{W}_y$  и  $\mathbf{W}_x$  соответственно для  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{W}_y = \mathbf{A} \mathbf{W}_x \mathbf{A}^T, \quad (5.38)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \sigma^2 \{y_i\} &= \sum_{k, l} a_{ik} \text{Cov} \{x_k, x_l\} a_{il}, \\ 0 &= \sum_{k, l} a_{ik} \text{Cov} \{x_k, x_l\} a_{jl}, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5.39)$$

В таком случае выбор весов (5.36) обратно пропорционально дисперсиям для минимизации суммы квадратов  $y$  означает

$$\begin{aligned} \text{Min} &= \mathbf{y}^T \mathbf{W}_y^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{Ax})^T [\mathbf{AW}_x \mathbf{A}^T]^{-1} (\mathbf{Ax}) = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{W}_x^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T \mathbf{W}_x^{-1} \mathbf{x} = \min. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Матрица весов  $\mathbf{G}$  в уравнении (5.35) должна быть обратной для ковариационной матрицы  $\mathbf{W}$ .

Как уже отмечалось, матричная форма уравнений наблюдений (5.27) удобна для решения задач геодезического использования спутников. Однако в целях использования других возможностей полезно выполнить решение под условием (5.40) для более общего случая

$$\mathbf{Cx} + \mathbf{Mz} = \mathbf{f}, \quad (5.41)$$

где на каждую строку матрицы  $\mathbf{C}$  приходится по меньшей мере один ненулевой элемент. Объединяя (5.40) и (5.41), можно написать

$$\mathbf{x}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} - 2(\mathbf{Cx} + \mathbf{Mz} - \mathbf{f})^T \boldsymbol{\lambda} = \min, \quad (5.42)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  — вектор параметров, называемых множителями Лагранжа. Дифференцируем уравнение (5.42) относительно  $\mathbf{x}$ , а затем, чтобы получить минимум, результат приравниваем нулю:

$$\mathbf{W}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (5.43)$$

Если затем решить уравнение (5.43) относительно  $\mathbf{x}$  и подставить результат в (5.41), получим

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Mz} - \mathbf{f} = 0, \quad (5.44)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{CWC}^T. \quad (5.45)$$

Дифференцируя (5.42) по  $\mathbf{z}$  и приравнивая результат нулю, получим

$$\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (5.46)$$

Если решить (5.44) относительно  $\boldsymbol{\lambda}$ , то будем иметь

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{Mz}). \quad (5.47)$$

Подставляя выражение для  $\lambda$  из (5.47) в (5.46) и решая его относительно  $\mathbf{z}$ , получим

$$\mathbf{z} = [\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}. \quad (5.48)$$

Матрицу  $\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}$  называют матрицей коэффициентов, а вектор  $\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$  — вектором свободных членов нормальных уравнений.

Подставляя в уравнение (5.47)  $\mathbf{z}$ , полученное из (5.48), решая (5.43) относительно  $\mathbf{x}$  и подставляя в полученный результат  $\lambda$  из (5.47), будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{W} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{M} (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{f}. \quad (5.49)$$

Поскольку заданная матрица  $\mathbf{W}$  есть ковариационная матрица наблюдений, до введения в них поправки  $\mathbf{x}$  находим, что ковариационная матрица остаточных разностей  $\mathbf{f}$  будет, из (5.41) и в соответствии с (5.45), равна  $\mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{C}^T$ , или  $\mathbf{K}$ . Чтобы получить ковариационную матрицу  $\mathbf{V}$  вектора  $\mathbf{z}$ , умножим  $\mathbf{K}$  на коэффициент при  $\mathbf{f}$  из (5.48):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_z &= [(\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{K} [(\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1}]^T = \\ &= (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Подобным образом для ковариационной матрицы  $\mathbf{U}$  вектора поправок  $\mathbf{x}$  умножаем  $\mathbf{K}$  на коэффициент при  $\mathbf{f}$  из (5.49). После выполнения алгебраических преобразований получим

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{M} (\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{C} \mathbf{W}. \quad (5.51)$$

В таком случае ковариационная матрица  $\mathbf{V}_x$  уравненных наблюдений

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{W} - \mathbf{U}. \quad (5.52)$$

Все полученные выражения (5.48) — (5.52) применимы также и к (5.27), если  $\mathbf{C}$  в них заменить на  $-\mathbf{I}$ .

Единственное предположение, сделанное нами в уравнениях (5.33) — (5.52), заключается в том, что в случае некоррелированных наблюдений вес обратно пропорционален дисперсии. При этом предположении

минимизация суммы квадратов известна как условие *минимума дисперсий* и является более общим, чем условие *максимального правдоподобия*, где тот же самый результат требует предположения, что поправки имеют нормальное распределение относительно их среднего значения, т. е. частота поправки  $x$  пропорциональна  $\exp(-x^2/\sigma^2)$ . Однако любое уточнение этого нормального закона привело бы к появлению в минимизированной сумме (5.34) или (5.35) членов со степенями выше второй, которые в свою очередь означают, что нелинейные влияния не отраженного в модели происхождения имеют значительную величину. Этот вывод в некотором смысле противоречит предположению, что нелинейные члены ряда Тейлора в эффектах, связанных с моделью (5.29), пренебрежимо малы. Хотя и существуют физические ситуации, когда для величин  $(O_i + dO_i)$  имеются ограничения, например такие, в которых они не могут быть отрицательными и которые могут привести к соответствующему асимметричному распределению поправок  $dO_i$ ; обычно отличное от нормального распределение  $dO_i$  указывает на наличие некоторых условий, которые можно вместо усложнения статистической обработки устранить, уточняя определенным образом модель.

Матрица  $\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}$  коэффициентов нормальных уравнений, обращенная в уравнении (5.48) с целью определения поправок к параметрам  $\mathbf{z}$ , может иметь значительный размер вследствие большого числа независимых параметров, оказывающих заметные влияния на орбиты спутников. Кроме того, размер матрицы возрастает потому, что обычно объединяют несколько различных орбит, чтобы получить более надежное решение относительно общих для всех орбит параметров. Такими параметрами могут быть коэффициенты разложения гравитационного поля и смещения в положениях станций. Однако для определенного вида матрицы  $\mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}$  коэффициентов нормальных уравнений размер матрицы, которая должна храниться в памяти и быть обращена при

помощи вычислительной машины, можно значительно уменьшить. Пусть

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{M}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (5.53)$$

и

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{z}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{s}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{N}. \quad (5.54)$$

Уравнение (5.48) можно теперь записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{11} \mathbf{z}_1 + \mathbf{N}_{12} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{s}_1, \\ \mathbf{N}_{21} \mathbf{z}_1 + \mathbf{N}_{22} \mathbf{z}_2 &= \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Решая второе из двух уравнений (5.55) относительно  $\mathbf{z}_2$ , получаем

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{N}_{22}^{-1} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{N}_{21} \mathbf{z}_1) \quad (5.56)$$

и, подставляя результаты в первое из (5.55), имеем

$$(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21}) \mathbf{z}_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{s}_2. \quad (5.57)$$

Если  $\mathbf{N}$  имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12,1} & \mathbf{N}_{12,2} & \dots & \mathbf{N}_{12,n} \\ \mathbf{N}_{21,1} & \mathbf{N}_{22,11} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{N}_{21,2} & 0 & \mathbf{N}_{22,22} & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdot \\ \mathbf{N}_{21,n} & 0 & \dots & & \mathbf{N}_{22,nn} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

т. е.

$$\mathbf{N}_{22,ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (5.59)$$

тогда члены, содержащие обратные матрицы в (5.57), могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,ii}^{-1} \mathbf{N}_{21,i}, \\ \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{s}_2 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,ii}^{-1} \mathbf{s}_{2,i}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Если в матрице уравнений наблюдений (5.27)  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12,1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{M}_{21} & 0 & \mathbf{M}_{12,2} & & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{M}_{l1} & 0 & \dots & & \mathbf{M}_{12,l} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

$\mathbf{N}$  будет иметь вид (5.58), поскольку из (5.53) следует

$$\mathbf{N}_{22,ij} = \sum_{h=1}^l \mathbf{M}_{h2,i}^T \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{h2,j}, \quad (5.62)$$

которая равна 0 при  $i \neq j$ . Система уравнений наблюдений, свойственных данной дуге орбиты  $h$ , будет содержать частные производные  $\mathbf{M}_{h1}$  по коэффициентам гравитационного поля и другим параметрам, общим для всех орбит. Кроме того, она будет иметь и ненулевые частные производные только по собственным орбитальным постоянным  $\mathbf{M}_{h2,h}$ . Поэтому матрица  $\mathbf{M}$  примет вид (5.61), если несколько различных орбит спутников (каждая со своими постоянными интегрирования) будут объединены в едином решении по методу наименьших квадратов. Следовательно, решение для  $n$  параметров, общих для любого числа орбит, каждая из которых имеет  $p$  постоянных интегрирования, может быть выполнено в соответствии с (5.48) без хранения в памяти машины какой-либо матрицы, размер которой больше  $(n+p)$ , или без обращения матрицы, величина которой больше  $n$ .

Векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$  могут быть поправками к „наблюдениям“ или „параметрам“, которые встречаются в дискретном или непрерывном процессе. Если  $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{e}_i(\mathbf{z})$  — векторы истинных ошибок на  $i$ -й ступени и их нелинейные влияния на  $(i+1)$ -й ступени процесса незначительны, тогда ошибки  $\mathbf{e}_{i+1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{e}_{i+1}(\mathbf{z})$  можно выразить через линейное преобразование векторов

$\varepsilon_i(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon_i(\mathbf{z})$  посредством матриц распространения  $\mathbf{P}_x$ ,  $\mathbf{P}_z$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}_x \varepsilon_i(\mathbf{x}), \\ \varepsilon_{i+1}(\mathbf{z}) &= \mathbf{P}_z \varepsilon_i(\mathbf{z}).\end{aligned}\quad (5.63)$$

Следовательно, ковариационные матрицы  $\mathbf{W}_x$ ,  $\mathbf{W}_z$  на  $(i+1)$ -й степени можно представить как

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_x &= \mathbf{P}_x \mathbf{V}_x \mathbf{P}_x^T, \\ \mathbf{W}_z &= \mathbf{P}_z \mathbf{V}_z \mathbf{P}_z^T.\end{aligned}\quad (5.64)$$

Если эти переменные будут затем на  $(i+1)$ -й степени уточнены добавлением новых наблюдений с ковариационной матрицей  $\mathbf{W}_y$  в новых условиях уравнениях, выражение (5.41) можно записать в виде

$$\mathbf{C}_x \mathbf{x}_x + \mathbf{C}_y \mathbf{x}_y + \mathbf{C}_z \mathbf{x}_z + \mathbf{M} \mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (5.65)$$

и сумму квадратов в этом случае следует минимизировать под условием

$$\mathbf{x}_x^T \mathbf{W}_x^{-1} \mathbf{x}_x + \mathbf{x}_y^T \mathbf{W}_y^{-1} \mathbf{x}_y + \mathbf{x}_z^T \mathbf{W}_z^{-1} \mathbf{x}_z = \min. \quad (5.66)$$

Уравнения (5.64)–(5.66) можно применить в следующих конкретных случаях.

1. Непрерывный процесс эволюции орбиты, в котором перенос оценки состояния процесса с ковариационной матрицей  $\mathbf{W}_x$  сочетается с имеющимися новыми наблюдениями, характеризуемыми ковариационной матрицей  $\mathbf{W}_y$ . В этом случае  $\mathbf{C}_z = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  и решение (5.49) приобретает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_x \\ \mathbf{x}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_x \mathbf{C}_x^T \\ \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y^T \end{bmatrix} \{ \mathbf{C}_x \mathbf{W}_x \mathbf{C}_x^T + \mathbf{C}_y \mathbf{W}_y \mathbf{C}_y^T \}^{-1} \mathbf{f}. \quad (5.67)$$

2. Случай, когда поправки можно определить из нескольких рядов наблюдений, каждый из которых приводит к слабо обусловленной системе уравнений, но которые в то же время трудно объединить в совместное решение. Чтобы учесть влияние поправок и соответствующей им матрицы ковариаций  $\mathbf{V}_z$  из одного ряда наблюдений при обработке другого, можно положить  $\mathbf{W}_x$  и  $\mathbf{C}_x$  равными нулю,  $\mathbf{P}_z = \mathbf{I}$ ,



а  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $M$  и  $f$  — соответственно

$$C_y = \begin{bmatrix} C_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_y \\ I \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Решение уравнения (5.48) в этом случае приобретает вид

$$z = [M_y^T K_y^{-1} M_y + V_z^{-1}]^{-1} M_y^T K_y^{-1} f_y. \quad (5.69)$$

Таким образом, при решении задач, связанных с геодезическим использованием спутников, результаты наблюдений нужно преобразовать или объединить так, чтобы на одно уравнение приходилось только одно „наблюдение“, как в (5.27). Нас интересует определение поправок  $z$  к параметрам модели. Несоответствия модели, вызванные сопротивлением атмосферы, высшими гармониками гравитационного поля и т. п., таковы, что в идеальном случае должна иметь место значительная корреляция между наблюдениями, произведенными в разное время, которая выражается ковариациями (5.24), (5.25), являющимися недиагональными элементами ковариационной матрицы  $M$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Apostol T. M.*, Calculus, vol. II, Blaisdell Publ. Co., New York, 1962.
2. *Arley N., Buch K. R.*, Probability and Statistics, John Wiley and Sons, New York, 1950.
3. *Bartlett M. S.*, An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge Univ. Press, London, 1956 (русский перевод: *М. С. Барлетт*, Введение в теорию случайных процессов, М., ИЛ, 1958).
4. *Blackman R. B.*, Methods of Orbit Refinement, Bell. System Tech. J., 43, 885—909 (1964).
5. *Blackman R. B., Tukey J. W.*, The Measurement of Power Spectra, Dover Publ., New York, 1959.
6. *Brown D. C.*, Treatment of Analytical Photogrammetry with Emphasis on Ballistic Camera Applications, RCA Data Reduction Tech. Rep., 39 (1957).
7. *Kalman R. E.*, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ACME, D, J. Basic Eng., 82, 35—45 (1960).
8. *Kaula W. M.*, Determination of the Earth's Gravitational Field, Rev. Geophys., 1, № 1, 4, 507—552 (1963).
9. *Яглом А. М.*, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, VII, вып. 5 (1952).

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

---

### 6.1. СИНХРОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Если с одних и тех же станций получено достаточное количество синхронных наблюдений, то поправки к координатам спутника  $dx$  в уравнениях (4.37) и (4.52) можно рассматривать как неизвестные. Поправки  $du_0$  к координатам станций (за исключением одной станции) также можно считать неизвестными, поскольку нет способа, который позволил бы без использования данных об орбите зафиксировать положение этой системы станций по отношению к началу координат. Следовательно, если имеются  $m$  станций и  $n$  рядов синхронных наблюдений, будет  $[3(m-1) + 3n]$  неизвестных и  $qnm$  наблюдений, где  $q=2$  для фотографических наблюдений и  $q=1$  для измерений расстояния. Поэтому необходимо, чтобы

$$qnm > 3(m-1) + 3n \quad (6.1)$$

или

$$n > \frac{3m-3}{qm-3} \quad (6.2)$$

(исключая случаи, когда  $qm$  равно 2 или 3). Пусть  $2m$  фотографических наблюдений  $j$ -го положения спутника будут обозначены  $P_{1j}, P_{2j} \dots P_{2-j}$ , а координаты спутника  $x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}$ . Тогда с целью составления уравнений наблюдений в матричной форме получим для каждого ряда синхронных наблюдений с  $k$ -й станции:

$$M_{xjk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial x_{2j}} & \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial x_{3j}} \\ \frac{\partial P_{2kj}}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial P_{2kj}}{\partial x_{2j}} & \frac{\partial P_{2kj}}{\partial x_{3j}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{u_j k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial u_{1k}} & \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial u_{2k}} & \frac{\partial P_{(2k-1)j}}{\partial u_{3k}} \\ \frac{\partial P_{2kj}}{\partial u_{1k}} & \frac{\partial P_{2kj}}{\partial u_{2k}} & \frac{\partial P_{2kj}}{\partial u_{3k}} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{M}_{x_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x_j 1} \\ \mathbf{M}_{x_j 2} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{x_j m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{u_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{u_j 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{u_j 2} & & \cdot \\ \vdots & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & & & \mathbf{M}_{u_j (m-1)} \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x1} & 0 & \dots & 0 & \vdots & \mathbf{M}_{u1} \\ 0 & \mathbf{M}_{x2} & & \cdot & \vdots & \mathbf{M}_{u2} \\ \vdots & \cdot & \ddots & \cdot & \vdots & \cdot \\ \vdots & & & \cdot & \vdots & \cdot \\ 0 & \dots & & \mathbf{M}_{xn} & \vdots & \mathbf{M}_{un} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix};$$

здесь матрица  $\mathbf{M}_{x_j k}$  является коэффициентом

$$\begin{bmatrix} \frac{f}{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{p_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{p_x}$$

при  $dx$  в (4.37), а матрица  $\mathbf{M}_{u_j k}$  — коэффициентом

$$- \begin{bmatrix} \frac{f}{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{p_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{p_x} \mathbf{R}_3(-\theta)$$

при  $du_0$  в (4.37).

Если наблюдения считают некоррелированными, матрица  $\mathbf{W}^{-1}$  (то же самое, что и  $\mathbf{K}^{-1}$ , если  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ ) в (5.48) будет диагональной. Допустим, что  $\sigma$  — диагональная  $[2 \times 2]$ -матрица дисперсий для каждого снимка, тогда элементы матриц  $\mathbf{M}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{f}$

могут получить следующие приращения по каждому из наблюдений:

$$\mathbf{M}_{jk}^T \sigma^{-1} \mathbf{M}_{jk} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_{jk}^T \sigma^{-1} \mathbf{f}_{jk},$$

где

$$\mathbf{M}_{jk} = [0 \dots \mathbf{M}_{xjk} \dots 0 \mid 0 \dots \mathbf{M}_{ujk} \dots 0].$$

Поскольку в данном случае не делается редукции к центру Земли, нет необходимости в использовании систем координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ ; вместо них можно, применяя вращения координатных осей, как это определено уравнением (4.17), использовать некоторую местную систему, например систему координат  $\mathbf{l}$ , отнесенную к какой-либо известной станции.

При помощи неподвижных камер были произведены синхронные наблюдения спутников-баллонов и спутников со вспышкой.

## 6.2. ОРБИТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ. КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Если наблюдения несинхронны, то, разумеется, к числу уточняемых параметров следует добавить вместо координат спутника орбитальные постоянные интегрирования. Кроме того, могут быть включены другие параметры орбиты, в том числе те, которые представляют особый интерес для геодезии, а именно коэффициенты гравитационного поля. Все координаты станций можно считать независимыми, так как исключение гармоник первого порядка из гравитационного поля равносильно предположению, что геометрический центр Земли, к которому отнесены координаты станций, совпадает с динамическим центром масс, к которому отнесена орбита.

Следовательно, в общем случае матрица  $\mathbf{M}$  в (5.27) должна содержать частные производные вычисленных значений измеряемых величин  $C_i$  относительно параметров орбиты и гравитационных коэффициентов, что достигается совместным использованием (4.29) и (4.37) или (4.48). В этом случае элементы  $C_i$  вектора  $\mathbf{f}$

следует вычислять аналитическим методом с помощью (3.76) и (3.113), выполнив затем с использованием (4.15) и (4.36) соответствующее преобразование для перехода к измеряемым параметрам. Далее, в уравнении (5.48) матрица ковариаций  $\mathbf{W}$  в общем случае должна содержать недиагональные элементы, выражающие ковариацию, а также приращения к дисперсиям на главной диагонали, обусловленные влиянием неучтенных гравитационных коэффициентов высокого порядка (5.24) и сопротивления атмосферы (5.26).

Точность основных видов наблюдений такова, что можно надеяться определить возмущения орбиты с погрешностью порядка  $\pm 10$  м. Для наиболее распространенных орбит порядок величины сферических гармоник, указанный в (5.14) и примененный в (3.76), показывает, что представляется возможным определить тессеральные гармоники ( $m \neq 0$ ) до восьмого, а в основном до шестого порядка, т. е. всего около 60 коэффициентов. Однако точность определения взаимного расположения станций слежения ниже, чем  $\pm 10$  м, и поэтому их координаты следует также считать неизвестными, что составляет еще примерно 36 параметров. Кроме того, основные возмущения от некоторых групп членов с индексом  $m$  одного и того же порядка имеют одну и ту же фазу, так как у них одинаковый аргумент  $m(\Omega - \theta)$  в частной производной (4.27): например, значения  $(l, m) = (2, 2), (4, 2), (6, 2)$  и  $(8, 2)$ . Чтобы можно было отличить такие члены друг от друга, необходимо добиться различия коэффициентов  $K_{ilmpq}$  в (4.28). Изменения большой полуоси  $a$  или эксцентриситета  $e$  будут сильно менять характеристики атмосферного сопротивления; поэтому для того, чтобы разделить члены с одним и тем же аргументом при помощи изменения наклона, желательно иметь различные типы орбит. Следовательно, чтобы произвести такое разделение, необходимо к совокупности уточняемых параметров добавить элементы достаточного количества орбит, например четырех орбит, или 28 элементов, включая в каждый ряд элементов один параметр для учета ускорения в средней аномалии.

Для достаточно точного определения этого общего числа параметров (более 120) необходимо произвести несколько сот наблюдений. Матрица ковариаций  $\mathbf{W}$  этих наблюдений будет представлять собой систему ненулевых блоков, расположенных ниже главной диагонали, по одному блоку для каждой орбиты, с недиагональными элементами, обусловленными влиянием атмосферного сопротивления согласно (5.26). Подобный строгий подход до сих пор не применялся; на практике матрица ковариаций  $\mathbf{W}$  таких больших размеров с отличными от нуля недиагональными элементами выходит за пределы практических возможностей вычислительных машин. Итак, на практике подобная строгая обработка до сих пор не применялась; матрица ковариаций  $\mathbf{W}$  либо принималась за диагональную, либо, в лучшем случае, учитывались ковариации только между наблюдениями в пределах одного прохождения. Кроме того, отсутствие орбит с необходимым разнообразием наклонений и высот уже снижает желаемую точность приблизительно до  $\pm 20$  м, что в свою очередь уменьшает число точно определяемых гравитационных коэффициентов низкого порядка приблизительно до 35: все коэффициенты до  $(l, m) = (4, 4)$ , а также  $(5, 0)$ ,  $(5, 1)$ ;  $(6, 0)$  —  $(6, 4)$  и  $(7, 0)$ . Кроме этих коэффициентов низкого порядка, для каждого спутника следует добавить одну пару коэффициентов в интервале от 9-го до 15-го порядка, чтобы учесть эффект малого делителя, описываемый выражением (3.150).

Все изложенные выше трудности имеют своим следствием то, что успехи в уточнении тессеральных гармоник и координат станций из анализа орбит были достигнуты путем экспериментов на вычислительных машинах, а именно путем проверки разнообразных методов и правил обработки, выбранных эмпирически на реальных вычислениях. Некоторые из этих методов и правил заключаются в следующем.

1. Длина орбитальной дуги, представленная одним рядом постоянных интегрирования, может быть выбрана либо при условии, что число наблюдений значительно превышает число определяемых параметров

(например, 80 или более наблюдений), либо при условии, что остаточные разности не превосходят малую величину, кратную амплитудам возмущений, вызванных тессеральными гармониками (например, от 10 до 1 м). Применение таких правил при доплеровских наблюдениях, которые можно производить в любых условиях, обычно приводит к дугам продолжительностью от одних до семи суток, а при фотографических наблюдениях, требующих, чтобы спутник был освещен Солнцем, а станция находилась в тени Земли, — к дугам продолжительностью от 10 до 30 суток.

2. Остаточные разности, как правило, можно уменьшить применением степенных полиномов по времени для представления некоторых вариаций элементов. Однако во избежание исключения некоторых эффектов гравитационных вариаций такие многочлены обычно ограничивают до члена  $t^2$  или  $t^2$  и  $t^3$  в средней аномалии, в которой проявляется максимальное влияние атмосферного сопротивления.

3. Чтобы выполнить дальнейшую минимизацию влияния атмосферного сопротивления, можно придать большей вес (меньшую дисперсию) поперечной составляющей траектории по сравнению с продольной. Наиболее удобно это сделать, используя частные производные наблюдений по времени (4.34). Например, для фотографических наблюдений с компонентами  $p_1$ ,  $p_2$  имеем

$$V_o = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon(t)} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \varepsilon(t)} \end{bmatrix} \sigma^2(t) \left[ \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon(t)}, \frac{\partial p_2}{\partial \varepsilon(t)} \right]. \quad (6.4)$$

Остаточные разности продольных составляющих, как правило, в два раза больше, чем остаточные разности поперечных составляющих, однако практика показывает, что такой подбор весов, как (6.4), не приводит к существенной разнице в результатах.

4. Неоднородное распределение наблюдений приводит к нарушению ортогональности низкочастотных

вариаций атмосферного сопротивления (см. рис. 16) по отношению к высокочастотным гравитационным вариациям. Поэтому несколько лучше разделить эти вариации можно противоположным подбором весов наблюдений, так как для определения гравитационных коэффициентов важна их плотность относительно фазовых углов ( $\Omega - \theta$ ). Кроме того, если станции наблюдения расположены неравномерно в географическом отношении, то наблюдениям, полученным с близко расположенных друг от друга станций, можно придать меньший вес, чем наблюдениям, полученным с удаленных друг от друга станций. С другой стороны, можно применить различные способы подбора весов для компенсации неравномерности в распределении наблюдений.

5. Количество и распределение наблюдений часто бывают причиной возникновения неблагоприятных ситуаций, когда, например, влияния различных параметров настолько одинаковы, что их трудно различить. Чтобы уменьшить число неблагоприятных ситуаций, можно применить наперед заданную матрицу ковариаций параметров, как в (5.69), полученную с использованием статистических оценок, приведенных в (5.14). Этот метод, вероятно, имеет тенденцию к некоторому приуменьшению абсолютных величин результатов по сравнению с действительными их значениями.

Чтобы избавиться от неблагоприятных ситуаций, лучше всего использовать данные, полученные по орбитам с различными наклонениями. Кроме того, чтобы избежать обращения слишком больших матриц, иногда при вычислениях нормальные уравнения решают по частям (5.53) — (5.62), а иногда обработку ведут в два этапа. На первом этапе отдельно для каждой дуги определяют орбитальные постоянные интегрирования. После исключения эффектов, связанных с этими постоянными, остаточные разности совместно для всех орбит анализируют с целью определения гравитационных коэффициентов и поправок к координатам станций. Этот метод обычно приводит к тому, что на первом этапе некоторые возмущения



гравитационного характера включаются в орбитальные постоянные интегрирования.

6. Критериями правильности решения, которые могут быть использованы при обработке, являются: а) решение с включением в число неизвестных гравитационных коэффициентов  $C_{21}$ ,  $S_{21}$ , равных, в сущности, нулю из-за малой величины вариаций в положении оси вращения Земли, и б) сравнение высоты геоида, вычисленной геометрически по координатам станций [т. е. определение высоты  $h$  с использованием (4.5) по заданным  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и вычитание из нее высоты станции над уровнем моря], с высотой геоида, вычисленной по гравитационным коэффициентам. Таким образом,

$$N = R_E \sum_{l, m} P_{lm}(\cos \varphi) [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda]. \quad (6.5)$$

На результаты определения вариаций гравитационного поля, которые были получены до сих пор по орбитам спутников, могли в одинаковой мере оказать непосредственное влияние метод анализа, параметры орбит и вид используемых наблюдений. Как правило, результаты доплеровских наблюдений приводят к большим среднеквадратичным ошибкам коэффициентов, чем результаты оптических наблюдений. Возможно, это объясняется тем, что в доплеровских наблюдениях содержится большая систематическая ошибка наблюдений; возможно также, что вследствие недостаточности и меньшей равномерности в распределении результатов фотографических наблюдений орбитальные постоянные интегрирования поглощают большую часть эффектов, связанных с вариациями гравитационного поля; или, наконец, тем, что данные доплеровских наблюдений получены по орбитам с большими наклонениями, которые в большей степени чувствительны к тессеральным и особенно секториальным ( $m = l$ ) гармоникам. Исследования статистической связи между различными параметрами показывают, что наибольшая корреляция, как и

Таблица 3

## Тессеральные гармонические коэффициенты в разложении гравитационного потенциала

Коэффициент, $10^6$	По результатам фотографических наблюдений (Ижак [4])	По результатам доплеровских наблюдений	
		Гайер и Ньютон [3]	Ардерли [1]
$\bar{C}_{22}$	2,08	2,38	2,45
$\bar{S}_{22}$	-1,25	-1,20	-1,52
$\bar{C}_{31}$	1,60	1,84	2,15
$\bar{S}_{31}$	-0,04	0,21	0,27
$\bar{C}_{32}$	0,38	1,22	0,98
$\bar{S}_{32}$	-0,80	-0,68	-0,91
$\bar{C}_{33}$	-0,17	0,66	0,58
$\bar{S}_{33}$	1,40	0,98	1,62
$\bar{C}_{41}$	-0,38	-0,56	-0,49
$\bar{S}_{41}$	-0,40	-0,44	-0,57
$\bar{C}_{42}$	0,20	0,42	0,27
$\bar{S}_{42}$	0,58	0,44	0,67
$\bar{C}_{43}$	0,69	0,84	1,03
$\bar{S}_{43}$	-0,10	0,00	-0,25
$\bar{C}_{44}$	-0,11	-0,21	-0,41
$\bar{S}_{44}$	0,43	0,19	0,34
$\bar{C}_{51}$	-0,14	0,14	0,03
$\bar{S}_{51}$	-0,04	-0,17	-0,12
$\bar{C}_{52}$	0,24	0,27	0,64
$\bar{S}_{52}$	-0,27	-0,34	-0,33
$\bar{C}_{53}$	-0,67	0,09	-0,39
$\bar{S}_{53}$	0,05	0,10	-0,12
$\bar{C}_{54}$	-0,13	-0,49	-0,55
$\bar{S}_{54}$	0,16	-0,26	0,15
$\bar{C}_{55}$	0,08	-0,03	0,21
$\bar{S}_{55}$	-0,41	-0,67	-0,59
$\bar{C}_{61}$	-0,02	0,00	-0,08
$\bar{S}_{61}$	0,12	0,10	0,19
$\bar{C}_{62}$	0,05	-0,16	0,13
$\bar{S}_{62}$	-0,23	-0,16	-0,46
$\bar{C}_{63}$	0,05	0,53	-0,02
$\bar{S}_{63}$	0,00	0,05	-0,13

Продолжение

Коэффициент, $10^6$	По результатам фотографических наблюдений (Ижак [4])	По результатам доплеровских наблюдений	
		Гайер и Ньютон [3]	Андерли [1]
$\bar{C}_{64}$	0,07	-0,31	-0,19
$\bar{S}_{64}$	-0,39	-0,51	-0,32
$\bar{C}_{65}$	-0,28	-0,18	-0,09
$\bar{S}_{65}$	-0,38	-0,50	-0,79
$\bar{C}_{66}$	-0,12	0,01	-0,32
$\bar{S}_{66}$	-0,59	-0,23	-0,36

предполагалось, существует между коэффициентами и индексами  $(l, m)$ ,  $(n, t)$  при  $(l - n)$  четном; что корреляция между координатами станций и гравитационными коэффициентами или же между координатами различных станций достаточно мала и что существует небольшая корреляция между гравитационными коэффициентами и орбитальными постоянными интегрирования. В настоящее время результаты быстро уточняются — частично благодаря тому, что получено большое количество данных наблюдений при лучших условиях, частично благодаря применению лучших методов анализа. Все результаты, приведенные в табл. 3, были получены осенью 1964 г. На рис. 17 показана карта геоида, вычисленная по коэффициентам Андерли (1966) из табл. 3 и зональным гармоникам от  $\bar{C}_{30}$  до  $\bar{C}_{60}$ , полученным из (6.5). Во всех результатах, полученных с 1963 г., заметно устойчивое постоянство в расположении основных экстремумов, характеризующих гравитационное поле. Во всех определениях присутствуют четыре максимума:

- 1) вблизи Новой Гвинеи ( $0^\circ$  широты,  $150^\circ$  в. д.);
- 2) вблизи Великобритании ( $50^\circ$  с. ш.,  $10^\circ$  з. д.);
- 3) к юго-востоку от мыса Доброй Надежды ( $50^\circ$  ю. ш.,  $40^\circ$  в. д.);
- 4) вблизи Перу ( $10^\circ$  ю. ш.,  $80^\circ$  з. д.).

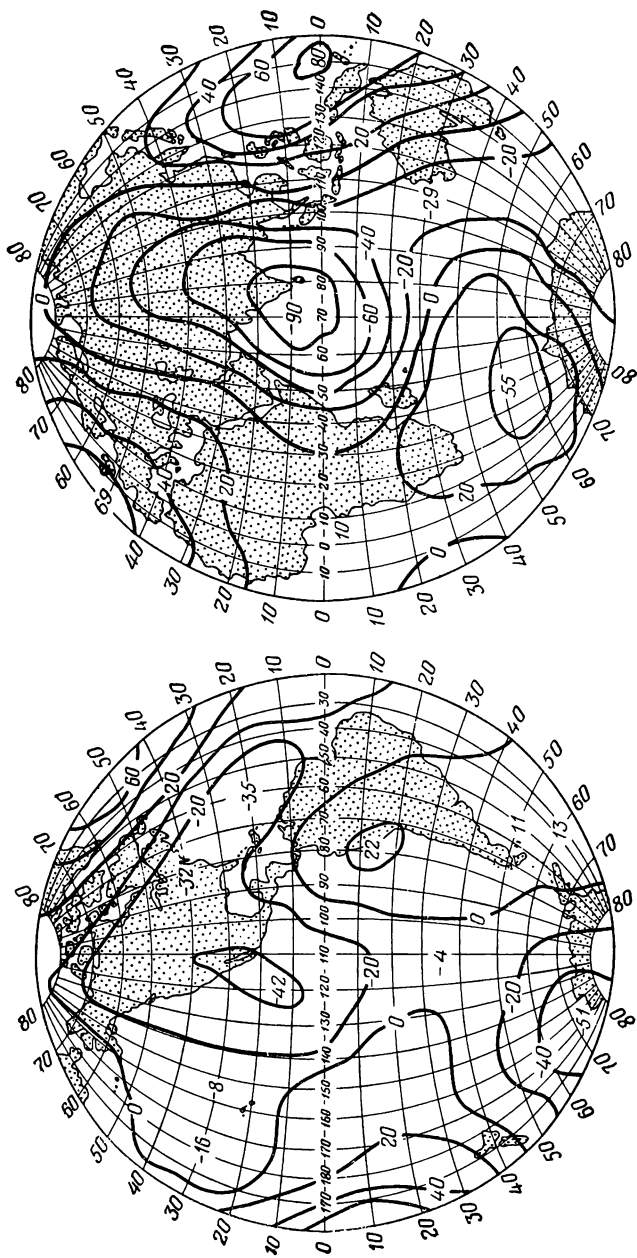


Рис. 17. Высоты геоида, соответствующие коэффициентам разложения потенциала до шестого порядка (Андерли).

Имеется также четыре или пять минимумов:

- 1) к югу от Индии ( $0^\circ$  широты,  $70^\circ$  в.д.);
- 2) вблизи Южного полюса ( $90^\circ$  ю. ш.);
- 3) в западной части Атлантического океана ( $20^\circ$  с. ш.,  $60^\circ$  з. д.);
- 4) в восточной части Тихого океана ( $20^\circ$  с. ш.,  $120^\circ$  з. д.) и в некоторых случаях
- 5) в северо-восточной части Тихого океана ( $40^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  долготы).

Как нечто среднее между синхронными наблюдениями и дугами продолжительностью от одних до тридцати суток, для установления связи между системами координат иногда пытаются использовать короткую дугу, плотно покрытую наблюдениями на интервале около 30 мин. Эта дуга слишком коротка, чтобы определить положение системы относительно центра масс. Поэтому хотя в число неизвестных следует включить минимум шесть элементов орбиты, по крайней мере одну из систем координат необходимо считать известной. Небольшая протяженность такой дуги, большое число наблюдений и требования к точности позволяют применить для интегрирования численный метод. В данном случае наиболее удобно применить статистический подход к процессу эволюции орбиты, описываемому уравнениями (5.64) и (5.67). Преимущество короткой дуги заключается в том, что недостаточно известные возмущения, вызванные гравитационными вариациями, влиянием атмосферного сопротивления и т. д., не успевают вносить больших погрешностей. Тем не менее эти факторы все же оказывают воздействие, и, чтобы выявить их влияние, в число шести динамически необходимых неизвестных элементов орбиты для частной оценки состояния процесса следует добавить параметры, характеризующие эти факторы. Поскольку параметры на одном из этапов не имеют определенной связи с параметрами на другом этапе, ковариация не может быть просто выражена, как в (5.64), а должна быть дополнена статистическим приращением, выражающим некоррелированную часть дисперсии на обоих этапах.

### 6.3. ОРБИТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ. ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Если элементы орбиты испытывают вековые изменения (т. е. пропорциональные  $t$  или  $t^2$ ) или имеют синусоидальную вариацию гораздо большего периода, чем длина дуг, и если эти влияния не вычислены при определении орбиты и других параметров, как описано в разд. 6.2, то орбитальные постоянные интегрирования будут отражать долгопериодические, вековые и периодические изменения. Определение дифференциальных поправок к элементам орбиты для дуги продолжительностью в одну или две недели представляет собой очень эффективный способ сглаживания или фильтрации короткопериодических вариаций и выделения в постоянных интегрирования долгопериодических изменений. Как следует из формулы для линейных возмущений (3.76), зональные гармоники  $C_{l0}$  гравитационного поля будут вызывать или чисто вековые возмущения для четных  $l$ , или долгопериодические возмущения аргумента  $\omega$  для нечетных  $l$ . Следовательно, определение зональных коэффициентов  $C_{l0}$  целесообразнее производить, анализируя изменения средних элементов орбиты, полученных по коротким дугам в течение нескольких месяцев.

Определение четных зональных гармоник осуществляется по движению узла, а в некоторых случаях по движению перигея.

Из (3.76) и (3.113) имеем

$$\dot{\Omega} = - \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p} \mu \alpha_e^{2p} \frac{(\partial F_{2p0p} / \partial i) G_{2pp0}(e)}{n a^{2p+3} (1-e^2)^{1/2} \sin i} + O(J_2^2) +$$

+ Лунно-солнечные члены, (6.6)

$$\dot{\omega} = - \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p} \mu \alpha_e^{2p} \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n a^{2p+3}} \left[ \frac{\partial G_{2pp0} / \partial e}{e} F_{2p0p}(i) - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)} \frac{\partial F_{2p0p}}{\partial i} G_{2pp0}(e) \right] + O(J_2^2) +$$

+ Лунно-солнечные члены. (6.7)

В подобных анализах следует соблюдать следующие меры предосторожности.

1. Используемые орбиты спутников в целях разделения различных гармоник должны достаточно различаться по наклонению.

2. Орбитальные постоянные интегрирования, определенные по коротким дугам методом дифференциального уточнения, должны быть согласованы с алгебраической формой членов, содержащих  $J_2^2$ .

3. Средние значения элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$  по всему интервалу, используемому для определения  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ , должны быть точно определены, чтобы их можно было использовать в (6.6) и (6.7). Правильное усреднение элементов  $a$  и  $e$  особенно важно для устранения вековых влияний атмосферного сопротивления.

4. Если лунно-солнечное притяжение, световое давление и другие возмущения не устранены при определении средних значений постоянных интегрирования, они могут исказить определение скоростей  $\dot{\Omega}$  и  $\dot{\omega}$  не только путем чисто вековых, но и посредством периодических возмущений. Периодические возмущения  $\Delta(\Omega, \omega) \sin \{ \chi t - \lambda \}$  будут изменять вековые, полученные из наблюдений, на интервале от  $t_1$  до  $t_2$  на величину  $\delta(\dot{\Omega}, \dot{\omega})$ :

$$\delta(\dot{\Omega}, \dot{\omega}) = \frac{\Delta(\Omega, \omega) [\sin \{ \chi t_2 - \lambda \} - \sin \{ \chi t_1 - \lambda \}]}{t_2 - t_1}. \quad (6.8)$$

5. Если указанные возмущения устранены при определении постоянных интегрирования, то в дополнение к непосредственным искажениям  $\Delta_1(\Omega, \omega)$  достаточно большое косвенное искажение  $\Delta_2(\Omega, \omega)$  может вызвать суммарные возмущения  $\Delta e$ ,  $\Delta i$  с вековым влиянием  $J_2$ , так что его в соответствии с (3.116) следует принять во внимание.

Современные методы определения вековых возмущений используют данные, полученные по каждому из семи или более спутников в течение нескольких месяцев. Основные различия в обработке проявляются в установлении весов: производится ли оно в соответствии с требованиями точности или же в соответствии

с условием разнообразия наклонений, а также в том, следует ли использовать наряду с движением узла движение перигея, которое в большей степени подвержено влиянию атмосферного сопротивления. Результаты основных определений коэффициентов зональных гармоник, выполненных в последующие годы, приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты зональных гармоник в разложении гравитационного потенциала

Коэффициент, $10^6$	Смит [8,9]	Козан [7]	Кинг-Хили и др. [5,6]	Гайер и Ньютон [3]
$J_2$	1082,64	1082,65	1082,64	
$J_3$	-2,44	-2,55	-2,56	-2,68
$J_4$	-1,70	-1,65	-1,52	
$J_5$	-0,18	-0,21	-0,15	-0,02
$J_6$	0,73	0,65	0,57	
$J_7$	-0,30	-0,33	-0,44	-0,59
$J_8$	-0,46	-0,27	0,44	
$J_9$		-0,05	0,12	0,18
$J_{10}$	-0,17	-0,05		
$J_{11}$		0,30		
$J_{12}$	-0,22	-0,36		
$J_{13}$		-0,11		
$J_{14}$	0,19	0,18		

Определение нечетных зональных гармоник несколько проще, так как их влиянию подвержено большее число элементов орбиты и отсутствуют другие возмущения орбит, имеющие своим аргументом  $\omega$ . Наибольшим возмущениям подвержена высота перигея. Из (3.76) имеем

$$\Delta v = -2 \sum_{p=2}^{\infty} J_{2p-1} \mu a_e^{2p-1} \times \\ \times \frac{F_{(2p-1) 0p}(i) G_{(2p-1) 01}(e) (1-e^2)^{1/2}}{n a_e^{2p+2} \dot{\omega}} \sin \omega. \quad (6.9)$$

Кроме того, к категории долгопериодических орбитальных наблюдений относятся наблюдения за изме-



нениями в долготе 24-часового спутника с целью определения  $\{C_{22}, S_{22}\}$  при использовании резонансного эффекта, представленного выражением (3.136). Продолжительность предполагаемого периода  $T$  из (3.137) делает целесообразным использование средних элементов орбиты, определенных в эпохи с интервалом порядка одной недели. По таким средним значениям большой полуоси  $a$ , эксцентриситета  $e$  и наклонения  $i$  можно вычислить с помощью (3.121) коэффициенты  $Q_{lm}$ . Затем по  $Q_{lm}$  и долготам  $\lambda_A$ , полученным из наблюдений, можно вычислить ускорения  $\ddot{\lambda}_A$  с помощью (3.126). Эти вычисленные  $\ddot{\lambda}_A$  сравниваются затем с  $\ddot{\lambda}_A$ , получаемыми эмпирически по наблюдаемым значениям  $\lambda_A$ .

Вагнер [10] вычислил элементы первой 24-часовой орбиты, полученной по наблюдениям спутника „Синком-2“. По его данным средние элементы таковы:

$$\begin{aligned} a &= 42,170 \text{ км} = 6,61a_e, \\ e &= 0,0002, \\ i &= 33^\circ. \end{aligned}$$

Вычислив  $F_{lm\rho}$  по табл. 1 и считая  $G_{l\rho q} = 1$ , в „планетарных“ единицах ( $k = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a_e = 1$ ) получим

$$\begin{aligned} Q_{22} &= 1,206 \cdot 10^{-3} & J_{22} &= 0,778 \cdot 10^{-3} \bar{J}_{22}, \\ Q_{31} &= -0,014 \cdot 10^{-3} & J_{31} &= -0,016 \cdot 10^{-3} \bar{J}_{31}, \\ Q_{33} &= 1,258 \cdot 10^{-3} & J_{33} &= 0,175 \cdot 10^{-3} \bar{J}_{33}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где  $\bar{J}_{lm}$  отличаются от  $J_{lm}$  нормирующим множителем (1.34). Спутник „Синком-2“ сначала менял видимое положение от 54,9 до 57,6 з. д., а затем после коррекции — от 59,2 до 63,5 з. д. Получив для этих двух периодов средние долготы  $-56^\circ,25$  и  $-61^\circ,33$  и выполнив замену

$$\bar{J}_{lm} \sin m(\lambda - \lambda_{lm}) = \bar{C}_{lm} \sin m\lambda - \bar{S}_{lm} \cos m\lambda, \quad (6.11)$$

можем записать выражения ускорений как функции коэффициентов и средних долгот для каждого из двух

периодов:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot 10^3 &= -0,719\bar{C}_{22} + 0,298\bar{S}_{22} + 0,013\bar{C}_{31} + \\ &\quad + 0,009\bar{S}_{31} - 0,034\bar{C}_{33} + 0,172\bar{S}_{33}, \\ \lambda_2 \cdot 10^3 &= -0,654\bar{C}_{22} + 0,420\bar{S}_{22} + 0,014\bar{C}_{31} + \\ &\quad + 0,007\bar{S}_{31} + 0,012\bar{C}_{33} + 0,175\bar{S}_{33}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Вагнер [10] дает полученные из наблюдений ускорения

$$\begin{aligned}\lambda_{1o} &= -1,27 \pm 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ град/сутки}^2, \\ &= -1,93 \pm 0,03 \cdot 10^{-9} \text{ планетарных единиц}, \\ \lambda_{2o} &= -1,32 \pm 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ град/сутки}^2, \\ &= -2,01 \pm 0,03 \cdot 10^{-9} \text{ планетарных единиц}.\end{aligned}$$

С использованием групп коэффициентов, приведенных в табл. 3, получим (в планетарных единицах):

$$\begin{aligned}\text{Коэффициенты Ижака [4]:} \quad \lambda_{1c} &= -1,59 \cdot 10^{-9}, \\ \lambda_{2c} &= -1,61 \cdot 10^{-9},\end{aligned}$$

Коэффициенты Гайера и

$$\begin{aligned}\text{Ньютона [3]:} \quad \lambda_{1c} &= -1,86 \cdot 10^{-9}, \\ \lambda_{2c} &= -1,83 \cdot 10^{-9},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Коэффициенты Андерли [2]:} \quad \lambda_{1c} &= -1,92 \cdot 10^{-9}, \\ \lambda_{2c} &= -1,92 \cdot 10^{-9}.\end{aligned}$$

Кроме того, на ускорение оказывают незначительное влияние Солнце и Луна, которые дают приблизительно  $-0,02 \cdot 10^{-9}$  планетарных единиц. Эффект, подобный резонансу и представленный выражением (3.150), был впервые отмечен в орбите спутника с периодом узла  $107,13^m$  и наклоном  $89,8^\circ$ . Поэтому у данного спутника  $\dot{\Omega}$  было пренебрежимо мало и для  $m = 13$

$$\begin{aligned}(\dot{\omega} + \dot{M}) &= \frac{2\pi \cdot 806,8137}{107,13 \cdot 60} = 0,78866, \\ m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) &= -13 \cdot 0,058834 = -0,76484, \\ \dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) &= 0,02382,\end{aligned}$$

или период  $2\pi/(107,088 \times 0,02382) = 2,47$  дня. Поскольку эксцентриситет его орбиты равен 0,003, членом  $H(e) \partial G_{lp0} / \partial e$  можно пренебречь и считать  $G_{lp0} = 1$ . Большая полуось такого спутника равна  $1,1706a_e$ . Вычислив  $F_{lm\rho}$  с помощью (3.62) и положив

$$\bar{S}_{lm\rho} = N_{lm} \bar{J}_{lm} \sin[\omega + M + m(\Omega - \theta - \lambda_{lm})], \quad (6.13)$$

где  $N_{lm}$  — нормирующий множитель из (1.34), для (3.150) получим

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & -187,3\bar{J}_{13,13} \sin[\omega + M + 13(\Omega - \theta - \lambda_{13,13})] - \\ & - 79,3\bar{J}_{15,13} \sin[\omega + M + 13(\Omega - \theta - \lambda_{15,13})] + \\ & + 173,2\bar{J}_{17,13} \sin[\omega + M + 13(\Omega - \theta - \lambda_{17,13})] + \\ & + 38,6\bar{J}_{19,13} \sin[\omega + M + 13(\Omega - \theta - \lambda_{19,13})] + \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

Согласно (5.15), ожидаемый порядок величины  $\bar{J}_{lm}$  равен приблизительно  $\sqrt{2} \cdot 10^{-5} / l^2$ , и, следовательно,  $0,07 \cdot 10^{-6}$  есть вероятное значение  $E\{\bar{J}_{lm}\}$  для порядка  $l$  в пределах от 13 до 19. Найдя корень из суммы квадратов коэффициентов в (5.15) и умножив его на  $0,07 \cdot 10^{-6}$ , для  $E\{\Delta\lambda\}$  получим значение  $\pm 18,5 \cdot 10^{-6}$ , что соответствует приблизительно  $\pm 140$  м. Величина, полученная из наблюдений, составляла примерно  $\pm 100$  м, что приводит для коэффициентов от  $\bar{J}_{13,13}$  до  $\bar{J}_{19,13}$  к среднеквадратичному значению, равному  $0,05 \cdot 10^{-6}$ .

При этом должно быть также ощутимым влияние коэффициентов  $\bar{J}_{21,13}$  и т. д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderle R. J.*, Observations of Resonant Effects on Satellite Orbits Arising from the Thirteenth and Fourteenth-Order Tesserall Gravitational Coefficients, *J. Geophys. Res.*, 70, № 10, 2453—2458 (1965).
2. *Anderle R. J.*, Geodetic Parameters Set NWL-SE-6 Based on Doppler Satellite Observations, The Use of Artificial Satellites for Geodesy, vol. II, Proc. 2nd Intern. Symp. on the Use of Artificial Satellites for Geodesy, ed. G. Veis, Nat. Techn. Univ., Athens, 1967.

3. *Guier W. H., Newton R. R.*, The Earth's Gravity Field Deduced from the Doppler Tracking of Five Satellites, *J. Geophys. Res.*, **70**, № 18, 4613—4626 (1965).
4. *Izsak I. G.*, A New Determination of Non-Zonal Harmonics by Satellites, Trajectories of Artificial Celestial Bodies as Determined from Observations, ed. J. Kovalevsky, Springer Verlag, Berlin, 1966.
5. *King-Hele D. G., Cook G. E.*, The Even Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **10**, № 1, 17—30 (1965).
6. *King-Hele D. G., Cook G. E., Scott D. W.*, The Odd Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential, *Planet. Space Sci.*, **13**, № 12, 1213—1232 (1965).
7. *Kozai Y.*, New Determination of Zonal Harmonic Coefficients in the Earth's Gravitational Potential, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **16**, 263—284 (1964).
8. *Smith D. E.*, A Determination of the Odd Harmonics in the Geopotential Function, *Planet. Space Sci.*, **11**, № 7, 789—795 (1963).
9. *Smith D. E.*, A Determination of the Even Harmonics in the Earth's Gravitational Potential Function, *Planet. Space Sci.*, **13**, № 11, 1151—1160 (1965).
10. *Wagner C. A.*, A Determination of Earth's Equatorial Ellipticity from Seven Months of Syncom 2 Longitude Drift, *J. Geophys. Res.*, **70**, № 6, 1566—1568 (1965).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	9
Таблица обозначений . . . . .	11
Таблица числовых значений некоторых постоянных . . . . .	17
<b>Глава 1. Гравитационное поле Земли</b>	
1.1. Теория потенциала . . . . .	19
1.2. Сферические гармоники . . . . .	22
1.3. Потенциал эллипсоида . . . . .	27
Литература . . . . .	30
<b>Глава 2. Матрицы и геометрия орбиты</b>	
2.1. Общие замечания . . . . .	31
2.2. Обозначения матриц . . . . .	31
2.3. Геометрия орбиты . . . . .	36
Литература . . . . .	39
<b>Глава 3. Динамика орбиты спутника</b>	
3.1. Эллиптическое движение . . . . .	40
3.2. Уравнения возмущенного движения . . . . .	46
3.3. Преобразование сферических гармоник возмущающей функции . . . . .	52
3.4. Линейные возмущения . . . . .	62
3.5. Нелинейные возмущения . . . . .	65
3.6. Резонанс . . . . .	76
3.7. Другие эффекты . . . . .	84
3.8. Выводы . . . . .	88
Литература . . . . .	89
<b>Глава 4. Геометрия наблюдений спутников</b>	
4.1. Общие замечания . . . . .	90
4.2. Преобразования координат . . . . .	90
4.3. Дифференциальные соотношения и уравнения наблюдений . . . . .	96
4.4. Уравнения, получаемые из угловых наблюдений . . . . .	105
4.5. Уравнения, получаемые из наблюдений расстояния и скорости изменения расстояния . . . . .	113
4.6. Время и точное определение координат . . . . .	117
4.7. Условия видимости . . . . .	124
Литература . . . . .	129

<b>Глава 5. Статистические оценки</b>	
5.1. Общие замечания . . . . .	130
5.2. Временные ряды . . . . .	131
5.3. Минимизация суммы квадратов . . . . .	141
Литература . . . . .	151
<b>Глава 6. Обработка результатов наблюдений</b>	
6.1. Синхронные наблюдения . . . . .	152
6.2. Орбитальные наблюдения. Короткопериодические возмущения . . . . .	154
6.3. Орбитальные наблюдения. Долгопериодические возмущения . . . . .	164
Литература . . . . .	169

У. КАУЛА

**Спутниковая геодезия**

Редактор *В. А. Пангаева*  
 Художник *Е. М. Золотарев*  
 Художественный редактор *В. М. Варлашин*  
 Технический редактор *Н. Д. Толстякова*  
 Корректор *Н. И. Баранова*

Сдано в производство 10/IX-69 г. Подписано к печати 27/1-70 г.  
 Бум. № 2 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>=2,69 б. л. Усл. печ. л. 9,03. Уч.-изд. л. 7,90. Изд. № 27/5304  
 Цена 79 коп. Зак. 296

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
 Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени  
 Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
 Измайловский проспект, 29.