ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Строительство зданий, подземных сооружений и геомеханика»

Курс лекций
по дисциплине «Физика горных пород»
для студентов направлений подготовки
21.05.04 «Горное дело».

Рассмотрено
на заседании кафедры
«Строительство зданий, подземных сооружений и геомеханика»
Протокол № 1 от 29 августа 2019 г.

Утверждено
на заседании учебно-издательского совета ДонНТУ
Протокол № 2 от 05.09. 2019г.

г. Донецк – 2019

УДК 622.831.3.02:539.2.8

Конспект лекций по курсу «Физика горных пород» (для студентов направлений подготовки 21.05.04 «Горное дело») / Сост. Марийчук И.Ф., Купенко И.В., Нефёдов В.Е.– Донецк: ДонНТУ, 2019.– 297 с.

Рецензент д.т.н., проф. Петренко Ю.А.

В конспекте лекций «Физика горных пород» кратко изложены разделы, включающие плотностные, механические, акустические, гидравлические и газодинамические, термодинамические, электромагнитные и радиационные свойства горных пород и массивов.

Приведены численные методы решения задач: конечных, граничных и дискретных элементов, вариационные методы, а также математическое и физическое моделирование геомеханических процессов

Конспект лекций подготовлен на основании многолетнего опыта чтения лекций по дисциплине преподавателями горного факультета и может быть полезным для аспирантов и сотрудников при выполнении научных исследований.

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые обобщающие труды по теоретическим и экспериментальным исследованиям горных пород, на основании которых сформировалось основное содержание физики горных пород, появились только лишь во второй половине двадцатого столетия. Большой вклад в развитие и становление физики горных пород как самостоятельной науки внесли В.В. Ржевский, Н.В. Мельников, В.Н. Кобранова, А.И. Заборовский, В.Н. Дахнов, В.М. Добрынин, Э.И. Пархоменко, М.П. Воларович, М.М. Протодьяконов, П.М. Цымбаревич, Ю.А. Векслер, П.А. Ребиндер, А.С. Семенов, А.Г. Иванов, Б.Н. Кутузов, А А. Воробьев, Г.Я. Новик, Ф. Берч, Ф. Гассман, Н. Кристенсен и многие другие ученые.

Научные и практические задачи физики горных пород, сформулированные во второй половине прошлого века академиком В.В. Ржевским, являются актуальными и на современном этапе развития горного производства. Без определения значений физико-технических параметров пород, закономерностей изменения их свойств в условиях внешних воздействий принципиально невозможна разработка новых эффективных методов разрушения пород и управления этими методами, новых технологий производства горных работ, создания систем контроля состава, состояния и особенностей поведения пород в процессе ведения горных работ.

Среди горных наук физика горных пород занимает особое место, являясь не только самостоятельной, но, пожалуй, и единственной фундаментальной наукой, обогатившей мировые знания целым рядом научных открытий.

Базовыми дисциплинами являются общая геология, минералогия, кристаллография, петрография, физика, математика, химия и сопротивление материалов.

В программе подготовки специалиста горного профиля одной из основных учебных дисциплин является физика горных пород, изучающая физические свойства пород, закономерности изменения установленных свойств, протекающие физические процессы и происходящие при этом физические явления. Комплекс полученных знаний используют при разработке новых методов воздействия на породы, конструировании машин и механизмов, разработке новых технологий производства горных работ и т.д. Физика горных пород не только дает знания о тех или иных физических особенностях пород, но и предлагает наиболее эффективные пути решения технологических задач, поставленных горным производством.

Таким образом, при изучении курса физики горных пород основные задачи, стоящие перед будущими специалистами в области инженерной механики, геологии, экологии и горного дела, сводятся к следующему:

- усвоить общие понятия и терминологию физики горных пород, знания о физических свойствах горных пород и численные значения физических показателей пород;
- овладеть знаниями общих вопросов физики горных пород, усвоить основные положения и научиться применять их в решении разнообразных вопро-

сов теории и практики;

• усвоить методы прогноза изменяемости свойств пород в результате внешних воздействий, овладеть принципами воздействия на породу;

• изучить основные методы исследования процессов, протекающих в породах при воздействии внешних физических полей;

• изучить и понять физические явления, происходящие в горных породах, уметь раскрыть суть их механизмов;

• научиться обобщать, анализировать и устанавливать связь протекающих явлений с различными физическими параметрами горных пород.

Механика горных пород – часть физики горных пород, изучающая прочность, устойчивость и деформируемость дискретных объемов горных пород и массивов горных пород и горнотехнологических объектов в поле природных и вызванных влиянием горных работ сил горного давления.

Интересно отметить, что исторически, как и общая физика, физика горных пород развивалась с формированием и развитием механики в XIX в. и оформилась в самостоятельную науку в 60 годы XX в. после развития основных положений механики горных пород.

Физика горных пород опирается на достижения таких наук, как физика твердого тела, теория пластичности, реология, геологические науки.

Систематизируя свойства горных пород, разрабатывая методы количественной оценки свойств и состояния горных пород и массивов, механика горных пород является базой для создания инженерных методов расчета горной технологии.

Изучение студентами таких дисциплин, как «Механика подземных сооружений», «Разрушение горных пород», «Управление состоянием породных массивов», «Технология разработки месторождений полезных ископаемых» и др. базируется на глубоких знаниях физики горных пород.

1.1. Объект и метод исследования физики горных пород

Объектом исследования физики горных пород является горная порода вообще и горный массив в частности, а именно физико-технологические свойства массива и прцессы, возникающие в нем, до воздействия на него горными работами и процессы изменения этих свойств после возникновения в нем закрепленных и не закрепленных горных выработок.

Горная порода и процессы, происходящие в массиве горных пород на различных стадиях разработки месторождения представляют из себя очень сложную среду, свойства которой зависят от состава и строения горных пород, наличия в них дефектов, жидкостей и газов, возникновения и перераспределения аномалий напряженно-деформированного состояния массива пород, методов проведения и крепления горных выработок и т. п.

Учитывая вышеизложенное, ***метод исследования*** в физике горных пород обычно комплексный и включает в себя: изучение свойств образцов горных пород в лабораторных условиях, натурные наблюдения, моделирование (физическое и математическое) механических процессов в лабораторных условиях и

аналитические методы описания физических процессов на основе общих закономерностей теории упругости, пластичности и предельного равновесия.

Объект исследования в физике горных пород более сложен и зависит от большого количества случайных факторов, чем, например, в физике твердого тела. По этой причине при обработке результатов испытаний свойств горных пород и натурных наблюдений широко используются методы теории вероятностей и математической статистики, широко используются эмпирические зависимости, физические процессы часто описываются феноменологически.

Физика горных пород, изучающая многофазные системы сложной структуры, сформированные в природе при комплексном воздействии различных физических и вещественных полей, является отраслью естествознания, основанного главным образом на экспериментальных данных, полученных при изучении образцов горных пород либо непосредственно при исследовании физических процессов, протекающих в массиве пород.

Современные методы экспериментальных исследований, развиваемые в физике твердого тела, теоретические работы и методы физико-математического моделирования с использованием квантово-механических закономерностей, вычислительные методы решения задач напряженно-деформированного состояния горного массива, данные комплексных геофизических исследований, физико-механического и геологического моделирования горного массива, новые достижения в области электрогеохимии, механохимии и других интенсивно развивающихся наук этого направления успешно используются в физике горных пород при решении многих задач фундаментального и прикладного характера.

Экспериментальные исследования причин и механизмов, вызывающих различные геомеханические процессы, фазовые и структурные превращения и другие физико-химические явления в породах и минералах, требуют глубокого изучения характера, особенностей поведения и взаимодействия частиц в минеральном веществе, межфазном и межзерновом пространстве. С этой целью используют методы туннельной микроскопии, ядерного магнитного резонанса, рентгеноструктурного анализа, электронографии, ядерного гамма-резонанса, электронно-зондового микроанализа, электронной микроскопии, оптической, люминесцентной, световой и др.

Успешное решение технологических задач и вопросов повышения производительности труда в горном производстве невозможно представить без знания физико-химических процессов, протекающих в горных породах, явлений и закономерностей, характеризующих изменение свойств пород в результате воздействия на них различными физическими полями. Одной из специфических особенностей горного производства практически на любом этапе технологической цепи являются постоянно взаимодействующие между собой такие главные элементы как горные породы, машины и механизмы. С этой точки зрения работа специалиста горного профиля может быть эффективной и полезной в том случае, если он владеет достаточно глубокими знаниями о свойствах и особенностях функционирования этих элементов в различных производственных условиях.

Наиболее ярким примером связи физики горных пород с проблемами

горного дела является тесный союз этой науки с главными технологическими элементами процессов проведения выработок и выемки полезных ископаемых: разрушением, дроблением, поддержанием выработок, транспортированием горной массы, обогащением полезных ископаемых. Масштабы этих работ (если их выразить в тоннах или кубометрах добытой горной массы) составляют несколько сотен миллионов тонн в год. Используя простые расчеты, можно убедиться насколько значительными могут оказаться экономические показатели при использовании достижений физики горных пород, особенно в области ресурсо- и энергосберегающих технологий.

Однако не стоит считать, что связь физики горных пород ограничивается только кругом технологических проблем, возникающих при добыче полезных ископаемых. Параллельно решаются вопросы охраны окружающей среды, безопасности труда и многие другие практические и научные задачи, представляющие в целом интерес для цикла геологических дисциплин и физических наук.

Таким образом, изучая свойства горных пород и явления, протекающие в породе, закономерности, проявляющиеся как в результате естественных физико-химических взаимодействий между ее компонентами, так и при техногенном влиянии, физика горных пород активно способствует успешному решению вопросов, связанных с совершенствованием горного производства.

1.2. Горные породы

Геологическая история Земли хранит огромное количество разнообразных событий, ответственных за возникновение и формирование горных пород. Силы гравитации и солнечная энергия, сверхвысокие давления и температуры, вызванные ударами крупных космических тел, действие вулканов, большая интенсивность атмосферных процессов и активная тектоническая деятельность - далеко не полный перечень наиболее вероятных воздействий, как на первичное вещество Земли, так и на сформированный состав и строение пород. Крупномасштабные и локальные физические, химические, физико-химические и механохимические процессы, протекающие на Земле, создали уникальные и неограниченные возможности для развития человечества: начиная от создания первого примитивного каменного орудия до использования горных пород и содержащихся в них компонентов во всех областях его практической деятельности. Являясь главным объектом горно-металлургического промышленного комплекса, породы могут быть как непосредственно полезным ископаемым, так и содержать в своем составе (в той или иной концентрации) необходимые для человека компоненты – металлы, минералы, жидкие и газообразные углеводороды и другие вещества. Производственный цикл, связанный с добычей полезных ископаемых и технологиями их переработки в товарную продукцию, занимает иногда достаточно сложный и длинный путь, включающий такие основные технологические стадии как разрушение, выемка, транспортирование, складирование, обработка и обогащение. Эффективное использование материальных и экономических ресурсов, технических и технологических решений при добыче полезных ископаемых во многом зависят от знания условий формирования горных пород, их химического и минерального состава, физических и физико-

технических параметров, структурно-текстурных особенностей.

Горные породы – природные образования, слагающие разнообразные геологические тела, из которых построена земная кора. Они представляют собой закономерные сочетания или механические смеси различных по составу кристаллических минеральных зерен, наряду с которыми могут присутствовать аморфное вещество и органические остатки; к горным породам относятся встречающиеся в земной коре смеси жидких минеральных веществ (неорганических и органических). Термин ***"горные породы"*** впервые был введен в обиход российским академиком В.М. Севергиным в XIX ст.

Минерал – природное, как правило, твердое тело, относительно однородное по химическому составу и физическим свойствам, возникшее как продукт физико-химических процессов, протекающих на поверхности и в глубинах Земли. По происхождению горные породы делят на три группы:

– ***магматические,*** образованные из застывшей в недрах или на поверхности Земли магмы;

– ***осадочные,*** образованные в результате накопления и преобразования продуктов разрушения, ранее возникших горных пород на поверхности Земли при обычных температурах и нормальном давлении;

– ***метаморфические*** – за счет изменения осадочных и магматических пород в результате действия высоких давлений, температур, естественного электрического поля, газообразных веществ, выделяющихся из магмы и т.д.

Все горные породы характеризуются определенными особенностями строения и физическими свойствами, которые отражают условия их образования и изменения. Это плотностные, упругие, прочностные, тепловые, электрические и магнитные свойства.

Горные породы, перечисленных трех групп, различаются между собой по условиям залегания, химическому и минеральному составу, структуре и текстуре, обусловленными особенностями расположения в породах минералов и их размерами, наличию рудных и нерудных полезных ископаемых.

Структура (от лат. struktura – расположение, строение) – совокупность признаков, определяемых формой, размерами и взаимным расположением отдельных компонентов породы, т.е. минеральных зёрен, обломков пород. В понятие структуры входят степень кристалличности породы, размеры и форма кристаллических зерен, взаимоотношение раскристаллизовавшегося и стекловатого материала и др.

Условия охлаждения и вязкость магмы определяют степень кристаллизации горной породы. Так, на больших глубинах при медленном остывании образуется порода, состоящая полностью из минералов кристаллического строения. Она имеет кристаллически-зернистую структуру (граниты, сиениты, диориты, габбро, перидотиты и т.п.). Если порода образуется при быстром охлаждении, то она может целиком состоять из стекла и определяться как стекловатая. Примерами служат базальтовые стекла, обсидианы.

Главными структурами магматических пород является: *тонкозернистая* (размер зерен от 0,1 до 0,001 мм), *мелкозернистая* (около 1 мм), *среднезернистая* (от 1 до 5 мм), *крупнозернистая* (от 5 до 10 мм) и *гигантозернистая* (более 10 мм), *равномернозернистая* (примерно одинаковый размер зерен) и *не-*

равномернозернистая, порфировидная (с крупными вкраплениями – порфировыми выделениями, погруженными в более мелкозернистую основную массу), *пегматитовая* (ее называют также письменная или графическая), характерную для своеобразных кварцево-полевошпатовых прорастаний в гранитных пегматитах и др.

Для излившихся и гипабиссальных интрузивных пород основного состава (базальтов, диабазов и др.) характерны офитовая и диабазовая структуры {гипабиссальные породы образовались на небольшой глубине в результате кристаллизации порций магмы; интрузивные породы закристаллизовались из магмы, которая внедрилась в породы земной коры).

В структурах метаморфических пород различают: гранобластовую – с преобладающей изометричной формой зерен минералов, лепидобластовую с пластинчатой или чешуйчатой формой большинства зерен, нематобластовую с шестоватой, столбчатой формой зерен, фибробластовую – с волокнистой, игольчатой формой зерен и др.

Структуры осадочных пород будут рассмотрены при описании отдельных их разновидностей и групп.

Текстура (от лат. textura – ткань, сплетение) – совокупность признаков, определяющих внешний облик породы и характеризующихся взаимным расположением и ориентировкой минеральных агрегатов в объеме. Таким образом, характеристики отдельных зерен имеют значение для определения структуры, а характеристики минеральных агрегатов и их расположение в пространстве – для определения текстуры.

Выделяют следующие основные текстуры: массивную (однородную), слоистую, сланцеватую, флюидальную (со следами течения в стекловатых вулканических породах), такситовую (с неравномерным и неправильным расположением участков различной структуры) и др. Сланцевая текстура свойственна большинству метаморфических пород. Она обусловлена параллельной ориентировкой пластинчатых и чешуйчатых выделений минералов.

В зависимости от условия образования текстуры горных пород подразделяются на первичные и вторичные. Первичные текстуры изверженных пород образуются в период остывания магмы. При ее движении, когда наряду с жидкой фазой находятся выделившиеся из магмы твердые кристаллы, происходит ориентировка твердых кристаллов в пространстве. Среди первичной текстуры изверженных пород известны линейные и полосчатые (или слоистые). Линейные характеризуются параллельным расположением игольчатых, призматических или таблитчатых кристаллов. Слоистость выражается в послойном чередовании пород различного состава, или в плоско-параллельном расположении таблитчатых минералов.

Вторичная текстура горных пород образуется при тектонических процессах. Она характерна для таких метаморфических пород как гнейсы, кварциты, мраморы и др.

В текстуре породы различают два типа закономерной ориентировки минералов: по форме зерен и по внутреннему строению. Ориентировка по форме зерен возможна при наличии зерен удлиненной или пластинчатой формы кристаллов; она может быть первичной или вторичной за счет деформации зерен.

Встречается в гнейсах и сланцах. Часто в кварцитах, жильном кварце, содержащих зерна изометрической формы, обнаруживается ориентировка по определенному расположению кристаллографических осей (ориентировка по внутреннему строению).

В зависимости от степени ориентировки минералов текстура может быть полной или ограниченной. Чем больше рассеяны минералы в породе, тем в меньшей степени проявляется анизотропия породы за счет текстуры.

Для установления структуры и текстуры горных пород чаще всего используют оптические микроскопы, однако в отдельных случаях эти параметры определяются и визуально. По ориентации частиц и наличию пустот породы делят на массивные, пористые и слоистые.

Твердость пород определяется твердостью главных породообразующих минералов. По твердости породы различают: низкой твердости, средней, твердые и весьма твердые.

Плотность. Различают легкие породы с объемным весом менее 3 г/см, средние, имеющие объемный вес 1,5…2,9 г/см , и тяжелые, у которых объемный вес составляет более 2,9 г/см^3.

Частицы горных пород – минеральные агрегаты, минералы – имеют различную силу сцепления, которая зависит от структурных связей между ними. Преобладающий тип связи между частицами породы характеризует породы с точки зрения их прочности:

• ***рыхлые, сыпучие*** или ***раздельно-зернистые*** – связи между частицами молекулярные. Эти породы представлены механической смесью частиц (песок, гравий, галечник). Некоторые из рыхлых пород легко распадаются на слагающие их частицы. При ударе в таких породах, как правило, образуется углубление.

• ***слабосвязанные*** – глинистые породы, суглинки, лессы – связи у них сильно зависят от влажности.

• ***прочносвязанные, твердые, скальные***. В этой категории пород различают ***вязкие и хрупкие*** породы. Связь между частицами этого типа пород - химическая. К прочносвязанным породам относятся песчаники, гнейсы, граниты и др.

Горная порода, в общем случае, является многокомпонентной, многофазной гетерогенной системой. Неоднородность горных пород определяется следующими видами.

Фазовый состав. Порода может быть представлена несколькими фазами, например, тремя – твердой, жидкой, газообразной; двумя – твердой и газообразной, жидкой и газообразной.

Компонентный (минеральный) состав. Каждая фаза может быть представлена одним, двумя или несколькими твердыми минералами (твердая фаза), жидкостями и газами (жидкая и газообразная).

Химический состав. Твердая, жидкая и газообразная фазы имеют вполне определенный состав из химических элементов. Гетерогенность породы определяется различным происхождением составляющих компонентов.

Структурно-текстурное строение. Этот параметр обусловлен сложным образованием, состоящим из двух и более различных пород.

Фазовая неоднородность – это поверхности раздела между фазами. Например, в глинистом коллекторе твердая фаза и свободная вода занимают обособленные объемы, а между ними поверхностью раздела является физически связанная вода, т.е. новый компонент, который становится иногда весьма заметным и влияющим на изучаемые параметры. Компонентная неоднородность характеризуется составом фаз породы. К текстурной неоднородности относят различные включения в виде прослоев, линз.

Уровни неоднородности могут быть весьма различны, и зависят они от природы неоднородности. В табл. 1 показаны масштабы неоднородности горных пород, которые необходимо знать при лабораторных и полевых исследованиях горных пород. Необходимость эта возникает в связи с выбором методов исследования: визуальных, акустических, оптических, электронно-микроскопических, ядерных и др.

Таблица 1

Масштабы неоднородности (по В.М. Добрынину)

Составные части породы	Размеры, м
Атомы, ионы	$(0{,}5\ldots2{,}0)\cdot10^{-10}$
Молекулы	10^{-10}-10^{-9}
Моно- и полимолекулярные слои (толщина)	10^{-10}-10^{-7}
Поры, заполненные жидкостью или газом	10^{-10}-10^{-3}
Зерна кристаллического скелета	10^{-3}-10^{-1}
Полости выщелачивания	10^{-4}-10^{1}
Прослои, линзы, включения	10^{-3}-10^{1}

Колебательные тектонические движения перемещают осадки на все большие глубины, мощность осадочных отложений растет. Вместе с тем растет температура и давление. В осадках происходит постепенное уплотнение, появляются молекулярные и адсорбционные связи, создаются условия для нового минералообразования, происходит так называемая гравитационная консолидация.

Возникающие при этом новые внутренние связи, иногда даже кристаллические, конечно, не сразу приобретают значительную жесткость. Однако появление даже относительно гибких постоянных связей замедляет, а затем и приостанавливает процесс гравитационной консолидации. Формируются в данных условиях устойчивые структуры, которые в дальнейшем, при окончательном затвердевании и возникновении новых минеральных видов образуют кристаллизационные связи, характерные для скальных пород.

Заключительным этапом петрогенеза может быть значительное метаморфическое изменение уже сформированных осадочных пород и превращение их в породы метаморфические с кристаллизационными связями, очень низкой пористостью и высокой прочностью и упругостью.

1.3. Классификация физико-технических свойств пород

Физическое свойство горной породы – это ответная реакция на воздействие тех или иных физических полей или веществ.

Каждое свойство может быть количественно оценено одним или несколькими параметрами. Совокупность всех параметров называется ***физико-техническими характеристиками.***

Параметр физического свойства горной породы – размерное или безразмерное скалярное или векторное число; количественная мера свойства.

В настоящее время известно и используется более 100 параметров горных пород, из которых 12 отнесены к базовым или обязательным к определению (табл. 2).

Таблица 2

Базовые параметры горных пород

№	Класс	Группа	Наименование	Обозначение	Единица СИ
1	Плотностные	-	Объемная масса	ρ	кг/м^3
2			Пористость	P	%
3	Механические	Прочностные	Предел прочности на одноосное сжатие	$\sigma_{сж}$	Па
4			Предел прочности на одноосное растяжение	$\sigma_р$	Па
5		Деформационные	Модуль упругости	E	Па
6			Коэф-т Пуассона	υ	ед
7	Тепловые		Коэф-т теплопроводности	λ	Вт/м·К
8			Удельная теплоемкость	C	Дж/кг·^{o}C
9			Коэф-т линейного теплового расширения	α	1/^{o}K
10	Электромагнитные	Электрические свойства	Удельное электрическое сопротивление	$\rho_э$	Ом·м
11			Относительная диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon_ї$	ед.
12		Магнитные свойства	Относительная магнитная проницаемость	μ	ед.

2. ПОРИСТОСТЬ И СТРУКТУРА ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА

2.1.Основные параметры

В строении горных пород отмечается твердая, жидкая и газовая фазы. Твердая фаза слагает минеральный скелет, а жидкая и газовая заполняют пустоты, имеющиеся как между минеральными зернами, так и внутри минералов. Эти пустоты, в которых заключается газово-жидкая фаза, называются поровым пространством породы.

Среди пористости различают: пористость общую (абсолютную, физическую полную), т.е. суммарный объем всех пустот независимо от формы, величины и взаимного расположения; пористость закрытую (отрицательную, замкнутую) – совокупность замкнутых, не имеющих между собой сообщения пор; пористость открытую (насыщенную, эффективную) – совокупность сообщающихся между собой пор и пустот, т.е. объем той пористости, в пределах которой возможно движение жидкости и газов при определенных давлениях и температурах.

Горную породу можно рассматривать как естественную пористую среду с жестким минеральным каркасом. Количественно объем всех видов пор в породах оценивается коэффициентами соответствующих пористостей.

Так количественно общую пористость рассчитывают по соотношению плотностей сухой породы и минеральных зерен:

$$k_{\text{п}} = \left(V_{\text{с}} - V_{\text{тв}}\right)/V_{\text{с}} = 1 - \rho_{\text{с}}/\rho_{\text{тв}},$$

где $V_{\text{ñ}}$ и $\rho_{\text{ñ}}$ – соответственно объем и плотность сухой породы; $V_{\text{òâ}}$ и $\rho_{\text{òâ}}$ – соответственно объем и плотность твердой фазы в породе; $k_{\text{ï}}$ – *коэффициент общей пористости* образцов горных пород (используется при лабораторном способе Мельчера путем взвешивания сухого парафинированного образца и того же раздробленного образца в пикнометре).

Объем пор, сообщающихся между собой в породе и с окружающей средой, оценивается *коэффициентом открытой пористости*: $k_{\text{ï.î.}}$

$$k_{\text{п.о.}} = V_{\text{к}}/V_{\text{с}},$$

где: $V_{\text{ê}}$ – объем пор, заполненных керосином. Открытая пористость определяется по *методу Преображенского* путем взвешивания сухих и насыщенных керосином образцов пород с последующим нахождением объема парафинированных образцов взвешиванием их в керосине.

Открытую пористость оценивают также и *коэффициентом эффективной пористости* $k_{\text{п.эф.}}$:

$$k_{\text{п.эф.}} = \left(V_{\text{к}} - V_{\text{в.св.}}\right)/V_{\text{с}} = k_{\text{п.о.}}\left(1 - k_{\text{вн}}\right),$$

где: $k_{\text{вн}}$ – *коэффициент водонасыщения*, определяющий содержание связанной воды в единице объема пор; $V_{\text{в.св.}}$ – объем связанной воды.

Коэффициент эффективной пористости характеризует полезную емкость породы для нефти или газа. Представляет собой объем открытых пор за исключением объема, заполненного физически связанной и капиллярно- удержанной пластовой водой. От точности определения величины $k_{\text{вн}}$ будет зависеть степень достоверности величины $k_{\text{п.эф.}}$ при геофизических исследованиях.

Коэффициент динамической пористости $k_{\text{ï .ä.}}$ определяют с целью установления той части объема породы при заданном градиенте давления, в которой может наблюдаться движение жидкости или газа:

$$k_{\text{п.д.}} = \left(V_{\text{п.эф.}} - V_{\text{н.о.}}\right) / V_{\text{с}},$$

где $V_{\text{â.ñâ.}}$ – объем эффективных пор: $V_{\text{к}} - V_{\text{в.св.}}$ – объем пор, в которых остался керосин после его вытеснения из породы воздухом или азотом. Величина $k_{\text{ï .ä.}}$ зависит не только от свойств породы, но и от величины приложенного градиента давления и времени вытеснения керосина воздухом или азотом.

По численному значению коэффициенты пористости, определенные на одном образце, подчиняются следующей закономерности:

$$k_{\text{ï}} > k_{\text{п.о.}} > k_{\text{п.эф.}} > k_{\text{п.д.}}.$$

По происхождению поры делятся на ***первичные***, сформировавшиеся в процессе образования горной породы, и ***вторичные***, которые возникли после образования породы. Пример пород с первичными порами – пески, песчаники, глины и вторичными – трещинные, трещиннокавернозные, доломиты. Большинство физических свойств горных пород зависят от пористости, конфигурации или вида полостей. По форме первичные поры могут быть ромбоэдральными у хорошо отсортированных рыхлых и окатанных песков, тетраэдрическими у сильно уплотненных песков, щелевидными у глин, слюд, графита и других минералов с пластинчатой структурой, в виде каналов расширяющейся или сужающейся формы, в ненарушенных магматических породах – пузырчатыми.

Вторичные поры могут бать трещиноватыми (характерно для скальных метаморфических и магматических пород), в виде каверн (гипсы, карбонатные разности), каналов (лессы), ячеек (у известняковых и кремнистых туфов).

Взаимодействие твердой поверхности с насыщающей поры пластовой водой положено в основу классификации пор по размерам:

Сверхкапиллярные – диаметр $d_{\text{ýô.}} > 10^{-4}$ м ($d_{\text{ýô.}}$ – эффективный диаметр – диаметр круга с площадью, равной площади изучаемой поры). Пластовая вода в этих порах может перемещаться под действием силы тяжести, т.к. сила адсорбции с твердой фазой и капиллярные силы сравнительно невелики. Сверхкапиллярные поры характерны для слабосцементированных галечников, гравия,

крупно-, среднезернистых песков и др. В зонах выщелачивания карбонатных пород могут достигать больших размеров – каверны, карсты.

Капиллярные – диаметр $d_{эф.} > 10^{-7} \cdot 10^{-4}$ м. Вода в этих порах удерживается капиллярными силами, препятствующими движению воды под действием силы тяжести. Эти поры характерны для сцементированных песчаников, обломочных и кристаллических известняков, доломитов. Сверхкапиллярные и капиллярные поры являются основной емкостью гранулярных коллекторов.

Субкапиллярные – диаметр $d_{эф.} = 2 \cdot (10^{-9} \ldots 10^{-7})$ м. Здесь велика доля воды, на которую действуют адсорбционные силы со стороны поверхности зерен породы. Поры заполнены рыхло- и прочносвязанной водой, которая практически не способна перемещаться ни в поле силы тяжести, ни под влиянием сил поверхностного натяжения. Эти поры свойственны глинам и другим тонкозернистым породам.

Микропоры – $d_{эф.} < 2 \cdot 10^{-9}$ м. Диаметр микропор соизмерим с толщиной слоя прочносвязанной воды. Пластовая вода при температурах, не превышающих 340 К практически неподвижна. Микропоры были установлены у некоторых природных цеолитов.

2.2. Основные методы определения пористости образцов пород

Характер распределения пор по размерам называют структурой порового пространства. Структуру порового пространства горной породы чаще всего изучают на шлифах с использованием оптических микроскопов или электронной микроскопии. Особенность методов заключается в том, что исследования распределения пор проводят на плоской поверхности. Поэтому для установления характера распределения пор и представления об изменении их в объеме необходимы многократные исследования на параллельных плоскостях. При изучении структуры пор трещиноватых и трещиновато-кавернозных пород наиболее широко применяется метод окрашенных шлифов, предложенный Е.И. Багринцевой, который базируется на использовании люминофоров, оборудования, которое генерирует ультрафиолетовые лучи, и приборов регистрации участков поверхности исследуемой породы, проявляющих флуоресцентное действие.

Наиболее эффективными косвенными методами исследования структуры порового пространства в объеме являются капиллярные. С помощью их производятся расчеты размеров, осуществляются измерения объема пор, устанавливается характер их распределения в объеме, определяются объемная (кажущаяся) плотность и удельная поверхность. К капиллярным методам исследования относятся метод ртутной порометрии, капиллярной пропитки и полупроницаемой мембраны.

Метод ртутной порометрии основан на свойстве ртути под давлением проникать в пористый материал. Учитывая, что размер пор обратно пропорционален приложенному давлению, а также то, что ртуть практически не смачивает большинство минералов (краевой угол Θ обычно лежит в диапазоне от 110° до 160°, для кварца Θ =140°), диаметр и объем пор могут быть найдены из

соотношения равновесного давления, при котором ртуть проникла в поры определенного диаметра, и объема проникшей ртути. Диаметр пор вычисляют в соответствии с уравнением Уашберна:

$$D = \frac{4\gamma \cos\Theta}{P},$$

где P – давление, Па; γ – поверхностное натяжение, Н/м; Θ – краевой угол; D – диаметр пор, м.

Диапазон изучаемых пор при работе этим методом расширяется до $(0{,}001\ldots1000)\cdot10^{-6}$ м. Таким образом, изучаются параметры сверхкапиллярных и субкапиллярных пор. В современных приборах все измерения с ртутным порометром автоматизированы, включая и вычисления характеристик распределения пор в породе.

К недостаткам этого метода можно отнести слабую изученность зависимости краевого угла Θ от влажности и литологии пород в целом, а также невозможность использования образцов для последующих исследований.

Измерение поверхности позволяет проверять степень химического взаимодействия между породой и газом или жидкостью и является основным фактором контроля во многих промышленных процессах. Значение удельной поверхности позволяет, например, контролировать сгораемость углей, степень растворяемости породы (минерала) в жидкости и др.

Метод полупроницаемой мембраны включает насыщение водой исследуемого образца горной породы, установку его на водонасыщенную искусственную мембрану с размером пор $2\cdot10^{-6}$ м и вытеснением воды азотом. Строят зависимость величины водонасыщенности образца от величины капиллярного давления. Эффективные диаметры пор находят путем вычислений, а по изменению водонасыщенности вычисляют относительное содержание этих пор в объеме исследуемого образца породы. Результаты вычислений представляют в виде графика распределения пор в образце по их размерам. Из условия абсолютной смачиваемости водой кварцевого капилляра краевой угол смачивания принимают равным нулю, а величину поверхностного натяжения принимают равной величине, соответствующей для границ раздела воды с воздухом при данной температуре. Недостатком этого метода является то, что длительность одного опыта при исследовании образца достигает 30 суток, в то время как метод ртутной порометрии занимает всего несколько часов.

Метод капиллярной пропитки состоит в смачивании люминесцирующей в УФ свете жидкостью, которая под воздействием капиллярных сил впитывается образцом породы. Изменение окраски верхнего торца образца под влиянием впитывающейся жидкости наблюдают с помощью автоматической фотометрической установки. Этот метод пока не имеет широкого распространения.

2.3. Пористость осадочных пород

Пористость осадочных пород изменяется в широких пределах и ее значение, например, для обломочных, карбонатных и глинистых пород определяется многими факторами: содержанием глинистых минералов, глубиной залегания, возрастом пород и температурой. Так, для сланцев средняя пористость составляет 8 %, известняков – (5…10) %, песчаников – 15 %. Сильная зависимость пористости наблюдается при увеличении глубины залегания горной породы. Хорошо видно, что с увеличением глубины открытая пористость уменьшается. Установлено, что пористость уменьшается, главным образом в результате необратимых деформаций, в связи, с чем изменения ее можно наблюдать, изучая керны пород, извлеченные с различных глубин.

Плотность породообразующих минералов с глубиной мало изменяется, а поэтому изменение объема породы может происходить только за счет уменьшения порового пространства. В осадочных пористых породах в течение длительного времени их существования на больших глубинах необратимые деформации подобны пластическим, при которых наблюдается релаксация касательных напряжений, и все главные нормальные напряжения оказываются равны между собой. С целью определения закономерности уплотнения осадочных пород вводится коэффициент необратимого уплотнения пород $\beta_ï$, величина которого зависит не только от структуры породы и литологии, но и от времени уплотнения осадка t и его температуры T. Другими словами, $\beta_ï$ зависит от конкретных геологических условий. Так коэффициент необратимого уплотнения породы для глинистых пород в среднем составляет $33\cdot10^{-3}$ МПа$^{-1}$, для песчаников – $16{,}4\cdot10^{-3}$ МПа$^{-1}$ в интервале глубин залегания 1500…2500 м.

Следует отметить, что коэффициент необратимого уплотнения зависит также и от типа пород: наибольшее значение у глинистых пород и мергелей, наименьшее – у кварцевых песчаников и уплотненных известняков. Несмотря на литологическое различие пород, первичная пористость пород необратимо и закономерно уменьшается с глубиной. При этом Д изменяется незначительно – от $16{,}3\cdot10^{-3}$ до $48\cdot10^{-3}$ МПа$^{-1}$.

Для прогнозной оценки пористости на глубинах, которые не вскрыты скважинами, пользоваться данной закономерностью нежелательно, т.к. из-за большого разброса значений пористости на одной и той же глубине существенно снижается достоверность экстраполяции значений. Прогнозирование пористости алевритовых пород затрудняется также и тем, что практически непредсказуемым явлением являются глинистость и вторичные изменения порового пространства.

Связь между интенсивностью уплотнения алевритовых пород и температурой с учетом широкого возрастного диапазона проявляется четко, в случае сопоставления коэффициентов необратимого уплотнения для этих пород со значением геометрического градиента в каждом районе.

2.4. Пористость магматических и метаморфических пород

Из табл.3. видно, что кварцевый песок, являющийся первичным осадком, по мере уплотнения превращается в песчаник – осадочную породу, а затем в кварцит – метаморфическую. Соответственно глинистый ил, являющийся также первичным осадком, сначала превращается в глину и аргиллит – осадочную породу, и далее в глинистый сланец – метаморфическую породу.

В метаморфических породах отмечается низкая пористость, сланцеватость, потеря большого количества межслоевой и кристаллизационной воды. Большинство метаморфических пород обладают низкой первичной пористостью. Общая пористость этих пород увеличивается при выходе их на поверхность за счет развития процессов вторичного порообразования. Наиболее высокая пористость наблюдается в породах, содержащих карбонатные минералы – CaCOз, MgC03 и др.

Воздействие фильтрующимися гидротермальными водами создают условия для образования высокопористых разностей метаморфических пород. Кроме этого, под влиянием тектонических движений метаморфические породы приобретают трещиноватость, что наряду с высокой пористостью создает условия для активного минерального массопереноса в толще метаморфических пород, ведущего к образованию новых минералов и скоплений полезных ископаемых.

Как известно в результате остывания и затвердевания магмы или природных силикатных расплавов, возникающих в глубинных зонах земной коры, образуются магматические породы. Остывание магмы на глубине происходит медленнее, а поэтому интрузивные породы обладают хорошо выраженной кристаллической структурой. Из-за небольшого времени остывания эффузивные породы в основном содержат кристаллы в виде микролитов, аморфное вулканическое стекло, а также вулканические туфы.

Продолжительное нахождение пород на поверхности Земли и связанные с этим процессы выветривания определяют их пористость. Установлено, что общая пористость ультраосновных пород (дунит, перидотит, пироксен, серпентинит) и основных (габбро, эклогит, лабрадорит, анортозит) интрузивных пород не превышает 2%, средних (диорит, сиенит) и кислых (гранит, аляскит) – 3%. Для интрузивных пород характерна в целом низкая общая пористость, а открытая, как правило, весьма мала или отсутствует вообще, при этом поры слабо сообщаются между собой.

Базальты, диабазы (основные) и порфирит (средние эффузивные породы) имеют небольшую первичную пористость, не превышающую 3%. Однако пористость этих пород может достигать 20-40% в связи с развитием процессов выветривания.

Туфы занимают промежуточное положение между осадочными и эффузивными породами, их общая первичная пористость может составлять (40-60)% и иметь значительную открытую пористость.

Железисто-магнетитовая, скарновая, полиметаллическая и медная руды, образовавшиеся из магматических пород, имеют первичную общую пористость до 5%, а общая пористость выветренных разностей этих же пород – 20%.

Таблица 3

Пределы изменения общей пористости и плотности сухих образцов первичных осадков (ПО), осадочных (О), метаморфических (М) пород и некоторых руд

Тип пород	Первичный осадок или порода	Общая пористость, $k_п$	Плотность $\rho_т \cdot 10^3$ кг/м^3
Песчаные	Песок (ПО) и (О)	4-50	1,3-2,2
	Песчаник (О)	0,5-40	1,3-3,6
	Кварцит (М) и железистый квар-	0,2-20	2,2-4,4
Глинистые	Глинистый ил (ПО)	50-60	0,8-1,8
	Глина (ПО) и (О)	4-75	1,2-3,18
	Аргиллит (О)	1-30	1,6-3,35
	Филлит(М)	0,5-0,6	2,4-2,76
	Сланец глинистый (М)	1-25	1,3-3,2
Известковые	Известковый ил (ПО)	65-87	–
	Мел (О)	10-55	1,85-2,6
	Известняк(О)	0,5-48	1,3-3,5
	Мрамор (М)	0,1-2,2	2,3-3,0
Руды	Боксит	0-44	1,3-3,4
	Железистый латерит	29-56	–
	Мартит и бурый железняк	0,2-28	3,8-4,3
Угли	Каменный уголь	3-12	1,2-1,35
	Антрацит	1-2	1,4-1,8

2.5. Пористость природных углей

Уголь проходит сложный путь развития, обусловливающий его химическую структуру, микропористость и сорбционные свойства. В результате региональных изменений в угольных пластах развивалась трещиноватость, связанная с изменениями коллоидной структуры и с тектоническими движениями.

Пустоты, которые встречаются в углях, с точки зрения генезиса и морфологии делятся на трещины и стереопоры, образуемые кристаллитами и мицеллами.

В основу классификации пор положено различие в видах движения газа через поры в зависимости от их размеров.

Поры диаметром менее 10^{-9} м названы молекулярными, т.к. их размер соизмерим с диаметром молекул газов, насыщающих угли.

Поры с диаметром от 10^{-9} до 10^{-8} м названы **микропорами**. Перенос газа в таких порах осуществляется путем поверхностной двумерной диффузии. Эти поры авторы называют также фольмеровскими (названы в честь Макса Фольмера).

Поры с диаметром от 10^{-8} до 10^{-7}м называют **кнудсеновскими** (по имени Кнудсена). По определению А.Д. Алексеева (1981) эти поры выделяются в особую группу, так как характерный размер пор сравним с длиной свободного пробега молекул адсорбируемого газа. Движение газа в этих порах является молекулярным течением.

Поры с диаметром от 10^{-7} до 10^{-6} м относят к классу **броуновских** (по имени Роберта Броуна).

Поры с размерами 10^{-6}-10^{-5} м называют **субмакропорами** или **пуазейлевскими** (течение газа в этих порах описывается уравнением Пуайзеля).

Макропорами называют поры с размером более 10^{-5} м.

Общий объем пор в ископаемых углях разной стадии метаморфизма колеблется в широких пределах: от 0,058 до 0,176 $м^3$/т. Внутренняя поверхность пор для углей разных марок различна и составляет от $4 \cdot 10^7$ до $2 \cdot 10^8$ $м^2$/т.

Микропоры, соизмеримые с межмолекулярными расстояниями, являются отличными сорбентами и определяют в связи с этим возможные запасы газа в каменном угле. Поры размером более 10^{-7} м и трещины образуют в угле систему фильтрующего объема. Однако в целом трещиноватость в большой степени определяет прочностные свойства угля, его устойчивость к горному давлению. Что касается пор, то в условиях объемного сжатия, благодаря своей форме, они являются устойчивыми в отношении действия внешних сил, а трещины – плоскостями ослабления угля, по которым происходят его разрушение при изменениях напряженного состояния пласта.

Геометрия систем трещин может быть различной, однако при расчетах, например, проницаемости углей принимается следующее условие: одна система горизонтальных трещин, две вертикальные взаимно перпендикулярные системы трещин, три взаимно перпендикулярные системы трещин и хаотическая трещиноватость. В углях чаще всего наблюдается вторая и четвертая системы.

Угли ненарушенной структуры представляют собой монодисперсный тип, характеризующийся преимущественным содержанием микропор, при этом содержание переходных пор составляет около (30-40)%. У таких углей на кривой распределения пор по размерам виден один максимум в области микропор. В углях нарушенной структуры увеличен объем субмакропор при том же объеме микропор и переходных пор. Содержание переходных пор уменьшается до 8-20%. На кривой распределения пор по размерам появляется второй максимум в области субмакропор, характеризующий структуру как бидисперсную. Примером такой структуры могут служить перемятые угли из пластов Донецкого бассейна.

Рассматривая вопрос об изменении газоемкости, которая определяется сорбционным объемом угля, в зависимости от стадии метаморфизма, следует принимать на кривой распределения пор минимум в области углей средних марок, а исследуя газопроницаемость угля, зависящую от фильтрационного объе-

ма, – кривую распределения пор по размерам с максимумом в той же области.

3. ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

3.1. Основные параметры магматических и метаморфических пород

Плотность является одним из важнейших свойств минералов и горных пород, характеризующих соотношение между массой и объемом. Согласно современным представлением, плотностью называется масса m единицы объема V вещества, т.е. отношение массы однородного вещества к его объему при давлении $1{,}0\cdot10^5$ Па и температуре 293 К.

$$\rho_0 = m/V\ . \tag{3.1}$$

В Международной системе единиц СИ плотность измеряется в кг/м^3, или в граммах на кубический сантиметр – г/см^3 .

Объем, занимаемый породой V, может состоять из объема твердой фазы $V_{\text{тв}}$ и пор $V_{\text{ï}}$. Твердая фаза слагается из различных минералов, а поры могут быть заполнены водой $V_{\text{в}}$ и газом $V_{\text{г}}$. Плотность такой породы в общем виде находят по формуле

$$\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{тв}} \cdot V_{\text{тв}}/V + \rho_{\text{в}} \cdot V_{\text{в}}/V + \rho_{\text{г}} \cdot V_{\text{г}}/V\ , \tag{3.2}$$

где $\rho_{\text{òâ}}$, $\rho_{\text{â}}$, $\rho_{\text{ã}}$ − плотность соответственно твердой, жидкой и газовой фаз. С учетом коэффициентов водонасыщенности $k_{\text{â}}$ и газонасыщенности $k_{\text{ã}}$ плотность можно определить следующим образом

$$\rho_{\text{п}} = (1 - k_{\text{п}})\rho_{\text{тв}} + k_{\text{п}} \cdot (k_{\text{в}}\rho_{\text{в}} + k_{\text{г}}\rho_{\text{г}}), \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.3) видно, что плотность горных пород существенно зависит от коэффициента общей пористости. Для большинства пород магматических и метаморфических с первичной пористостью от 0 до (2…5)% величина плотности будет определяться главным образом плотностью минерального состава. Отсюда следует, что при $k_{\text{п}} \to 0$ $\rho_{\text{п}} \to \rho_{\text{тв}}$.

Для водонасыщенных пород в уравнении (4.3) можно принять $k_{\text{в}} = 1$, $k_{\text{г}} = 0$, тогда

$$\rho_{\text{п}} = (1 - k_{\text{п}})\rho_{\text{тв}} + k_{\text{п}}\rho_{\text{в}}, \tag{3.4}$$

Для сухих образцов пород $\rho_{\text{â}} = 0$ и $\rho_{\text{ã}} = 0$, тогда

$$\rho_{\text{п}} = (1 - k_{\text{п}})\rho_{\text{тв}}, \tag{3.5}$$

В формуле (3.5) принимается допущение, что $\rho_{\text{ã}} = 0$. Однако известно, что плотность воздуха при нормальных условиях равна 1,2 кг/м^3, метана – 0,7 кг/м^3, пентана – 3,17 кг/м^3. Поскольку природный газ представляет смесь углеводородов, то плотность реального газа в породах близка к плотности воздуха. Однако в массивах горных пород при повышенных давлениях плотность газа резко возрастает (до 300 кг/м) в связи с высокой сжимаемостью. Поэтому пользоваться выражением (3.5) можно в случаях, когда нет необходимости в определении плотности с высокой точностью.

Что касается плотности природных пластовых вод, то величина ее изменяется в зависимости от содержания растворенных солей в пределах от $1{,}0\cdot10^3$ (пресные воды) до $1{,}24\cdot10^3$ кг/м^3 (при полном насыщении солями).

Большинство породообразующих минералов имеют ионную или ковалентную химическую связь и характеризуются средней плотностью от $2{,}2\cdot10^3$ до $3{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Плотность минералов определяется относительной атомной массой составляющих элементов и строением электронных оболочек атомов, обусловливающих кристаллографические особенности структуры минералов. Плотность большинства рудных минералов $(3{,}5\cdot10^3\ldots7{,}5)\cdot10^3$ кг/м^3. Эти минералы обладают ковалентно-металлической связью или ионно-металлической. Для самородных металлов, имеющих металлическую форму связи, плотность достигает $18{,}3\cdot10^3$ кг/м (у золота). Такие минералы, как графит, сера, большинство силикатных минералов и хлоридов (галит, сильвин), имеют малую плотность, т.к. эти минералы состоят из элементов с малой относительной массой. Минералы делятся на тяжелые с $\rho_0 > 4\cdot10^3$ кг/м^3, средней плотности $\rho_0=(2{,}5\ldots4{,}0)\cdot10^3$ кг/м^3 и малой плотности с $\rho_0<2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Около 53% всех минералов имеют среднюю плотность, 34% – относятся минералы наиболее плотные.

Плотность осадочных пород в естественном залегании зависит как от плотности твердой фазы и пористости, так и от плотности насыщающих флюидов и их соотношения. Как уже сказано выше, плотность флюидов (газ, вода или другая жидкость, например нефть) определяется их составом и минерализацией воды. В лабораторных условиях обычно определяют плотность сухих образцов методом гидростатического взвешивания. Используя уравнения (3.2)-(3.4), производят пересчет на конкретные пластовые условия. Плотность сухих пород зависит от плотности минерального скелета и общей пористости (3.4). Плотность минерального скелета при наличии состава минералов, входя в породу, рассчитывают по уравнению (3.5).

Для расчета и описания плотности пород на различных глубинах залегания *h* можно пользоваться формулой МЛ. Озерской

$$\rho_{\text{п.с.}} = \rho_{\text{т.в.}}\left[1 - k_{(\text{п})h=0}\exp\left(-0{,}45h\right)\right]. \qquad (3.6)$$

Особенности уплотнения пород разного литологического состава, находящихся в разных условиях осадконакопления, рассчитывают с учетом подбора

коэффициента $k_{(п)h}$=0.

Осадочные породы и сухие осадки по плотности делят на 5 групп:

1 – высокопористые илы, мел, трепел, туфы, торф и угли, $\rho_{п.с.} = (0{,}5…1{,}5)\cdot 10^3$ кг/м^3;

2 – каменная соль, гипс, бокситы, метаморфические угли и др. осадочные породы, $\rho_{п.с.} = (1{,}5…2{,}5)\cdot 10^3$ кг/м^3;

3 – плотные осадочные, магматические и метаморфические породы, известняки и доломиты с рудными включениями, ангидриты и т.п., $\rho_{ï\ .ñ.} = (2{,}5…3{,}5)\cdot 10^3$ кг/м^3;

4 – выветренные металлические руды, $\rho_{ï\ .ñ.} = (3{,}5…4{,}5)\cdot 10^3$ кг/м^3;

5 – полиметаллические руды с высоким содержанием рудных минералов (свинцовые, оловянные, медно-никелевые и др. руды); $\rho_{п.с.} > 4{,}5$ кг/м^3.

Важнейшие осадочные породы можно разделить по плотности (в кг/м^3): каменная соль, гипс $(2…2{,}3)\cdot 10^3$, алевролиты $(2{,}1…2{,}5)\cdot 10^3$, глины и аргиллиты $(2{,}2…2{,}5)\cdot 10^3$, известняки $(2{,}4…2{,}6)\cdot 10^3$, доломиты $(2{,}5…2{,}6)\cdot 10^3$, ангидриты $(2{,}8…2{,}9)\cdot 10^3$.

Плотность породы ρ_o отличается от массы единицы породы в естественном залегании, поскольку плотность ρ_0 – масса единицы объема минерального скелета, а в естественном залегании учитывается пористость. На практике наряду с плотностью используют понятие объемной массы ρ. Объемной массой называют массу единицы объема сухой породы при данной пористости в ее естественном состоянии. Поэтому плотность пород всегда больше их объемной массы. Зная коэффициент пористости $к_п$ и плотность, легко найти объемную массу

$$\rho = \rho_0\left[1 - \left(k_п/\left(1 + k_п\right)\right)\cdot 100\right] \qquad (3.7)$$

или

$$\rho_0 = \rho\left(1 + k_п\right). \qquad (3.8)$$

Объемная масса малопористых пород зависит в основном от минерального состава. При увеличении железисто-магнезиальных минералов – оливинов, пироксенов, роговой обманки и др. – слагающих магматические породы объемная масса увеличивается. Объемная масса большинства пород составляет $(1{,}5…3{,}5)\cdot 10^3$ кг/м^3. Такие руды как гематит, магнетит, сидерит, содержащие в составе железо, обладают большой объемной массой.

На практике определяют также удельный вес породы γ_y, т.е. вес единицы объема твердой фазы кристаллического скелета породы. Вес сухой породы в ее естественном сложении, заключенной в единице объема называют объемным весом $\gamma_{îá}$. Удельный вес всегда больше объемного, однако, при отсутствии пор незначительной пористости численное значение объемного веса может при-

ближаться к величине удельного веса.

Удельный вес – вес единицы объема твердой фазы (минерального скелета) породы

$$\gamma_0 = \frac{G_m}{V_m} \tag{3.9}$$

Плотностные параметры взаимосвязаны между собой следующими зависимостями

$$\rho = \rho_0(1 - \mathrm{P}); \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1 + \mathrm{K_п}}; \tag{3.10}$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{K_п}}{1 + \mathrm{K_п}}; \mathrm{P} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \cdot 100\%.$$

3.2. Плотностные свойства рыхлых и разрыхленных пород

Основные *параметры плотностных свойств* рыхлых и разрыхленных горных пород следующие: насыпная масса, $\boldsymbol{\rho_н}$, кг/м^3; насыпной вес, $\boldsymbol{\gamma_н}$, Н/м^3; коэффициент разрыхления, $\mathbf{K_р}$, ед.; пустотность, М, ед. или %.

Структурной особенностью этого типа пород является беспорядочное расположение кусков и частиц породы и значительные просветы между точками опоры.

Основной структурной характеристикой рыхлых пород является *гранулометрический состав* – процентное весовое, массовое или объемное содержание в рыхлой породе различных по величине классов (фракций).

Выражается гранулометрический состав в виде таблицы, графика, числа или формулы.

В виде числа – чаще всего через *средневзвешенный диаметр куска*

$$d_{\text{ср}} = \frac{\sum d_i m_i}{\sum m_i},$$

где d_i – средний диаметр класса; m_i – масса i-го класса.

В виде графика – чаще всего через *график кумулятивной крупности* породы, $П_i = f(d_i/D_{\max})$. В данном случае $П_i$ – процентное массовое содержание в данном объеме породы кусков с размерами от 0 до d_i, а $D_{\max}$ – максимальный размер кусков в данном объеме породы.

В виде формулы – чаще всего *формулы оптимального гранулометрического состава*, обеспечивающего минимальную пустотность данной массы породы, например, формула Фуллера

$$\Pi_i = 100\left(\frac{d_i}{D_{\max}}\right)^n \%,$$

где n – экспонента кривой (n = 0,4 ÷ 0,5 для шаровидных зерен и n = 0,3 для острогранных).

Насыпная масса – масса единицы объема разрушенной горной породы в ее естественном (насыпном) состоянии

$$\rho_{\text{н}} = \frac{m_{\text{р}}}{V_{\text{р}}}$$

Насыпной вес – вес единицы объема разрушенной горной породы в ее естественном (насыпном) состоянии

$$\gamma_{\text{н}} = \frac{G_{\text{р}}}{V_{\text{р}}}$$

Коэффициент разрыхления – отношение объема разрушенной породы к ее объему в массиве.

$$\text{К}_{\text{р}} = \frac{V_{\text{р}}}{V}$$

Пустотность – отношение объема пустот к объему разрыхленной породы

$$\text{М} = \frac{V_{\text{пуст}}}{V_{\text{р}}} \text{ или } \text{М} = \frac{V_{\text{пуст}}}{V_{\text{р}}} \cdot 100 \ \% \qquad (3.11)$$

Пределы изменения плотностных параметров рыхлых и разрыхленных пород следующие:

– $\rho_{\text{і}}$ зависит от гранулометрического состава, влажности и условий образования и состояния разрыхленной породы и изменяется от 1500 до 4000 кг/м^3. Влажность, например, в пределах от 0 до 8÷11% играет роль своеобразного «клея» в разрыхленной породе, не позволяя ей компактно заполнить данный объем и, тем самым, уменьшая $\rho_{\text{і}}$. Дальнейшее увлажнение породы наоборот уменьшает силы молекулярного сцепления между частицами породы и в конечном итоге увеличивает $\boldsymbol{\rho_{\text{н}}}$. Вибрация вызывает эффект уплотнения, а значит и увеличения $\rho_{\text{і}}$, что мы и наблюдаем в шахтах когда вагонетки, полностью наполненные в месте погрузки, выезжают на поверхность с меньшим объемом

породы. В зависимости от параметров вибрации объем разрыхленной породы может уменьшиться на величину от 5 до 35%.

– $\mathbf{K_P}$ зависит от тех же факторов и может иметь значения от 1,05 до 2,5. Например, бутовая полоса, возведенная вручную, имеет коэффициент разрыхления породы 1,5, а коэффициент разрыхления породы в выработанном пространстве лавы – 1,7.

– М зависит от величины коэффициента разрыхления и может иметь значения от 4 до 60%.

Плотностные параметры рыхлых и разрыхленных пород взаимосвязаны между собой и с параметрами скальных и связных пород следующими зависимостями

$$K_р = \frac{\rho}{\rho_н}; \qquad M = 1 - \frac{\rho_н}{\rho} \cdot 100\ \%. \tag{3.12}$$

Плотностные параметры рыхлых и разрыхленных горных пород определяют следующими методами.

Для определения насыпной массы используют гостированные мерные сосуды (табл. 3.1), в которые засыпают породу, убирают излишек и затем взвешивают. Зная объем и массу породы, вычисляют насыпную массу.

Коэффициент разрыхления и пустотность обычно вычисляют по формулам 3.12.

Гранулометрический состав определяют по разному в зависимости от крупности кусков: для частиц крупностью $d > 0{,}1$ мм используют ситовый анализ с использованием сит с разными размерами ячеек. Для более мелких частиц – седиментационный анализ, смысл которого заключается в измерении толщины слоя осадка в пульпе из воды и породы за данное время. На рудниках и карьерах часто применяют фотопланиметрический метод, когда разрыхленная порода в насыпном состоянии или в вагонетках фотографируется, на фотографию наносят масштабную сетку и подсчитывают процентное содержание кусков различной крупности.

Таблица 3.1

Мерные сосуды для определения насыпной массы рыхлых и разрыхленных горных пород

Максимальный размер кусков породы, D_{max}, мм	Объем сосуда, л	Форма сосуда	Размеры сосуда, мм
< 10	10	цилиндрическая, $d = h$	234
< 20	20	то же	294
< 40	50	то же	400
≥ 40	100	кубическая	465

Знания о плотностных свойствах горных пород широко используются в горном деле: гравитационная разведка месторождений; расчеты параметров транспортных установок; расчеты горного давления; расчеты технологических свойств горных пород; расчеты акустических параметров горных пород; расчеты процессов обогащения.

3.3. Методы определения плотности минералов и горных пород

В данном разделе рассмотрим следующие основные методы определения плотности: пикнометрический, объемометрический, по данным рентгенографического и химического анализов.

Пикнометрический метод является одним из наиболее точных и широко применяемых на практике. Суть этого метода состоит в определении объема точно взвешенной пробы породы или минерала в тщательно откалиброванном сосуде, называемом пикнометром, и расчете числового значения плотности по соответствующей формуле.

Массу, объем пробы и плотность определяют следующим образом. В течение 30…40 минут при температуре (90…100)°С высушивают пикнометр, а затем взвешивают его. Эти операции повторяют несколько раз до тех пор, пока расхождение в измерениях будет не более $2\cdot10^{-4}$ г. Среднее значение массы пикнометра записывают и эта величина является константой. Массу воды в пикнометре определяют как разность между массой пикнометра с водой m_2 и массой m_1.

Массу образца определяют как разность между массой m_3 пикнометра с образцом и массой m_1. Образец вносят в пикнометр после просушивания и контрольного взвешивания. Далее определяют массу пикнометра с образцом и водой, при этом для удаления воздуха из пор и трещин образца, а также из воды пикнометр вакуумируют, после этого нагревают, время от времени погружая в горячую воду образец. Разность $(m_4 - m_3)$ дает массу воды в объеме пикнометра.

Плотность вычисляют по формуле:

$$\rho = \frac{(m_3 - m_1)\rho_в}{(m_2 - m_1)(m_4 - m_3)},$$

где $\rho_в$ – плотность воды при температуре взвешивания, г/см^3 .

Объемометрический метод. Широко применяется в минералогических лабораториях. Объем образца определяют в барометрической трубе, у которой с высокой точностью определена площадь поперечного сечения, по изменению высоты столба жидкости при погружении в нее образца породы или минерала. Исследуемый материал следует взвешивать с высокой точностью, поэтому используют аналитические весы. Плотность рассчитывают по формуле

$$\rho = 4 \cdot m / \pi \cdot D \cdot k \cdot n,$$

где D – внутренний диаметр капилляра; k – цена деления лимба окулярмикрометра; n – число делений лимба; m - масса минерала или горной породы.

Определение плотности минералов по данным рентгенографического и химического анализов. В данном методе используется связь значения плотности минерала с атомными массами составляющих его химических элементов и объемом, которые они занимают. В формуле для определения плотности учитывается объем элементарной ячейки и ее элементарная масса:

$$\rho = Z \cdot M \cdot m_{\text{Н}} / V ,$$

где Z – число молекул (или атомов для одноатомных минералов) в элементарной ячейке; M – молекулярная масса минерала (масса структурной единицы); $m_{\text{Н}}$ – атомная (углеродная) единица массы, равная $1{,}6603 \cdot 10^{-27}$ кг; V – объем элементарной ячейки минерала, м^3.

Число молекул или атомов минерала с известной кристаллической структурой находят в справочной литературе. Молекулярную массу рассчитывают по данным химического анализа, а объем элементарной ячейки рассчитывают по данным рентгеноструктурного анализа параметров ячейки. Поскольку рентгеновская плотность отнесена к микрообъему, то она будет всегда выше определяемой непосредственно на реальном кристалле из-за того, что ни макро-, ни микродефекты кристаллического строения на рентгеновскую плотность не оказывают влияния. Однако если изучаемый минерал имеет механические примеси с большей плотностью, то, возможно, что рентгеновская плотность будет меньше экспериментальной.

3.4. Трещиноватость породных массивов

В результате тектонических движений в земной коре возникают напряжения, которые при достижении предела прочности пород приводят к образованию в ней разрывов. Разрывы сплошности пород проявляются, прежде всего, в виде трещин. Последние при дальнейшем действии сил перерастают в разрывные нарушения. Таким образом, под разрывным нарушением понимают результат тектонических движений, при котором горные породы разрываются по некоторой поверхности и разъединенные части смещаются относительно друг друга.

Трещинами называют разрывы в горных породах, перемещения по которым совершенно отсутствуют или незначительны. Совокупность трещин, расчленяющих тот или иной участок земной коры, принято называть трещиноватостью.

Испытываемое горными породами всестороннее сжатие или последующая цементация приводят к некоторому восстановлению связности по поверхностям разрыва сплошности, поэтому они чаще всего обладают некоторым сцеплением и сопротивлением отрыву и называются уже не трещинами, а по-

верхностями ослабления. Однако уже в начальной стадии деформирования массива горных пород по поверхностям ослабления возникают новые разрывы сплошности – трещины.

Трещиноватость, как элемент структуры, также является одной из характерных особенностей породного массива.

Трещины, наблюдаемые в горных породах, принято делить по генетическому признаку на:

- **естественные** (прирожденные, первичные), возникающие в процессе формирования геологических тел;
- **тектонические**, образовавшиеся в результате горообразовательных процессов;
- **искусственные** – появляющиеся в процессе осуществления подготовительных и очистных работ в шахтах, буровзрывных работ, образования заколов, а также вследствие других причин.

Естественные трещины являются повсеместно распространенными, но наиболее четко они выражены в осадочных породах в областях с горизонтальным залеганием. Естественные трещины не пересекают сколько-нибудь мощные слои пород, а тесно связаны с отдельными литологически однородными слоями. По отношению к слоистости они могут располагаться различно, но преимущественно являются нормальносекущими трещинами отрыва.

Тектонические трещины развиваются в горных породах под влиянием тектонических сил, проявляющихся в земной коре в процессе ее образования. Возникающие при этом деформации почти всегда сопровождаются развитием в горных породах трещин, образующихся как на сравнительно малых площадях, так и на огромных пространствах. Отличие их от нетектонических трещин заключается, прежде всего, в том, что тектонические трещины обладают большей выдержанностью в ориентировке и развиваются одинаково в различных по составу породах. Тектонические трещины наклонены к плоскостям напластования под разными углами; этим они и отличаются от трещин прирожденных (естественных). Направление тектонических трещин совпадает с направлением основных разрывных нарушений данного района. Так, например, для целого ряда районов Донбасса прирожденные трещины имеют меридиональное направление с отклонением (15-20)°.

Тектонические явления содействуют раскрытию ранее скрытых естественных трещин. Поверхности тектонических трещин обычно покрыты бороздами скольжения, так как очень часто они являются плоскостями смещения пород. При тектонических подвижках может происходить сдвижение блоков друг относительно друга.

Каждая отдельная трещина характеризуется длиной, шириной, извилистостью стенок, а также положением трещины в пространстве, которое в геологии принято обозначать углом падения и азимутом направления падения. Трещины различаются также наличием или отсутствием в них заполнителей, в соответствии с чем они подразделяются на **открытые** (зияющие) и **заполненные**.

По раскрытости или мощности заполнения выделяются следующие виды трещин: видимые невооруженным глазом (открытые, закрытые и «волосные») и микротрещины. Ширина открытых трещин или мощность их заполне-

ния определяется непосредственными замерами, ширину закрытых трещин можно считать равной (0,8…0,5) мм, «волосных» – (0,5…0,2) мм.

Заполнитель в трещинах может быть представлен рыхлыми отложениями типа песчано-глинистых грунтов либо образованиями, отличающимися от пород массива по минералогическому составу, но сходными с ними по структуре и физическим свойствам.

Частота трещин зависит от мощности и состава пласта. Например, чем меньше мощность пластов и прочность пород, тем чаще трещины. По данным многих исследователей в карбонатных породах многих районов в пластах мощностью от 0,5 до 2,0 м эта связь прямолинейна. М.В.Рац считает ее параболической.

В зависимости от того как трещины ориентированы различают упорядоченную (одно-, двухсистемную) и неупорядоченную трещиноватость. Пересекаясь, трещины разбивают породный массив с некоторым характерным размером H на отдельные структурные блоки со средним размером $h_{ср.}$. Отношение $H/h_{ср.}$ называется **интенсивностью трещиноватости.** Кроме того, для количественной оценки трещиноватости используют **линейный**, **площадной** и **объемный коэффициенты интенсивности трещиноватости**. Они представляют собой соответственно отношение единицы длины, площади, объема к среднему расстоянию между соседними трещинами $l_{ср.}$, к площади $S_{ср.}$ и объему структурного блока $V_{ср.}$.

М.М. Протодьяконов, указывая на различие между прочностью лабораторных образцов и прочностью массива, в качестве основной причины рассматривал именно трещиноватость пород и углей.

Г.Л. Фисенко указывает, что при изучении механических свойств массивов горных пород как среды, в которой проводятся горные выработки, т.е. создаются полости, необходимо различать поверхности ослабления: а) большой протяженности, по которым происходит скольжение одной части деформируемого массива относительно другой, являющиеся поверхностями разрыва сплошности массива, и б) небольшой протяженности, расположенной ступенчато относительно друг друга и образующие системы определенным образом ориентированных трещин. При деформировании больших областей массива (линейные размеры которых на порядок больше линейных размеров блоков, ограниченных смежными трещинами) структурные ослабления небольшой протяженности не являются поверхностями скольжения и разрыва непрерывности деформаций и смещений, а являются лишь элементами структуры массива горных пород, снижающих прочность породного массива.

Следует отметить, что трещиноватость приводит к существенному снижению прочностных характеристик породного массива. Отличие прочности пород в образце и массиве может быть весьма значительным. В этой связи при выполнении геомеханических расчетов учету трещиноватости массива придается особое значение.

Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют горной породой.
2. В чем заключается отличие горной породы от минерала?
3. На какие группы делят горные породы по условиям их образования?
4. Что называют структурой породы? Какие они бывают?
5. Какие главные структуры выделены в магматических и в метаморфических породах?
6. Что называют текстурой породы? Назовите основные текстуры.
7. Какие основные типы пород выделяют в зависимости от преобладающего типа связей?
8. Какими особенностями определяется неоднородность пород?
9. Дайте характеристику каждому виду неоднородности горных пород.
10. Какую связь между минералами называют химической?
11. Как формируется между минералами структурная связь?
12. На какие виды делятся эндогенные процессы?
13. Какие процессы называют осадочными и какие образуются типы осадков при этом?
14. Дайте характеристику эндогенным процессам.
15. Какие процессы называют метаморфическими? Какие породы подвергаются этим процессам?
16. Что называют поровым пространством породы?
17. На какие виды делятся поры в зависимости от условий перемещения в породах воды и газов?
18. Как делятся поры по происхождению и по величине?
19. Какие существуют основные методы определения пористости и трещиноватости пород?
21. Какие физические процессы заложены в основу классификации пор по размерам в каменных углях?
20. В чем состоит особенность пористости осадочных пород?
21. На какие группы делят осадочные породы и сухие осадки по плотности?
22. Чем отличается удельный вес породы от объемного?
23. В чем заключается суть методов определения плотности?
24. Перечислите параметры плотностных свойств скальных и связных горных пород.
25. Перечислите параметры плотностных свойств рыхлых и разрыхленных горных пород.
26. Что больше по величине: удельная масса или плотность одной и той же горной породы?
27. Что больше по величине: плотность или насыпная масса одной и той же горной породы?

4. ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД

4.1. Механические напряжения в горных породах

Прочность и устойчивость сооружений, возводимых на породах или непосредственно в их толще, определяются напряженным состоянием, возникающем как результат действия внешних сил (нагрузок). Без определения величины напряжений и области их распространения невозможно рассчитать осадку сооружений, оценить устойчивость склонов и откосов, а также безопасность эксплуатации подземных выработок. В строительной механике и сопротивлении материалов, теории упругости рассматривается среды, которые обладают свойствами сплошности и однородности, т.е. среда называется сплошной. Реальные породы с их сложным строением на макро- и микроуровне заменяются некоторой моделью сплошной, однородной, изотропной, упругой среды.

Под ***упругостью*** понимают свойство материала восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия нагрузки. Кроме того, предполагают, что деформации пропорциональны напряжениям (закон Гука).

В механике горных пород при расчете горных пород используют положения теории упругости, которые могут быть применены для любых линейно-деформируемых тел. Горные породы при определенных давлениях деформируются по закону, близкому линейному. Следовательно, при определении напряжений в породах можно применять модель линейно-деформируемой среды. В породах часто зоны пластических деформаций либо отсутствуют, либо имеют незначительную область развития.

Теория упругости используется для определения напряжений при условии стабилизации деформаций под действием внешней нагрузки. Следовательно, при расчете напряжений горные породы рассматриваются как линейно-деформированные тела, процесс деформирования которых под нагрузкой закончился. При таких допущениях величина конечных напряжений в горной породе от действия внешних сил будет определена с достаточной точностью.

4.2. Понятие о напряжениях и деформациях

Рассмотрим на простейшем виде деформации – разбежные – элементарные внутренние усилия и перемещения, возникающие при действии на брус продольной силы F (рис. 4.1).

Разрезаем мысленно брус сечением на две части, действие одной части на другую заменяем усилием N (продольная сила). Эта продольная сила определяется из уравнения статики

$$\sum Z = 0, N = F \tag{4.1}$$

Продольная сила является равнодействующей элементарных сил, определяющих взаимодействие между частицами тела. При растяжении естественно

предположить, что элементарные силы равномерно распределяются по площади сечения и называются напряжением.

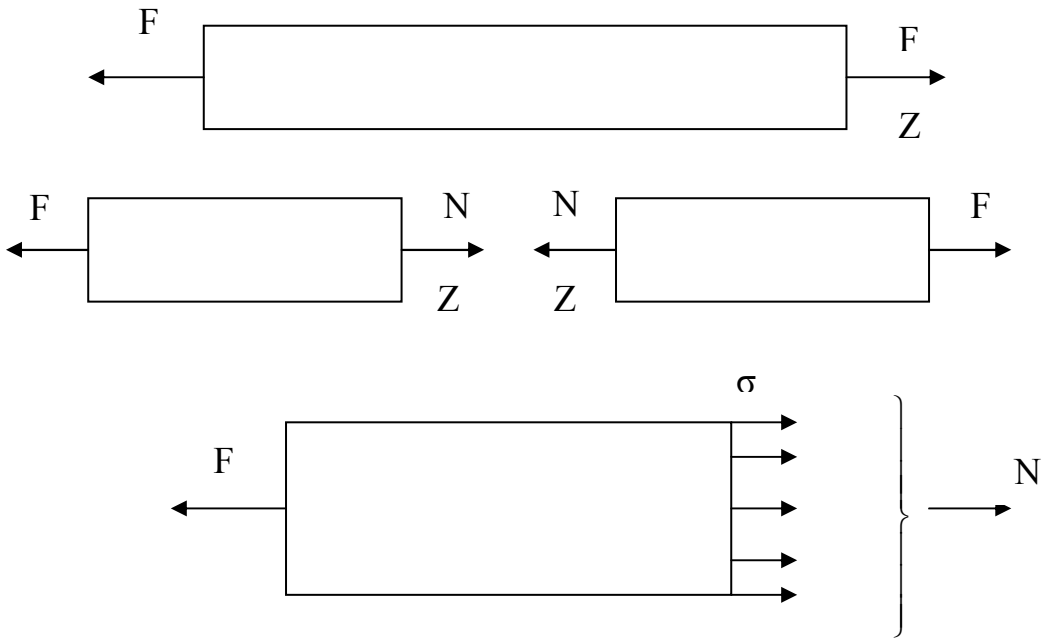


Рис. 4.1. К расчету бруса при растяжении

Продольная сила является равнодействующей элементарных сил, определяющих взаимодействие между частицами тела. При растяжении естественно предположить, что элементарные силы равномерно распределяются по площади сечения и называются напряжением.

Напряжения – мера интенсивности внутренних сил. При растяжении возникают нормальные напряжения (перпендикулярно к сечению) σ, которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{S}, \text{ Па}, \qquad (4.1)$$

где N – продольная сила, Н; S – площадь поперечного сечения, м^2.

Обычно принимают следующее правило знаков:

- если нормальное напряжение (сила) направлено от сечения, оно вызывает растяжение и считается положительным;
- если нормальное напряжение (сила) направлена к сечению, то оно вызывает сжатие и считается отрицательным.

Между этими видами деформаций сохраняется единство при анализе внутренних сил, но и обнаруживаются качественные отличия, например, при изучении процессов разрушения материалов или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается изгибом.

Условие прочности: напряжение, возникающее в опасной точке конструкции, среды, должны быть меньше или, по крайней мере, равны допускаемым напряжениям

$$\sigma_{max} \le [\sigma] \tag{4.2}$$

Допускаемые напряжения определяют по зависимости

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n}, \tag{4.3}$$

где $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение, определяемое в результате испытаний образцов при различных условиях нарушения; n – коэффициент запаса прочности, $n > 1$.

Под действием приложенных сил брус изменяет свои размеры (рис. 4.2). До деформации длина его была ℓ после деформации $\ell_1 = \ell + \Delta\ell$. Величина $\Delta\ell$ называется абсолютным удлинением бруса.

Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{4.4}$$

называют относительным удлинением бруса. Но правильное название – *линейная деформация*, иногда продольная деформация.

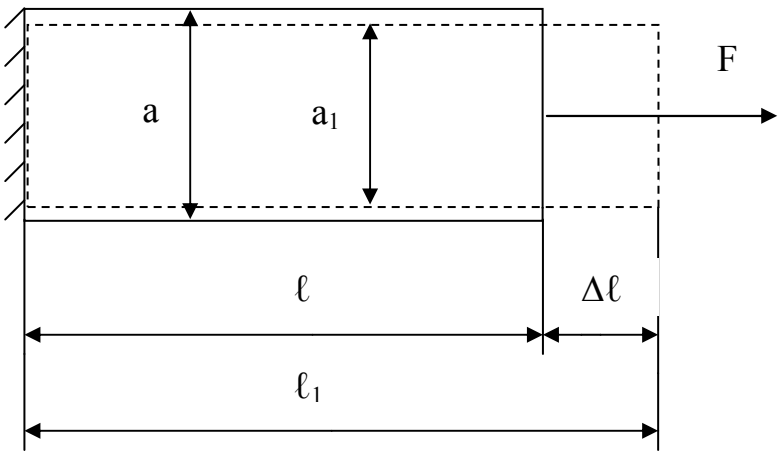


Рис. 4.2. Изменение размеров бруса

В поперечном направлении произошло уменьшение поперечного размера и *поперечная деформация* равна

$$\varepsilon^1 = \frac{a_1 - a}{a}$$

Между поперечной и продольной деформацией существует зависимость. Отношение поперечной деформации к продольной носит название *коэффициента Пуассона* и является механической характеристикой материала и определяется экспериментальным путем.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon^1}{\varepsilon} \right| \tag{4.5}$$

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов, в том числе и для горных пород, справедлив *закон Гука*, который устанавливает пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = \varepsilon E, \tag{4.6}$$

где E – модуль упругости первого рода или *модуль упругости*, МПа.

Эта величина является физической константой материала и определяется экспериментально.

Определим напряжения, возникающие в брусе при растяжении в некотором сечении, нормаль к которому расположена под углом α к оси бруса (рис. 4.3, а).

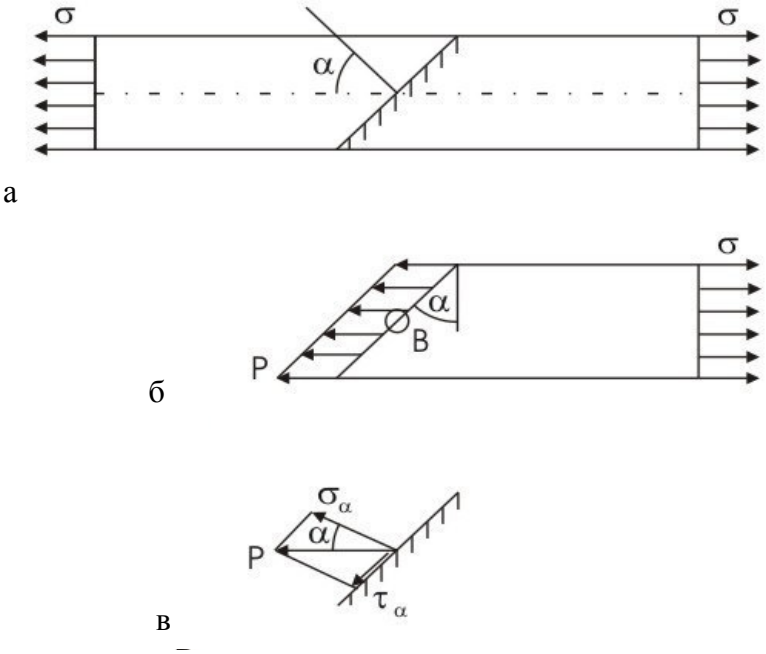


Рис. 4.3. Напряжения в наклонных площадках

Напряжения **p** равномерно распределены по наклонному сечению и их можно определить из условия равновесия правой части бруса

$$\mathbf{\Sigma Z = 0} \qquad \mathbf{pA_\alpha = \sigma A},$$

где A – площадь поперечного сечения бруса; A_α – площадь наклонного сечения бруса.

Таким образом, напряжение в наклонном сечении

$$\mathbf{p = \sigma \cos \alpha}.$$

Обычно это напряжение раскладывали на два направления: по нормали к сечению, нормальное напряжение σ_α и вдоль площадки – касательное напряжение τ_α (рис. 4.3, в) и они равны

$$\sigma_\alpha = \mathbf{p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha}, \qquad (4.7)$$

$$\tau_\alpha = \mathbf{pcin\alpha = \frac{\sigma}{\alpha} \sin 2\alpha}$$

Как видно из уравнений, в зависимости от ориентации сечения получаем разные по величине и направлению нормальные и касательные напряжения.

В сечениях при $\alpha = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma$, τ_α; в сечениях $\alpha = 90^0$, $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$; в сечениях при $\alpha = 45^0$, возникают наибольшие касательные напряжения $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$.

Через данную точку в конструкции, в массиве горных пород, можно провести бесчисленное множество сечений, в которых действуют различные по величине и по направлению нормальные и касательные напряжения, которые отражают взаимодействие бесконечного множества частиц на данную точку.

Напряжения, действующие по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам определяют *напряженное состояние в точке*. Условно напряженное состояние в точке представляют следующим образом: вокруг точки вырезаем элемент бесконечно малого размера в форме параллелепипеда (рис. 4.4, а).

При уменьшении сторон, в пределе (d_x, d_y, $d_z \rightarrow 0$) этот параллелепипед стягивается в точку, через которую проходят три взаимно перпендикулярные площадки. По граням элемента могут действовать напряжения P_x, P_y, P_z (рисунок 4.4, а).

Раскладываем эти напряжения на составляющие, проецируют их на оси x, y, z, получаем нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z и касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, τ_{xz}.

Индекс нормального напряжения соответствует нормали к площадке, на которой они действуют. Касательные напряжения имеют два индекса: первый – направление оси, параллельной напряжению, второй – направлению оси, перпендикулярной к площадке. Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда действуют девять компонент
напряжений, которые представляют собой *тензор напряжений*, записываемый в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \tau_{yx} \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \sigma_y \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \tau_{yz} \sigma_z \end{Bmatrix}, \qquad (4.8)$$

где в строках расположены составляющие напряжений соответственно на площадках, перпендикулярных осям x, y, z.

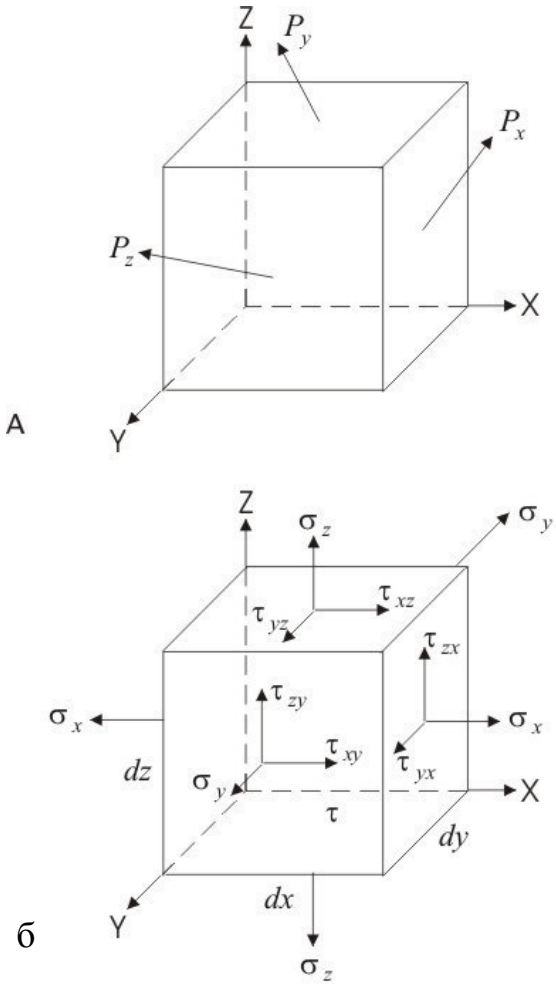


Рис. 4.4. Напряженное состояние в точке

Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях возникают противоположные по направлению силы, то первые три условия равновесия – для пространственной системы сил. Из условия равновесия суммы моментов относительно оси x, получаем

$$\tau_{yz} d_x d_y d_z = \tau_{zy} d_x d_z d_y,$$

аналогично можно записывать остальные уравнения.

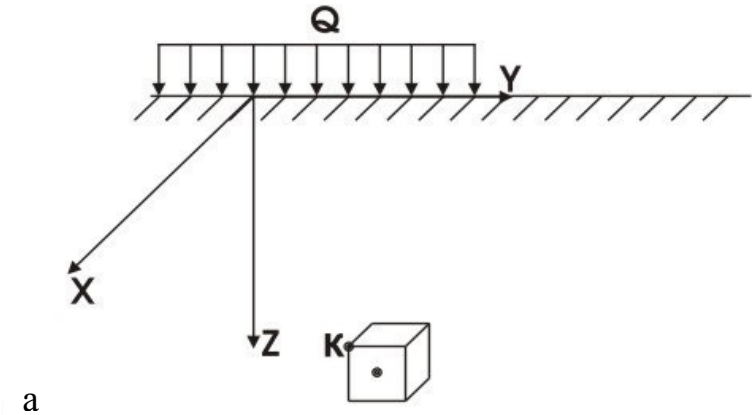
Тогда получаем

$$\tau_{yz} = \tau_{zy};\ \tau_{zx} = \tau_{xz};\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (4.9)$$

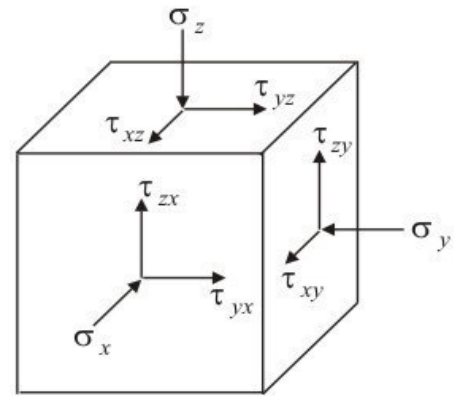
Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра. Это есть закон парности касательных напряжений. Следовательно, на гранях выделенного элемента имеем не девять, а шесть независимых компонент напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны. Тензор напряжений (4.8) является симметричным.

Анализ напряженного состояния в точке начинается всегда с определения напряжений на гранях выделенного в окружности точки элемента. Через точку проводится три взаимно перпендикулярные плоскости, ориентация которых может быть произвольной и часто определяется более простым расчетом компонент напряжений.

Например, напряжение в толще горной породы определяем следующим образом. Выбираем некоторую точку, положение которой определяем с помощью прямоугольной системы координат, началом которой считают точку на границе действия внешних сил и горной породы. Ось z направлена вниз, ось y – слева направо, ось x – перпендикулярно к оси y (рис. 4.5, а).



а



б

Рис. 4.5. Напряженное состояние в точке б толще горной породы

Для оценки сжимаемости горной породы под действием внешней нагрузки обычно рассматривают горизонтальные и вертикальные площадки. В таком случае решение задачи о сжатии горной породы в некоторой точке сводится к решению о сжатии заменяющего эту точку элементарного параллелепипеда, стороны которого параллельны оси координат, что допустимо в силу его малости.

Напряжения в породах могут создаваться не только действием внешних нагрузок, но и другими физическими полями. Например, термические напряжения вызываются неоднородным нагревом пород.

При изменении ориентации граней выделенного элемента или, иначе, при проведении различных площадок через данную точку изменяются напряжения, действующие по этим граням. Среди бесчисленного множества площадок, проходящих через данную точку, имеется три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках – *главными напряжениями*. Главные напряжения обозначаются σ_1, σ_2, σ_3 в порядке убывания в алгебраическом смысле, т.е. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_4$.

Если по всем трем граням параллелепипеда действует три напряжения, то напряженное состояние называется объемным или трехосным (рис. 4.6, а).

Если на гранях элемента действуют два напряжения σ_1, σ_2, то напряженное состояние называется плоским или двухосным (рис. 4.6, б). Если на гранях элемента действуют напряжения σ_1, то напряженное состояние называется линейным или одноосным (рис. 4.6, в).

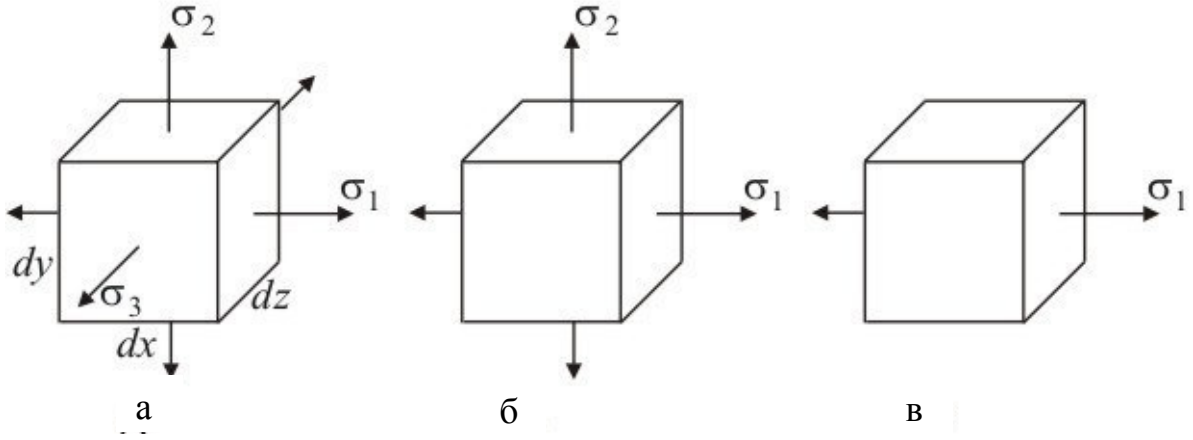


Рис. 4.6. Виды напряженных состояний

В дальнейшем при исследовании напряженного состояния в точке необходимо определять главные напряжения, потому что расчеты на прочность построены на основании главных напряжений.

Рассмотрим напряжения, возникающие в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии. По граням элемента действуют главные напряжения σ_1 и σ_2. Определяем напряжения на площадке, нормаль к которой составляет угол α с горизонтальной осью (рис. 4.7).

Применим принцип независимости действия сил (принцип суперпозиций) и на основании формул (4.7) определим нормальные и касательные напряжения.

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \cdot (90 + \alpha),$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2 \cdot (90 + \alpha),$$

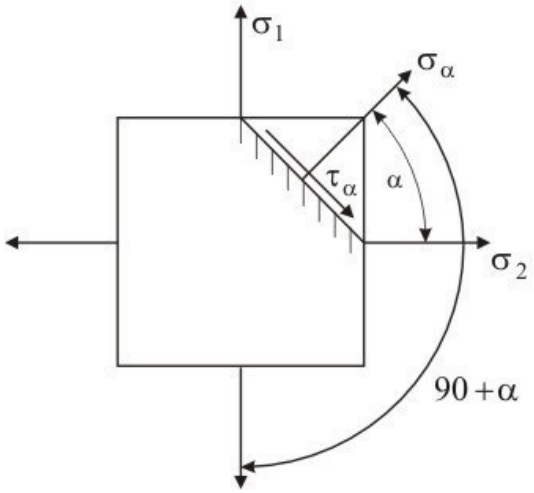


Рис. 4.7. Плоское напряженное состояние

откуда следует

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \qquad (4.10)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

После преобразований можно записать

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \qquad (4.10, \text{а})$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Эти зависимости представляют уравнение окружности в параметрической форме в системе координат σ и τ. Таким образом, напряженное состояние в точке можно представить графически в виде окружности, координаты точек которой определяют напряжения на соответствующей площадке, а угол α опре-

деляет ориентацию площадки. Центр окружности находится на расстоянии $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ от начала координат по оси σ. Радиус окружности равен $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$.

Эта окружность носит название круг Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. Каждая площадка имеет координаты σ, τ. Точки, соответствующие двум взаимно перпендикулярным площадкам, на круге напряжений расположены диаметрально противоположно. Следовательно, зная напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках можно построить окружность. Координаты вертикальной площадки ▨ (σ_1; 0), горизонтальной – ▭ (σ_2; 0).

В системе координат σ_1, τ точка В соответствует вертикальной площадке, точка С – горизонтальной площадке (рис.4.8).

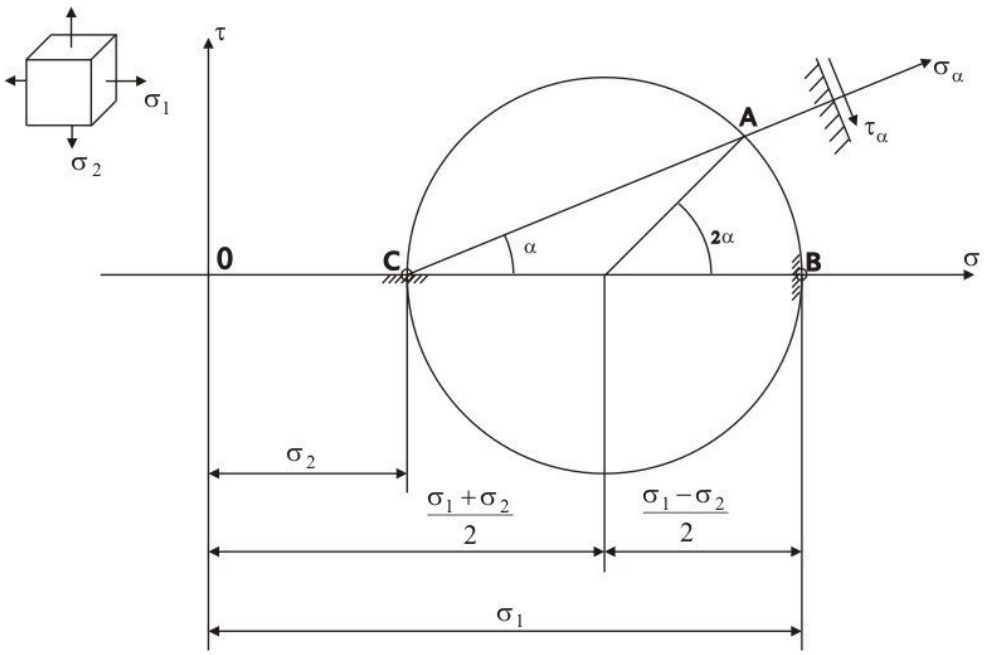


Рис. 4.8. Круговая диаграмма напряженного состояния

Точка А соответствует площадке, нормаль к которой расположена под углом α к горизонтали. Для определения направления напряжений σ_α и τ_α находим на круге напряжений полюс круга, точку, где пересекаются все нормали к площадкам. Находим полюс следующим образом, в точке В нормаль к площадке – горизонтальная линия, в точке С нормаль к площадке – вертикальная линия, они пересекаются в точке С, эта точка и является полюсом. Соединив точки А и С прямой, получим направление напряжения σ_α и соответственно τ_α (рис. 4.8).

Если заданы площадки общего положения, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, определяемые при том или ином методе расчета, то координаты точек, соответствующих вертикальным и горизонтальным площадкам соответственно ▨ (σ_x, τ_{yx}), горизонтальной ▭ (σ_y, τ_{yx})

(рис. 4.9, а). Для построения круга напряжений примем, что в данном случае $\sigma_x > \sigma_y$. Центр круга имеет координату $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, радиус круга равен

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad . \tag{4.11}$$

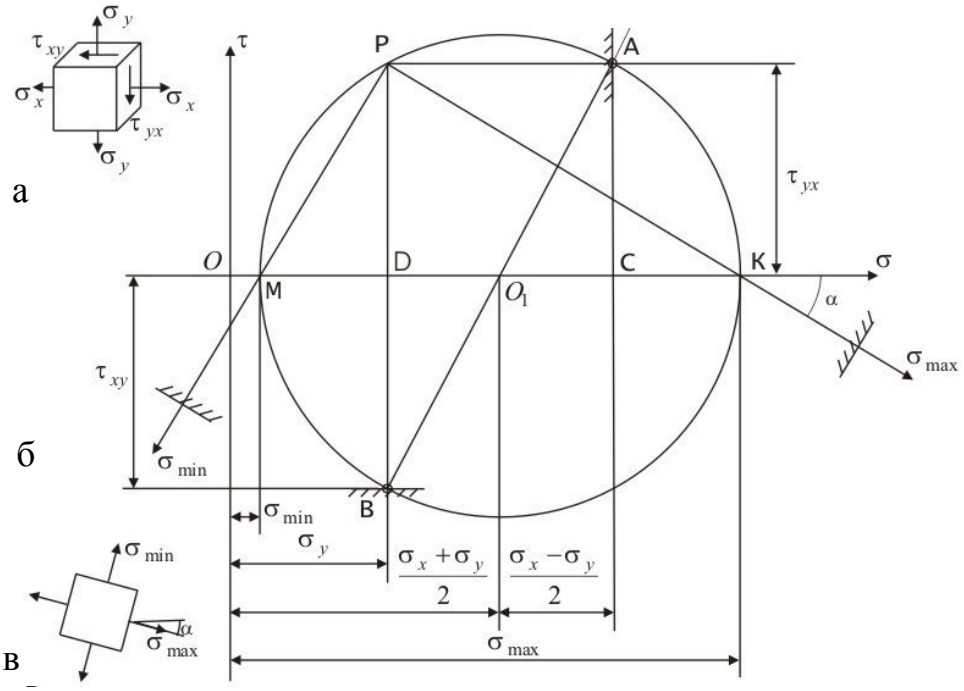


Рис. 4.9. Круговая диаграмма напряженного состояния

Главным площадкам соответствуют точки К и М, в этих площадках действуют наибольшие и наименьшие напряжения.

Наибольшие и наименьшие напряжения равны

$$\boldsymbol{\sigma_{max} = 00_1 + 0_1K = 00_1 + R},$$

$$\boldsymbol{\sigma_{min} = 00_1 - 0_1M = 00_1 - R}.$$

После подстановки отрезков получаем

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}, \tag{4.12}$$

затем обозначаем напряжения согласно принятой зависимости $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_4$.

Направление главных напряжений определяется на основании зависимости

$$\mathbf{tq2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}}. \qquad (4.13)$$

Наибольшие касательные напряжения численно равны радиусу окружности напряжений

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}. \qquad (4.14)$$

При испытании образцов пород на прочность при растяжении, сжатии получаем линейное напряженное состояние. Круговые диаграммы напряженных состояний представлены на рис. 4.10.

Рассмотрим построение диаграммы напряжений для объемного напряженного состояния.

Для площадок параллельных осям x, y, z строим круги Мора (рис. 4.11).Каждой точке любой окружности соответствует определенная площадка. Однако, точки, расположенные на трех кругах не исчерпывают всего множества площадок, проходящих через заданную точку.

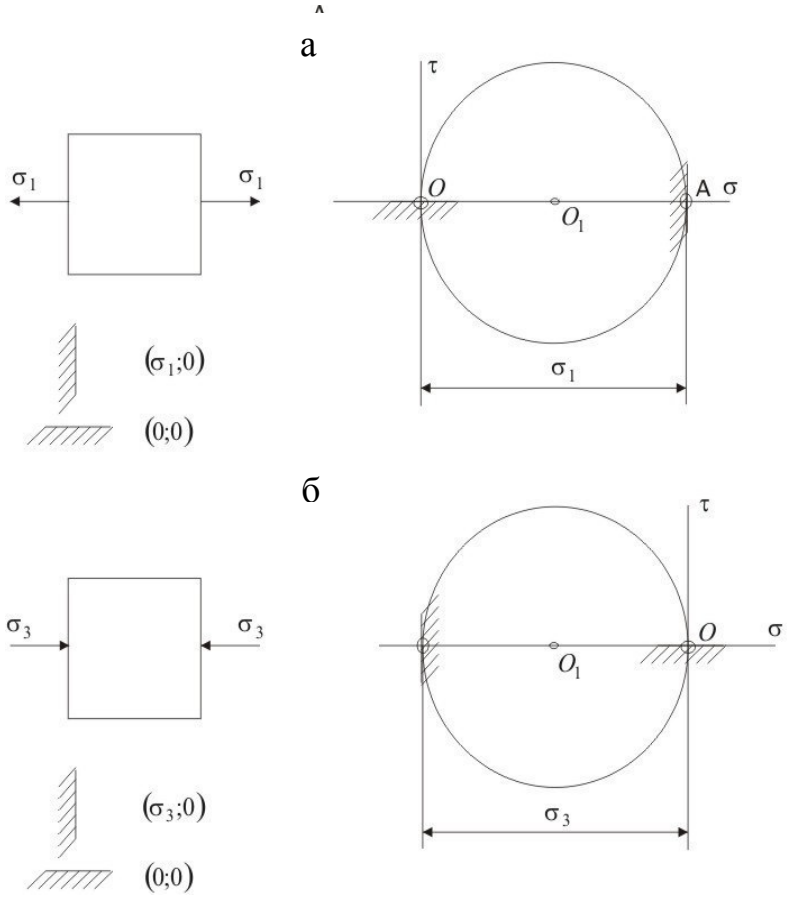


Рис. 4.10. Круговая диаграмма напряженного состояния при растяжении (а) и при сжатии (б)

Точки, соответствующие площадкам, не параллельным ни одной из главных осей, расположены внутри заштрихованного криволинейного треугольника ABC, образованного тремя совмещенными кругами Мора (рис. 4.12).

Наибольшие касательные напряжения равны радиусу наибольшего круга

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (4.15)$$

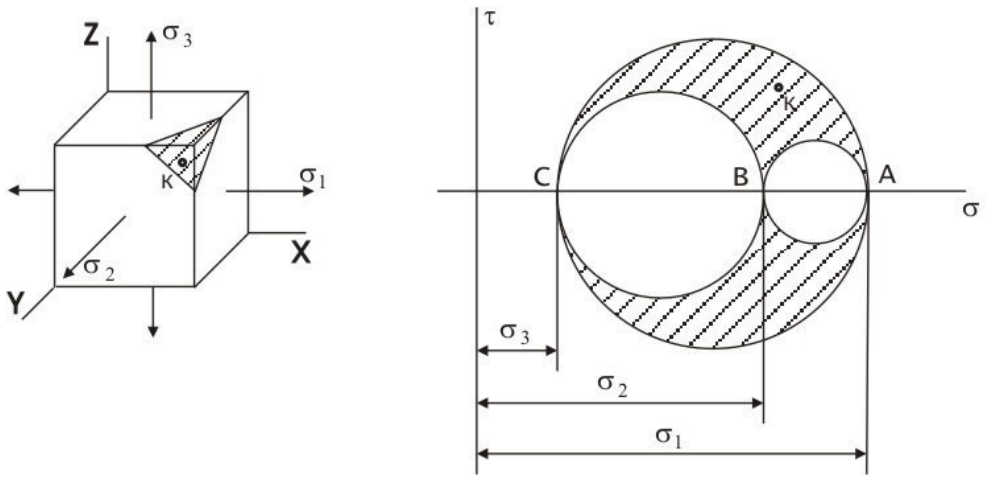


Рис. 4.11. Круговые диаграммы для объемного напряженного состояния

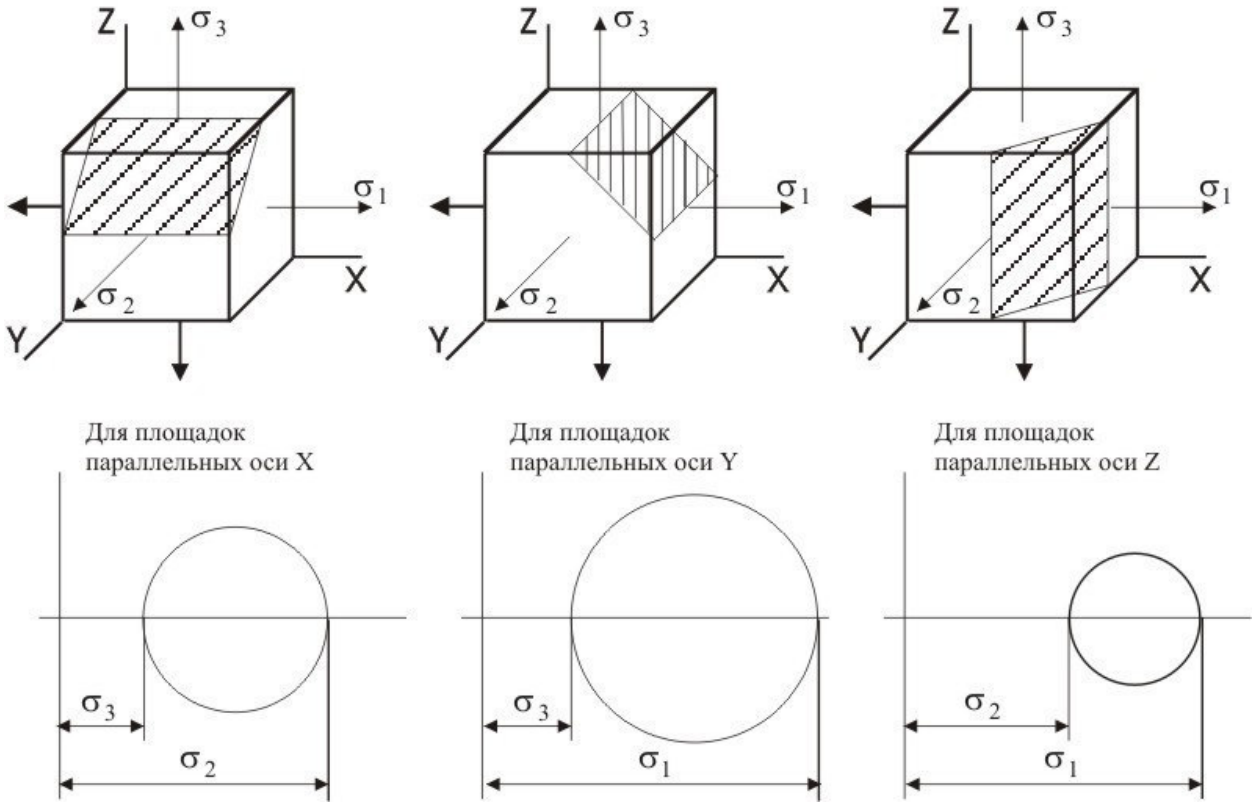


Рис. 4.12. Круговая диаграмма напряжений для объемного напряженного состояния

Рассмотрим еще одно напряженное состояние, которое может возникать в исследуемом теле, породном массиве, при испытании на срез. Если по граням элемента, вырезанного вокруг точки, действуют только касательные напряжения, то такое напряженное состояние называется чистым сдвигом (рис. 4.13).

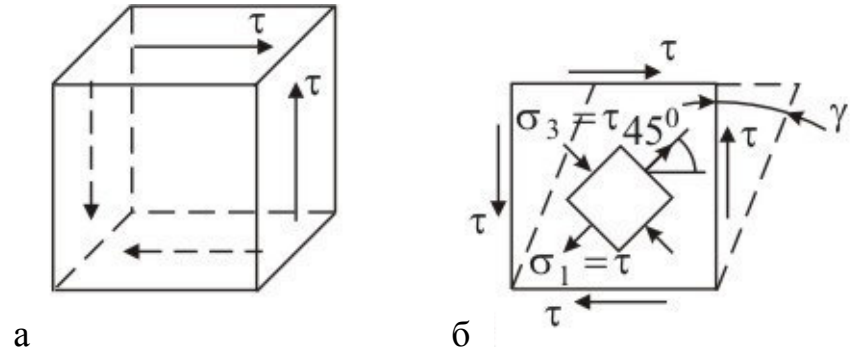


Рис. 4.13. Чистый сдвиг

При действии касательных напряжений элемент деформируется (рис. 4.13, б), вертикальные грани поворачиваются на угол γ, этот угол еще называют *угловой деформацией*.

Закон Гука при сдвиге имеет вид

$$\tau = \gamma G , \tag{4.16}$$

где G – модуль сдвига,

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} . \tag{4.17}$$

Главные направления расположены под углом $\alpha = 45^0$ и равны $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$.

Графическое представление этого напряженного состояния (координаты точек соответствующих площадок ⩘ (0; - τ), ⫽⫽ (0; τ)) дано на рис. 4.14. Полюс круга находится в точке В, направление главных напряжений определяется прямыми ВС и ВД.

При объемном напряженном состоянии между компонентами напряженного и деформированного состояния существует определенная зависимость. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название обобщенного закона Гука. Наиболее простую форму обобщенный закон Гука принимает для изотропного тела, в этом случае коэффициент пропорциональности между компонентами напряженного и деформированного состояний не зависят от ориентации осей в точке.

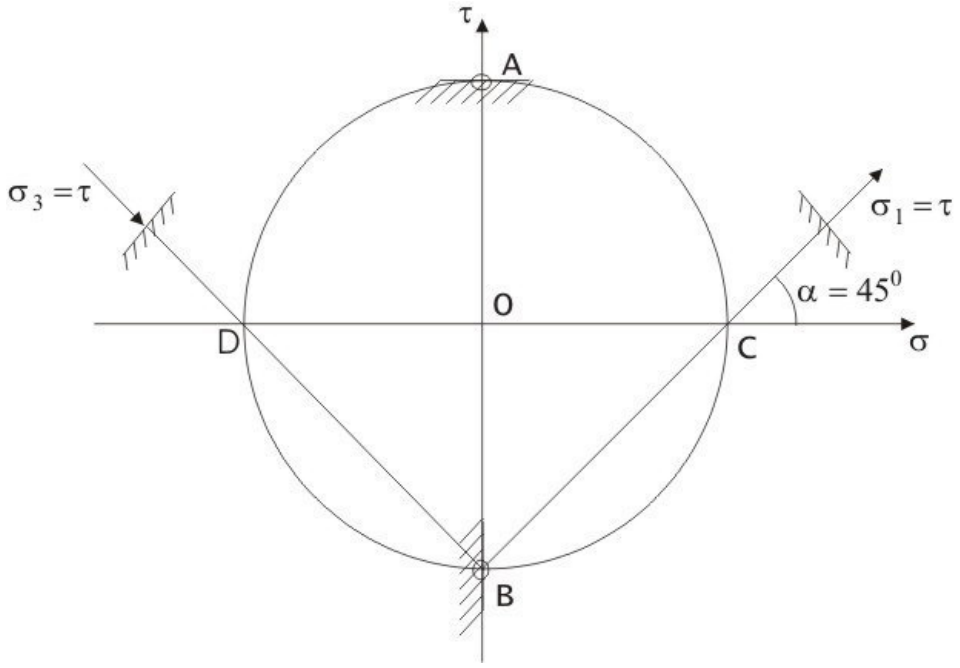


Рис. 4.14. Круговая диаграмма при чистом сдвиге

Чтобы получить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, необходимо воспользоваться принципом независимости действия сил. Линейные деформации в направлении действие напряжений σ_1, σ_2, σ_3 определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)\right],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)\right], \qquad (4.18)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

Для оценки опасности напряженного состояния необходимо определить *потенциальную энергию деформации* при объемном напряженном состоянии. Потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных по поверхности этого объема. Нормальная сила σ, *dy*, *dz* (рис. 4.6, а) на перемещении ε_1 dx совершает работу

$$\frac{1}{2}\sigma_1 dydz\varepsilon_1 dx\,.$$

Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие. Если потенциальную энергию отнести к единице объема с учетом выражений (4.13), то получим удельную потенциальную энергию деформации

$$U = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \qquad (4.19)$$

Получим выражения для так называемой энергии изменения формы и энергии изменения объема. Эти выражения потребуются в дальнейшем при изучении вопросов, связанных с пластическими деформациями и предельными напряженными состояниями.

Деление внутренней потенциальной энергии на две указанные составляющие является условным и выполняется по следующему принципу.

Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин (рис.4.15)

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_1^1;\ \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_2^1;\ \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma_3^1, \qquad (4.20)$$

в результате чего напряженное состояние разделяется на два. Первое напряженное состояние представляет собой всестороннее растяжение

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \qquad (4.21)$$

а второе является дополнением к нему до заданного напряженного состояния.

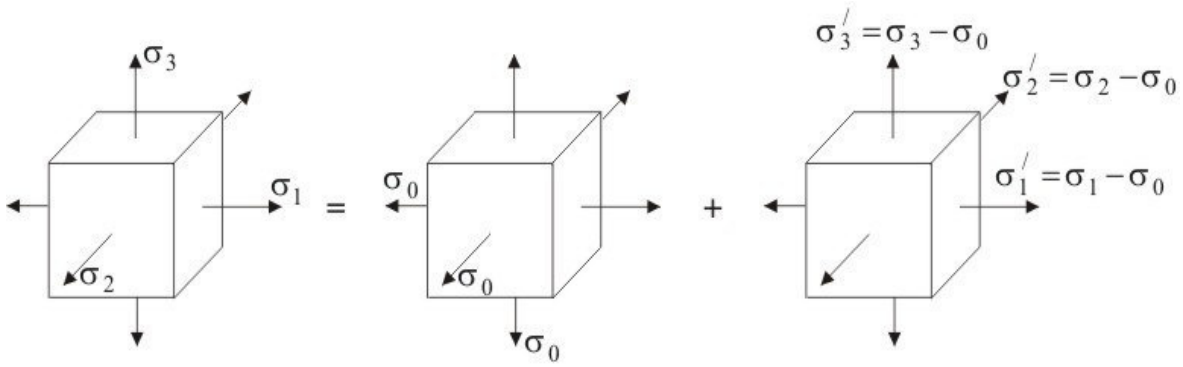


Рис. 4.15. Представление напряженного состояния

При указанном условии система сил первого напряженного состояния (σ_0) не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния. Точно так же и силы второго напряженного состояния не производят работы на перемещениях первого.

И внутренняя энергия разбивается на две части, соответствующие двум напряженным состояниям

$$\mathbf{U = U_{об} + U_{ф}},$$

где $U_{об}$ – потенциальная энергия изменения объема; $U_ф$ – потенциальная энергия изменения формы, или энергия формоизменения.

Подставляя значения напряжений в уравнение (4.14), получаем для первого напряженного состояния

$$U_{об} = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{GE} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \qquad (4.22)$$

для второго напряженного состояния

$$U = \frac{1 + \mu}{GE} \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \qquad (4.23)$$

Представленные выше зависимости широко используются в расчетной практике.

4.3. Теории прочности пород

Прочность породы определяется величиной критических напряжений, при которых происходит ее разрушение. Эти напряжения различны для разных пород и разных способов приложения нагрузки. Они называются *пределы прочности (временное сопротивление)*. Различают пределы прочности пород при сжатии $\sigma_{вс}$, растяжении $\sigma_{вр}$, сдвиге $\tau_{сдв}$.

Разрушение – это разрыв связей между атомами в кристаллической решетке.

Как показывают расчеты, предел прочности при растяжении должен быть равен 10^4 МПа.

Однако в связи с тем, что реальные тела обладают множеством дефектов, значения предела прочности в сотни тысяч раз меньше теоретического значения.

Дефекты могут быть различные. В кристалле – это точечные (вакансии) и линейные (дислокации) искажение кристаллической решетки. В породе – границы зерен (плоскостные) и поры (объемные искажения) и нарушения строения породы.

В зависимости от масштаба разрушения породы преобладают те или иные дефекты.

Существует несколько масштабов (уровней) разрушения пород. Мегаскопический уровень разрушения характерен для взрывания массивов пород, сдвижений и обвалов их. В том случае наиболее сильно на разрушаемости сказываются крупные трещины.

Более мелкие трещины, поры, контакты между агрегатами зерен предопределяет разрушение *макроскопическое* – выемочными агрегатами (экскаваторами, комбайнами), буровыми инструментами.

Микроскопический уровень разрушения характерен для измельчения полезных ископаемых в мельницах и, частично, при бурении скважин. На этой

стадии происходит разрыв связей в кристаллах и зернах. При этом существенную роль играют дислокации и вакансии.

Разрушение пород имеет либо хрупкий, либо пластичный характер. При хрупком разрушении происходит отрыв атомов друг от друга по всей плоскости разрушения, на что требуются большие усилия, чем при пластическом.

Мелкие трещины, поры, неоднородности, плоскости ослабления предопределяют преобладающий хрупкий характер разрушения горных пород, поэтому механизм их разрушения может быть описан посредством ***теории хрупкого разрушения***, согласно которой решающее значение для начала разрушения имеют критические трещины в объеме твердого тела.

На краях трещины обычно возникают напряжения, значительно превышающие средние напряжения σ. Это явление называется концентрацией напряжений. Так, при длине трещины $2l$ и радиусе ее закрепления на конце r (рис. 4.16) напряжения на краю трещины равны

$$\sigma^{1} = 2\sigma \cdot \sqrt{\frac{\ell}{r}}$$

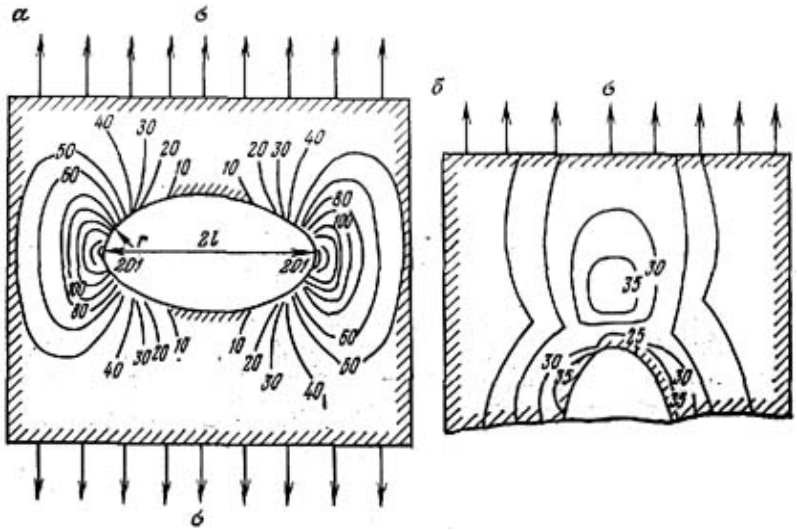


Рис. 4.16. Концентрация напряжений на краях трещины длиной 2ℓ и с радиусом закругления r (числа указывают кратность превышения напряжений σ^1 над σ):

а – при нагружении перпендикулярно трещине;

б – при нагружении параллельно ей.

Как только напряжение σ^1 достигнет определенного значения, трещина начнет развиваться, преодолевая при этом молекулярные силы сцепления (производя работу W_s, пропорциональную удельной поверхностной энергии e_s данного тела)

$$W_s = \varphi\ell \cdot e_s,$$

где φl – площадь двух поверхностей трещины, приходящаяся на единицу поперечного размера породы.

Упругая энергия, запасенная в породе в результате действия внешней нагрузки и необходимая для образования трещины

$$W_E = \sigma^2 \pi \ell^2 / E, \tag{4.24}$$

Трещина будет расти, если

$$\frac{dW_E}{d\ell} \geq \frac{dW_S}{d\ell}. \tag{4.25}$$

Отсюда предел прочности при растяжении

$$\sigma_{вр} = \sqrt{2E\ell_S / \pi\ell}. \tag{4.26}$$

При действии сжимающей нагрузки трещины смыкаются и на их поверхности появляются силы трения. В том случае предел прочности на сжатие больше предела прочности при растяжении $\sigma_{вс} > \sigma_{вр}$ и их отношение подчиняется уравнению

$$\frac{\sigma_{вс}}{\sigma_{вр}} = \frac{4}{\sqrt{1 + tq^2\varphi} - tq\varphi}, \tag{4.27}$$

где $tq\varphi$ – коэффициент внутреннего трения ($tq\varphi = 0{,}2\ldots2$).

Например, для гранита $\sigma_{вс} = 141$ МПа, $\sigma_{вр} = 11$ МПа, $\frac{\sigma_{âñ}}{\sigma_{âð}} = 13$, песчаника кварцевого $\sigma_{вс} = 164$ МПа, $\sigma_{вр} = 6{,}6$ МПа, $\frac{\sigma_{âñ}}{\sigma_{âð}} = 26$.

На основании теории хрупкого разрушения получаем $\frac{\sigma_{âñ}}{\sigma_{âð}} = 5\ldots17$, что в ряде случаев близко к значениям, полученным экспериментально.

Кинетическая (термофлуктуационная) теория разрушения твердых тел, разработанная академиком С.Н. Журковым построена на том, что разрушение в некоторой зоне не является каким-то критическим состоянием тела. В соответствии с этой теорией в твердых телах непрерывно идет процесс накопления повреждений, которое приводит к полному разрушению тел. Время существования тела при действии нагрузки в не разрушенном состоянии определяется по следующей формуле

$$t = t_o \exp \cdot \frac{(U_o - \sigma V)}{kT}, \qquad (4.28)$$

где t_o – константа, совпадающая по порядку с периодом колебаний атомов и не зависящая от химического состава и структуры тела ($t_o \approx 10^{-12}$с); U_o – энергия активации процесса разрушения, структурно-нечувствительная величина (для гранитов $U_o \approx 2{,}9 \cdot 10^{-19}$ Дж; для кварцитов $U_o \approx 5{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж); V – активационный объем, зависящий от структуры тела и составляющий $10^3 \ldots 10^4$ атомных объемов (для гранитов $V = 1{,}5 \cdot 10^{-27}$ м^3, для кварцитов $V = 1{,}9 \cdot 10^{-27}$ м^3); kT – мера энергии тепловых флуктуаций; k – постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/к; T – абсолютная температура тела.

Предел прочности при растяжении равен

$$\sigma_{вр} = \frac{(U_o - kT\ell nt / t_o)}{V}, \qquad (4.29)$$

т.е. предел прочности зависит от параметров U_o и V, температуры тела и длительности действия на него нагрузки.

Эксперименты, проведенные на породах, подтверждают снижение прочности с увеличением длительности действия нагрузки (рис. 4.17).

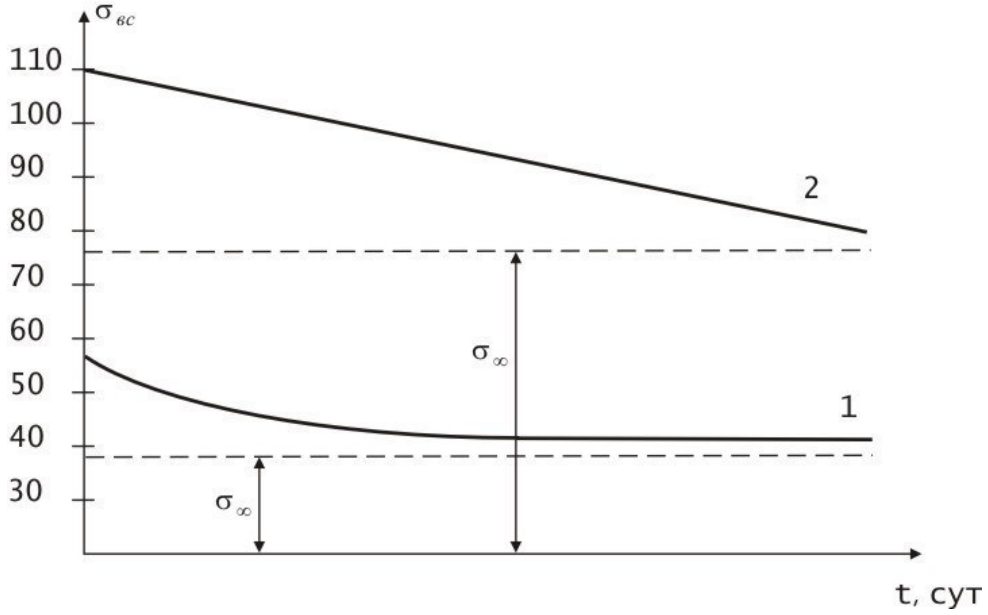


Рис. 4.17. Кривые длительной прочности песчанистого сланца Донбасса (1) и известняка (2)

Прочность пород, соответствующая той или иной длительности действия нагрузки, называется их *длительной прочностью* $\sigma_{дл}$. С увеличением времени действия нагрузки величина длительной прочности $\sigma_{дл}$ падает по кривой, асимметрически приближаясь к некоторому предельному значению, называемому

пределом длительной прочности σ_∞. Предел длительной прочности для многих пород равен $\sigma_\infty = (0{,}7\ldots0{,}8)\ \sigma_{вс}$.

Для оценки прочности горных пород в случае сложного напряженного состояния используют критерии, позволяющие заменить сложное напряженное состояние одноосным напряженным состоянием, для которого пределы прочности могут быть определены путем теоретических исследований, либо путем эксперимента.

Горные породы в подавляющем большинстве можно отнести к хрупким, поэтому при расчетах можно использовать теорию Сен-Венана (2 теория прочности) – ***теорию наибольших линейных деформаций***. Если наибольшая линейная деформация достигла предельного значения, то напряженное состояние считается опасным.

$$\sigma^{II}_{экв} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{вр}, \qquad (4.30)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Для оценки разрушения пластичных можно применять ***теорию наибольших касательных напряжений*** (теория Кулона; третья теория прочности).

Напряженное состояние считается опасным, если наибольшие касательные напряжения достигли предельного значения.

$$\sigma^{III}_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_{вр} \qquad (4.31)$$

Экспериментальная проверка этой гипотезы показала, что для пластичных материалов она приводит, в общем, к удовлетворительным результатам. Переход от упругого состояния к пластическому действительно с достаточной точностью определяется разностью между наибольшим и наименьшим из главных напряжений и слабо зависит от промежуточного главного напряжения σ_2. Наложение всестороннего давления на любое напряженное состояние не меняет величины наибольших касательных напряжений τ_{max} и, следовательно, не оказывает влияние на возникновение пластических деформаций. В частности, при всестороннем гидростатическом давлении τ_{max} обращается в нуль, следовательно, в материале не возникают пластические деформации. Наложение всестороннего давления влияет не на условие пластичности, а на условия разрушения. Граница разрушения отодвигается, и материал приобретает способность пластически деформироваться без разрушения, что объясняет поведение горных пород при определенных условиях.

Рассмотрим э***нергетическую теорию прочности (4 теория прочности)*** Представим напряженное состояние (рис. 4.15)в виде двух напряженных состояний: всестороннее растяжение, где $\sigma_o = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ и во втором напряженном состоянии, где по граням элемента действуют напряжения $\sigma_1 - \sigma_o$, $\sigma_2 - \sigma_o$, $\sigma_3 - \sigma_o$.

Первое напряженное состояние вызывает изменение объема элемента без изменения формы (куб до деформации остается кубом и после деформации), второе напряженное состояние вызывает изменение формы элемента (куб превращается в параллелепипед) без изменения объема.

Напряженное состояние считается опасным, если удельная потенциальная энергия изменения формы достигла предельного значения.

Эквивалентные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{экв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{вр} \quad (4.32)$$

Эта теория хорошо согласуется с экспериментом. Кроме того, перестановка местами индексов напряжений 1, 2, 3 в выражении не меняет величины эквивалентных напряжений.

К вопросу прочности, согласно ***теории прочности Мора***, можно подойти и с других позиций – с позиций упрощенной систематизации экспериментальных данных.

Для хрупких тел, к которым относятся стекло, бетон, горные породы, критерий разрушения может быть сформулирован в принципе так же, как и критерий пластичности, в виде некоторого соотношения между компонентами тензора напряжений

$$R \cdot (\sigma \cdot i \cdot j) = 0. \quad (4.33)$$

Если $R \cdot (\sigma \cdot i \cdot j) < 0$, то материал не разрушается. При выполнении условия (4.33) хотя бы в одной точке – происходит локальное разрушение. Под локальным разрушением понимают либо разрыв, разрушение и срез некоторых структурных элементов, либо появление зародышевой трещины или слияние с трещинами, возникшими в соседних точках, где выполняется условие (4.33). Область локального разрушения служит источником концентрации напряжений, поэтому вероятно использование новых очагов разрушения по соседству с уже возникшими.

Условие Мора: разрушение происходит тогда, когда на некоторой площадке величина касательного напряжения достигает критического значения, зависимо от действующего на этой площадке нормального напряжения

$$\tau_n = f \cdot (\sigma_n). \quad (4.34)$$

Это условие (4.34) необходимо записать в зависимости от главных напряжений. Для этого воспользуемся геометрическим представлением напряженного состояния в виде круговой диаграммы Мора. При объемном напряженном состоянии, с учетом принятых обозначений, можно построить три окружности Мора (рис. 4.18).

Точка, соответствующая определенному напряженному состоянию, с ко-

ординатами σ_n, τ_n лежит в заштрихованной области, т.е. не может выйти за пределы большого круга, построенного на напряжениях σ_2 и σ_1.

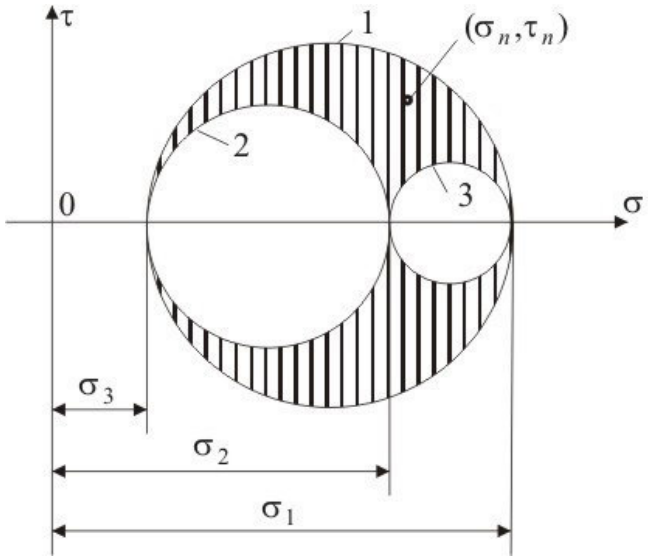


Рис. 4.18. Круговая диаграмма для объемного напряженного состояния

Предположим, что мы располагаем испытательной машиной, на которой в образце можно создавать любые напряженные состояния с пропорциональным изменением всех компонент. Выберем некоторое напряженное состояние и будем одновременно увеличивать все компоненты. При некоторых значениях напряжений напряженное состояние станет предельным. Образец либо разрушится, либо в нем возникнут пластические деформации. Начертим один из наибольших кругов Мора для этого напряженного состояния (круг 1, рис. 4.19).

На образце из того же материала проводим испытание при другом напряженном состоянии, добиваемся, что напряженное состояние становятся предельным (круг 2, рис. 4.19).

В результате испытаний получаем семейство кругов Мора для различных предельных состояний. Вычеркиваем их общую огибающую кривую. Эта огибающая кривая является единственной, независимо от главных напряжений σ_2. Это основное допущение в этой теории прочности.

Форма огибающей предельных кругов Мора зависит от свойств материала и является механической характеристикой материала. Проверка прочности проводится достаточно просто. Если окружность большого круга Мора не касается предельной кривой, разрушение не произойдет. Если круг Мора коснется огибающей кривой, то происходит локальное разрушение.

Часто проводят испытания на растяжение, сжатие, строят аппроксимирующую предельную огибающую в виде касательной к двум окружностям и тогда условие прочности принимает вид

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} \cdot \sigma_3 = \sigma_{вр}, \qquad (4.35)$$

где $\sigma_{вр}$ – временное сопротивление (предел прочности) при растяжении;
$\sigma_{вс}$ – временное сопротивление (предел прочности) при сжатии.

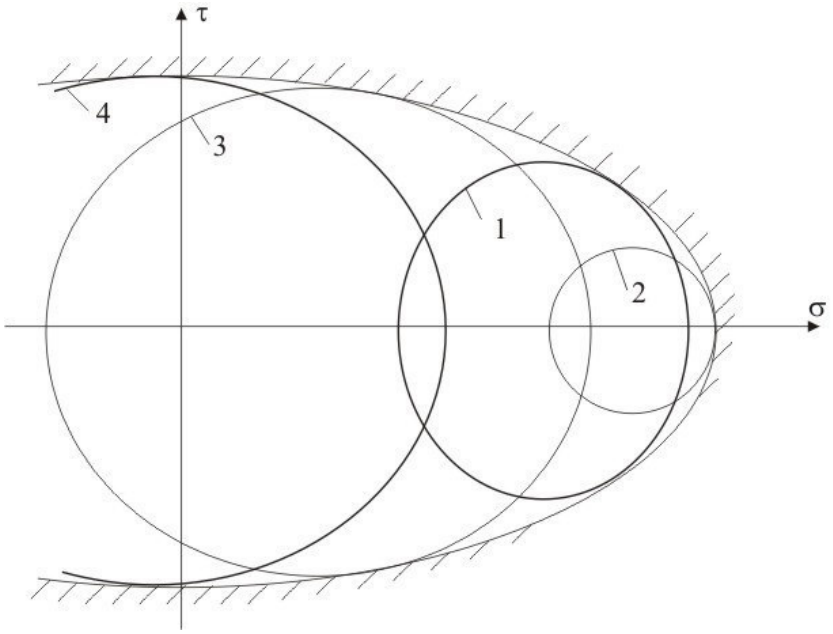


Рис. 4.19. Огибающая кривая

Основное ограничение, которое накладывается на применение теории Мора, связано с неточностью определения огибающей кривой в условиях всестороннего растяжения. Это ограничение не столь существенно, поскольку напряженное состояние такого рода при решении практических задач встречается редко. Недостаточно известен вид огибающей кривой в области всестороннего сжатия. Здесь вследствие принятых упрощений возможны погрешности. Наилучшие результаты расчетная формула (4.35) дает для напряженных состояний при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$. Тогда предельный круг Мора располагается в интервале между предельными кругами при растяжении и сжатии.

Подход Мора хорош тем, что позволяет объяснить относительную условность деления материалов на пластичные и хрупкие.

Для одного и того же материала можно построить две огибающие предельных кругов Мора. Первая огибающая характеризует переход от упругого состояния к пластическому. Эта огибающая представляет собой прямую, параллельную оси σ (рис. 4.20). Вторая огибающая соответствует разрушению образца (кривая 2).

Для пластичного материала прямая 1 в правой части диаграммы (рис. 4.20, а) проходит ниже кривой 2. Это означает, что при обычном испытании образца на растяжение круг Мора 3 по мере увеличения растягивающего напряжения σ, сначала пересечет прямую 1. В образце возникнут пластические деформации. Затем круг 3 коснется кривой 2. Образец разрушится.

Для хрупкого материала (рис. 4.20, б) прямая 1 расположена выше кривой 2. При испытании образца на растяжение круг Мора 3, не касаясь прямой 1, соприкасается с кривой 2. Разрушение происходит без остаточных деформаций, как и положено для хрупких материалов.

В настоящее время ***паспортом прочности горных пород*** называют кривую, огибающая все круги напряжений для предельных состояний (рис. 4.21). При исследовании напряженного состояния в горном массиве сжимающие напряжения считают положительными.

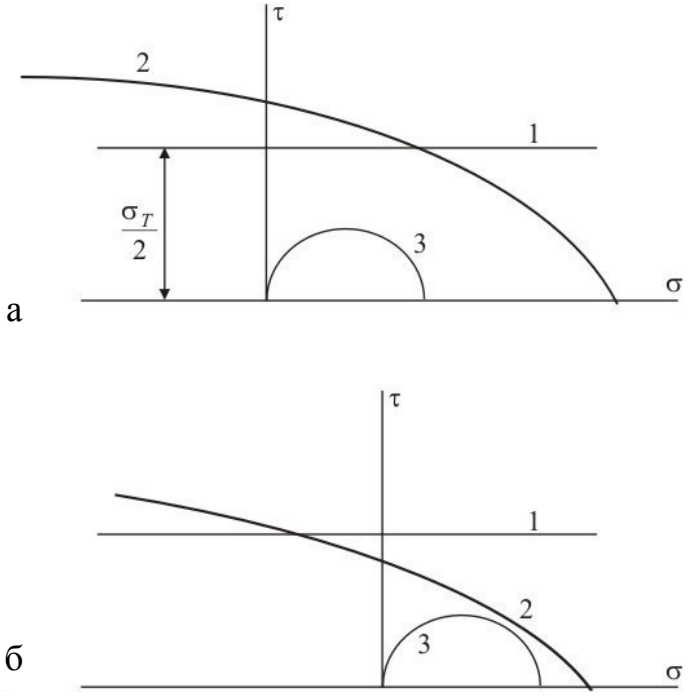


Рис. 4.20. Огибающие кривые для пластичных (а) и хрупких (б) материалов

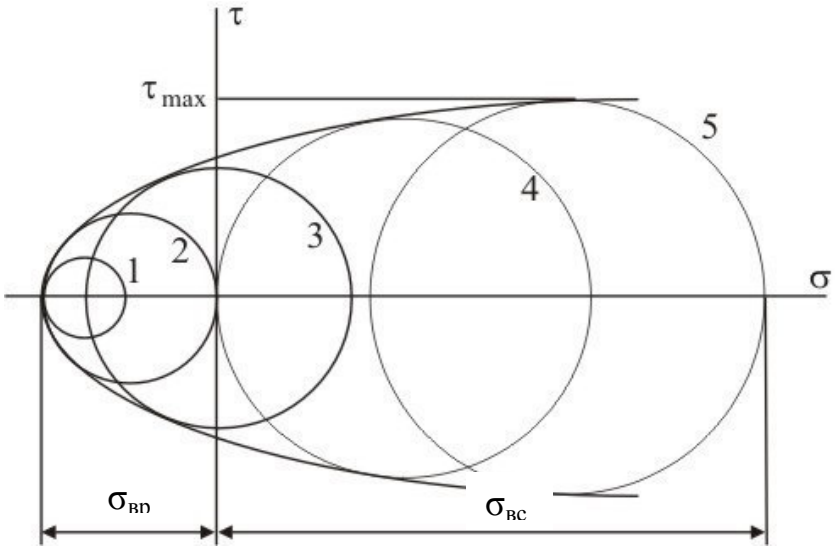


Рис. 4.21. Огибающая кривая предельных напряженных состояний: 1 – всестороннее неравномерное растяжение; 2 – одноосное растяжение; 3 – чистый сдвиг; 4 – одноосное сжатие; 5 – всестороннее неравномерное сжатие; $\sigma_{вс}$ – всестороннее равномерное сжатие; $\sigma_{вр}$ – всестороннее равномерное растяжение

Положение огибающей кривой относительно начала координат характеризует степень хрупкости или вязкости пород.

На рис. 4.22 приведены огибающие кривые для сыпучих, хрупких и пластичных горных пород.

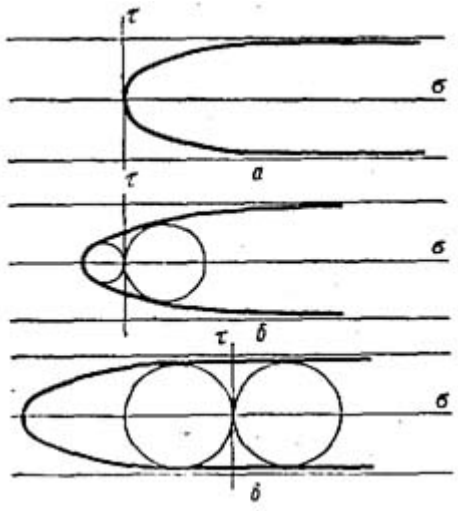


Рис. 4.22. Огибающие кривые для различных материалов: а – сыпучих; б – хрупких; в – пластичных.

Проводят испытание образца на растяжение, сжатие и при объемном сжатии, строят огибающую кривую (рис. 4.23). Основные параметры, определяемые по паспорту прочности:

- предельное сопротивление чистому сдвигу (срезу) τ_c (сцепление C_o) и соответствующий угол внутреннего трения φ_o (коэффициент внутреннего трения $tq\varphi_o$);
- условное сцепление С при различных напряжениях σ, τ и соответствующий угол внутреннего трения (коэффициент внутреннего трения tqφ), эти параметры – переменные величины.

К огибающей кривой в точке ее пересечения с осью τ переводим касательную nn. Координата точки пересечения касательной nn с осью τ определяет предельное сопротивление материала при чистом сдвиге, угол между горизонтальной линией и касательной nn – угол внутреннего трения.

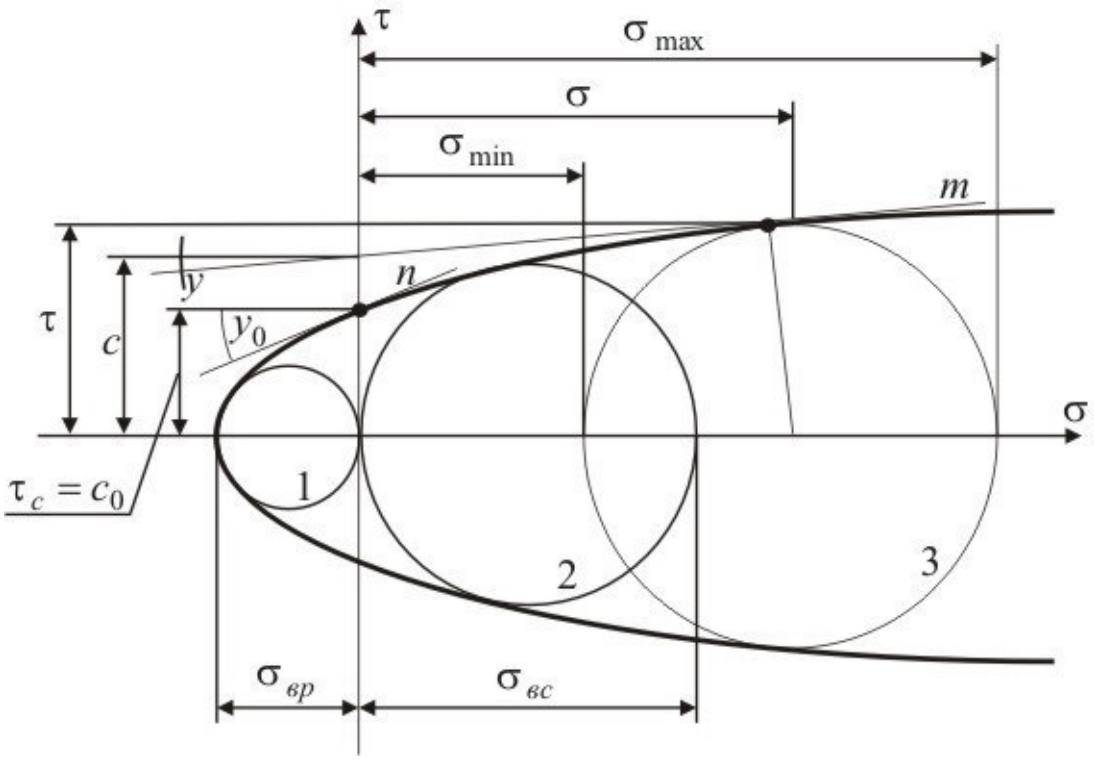


Рис. 4.23. Паспорт прочности горной породы: 1 – круг одноосного растяжения; 2 – круг одноосного сжатия; 3 – круг при объемном сжатии.

Касательная mm к огибающей в любой точке с координатами (σ; τ) составляет с горизонталью угол φ – угол внутреннего трения, координата точки пересечения касательной с осью τ, С – условное сцепление.

Метод построения паспорта прочности по данным определения пределов прочности при объемном сжатии, одноосном сжатии и растяжении следующий.

Для построения паспорта используют результаты определения пределов прочности при объемном сжатии $\sigma^{o}_{\tilde{n}\ae}$ не менее чем при трех различных значениях бокового давления. По значению $\sigma^{o}_{\tilde{n}\ae} = \sigma_{max}$ и бокового давления $p = \sigma_{min}$ строят семейство полуокружностей радиусами $\frac{\sigma^{\hat{i}}_{\tilde{n}\ae} - p}{2}$ с координатами центров $(\frac{\sigma^{\hat{i}}_{\tilde{n}\ae} + p}{2};0)$.

Строят круги напряжений при одноосном растяжении и сжатии радиусами $\frac{\sigma_{\hat{a}\eth}}{2}, \frac{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}}}{2}$ с координатами центров $(-\frac{\sigma_{\hat{a}\eth}}{2};0)$ и $(\frac{\sigma_{\hat{a}\tilde{n}}}{2};0)$. Проводят плавную кривую, огибающую все пять полуокружностей (см. рис. 4.23).

Метод построения паспорта прочности по данным определения пределов прочности при срезе со сжатием, одноосном сжатии и растяжении таков: по совокупности парных значений нормальных σ_α и касательных τ_α напряжений, определенных при испытании на срез в координатах σ, τ отмечают точки 1, 2, 3 соответствующие углам $\alpha = 25^0, 35^0, 45^0$ наклона призм (рис. 4.24).

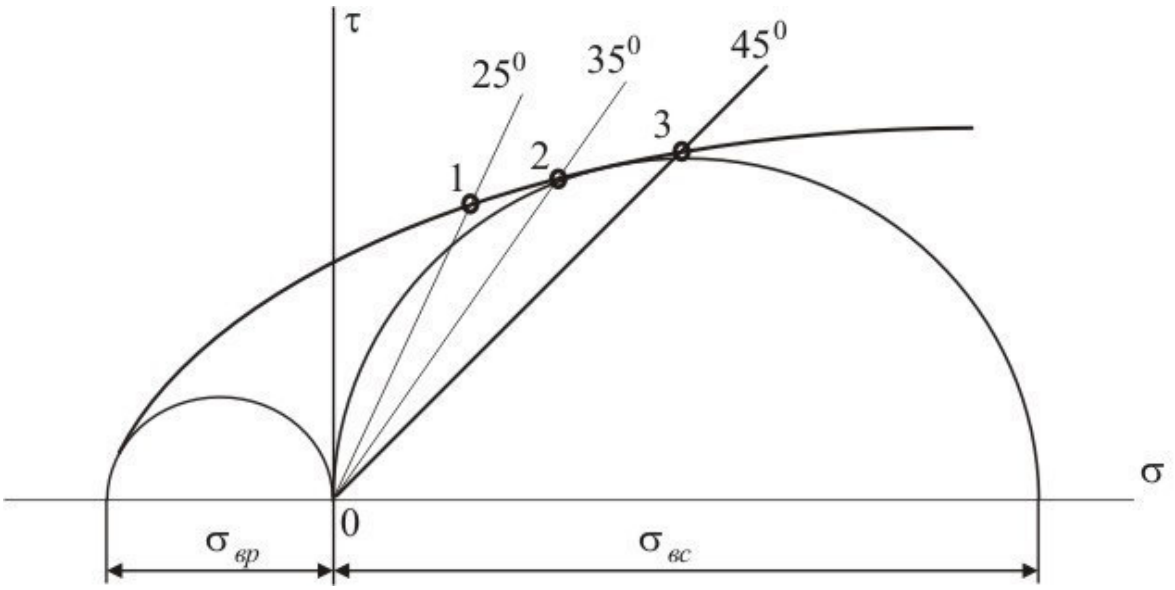


Рис. 4.24. Паспорт прочности при испытании на растяжение, сжатие, сдвиг

Строят круги напряжений при растяжении и сжатии, проводят плавную кривую, огибающую полуокружности и проходящую через точки 1, 2, 4.

Расчетный метод построения паспорта прочности по данным определения пределов прочности при одноосном сжатии и растяжении предусматривает определение координат точек огибающей кривой расчетным путем по результатам испытаний при одноосном растяжении и сжатии по эмпирическому уравнению

$$\tau = \tau_{max} \cdot \left(\frac{\sigma_к^2}{\sigma_к^2 + a^2} \right)^{3/8}, \qquad (4.36)$$

где τ_{max} – максимальное сопротивление породы срезу (сдвигу), при гипотетически полностью закрывшихся под действием нормального давления трещинах и порах; $\sigma_к$ – нормальное напряжение относительно начала координат, перенесенного в точку пересечения огибающей кривой; а – параметр формы огибающей кривой.

Для удобства расчета и табулирования, уравнение огибающей кривой представляют в безразмерных координатах ℓ и К

$$\ell = 0{,}73 \cdot \left(\frac{K^2}{K^2 + 1} \right)^{3/8}, \qquad (4.37)$$

где ℓ – безразмерная координата соответствующая касательным напряжениям, $\ell = \frac{\tau}{a}$; К – безразмерная координата, соответствующая нормальному напряжению.

$$\mathbf{K} = \frac{\sigma + \sigma_o}{\mathbf{a}}, \tag{4.38}$$

σ_o – значение параметра переноса начала координат.

Вводятся безразмерные радиусы предельных кругов Мора для одноосного растяжения q_1 и одноосного сжатия q_2, которые связаны отношением

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\sigma_{вс}}{\sigma_{вр}}$$

Значение параметра огибающей кривой определяется по формуле

$$a = \frac{\frac{\sigma_{вр}}{2q_1} + \frac{\sigma_{вс}}{2q_2}}{2} = \frac{\frac{\sigma_{вр}}{q_1} + \frac{\sigma_{вс}}{q_2}}{4}$$

Параметр переноса начала координат

$$\sigma_o = a \cdot f(q_2 / q_1). \tag{4.39}$$

Координаты σ и τ точек огибающей кривой определяют по формулам

$$\sigma = Ka - \sigma_o; \tag{4.40}$$

$$\tau = \ell a.$$

Для построения кривой вычисляют координаты не менее 10 точек, строят кривую (рис. 4.25).

Контроль правильности построения кривой выполняют построением кругов Мора при растяжении и сжатии. Если окружности касаются огибающей кривой, то построения выполнены правильно.

Предельное сопротивление срезу τ_o (сцепление C_o) определяют как ординату точки пересечения огибающей с осью τ, а соответствующий угол трения φ_o, как угол наклона касательной nn к кривой в этой точке.

Условное сцепление С в любой точке огибающей кривой определяют как ординату точки пересечения касательной к огибающей в точке (σ, τ) с осью τ; угол внутреннего трения

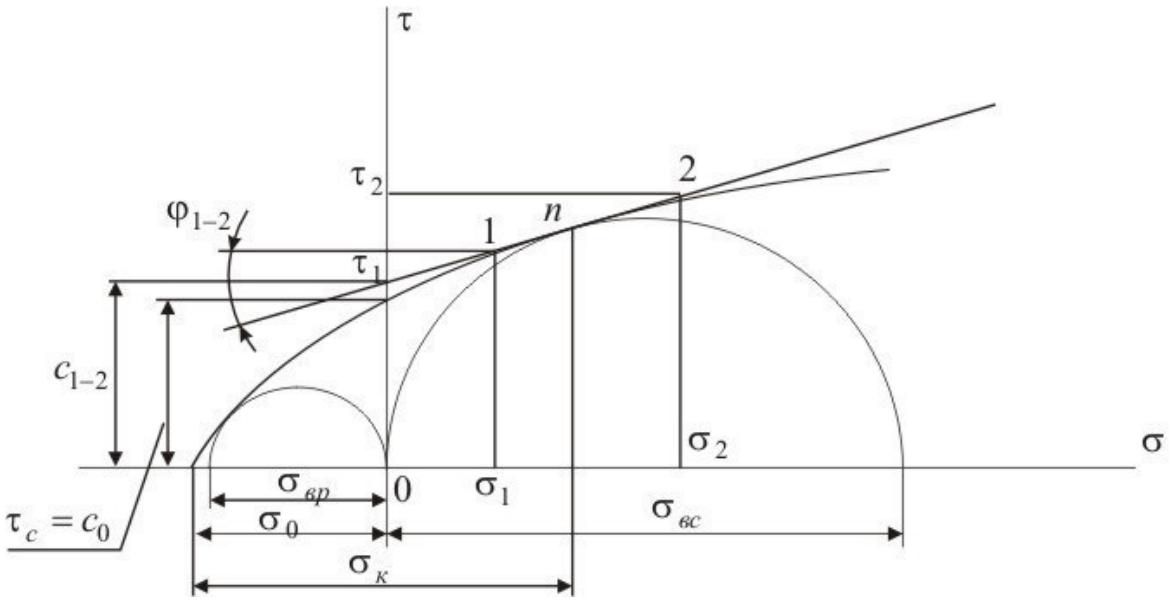


Рис. 4.25. Паспорт прочности, построенный расчетным способом

$$\varphi = \mathbf{arcrc} \cdot \frac{\tau - C}{\sigma}. \qquad (4.41)$$

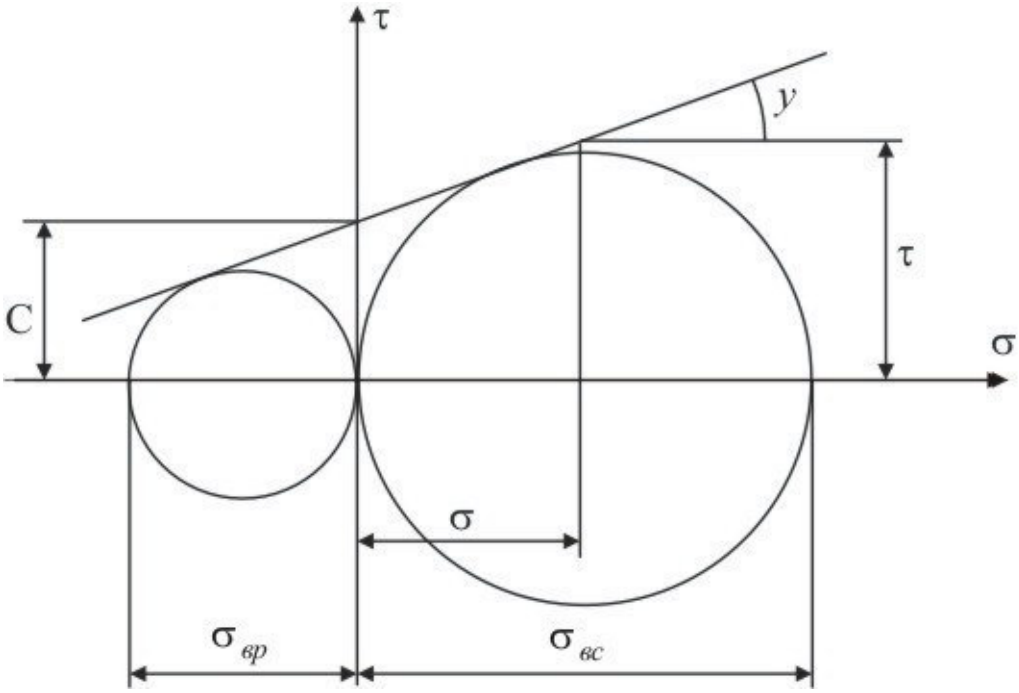
Условное сцепление $C_{1\text{-}2}$ в заданном диапазоне напряжений ($\sigma_1 \ldots, \sigma_2$) или ($\tau_1, \ldots, \tau_2$) определяют как ординату точки пересечения прямой, проведенной через соответствующие точки огибающей, с осью τ и соответствующий угол внутреннего трения $\varphi_{1\text{-}2}$ как угол между этой прямой и осью σ.

$$\varphi_{1-2} = \mathbf{arcrc} \cdot \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \sigma_1}. \qquad (4.42)$$

Упрощенный метод построения паспорта прочности по данным определения пределов прочности при одноосном сжатии и растяжении заключается в том, что на основании экспериментальных данных предела прочности при растяжении $\sigma_{вр}$ и сжатии $\sigma_{вс}$ строят предельные круги Мора (рис.4.26).

К этим окружностям проводим касательную, которая будет являться огибающей предельных кругов Мора.

Уравнение этой прямой и есть паспорт прочности



$$\tau = C + \sigma tq\varphi \quad (4.43)$$

Рис. 4.26. Упрощенный метод построения паспорта прочности горных пород

4.4. Стандартные методы определения прочностных параметров скальных пород

4.4.1. Основные показатели механических свойств горных пород

Механические свойства горных пород определяют их поведение под влиянием внешних нагрузок – усилий. Они проявляются и непосредственно оцениваются прочностью и деформируемостью горных пород.

Прочность – свойство горных пород (материалов) сопротивляться разрушению и образованию больших деформаций, т.е. не разрушаться под действием определенной нагрузки.

Деформация – свойство материала под действием нагрузки изменять свою форму и объем.

Прочность материала может изменяться под влиянием различных факторов в широких пределах: они могут быть очень прочными, прочными, средней прочности, малой прочности и очень малой прочности. Разрушение горных пород может происходить сразу, без образования больших деформаций, т.е. происходит хрупкое разрушение, в том случае говорят о условно-мгновенной прочности или стандартной и длительной прочности.

Деформации и напряжения в горных породах, как и для других материалов, связаны между собой определенными соотношениями.

Одним из свойств материала, горной породы является свойство упругости. Упругость это свойство материала восстанавливать первоначальные размеры после снятия нагрузки.

Скальные породы обладают высокой прочностью, упругостью и малыми деформациями и перемещениями, слабой водопроницаемостью. Разрушаются они хрупко, мгновенно, с потерей сплошности. Деформации, развивающиеся во времени, т.е. упруговязкие или упругопластичные для них нехарактерны. Для этих пород определяется так называемая мгновенная прочность

Полускальные породы отличаются от скальных меньшей прочностью и устойчивостью, большей деформируемостью, значительной водопроницаемостью. Они имеют хрупкопластический или пластический характер разрушения. Для них характерно развитие деформаций во времени, т.е. явление ползучести. Для таких пород необходимо учитывать не только мгновенную, но и длительную прочность, учитывать реологические свойства. Для обеспечения устойчивости сооружений, как в строительной, так и в горной практике требуются сложные инженерные мероприятия.

Породы рыхлые несвязные и мягкие связные по сравнению с предыдущими характеризуются значительно меньшей прочностью и устойчивостью и большей деформируемостью, сильной водопроницаемостью.

Для понимания природы свойств крупнообломочных, песчаных и особенно глинистых пород важно учитывать не только их геолого-петрографические особенности, но и свойства, обусловленные дисперсностью, так как эти породы – многофазные системы, состоящие из минеральных частиц, воды и воздуха или других газов.

При изучении и оценке прочности, устойчивости, деформируемости и водопроницаемости горных пород важно учитывать их анизотропию, обусловленную поверхностями и зонами ослабления, уменьшением напряжений при разгрузке, сопровождающейся образованием зон разгрузки, трещин упругого отпора. Поэтому перечисленные свойства горных пород важно охарактеризовать не только средними показателями, но и дирекционными, определяемыми по характерным направлениям. Эти показатели могут использоваться в качестве расчетных.

Повышенное содержание тонкодисперсных частиц в породах определяют в значительной степени их глинистые свойства и принципиальные отличия по свойствам глинистых пород от песчаных и других обломочных.

Образец, применяемый при испытании, имеет более однородную структуру, меньшее количество дефектов, поэтому прочность образца выше, чем прочность породы, в этом случае необходимо учитывать масштабный фактор. Но при испытании образца нужно учитывать расположение слоев, наличие внешних дефектов, поверхностей ослабления, иногда при испытании получаем заниженную прочность.

Если порода будет служить естественным основанием для какого-либо сооружения или средой для него, ее свойства должны изучаться при естественном сложении и влажности (на монолитах). Если она будет использоваться как

строительный материал для отсыпки насыпей, дамб, земляных плотин, ее свойства нужно изучать на образцах нарушенного сложения, при влажности близкой естественной.

При решении различных инженерно-геологических задач, связанных с проектированием и строительством сооружений необходимо иметь следующие характеристики: вещественный состав, особенности строения, физические свойства, водные свойства, механические свойства, показатели специального назначения.

К механическим свойствам горных пород относятся прочность при сжатии и растяжении, сопротивление скалыванию и сдвигу, общая деформируемость, сжимаемость и просадочность, ползучесть и длительная прочность. Прочность горных пород обычно характеризуется пределами прочности на сжатие $\sigma_{сж}$, сдвиг, изгиб $\sigma_{из}$ и растяжении $\sigma_{р}$.

Горные породы в условиях одноосного сжатия, изгиба и растяжения обычно обладают высокой прочностью на сжатие и незначительной прочностью на растяжение, изгиб, сдвиг.

При этом, как правило, во всех твердых породах $\sigma_{сж} > \sigma_{из} > \sigma_{р}$.

Например, для гранита предел прочности при растяжении составляет 0,02…0,04 предела прочности на сжатие, на сдвиг – 0,08, на изгиб – 0,09. Слоистые горные породы дают различные значения прочности при сжатии и растяжении их параллельно и перпендикулярно слоистости и, как правило, сжатие перпендикулярно слоистости дает более высокие показатели прочности, а при растяжении – наоборот.

Испытания горных пород в условиях всестороннего равномерного сжатия показали, что при достаточно однородном и сплошном строении породы разрушение ее не происходит даже при очень больших давлениях.

Хрупкость – свойство горной породы сравнительно легко разрушаться при статической нагрузке без заметной остаточной деформации.

Почти все горные породы при существующих способах разрушения и скоростях приложения нагрузки разрушаются хрупко. Для этих пород предел текучести равен пределу прочности.

Для скальных пород характерны упругие свойства, а полускальные являются только частично упругими.

В рыхлых обломочных несвязных и глинистых мягких связных породах упругие свойства имеют подчиненное значение.

Для изучения полускальных пород кроме показателей упругих свойств большое значение имеют показатели, характеризующие их способность сопротивляться общим деформациям: обратимым (упругим) и необратимым (остаточным).

Различные группы горных пород имеют неодинаковый характер разрушения, поэтому для оценки их прочности применяют различные виды испытаний. Для скальных, полускальных и связных глинистых пород основными показателями прочности являются временное сопротивление сжатию (предел прочности при сжатии) породах $\sigma_{âñ}$, временное сопротивление растяжению (предел прочности при растяжении) $\sigma_{âð}$, сопротивление скалыванию. Для мягких связ-

ных и рыхлых несвязных пород – показатели сопротивления сдвигу: угол внутреннего трения, общее сцепление и в некоторых случаях коэффициент сдвига.

4.4.2. Определение предела прочности при одноосном сжатии

Определение предела прочности при одноосном сжатии на пробах, отделенных от массива проводится следующими методами:

– одноосное сжатие образца правильной формы плоскими плитами (породы с пределом прочности при одноосном сжатии не менее 5 МПа);

– разрушение образцов – плиток плоскими соосными пуансонами (породы с пределом прочности при одноосном сжатии от 10 до 150 МПа).

Метод одноосного сжатия образцов правильной формы плоскими плитами предназначен для оценки прочности при исследованиях и сравнительной оценки прочности.

Сущность метода заключается в измерении максимальной разрушающей силы, приложенной к торцам образца правильной формы через стальные плоские плиты. При испытании образцов на сжатие используются обычные испытательные машины универсального типа или прессы. Максимальные усилия, которые они могут создать, должны на 20-30% превышать предельную нагрузку на образец.

Для испытания на сжатие изготавливают образцы цилиндрические или призматические с квадратным поперечным сечением. При испытании образцы должны помещаться между плоскими плитами толщиною не менее 0,3 диаметра или стороны квадрата образца и диаметром, превышающем размеры образца с твердостью поверхности HRC 55-60. Эти плиты применяют в качестве прокладок между образцами и опорными плитами испытательной машины, в случае, если машина оснащена верхней подвесной сферической плитой.

Образцы сложной текстуры должны быть двух комплектов: для испытания при действии нагрузки вдоль слоев и перпендикулярно им. Размеры образцов должны соответствовать значениям, указанным в таблице 4.4.

Таблица 4.1.

Размеры образцов

Параметр образца	Размеры, мм, при		
	исследовательских испытаниях		сравнительных испытаниях
	предпочтительные	допустимые	
Диаметр d (сторона квадрата)	42 ± 2	30…60	42 ± 2
$m=h/d$(l)	1,0…2,0	0,7…1,0	2 ± 0,05

Измерение размеров образца производится штангенциркулем в трех местах по высоте и в двух взаимно перпендикулярных направлениях. За расчетный диаметр принимается среднеарифметическая величина. Высоту определяют по центру образца. Мощность изготовления образцов контролируется инди-

каторами часового типа и поверочным угольником. Количество образцов при исследовательских испытаниях должно быть не менее 6, при сравнительных испытаниях не менее 10 штук.

Образец помещают либо между стальными плитами, либо в установочном устройстве (рис. 4.27), совмещают ось образца с центром нижней опорной плиты испытательной машины и нагружают до разрушения с равномерной скоростью 1…5 МПа/с.

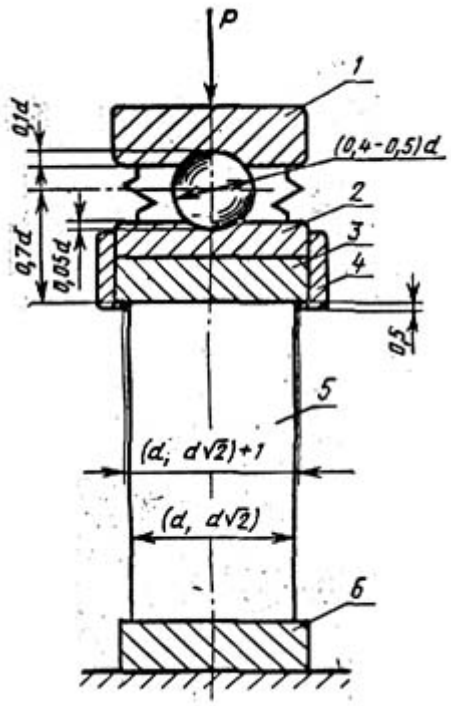


Рис. 4.27. Схема приспособления для испытания на сжатие: 1 – накладная пята; 2 – подкладная пята; 3 – верхняя плита; 4 – обойма; 5 – образец; 6 – нижняя плита

Определяют величину разрушающей силы Р, зафиксированную силоизмерителем машины. При необходимости определяют влажность пробы. Предел прочности при сжатии определяют по формуле в Па

$$\sigma_{сж} = \frac{P}{S} \cdot К_в , \qquad (4.44)$$

где Р – сила, разрушающая образец, Н; S – площадь поперечного сечения, м^2; $К_в$ – коэффициент, учитывающий отклонение высоты образца от стандартного значения равного 2d.

Коэффициент $К_в$ определяется по таблице 4.2 в зависимости от отношения $\mathbf{m = h/d}$.

Таблица 4.2

Величина коэффициента $К_в$

m	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$К_в$	0,68	0,72	0,76	0,8	0,86	0,9	0,94	0,97	1

Метод разрушения образцов – плиток соосными пуансонами предназначен для исследовательских испытаний и заключается в измерении максимальной разрушающей силы, приложенной к торцам образца через стальные плоские соосно направленные пуансоны.

Образцы выполняются в виде дисков диаметром – от 30 до 100 мм, высотой – от 10 до 12 мм.

Допускается применять образцы – плитки неправильного очертания при условии, что контуры их торцов и боковых поверхностей позволяют вписать диск необходимого размера. Торцевые поверхности образцов должны быть плоскими и параллельными друг другу. Количество образцов должно быть не менее 6.

Значение площади $S_у$ выбирается из таблицы 4.3.

Таблица 4.3

Значение площади образца

Диаметр образца (диска), мм	30	40	50	60	70	80	90	100
$S_у$, $см^2$	1,52	1,79	2,03	2,26	2,50	2,72	2,94	3,16

Перед испытанием производится измерение образца с помощью штангенциркуля.

Для проведения испытания применяют устройство нагрузочное БУ-11 (рис. 4.28), которое устанавливается на опорную плиту испытательной машины. Образец помещают между пуансонами нагрузочного устройства, скорость нагружения образца (0,1…0,5) кН/с.

Предел прочности определяют по формуле

$$\sigma_{сж} = \frac{P}{S_у}, \qquad (4.49)$$

где P – разрушающая нагрузка, кН; $S_у$ – условная площадь поперечного сечения, $м^2$.

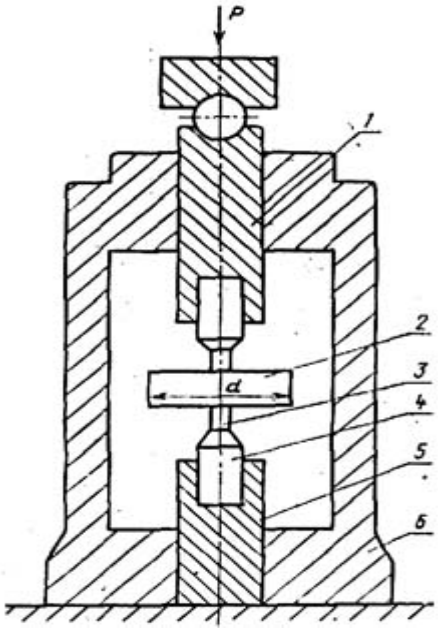


Рис. 4.28. Схема установки для испытания образцов с помощью соосных пуансонов: 1 – верхний шток; 2 – образец; 3 – пуансон; 4 – вкладыш; 5 – нижний шток; 6 – корпус

4.4.3. Метод определения предела прочности при одноосном растяжении

Определение предела прочности при растяжении осуществляется косвенным методом. Сущность метода заключается в определении максимальной разрушающей силы, приложенной перпендикулярно к оси образца породы цилиндрической формы, в результате чего в образце возникают растягивающие напряжения, приводящие к его разрушению в плоскости предельного сечения.

Образец цилиндрической формы, диаметром 40…50 мм устанавливают так, что ось его параллельна плоскостям пресса (рис. 4.29) и прикладывают силу P. После разрушения образца измеряют размеры поверхности разрушения в двух направлениях: вдоль образующей h и диаметра d.

Предел прочности при растяжении определяется по формуле

$$\sigma_p = 0{,}64 \cdot \frac{P_{max}}{hd}, \qquad (4.45)$$

где d – диаметр образца, м; h – высота образца, м; P_{max} – разрушающая сила, Н.

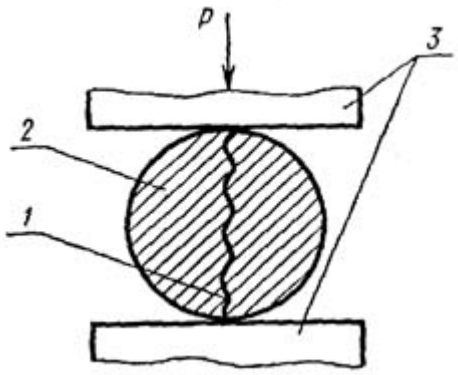


Рис. 4.29. Испытание на растяжение: 1 – образец; 2 – плиты пресса; 3 – проекция плоскости разрушения

Результаты испытания применяются при построении паспорта прочности.

4.4.4. Метод определения предела прочности при сдвиге

Сущность метода заключается в определении максимального разрушающего касательного напряжения при действии на образец пород сдвигающих и нормальных сжимающих нагрузок в матрицах испытательного устройства.

Заготовки для образцов получают выбуриванием из проб керна диаметром 44 мм или обтачиванием на токарном станке до нужного диаметра. Образцы должны быть с явно выраженной слоистостью или упорядоченной трещиноватостью. Высота образца равна диаметру. Торцевые и боковые поверхности тщательно шлифуются специальным порошком.

Образец 1 помещается в специальное устройство, состоящее из трех пар сменных матриц 2 с углом наклона $\alpha = 30^0$; 45 и 60^0, пара бронзовых разрезных цилиндрических обойм – вкладышей 3 с внутренним диаметром 44 мм, две плиты 4 и ролики 5 (рис. 4.30).

Боковую поверхность образца оборачивают медной фольгой, устанавливают образец во вкладыши, устанавливают верхнюю матрицу, затем роликовую опору, располагая оси роликов параллельно срезающей кромке матриц. Устанавливают устройство между плитами пресса и нагружают силой до разрушения образца.

Нормальное давление на плоскость сдвига

$$\sigma_i = \frac{P_{max} \sin \alpha}{hd}, \qquad (4.46)$$

где P_{max} – вертикальная разрушающая нагрузка, Н; α – угол между плоскостью сдвига и направлением действия силы; d – диаметр образца, м; h – высота образца, м.

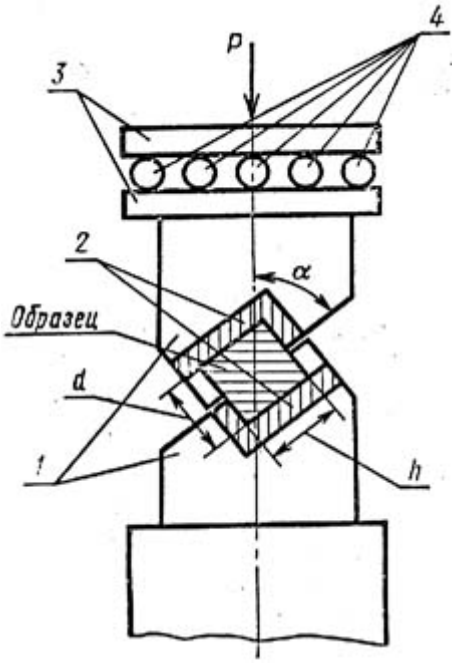


Рис. 4.30. Приспособление для испытания на сдвиг

Предел прочности при сдвиге, соответствующий определенному нормальному давлению

$$\tau_i = \frac{P_{max} \cos \alpha}{hd} \qquad (4.47)$$

По результатам строят предельную кривую прочности горных пород при сдвиге в зависимости от нормального давления, действующего на плоскость сдвига, в координатах σ и τ (рис. 4.31). По оси абсцисс откладывают для каждого из углов наклона матриц α значения нормальных давлений, а по оси ординат соответствующие им значения пределов прочности породы при сдвиге. Кривая представлена на рисунке, где τ_o – предел прочности при чистом сдвиге.

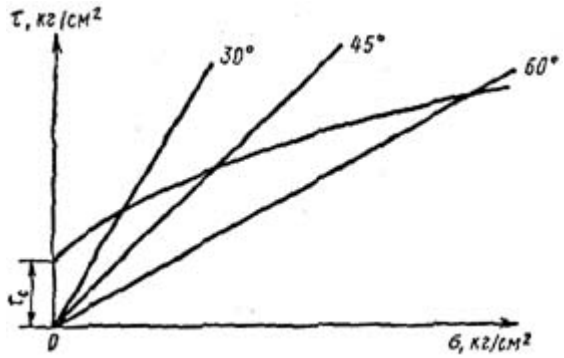


Рис. 4.31. Предельная кривая прочности горных пород при сдвиге

4.4.5 Метод определения предела прочности при изгибе

Образцы получают из проб керна, диаметром 90…100 мм. От полученных заготовок отрезают с помощью камнерезной машины диски толщиною 10 ± 1 мм.

Образец 1 устанавливают на опорное кольцо 2, а сверху ставят на него кольцевой пуансон 3 (рис. 4.32), прикладывают силу и определяют разрушающую нагрузку.

Предел прочности при изгибе определяют по формуле

$$\sigma_{и} = 75 \cdot \frac{P_{max}}{h}, \text{ Па}, \qquad (4.48)$$

где P_{max} – максимальная разрушающая сила, Н; h – толщина образца, м.

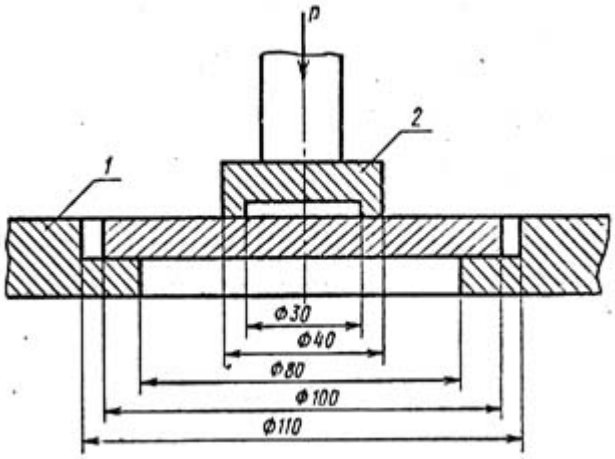


Рис. 4.32. Схема установки для испытания на изгиб

4.4.6. Метод определения предела прочности при объемном сжатии

Сущность метода заключается в измерении разрушающей сжимающей силы, приложенной к торцам образца через стальные плоские плиты при боковом сжатии гидростатическим давлением.

Для испытания изготавливают цилиндрические или призматические образцы квадратного поперечного сечения.

В камеру объемного сжатия (рис. 4.33) устанавливают образец 10, который изолируют от рабочей жидкости. Герметизируют рабочую полость камеры, подают в камеру рабочую жидкость и доводят давление ее до значения, заданного условиями решаемой задачи. При заданном давлении в камере образец нагружают осевой сжимающей силой и доводят его до разрушения.

Предел прочности образца при объемном сжатии определяют по формуле

$$\sigma^{o}_{сж} = \frac{P}{S}, \qquad (4.49)$$

где P – разрушающая осевая сила, Н; S – площадь поперечного сечения образца, м^2.

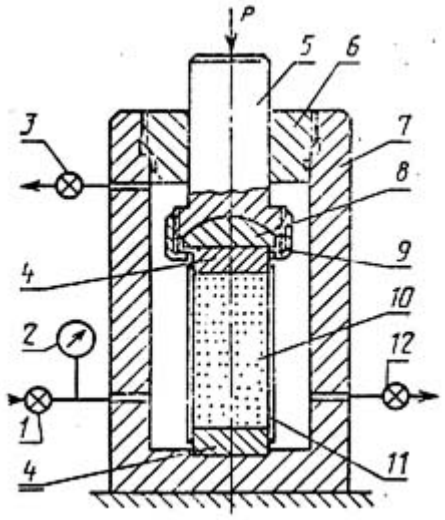


Рис. 4.33. Установка для испытания образца горной породы при объемном сжатии: 1 – впускной вентиль; 2 – манометр; 3 – вентиль выпуска воздуха; 4 – стальные плиты; 5 – шток; 6 – крышка; 7 – корпус; 8 – сферическая пята; 9 – накидная гайка; 10 – образец; 11 – изоляция; 12 – выпускной вентиль

4.4.7. Метод комплексного определения пределов прочности при многократном раскалывании и сжатии

Метод комплексного определения пределов прочности горных пород при растяжении и сжатии, применяется при массовом определении прочностных свойств горных пород.

Сущность метода заключается в определении максимальной разрушающей силы при многократном раскалывании образцов породы пластинчатой или брусчатой формы и сжатии полученных при раскалывании образцов кубообразной формы.

При испытании применяется раскалывающее устройство в виде стальных клиньев с длиной лезвия, превышающей наибольший линейный размер образца (рис. 4.34). Угол заточки клиньев 90^0.

Образцы для испытания раскалыванием изготавливают на камнерезной машине, отрезая от проб диски или пластины толщиною 20 мм. Диаметр дисков должен быть не менее 75 мм, а размер пластин – не менее 100х100 мм.

Для испытания на сжатие используются образцы кубической формы, полученные в процессе раскалывания, с линейными размерами 20х20х20 мм.

Перед испытанием на одну из плоскостей образца наносят карандашом квадратную сетку со стороной квадрата 20 мм. Образец устанавливают между клиньями, которые совмещают с одной из линий сетки.

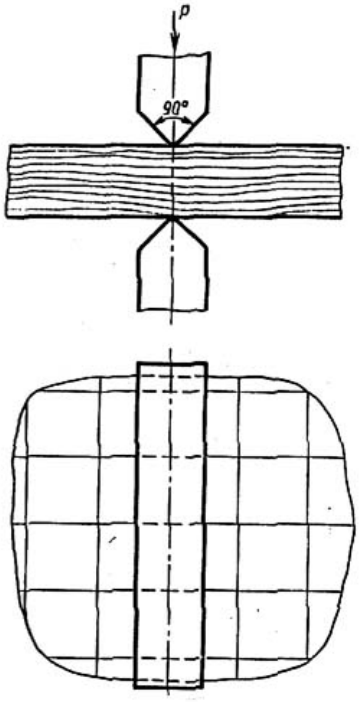


Рис. 4.34. К определению предела прочности при раскалывании

Сначала образец раскалывают на бруски, затем по поперечным линиям на кубики. При каждом раскалывании образца фиксируют разрушающую нагрузку и измеряют штангенциркулем длину линии раскола.

После раскалывания образца, кусочки кубической формы, предварительно измерив их, помещают между плитами пресса, определяют разрушающую нагрузку.

Предел прочности образца при раскалывании $\sigma_р$ определяют по формуле

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{P_{max}}}{\mathbf{2\ell \cdot h}}, \qquad (4.50)$$

где P_{max} – максимальная разрушающая нагрузка, Н; ℓ – длина линии раскола, м; h – толщина образца, м.

Предел прочности образца горной породы при сжатии

$$\sigma_{\mathbf{сж}} = \frac{\mathbf{P_{max}}}{\mathbf{S}},$$

где P_{max} – максимальная разрушающая нагрузка, Н; S – средняя площадь поперечного сечения образца породы, равная полусумме площадей параллельных поверхностей образца до его разрушения, $м^2$.

4.4.8. Методы определения механических свойств сжатием образцов встречными сферическими инденторами

Для испытания используют образцы правильной формы, вырезанные из штуфов и кернов. Образцы неправильной формы получают из обнажений и горных выработок путем дальнейшего откалывания, отпиливания. Образцы должны быть с размерами до 100х100х80 мм. Количество образцов правильной формы не менее 6, неправильной формы не менее 10 штук.

Для проведения испытания применяют различные станки и инструменты, обеспечивающие изготовление образцов, а также измерительные устройства: штангенциркуль, индикаторы часового типа, пресс, устройство нагрузочное.

Образец устанавливают (рис. 4.35) между сферическими инденторами так, чтобы обеспечить нагружение в требуемом направлении, что достигается соответствующей ориентацией оси нагружения. Наиболее рациональные схемы испытаний образцов некоторых типичных форм с соответствующей изотропной породам ориентацией и очертанием вероятных поверхностей разрыва представлены на рис. 4.36.

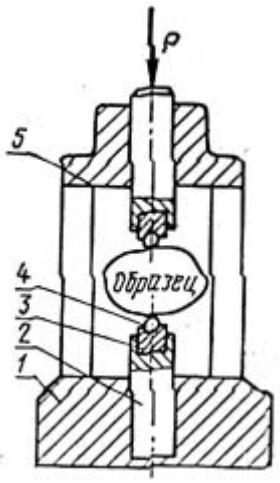


Рис. 4.35. Установка образцов при испытании на прочность: 1 – корпус; 2 – нижний шток; 3 – вкладыш; 4 – индентор; 5 – верхний шток

Образец нагружают до разрушения в виде сквозного раскола и определяют разрушающую силу, площадь фактической поверхности разрыва.

При разрушении образца на две части определяют площадь поперечного сечения S_p, а при разрыве образца на большее число частей площадь поверхности разрыва определяют по формуле

$$\mathbf{S_p = 2 \cdot \frac{S_{01} + S_{02} + ... + S_{04}}{n}}, \qquad (4.51)$$

где S_{01}, S_{02}, …, S_{04} – площади полуповерхностей разрыва по каждому из направлений разрыва, $м^2$; n – число частей разрыва.

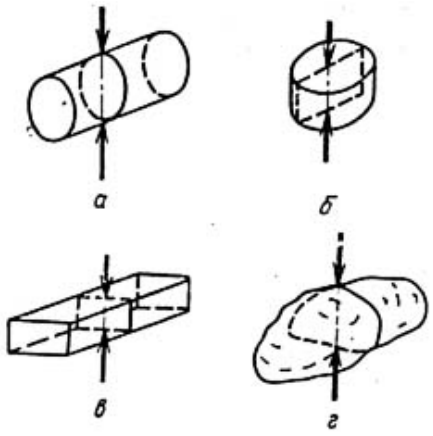


Рис. 4.36. Характер разрушения образцов

Предел прочности горной породы при одноосном растяжении определяют по формуле

$$\sigma_р = 0{,}75 \cdot \frac{F_р}{S_р} \cdot К_м, \qquad (4.52)$$

где $К_м$ – безразмерный масштабный коэффициент, принимаемый равным 1 при площади сечения $S_р = 15 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Для других значений площади этот коэффициент принимается из табл.4.4.

Таблица 4.4.

Значение коэффициента $К_м$

$S_р$, м$^2 \cdot 10^{-4}$	3	4	5	8	10	15	20	30	40	50	80	100
$К_м$	0,67	0,72	0,76	0,85	0,90	1,00	1,08	1,19	1,28	1,35	1,52	1,61

4.4.9. Нестандартные методы определения прочностных параметров скальных пород

Определение механических характеристик углей и горных пород на образцах правильной формы связано с большими трудностями при их изготовлении. Кроме того, механическая обработка стандартного образца при его изготовлении может вносить искажения, вызванные изменением поверхностных свойств образца.

В связи с этим получили распространение методы определения механических характеристик горных пород и углей на образцах неправильной формы. К этим методам относятся испытания образцов на сдвиг, разрыв и сжатие.

Методика испытания образцов неправильной формы на сдвиг со сжатием и разрыв заключается в следующем. Испытуемые куски породы или угля, ориентированные нужным образом (по простиранию, по падению или по напластованию), укрепляют в бетонных блоках размером 200х200х200 мм (рис. 4.37, а), зазор Δ между ними во время заливки сохраняют с помощью картонных прокладок

Минимальное значение зазора Δ определяется размерами структурного элемента. Если зазор Δ значительно меньше величины элемента, сказывается влияние масштабного фактора, так как разрушение происходит по элементам.

После снятия картонных прокладок образцы подвергают соответствующему напряжению – на сдвиг со сжатием или разрыв (рисунок 4.37, б, в).
Во время испытаний фиксируют усилие, при котором произошло разрушение (сдвиг или разрыв) $P_р$, а затем с помощью планиметрирования определяется площадь поверхности разрушения S.

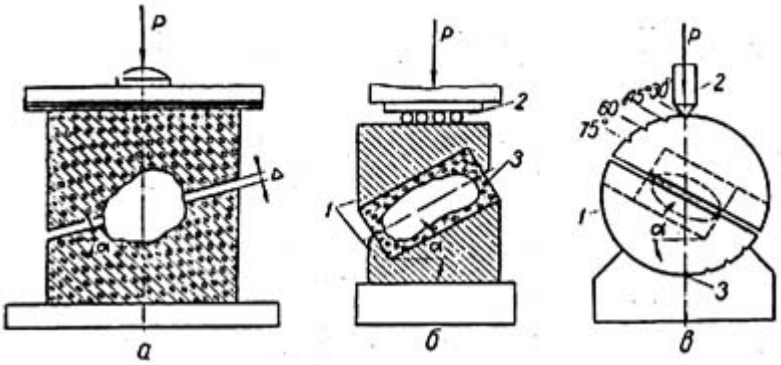


Рис. 4.37. Определение механических характеристик горных пород на образцах неправильной формы: а – схема испытаний по ВУГИ; б – схема прибора Фисенко: 1 – матрицы; 2 – ролики; 3 – образец; в – схема прибора Ильницкой: 1 – матрицы; 2 – стержень; 3 – вкладыш

Нормальные предельные напряжения в плоскости разрушения

$$\sigma_{пр} = \frac{P_р \cos\alpha}{S_{ус}}, \qquad (4.53)$$

предельные касательные напряжения в плоскости разрушения

$$\tau_{пр} = \frac{P_р \sin\alpha}{S_{ус}}, \qquad (4.54)$$

где $P_р$ – разрушающее усилие, Н; $S_{ус}$ – проекция площади поверхности разрушения на плоскость разъема цементных блоков, м^2; α – угол наклона плоскости разъема.

При испытаниях на сдвиг (рис. 4.37) угол плоскости разъема блоков α может изменяться в широких пределах, что обеспечивает возможность проведения испытания при различных соотношениях нормальных и касательных напряжений, возникающих в полости разрушения.

При испытании образцов на разрыв угол наклона плоскости разъема блоков α принимается равным нулю, разрушение происходит в вертикальной плоскости и нарушения разрыва определяются по формуле

$$\sigma_{раз} = \frac{P_p}{S}, \qquad (4.55)$$

где S – площадь поверхности разрыва, замеренная планиметрированием.

Проведенные ВУГИ опыты по определению механических характеристик угля методом испытания необработанных образцов на разрыв и сдвиг показали хорошее совпадение полученных результатов с данными испытаний образцов правильной формы.

Для определения прочностных показателей горных пород $\sigma_{пр}$ и $\tau_{пр}$ при испытании образцов неправильной формы на сдвиг со сжатием могут быть использованы приборы (рис. 4.37, б, в), предложенные Г.Л. Фисенко и Е.И. Ильницкой для определения аналогичных показателей на образцах правильной формы.

В приборе (рис. 4.37, б) угол сдвига α определяется углом матрицы, а в приборе (рис. 4.37, в) – перестановкой вкладыша 3 и упорного стержня 2. При испытаниях на этих приборах изготавливается нужных (стандартных) размеров формочка из двух половин. Любая половина формочки заливается раствором цемента высокой марки, и в нее вкладывается образец породы произвольной формы, так, чтобы заданная ориентированная плоскость сдвига совпала с поверхностью цементного раствора в полуформе. После того как цемент схватился, на его поверхность накладывают слой тонкой бумаги с вырезом для пропуска выступающей части образца.

Затем вторая полуформа заливается также цементом и накладывается на первую, так чтобы края их совпадали, а выступающая часть образца погрузилась в цемент, заполняющий вторую полуформу. Изготовленные таким образом образцы 3 выдерживаются до тех пор, пока раствор приобретает установленную для него прочность, и затем подвергаются испытанию на сдвиг со сжатием обычным способом. Показатели $\sigma_{пр}$ и $\tau_{пр}$ определяются по вышеприведенным формулам; площадь сдвига определяется планиметрированием.

Методика определения временного сопротивления сжатию (раздавливанию) на образцах неправильной формы (рис. 4.38) аналогична методике определения временного сопротивления раздавливанию на образцах правильной формы.

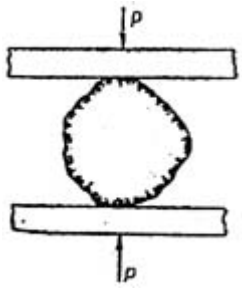


Рис. 4.38. Определение временного сопротивления раздавливанию горных пород на образцах неправильной формы

Для этих испытаний берут (15…20) образцов неправильной округлой формы так, чтобы 3 взаимно перпендикулярные размеры не отличались более, чем в 1,5 раза. Рекомендуемый объем образца – 100±2 см^2.

Предел прочности при одноосном сжатии вычисляют по формуле

$$\sigma_{сж} = 52{,}6 \frac{P_{ср}}{\sqrt[3]{V_{ср}^2}}, \text{ МПа}, \qquad (4.56)$$

где $P_{ср}$ – среднеарифметическое усилие раздавливания образцов, кН;
$V_{ср}$ – среднеарифметический объем образцов, см^3

4.4.10. Метод удара ручным и пружинным шариковими молотками

Определение прочности методом удара шариковым молотком ручного или автоматического действия основано на известном принципе погружения стального шарика в испытуемый материал под действием статической или ударной нагрузки (метод Бринелля – испытание на твердость).

Шариковый молоток ручного действия (рис. 4.39) имеет небольшой вес (250 граммов) и удобную для испытания форму. В ударной части молотка в сферическом гнезде завальцован вращающийся стальной шарик. Диаметр шарика равен 17,463 мм. Молоток изготовляется из стали У-7 и У-8. Твердость заостренной части молотка по Роквелу (49…56) (шкала С). Шарик калится до твердости (62…66) RC. Ручка изготавливается из дерева твердой породы.

При ударе шариковым молотком на поверхности испытуемого материала образуется сферическая лунка, диаметр которой изменяется в зависимости от прочности материала. Наносится (6…10) ударов по защищенной поверхности.

Диаметр лунки измеряется с помощью штангенциркуля, с использованием лупы со шкалой.

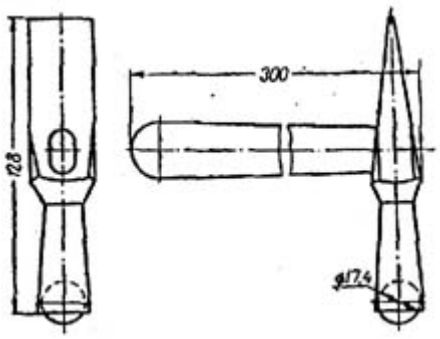


Рис. 4.39. Ручной шариковый молоток

Прочность материала оценивается по среднему диаметру лунок. На основании кривой, полученной опытным путем и устанавливающей зависимость между прочностью материала на сжатие $\sigma_{сж}$, полученные при испытании стандартных образцов на сжатие и диаметром лунок (рис. 4.40).

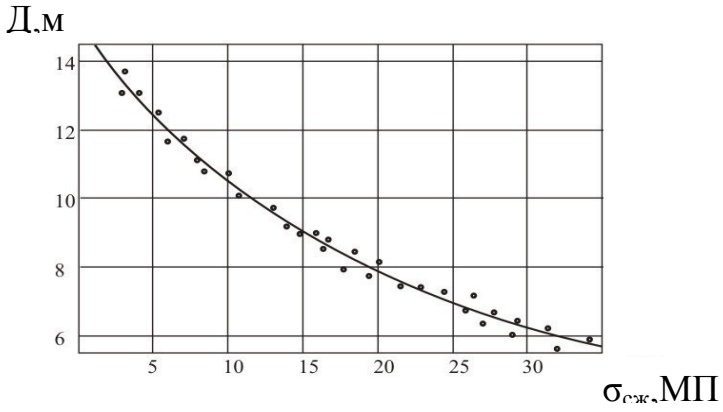


Рис. 4.40. Кривая зависимости между прочностью бетона на сжатие и диаметром лунок при оценке прочности бетона шариковым молотком

Определение прочности материала пружинным молотком (рис. 4.41) производится по аналогичному методу.

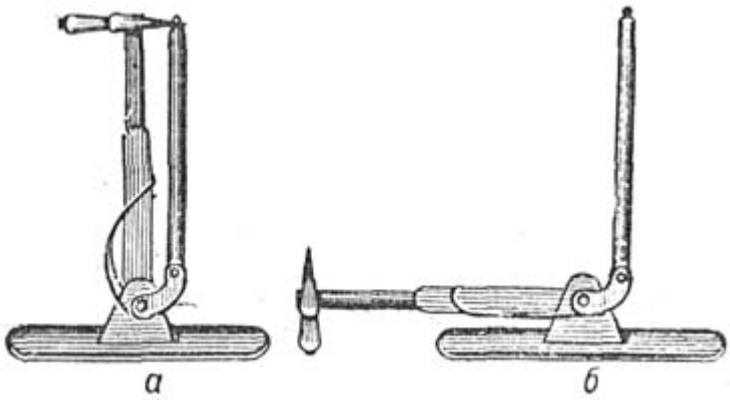


Рис. 4.41. Шариковый пружинный молоток: а – положение молотка до удара; б – положение молотка после удара

Разница состоит в том, что в данном случае ручной удар заменяется механическим, т.е. с помощью пружины.

Этот метод, в основном, может быть применен для определения прочности горных пород на открытых горных разработках, а также для определения прочности бетонных изделий на строительных площадках.

4.4.11. Метод вдавливания стального шарика с помощью пружинного пистолета

Этот метод аналогичен предыдущим, только вдавливается стальной шарик с помощью пружинного пистолета (рис. 4.42).

По опытной кривой (рис. 4.43) определяется предел прочности при сжатии $\sigma_{сж}$.

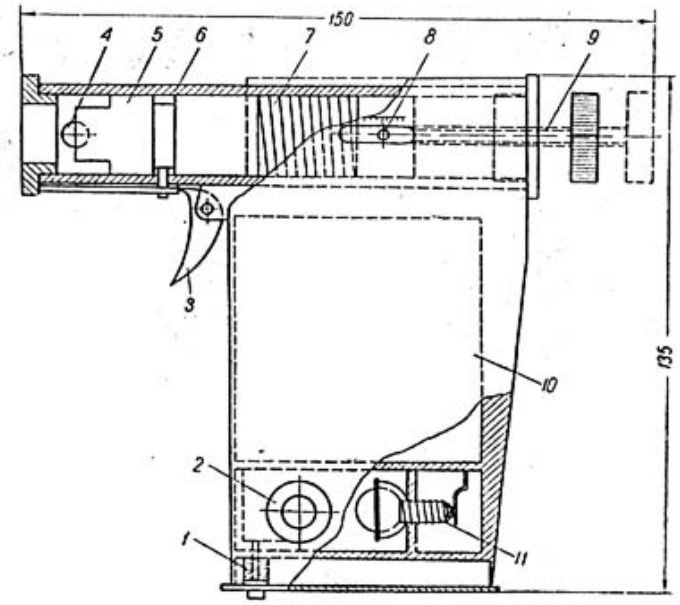


Рис. 4.42. Прибор Вильямса для испытания прочности бетона: 1 – выключатель; 2 – микрошкала; 3 – спусковой крючок; 4 – стальной шарик; 5 – боек; 6 – ствол; 7 – пружина; 8 – указатель; 9 – винт; 10 – батарея; 11 – электрическая лампочка

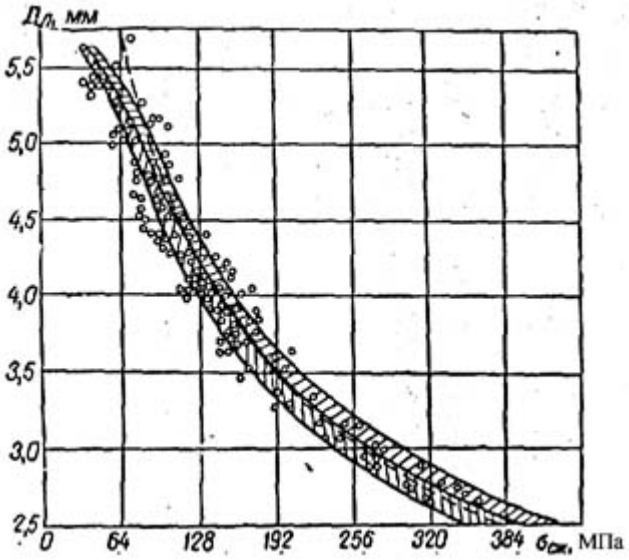


Рис. 4.43. Кривая зависимости между прочностью бетона на сжатие и диаметром лунок при оценке прочности с помощью пружинного пистолета

Эти приборы с использованием вдавливания шарика простые, легкие и применяются для предварительной оценки прочности пород.

4.5. Определение прочностных параметров рыхлых и разрыхленных пород

При строительстве зданий, сооружений необходимо знать прочностные характеристики глинистых и песчаных пород.

Для мягких глинистых пород определяют предел прочности при сжатии, растяжении и сдвиге.

4.5.1.Метод определения механических свойств глинистых пород при одноосном сжатии

Для определения механических свойств глинистых пород при инженерно-геологических работах применяется испытание при одноосном сжатии. При испытании определяются предел прочности пород, модуль упругой и общей деформации, тип деформационного поведения и построение диаграммы сжатия.

Испытания проводят с помощью прибора одноосного сжатия ИГП-10 или П-12М или пресса.

Образцы цилиндрической формы выбирают из монолита или керна режущим кольцом с помощью винтового пресса. Образец должен иметь однородную структуру.

Образец помещают между плитами пресса и нагружают сжимающей силой. При испытании по сокращенной программе определяют величину разгружающей силы, при испытании по полной программе для определения модуля упругости образец нагружают до напряжения σ_E, равного примерно половине

разрушающего напряжения, с последующей разгрузкой до 0, после чего образец нагружают до разрушения.

Предел прочности определяют по формулам:

$$\sigma_{сж} = \sigma_R = \frac{P_R}{S_0} \text{ (при } \varepsilon_R \leq 0{,}1\text{)};$$

$$\sigma_{сж} = \sigma_R = \frac{P_R}{S} \text{ (при } \varepsilon_R > 0{,}1\text{)},$$

где P_R – сила, при которой происходит разрушение, Н; S_0 – первоначальная площадь поперечного сечения, м^2; S – площадь поперечного сечения при испытании, м^2; ε_R – продольная деформация в момент разрушения.

Образцы до и после испытания представлены на рис.4.44.

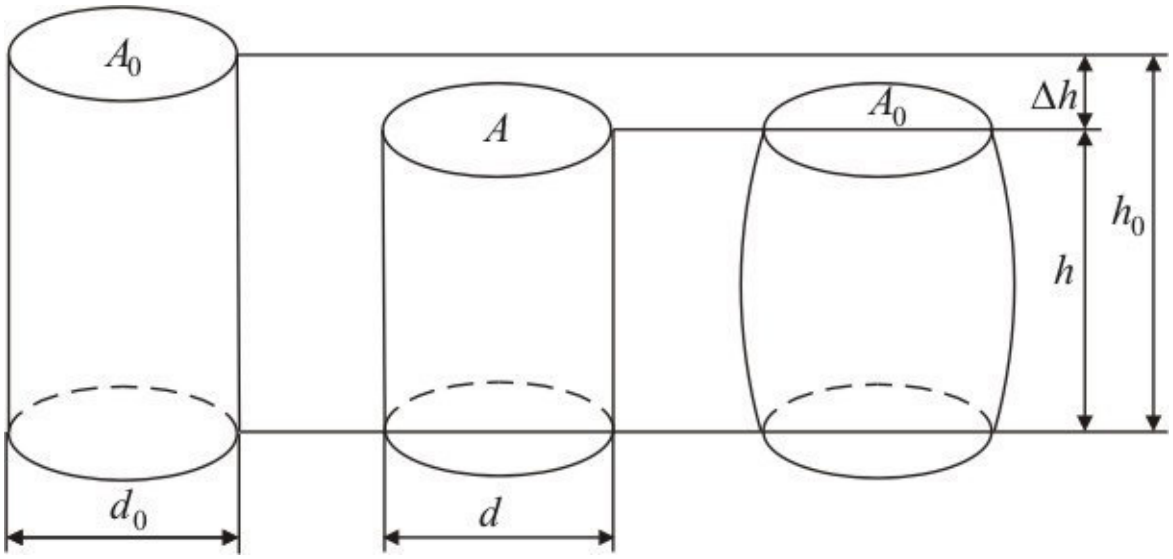


Рис. 4.44. Образцы до испытания и после испытания

Площадь образца S определяют при измерении диаметра штангенциркулем, либо по продольной деформации ε в предположении о несжимаемости породы по формулам:
в случае сохранения цилиндрической формы образца

$$\frac{S}{S_o} = \frac{1}{1 - \varepsilon};$$

в случае, когда образец после испытания приобретает бочкообразную форму

$$\frac{S}{S_o} = \frac{1}{4} \cdot (3\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}} - 1)^2$$

Модуль упругой деформации Е в МПа определяют по формуле

$$E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon^{II} - \varepsilon^{I}},$$

где $\sigma_{Å}$ – напряжение, с которого начинается разгрузка образца, МПа; $\varepsilon^{II}, \varepsilon^{I}$ – продольная деформация в начале и конце разгрузки (рис. 4.45).

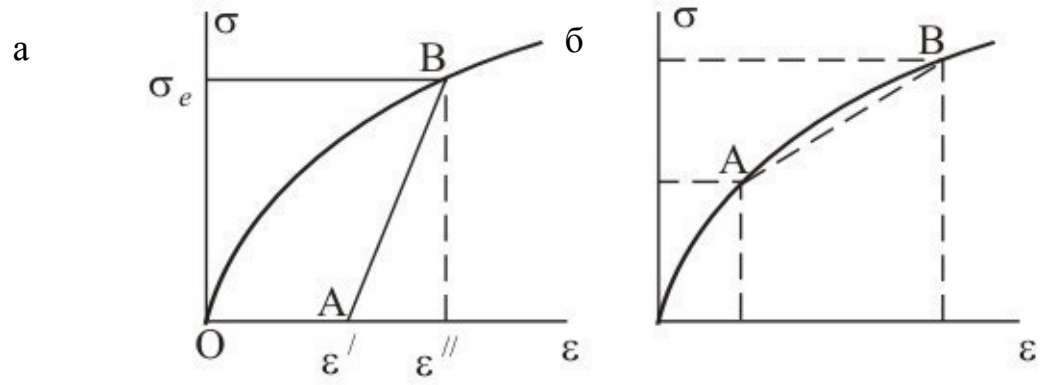


Рис. 4.45. Определение модуля упругости (а)
и модуля общей деформации (б)

Модуль общей деформации E_o определяют по формуле

$$E_o = \frac{\sigma_к - \sigma_н}{\varepsilon_к - \varepsilon_н}, \qquad (4.57)$$

где $\sigma_к$ и $\sigma_н$ – напряжения в конце и в начале выбранного участка кривой; $\varepsilon_к, \varepsilon_н$ – продольные деформации в конце и в начале того же участка кривой.

Образец может по разному деформироваться и тип деформирования устанавливают по виду диаграммы сжатия: хрупкий (рис. 4.46, а), хрупко-пластический (рисунок 4.46, б), пластический (рисунок 4.46, в).

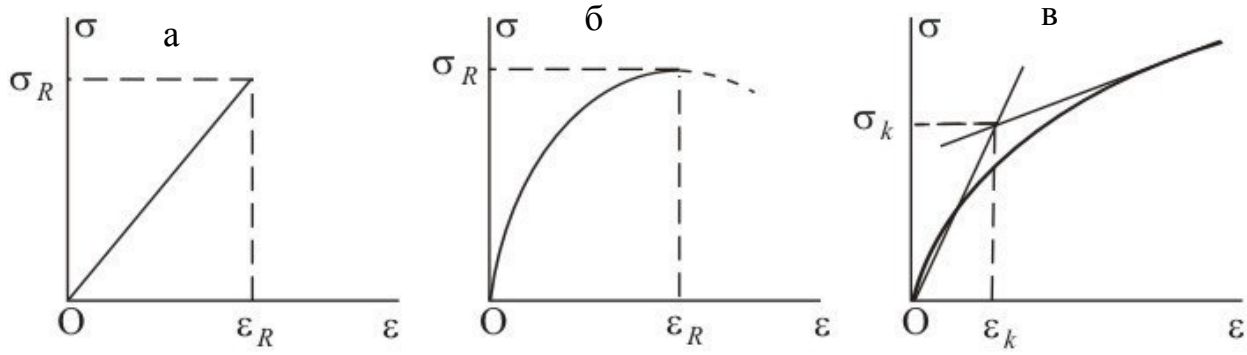


Рис. 4.46. Типы деформационного поведения глинистых пород при одноосном сжатии

При исследовании свойств глинистых пород проводят и другие виды испытания при одноосном сжатии. Определяют коэффициент структурной прочности, испытывая стандартные образцы и образцы с нарушенной структурой заданной влажности и прочности; проводится испытание по определению длительной прочности. За величину предела длительной прочности σ_∞ принимается такое напряжение, при котором в течение суток продольная деформация увеличится менее чем на 0,1%.

4.5.2. Испытание глинистых пород при растяжении

На результат испытания на растяжение кроме петрографических особенностей пород большое влияние оказывает форма образцов. Наиболее рациональная форма – в виде трапецеидальной восьмерки или усеченных конусов, сложенных вершинами. Изготовление таких образцов связано с большими трудностями. Часто используют образцы цилиндрической формы (керн) или призматической формы; иногда для мягких глинистых пород изготавливают фасонные образцы, но и для этих пород допустимо применение образцов цилиндрической и кубической форм.

Одним из простейших приборов для определения сопротивления глинистых пород разрыву является прибор Н.А. Цытовича (рис. 4.47). Испытание проводится для образцов, имеющих форму трапециевидной восьмерки. Образец должен иметь длину 76 мм, ширину 20 мм, высоту 25 мм. Длина разрывной части (25…30) мм, площадь сечения 5 см^2.

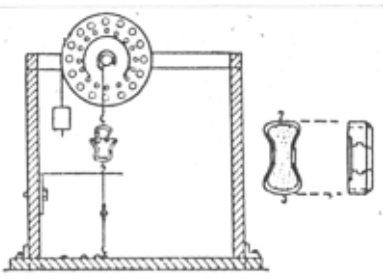


Рис. 4.47. Прибор Н.А. Цытовича для определения прочности глинистых пород на растяжение

Разрыв образца производится с помощью специального привода, имеющего двухступенчатый шкив с отношением диаметров шкивов 1:10. В качестве груза при испытаниях может быть использована вода или дробь.

Предел прочности при одноосном растяжении равен

$$\sigma_p = \frac{P_{max}}{S_o},$$

где P_{max} – разрушающая нагрузка, Н; S_o – первоначальная площадь поперечного сечения образца, м^2.

4.5.3. Метод испытания глинистых пород на сдвиг

В песчаных и других рыхлых обломочных породах внутренними силами сопротивления сдвигу (разрушению) являются силы трения, возникающие при сдвиге части породы при взаимном перемещении слагающих ее частиц. Трение возникает внутри породы и называется внутренним трением. В связных (глинистых) породах внутренними силами являются еще и силы сцепления, т.е. силы структурных связей. Силы сцепления служат количественным выражением прочности структурных связей, действующих в объеме породы по поверхностям скольжения или в пределах зон скольжения.

Максимальное сопротивление пород сдвигу проявляется при гидростатическом равновесии, т.е. когда их влажность и плотность будут соответствовать действующей уплотняющей нагрузке и уплотнение достигнет стабилизации. Следовательно, прочность пород при сдвиге существенно зависит от режима испытания. Схемы испытания применяются следующие.

1. Испытание пород по схеме быстрого сдвига без предварительного уплотнения, при уплотняющих нагрузках, не превышающих структурной прочности пород, природной нагрузки или веса сооружений. Сдвигающее усилие передается равномерно и непрерывно до разрушения породы. Результаты испытания достаточно четко характеризуют природную прочность.

2. Испытания пород по схеме медленного сдвига после предварительного полного уплотнения – в условиях завершенной консолидации. Сдвигающая нагрузка передается ступенями в возрастающем порядке до разрушения. Новая ступень нагрузки прикладывается после завершения деформаций от предыдущей. Результаты испытаний характеризуют прочность пород при гидростатическом состоянии. Эта схема называется стандартной, она рекомендуется стандартом.

4. Испытание пород в условиях свободного оттока воды в течение опыта, или, как говорят, открытой системы. В этом случае обеспечивается полная консолидация породы от каждой ступени нагрузки. Эта схема выполнима только при медленном сдвиге.

5. Испытания пород в условиях невозможности оттока воды, т.е. в условиях закрытой системы. В этом случае не вся внешняя нагрузка является эф-

фективной, так как часть ее воспринимается поровой водой. Эта схема выполнима при быстром сдвиге или при применении специальных приборов – стабилометров.

Выбор схемы испытаний пород на сдвиг определяется рядом конкретных условий. При исследованиях песков целесообразно применять главным образом срезные приборы, испытывать их при нагрузках, соответствующих природным или весу сооружений, без предварительного уплотнения, по схеме быстрого сдвига и, естественно, в условиях открытой системы. Испытания следует проводить на образцах естественного сложения либо при плотности, соответствующей естественным условиям залегания пород или определенно заданной.

Выбор схемы испытаний глинистых пород более труден. В этом случае надо учитывать их состав, особенно минеральный, физическое состояние, степень водонасыщенности, склонность к набуханию или к просадкам. Важно знать прочность структурных связей (эффективную нагрузку по компрессионным испытаниям), величину природной нагрузки, которую они испытывали, и предлагаемую нагрузку от сооружений.

Государственным стандартом при проектировании и строительстве всех видов зданий и сооружений рекомендуется схема 2, т.е. медленный сдвиг после плотного предварительного уплотнения. В этом случае целесообразно применять главным образом срезные пробы, испытания вести в условиях открытой системы под водой или при естественной влажности пород, при уплотняющих нагрузках, соизмеримых с величиной нагрузок, предполагаемых от веса сооружений, или природных. На стадиях предварительных исследований, когда важно иметь представление о природной прочности пород, целесообразно кроме схемы 2 использовать также схему 1. При проектировании сооружений на слабых глинистых водонасыщенных породах кроме основной схемы изучения сопротивления их сдвигу желательно такие породы исследовать в стабилометрах, в условиях закрытой системы при быстром и медленном темпе разрушения.

Таким образом, для определения прочности песчаных и глинистых пород по сопротивлению сдвигу одним из основных является метод испытаний в срезных приборах.

На рис. 4.48 показана схема прибора Гидропроекта. Рабочая коробка прибора 4 состоит из двух частей: нижней неподвижной 4а и верхней подвижной 4б.

Для опыта обе части коробки скреплены шпильками 9. Смонтирована коробка в специальной ванне 5, установленной на металлической станине 2. Внутренняя плотность рабочей коробки имеет форму цилиндра. В этот цилиндр загружают образец испытуемой породы диаметром 50 или 70 мм и высотой 15…20 мм. В основании цилиндра находится пористый камень или металлическая пластина 12 с большим количеством отверстий диаметром 0,5 мм. Нормальное уплотняющее давление на породу передается дырчатым штампом 10, имеющим с верхней стороны углубление для стального шарика, на который опирается серьга 14. На серьгу через специальный рычаг с отношением плеч 1:5 подвешивают подвеску с грузом 1.

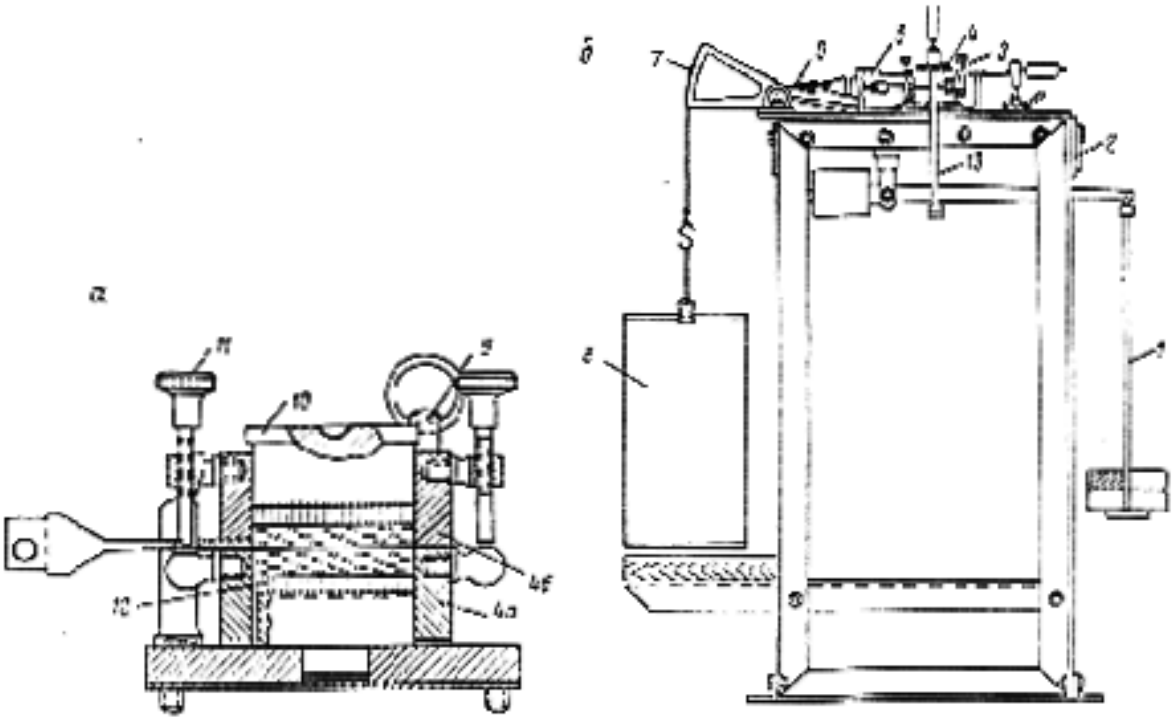


Рис. 4.48. Прибор Гидропроекта для испытания пород на сдвиг-срез:
а – рабочая коробка; б – общий вид прибора

Для сдвига в плоскости наименьшего сопротивления обе части коробки 4 с помощью подъемных винтов 11 раздвигаются и создается зазор шириной 1…2 мм. Во избежание выдавливания породы зазор создается перед самым сдвигом. Уплотнение породы производится без зазора. Сдвигающее усилие передается с помощью тяги 6, двухступенчатого шкива 7 и загрузочного ведра 8. Регистрация деформаций породы при испытаниях (нормальных и сдвигающих) производится по индикаторам часового типа, закрепленным на кронштейнах 4. При испытаниях породы под водой в ванну 5 заливают воду.

Обработка результатов испытаний должна включать построение графиков зависимости деформации породы от сдвигающих усилий, построение диаграммы зависимости сопротивления породы сдвигу от нормальной нагрузки, установление параметров, характеризующих прочность пород (коэффициент внутреннего трения и сцепления), проверку правильности полученных результатов испытаний пород на сдвиг.

На рис. 4.49 показан пример построения графиков развития деформаций под влиянием сдвигающих усилий. Отсюда видно, что с увеличением нормальной уплотняющей нагрузки от σ_1 до σ_2 увеличивается и сопротивление пород сдвигу. Для каждой нормальной нагрузки σ_1, σ_2 и σ_3 на графиках отмечаются две характерные точки. Точка а отвечает сдвигающим усилиям, создающим первую значительную деформацию породы. Выше этой точки скорость развития деформации заметно увеличивается. Точка а на графиках не всегда отчетливо выделяется, но когда выделяется, то может служить контрольной для точки б, так как усилие, ей соответствующее, составляет 0,7…0,8 от усилия, соответствующего точке б. Точка б отвечает предельным максимальным сдвигаю-

щим усилиям, при которых наступает непрерывное смещение (деформация) породы по поверхности или вдоль зоны сдвига. Эта точка максимального сдвигающего усилия соответствует стадии разрушения породы. Сдвигающие усилия, отвечающие точкам б, принимаются как исходные при построении диаграмм зависимости сопротивления пород сдвигу от нормального уплотняющего давления.

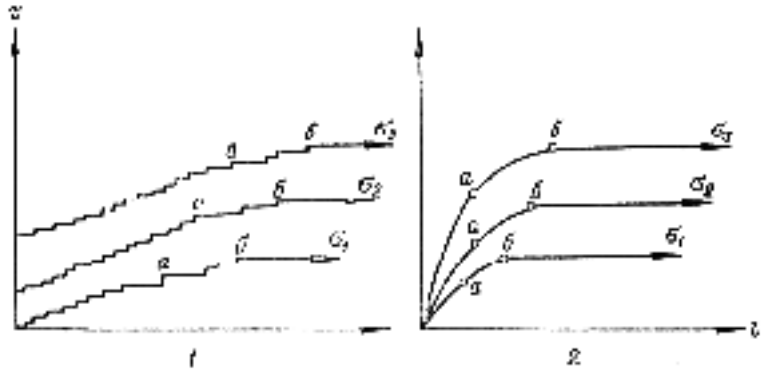


Рис. 4.49. Графики развития деформаций под влиянием сдвигающих усилий: 1 – при приложении сдвигающих усилий ступенями; 2 – при непрерывном увеличении сдвигающих усилий с заданной скоростью; σ_1, σ_2, σ_3 – нормальные уплотняющие нагрузки

Параметры: угол внутреннего трения φ, коэффициент внутреннего трения **f** и сцепление (зацепление) **c** – являются количественными показателями прочности пород. Они могут быть установлены по диаграммам и вычислены по результатам проведенных испытаний:

$$\mathbf{tg\varphi = (\tau_1 - \tau_2)/(\sigma_2 - \sigma_1)}; \qquad (4.58)$$

$$\mathbf{c = \tau_1 - \sigma_1 tg\varphi = \tau_2 - \sigma_2 tg\varphi}$$

4.6. Определение прочности горных пород приборами для трехосного сжатия

Горные породы в условиях естественного залегания обычно находятся в сложном объемном напряженном состоянии, развивающемся под влиянием веса вышележащих масс (гравитационных сил) и тектонических сил, в меньшей мере – перепада температурных градиентов и др. При ведении горных работ напряженное состояние пород может уменьшаться или увеличиваться за счет перераспределения масс горных пород и воздействия внешних нагрузок. При этом если касательные усилия превысят внутренние силы сопротивления пород сдвигу, породы начинают разрушаться, наступает потеря их прочности.

При изучении прочности горных пород, т.е. сопротивления их разрушению, важно испытания пород производить в условиях силовых воздействий,

аналогичных или близких к природным. Этим условиям в известной мере удовлетворяет метод испытания пород в приборах трехосного сжатия, называемых стабилометрами (измеритель прочности). Испытания пород на трехосное сжатие правильнее моделируют их напряженное состояние в естественных условиях залегания и дают достаточно надежные данные о сопротивлении сдвигу, но они более сложны, чем испытания в срезных приборах. Поэтому они не могут быть массовыми в условиях производственных исследований.

В стабилометрах образец породы цилиндрической формы в тонкой резиновой оболочке помещают в камеру прибора между верхним и нижним штампами (рис. 4.50). Всестороннее (в стабилометрах типа А) или только боковое (в стабилометрах типа Б) давление на образец передается при помощи воды, глицерина или другой жидкости, нагнетаемой в камеру. В стабилометрах типа А помимо всестороннего давления (равного боковому) через шток при помощи пресса на образец передается осевое давление $\sigma_1 = \sigma_2 + P$. Следовательно, в таких стабилометрах осевое давление не может быть меньше бокового. В стабилометрах типа Б, в отличие от типа А, боковое давление не является одновременно и всесторонним. Осевое давление на образец σ_1 здесь передается непосредственно через поршень независимо от бокового и, в частности, может быть меньше бокового.

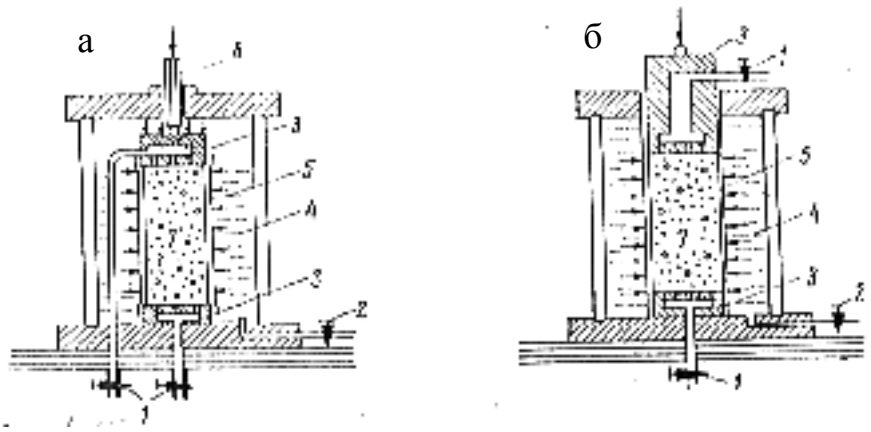


Рис. 4.50. Схема конструкций стабилометров: а – типа А; б – типа Б: 1, 2 – краны; 3 – верхний и нижний поршни; 4 – камера; 5 – резиновая оболочка; 6 – шток; 7 – образец

Если в стабилометрах всестороннее или боковое давление поддерживать постоянным, а осевое постепенно увеличивать, то образец породы можно довести до разрушения. Этого же можно достичь, если осевое давление сохранять постоянным, а всестороннее уменьшать.

По данным испытаний образцов исследуемой породы (одного для песчаных пород и двух-трех для глинистых) при различных значениях всестороннего или бокового давления строят диаграммы Мора.

Касательные к предельным кругам напряжений на этих диаграммах удовлетворяют уравнениям $\tau = tg\varphi\sigma_i$ и $\tau = \tilde{n} + tg\varphi\sigma_i$. Параметры касательной к

этим кругам $\mathbf{c}, \varphi$, $tg\varphi = f$ являются количественными показателями прочности пород.

Испытаниям в приборах трехосного сжатия для определения прочности могут подвергаться скальные, полускальные, песчаные и другие несвязные и глинистые породы. Особенно целесообразно применять такие испытания для пород слабых глинистых, мягких водонасыщенных, неустойчивой консистенции, так как испытывать такие породы в срезных приборах затруднительно – они легко раздавливаются и выдавливаются в зазоры прибора.

4.7. Определение угла внутреннего трения песков по углу естественного откоса

Для ориентировочного представления от угле внутреннего трения песков определяют угол их естественного откоса. Под последним принято понимать тот предельный угол наклона откоса, при котором порода в откосе находится в устойчивом состоянии – не осыпается, не опалывает и т.д.

В лабораторных условиях угол естественного откоса определяют только для песчаных и гравелистых пород. Для песка эта характеристика может определяться при воздушно-сухом состоянии и при помещении его в воду.

В банку в форме параллелепипеда, поставленную на ребро под углом 45^0, насыпают песок (рис. 4.51). Верхняя поверхность должна быть горизонтальной. Затем банку опирают на дно, после осыпания песка измеряют высоту откоса h и длину заложения песка ℓ, затем вычисляют угол естественно откоса

$$\varphi = \mathbf{arc} \cdot \mathbf{tg} \cdot \frac{\mathbf{h}}{\ell} \qquad (4.59)$$

Таким же образом определяют угол естественного откоса песка, находящегося под водой. В банку с песком медленно наливают воду.

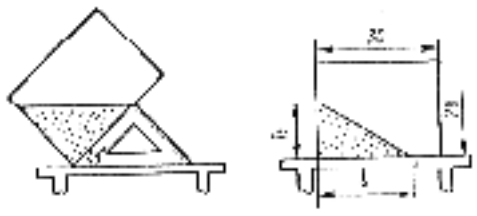


Рис. 4.51. Определение угла естественного откоса песчаных пород

Самым простым способом определения угла естественного откоса является определение с помощью цилиндра без дна (рис. 4.52). В цилиндр засыпают породу и медленно ее поднимают, после чего измеряют высоту h и диаметр основания образовавшегося конуса d.

Угол естественного откоса определяют по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg}\varphi; \qquad \mathbf{tg\varphi = \frac{2h}{d}}, \tag{4.60}$$

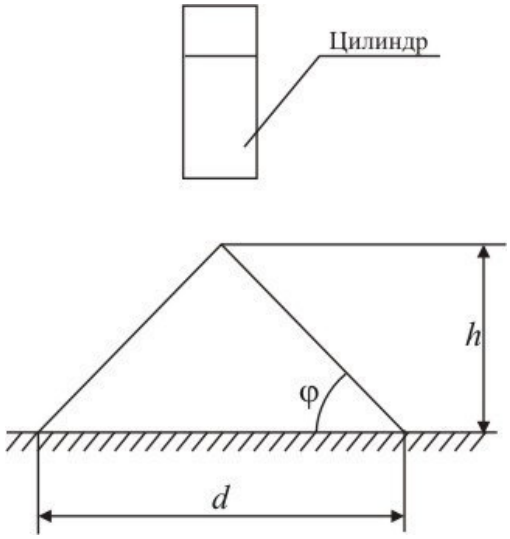


Рис. 4.52. Определение угла естественного откоса с помощью цилиндра

4.8. Пределы изменения прочностных параметров пород угольных шахт Донбасса

Прочностные параметры пород зависят от геологических процессов, в результате которых они образовались, а также от трещиноватости, влажности, температуры, пористости и слоистости.

В естественном состоянии пределы прочности при одноосном сжатии $\boldsymbol{\sigma_{сж}}$ основных типов вмещающих пород Донбасса следующие (Мпа): песчаники – (60…180); алевролиты – (25…100); аргиллиты – (10…70); известняки – (40…20, а для углей – (2,4…35).

Если нет более точных сведений, рекомендуется принимать

$$\boldsymbol{\sigma_р = 0{,}1\sigma_{сж};\ C = 0{,}3\sigma_{сж};\ \sigma_и = (1 \div 5)\sigma_р}.$$

Трещиноватость, имеющаяся в массиве горных пород, в зависимости от ее интенсивности, снижает сопротивляемость массива сжатию по сравнению с образцом на (10-80)%. Сопротивляемость массива растяжению может быть нулевой при густой сети открытых трещин; может быть снижена на (90…99)% по сравнению с образцом при густой сети закрытых трещин и, наконец, быть снижена на (80…95) при микротрещиноватости.

Длительное *увлажнение* пород, которое часто наблюдается на угольных шахтах, снижает сопротивляемость массива сжатию по сравнению с образцом на (20…70)%.

Увеличение *температуры* и *пористости* приводит к снижению прочностных характеристик пород.

Слоистость горного массива влияет на его сопротивляемость так, что в направлении вдоль слоистости сопротивляемость сжатию меньше, чем в направлении перпендикулярном слоистости, а сопротивляемость растяжению – наоборот.

Контрольные вопросы

1. Что такое напряжение?
2. Как определяются напряжения при растяжении, сжатии?
3. Как изменяются напряжения при растяжении в зависимости от ориентации сечения?
4. Понятие напряженного состояния в точке.
5. Что представляет собой тензор напряжений?
6. Что такое линейная деформация?
7. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
8. Как формулируется закон Гука при растяжении?
9. Виды напряженных состояний.
10. Как определяются касательные напряжения в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии?
11. Что такое круговая диаграмма напряженного состояния?
12. Что называют главными напряжениями?
13. Как определяется направление главных напряжений?
14. Круговая диаграмма напряженного состояния при объемном напряженном состоянии.
15. Чему равны Как с помощью круговой диаграммы напряжений определить главные напряжения?
16. наибольшие касательные напряжения?
17. Какие возникают напряжения и деформации при сдвиге?
18. Чему равна потенциальная энергия деформации?
19. В чем заключается природа хрупкого разрушения, разработанная А. Гриффитсом?
20. Что представляет собой кинетическая теория разрушения, разработанная академиком С.Н. Журковым?
21. В чем заключаются теории наибольших линейных деформаций, наибольших касательных напряжений, энергетическая теория прочности?
22. Что такое теория прочности Мора?
23. Способы построения паспорта прочности горных пород?
24. Какие свойства следует называть физико-механическими?
25. Общие понятия о механических свойств горных пород.
26. Какие показатели характеризуют прочность горных пород?
27. Как определяют прочность горных пород методом соосных пуансонов?
28. Как определяется предел прочности при растяжении?
29. В чем заключается метод определения прочности горных пород на разрыв методом раскалывания?

30. Какие схемы испытания применяются при изучении свойств песчаных и глинистых пород при сдвиге?
31. Опишите устройство стабилометров и их назначение.
32. Схемы передачи напряжений на породу в стабилометрах типов А и Б.
33. Определение угла естественного откоса песчаных пород.
34. Необходимые размеры образцов горных пород для исследования их механических свойств.
35. Каким образом определяются прочностные показатели на образцах неправильной формы?
36. В чем заключается метод определения прочностных характеристик с помощью удара шариковым молотком?

5. Деформационные свойства пород

5.1. Деформации в горных породах

Горные породы под действием внешних сил меняют свою форму и размеры, т.е. деформируются.

Изменение относительного положения частичек породы, вызывающее изменение объема и формы пород, называется деформацией.

Деформации могут быть неразрушающими и разрушающими.

Неразрушающие деформации изменяют размеры, форму и объем породы без нарушения ее сплошности; разрушающие – приводят к разделению породы на отдельные части.

Если после всестороннего длительного сжатия образец горной породы в некоторый момент времени разгрузить, то часть деформаций, приобретенных под нагрузкой, с течением времени может восстановится. Такие деформации носят название деформаций генетического возврата (от слова «генезис» – происхождение осадочного массива).

Деформацию, появляющуюся в момент приложения нагрузки, называют упруго-мгновенной, а деформацию, которая развивается с течением времени – деформацией ползучести.

При увеличении нагрузок можно наблюдать три области деформации породы: упругую, пластическую и разрушающую. В зависимости от соотношения вида деформаций при сжатии, горные породы подразделяются на упругие или хрупкие (пластическая зона практически не наблюдается), упруго-пластичные (разрушающей деформации предшествует зона пластической деформации) и пластичные (упругая деформация незначительна).

На рис. 5.1 представлены типичные графики деформаций пород.

Нормальные напряжения в образцах горных пород вызывают изменение их линейных размеров. Деформации в этом случае называются линейными.

Относительное изменение линейных размеров составляет (см. 4.4)

$$\varepsilon = \frac{(l - l_0)}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad (5.1)$$

где l – длина ребра деформированного образца, мм; l_o – длина ребра образца горной породы до деформирования, мм.

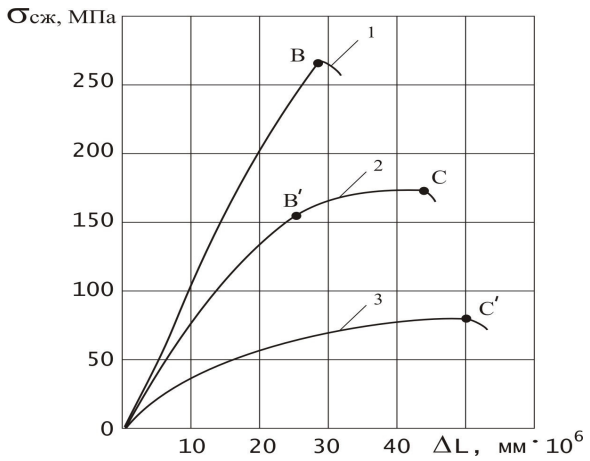


Рис. 5.1. Типичные графики деформаций пород: 1 – упругой (кварцит); 2 – упругопластической (осадочные породы); 3 – пластичной (мрамор): ОВ и ОВ′ – зона упругих деформаций; В′С и ОС′ — зона пластических деформаций; точки В, С, С′ — моменты разрушения пород.

Касательные напряжения вызывают сдвиговые деформации, определяемые величиной угла сдвига грани образца.

Деформационные характеристики горных пород определяют обычно в лабораторных условиях при приложении к образцам нагрузок. Для этих целей используют «мягкие» и «жесткие» испытательные машины, на которых выполняются механические испытания горных пород.

В «мягких» испытательных машинах, в процессе деформирования накапливается большое количество упругой энергии, которая превращается в кинетическую в момент разрушения образца и поэтому разрушение приобретает взрывной характер (например: внезапный выброс породы, горный удар). В «жестких» испытательных машинах, наоборот, это количество энергии невелико и имеется возможность изучать характер деформирования породы за пределом максимальной сопротивляемости (например: процессы деформирования, растянутые во времени).

Для более полного представления о деформационных свойствах горных пород, в качестве примера рассмотрим полную диаграмму деформирования образца горной породы при сжатии (рис. 5.2).

На диаграмме следует различать:

о-а – участок, характеризующий закрытие пор, трещин (т.е. дефектов породы);

а-в – участок, характеризующий область упругих деформаций (наблюдается линейная зависимость);

в-с – участок, характеризующий область начала возникновения трещин и пластической деформации. Если в точке **с** снять нагрузку, то процесс остановится и микротрещины закроются;

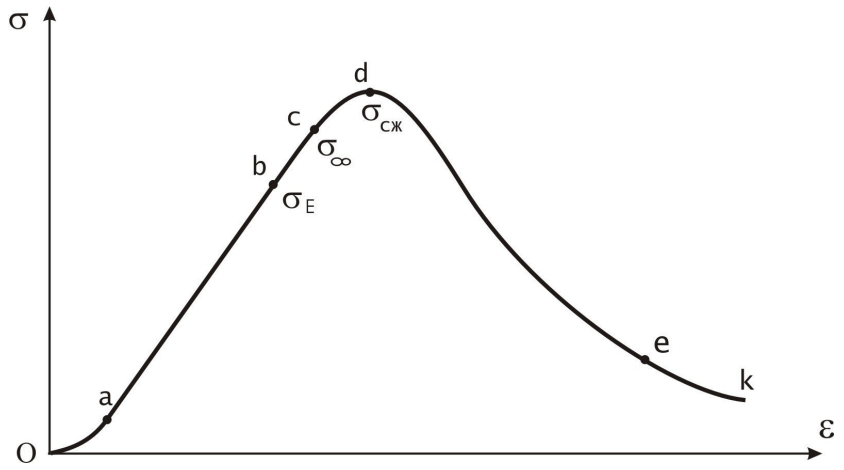


Рис. 5.2. Полная диаграмма деформирования образца горной породы.

c-d – участок, характеризующий процесс развития образовавшихся трещин. Процесс неустойчивый, лавинообразный характер. Точка **d** соответствует максимальной сопротивляемости образца разрушению.

d-e – участок, характеризующий уменьшение несущей способности образца. На этом участке наблюдают процесс дилатансии, т.е. увеличение объема образца.

e-k – участок, характеризующий разрушение испытываемого образца.

Таким образом, горные породы не являются идеально упругими или идеально пластическими телами, в результате при их нагружении всегда наблюдается наряду с упругой деформацией, в той или иной степени, пластическая деформация.

5.2 Упругие свойства горных пород

Горные породы могут деформироваться в пределах упругости.

Упругость – свойство горной породы изменять форму и объем под влиянием силовых воздействий и полностью восстанавливать первоначальное состояние после устранения этих воздействий.

Упругие свойства горных пород проявляются только при кратковременном внешнем воздействии.

Для каждого вида приложенных нагрузок существует свой коэффициент пропорциональности между напряжениями и упругими деформациями: он является параметром породы, оценивающим ее упругие свойства.

К параметрам, характеризущим упругие свойства горных пород, следует относить:

– *предел упругости* $\boldsymbol{\sigma_E}$, Па;

– *модуль упругости* (модуль Юнга) E, Па;

– *модуль сдвига* G, Па;

– *модуль всестороннего сжатия* K, Па;

– *коэффициент Пуассона* ν, ед.

В лабораторных условиях упругие параметры горной породы можно установить при нагружении образцов на гидравлических прессах. Для этого исследуемые образцы должны иметь соотношение высоты (h) к диаметру (d) – $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}} \geq \mathbf{2}$. Такое требование позволяет обеспечить равномерное одноосное напряженное состояние в средней части образца при его сжатии.

В начале испытаний, определяют предел прочности образца на одноосное сжатие ($\sigma_{сж}$). Запись деформаций осуществляют с помощью проволочных тензометров, индуктивных датчиков часового типа и т.п. Обычно датчики располагают с 4-х сторон образца, а их показания усредняют. Испытания проводят в режиме многократного нагружения и разгрузки.

Типичный график деформирования горной породы для определения упругих параметров представлен на рис. 5.3

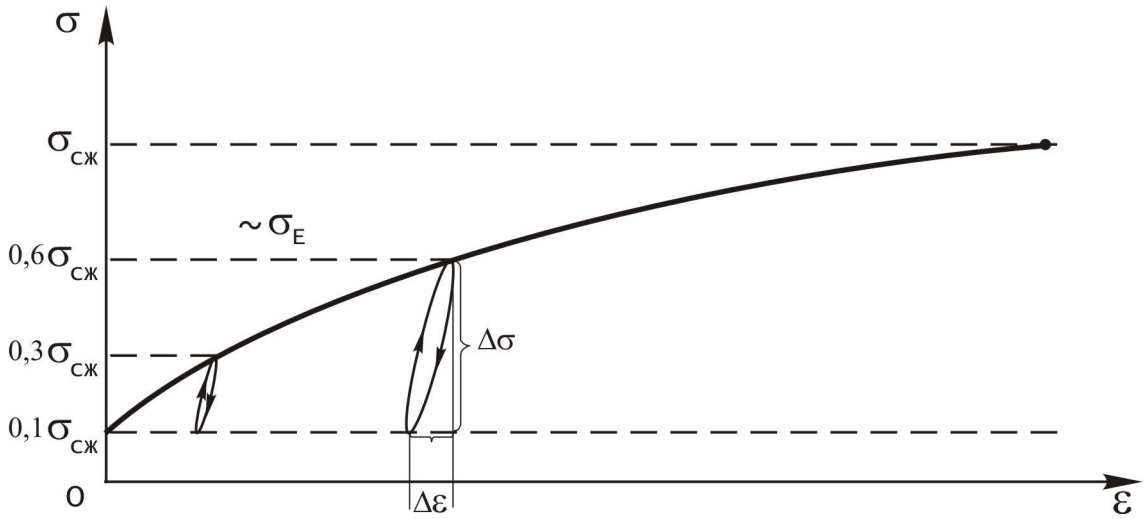


Рис. 5.3. Типичный график деформирования образца горной породы.

С помощью графика можно установить величины $\Delta\sigma$ и $\Delta\varepsilon$, а по выражению

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \qquad (5.2)$$

определить модуль упругости.

По относительным изменениям линейных размеров в направлениях перпендикулярном и параллельном приложению нагрузки на образец определяют коэффициент Пуассона.

Таким образом, определив экспериментально на образцах пород характеристики E и ν, можно расчетным путем определить значения остальных параметров.

Упругие свойства пород зависят от величины и рода прилагаемой нагрузки. С увеличением нагрузки при растяжении породы модуль упругости уменьшается, при сжатии – увеличивается. При сжатии порода уплотняется, увеличи-

вается площадь контактов зерен, соответственно уменьшается способность породы к дальнейшей деформации и, следовательно, возрастает модуль упругости.

Коэффициенты поперечных деформаций ν горных пород теоретически могут изменяться в пределах от 0 до 0,5. Для большинства пород они колеблются в интервале значений от 0,14 до 0,35. Минимальные значения ν имеют некоторые биотитовые и известковые сланцы, опал, гнейсы (0,01…0,08), максимальные – некоторые дуниты, амфиболиты (0,4…0,46).

Для горных пород Донбасса значения коэффициента Пуассона находятся в следующих пределах: алевролит – 0,140,49; аргиллит – 0,0840,44; песчаник – 0,140,37; известняк – 0,1340,44

5.3.Пластические и реологические свойства горных пород

Горные породы, так же как и другие материалы деформируются поразному при мгновенном и при длительном приложении нагрузки, в результате чего проявляются их различные свойства.

Пластичность – явление роста деформаций при некотором возрастании напряжения сверх предела упругости без нарушения сплошности породы.

Пластическая деформация в породах обусловлена внутри- и межзеренным скольжением. Внутризеренное скольжение обусловлено дислокациями – сдвигами одной части кристалла относительно другой.

К параметрам, характеризующим пластические свойства горной породы, следует относить *модуль пластичности* ($E_{пл.}$, Па), который представляет собой отношение прироста напряжений в пластической зоне до момента разрушения породы к полной пластической деформации

$$E_{пл.} = tg\alpha_3 = \frac{\sigma_{сж} - \sigma_E}{\varepsilon_p - \varepsilon_E}. \qquad (5.3)$$

Параметры $\sigma_{сж}, \sigma_E, \varepsilon_p$ и ε_E можно определить из графика, представленного на рис. 5.4.

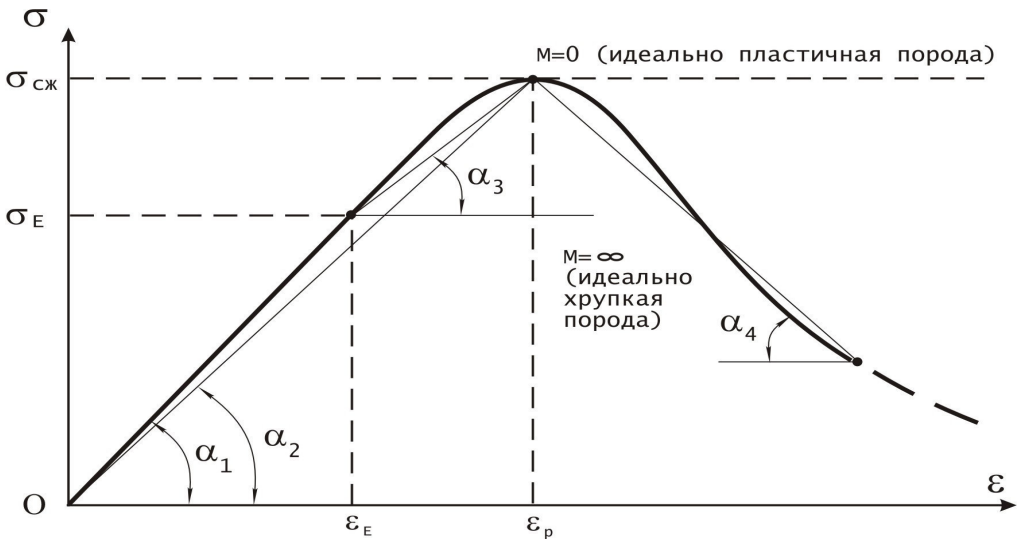


Рисунок 5.4. График к расчету модуля пластичности образца горной породы.

На графике $\mathbf{tg\alpha_1}$ равен модулю упругости **E**; $\mathbf{tg\alpha_2}$ – модулю полных деформаций перед разрушением $\mathbf{E_{деф}}$; $\mathbf{tg\alpha_3}$ – модулю пластичности $\mathbf{E_{пл}}$; $\mathbf{tg\alpha_4}$ – модулю спада **M** несущей способности породы, который характеризует степень хрупкости процесса разрушения породы (поэтому его иначе называют – модуль хрупкости).

По величине модуля пластичности можно сравнить относительную пластичность горных пород. Обычно с увеличением предела прочности одноосному сжатию коэффициент пластичности уменьшается.

Пластичность зависит от минерального состава горных пород. Наличие жестких кварцевых зерен и полевого шпата в породе уменьшает ее пластичность. Пластичность углей зависит от содержания в них углерода.

Модуль упругости более пластичных пород обычно ниже, чем пород менее пластичных. С увеличением числа пластичности глин возрастает их сжимаемость и водонепроницаемость.

Пластичность скальных пород увеличивается с повышением температуры и всестороннего давления. Породы, ведущие себя как хрупкие в обычных условиях, при повышенных давлениях и температурах приобретают явно выраженные пластические свойства. Температура ускоряет (интенсифицирует) процесс пластического течения. Пластические деформации при больших всесторонних давлениях объясняются тем, что в этих условиях более легко могут проявиться внутризеренные движения и смещения, не приводящие к нарушению сплошности и к возникновению трещиноватости, т.е. к разрушающим деформациям.

Реологические свойства горных пород – свойства, которые характеризуют изменение деформаций и напряжений в горных породах при длительном действии нагрузок.

Механические характеристики горных пород определяют обычно при кратковременном приложении нагрузок. Элементы же систем разработки, горные выработки, крепи воспринимают нагрузки в течение многих лет.

Вопросами поведения материалов, в т.ч. и горных пород, в условиях длительных силовых воздействий занимается **реология – наука о течении вещества**.

В зависимости от внешних условий, изменение напряженно-деформированного состояния твердого тела во времени может идти двумя путями. Например, нагрузим образец горной породы, имеющий форму цилиндра, некоторой постоянной неразрушающей нагрузкой, создающей практически мгновенно вполне определенную относительную деформацию, величина которой зависит от модуля упругости материала и величины приложенной нагрузки. В последующие моменты времени, несмотря на то, что напряжения не меняются, деформация не будет оставаться постоянной, как это следует из закона Гука. Величина ее будет монотонно возрастать.

Реологическое явление, заключающееся в том, что с течением времени при постоянном напряжении наблюдается рост деформаций, носит название **ползучести.**

В другом случае сдавим образец между двумя плитами пресса таким образом, чтобы в течение всего опыта расстояние между ними было строго фиксированным, т.е. не изменяющимся во времени. Станем измерять давление на плиты пресса со стороны образца и убедимся, что со временем величина его будет падать. Это реологическое явление носит название **релаксации напряжений**.

Задачей реологии является описание напряженно-деформированного состояния горных пород и иных материалов с учетом их склонности к ползучести и релаксации. Эта задача сводится к составлению так называемых уравнений состояния, т.е. таких уравнений, которые связывают в единые соотношения компоненты напряжений, деформаций и их производных по времени.

Во всех имеющихся исследованиях полагается, что уравнения состояния достаточно точно описывают изменения напряженно-деформированного состояния материалов в том случае, если внешние условия таковы, что ни деформации, ни напряжения нельзя считать постоянными.

Для наглядности представления реологических процессов обычно используют метод структурных моделей. Этот метод состоит в том, что свойства тела описываются при помощи особым образом подобранной механической модели. Модель должна состоять из элементов, идеально отражающих основные – фундаментальные – качества исходного материала. Так, например, при определенном уровне нагрузок и достаточно быстром их приложении все твердые и связные горные породы ведут себя как упругие тела, подчиняющиеся закону Гука. Это свойство твердых тел моделируется пружиной, жесткость которой пропорциональна модулю упругости (элемент Гука) (рис. 5.5,а) Упругие свойства твердых тел не зависят от времени:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow t = 0 .$$

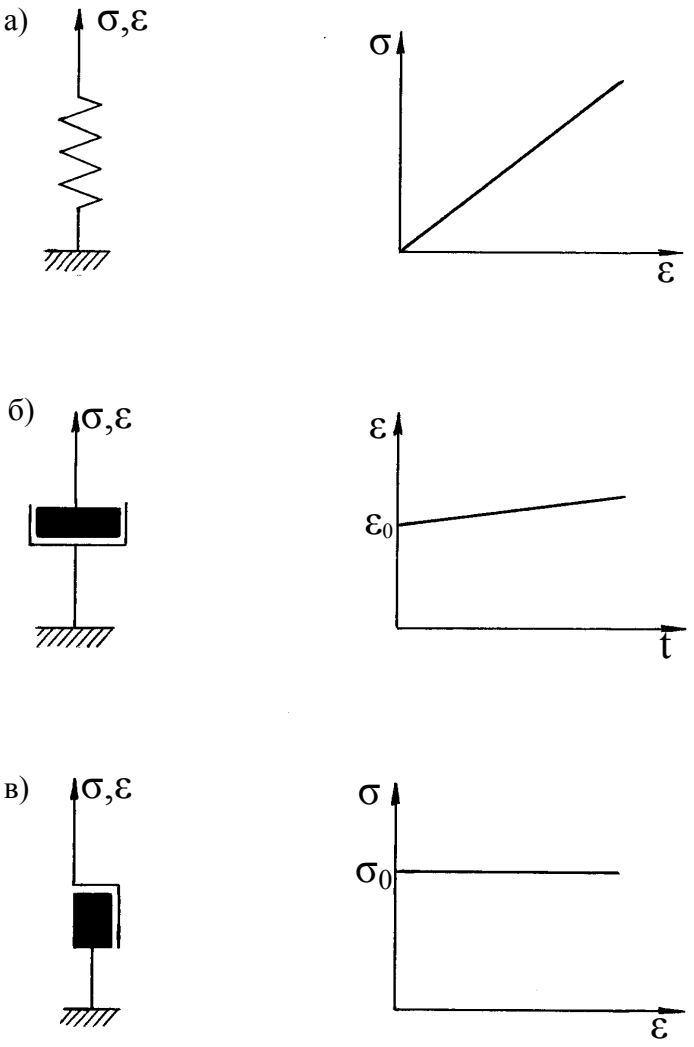


Рис. 5.5. Элементарные реологические модели: а) Гука; б) Ньютона; в) Сен-Венана.

Специальными исследованиями установлено, что границы зёрен в поликристаллических материалах, к которым относятся и горные породы, ведут себя как вязкая жидкость. Это обстоятельство приводит к тому, что температура существенным образом изменяет внутреннее трение в таких телах, их деформационные и прочностные характеристики. В условиях достаточно длительных внешних нагрузок поликристаллические материалы ведут себя в целом, как очень вязкая жидкость. Вязкие свойства материалов моделирует элемент Ньютона (рис.5.5 ,б), который представляет собой демпфер - цилиндр с отверстиями, погруженный в вязкую жидкость. Скорость деформирования в этом случае пропорциональна действующему напряжению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\xi}\sigma, \qquad (5.4)$$

где ξ – коэффициент вязкости, $\frac{1}{\xi}$ – коэффициент текучести.

При заданном постоянном напряжении полная деформация к моменту времени t составит $\varepsilon = \frac{1}{\xi}\sigma_0 t$, а при изменяющихся во времени напряжениях

$$\varepsilon = \frac{1}{\xi}\int_0^t \sigma(t)dt .$$

При достаточно больших нагрузках в горных породах начинается разрушение внутренних структурных связей, что приводит к образованию необратимых(пластических) деформаций. Это свойство реальных твердых тел отражает элемент Сен-Венана. Он представляет собой элемент сухого трения: брусок, лежащий на жесткой поверхности (рис. 5.5, в). При нагрузке, меньшей некоторой критической величины *S,* деформация равна нулю, при большей – деформация неопределенна: система приходит в движение и брусок остается там, где прекратилось действие силы.

Таким образом, рассмотренные выше элементарные механические модели имеют вполне определенную физическую основу. Соединяя структурные элементы друг с другом тем или иным образом, создают более сложные модели, в большой степени отражающие реальные свойства конкретных материалов. Схемы соединения этих элементов определены лишь феноменологически, т.е. по формальному соответствию свойств составленной модели свойствам реальных тел. Одна из первых простых структурных механических моделей твердого тела была предложена Максвеллом. Она представляет собой соединенные последовательно вязкий и упругий элементы (рис.5.6,а).

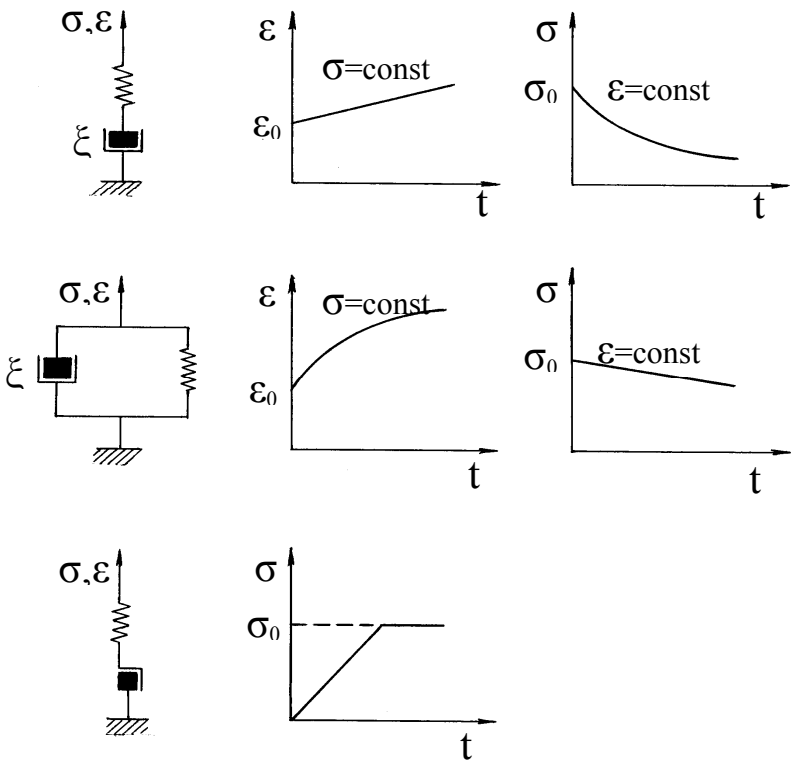


Рис. 5.6. Реологические модели: а) Максвелла; б) Кельвина-Фойгта; в) Сен-Ванана.

Нагрузка, приложенная к системе, вызывает мгновенную упругую деформацию пружины, соответствующую закону Гука. В дальнейшем деформация системы растет во времени с постоянной скоростью за счет вязкого элемента. При снятии нагрузки модель получит обратную деформацию, равную начальной упругой, вязкая составляющая деформации необратима.

Если модели задать постоянную деформацию, то поршень будет двигаться вверх до тех пор, пока натяжение пружины не станет равным нулю и вся упругая деформация перейдет в вязкую. Это явление соответствует релаксации напряжений.

Уравнение состояния для среды Максвелла можно получить из следующих соображений. Скорость деформации ε' очевидно должна складываться из ско-

рости упругой деформации $\varepsilon'_{уп} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}$ и скорости вязкой деформации $\varepsilon'_{в} = \frac{\sigma}{Et_0}$, где $\frac{1}{Et_0} = \frac{1}{\xi}$ – коэффициент пропорциональности. Таким образом

$$\varepsilon' = \frac{1}{E}\sigma' + \frac{\sigma}{Et_0}. \qquad (5.5)$$

Здесь t_0 – некоторая постоянная, имеющая размерность времени.

Из уравнения (5.5) получим

$$E \cdot \varepsilon' = \sigma' + \frac{\sigma}{t_0}, \text{ или } E \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{t_0}. \qquad (5.6)$$

Выражение (5.6) и есть дифференциальное уравнение состояния среды Максвелла. После интегрирования, при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, это уравнение приводится к выражению

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \text{ или } \varepsilon = \varepsilon_0\left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \qquad (5.7)$$

где произвольная постоянная интегрирования $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ есть упругая деформация при $t = 0$.

При $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ получим

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right). \qquad (5.8)$$

Таким образом, ползучесть деформаций в среде Максвелла характеризуется линейным законом, релаксация напряжений – экспоненциальным. Постоянная величина t_0 называется **периодом релаксации** и, как следует из формулы (5.8), она численно равна времени, за которое напряжения падают в *e* раз, где *e* - основание натуральных логарифмов.

Эта схема только качественно отражает свойства реальных тел, количественные же результаты плохо согласуются с опытом.

Структурная модель среды Кельвина-Фойгта представляет собой параллельное соединение вязкого и упругого элементов (рис. 5.6,б). Приложение нагрузки в такой среде не вызывает мгновенных упругих деформаций. Деформации растут от нуля при t=0 до какой-то величины, определяемой силой P и упругостью пружины.

При разгрузке деформация не падает до нуля. Релаксации напряжений в такой среде не наблюдается. Уравнение состояния получим, суммируя упругую часть напряжения, пропорциональную деформации, и вязкую часть, пропорциональную скорости деформации:

$$\sigma = a\varepsilon + b\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{5.9}$$

При $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{a}{b}\varepsilon = \frac{1}{b}\sigma_0. \tag{5.10}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{b} + c\exp\left(-\frac{a}{b}t\right), \tag{5.11}$$

а при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ получим

$$\sigma = a\varepsilon_0. \tag{5.12}$$

Очевидное несоответствие двух описанных выше моделей свойствам реальных сред побудило Пойтинга и Томпсона предложить модель так называемой стандартной линейной среды (рис. 5.7). Она представляет собой модель Максвелла, параллельно которой помещен еще один упругий элемент. Нагрузка, приложенная к такой модели, вызовет прежде всего мгновенную упругую деформацию обеих пружин.

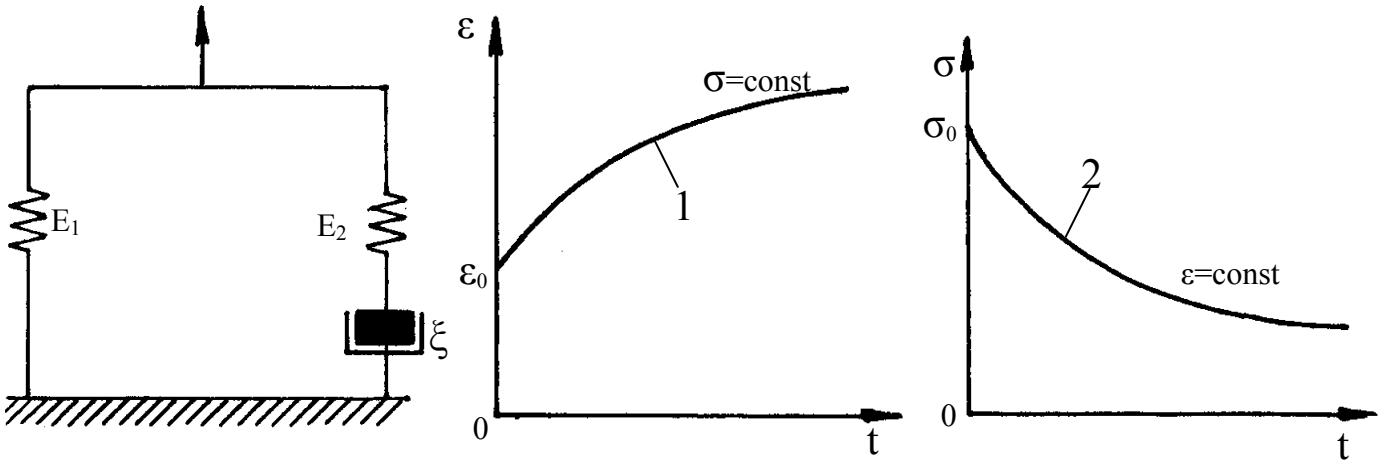


Рис. 5.7. Модель среды Пойтинга-Томпсона:

1 – кривая ползучести; 2 – кривая релаксации напряжений.

В дальнейшем деформация будет расти за счет растяжения пружин, но она имеет предел, определяемый величиной силы *P* и упругостью пружины 1.

При снятии нагрузки деформация мгновенно уменьшается на некоторую величину, зависящую от степени растяжения пружины 2, а затем постепенно падает до нуля. В такой модели наблюдается частичная релаксация напряжений. Если зафиксировать деформацию, поршень будет двигаться до тех пор, пока напряжение в пружине 2 не упадет до нуля. Напряжение же в пружине 1 останется неизменным.

Дифференциальное уравнение состояния среды имеет вид

$$\sigma + a\frac{d\sigma}{dt} = b\varepsilon + c\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{5.13}$$

При $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{b}{c}\varepsilon = \frac{1}{c}\sigma_0 \cdot \tag{5.14}$$

Интеграл этого уравнения равен

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{b} + \left(\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{c}t\right). \tag{5.15}$$

При $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ получим уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{a}\sigma = \frac{b}{a}\varepsilon_0, \tag{5.16}$$

решение которого имеет вид

$$\sigma = b\varepsilon_0 + (\sigma_0 - b\varepsilon_0)\exp\left(-\frac{t}{a}\right). \tag{5.17}$$

Данные экспериментов свидетельствуют о том, что во всех случаях при достаточно высоких нагрузках деформация после снятия нагрузки мгновенно уменьшается на некоторую величину, а затем постепенно уменьшается до некоторой отличной от нуля величины. В модели Максвелла при разгрузке деформация не изменяется вовсе, а моделях Кельвина-Фойгта и Пойтинга-Томпсона при $t \to \infty$ деформация уменьшается до нуля.

Таким образом, эти модели, удовлетворительно описывая поведение реальной среды при нагрузке, становятся непригодными для описания разгрузки.

Для более полного описания поведения реальной среды под нагрузкой механическая модель должна содержать еще один структурный элемент, учитывающий возникновение пластических деформаций.

Простейшая модель такой упруго-пластической среды была предложена Сен-Венаном. Она представляет собой элемент сухого трения, соединенный последовательно с упругим элементом Гука (рис. 5.6, в). В этой модели деформация тела состоит из двух частей: обратимой упругой и необратимой пластической. Реологических явлений в модели не происходит. Условие возникновения пластических деформаций записывается в виде

$$\tau_{\max} = S,$$

где S – некоторая механическая константа моделируемой среды: предел прочности на одноосное сжатие, растяжение, угол внутреннего трения и т.п.

При последовательном соединении модели Сен-Венана и элемента вязкого трения можно получить модель Бингама (рис. 5.8). При нагрузке, превышающей предел текучести, возникает течение. При постоянной нагрузке скорость деформации также постоянна. После снятия нагрузки упругая деформация исчезает, вязкопластическая остается. Релаксация напряжений не наблюдается.

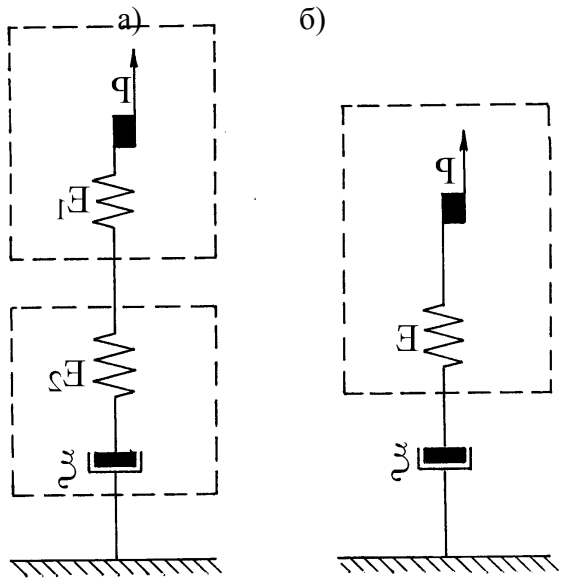


Рис. 5.8. Модель среды:
Бингама (а) и Шведова (б).

Уравнения состояния получим, суммируя пластическую часть напряжений, равную предельному напряжению сдвига

$$\sigma_{пл} = \tau_s \sqrt{3}, \qquad (5.18)$$

где τ_s – предел прочности на сдвиг, и вязкую часть, пропорциональную скорости деформацій

$$\sigma_в = a \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (5.19)$$

Таким образом, имеем

$$\sigma = \tau_s \sqrt{3} + a \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (5.20)$$

При $\sigma = \sigma_0 =$ const получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0 - \tau_s \sqrt{3}}{a} t. \qquad (5.21)$$

При $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$

$$\sigma_s = \tau_s \sqrt{3} \cdot$$

Шведовым была предложена модель, представляющая собой последовательное соединение моделей среды Сен-Венана и Максвелла. Эта среда при нагрузке, не превосходящей предела текучести, ведет себя как упругая. При большей нагрузке среда начинает течь, причем напряжение в ней зависит от скорости деформации.

При разгрузке часть упругой деформации, соответствующая пружине 1 исчезает мгновенно, а часть упругих деформаций, соответствующая пружине 2, переходит в вязкую. При постоянной деформации часть напряжения, соответствующая пружине 1, нерелаксирует.

Уравнение состояния среды Шведова имеет вид

$$\sigma + b\frac{d\sigma}{dt} = \tau_s \sqrt{3} + a\frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \tag{5.22}$$

При $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ решение уравнения (5.22) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0 - \tau_s \sqrt{3}}{a} t \,, \tag{5.23}$$

при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$

$$\sigma_s = \tau_s \sqrt{3} + c \exp\left(-\frac{t}{b}\right) . \tag{5.24}$$

Сравнивая среды Бингама и Шведова, можно отметить их существенную общность. Часто в литературе их объединяют одним названием Бингама-Шведова, имея в виду модель Бингама.

Общее уравнение всех рассмотренных выше сред имеет вид:

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\frac{d\varepsilon}{dt} = a_4\sigma + a_5\frac{d\sigma}{dt} \ . \tag{5.25}$$

В самом деле, при $a_1 = a_2 = 0$ получим уравнение среды Максвелла; при $a_1 = a_5 = 0$ – среды Фойгта; при $a_1 = 0$ – среды Пойтинга-Томпсона; при $a_2 = a_3 = a_5 = 0$ – среды Сен-Венана; при $a_2 = a_5 = 0$ – среды Бингама; при $a_2 = 0$ – среды Шведова.

С точки зрения релаксации все среды можно разделить на релаксирующие и нерелаксирующие. К первым относится среда Максвелла, Пойтинга-Томпсона, Шведова, ко вторым – Кельвина-Фойгта, Сен-Венана, Бингама.

Существуют модели более приближенные к реальной среде. К ним относится модель Бюргерса, или компаунд-модель (рис. 5.9). Она учитывает наиболее важные, имеющие практическое значение, составляющие процесса деформирования породы: мгновенные деформации, деформации запаздывающей упругости и деформации вязкой текучести.

Следует отметить, что чем сложнее модель, тем хуже она поддается математическому описанию. Поэтому при выборе реологических моделей руководствуются принципом разумной достаточности.

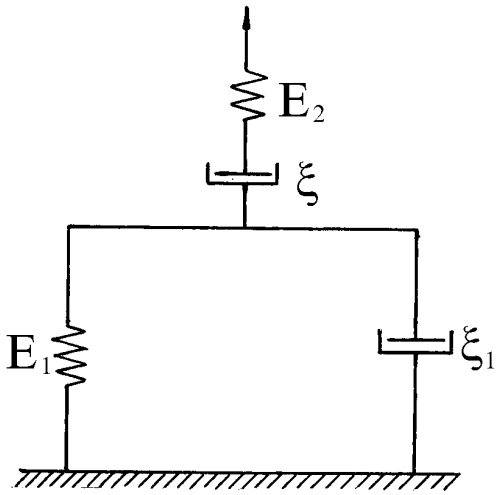


Рис. 5.9. Модель Бюргерса или компаунд-модель

Лабораторные исследования реологических свойств горных пород ведутся в ограниченных размерах, что связано с рядом определенных трудностей. Чаще всего изучают ползучесть деформаций и значительно реже – релаксацию напряжений.

Исследования связаны с длительными экспериментами, которые продолжаются месяцы и годы. В связи с этим в качестве нагрузочных устройств используют пружинные или рычажные устройства. С их помощью получают кривые при разных нагрузках (от 30 до 80% от разрушающей). Особенностью кривых ползучести является то, что в первые часы нагружения развивается основная часть упруго-вязких деформаций, а в дальнейшем рост их существенно замедляется и кривые асимптотически стремятся к некоторому пределу, зависящему от величины заданной нагрузки. Несколько иначе протекает процесс релаксации напряжений. Форма кривых зависит от генезиса, состава и строения горной породы.

5.4. Понятие о теории наследственной ползучести

Согласно современным представлениям, напряжения, возникающие в реальных телах, состоят из двух частей: первое слагаемое зависит от деформации в данный момент времени *t*, второе – от деформаций, существовавших в теле в течение времени, предшествовавшего настоящему моменту времени – τ (рис. 5.10). Время изменяет структуру.

Теория, позволяющая определять деформации в среде с учетом истории ее нагружения, называется **теорией наследственной ползучести.**

Теория наследственного изменения внутренних факторов с учетом «памяти» материала о всех временных структурных изменениях, возникающих в процессе нагружения, и предполагающая линейную зависимость между напряжениями и деформациями в любой момент времени, получила название **теории линейной наследственной ползучести.**

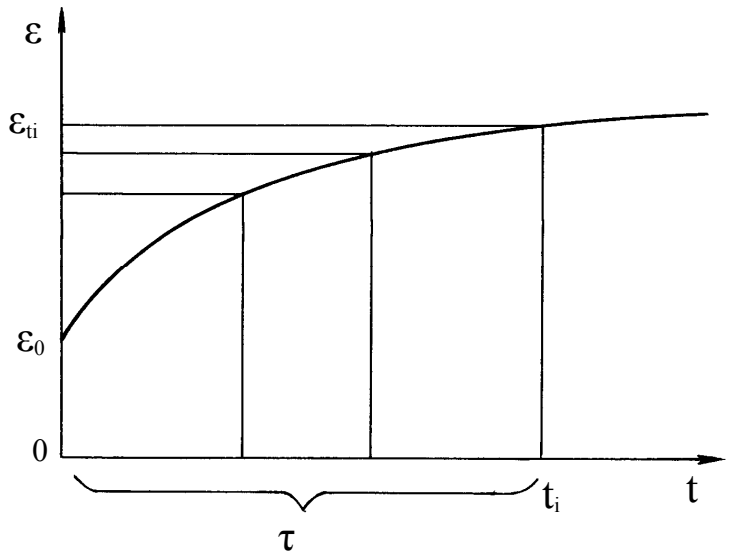


Рис. 5.10. Процесс деформирования твердого тела, имеющего предысторию нагружения

Теория линейной наследственности была предложена Л. Больцманом с использованием математического аппарата интегральных уравнений В. Вольтерра.

В соответствии с этой теорией, деформации среды под действием внешних сил продолжаются и после их приложения (наследственность), при этом деформации в каждый момент времени прямо пропорциональны действовавшим в разные моменты времени напряжениям (линейность) и суммируются, растут во времени (принцип суперпозиции).

Проиллюстрируем изложенное выше на следующем примере. Построим кривые ползучести $\varepsilon=f(t,\sigma)$ при разных уровнях напряжения (рис.5.11,а). Затем в координатах «σ-ε» построим графики в моменты времени t_i (i = 1, 2, 3...) (рис. 5.11,б). Если получившиеся при этом изохронные зависимости являются прямыми линиями (или близкими к ним), то мы имеем дело с линейной наследственной средой.

Ползучесть материалов в теории линейной наследственности описывается интегральным уравнением Вольтерра второго рода

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\frac{1}{E}\int_0^t L(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \qquad (5.26)$$

где $\sigma(t)$ *и* $\varepsilon(t)$ – напряжения и деформации в настоящий момент времени *t,* τ – время, предшествующее моменту времени *t*; $L(t)$ – некоторая функция, учитывающая влияние времени на деформации и напряжения в теле.

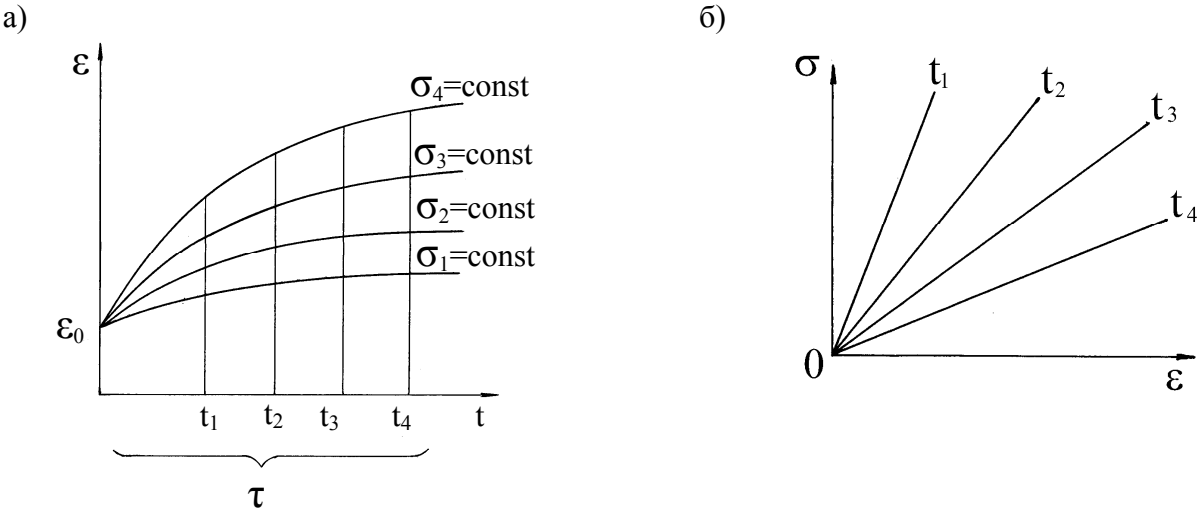


Рис. 5.11. Деформирование во времени наследственной среды

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ - напряжения и деформации в настоящий момент времени t, τ – время, предшествующее моменту времени t; $L(t)$ – некоторая функция, учитывающая влияние времени на деформации и напряжения в теле.

При $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ из соотношения (5.26) получим уравнение ползучести деформаций

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \int_0^t L(\tau)d\tau\right). \tag{5.27}$$

Дифференцируя обе части уравнения (1.53) по времени, получим выражение:

$$L(t) = \frac{E}{\sigma_0}\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{5.28}$$

из которого следует, что $L(t)$ представляет собой функцию скорости ползучести. Функцию же $L(t\text{-}\tau)$ называют **ядром интегрального уравнения** Вольтерра (5.26). Решая его относительно $\sigma(t)$, получим,

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 - \int_0^t K(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau. \tag{5.29}$$

При $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$, получим из (5.29) уравнение релаксации напряжений

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0\left(1 - \int_0^t K(\tau)d\tau\right). \tag{5.30}$$

Дифференцируя обе части уравнение (5.30) по *t*, получим выражение для *K*(*t*)

$$K(t) = -\frac{1}{E\varepsilon_0}\frac{d\sigma(t)}{dt}. \qquad (5.31)$$

Функции *K*(*t*) и *L*(*t*) взаимосвязаны и это позволяет по одной из них найти другую. Функция *K*(*t*) называется **резольвентой интегрального уравнения** Вольтерра (5.27).

Уравнение ползучести (5.27) можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\overline{E}}, \qquad (5.32)$$

где $\overline{E}$ – временной оператор, определяемый в результате обработки экспериментальных данных. Ю.Н. Работнов показал, что задачу линейной наследственности можно формально рассматривать, как задачу теории упругости, в которой вместо упругих постоянных E и μ необходимо использовать их временные аналоги (интегральные операторы) – $\overline{E}$ и $\overline{\mu}$. Ж.С. Ержанов установил, что деформирование ряда горных пород до определенного уровня нагружения соответствует уравнению (5.27) с ядром ползучести в виде степенной функции (ядро типа Абеля):

$$L(t,\tau) = \delta(t-\tau)^{-\alpha}, \qquad (5.33)$$

где δ и α – реологические характеристики, получаемые экспериментально.

Интегральное уравнение ползучести с ядром Абеля имеет следующее решение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{\sigma_0}{\overline{E}}. \qquad (5.34)$$

Сложность решения задач методами теории наследственной ползучести заключается в расшифровке временных операторов.

Часто при постоянстве граничных условий для решения задач геомеханики используют метод переменных модулей, который заключается в том, что вместо интегральных операторов $\overline{E}$ и $\overline{\mu}$ используют временные функции $E(t)$ и $\mu(t)$.

Из выражения (5.34) следует, что временная функция модуля деформации имеет вид

$$E(t) = \frac{E}{1+\Phi}, \qquad (5.35)$$

где Φ - функция ползучести, равная

$$\Phi = \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{5.36}$$

Временная функция для коэффициента Пуассона определяется выражением

$$\mu(t) = 0,5 - \frac{0,5-\mu}{1+\Phi}. \tag{5.37}$$

Следует отметить, что использование теории наследственной ползучести оправдано только в том случае, когда действующие напряжения не превышают длительной прочности массива.

Реологические процессы в горных породах обычно описывают с помощью условно выделенных реологических явлений: ползучесть и релаксация напряжений.

Характер проявления ползучести и релаксации в горных породах во времени t изображен на рис. 5.7.

Ползучесть – явление постепенного роста деформаций породы во времени при постоянном напряжении, не превышающем предела упругости.

Скорость развития деформаций ползучести на основании теории наследственности часто описывают следующим уравнением

$$\frac{\mathbf{d\varepsilon}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}}\sigma_\tau \delta(\mathbf{t}-\tau)^{-\alpha}, \tag{5.38}$$

где σ_τ – напряжения в породе в момент времени τ; t – другой, больший, чем τ момент времени; α и δ – *коэффициенты ядра ползучести* для данной породы.

Они и являются параметрами данного свойства породы; для пород $\alpha \approx 0,7$ и $\delta = (2..5)10^{-3}$.

Релаксация напряжений – явление постепенного снижения напряжений в породе при постоянной её деформации.

Релаксацию можно представить следующим образом. Если образец горной породы зажать между двумя плоскостями и создать условия, где ε = const, то давление на плоскости со стороны образца в начальный момент будет равно σ, а со временем станет уменьшаться, стремясь к определенной величине.

Уравнения кривой релаксации обычно приводят в следующем виде

$$\sigma = \sigma_o e^{-\frac{t}{t_o}}, \tag{5.39}$$

где t_o – *период релаксации* (параметр данного свойства породы), т.е. отрезок времени, за который напряжение снижается в **e** раз (для горных пород несколько сотен лет, для стекла, например, около 100 лет, а для воды – 10^{-11} с).

Рассмотрение ползучести и релаксации пород показывает, что существует общая закономерность изменения свойств пород со временем действия нагрузки, – чем более длительно воздействие на породу нагрузки, тем слабее становятся упругие свойства пород, уменьшается предел упругости и тем сильнее проявляются её пластические свойства.

В лабораторных условиях реологические параметры горных пород можно определить поперечным изгибом образцов-балочек (рис. 5.12). Для этих целей используют образцы призматической формы, поперечные размеры которых в 6 – 10 раз меньше его длины. Образцы нагружают постоянной нагрузкой, создающей усилие F.

С учетом величин F и t устанавливают величину прогиба y_t , а реологические параметры α и δ определяют из выражения

$$\frac{y_t - y_o}{y_o} = \frac{\delta}{1-\alpha} \cdot t^{1-\alpha}, \qquad (5.40)$$

В лабораторных условиях реологические параметры горных пород можно определить поперечным изгибом образцов-балочек (см. рис. 5.12). Для этих целей используют образцы призматической формы, поперечные размеры которых в 6…10 раз меньше его длины. Образцы нагружают постоянной нагрузкой, создающей усилие F.

С учетом величин F и t устанавливают величину прогиба y_t , а реологические параметры α и δ определяют из выражения

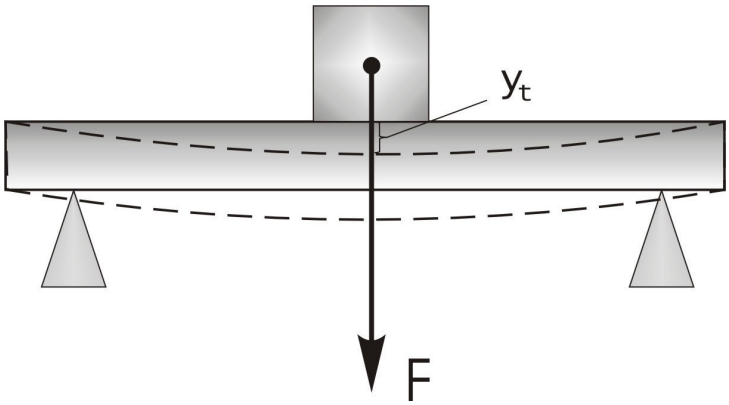


Рис. 5.15. Метод испытания «поперечный изгиб образцов-балочек».

$$\frac{y_t - y_o}{y_o} = \frac{\delta}{1-\alpha} \cdot t^{1-\alpha}, \qquad (5.41)$$

где y_o – величина мгновенного, упругого прогиба, мм.

$$y_o = \frac{к \cdot F}{E}, \qquad (5.42)$$

к – коэффициент влияния касательных напряжений.

$$к = \frac{в^3}{4ah^3}\left(1 + 2.95\frac{h^2}{в^2} - 0{,}02\frac{h}{в}\right), \qquad (5.43)$$

где h, a, в – соответственно толщина, ширина и длина образца, мм.

Обычно измеряют во времени несколько раз величину прогиба (y_t) и получают несколько уравнений, которые затем решают как систему линейных уравнений, относительно параметров α и δ. Параллельно испытывают 4-5 образцов.

Весьма характерной чертой реологических процессов, в частности ползучести, является зависимость деформации наблюдаемой в данный момент от характера всего процесса нагружения горной породы, или, другими словами, от всей предыдущей истории его деформирования. Это свойство горных пород называют наследственностью.

Обычно измеряют во времени несколько раз величину прогиба (y_t) и получают несколько уравнений, которые затем решают как систему линейных уравнений, относительно параметров α и δ. Параллельно испытывают 4-5 образцов.

Весьма характерной чертой реологических процессов, в частности ползучести, является зависимость деформации наблюдаемой в данный момент от характера всего процесса нагружения горной породы, или, другими словами, от всей предыдущей истории его деформирования. Это свойство горных пород называют наследственностью.

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией горной породы?
2. Какие виды деформаций известны?
3. Что называется модулем Юнга, модулем сдвига, коэффициентом Пуассона?
5. Что называется явлением ползучести и релаксации?
5. Какие свойства горных пород называются реологическими?
6. Назовите основные принципы составления реологических моделей.

6. АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Акустические свойства горных пород – свойства, характеризующие закономерности распространения в породах упругих знакопеременных деформаций (упругих колебаний)

6.1.Акустические волны в породах

Источники звука в горных породах: естественные (микро- и макросдвижения в горном массиве) и искусственные (взрывы, работа механизмов, специальные излучатели)

По *частоте* звуковые волны подразделяют на:

– сейсмические (частота $f < 3$ Гц);

– микросейсмические (частота $3 < f < 30$ Гц);

– сейсмоакустические (частота $30 < f < 300$ Гц);

– акустические (звуковые), которые подразделяются на:

– инфразвуковые (частота $f < 20$ Гц);

– звуковые (частота 20 Гц $< f <$ 20кГц);

– ультразвуковые (частота 20 кГц $< f < 10^7$кГц);

– гиперзвуковые (частота $f > 10^7$кГц).

По характеру *деформирования среды* акустические волны подразделяют на:

– продольные волны (V_p) – деформации объемного попеременного сжатия и растяжения. Распространяются в любой среде: газы, жидкости, твердые тела;

– поперечные волны(V_s) – упругие деформации сдвига. Распространяются только в твердых телах, т.к. жидкости не имеют сопротивления сдвигу.

– поверхностные волны(V_R). Частицы на поверхности твердого тела и на границе раздела сред с существенно разными акустическими свойствами имеют различное сопротивление перемещению в стороны, перпендикулярные границе раздела. Это приводит к тому, что часть энергии трансформируется в т.н. поверхностные волны. В поверхностной волне частицы тела, расположенные на границе раздела, колеблются в плоскости, совпадающей с границами раздела (волны Лява) и в плоскости, перпендикулярной границе раздела (волны Рэлея).

По *виду фронтовой поверхности* (т.е. геометрическому месту точек среды, имеющих в один и тот же момент одно и тоже значение фазы волны) различают: плоские волны, сферические и цилиндрические.

6.2. Параметры акустических свойств горных пород

Скорости распространения упругих волн зависят в первую очередь от упругих параметров горной породы и от характера деформирования среды.
Если

$$\frac{d}{2\lambda} < 0{,}2 \div 0{,}3 \qquad (6.1)$$

где d – поперечный размер образца горной породы и λ – длина волны) – в породе распространяются только продольные волны (случай «идеального стержня»). В этом случае скорость продольной волны

$$\mathbf{V_p^{ст}} = \sqrt{\frac{\mathbf{E_д}}{\rho}}, \qquad (6.2)$$

где $E_д$ – модуль упругости Юнга, измеренный динамическим методом, Па;
ρ – плотность породы, кг/м^3.
Если

$$\frac{d}{2\lambda} > 0{,}8 \div 1 \qquad (6.3)$$

– в породах распространяются только продольные и поперечные волны (случай «массива»). Тогда

$$\mathbf{V_p^{м}} = \sqrt{\frac{\mathbf{E_д(1 - \nu_д)}}{\rho(1 + \nu_д)(1 - 2\nu_д)}}, \qquad (6.4)$$

где $\nu_д$ – коэффициент Пуассона, измеренный динамическим методом, ед.;

$$\mathbf{V_s} = \sqrt{\frac{\mathbf{G_д}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mathbf{E_д}}{2\rho(1 + \nu_д)}}, \qquad (6.5)$$

где $G_д$ – модуль всестороннего сжатия, измеренный динамическим методом, Па;
Если

$$\frac{d}{2\lambda} = 0{,}3 \div 0{,}8 \qquad (6.6)$$

– в породах распространяются продольные, поперечные и поверхностные волны, причем при небольших удалениях от источника колебаний – продольные «стержневые», а с удалением – они исчезают и формируются продольные «массива».В этом случае скорость поверхностной волны Рэлея име

$$V_R = \frac{0{,}87 + 1{,}12\nu_д}{1 + \nu_д}\sqrt{\frac{G_д}{\rho}} = \frac{0{,}87 + 1{,}12\nu_д}{1 + \nu_д}\sqrt{\frac{E_д}{2\rho(1 + \nu_д)}} \qquad (6.7)$$

При $\nu_д = 0{,}25$ $V_p^м = 1{,}1V_p^{ст}$, $V_s = 0{,}63V_p^{ст}$ и $V_R = 0{,}58V_p^{ст}$, т.е. можем констатировать, что

$$V_p^м > V_p^{ст} > V_s > V_R$$

На величину скорости распространения волн влияют: пористость и трещиноватость породы (с увеличением пористости скорости уменьшаются), температура (у сухих пород с ростом температуры скорость монотонно возрастает, а у влажных пород при замерзании воды скорость резко возрастает), слоистость (скорость распространения волн вдоль слоистости на 10 ÷ 30% больше, чем перпендикулярно слоистости).

Приведем значения скорости продольных волн, м/с для некоторых веществ и пород: вода – 1485, воздух – 331, лед – 3200÷3300, известняк – ≅5000, песчаник – 2000÷3500, сланцы – ≅2000, масло трансформаторное – 1420.

Акустическое сопротивление

$$z = p \cdot V, \text{ кг/м}^2\cdot\text{с} \qquad (6.8)$$

определяет способность горных пород отражать и преломлять упругие волны и является отношением давления волны **p** к мгновенной скорости колебания частиц V.

Коэффициент поглощения. Амплитуда колебаний частиц в горной породе по мере удаления от источника акустических волн уменьшается по причине поглощения энергии на трение частиц, рассеивание энергии на порах, трещинах и других неоднородностях породы.

$$A_i = A_0 e^{-\Theta r_i}, \qquad (6.9)$$

где A_i и A_0 соответственно амплитуда волны на удалении r_i от источника;
Θ – коэффициент поглощения.

Для однородных тел поглощение акустических волн определяется вязкостью и теплопроводностью тел. Как и для жидкостей, в этом случае зависимость коэффициента поглощения Θ упругой продольной волны от частоты $\omega = 2\pi f$

$$\Theta = \frac{2}{3}\frac{\omega^2\eta}{\upsilon^3\rho}, \qquad (6.10)$$

где η – коэффициент вязкости (внутреннее трение породы), Па·с.

Коэффициент поглощения всегда больше в тех породах, в которых скорость упругих колебаний меньше.

Вообще для горных пород $\Theta = (0{,}05 \div 0{,}3)$ 1/м, т.е. на расстоянии $3 \div 20$ м от источника амплитуда (энергия) волны уменьшается в $e = 2{,}7$ раз.

Коэффициент отражения. Коэффициентом отражения $К_э$ называют отношение амплитуды (энергии) отраженной волны A_0 к амплитуде (энергии) падающей волны $A_п$ на границе раздела двух сред.

$$\mathbf{К_э = \frac{A_0}{A_п} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2 < 1} \qquad (6.11)$$

Например, на границе раздела воздух – порода теряется 99,98% энергии волны; вода – порода – 68%; порода – порода – около 14%.

На рисунке 6.1 представлены различные случаи преломления и отражения упругих волн на границе раздела двух сред.

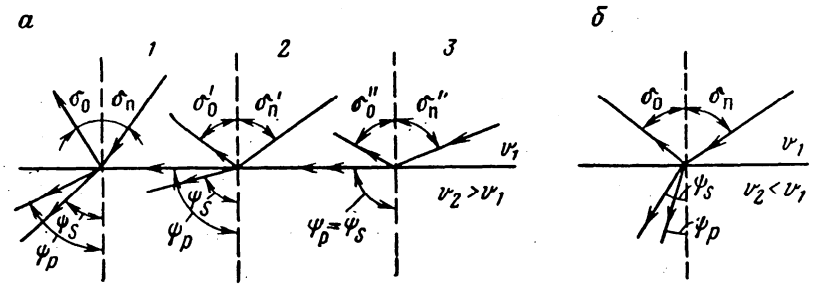


Рисунок 6.1. Преломление и отражение упругой волны на границе двух сред: а – при условии $V_2 > V_1$; 1 – общий случай; 2 – момент внутреннего отражения продольной волны; 3 – момент внутреннего отражения поперечной волны; б – при условии $V_2 < V_1$

Угол падения $\delta_п$ и угол преломления ψ упругой волны, проникшей в горную породу подчиняются закону Снеллиуса, согласно которому эти углы находятся в определенном соотношении со скоростью упругой волны в первой V_1 и второй V_2 средах

$$\frac{\sin \delta_i}{\sin \psi} = \frac{V_1}{V_2} \qquad (6.12)$$

Отношение $V_1/V_2 = n$ называется *коэффициентом преломления* упругой волны.

Так как скорости различных типов волн различны, в результате прохождения упругой волны в породе происходит ее разделение по направлениям на продольные и поперечные.

Если упругая волна падает на границу раздела перпендикулярно, происходит только отражение. При угле падения $\delta_п > 0$ происходит как отражение, так и преломление упругой волны. Постепенно увеличивая угол $\delta_п$, можно добиться такого момента, когда произойдет полное внутреннее отражение сначала продольной, а затем и поперечной волны.

6.3. Определение акустических параметров пород в лабораторных условиях

Обычно целью лабораторных исследований является определение упругих динамических параметров горных пород $E_д$ и $\nu_д$, которые определяются значительно проще, чем при механических испытаниях. При этом следует иметь в виду, что величины $E_д$ и $\nu_д$ на 10 ÷ 30% больше, чем получаемые при механических испытаниях.

Опыты проводят на образцах правильной формы с использованием различных приборов, например УК-10П, с излучателями и датчиками ультразвуковых волн. При этом возможно применение нескольких методик.

Метод прямого прозвучивания образцов (см. рисунок 6.2, а) заключается в том, что определяют скорость продольной волны для отрезков керна горной породы разной длины при разных частотах излучения. Затем, используя критерии 6.1 6.3, выявляют величины $\mathbf{V_p^м}$ и $\mathbf{V_p^{ст}}$. После этого вычисляют $\mathbf{E_д}$ из выражения 6.2 и $\boldsymbol{\nu_д}$ из выражения 6.4.

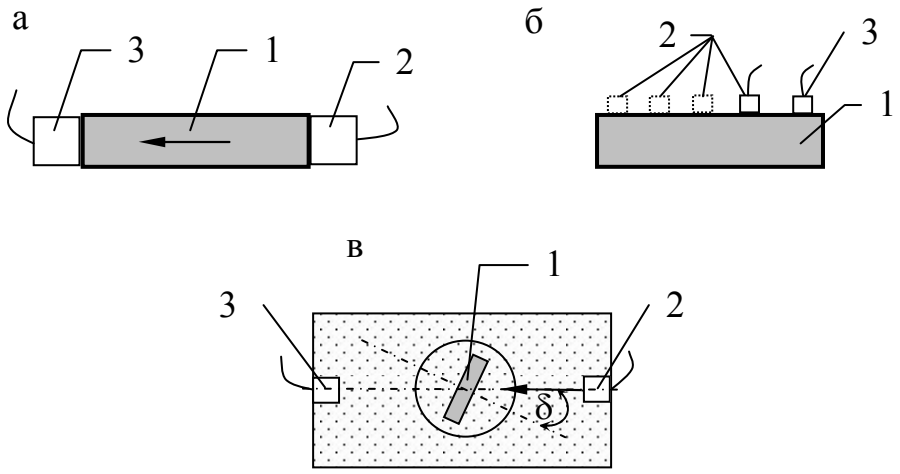


Рисунок 6.2. Схемы лабораторных экспериментов для определения упругих динамических параметров горных пород: а – прямое прозвучивание; б – продольное профилирование; в – метод критических углов; 1 – образец породы; 2 – излучатель; 3 – приемник

При использовании *метода продольного профилирования* определяют скорости поперечных волн $\mathbf{V_s}$, продольных волн в массиве $\mathbf{V_p^м}$ и поверхност-

ных волн $\mathbf{V_R}$. После этого вычисляют $\nu_д$ и $\mathbf{E_д}$, используя следующие выражения

$$\nu_д = \frac{\left(V_p^м\right)^2 - 2V_s^2}{2\left[\left(V_p^м\right)^2 - 2V_s^2\right]} \tag{6.13}$$

$$E_д = \frac{\left(V_p^м\right)^2 \rho(1 + \nu_д)(1 - 2\nu_д)}{(1 - \nu_д)} \tag{6.14}$$

$$E_д = \frac{V_s^2 \rho\left[3\left(V_p^м\right)^2 - 4V_s^2\right]}{\left(V_p^м\right)^2 - V_s^2} \tag{6.15}$$

Метод критических углов реализуют так, что образец породы помещают в масляную ванну, прозвучивают его, добиваясь полного внутреннего отражения сначала продольных, а потом и поперечных волн в образце. Результат эксперимента – соответствующие величины критических углов δ_p и δ_s. Зная, что в масле скорость падающей продольной волны $V_п$ = 1420 м/с и что при полном отражении волны угол преломления $\psi = 90°$ вычисляют $\mathbf{V_s}$ и $\mathbf{V_p}$

$$V_p = \frac{V_п}{\sin \delta_p} \text{ и } V_s = \frac{V_п}{\sin \delta_s} \tag{6.16}$$

6.4. Использования акустических свойств горных пород в горном деле

Акустические свойства горных пород широко используются геологами и геофизиками при разведке и доразведке месторождений полезных ископаемых.

На этапе эксплуатации угольных шахт в широких масштабах применяется *сейсмоакустический метод прогноза* состояния горного массива для выявления зон, опасных по выбросам угля, породы и газа или по горным ударам.

Этот метод, по сути, представляет *собой обратную задачу геофизики*, когда по параметрам акустической волны (форма волнового фронта; частота, на которой расположен максимум волновой группы; величина и характер диспер-

сии волн; скорость распространения волновой группы и т.д.) находят параметры среды, в которой эта волна распространяется.

Обратные задачи геофизики значительно сложнее прямых задач, они имеют удовлетворительное решение только в ограниченном количестве сравнительно простых случаев. Поэтому подавляющее число известных методов диагностики горного массива носит качественный характер, а сама диагностика представляет собой, как правило, сравнение текущего значения измеряемого параметра методами статистики с самим собой, но измеренным при других (образцовых) обстоятельствах. Неизбежная неоднозначность подобных методов диагностики устраняется только с помощью комплексных наблюдений – дополнения основного метода диагностики вспомогательными наблюдениями физико-технических параметров, не связанных прямо с основным.

Для прогноза *горных ударов* на шахтах и в рудниках применяют практически полную аналогию современной сейсмологической аппаратуры и методы обработки сигналов, заимствованные у сейсмологов, адаптированные для наблюдений в пределах шахтного поля. Деятельность службы прогноза горных ударов заключается в многоканальной регистрации сейсмоакустических событий, происходящих в диапазоне частот от нескольких герц до нескольких десятков герц. Указанный диапазон частот, во-первых, соответствует достаточно протяженным разрывам (длиной до нескольких десятков метров) в массиве горных пород и, во-вторых, акустические колебания этого диапазона имеют относительно небольшое затухание и распространяются на расстояния, сравнимые с размерами шахтного поля. Зарегистрированные несколькими каналами сейсмоакустические события позволяют решить уравнение локации и определить области, в которых эти события располагаются наиболее плотно. Именно области сгущения событий считают опасными по горным ударам. В зависимости от конкретных горнотехнических обстоятельств принимают решение о закрытии таких выработок или о проведении мероприятий, направленных на разгрузку критической области от действующих напряжений.

Суть сейсмоакустического метода *прогноза* зон, потенциально опасных по внезапным *выбросам* угля и газа, заключается в том, что состояние каждого добычного или проходческого забоя прогнозируется отдельно, а для регистрации акустической эмиссии применяют датчики вибрации, которые размещают в верхней и нижней частях лавы или вблизи от забоя подготовительной выработки. Датчик вибрации конструктивно совмещен с предварительным усилителем и заключен в прочный корпус, предохраняющий его от повреждения силами горного давления. Сигналы передатчика поступают по двухпроводной телефонной лини связи на поверхность, где обрабатываются и регистрируются автоматически. Одновременно эти сигналы прослушивают специально обученные операторы прогноза, которые выделяют из потока информации и регистрируют сигналы акустической эмиссии и дают прогноз.

Весьма перспективным является прогноз напряженного состояния выбросоопасного массива по спектрам сигналов оборудования, работающего по углю.

Суть метода заключается в следующем: Работы по углю возбуждают в массиве широкий спектр колебаний различных типов. Экспериментально доказано, что спектральный состав (форма огибающей спектра) изменяется в зави-

симости от напряженного состояния массива. Таким образом, обратная задача геофизики решается методом сопоставления спектра при заведомо безопасном состоянии массива (спектра-эталона безопасной ситуации) с текущим спектром. При значительном отклонении текущего спектра от эталона, состояние забоя прогнозируют, как опасное. Известно несколько вариантов интерпретации результатов, однако, в качестве нормативного прогноза используют метод, в котором интерпретация спектра упрощена и сводится к сравнению двух составляющих спектра: на частотах 300 Гц и 2500 ÷ 3000 Гц. Обширными экспериментами установлена статистическая связь между отношением уровней сигналов на указанных частотах и состоянием выбросоопасного массива.

Сотрудниками кафедры горной геомеханики ДонНТУ создана и широко применяется на шахтах Донбасса аппаратура ЗУА-98 (см. рисунок 6.3.), предназначенная для ведения вышеописанных методов прогноза на практике.

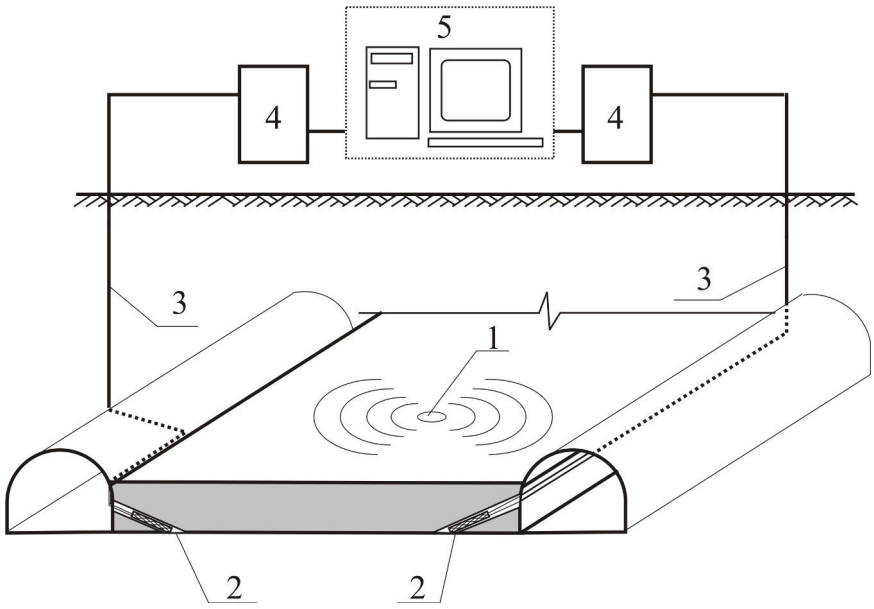


Рисунок 6.3. Схема организации сейсмических наблюдений с использованием аппаратуры ЗУА-98: 1 – очаг сейсмоакустического события; 2 – передатчик звукоулавливающей аппаратуры; 3 – телефонная линия связи; 4 – приемник звукоулавливающей аппаратуры; 5 – регистратор сейсмоакустической информации

Эта аппаратура существенно превосходит по параметрам все известные аналоги: динамический диапазон сигналов до 90 дБ; полоса рабочих частот от 8 до 4500Гц; коэффициент нелинейных искажений менее 0,01%.

Аппаратура обеспечивает непрерывный контроль линии связи и компенсацию потерь сигнала в линии. Все операции по контролю линий связи и регистрации сейсмоакустической информации полностью автоматизированы, оператор службы прогноза получает информацию о режиме работы аппаратуры с помощью специального дисплея.

Поскольку функцию регистратора аппаратуры выполняет ПЭВМ, весь комплекс технических средств может быть адаптирован для выполнения различных частных задач контроля массива.

Имеется положительный опыт применения данной аппаратуры для исследования параметров процесса обрушения кровли в очистном забое.

Контрольные вопросы

1. Как подразделяют акустические (звуковые) волны по частоте и по характеру деформирования среды?
2. Какие скорости распространения звуковых волн Вы знаете?
3. Что такое акустическое сопротивление?
4. Что такое коэффициент поглощения?
5. Что называют коэффициентом поглощения и коэффициентом преломления?
6. Где в горном деле используют акустические свойства горных пород?

7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ГОРНЫХ ПОРОД

Специальные горно-технологические параметры – это комплексные показатели свойств пород, установленные эмпирическим путём и характеризующие поведение пород при воздействии на них конкретным инструментом, механизмом или технологическим процессом.

Эти параметры подразделяются на группы по принципу принадлежности к определённым процессам технологического воздействия:

– параметры, характеризующие общую разрушаемость пород механическим способом (твёрдость, крепость, вязкость, дробимость);

– параметры, характеризующие разрушаемость пород определёнными механизмами (буримость, взрываемость, сопротивляемость пород резанию и т. д.);

– параметры, оценивающие воздействие породы на инструмент (абразивность);

– параметры, оценивающие качество полезного ископаемого (для углей – коксуемость; для строительных материалов – термостойкость и морозостойкость);

– параметры, устанавливающие производительность или эффективность различных процессов воздействия на горные породы (обогатимость, флотируемость, устойчивость в отвалах и т. д.);

– параметры, определяющие особое поведение пород при разработке месторождений полезных ископаемых (выбросоопасность, метаноносность, самовозгораемость и т. д.).

К основным горно-технологическим параметрам пород относятся: крепость, контактная прочность, абразивность, дробимость, сопротивляемость пород резанию, буримость, взрываемость, липкость, размокаемость, набухание и сопротивление копанию.

7.1. Крепость

Для сравнения различных пород по разрушаемости, а также для разработки нормативов производительности машин и приближённой экономической оценке разрушения пород в 1912 году проф. М. М. Протодьяконовым (старшим) было предложено понятие крепости. Крепость рассматривалась как сопротивление пород разрушению, независимо от рода применяемых машин или механизмов. Мерой этого свойства является коэффициент крепости **f.** Для его определения проф. М. М. Протодьяконов (старший) испытывал на одноосное сжатие образцы пород кубической формы с размером ребра 5 см. Пределы изменения прочности на одноосное сжатие образцов составили от 3 до 200 МПа. Тогда коэффициент крепости определялся из выражения:

$$\mathbf{f = \sigma_{сж} / 10} \qquad (7.1)$$

где $\sigma_{сж}$ – порочность на сжатие испытанного образца, МПа; 10 – предел прочности на сжатие эталонного образца, МПа.

Проф. М. М. Протодьяконов разделил все породы по величине коэффициента крепости на 10 категорий (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Шкала крепости пород по М. М. Протодьяконову

Категория крепости	Степень крепости	Коэффициент крепости, **f**
I	Высшей степени крепкие	20
II	Очень крепкие	15
III	Крепкие	10
IIIa	Крепкие	8
IV	Довольно крепкие	6
IVa	Довольно крепкие	5
V	Средней крепости	4
Va	Средней крепости	3
VI	Довольно мягкие	2
VIa	Довольно мягкие	1,5
VII	Мягкие	1,0
VIIa	Мягкие	0,8
VIII	Землистые	0,6
IX	Сыпучие	0,5
X	Плывучие	0,3

Предлагая формулу для определения коэффициента крепости, проф. М. М. Протодьяконов имел сравнительно небольшое количество данных о результатах испытаний пород на сжатие. Кроме того, из-за невысокого уровня развития испытательной техники того времени, средняя величина коэффициента крепости была занижена. Поэтому в 1958 году проф. Л. И. Барон по результатам испытаний цилиндрических образцов на сжатие предложил следующую формулу для определения коэффициента крепости

$$\mathbf{f_Б = \sigma_{сж} / 300 + \sqrt{\sigma_{сж} / 30}} \qquad (7.2)$$

В 70-е годы была предложена формула для определения осреднённого коэффициента крепости породы

$$\mathbf{f_{оср} = (\sigma_{сж} + 10\sigma_р) / 60 + \sqrt{(\sigma_{сж} + 10\sigma_р) / 12}} \qquad (7.3)$$

где $\sigma_р$ – предел прочности породы на одноосное растяжение, МПа.

В настоящее время известно более пятидесяти методов определения коэффициента крепости породы, в том числе – по производительности труда бу-

рильщика в смену; по количеству взрывчатого вещества, расходуемого на разрушение породы взрывом и т. д. В соответствии с Государственным стандартом Украины коэффициент крепости породы определяется методом толчения породы с помощью прибора ПОК.

Прибор ПОК (рис. 7.1.) состоит из стакана 1, вставленного в него трубчатого копра 2, внутри которого свободно помещается гиря 3, массой 2,4+0.01 кг с ручкой 4, привязанной к гире шнуром. Трубчатый копёр имеет в верхней части отверстия, в которые вставляют штифты 5, ограничивающие подъём гири. В комплект прибора входят: объёмометр, состоящий из стакана 6 и плунжера 7 со шкалой измерений с диапазоном показаний от 0 до 150 мм вдоль его продольной оси; сито с сеткой №05 (d = 0.55 мм) для рассева порций после дробления.

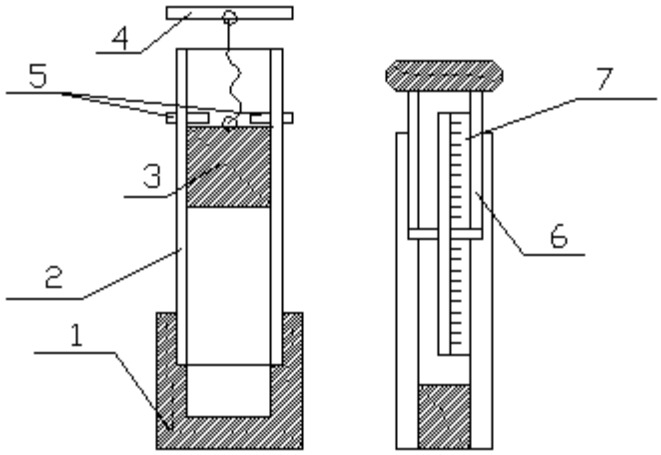


Рис. 7.1. Прибор для определения крепости (ПОК)

Отобранную пробу горной породы раскалывают молотком на твёрдом основании до получения кусков размером 20-40мм. Из измельчённого материала пробы отбирают 20 навесок массой 40-60 грамм каждая. Число сбрасывания гири на каждую навеску устанавливают при дроблении первых пяти навесок. Каждую навеску дробят в стакане гирей, падающей с высоты 0,6м. Число сбрасывания гири принимают в зависимости от ожидаемой крепости породы от 5 до 15 сбрасывания на каждую навеску.

Оставшиеся 15 навесок дробят в приборе последовательно в установленном режиме испытания при постоянном числе сбрасывания гири.

После дробления каждых пяти навесок их материал просеивают в сите; подрешётный продукт сита ссыпают в объёмометр, замеряют плунжером высоту столбика мелочи h.

Коэффициент крепости породы для каждой серии испытаний пяти навесок определяют по формуле

$$\mathbf{f = 20n / h} \qquad (7.4)$$

где 20 – эмпирический числовой коэффициент; n – число сбрасывания гири при испытании одной навески; h – высота столбика мелочи после испытания 5 навесок, мм.

Окончательный результат испытаний определяется как среднее арифметическое.

7.2. Контактная прочность

Контактная прочность характеризует сопротивление породы разрушению при внедрении в её поверхность твёрдого тела.

Для большинства пород используется метод определения контактной прочности, разработанный в ИГД им. А. А. Скочинского.

Согласно этого метода, вдавливание цилиндрического штампа с плоским основанием производится в не шлифованную поверхность породного образца. В связи с тем, что получаемые результаты существенно отличаются от значения твёрдости при вдавливании штампа, этот показатель назвали контактной прочностью.

Образец породы объемом (150…200) кубических сантиметров и толщиной не менее 100…120 мм (в противном случае возможно раскалывание породы при вдавливании штампа) должен иметь примерно параллельные грани. При необходимости поверхность образца подвергается обдирке на абразивном круге или грубой околке. Замеряется площадь S вдавливаемой в породу части штампа. Образец помещается под пресс, с помощью которого производится вдавливание штампа.

Нагружение образца производится в один приём со скоростью 3415 мм/мин до появления лунки выкола. По шкале сило измерителя пресса определяется усилие вдавливания P, необходимое для образования лунки выкола. Нагружение образца производится на разных участках одной поверхности не менее (25…30) раз. Показатель контактной прочности определяется в кгс/мм по формуле

$$\mathbf{P_к} = \sum \frac{\mathbf{P_i}}{\mathbf{nS}}, \qquad (7.5)$$

где P_i – разрушающее усилие для образования лунки выкола для i-го испытании, кгс; n – количество испытаний; S – сечение рабочей поверхности штампа, мм.

По величине показателя контактной прочности все породы разделены на 12 классов. Например, I класс пород называется «слабые» и имеет $P_к < 30$ кгс/мм^2, а XII класс, «крепчайшие» – $P_к > 565$ кгс/мм^2.

7.3. Абразивность

Абразивность характеризует способность породы изнашивать при трении о неё инструмент (горных машин или оборудования). От абразивности пород в

большой степени зависит производительность буровых машин, добычных и проходческих комбайнов.

Абразивность оценивается по износу материала, контактирующего с горной породой. Различают абразивность пород в массиве и в разрушенном (раздробленном состоянии). Во втором случае величина абразивности существенно выше.

Известные методы определения абразивности можно разделить на две группы:

– лабораторные (основаны на измерении массового износа при истирании породного образца о наждачную шкурку или стального эталонного стержня, трущегося о породу);

– производственные (абразивность породы оценивается по изменению осевого усилия при сверлении породы с постоянным усилием подачи).

Сущность лабораторного метода измерения относительной износостойкости пород заключается в следующем. К вращающемуся полому цилиндру, обтянутому наждачной шкуркой, с помощью специальных грузов прижимают образец горной породы. По результатам испытаний строят графики зависимости массового износа образца от времени при заданных усилиях прижатия образца к поверхности цилиндра и угловой скорости вращения. Затем, по ним определяют относительные износостойкость и абразивность. Такой метод испытаний часто применяется для оценки износостойкости различных строительных материалов.

Для горных пород, испытуемых на абразивность, чаще используется следующая методика, разработанная в ИГД им. А.А. Скочинского. Сущность метода заключается в истирании эталонного цилиндрического стержня из термически необработанной стали (марка стали У8А) диаметром 8 мм об естественную поверхность породного образца на переоборудованном настольном сверлильном станке при осевом усилии 0,15 кН и скорости вращения 400 об/мин. За показатель абразивности породы (А), принята потеря массы эталонного стержня в мг за 10 мин испытаний. Перед испытанием эталонный стержень взвешивается с точностью до 0,1 мг (G1). После этого, образец породы массой от 0,1 до 4,0 кг зажимают между деревянными прокладками в станочных тисках, так, чтобы верхняя поверхность была горизонтальной. Затем шпиндель, с закреплённым в патроне эталонным стержнем длиной 50…70мм опускают на образец и включают привод станка на 10 мин. По окончании опыта эталонный стержень взвешивают (G2). Показатель абразивности вычисляют по формуле

$$\mathbf{A = (G_1 + G_2) / 2} \qquad (7.6)$$

По величине показателя абразивности все породы разделены на 8 классов (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Шкала абразивности горных пород

Класс абразивности	Наименование класса	Показатель абразивности, А, мг
I	Весьма малоабразивные	<5
II	Малоабразивные	5…10
III	Ниже средней абразивности	10…18
IV	Средней абразивности	18…30
V	Выше средней абразивности	30…45
VI	Повышенной абразивности	45…65
VII	Высокоабразивные	65…90
VIII	Высшей степени абразивности	>90

Для определения абразивности пород в производительных условиях применяют прибор ПТА.

Для разрыхлительных (рыхлых) горных пород выделяют 2 показателя, характеризующих абразивность: абразивность трения и ударную абразивность. Абразивность трения характеризует износ контактирующего с породой рабочего инструмента при его перемещении. Ударная же абразивность характеризует износ поверхности при ударах о них кусков породы.

7.4. Дробимость

Дробимость характеризует процесс объемного разрушения породы с большой скоростью нагружения. В настоящее время известно много способов определения дробимости, как правило, основанных на измерении энергоёмкости процесса дробления или величины вновь образованных поверхностей после дробления.

Наибольшее распространение получил метод, разработанный в ИГД им. А. А. Скочинского, основанный на разрушении образцов породы произвольной формы с последующим ситовым анализом продуктов разрушения. Метод заключается в следующем: с высоты 0,5 м на образец породы однократно сбрасывается гиря массой 16 кг. Масса образца неправильной формы должна составлять около 0,07 кг с отклонением до 15%. Измельчённая порода просеивается через сито диаметром $7 \cdot 10^{-3}$ м. На технических весах взвешивают породу, прошедшую через сито G, г. Показатель дробимости ($К_{дроб}$) численно равен суммарному объему фракций, прошедших через сито с диаметром 7 мм в кубических сантиметрах

$$\mathbf{К_{дроб} = G / \gamma}, \qquad (7.7)$$

где γ – объемная масса породы, г/см^3

По величине показателя дробимости все породы разделены на 6 классов (табл.7.4).

Таблица 7.4

Классификация пород по дроби мости

Класс по дробимости	Характеристика класса	Величина показателя дробимости, $см^3$
I	В высшей степени труднодробимые породы	<1,8
II	Весьма трудноразрушаемые породы	1,81-2,70
III	Трудноразрушаемые породы	2,71-4,0
IV	Среднедробимые породы	4,01-6,0
V	Легкодробимые породы	6,01-9,0
VI	Очень легкодробимые породы	>9,0

Дробимость пород – параметр, обратный вязкости. Для оценки дробимости пород, возможно использовать величину, обратную удельной работе разрушения.

7.5. Сопротивляемость резанию

Сопротивляемость резанию – это параметр, характеризующий приращение силы резания пород в массиве на 1 см толщины среза.

Для определения сопротивляемости пород резанию в настоящее время используется методика, разработанная в ИГД им. А. А. Скочинского. С её помощью определяется сопротивление углей резанию стандартным одиночным резцом, в условиях забоя, с замерами усилий прибором ДКС (динамометр крупного скола).

Прибор ДКС-2 (рис. 7.2) состоит из распорной стойки 1 с державкой 2, закрепленной в поворотной обойме 3 эталонного резца 4. Через сцепное устройство с датчиком 5, резец 4 поворачивается относительно стойки 1 лебёдкой 7. Усилия резания записываются регистрирующим гидравлическим манометром, который состоит из датчика 5, записывающего аппарата 8 с приводом 7.

Методика определения сопротивления угля резанию заключается в следующем: после зачистки забоя на глубину более 0.4 м, производят обработку забоя поворотом державки с резцом вокруг стойки. Для сбора разрушенного угля на почве пласта вплотную к забою расстилают брезент. Выдвигают резец из державки для получения среза нужной толщины h (от 2 до 15см), регулируя т. о., чтобы максимальное усилие на динамометре не превышало 4500кгс. Не меняя высоту установки резца, от почвы пласта делают не менее 4 срезов. Затем смещают резец по вертикали не менее, чем на 5 ширин и повторяют эксперимент. При каждом эксперименте фиксируют: усилие резания, высоту оси среза от почвы пласта, длину пути резания, массу угля от ширины среза, ширину

бокового развала. После этого, строят по данным опытов графики усилий резания $Z_{ср}$. как функцию от толщины среза h.

Тогда, сопротивляемость углей резанию представляет собой приращение усилий резания на 1 см толщины среза

$$\overline{A} = Z_{ср} / h, \qquad (7.8)$$

где $Z_{ср}$ – усилие резания, кгс; h – толщина среза, см.

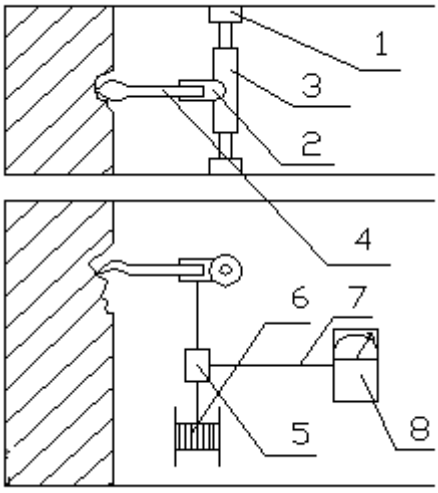


Рис. 7.2. Прибор ДКС–2

По величине сопротивляемости резанию, угли разделяются на 8 категорий (I категория – до 60 кгс/см, а VIII категория – свыше 420 кгс/см)

Существуют и другие методики определения сопротивляемости пород резанию, разработанные в ИГД им. Скочинского, ДонУГИ и Донгипромуглемаше.

Так ИГД им. Скочинского разработал методику определения сопротивляемости угля резанию динамометрическим сверлом СДМ-1, сущность, которой заключается в разбуривании заранее пробуренного шпура диаметром 42 мм коронкой СДМ, диаметром 62 мм с записью момента сопротивления резанию.

Сконструированы приборы ПОР-3 (ДонУГИ) и ПР-5 (Донгипроуглемаш), позволяющие определить сопротивляемость резанию, принцип работы которых основан на притягивании резца вдоль предварительно пробуренного шпура диаметром 42 мм с замером усилий резания. Сопротивляемость резанию для пород изменяется в широком диапазоне. Некоторые справочные данные для пород Донбасса приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Значение сопротивляемости резанию для пород Донбасса

Наименование пород	Значение сопротивляемости резанию, кгс/см
Уголь	20…400
Углистый сланец	70…250
Глинистый сланец	120…350
Песчаный сланец	200…500
Песчаник	380…1000
Известняк	300…600
Твёрдые включения	500…2000

7.6. Буримость

Под буримостью понимают способность горных пород оказывать сопротивляемость проникновению в них бурового инструмента в процессе бурения. Буримость оценивают длиной шпура, пробуренного за единицу времени в стандартных условиях или чистым временем бурения $T_б$ 1 м шпура в стандартных условиях.

Под стандартными условиями понимают применение при бурении определённого инструмента, армированного стандартными сплавами, постоянный диаметр шпура, постоянный режим бурения (энергия удара, скорость вращения, осевое давление, давление сжатого воздуха в магистрали и т. д.). Определяется буримость методом обуривания забоев на основании хронометража чистого времени бурения. В настоящее время существуют несколько классификаций (шкал) горных пород по буримости, однако все они связаны между собой и с коэффициентом крепости пород по шкале М. М. Протодьяконова. Классификация пород, вошедшая в строительные нормы и правила (СНиП) представлена в табл. 7.7.

В качестве показателя буримости в некоторых случаях можно принимать энергоёмкость бурения единицы длины шпура. Так, для вращательного бурения она определяется из выражения

$$\mathbf{Э_{бур} = W / V}, \qquad (7.9)$$

где W – средняя нагрузка на двигатель сверла; V – средняя скорость бурения.

При разведочном бурении показатель буримости устанавливают по скорости бурения.

По величине показателя трудности бурения $П_Б$ все горные породы разделены на 5 классов по 5 категорий в каждом классе. К первому классу отнесены легкобуримые породы ($П_Б$ = 1…5); ко второму – породы средней трудности бурения ($П_Б$ = 6…10); к третьему – труднобуримые ($П_Б$ =11…15); к четвёртому

– весьма труднобуримые ($П_Б$ = 16…20); к пятому – исключительно труднобуримые породы ($П_Б$ = 21…25).

Таблица 7.6

Классификация пород по СНиП

Категория пород по крепости и способу разработки	Коэффициент крепости, f, ед.	Категория крепости пород по СниП	$Т_б$, мин для перфоратора ПР-24 Л
Внекатегорийная (разрабатывается взрывным способом (БВР))	19-20 15-18	XI X	9,85
I (разрабатывается БВР)	10-14	IX	8-9,5
II (разрабатывается БВР)	7-9	VIII	6,6-6,95
III (разрабатывается БВР)	5-6 4-5	VII VII-VI	4,5-6,55
IV (разрабатывается БВР и отбойными молотками (ОМ))	3-2	V	3,8-4,45
V (разрабатывается ОМ)	1,5-2 1,5	IV III-II	2,6-3,75
VI (разрабатывается ОМ)	1-1,5	III-II	< 2,6
VII (разрабатывается вручную)	0,9 0,6 0,4	III-II I I	- - -

7.7. Взрываемость

Взрываемость характеризует сопротивляемость горной породы разрушению взрывом. Взрываемость пород оценивается расходом взрывчатого вещества (ВВ) или шпуров на 1 м породы в массиве. Эти показатели называются *удельный расход ВВ* и *удельный расход бурения* соответственно. Удельный расход ВВ – q в кг ВВ/м^3 породы определяется через эталонный удельный расход ВВ – q_0, зависящий от коэффициента крепости пород по шкале М.М. Протодьяконова (f)

$$\mathbf{q_0 = 0{,}065 \cdot f} \qquad (7.10)$$

Эталонный удельный расход ВВ для пород составляет от 50 до 1000 г/м^3. С учётом поправочного коэффициента, учитывающего свойства ВВ, схему

взрывания и размеры шпура (К), формула для определения удельного расхода ВВ запишется в виде

$$q = q_0 K \tag{7.11}$$

Взрываемость горных пород можно определить также по максимальной линии наименьшего сопротивления (л.н.с.), представляющей собой зону, где взрыв заряда эталонного ВВ производит отрыв породы от массива при постоянной длине заряда, диаметре и глубине шпура. Тогда взрываемость выразится отношением максимальной л.н.с. к глубине шпура и объёму ВВ в шпуре.

Различают лёгкую, среднюю, трудную и весьма трудную взрываемость пород.

7.8. Липкость и сопротивление копанию рыхлых и разрыхленных пород

Рыхлые и разрыхлённые породы, при изменении влажности приобретают ряд специфических свойств, которые необходимо учитывать в процессах горного производства.

Так, изменение свойств грунтов при увлажнении оценивают липкостью. *Липкость* – это способность рыхлых и разрыхлённых горных пород при определённом содержании влаги в них прилипать к поверхности инструмента и оборудования (ковш экскаватора). Физический смысл прилипания заключается в том, что при определённой влажности, толщина плёнок воды, обволакивающих частицы породы (физически связанная вода) становится такой, что они с равной силой воздействуют как с минеральными частицами породы, так и с поверхностью соприкасающихся с ними инструментов. Наибольшая липкость соответствует влажности пород близкой к молекулярной влагоёмкости. При дальнейшем повышении влажности и увеличении толщины плёнки происходит резкое снижение липкости.

Липкость пород оценивается напряжениями, необходимыми для отрыва прилипшего тела от грунта. Липкость пород изменяется от 2 кПа до 50 кПа. Она зависит от свойств пород, а также от свойств материала, из которого изготавливается инструмент, и характера поверхности контактирующего тела.

Сопротивляемость пород при их выемке экскаваторами принято оценивать величиной *удельного сопротивления копанию* K_F:

$$K_F = F_K / S, \tag{7.12}$$

где F_k – касательная сила сопротивления породы копанию, Н; S – площадь поверхности отрыва, м.

Площадь поверхности отрыва находится как произведение ширины ковша на глубину внедрения ковша в породу при копании.

Удельное сопротивление копанию зависит от прочности параметров, плотности породы, сцепления пород и их влажности.

При выемке механической лопатой рыхлых песков $\mathbf{K_F} = (0{,}1640{,}25) \cdot 10^5$ Па, у тяжёлых влажных глин $\mathbf{K_F} = (243) \cdot 10^5$ Па. У полускальных пород в пределах одного структурного блока $\mathbf{K_F}$ достигает 1 Мпа.

В зависимости от величины $\mathbf{K_F}$ различают лёгкие условия копания ($\mathbf{K_F} < 1{,}2 \cdot 10^5$ Па) и тяжёлые условия копания ($\mathbf{K_F} > 2{,}8 \cdot 10^5$ Па).

Величина $\mathbf{K_F}$ определяет также относительную продолжительность рабочего цикла экскаваторов.

Иногда для получения ориентировочных параметров горно-технологических свойств используют следующие эмпирические формулы

$$\sigma_{сж} = 10f, \text{МПа}; \qquad P_к = 1{,}59f^{1{,}67}, \text{кгс/мм}^2;$$

$$\sigma_{сж} = 6{,}3P_к^{0{,}6}, \text{МПа}; \qquad К_д = \frac{67}{f} - 1{,}7, \text{см}^3;$$

$$\sigma_{сж} = 1000 / К_д^{1{,}45}, \text{МПа}; \qquad \bar{A} = 11\sigma_{сж} + 40, \text{кгс/см}.$$

7.9. Использование горно-технологических свойств в горной практике

Свойства, относящиеся к этой группе, наиболее широко используются в горной практике. Они положены в основу целого ряда специальных классификаций пород, вошедших в различные нормативные документы, отраслевые инструкции и т. д. Зная величины параметров из этой группы свойств, можно легко определить прочностные, акустические, плотностные, тепловые и другие параметры пород.

Так коэффициент крепости породы используется для оценки её общей способности сопротивляться разрушению, при выборе практически любого горно-шахтного оборудования, при оценке устойчивости крепи и различных объектов, расчетах крепи, расчетах оборудования для разрушения пород, расчетах паспортов БВР.

Коэффициент крепости пород положен в основу классификации пород по СНиП, от которой зависят все нормы выработки, времени и расценки на любые горные породы, оговоренные в ЕНиР, ЕНВ, УКНВ, ЕРЕР и т. д.

Контактная прочность пород почвы предопределяет выбор механизированной крепи для очистного забоя, тип искусственного сооружения для охраны выработок со стороны очистного забоя.

Абразивность пород используется для оценки потребности в режущем инструменте при бурении, выемке пород и углей добычными и проходческими комбайнами.

Дробимость пород используется в различных расчетах по энергоёмкости разрушения в процессе обогащения полезного ископаемого.

Сопротивляемость угля резанию предопределяет выбор технологии разрушения угля в очистном забое (комбайновая или струговая), позволяет опти-

мизировать параметры резания, определить производительность оборудования при этом.

Буримость позволяет рассчитывать трудоёмкость процессов, связанных с бурением шпуров, скважин и т. д., в том числе при проведении выработок по технологии БВР.

Взрываемость позволяет разрабатывать паспорта БВР при открытой и подземной разработке полезных ископаемых. Сопротивление пород копанию позволяет обоснованно выбирать тип экскаватора для выемки пород, рассчитывать его производительность.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под крепостью горных пород?
2. Кто предложил понятие крепости породы?
3. Сколько категорий крепости Вам известно?
4. Какие методы определения коэффициента крепости Вам известны?
5. В чём сущность метода толчения для определения крепости?
7. Что называется контактной прочностью породы?
7. Какие требования предъявляются к образцу породы при определении контактной прочности по методике ИГД им. А. А. Скочинского?
8. Каков порядок определения контактной прочности?
9.На сколько классов разделены породы по контактной прочности?
10. Что называется абразивностью породы?
11. Какие группы методов определения абразивности Вы знаете?
12. В чём сущность метода определения абразивности по методике ИГД им. А. А. Скочинского?
13. Что принято за показатель абразивности породы?
14. На сколько классов разделены породы по абразивности?
15. Что такое абразивность трения и ударная абразивность?
17. Что характеризует дробимость породы?
17. В чём сущность метода определения дробимости по методике ИГД им. А. А. Скочинского?
18. На сколько классов распределены породы по дробимости?
19. Что такое сопротивляемость резанию?
20. Как определяется сопротивляемость резанию прибором ДСК?
21. Какие методы (приборы) для определения сопротивляемости резанию Вам ещё известны?
22. Что понимают под буримостью породы?
23. Чем оценивается буримость пород?
24. На сколько категорий делятся породы по буримости в классификации, приведенной в СНиП?
25. Что понимают под показателем трудности бурения?
27. Что такое взрываемость пород и чем она характеризуется?
27. Как классифицируют породы по взрываемости?
28. Что понимают под липкостью породы?
29. Что понимают под размокаемостью породы?

30. Что понимают под набуханием породы?

31. Что понимают под сопротивлением копанию рыхлых и разрыхленных пород?

32. Что Вы знаете об использовании специальных горно-технологических свойств пород в практике горного дела?

8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Термодинамические свойства характеризуют способность породы накапливать и передавать тепло и определяют ее поведение в температурном поле.

8.1 Общие сведения о температурном поле в горных породах

Источниками тепла для Земли являются: радиоактивные (тепло получается при распаде радиоактивных элементов, которые залегают на глубинах до 200 км); Солнце; тектонические и химические процессы внутри Земли.

От солнца Земля (горные породы) получает количество тепла порядка 10^{21}-10^{22} дж в год, от радиоактивного распада в 10 раз меньше, но энергия Солнца проникает в глубь земли всего на 20 м, поэтому главный источник тепла для горных пород – радиоактивный распад.

Температурное поле земли по своему характеру очень сложно, т.к. радиоактивные элементы в коре Земли распространены очень неравномерно, но, в общем, с глубиной температура пород увеличивается.

Температурное поле массива горных пород в данном районе характеризуется следующими параметрами: *глубиной* и *температурой* пород в *нейтральной зоне*, а также величиной *геотермической ступени*.

Нейтральная зона – зона, где температура неизменна в течение года. Для Донбасса ее глубина 20 м и температура 8,5ºС.

Геотермическая ступень – глубина, на которой температура пород увеличивается на 1ºС. Для Донбасса это ~ 30 м, для Кривого Рога – 55 м, для Камчатки – 2,5 м, а для Японии – 1,5 м.

8.2. Основные тепловые параметры горных пород

Базовыми параметрами тепловых свойств горных пород являются:

1.Удельная теплоемкость – **c**, кДж/кг град.

2.Коэффициент теплопроводности – **λ**, Вт/м град, кДж/м с град.

3.Коэффициент линейного температурного расширения – **α**, 1/град.

Кроме того, известны другие, часто применяемые в горных расчетах, параметры тепловых свойств пород:

4.Коэффициент температуропроводности — **a**, $м^2/с$.

5.Коэффициент объемного теплового расширения – $\gamma_т$, 1/град

6.Коэффициент теплопередачи – **К**, $кДж/м^2$ с град.

7.Удельная теплота плавления – **L**, Дж/кг.

8.Температурный интервал плавления – $(T_1 – T_2)$, ºС.

Для углей, кроме того, различают: теплотворная способность, термохимическая стойкость, коксуемость, спекаемость и выход летучих.

Рассмотрим некоторые параметры, указанные выше, подробнее.

Удельная теплоемкость – количество тепла, необходимого для нагревания 1 кг породы на 1 градус.

$$dQ=c\cdot mdT \tag{8.1}$$

Для горных пород дельная теплоемкость изменяется в пределах от 0,4 до 2 кДж/кг град. Например: для каменного угля с =1,3 кДж/кг град; для антрацита 0,93; для известняка 0,67…1,04; для песчаника 0,81; для сланец 0,75.

Теплоемкость горных пород не зависит: от состояния, в котором находится порода (нормальном или расплавленном); от зернистостости породы; от слоистости, т.к. передача тепла в горных породах фотонная, представляющая собой особый вид колебания кристаллической решетки.

Теплоемкость зависит только от пористости горной породы

$$c\cdot\rho\approx c_o\rho_o(1-\rho) \tag{8.2}$$

где c_o и ρ_o – теплоемкость и плотность минералов, слагающих горную породу.

Коэффициент теплопроводности – количество тепла, проходящего через породу за 1 ед. времени через 1 ед. площади при градиенте температуры равном 1 ед.

Это вытекает из закона Фурье

$$d^2Q = -\lambda gradTdSd\tau, \tag{8.3}$$

Знак «минус» указывает на то, что поток тепла направлен навстречу градиента (в направлении уменьшения температуры).

Для горных пород λ = 0,1… 7 Вт/м град. Например: для угля, соответственно, 0,5…0,9, для антрацита 0,4; для известняка 1,0…2,3; для песчаника 1,3… 4,2; для сланца 1,5…2,2.

Величина коэффициента теплопроводности зависит: от пористости породы (у песка он в 6 …7 раз меньше, чем у песчаника); от формы пор и трещин (если удлиненные поры или трещины перпендикулярны тепловому потоку, то λ уменьшается); от размеров зерен (с уменьшением зерен уменьшается и коэффициент теплопроводности).

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость распространения изотермической поверхности в породе. Эта скорость зависит не только от теплопроводности, но и от теплоемкости и его величину обычно получают расчетным путем

$$a=\frac{\lambda}{\rho\cdot c} \tag{8.4}$$

Для горных пород величина коэффициента температуропроводности изменяется от10^{-6} до 10^{-7} м^2/с.

Коэффициент теплопередачи характеризует способность пород передавать тепло из одной породы в другую.

На границе перехода из одной породы в другую закономерность передачи тепла следующая

$$\Delta Q = K\Delta T\Delta S\Delta\tau \qquad (8.5)$$

Коэффициенты объемного и линейного температурного расширения пород характеризуют связь между повышением температуры пород и увеличением их линейных размеров или объема.

$$\Delta l = \alpha l\Delta T; \quad \Delta V = \gamma_т V\Delta T; \quad \gamma_т = 3\alpha \qquad (8.6)$$

Для горных пород величина коэффициента линейного температурного расширения изменяется в пределах от $2\cdot10^{-6}$ до $10\cdot10^{-4}$ 1/град. Например: для песчаника $\alpha = (0{,}5\ldots{,}2)\cdot10^{-5}$ 1/град; для известняка $(0{,}5\ldots0{,}89)\cdot10^{-5}$ 1/град; для сланца $\alpha \sim 0{,}9\cdot 10^{-5}$ 1/град.

Величины коэффициентов α и $\gamma_т$ зависят от размеров зерен, слагающих горную породу (увеличиваются с увеличением зерен) и от пористости породы (увеличиваются с увеличением пористости).

8.3. Определение параметров термодинамических свойств пород в лабораторных условиях

Обычно для целей горного производства в лабораторных условиях определяют следующие тепловые параметры горных пород: удельная теплоемкость; коэффициент теплопроводности и коэффициент температуропроводности.

Для этого используют различные лабораторные установки, на которых реализуют *метод постоянного* или *мгновенного источника тепла*.

На кафедре горной геомеханики ДонНТУ создан и успешно применяется уникальный прибор для определения вышеприведенных тепловых параметров горных пород методом мгновенного источника тепла (рис. 8.1 и 8.2).

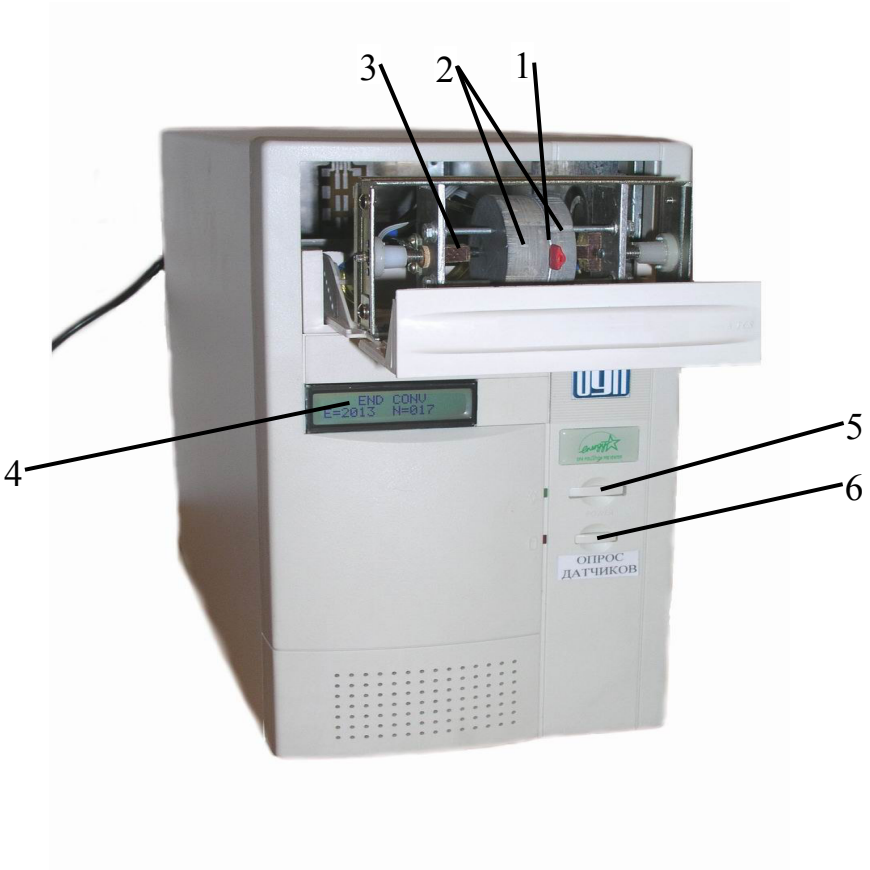


Рис. 8.1. Общий вид прибора ДонНТУ для определения тепловых свойств гор ных пород: 1 – нагреватель, 2 – образец породы, 3 – датчик тепла, 4 – дисплей, 5 – кнопка включения прибора, 6 – кнопка опроса датчиков

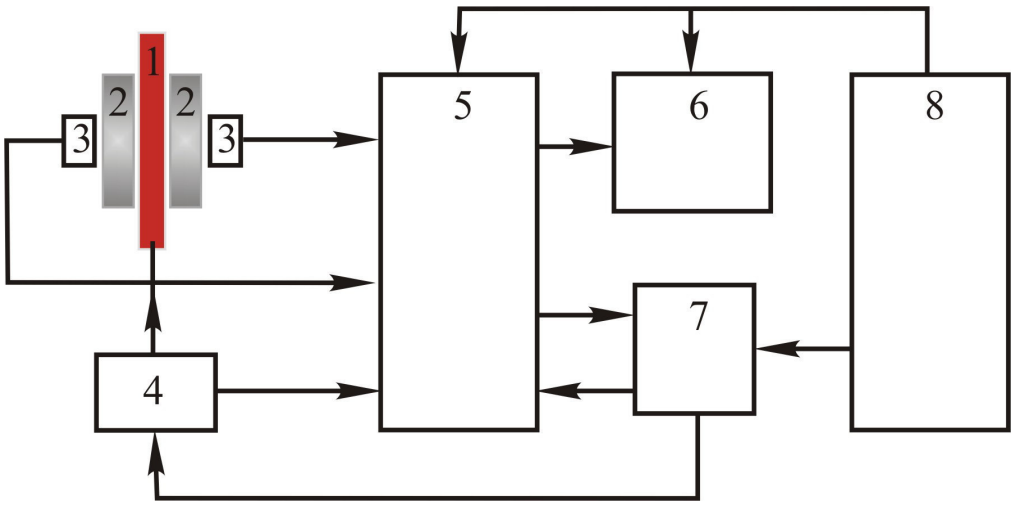


Рис. 8.2. Структурная схема прибора ДонНТУ для определения тепловых свойств горных пород: 1 – нагреватель, 2 – образец породы, 3 – датчик тепла, 4 – блок управления током нагревателя, 5 – процессор, 6 – дисплей, 7 – вторичный источник питания, 8 – первичный источник питания

В качестве образцов используются диски со шлифованными поверхностями, изготовленные из кернов горных пород.

В процессе опыта, зная геометрические размеры образцов и их плотность, измеряют: длительность и величину теплового импульса; время, за которое температура «холодной» поверхности образца достигла максимума; максимальную температуру «холодной» поверхности образца.

8.4. Использование тепловых свойств и явлений в горном деле

Для бурения скважин по весьма прочным породам на применяют метод *огневого бурения* с использованием чаще всего бензовоздушных горелок в качестве термобуров.

Скорость такого бурения зависит от тепловых свойств горной породы, которые отражаются в виде критерия термобуримости породы ($П_{ТБ}$), соответствующему объему породы, разрушенной при воздействии на неё 1 Дж тепла.

$$\mathbf{П_{ТБ}} = \frac{\alpha \mathbf{E}}{\mathbf{c\rho\sigma_р(1-2\nu)}} \qquad (8.7)$$

Для горных пород вообще $П_{ТБ} = 2\cdot10^{-8} \ldots 5\cdot10^{-6}$ м^3/Дж. Чем меньше величина $П_{ТБ}$, тем хуже порода поддается термобурению.

Большое значение имеет знание тепловых свойств горных пород в расчетах *тепловых режимов шахт*. Например, установлено, что коэффициент теплопередачи, характеризующий процесс передачи тепла из горного массива в горную выработку может быть рассчитан для незакрепленной выработки по формуле

$$\mathbf{К = 2\varepsilon_ш G^{0,8} П^{0,2} / S}, \qquad (8.8)$$

где $\varepsilon_ш = 1\ldots3$ – коэффициент, учитывающий шероховатости породного обнажения; G – расход воздуха в выработке; П – периметр выработки; S, – площадь поперечного сечения выработки.

Для закрепленной выработки

$$\mathbf{К' = \frac{1}{(1/К + \delta_к / \lambda_к)}}, \qquad (8.9)$$

где $\delta_к$ – толщина крепи; $\lambda_к$ – коэффициент теплопроводности крепи.

Глубин промерзания рыхлых и связных пород зависит от времени и коэффициент температуропроводности породы

$$\mathbf{h = 2\sqrt{at}} \qquad (8.10)$$

При *подземной выплавке серы* количество тепла для выплавления серы из единицы объема руды зависит от температуры плавления серы (T_c = 119 ^oC), удельной теплоты плавления серы (L≈49 кДж/кг), удельной теплоемкости серы (c_c = 0,67…1,86 кДж/кг град) и рассчитывается по формуле

$$\mathbf{Q = L\gamma_c + c_c\gamma_c(T_c - T_0)}, \qquad (8.11)$$

где γ_c – объемный вес серы; T_0 – температура массива.

При *подземной газификации угля* для создание канала горения между скважинами используют явление теплового электрического пробоя. Для этого в скважины опускают электроды и создают между ними электрическое напряжение. Величина этого напряжения зависит от коэффициента теплопроводности угля.

Кроме того, тепловые свойства горных пород необходимы для расчетов процессов сушки горной массы, термообработки брикетов, агломерации, обжига руд и т.п.

Контрольные вопросы

1. Какова величина геотермической ступени для Донбасса?
2. Перечислите и дайте определения базовым параметрам тепловых свойств горных пород.
3. Какие методы применяют для определения параметров тепловых свойств горных пород в лабораторных условиях?
4. Укажите процессы горного дела, которые зависят от параметров тепловых свойств горных пород.

9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОД

9.1. Общие сведения о воде в горных породах

Гидравлические свойства горных пород характеризуют содержание, характер движения и взаимодействие с минеральным скелетом породы шахтных вод.

Причины, обуславливающие поступление воды в горные выработки, очень разнообразны, но все же в основном водообильность месторождения определяется литологическим составом и условиями залегания горных пород. Горные породы, слагающие верхнюю оболочку земли, все без исключения обладают той или иной степенью пористости.

Наличие пор и трещин в породах предопределяет возможность их заполнения различными жидкостями и газами. В результате порода становится многофазной средой и свойства ее начинают зависеть от всего комплекса входящих в нее компонентов и от их взаимодействия.

Наиболее часто горные породы бывают насыщены водой, которая может содержаться в породах в разном виде. Различают химически связанную, физически связанную и свободную воду.

Химически связанная вода наряду с другими молекулами и ионами входит в состав кристаллической решетки минералов. Удаление такой воды приводит к разрушению минерала, превращению его в другое - безводное соединение.

Если вода в кристаллической решетке находится в виде молекул, то такая вода называется кристаллизационной. Она характерна, например, для гипса ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$), опала ($SiO_2 \cdot nH_2O$), карналлита ($KCl \cdot MgCl_2 \cdot 6H_2O$) и многих других минералов. Кристаллизационная вода, как правило, удаляется из породы при температуре 200-600° С.

Вода, образующаяся при нагреве не входящих в кристаллическую решетку гидроксильных ионов (OH^- и H^+), называется *конституционной*. Она характерна для таких минералов, как тальк ($Mg_3(OH)_2Si_4O_{10}$), малахит ($Cu_2(CO_5)$ (OH_2)), и каолинит (Al_2 $(OH)_4 \cdot Si_2O_5$). Температура выделения конституционной воды достигает 1300° С.

Наличие в породе химически связанной воды проявляется только при ее нагревании. Она обусловливает изменение свойств породы при высоких температурах. Благодаря нарушению кристаллической решетки минералов при выделении из них химически связанной воды происходит ослабление и разрушение пород, а в ряде случаев их упрочнение (например, глины).

Физически связанная вода тесно соединена молекулярными силами притяжения с твердыми частицами породы, обволакивая их в виде пленки. Ее количество зависит от смачиваемости пород.

Смачиваемость – это способность горной породы покрываться пленкой жидкости. Величина смачивания твердой поверхности жидкостью характеризуется краевым углом α между плоскостью твердого тела и касательной к поверхности капли, проведенной из точки касания капли с телом.

Смачиваемость пород зависит от их *адсорбционной* способности, т.е. способности концентрировать (адсорбировать) на своей поверхности молекулы жидкости за счет электростатического притяжения. Большинство пород относится к хорошо смачиваемым водой (гидрофильным). Частично или полностью не смачиваемы (гидрофобии) – сера, угли, битуминозные песчаники и некоторые другие породы.

Адсорбционная способность пород возрастает при наличии в них растворимых солей, глинистых минералов (особенно с раздвижной кристаллической решеткой – монтмориллонитов), а также с увеличением удельной поверхности твердой фазы. В связи с последним наблюдается увеличение адсорбционной способности с уменьшением размеров частиц рыхлой породы и увеличением их угловатости.

Физически (прочно) связанная вода не перемещается в породах, имеет высокую плотность (до $1{,}74 \cdot 10^3$ кг/м^3), низкую температуру замерзания (-78°С), малые значения теплоемкости, диэлектрической проницаемости, электропроводности, не является растворителем. Она удаляется из породы только нагреванием до 105-110° С.

Свободная вода в породах может находиться в виде капиллярной воды, удерживаемой в мелких порох силами капиллярного поднятия, и в виде гравитационной воды, заполняющей крупные поры и передвигающейся в породах под действием сил тяжести или давления.

Количество капиллярной воды оценивается параметром капиллярной влагоемкости. Последняя зависит от среднего размера поровых каналов, перпендикулярных к зеркалу грунтовых вод в изучаемом объеме.

В зависимости от минерального, гранулометрического состава пород и формы частиц соотношение количества различных видов воды в породах может быть разным. Так, пески содержат в основном гравитационную воду, а глины, лёсс и суглинки – молекулярную и капиллярную. Относительное содержание последней в глинах достигает 18-50%.

9.2. Параметры гидравлических свойств горных пород

Количество физически связанной воды в породах оценивается показателями максимальной гигроскопичности и максимальной молекулярной влагоемкости.

Максимальная *гигроскопичность,* $w_г$ – наибольшее количество влаги, которое способна адсорбировать на своей поверхности горная порода из воздуха с относительной влажностью 94%. Максимальная гигроскопичность характеризует адсорбционную способность пород и поэтому зависит от тех же факторов, что и последняя.

Молекулярная, или пленочная *влагоемкость*, $w_м$ - количество воды, удерживаемой силами молекулярного притяжения на поверхности частиц породы:

$$\mathbf{w_м = \frac{m_м - m_с}{m_с}} \qquad (9.1)$$

где $m_м$ – масса влажного образца породы; m_c – масса образца породы, высушенного при температуре 105-110°С.

За счет наличия в породе слабо связанной пленочной воды $w_м > w_г$, отличием которой от физически (прочно) связанной воды является способность передвигаться под действием молекулярных сил.

Для кварцевых частиц размером 0,140,05 мм $w_м$ составляет 0,02%, размером менее 0,001мм – 0,86%. Однако основную роль играет минеральный состав пород. При том же размере частиц (меньше 1 мк) $w_м$ альбита равна 8,1%, лимонита – 23% и биотита – 48%.

В связи с этим кварцевые пески, например, содержат наименьшее количество связанной воды – 0,24%, в то время как лёссы – 5,2%, глины – 10…30%.

Влажные породы обладают способностью избирательно адсорбировать наряду с водой ионы из насыщающего породу раствора, т.е. *полносорбционной* способностью. Это явление важно при изучении электрохимических реакций в породах, электропроводности и электрических полей в массивах.

Максимальное количество связанной, капиллярной и гравитационной воды, которое способна вместить порода, характеризуется ее полной влагоемкостью (массовой и объемной).

Массовая полная влагоемкость

$$\mathbf{w_п = \frac{m_п - m_c}{m_c}} \qquad (9.2)$$

объемная полная влагоемкость

$$\mathbf{w_{п.об} = \frac{V_ж}{V}}, \qquad (9.3)$$

где $m_п$ – масса породы, максимально насыщенной водой; $V_ж$ – объем воды, заполняющей породу ($V_{ж} = \frac{m_п - m_c}{\rho_ж}$); V – объем породы.

Объемная влагоемкость связана с массовой посредством следующей формулы

$$\mathbf{w_{п.об} = w_п \cdot \frac{\rho_ж}{\rho}}, \qquad (9.4)$$

где $\rho_{æ}$ – плотность воды; ρ – объемная масса породы.

По величине объемная полная влагоемкость примерно равна пористости породы. Если поры в породах не имеют свободного сообщения друг с другом, то в них может остаться некоторое количество защемленных газов или воздуха даже при полном насыщении пород водой. Тогда $w_{п.об} < P$.

Иногда вода способна проникнуть между пакетами кристаллических решеток некоторых минералов (монтмориллонит, вермикулит, галлуазит). Тогда наблюдается $w_{n.oá} > P$.

Для характеристики породы в естественном состоянии пользуются параметром *естественной влажности* w_e, равным относительному количеству воды, содержащейся в породах в природных условиях, и *коэффициентом водонасыщения* $k_{вн}$, указывающим на степень насыщения породы водой

$$\mathbf{k_{вн} = \frac{w_e}{w_п}}, \tag{9.5}$$

Если w_e заменить $w_{n.oá}$, а w_n пористостью P, то коэффициент водонасыщения будет характеризовать степень максимально возможного заполнения перового пространства водой.

Извлечь всю воду из увлажненной породы механическими средствами невозможно. При любом механическом воздействии в породе остается физически связанная вода. Весьма трудно отдают воду лёссы, глины, очень мелкие пески (плывуны), так как именно в них имеется большой процент физически связанной, воды. Способность породы отдавать воду под механическим воздействием и под действием сил гравитации характеризуется *водоотдачей* ξ

$$\mathbf{\xi = w_п - w_м} \tag{9.6}$$

Таким образом, чем больше молекулярная влагоемкость пород, тем меньше их коэффициент водоотдачи.

Величина водоотдачи зависит от размеров частиц, образующих породу, величины и взаимного расположения пор. Слабая водоотдача пород обычно снижает производительность механической и гидравлической разработки пород, затрудняет осушение месторождения, транспортирование и дробление полезного ископаемого.

В природе кроме воды в породах встречаются также нефть и газы. Характер распределения в порах воды, нефти и газа предопределяет многие физические свойства этих пород, в частности, очень сильно сказывается на их электрическом сопротивлении.

В общем случае в нефтеводогазонасыщенных породах сумма объемов нефти $V_н$, газа $V_г$ и воды $V_в$ равна объему перового пространства пород $V_п$, следовательно

$$\mathbf{\frac{V_н}{V_п} + \frac{V_г}{V_п} + \frac{V_в}{V_п} = 1} \tag{9.7}$$

Отношения $V_н/V_п$, $V_г/V_п$, $V_в/V_п$ называются относительными коэффициентами соответственно нефтенасыщения $k_н$ газонасыщения $k_г$ и водонасыщения $k_в$.

До сих пор рассматривалось только содержание флюидов в породах. Однако жидкости и газы способны перемещаться по поровым каналам и трещинам породы. Свойство породы пропускать сквозь себя флюиды называется ее *проницаемостью*.

Проницаемость бывает физическая (абсолютная) и фазовая (эффективная).

Физическая проницаемость – это проницаемость в случае фильтрации через породу однородной жидкости или газа. *Фазовая проницаемость* – это способность пород, насыщенных неоднородной жидкостью, пропускать отдельно ее фазы.

Численно величина проницаемости описывается *коэффициентом проницаемости* $k_{пр}$, выводимым из уравнения Дарси, согласно которому количество жидкости Q, прошедшей через образец породы, выражается следующим образом

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{\Delta PSt}}{\mathbf{\Delta l \eta}} \cdot \mathbf{k_{пр}}, \tag{9.8}$$

где S – площадь поперечного сечения образца, м^2; t – время фильтрации, с; ΔP – перепад давлений на пути фильтрации Δl; Па; η – вязкость жидкости, Па · с.

Из формулы (9.8) имеем

$$\mathbf{k_{пр}} = \frac{\mathbf{Q\Delta l}}{\mathbf{S\Delta Pt}} \cdot \eta, \tag{9.9}$$

Размерность коэффициента проницаемости – м^2. Практической единицей измерения проницаемости является дарси (Д) – величина проницаемости, присущая образцу породы площадью 1 см^2, длиной 1 см, через который при давлении 9,8 · 10^4 Па проходит в 1 с 1 см^3 жидкости вязкостью 10^{-3} Па · с. При этом 1Д = 1,02 · 10^{-12} м^2.

В практике горного производства широкое распространение получил другой параметр – *коэффициент фильтрации* $k_ф$. Практически он представляет собой скорость фильтрации газа или жидкости через породы

$$\mathbf{k_ф} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{tS}}. \tag{9.10}$$

Коэффициент фильтрации $k_ф$ не учитывает влияние напора пластовых вод и их вязкости на изменение количества фильтрующейся воды. Сравнение $k_ф$ и $k_р$ показывает, что между ними в случае фильтрации воды существует следующее соотношение:

1 Д = 1 см/с = 864 м/сут.

В зависимости от значения коэффициента фильтрации породы подразделяются на водоупорные ($k_ф$ < 0,1 м/сут), слабопроницаемые (0,1 ≤ $k_ф$ ≤ 10), среднепронипаемые (10 ≤ $k_ф$ ≤ 500) и легкопроницаемые ($k_ф$ > 1000 м/сут).

Коэффициент трещинной проницаемости $k_{пр.т}$ может быть рассчитан по формуле

$$\mathbf{k_{пр.т} = 8{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot b^2 \cdot P_т}, \qquad (9.11)$$

где b – величина раскрытия трещин, м; P_m – трещинная пористость. Так как раскрытие трещин обычно бывает порядка $(14…15)\cdot10^{-6}$ м, то $k_{пр.т.}=1{,}66\cdot10^{-13}$ $P_т$.

Слоистым породам присуща анизотропия водопроницаемости: проницаемость вдоль напластования больше, чем перпендикулярно к нему.

На водопроницаемость рыхлых пород влияет также их минеральный состав. Минералы с хорошо выраженной спайностью пропускают воду довольно слабо, так как в них при прочих равных условиях образуются поры меньших размеров, чем в минералах, не обладающих спайностью и хорошо скатанных. Вода лучше проходит через породы, сложенные минералами, обладающими хорошей смачиваемостью.

В случае циркуляции газов в породах пользуются понятием газопроницаемости пород; физическая сущность газопроницаемости подобна водопроницаемости.

Коэффициенты проницаемости и фильтрации определяют как в лабораторных условиях на образцах, так и в натурных условиях. Как правило, $k_ф$, определенный на образце в лабораторных условиях, может на несколько порядков отличаться от действительного коэффициента $k_ф$ массива, поэтому чаще всего для расчетов используют величину $k_ф$, установленную в полевых условиях путем опытной откачки воды из какой-либо центральной скважины, около которой пробурены наблюдательные скважины.

При этом для безнапорных вод

$$\mathbf{k_ф = \frac{2A}{2H - S_1 - S_2}}, \qquad (9.12)$$

для напорных вод

$$\mathbf{k_ф = \frac{A}{h}}, \qquad (9.13)$$

где

$$\mathbf{A = \frac{0{,}365 \cdot Q \cdot (\lg x_2 - \lg x_1)}{S_1 - S_2}}, \qquad (9.14)$$

H – высота столба воды от почвы водоносного пласта до уровня ее в скважине до откачивания; S_1 и S_2 – понижение уровня воды соответственно в первой и второй скважине; h – мощность водоносного пласта; Q – расход воды при откачивании из центральной скважины; x_1 и x_2 – расстояние соответственно от первой и второй наблюдательной скважины до оси центральной скважины.

9.3. Воздействие жидкости на горные породы

Воздействие жидкости на горную породу может быть динамическим и статическим. *Динамическое* воздействие приводит к механическому разрушению и перемещению горных пород, *статическое* – к набуханию, размягчению и растворению пород.

Набухание – это способность породы увеличить свой объем при насыщении водой. Оно характеризуется *коэффициентом набухания* $k_н$, равным отношению объема набухшей породы $V_н$ к ее первоначальному объему $V_н$

$$\mathbf{k_н = \frac{V_н}{V_0} \geq 1} \qquad (9.15)$$

Набухание происходит в результате проникновения воды между пакетами кристаллических решеток минералов. Набухание горных пород отрицательно сказывается как в подземных, так и в открытых горных выработках: оно ведет к их деформации, разрушению крепи и т. п.

Увлажнение пород снижает их прочность. Значительно снижается прочность горных пород при растворении в содержащейся в них воде адсорбирующихся поверхностно-активных веществ, так называемых *понизителей твердости.* Подвижность воды в этом случае возрастает, она проникает в самые мелкие трещины, возникающие при механическом воздействии на породу, вследствие чего трещины не могут полностью закрываться. В результате количество раскрытых трещин сильно увеличивается, а прочность породы – понижается.

Уменьшение прочности при водонасыщении характеризуется коэффициентом размокаемости η^p, выражающим отношение предела прочности на сжатие $\sigma^{í}_{ñæ}$ водонасыщенной породы к пределу прочности ее $\sigma^{0}_{ñæ}$ до насыщения водой

$$\mathbf{\eta^{p} = \frac{\sigma^{н}_{сж}}{\sigma^{0}_{сж}} \leq 1}. \qquad (9.16)$$

Коэффициент размокаемости слабоустойчивых пород составляет 0,75 и меньше. Наиболее подвержены размоканию осадочные породы.

Коэффициент размокаемости известняков находится в пределах 0,15…0,50, глинистых песчаников – до 0,45.

Наиболее сильно размокают угли и горные породы в движущемся потоке жидкости, поскольку он интенсивно вымывает и выносит мелкие частички породы. Слабо размокают мелкопористые кварцевые песчаники и почти не размокают изверженные породы.

Вода может растворять некоторые горные породы, хотя обычно они мало растворимы или нерастворимы. Наибольшей растворимостью обладают лишь некоторые виды ангидрида и гипса. К малорастворимым породам относятся известняки и доломиты.

Магматические и метаморфические породы можно считать практически нерастворимыми. Как и размокаемость, растворимость горных пород протекает наиболее интенсивно в движущемся потоке жидкости, особенно в водных растворах различных кислот, поскольку при этом наряду с химическим происходит и физическое растворение путем вымывания частичек и обнажения новых поверхностей, контактирующих с раствором.

Гидравлические свойства горных пород также зависят от внешних факторов. Повышение температуры снижает вязкость жидкостей, а проницаемость пород при этом соответственно возрастает.

Степень набухания глинистых горных пород с повышением давления увеличивается, а с повышением температуры – понижается. С повышением температуры вода переходит в парообразное состояние, а с понижением – в твердое. Соответственно этому изменяются все физические свойства горной породы.

9.4. Определение гидравлических параметров горных пород

Исследование гидравлических свойств горных пород основано на сравнении масс образцов с различными степенями увлажнения. Водо - и газопроницаемость образцов горных пород определяют так. Через образец под давлением пропускают воду или газ. Измеряют расход воды (газа) и перепад давлений, а затем по формуле Дарси вычисляют проницаемость образца.

Растворимость горной породы определяют по потере массы образца, подвергнутого длительному воздействию воды или раствора. В природных условиях коэффициент фильтрации горных пород определяют по количеству воды, откачанной из скважин или горных выработок. Это позволяет установить водоприток в единицу времени. Зная площадь скважины, через которую поступает вода, и перепад давлений, определяют коэффициент фильтрации горной породы.

Влажность образца горной породы определяют по разности первоначальной массы образца и после высушивания его при температуре 100-110 °С. Влагоемкость горной породы определяют так: образец помещают в сушильный шкаф и высушивают при температуре 100-110 °С, после чего взвешивают. Затем в автоклаве под вакуумом его насыщают водой и опять взвешивают. По разности масс сухого и насыщенного водой образца определяют влагоемкость горной породы.

9.5. Использование гидравлических свойств горных пород для дегазации угольных пластов, ослабления и упрочнения пород

Наличие в породах жидкостей и газов, их способность перемещаться из одного места в другое оказывают большое влияние на многие технологические процессы горного производства при разработке месторождений, начиная с производительности буровых, добычных, погрузочных, транспортных механизмов и кончая состоянием и поддержанием выработок, очистного пространства, отвалов и т. д. В большинстве случаев сильная водонасыщенность горных пород приводит к снижению производительности труда (ухудшение условии работы, прилипание породы к механизмам) и затруднению поддержания выработок и отвалов.

Поэтому использование гидравлических и газодинамических свойств горных порода в расчетах совершенно необходимо. Расчеты по осушению месторождений и сооружению водоотлива, по устойчивости бортов карьера и откосов отвала основываются на естественной влажности пород, их коэффициентах фильтрации, водоотдачи, влагоемкости. Большая молекулярная влагоемкость и малая водоотдача горных пород требуют электрических методов осушения.

Газопроницаемость и газоотдача учитываются при разработке опасных по газу угольных месторождений для осуществления мероприятий по борьбе с газовыделением в шахтах с внезапными выбросами угля и газов. Газопроницаемость пород учитывается в исследованиях по взрываемости массивов.

Гидравлические и газодинамические свойства вмещающих пород приобретают решающую роль в том случае, когда извлекаемое полезное ископаемое находится в жидком или газообразном состоянии. Различия в гидравлических свойствах пород используются в процессах их селекции. Так, на различной смачиваемости минералов основан наиболее широко применяемый в настоящее время метод обогащения полезных ископаемых – флотация.

Вторая область использования гидравлических свойств горных пород – это применение гидравлического воздействия на породы с целью совершенствования технологии их добывания. Гидравлическое воздействие может привести к ослаблению, разрушению или упрочнению пород. Динамическое воздействие воды на горные породы используется также для усиления эффекта разрушения пород взрыванием. В горном деле используется динамическое воздействие не только воды, но и газов. В качестве примера можно привести обычный взрыв, при котором газы разрыхляют уголь. Для разрыхления угля используется также сжатый воздух.

Довольно широко на шахтах применяют ослабление угля нагнетанием в пласт воды под давлением. При этом наряду с механическим воздействием воды усиливается влияние некоторых гидравлических свойств – водопроницаемости, смачиваемости, влагоемкости, размокаемости углей. Подобный метод, основанный на размокании горных пород и, следовательно, снижении их прочности, часто применяют на открытых разработках.

Явления размокания, адсорбции, частичного растворения горных пород используют для ослабления последних при механическом бурении скважин.

Обратный эффект – упрочнение пород гидравлическим способом – получают, нагнетая в них различные растворы: цемента, гидрогеля, кремниевой кислоты, битума и т.п. Частички этих веществ, адсорбируясь на внутренней поверхности трещин и пор горных пород, закупоривают их, цементируют зерна и повышают общую прочность породы, снижают ее водопроницаемость. Следовательно, упрочнение пород зависит от ее гидравлических свойств – водопроницаемости, ионосорбционной способности и т.д. Упрочнению подвергают обычно стенки выработок, откосы отвалов или карьеров.

Чтобы эффективно использовать геотехнические методы разработки месторождений, кроме растворимости горные породы должны обладать хорошей проницаемостью. Ее увеличивают различными способами: дроблением массива взрывами, образованием трещин методом гидравлического разрыва и т.д.

Для удаления газов в подземных условиях проводят дегазацию (предварительную откачку газа) пластов. Дегазация тем эффективнее, чем больше газопроницаемость пластов. Поэтому целесообразно увеличивать проницаемость пород нагнетанием в пласты угля воды с целью создания раскрытых трещин.

Химической обработкой поверхности частичек породы добиваются увеличения или уменьшения смачиваемости различных минералов.

Контрольные вопросы

1. Перечислите виды воды в горных породах?
2. Перечислите параметры, характеризующие физически связанную воду?
3. Дайте определение естественной влажности горной породы?
4. В чем проявляется статическое и динамическое воздействие воды на горное породы?
5. Где применяют умение гидравлических свойств в практике горного дела?

10. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Свойства горных пород, которые характеризуют содержание, характер движения и взаимодействие с минеральным скелетом породы различных газов называются газодинамическими.

По генезису (происхождению) содержащиеся в осадочном горном массиве газы подразделяют на:

– органические, образовавшиеся в процессе формирования осадочных пород: диоксид углерода (CO_2), оксид углерода (CO), метан (CH_4), сероводород (H_2S);

– воздушноые: азот (N_2), кислород (O_2);

– продукты распада радиоактивных минералов: гелий (He), радон (Rn), торон (Tr), аргон (Ar);

– техногенные, порожденные производственной деятельностью человека, к ним относятся газы, выделяющиеся при работе в шахте двигателей внутреннего сгорания и проведении взрывов, а также связанные с заражением горного массива утечками промышленных продуктов, стоками, аварийными сбросами: наиболее распространенные: аммиак (NH_4), пары угле- и нефтехимических производств.

Из-за многообразия условий проникновения газов горный массив насыщен ими неравномерно. Газовая зональность – закономерное распределение газов в угленосных отложениях, являющиеся результатом миграции метаморфических метановых газов из глубины к поверхности и атмосферных газов в обратном направлении. В зависимости от процентного содержания основных видов газов в угленосных отложениях верхние слои литосферы условно выделяют четыре зоны:

– азотно-углекислотная (азот – 65…75%, диоксид углерода – 25…5%), расположена на глубине 60…300 м;

– азотная (азот – 45…5%, диоксид углерода – 15…35%, метан – 0…20 %), глубина расположения 120…800 м;

– азотно-метановая (азот – 25…40%, диоксид углерода – 5…15%, метан – 45…70 %), располагается на глубинах 130…300 м;

– метановая (азот – 0…25%, диоксид углерода – 0…5%, метан – 30…100 %), располагается под другими зонами.

Области техногенного заражения массивов имеют локальный характер, они могут образовываться под заводами, складами и отстойниками химических продуктов и отходов, транспортными магистралями (железные дороги, шоссе, трубопроводы).

Влияние содержащихся в угле и вмещающих породах газов на процессы горного производства велико. Наличие газов в углепородном массиве, как правило, осложняет ведение горных работ.

Из-за присутствия газа в угле и породах происходят, в определенных условиях, газодинамические явления (ГДЯ): интенсивное отделение от массива измельченного угля или породы, сопровождающееся значительным выделением газа. Наиболее распространенным видом ГДЯ являются выбросы: газа, угля

и газа, породы и газа, угля, породы и газа. Первый выброс произошел во Франции в 1901 году (шахта «Курьер»; при выбросе погибли 1090 человек). В Донбассе первый выброс зарегистрирован в 1907 году при проходке ствола на Смолянке. При очистных работах выбросы начались в 1925 году в Горловке.

Смесь метана и воздуха может гореть и взрываться (нижний предел горючести – при содержании в воздухе более 4 % метана, верхний – 20%). Наибольшая энергия взрыва, обусловленная полнотой реакции компонентов (стехиометрия) – при содержании метана – 649 %). В 1942 году от взрыва метана в Манчжурии на шахте Хонкойко погибло 1549 человек.

Радиоактивные газы (радон, торон) оказывают негативное воздействие на организм человека. В горные выработки они поступают, мигрируя из недр, нередко растворенные в воде, просачивающейся через радиоактивные минералы (Западный Донбасс). Принудительная вентиляция горных выработок обеспечивает разбавление и удаление радиоактивных газов, эффективно обеспечивая безопасность горнорабочих.

Некоторые из выделяющихся из угля газов токсичны. В шахтах, где выделяется CO_2 (CO) и H_2S известны случаи отравления людей газами. Воздух в действующих подземных выработках не должен содержать вредных газов больше предельно допустимых концентраций, указанных в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Допустимые концентрации газов

Вредные газы	Предельно допустимые концентрации газов в действующих выработках шахт	
	% по объему	мг/м^3
Оксид углерода (CO)	0,00170	20
Оксиды азота (в пересчете на NO_2)	0,00025	5
Диоксид азота (NO_2)	0,00010	2
Сернистый ангидрит (SO_2)	0,00038	10
Сероводород (H_2S)	0,00071	10

Ведение горных работ в горных массивах, зараженных химическими веществами техногенного происхождения, может привести к отравлению и гибели горнорабочих. На горловской шахте «Александр-Запад» в 1988 году в результате поражения высокотоксичными парами химических веществ погибли 3 горнорабочих и получили отравления более 800 горноспасателей.

Основным способом борьбы с выделяющимися в горные выработки при добыче угля метаном или углекислым газом является разбавление подаваемым с поверхности воздухом. Весьма эффективной мерой является дегазация угольных пластов через пробуренные из горных выработок или с поверхности скважины.

В зависимости от количества газа (метана), выделяющегося в шахте на тонну суточной добычи (т.с.д.) различают 5 категорий шахт по относительной

метанообильности (газоносности): негазовые шахты (в которых газ не выделяется):

I категория – до 5 $м^3$/т.с.д; II категория – 5410; III категория – 10415; сверхкатегорные – более 15.

Газы в толще горных пород распределены неравномерно, фильтрационные свойств массивов также неоднородны, это сказывается на газообильности угольных шахт (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Распределение по категориям газообильности относительного числа шахт (%) в основных угольных бассейнах СНГ

Бассейн	Негазовые	Категория по метану			Сверхкатегорные
		I	II	III	
Донецкий	18,7	13,1	9,4	7,6	51,2
Кузнецкий	-	13,9	21,5	10,1	54,5
Карагандинский	-	-	8,8	11,8	79,4
Печорский	-	11,6	34,6	3,8	50

Основные газодинамические параметры горных пород следующие.

При инженерных расчетах наиболее часто используют следующие газодинамические характеристики горных пород:

– газоносность, q, x, $м^3$/т

– коэффициент газоотдачи, $k_{отд.}$, %

– газоемкость, ω, $см^3$/г

– газопроницаемость, $k_{пр.}$, Д.

Газоносность характеризуется количеством газа, содержащемся в единице массы угля или породы ($м^3$/т).

Различают газоносность:

$x_п$ – потенциальную (реально возможная газоносность породы в определенных термодинамических условиях);

x – природную (газоносность пород в естественных условиях);

$x_о$ – остаточную (остаточная после частичной искусственной или естественной дегазации пород);

q – относительную, на тонну суточной добычи;

Природная газоносность углей составляет 20…40 $м^3$/т, в отдельных случаях – 70…100 $м^3$/т. Остаточная газоносность составляет 5…10 $м^3$/т.

Факторы, влияющие на величину газоносности углей и пород: сорбционная способность породы, ее пористость, влажность, давление газа следующие.

Потенциальную газоносность горных пород можно определить из следующего выражения:

$$x_{п} = \frac{a \cdot b \cdot p}{1 + bp} + \frac{pT \cdot P}{T_0 k} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}31W}, \qquad (10.1)$$

где a, b –константы сорбции газа данным видом породы или угля, определяемые в лабораторных условиях; Т – температура, К; $T_0 = 273^0$К; Р – пористость, $м^3/т$; k – коэффициент сжимаемости газа; W – влажность, %.

Коэффициент газоотдачи характеризует способность породы отдавать часть содержащегося в ней газа после обнажения

$$К_{отд} = \frac{x - x_o}{x} \cdot 100\% \qquad (10.2)$$

В шахте непрерывно в атмосферу выработок поступает газ из массива горных пород и из выработанного пространства. Для обеспечения нормальных микроклиматических условий (для дыхания людей, работы механизмов, предотвращения возможности взрыва) в шахту необходимо подавать большое количество воздуха. При современных темпах добычи в очистной забой подается около 1500…2000 $м^3$/мин воздуха.

Газоёмкость– ω, $см^3/г$ – максимальное количество газа, которое при данной температуре и давлении в свободном и сорбированном состоянии может поглощать единица массы породы.

Сорбционной способностью горных пород называют их способность удерживать за счет физических и химических связей молекулы газа у минерального скелета пород.

Различают: *абсорбцию* – поглощение газа за счет его диффузии в массу сорбита, приводящее к образованию твердого раствора. Этот процесс характеризуется малой скоростью и требует значительного времени для его завершения;

адсорбцию – размещение и уплотнение молекул газа на поверхности твердого тела. Как чисто поверхностное явление процесс характеризуется весьма большой скоростью (на гладкой поверхности процесс завершается практически мгновенно). Для пористых пород скорость зависит от темпов диффузии газа через узкие поры;

хемсорбцию – химическое взаимодействие газов с твердыми телами, сопровождается образованием неустойчивых химических соединений. Скорость процесса зависит от скорости химических реакций и от скорости диффузии газа к реагирующим поверхностям.

Для углей основной вид – адсорбция. Кроме сорбированного газа уголь содержит и свободный газ, который находится в порах и трещинах. Сорбционная способность углей зависит от следующих факторов: давление; температура; пористость; влажность; вид газа.

Количество сорбированного в горной породе газа возрастает с увеличением его давления над поверхностью (рис. 10.1), при увеличении температуры среды – сорбционная способность снижается (рис. 10.2). Это объясняется уве-

личением внутренней энергии молекул нагреваемого газа, что способствует преодолению ими сорбционных сил.

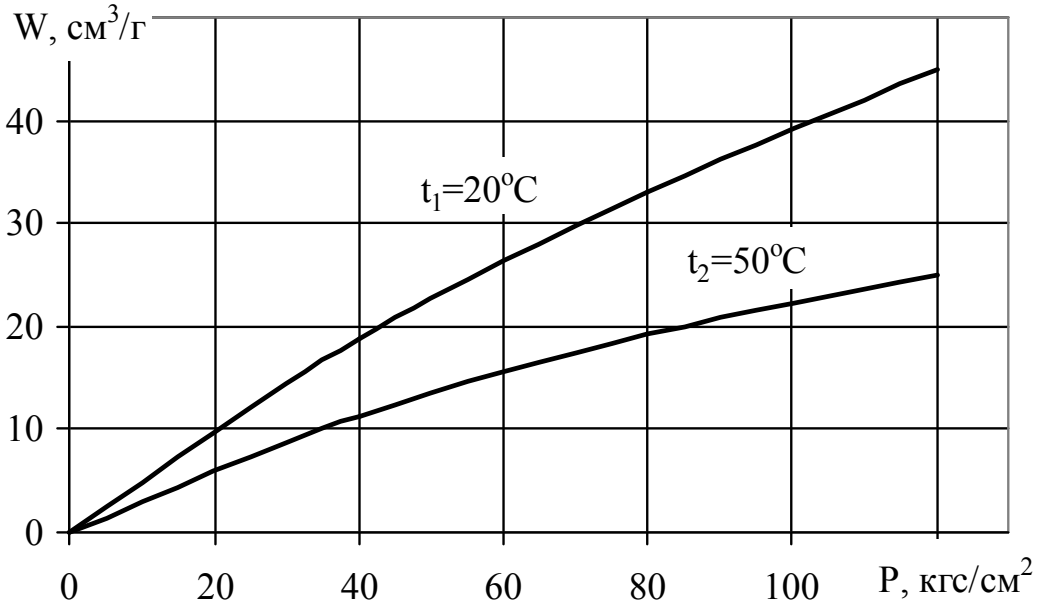


Рис. 10.1. Изотермы адсорбации метана в угле

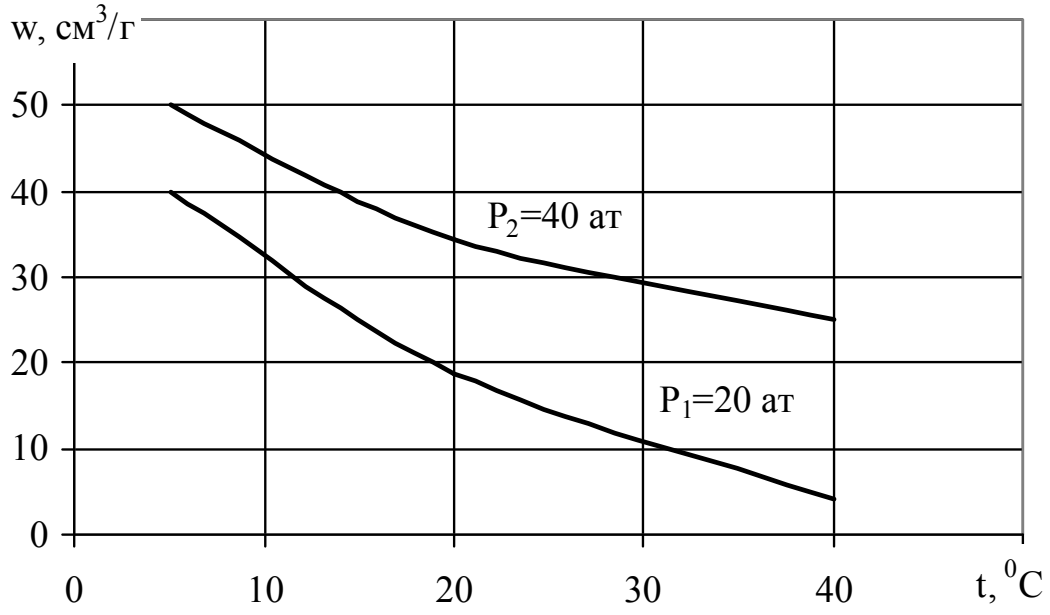


Рис. 10.2. Изобары адсорбации метана в угле

Пористость косвенно характеризует поверхность пород, на которой сорбируются газы. Например, при наличии в угле пор диаметром один мм, площадь поверхности в одном кубическом сантиметре угля составит $S_{пор}$= 6 см^2, при диаметре пор 0,01 мм – $S_{пор}$= 600 см^2, при размере пор 10^{-4} мм – $S_{пор}$= 600 м^2.

Результаты лабораторных испытаний различных типов каменных углей показали, что в среднем $S_{пор}$ = 150…200 м^2/г. В шахтных условиях около 55…90 % пор заполнены в угле метаном.

Если поры угля частично заполнены водой, то количество газа, находящегося в свободном состоянии, уменьшается. При заполнении всех пор водой газ будет содержаться только в растворенном состоянии в воде. Количество такого газа зависит от степени растворимости и обычно в 10÷30 раз меньше, чем в сухой породе.

Особенности строения молекул газов определяет различие их сорбирования горными породами. Метан имеет в 3…6 раз худшую адсорбционную способность, чем диоксид углерода, азот и аргон – в 2…4 раза худшую, чем метан. Гелий – вообще не сорбируется углями.

Газопроницаемость – способность горной породы пропускать сквозь себя газ.

Под давлением газ перемещается по порам очень медленно, режим движения ламинарный. *Коэффициент проницаемости*, $K_{пр}$, выводится из уравнения Дарси.

Проницаемость углей Донбасса колеблется в широком диапазоне, она индивидуальна для каждого шахтопласта. Например для пласта l_6 определены пределы изменения $K_{пр} = (2{,}39…9{,}2)\cdot 10^{-12}$ м$^2 \approx$ (2…9) Д.

В шахтных условиях проницаемость угольных пластов зависит от нескольких основных факторов.

Наиболее существенным является горное давление. В зависимости от напряженно-деформированного состояния пористость и трещиноватость пласта изменяются в значительных пределах. В зоне максимума опорного давления пористость минимальна, что определяет низкие значения газопроницаемости. В призабойной части, где происходит отжим угля, проницаемость резко возрастает (рис. 10.3).

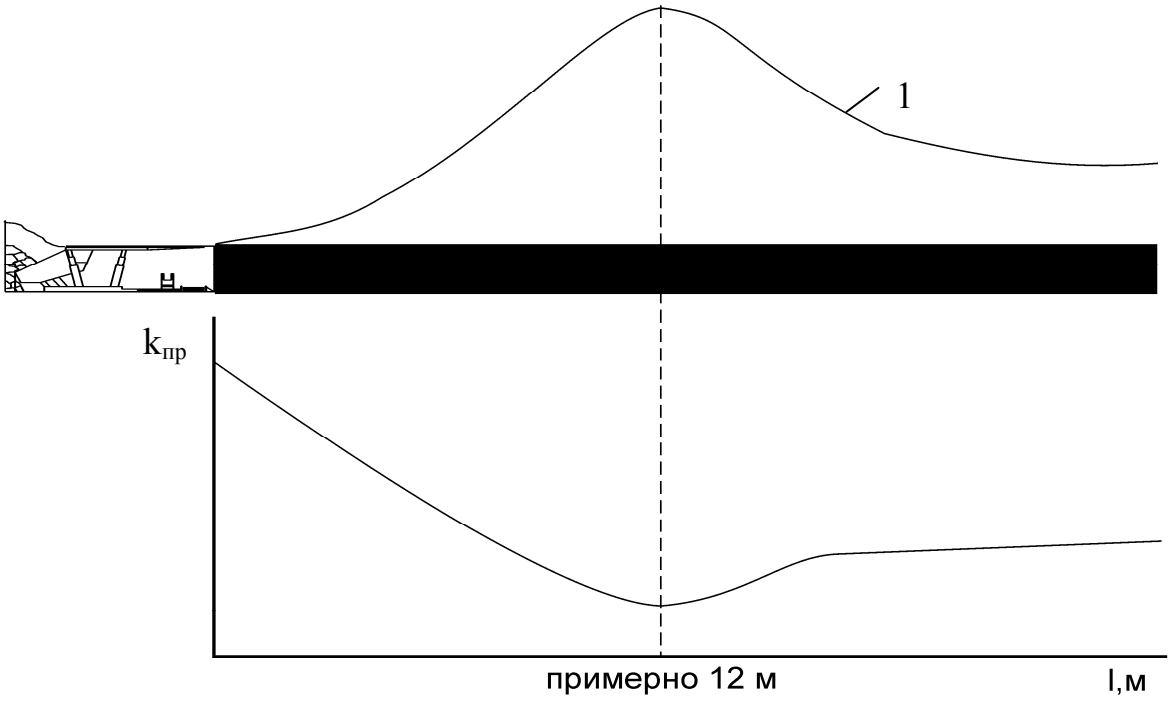


Рис. 10.3. Характер изменения газопроницаемости угольного пласта вблизи очистного забоя: 1 – эпюра опорного давления

Газопроницаемость существенно зависит от типа породы. Угли отличаются большей газопроницаемостью, чем имеющие известковый цемент песчаники; породы, образованные на глинистой основе, отличаются наименьшей проницаемостью.

Для осадочных пород имеет важное значение анизотропия пористости. В направлении параллельном слоистости $К_{пр}$ в 2…4 раза больше чем по нормали к ней.

Итак, в осадочных горных породах содержатся различные виды газов различного происхождения, как природные, так и техногенные. Они мигрируют из недр и с поверхности в виде газовых потоков, а также растворенными в воде.

Выделение газов в горные выработки из за токсичного, удушающего и других видов воздействия на человеческий организм осложняет ведение горных работ.

Газодинамические свойства угольных пластов, слоев горных пород и углепородного массива в целом определяют параметры технологических процессов угольной шахты. Газоносность и коэффициент газоотдачи являются главными критериями, ограничивающими нагрузку на очистной забой. От них зависит тип схемы подготовки и система разработки шахтопласта, проветривание и дегазация горных выработок.

Газопроницаемость является важнейшим показателем при прогнозировании и профилактике осложняющих отработку пластов газодинамических явлений и эндогенных пожаров.

Контрольные вопросы

1. Какова природа происхождения содержащихся в горном массиве газов?
2. Как влияют содержащиеся в угольных пластах и породных слоях газы на процессы горного производства?
3. Что называют газоемкостью горных пород, ее виды?
4. Какими физико-химическими процессами обусловлена газоемкость горных пород?
4. Что называют газопроницаемостью горных пород, коэффициент газопроницаемости?

11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД

11.1. Базовые параметры электромагнитных свойств пород

Электромагнитные свойства горных пород – это свойства, характеризующие поведение горных пород в электрическом и магнитном поле.

Базовыми параметрами электромагнитных свойств горных пород являются:

Удельное электрическое сопротивление **($\rho_э$), Ом·м**

Это величина, обратная силе тока, проходящего через 1 м^2 площади образца породы при напряженности электрического поля 1 В/м.

По величине $\rho_э$ породы делятся на:

– проводники $\rho_э = 10^{-3}…10^{3}$ Ом·м;

– полупроводники $\rho_э = 10^{-3}…10^{12}$ Ом·м;

– диэлектрики $\rho_э = 10^{12}…10^{20}$ Ом·м.

Породы, слагающие угольную толщу Донбасса имеют следующую величину $\rho_э$:

– глинистый сланец – $10^{2}…10^{5}$ Ом·м;

– известняк – $10^{2}…10^{5}$ Ом·м;

– уголь – $10^{3}…10^{-5}$ Ом·м;

– песчаник – $10…10^{8}$ Ом·м.

Таким образом, породы, слагающим угольную толщину Донбасса, относятся к проводникам или полупроводникам.

В лабораторных условиях определение удельного электрического сопротивления производится с помощью тераомометров. При подключении образца к прибору в нем протекает ток, в результате чего на поверхности образца появляются неуравновешенные заряды – токи смещения. Чтобы исключить влияние внешних факторов, измерения сопротивления образца проводят, изменяя направление тока, протекающего через образец.

Тогда сопротивление образца

$$\mathbf{R_o = \frac{2R_+R_-}{R_+ + R_-}}, \qquad (11.1)$$

где R_+ – сопротивление образца при прямой полярности; R_- – сопротивление образца при обратной полярности.

Удельное электрическое сопротивление зависит от следующих факторов: пористости, трещиноватости, слоистости минерального состава горных пород, а так же от температуры и влажности.

Относительная диэлектрическая проницаемость ($\varepsilon_г$) – это коэффициент, показывающий во сколько раз уменьшается напряженность электрического поля при нахождении в нем породы (табл. 11.1)

$$\mathbf{\varepsilon_г = \frac{E_{эо}}{E_o}}, \qquad (11.2)$$

где $E_{эо}$ – напряженность электрического поля в вакууме, В/м; $E_о$ – суммарная напряженность электрического поля в породе, В/м.

Таблица 11.1

Показатели относительной диэлектрической проницаемости

Порода, вещество	Относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_г$, ед.
Воздух	~ 1
Вода	80
Глинистый сланец	6…20
Известняк	8…15
Песчаник	9…11
Уголь	3…15

Относительная диэлектрическая проницаемость горных пород зависит от следующих факторов: частота электрического поля (рис. 11.1), слоистость; пористость; трещиноватость; влажность; температура.

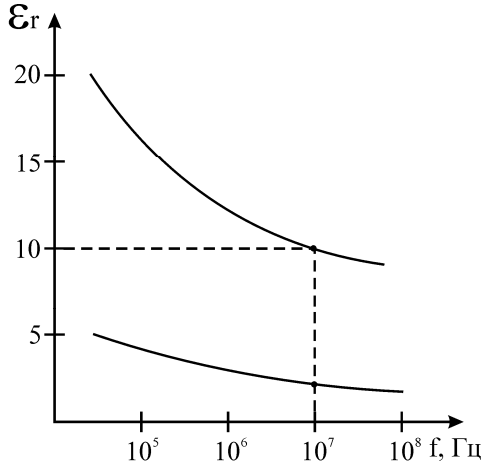


Рис. 11.1. Зависимость относительной диэлектрической проницаемости от частоты электрического поля

При частоте электрического поля $f \geq 10^{14}$ Гц в породе возникает только электрическая поляризация; при $f \leq 10^{12}$ Гц – в горной породе возникает ионная и электронная поляризация при $f \leq 10^{7}$-10^{10} Гц – в породе возникает дипольная, ионная и электронная поляризация, т.е. при возрастании f от 0 до ∞ диэлектрическая проницаемость уменьшается.

Для оценки магнитных свойств горных пород используют показатель *относительной магнитной проницаемости* (μ) – это коэффициент, показывающий

во сколько раз магнитная индукция поля в данном магнетике изменится при помещении образца в магнитном поле в вакууме.

Магнитное поле характеризуется двумя показателями: напряженность H и индукцией B. Напряженность магнитного поля H (А/м) определяет величину и направление действия магнитных сил $F_м$ в вакууме на единицу магнитной массы $m_м$. Согласно запасу Кулона, сила взаимодействия между двумя магнитными массами $m_{м1}$ и $m_{м2}$.на расстоянии r друг от друга равна

$$F_M = \pm \frac{1}{\mu_a} \frac{m_{M1} m_{M2}}{r^2}, \qquad (11.3)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Магнитная индукция B – векторная величина, выражающая интенсивность магнитного поля. Между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля в веществе существует прямо пропорциональная зависимость

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} \qquad (11.4)$$

В этой зависимости коэффициент пропорциональности μ_a также равен абсолютной магнитной проницаемости вещества. В вакууме

$$\mu_a = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}, \text{ Гн/м}$$

Эта константа (μ_o) называется магнитной постоянной.

Относительная магнитная проницаемость, равна отношению

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_o} \qquad (11.5)$$

Произведение элементарного тока i на площадь магнитного диполя ΔS называется магнитным моментом электрона. Он постоянен и равен $9{,}28 \cdot 10^{-24}$ Дж/Т.

Магнитные моменты атомов и молекул горной породы при отсутствии внешнего магнитного поля могут быть либо равны нулю, либо отличаться от нуля.

Так, если магнитные моменты всех электронов атома компенсируют друг друга, то при H = 0 атом не намагничен.

Такие породы называются диамагнитными. Горные породы, атомы которых обладают магнитным моментом при отсутствии внешнего поля, называются парамагнитными. Горные породы, у которых целые объемы обладают магнитными моментами при отсутствии внешнего поля, называются ферромагнитными (табл.. 11.2).

Таблица 11.2

Некоторые диа-, пара- и ферромагнитные минералы

Диамагнитные μ = 0,999836÷1,0	Парамагнитные μ = 1,0004	Ферромагнитные μ = 1,0064÷6,5
Вода	Воздух	Магнетит
Гипс	Доломит	Пирротин
Графит	Мусковит	Франклинит
Кальций	Пироскен	Якобсит
Кварц	Сидерит	Лимонит
Уголь	Хромит	γ-гематит

Породы Донбасса относятся в основном и диа- и парамагнетикам.

11.2. Использование электрических магнитных свойств горных пород для горного производства

Все способы ***разрушения пород*** с применением электрической энергии подразделяется на электротермические, обусловленные тепловым пробоем или нагревом породы электрическим током, и электрические, основанные на электрическом пробое горной породы.

К первой группе относится *высокочастотный контактный метод разрушения* плохо проводящих пород. Электроэнергия частотой до 300 МГц проводится к породе по контактирующим с ней электродам. В зависимости от формы электродов и их взаимного расположения в породе возникает электрическое поле определенной конфигурации. Таким образом, можно создать направленное электрическое поле или концентрировать его на определенных участках породы. В результате этого процесса порода разогревается и откалывается в виде чешуек или кусков. При этом методе разрушения горных пород основную роль играют электрические свойства породы и слагающих ее минералов.

Электрические методы основаны на электрическом пробое пород. Для разрушения пород электрическим пробоем используют импульсные напряжения. Величина этих напряжений зависит от электрической прочности разрушаемых пород и их размеров. Электрические пробой можно применять для раскалывания кусков породы, бурения и отбойки от массива. Однако для его осуществления требуются высокие напряжения, опасные для обслуживающего персонала.

Оттаивание пород осуществляется пропусканием электрического тока по разогреваемому участку на площади, подлежащей оттаиванию, бурят шпуры, в которые помещают электроды, так, чтобы их концы находились в такой породе. При подключении напряжения образуется замкнутая электрическая цепь в такой породе, так как электропроводность такой породы во много раз выше, чем мерзлой.

Слой, по которому протекает ток, нагревается и передает тепло вышележащему слою, который после оттаивания сам начинает проводить так. Постепенно процесс оттаивания достигает поверхности.

При ***упрочнении пород*** используют электрохимические закрепление и электроплавление.

Электрохимическое закрепление осуществляют путем пропускания постоянного электрического тока через влажные породы. В результате химических реакций калий и натрий замещаются водородом, алюминием или железом, и в породе образуются гидраты окиси металлов (например, боксит). При *электроплавлении* водоносные пески нагреваются пропусканием электрического тока до температуры 1700-1800^{0}С, в результате чего песок расплавляется. Остывшая масса образует стекловидное вещество высокой прочности, водонепроницаемое и не разрушаемое.

Сущность электрических методов ***обогащения*** заключается в избирательном действии электрического поля на заряженные минеральные частицы. В электрическом сепараторе руда перемещается по электрическому полю. В зависимости от электрических свойств, крупности и формы минеральные частицы движутся по различным траекториям и могут быть разделены.

Для ***добычи серы*** применяют высокочастотный электромагнитный нагрев серных руд. Под воздействием электромагнитного поля массив нагревается за счет диэлектрических потерь независимо от его проницаемости, трещиноватости и теплопроводности. Скорость нагрева, таким образом, определяется только электрическими свойствами и теплоемкостью нагреваемого объема.

Для ***разведки месторождений*** полезных ископаемых широко применяются электромагнитные методы

Магнитный метод. Суть метода заключается в измерении величины напряженности магнитного поля. Напряженность магнитного поля в каждой точке поверхности Земли зависит от намагниченности находящихся под этой точкой геологических объектов. Этим методом можно исследовать породы, залегающие на глубине 10-20 м. По результатам этой съемки можно судить о геолого-петрографических особенностях массива, трещиноватости пород, разломах и т.д.

Электрические свойства пород используются в *методах электроразведки*. Наиболее распространены следующие.

Метод естественного электрического поля, который заключается в последовательном замере потенциалов точек, расположенных на одной прямой линии относительно одной центральной точки. Выявленные аномалии потенциала обычно указывают на наличие какого-то источника локальных токов (соляные или каменноугольные месторождения).

Если хорошо проводящая залежь вскрыта хотя бы одной скважинной или горной выработкой, то ее контуры можно определить *методом заряженного тела.* Один из полюсов источника тока подсоединяют к залежи, другой – заземляют на расстоянии, превышающем размеры залежи в 10-20 раз и более. В результате залежь заряжается и создает вокруг себя электрическое поле. Залежь оконтуривают эквипотенциальные линии. Это дает возможность, прослеживая

их распределение на поверхности Земли, определить границы и конфигурацию изучаемого объекта.

Для шпурового ***метода определения трещиноватости массива*** вокруг горных выработок на кафедре горной геомеханики ДонНТУ был создан прибор радиоинтроскопии, состоящий из зонда, измерительного блока и досылочного устройства. Излучающая катушка зонда создает в породах вокруг шпура электромагнитное поле постоянной частоты 1МГц; величина тока в приемной катушке зонда зависит от относительной диэлектрической проницаемости среды вокруг зонда. Последнее обстоятельство и позволяет обнаруживать в массиве трещины (заполненные, как правило, воздухом) и устанавливать их параметры: величину раскрытия, их местоположение по длине шпура и их угол наклона к оси шпура.

Контрольные вопросы

1. Какой смысл удельного электрического сопротивления горной породы?
2. Какой смысл относительной диэлектрической проницаемости горной породы?
3. Какой смысл относительной магнитной проницаемости горной породы?
4. Можно ли разрушить горную породу электромагнитным полем?
5. Как используют электромагнитные свойства горных пород при разведке месторождений?

12. РАДИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД

12.1. Базовые параметры радиационных свойств горных пород и методы их определения

Радиоактивность горных пород предопределяется содержанием радиоактивных элементов (урана, актиноурана, тория и радиоактивного калия). Содержание в породах других радиоактивных элементов (технеция, полония, прометия, кальция, рубидия, циркония, олова, теллура, висмута, вольфрама, рения) практически не влияет на их общую радиоактивность, так как скорость их радиоактивного распада очень мала. Содержание высокорадиоактивных элементов в земной коре незначительно. Так, среднее содержание урана (до глубины 16 км.) составляет $3 \cdot 10^{-4}$%, а тория – $8 \cdot 10^{-4}$%.

Радиоактивность горных пород характеризуется наличием в них радиоактивных минералов, большинство из которых могут адсорбировать радиоактивные изотопы и элементы из окружающей среды. Так, например, глина и глинистые сланцы в результате адсорбции радиоактивных элементов приобретают значительную радиоактивность.

При радиоактивном распаде, связанном с перестройкой ядер элементов, происходит излучение α- и β-частиц, а также γ-лучей. Гамма-лучи представляют собой электромагнитные волны с длиной до 10^{-10}м и энергией от $8 \cdot 10^{-15}$ до $4{,}8 \cdot 10^{-15}$ Дж. Они обладают наибольшей проникающей способностью.

В настоящее время известно около 250 радиоактивных минералов, содержащих уран и торий. В зависимости от преимущественного содержания радиоактивного урана или тория, радиоактивные минералы делят на урановые и ториевые.

Наиболее часто встречаются минералы главных типов магматических, метаморфических и осадочных пород по степени их радиоактивности делятся на три группы:

– слаборадиоактивные – главные породообразующие минералы (кварц, плагиоклаз, нефелин, калиевые полевые шпаты);

– повышенно-радиоактивные – главные акцессорные и рудные минералы (апатит, флюорит, магнетит, ильменит и др.);

– высокорадиоактивные – акцессорные минералы (сфен, ортит, монацит, циркон, лопарит и др.).

Радиоактивность осадочных пород, обусловленная наличием в них радиоактивных минералов, близка радиоактивности магматическим образованиям. Содержание радиоактивных элементов в осадочных породах зависит от их происхождения. Так в коренных (массивных) породах, содержание урана и тория значительно меньше, чем в почвах.

Радиоактивность горных пород характеризуется количеством распадающихся за одну секунду атомов вещества. Этот параметр называется *удельной радиоактивностью*. Удельную радиоактивность впервые измерили искровым счётчиком Э. Резерфорд и Х. Гейгер. Так, например, удельная радиоактивность радия составляет $3{,}7 \cdot 10^{13} с^{-1} кг^{-1}$.

Проходя через породы, радиоактивные излучения частично поглощаются, за счет превращения энергии излучения в другие виды энергии. Способность пород поглощать радиоактивные излучения оценивается *коэффициентом поглощения*, который характеризует степень превращения энергии излучения в другие виды энергии.

Между коэффициентом поглощения Θ и длиной волны λγ, существует следующая зависимость:

$$\Theta=\lambda 3\gamma \qquad (12.1)$$

Проходя через вещество, гамма-лучи сталкиваются с его частицами, вследствие чего их направление изменяется. Хаотическое изменение направления гамма-лучей характеризуется *рассеиванием*.

Для горных пород характерно давление рассеивания лучей, при этом поглощение энергии немного превышает 10% общих потерь энергии.

На практике применяют различные методы изучения радиоактивности пород. Так, радометрические методы позволяют обнаруживать очень незначительные количества радиоактивных веществ.

Абсолютные измерения активности альфа и бета излучений проводятся *методом 4π-счета*, согласно которому регистрируются частицы, испускаемые источником в любом направлении.

Для источников, обладающих значительной активностью, используют *калориметрический метод* измерения радиоактивности, который основан на измерении теплового эффекта. Радиоактивность можно измерить также *масс-спектрометрическим методом* или *методом эмиссионного спектрального анализа.*

На практике широко используются относительные методы измерения радиоактивности, в основу которых положено сравнение радиоактивности анализируемых источников и образцов.

Радиоактивность горных пород можно определить по интенсивности их излучения. Для этого применяют радиометры, сцинтиляционные анализаторы, полупроводниковые детекторы и т. п. Излучения бета- частиц регистрируют *ионизационными калярами* и *газоразрядными счетчиками.* Для измерения радиоактивности бета-излучений с низкими энергиями применяют метод *жидкостного сцинтиляционного счёта*. При измерении интенсивности гамма-излучений часто применяют *сцинтилируемые пластмассы* в комплекте с *фотоэлектронным умножителем*.

Наиболее распространённым для измерения гамма-излучений является прибор СРП-2.

В качестве датчиков гамма-излучений используют газоразрядные счётчики, часто индикаторами нейтронов служат боровые пропорциональные счётчики.

Радиоактивность горной породы определяют как относительный параметр – $\Gamma_{акт}$ (радиоактивность, приведенная к относительному содержанию урана):

$$Г_{акт}=(П_п \cdot Т_э \cdot А)/(П_э \cdot Т_п), \quad (12.2)$$

где $П_п$ и $П_э$ – количество частиц, вылетающих за 1 мин. соответственно из образца породы и эталона, содержащего уран; $Т_э$ и $Т_п$ – массы эталона и образца; А – массовое содержание урана в эталоне.

Величина $Г_{акт}$ называется грамм-эквивалентом урана на 1г.

12.2. Использование радиационных свойств пород в горной практике

Методы измерения естественной и искусственной радиоактивности широко используются для изучения физических свойств, вещественного состава и состояния горных пород. Они получили название *радиометрических*.

Для определения происхождения и радиологического возраста минералов используют конечные радиогенные продукты распада – стабильные изотопы (аргон, гелий, свинец и т. п.), которые фиксируются масс-спектрометрическим или изотопно-спектральным методом. По количеству и изотопному составу свинца можно точно определить возраст минералов.

Ядерно-физические методы, в которых используются процессы искусственной радиоактивности, применяются для определения элементарного состава пород, а также их физико-химических свойств (влажности, прочности и т. д).

Широкое распространение в наше время получили радиометрические методы поиска месторождений полезных ископаемых (эмациональный, радиогидро-геологический).

Для изучения геологического разряда буровых скважин применяют *радиоактивный и эманациенный каротаж*.

Зависимость поглощения рентгеновских лучей, прошедших через вещество от неординарности строения, минерального свойства и плотности положения в основу *дефектоскопии*.

Для выявления особенностей строения и минералогического состава пород широко используют *рентгеновский микроскоп*.

На горнодобывающих предприятиях, в местах с затруднённым присутствием людей (загрузка скипов в стволах; контроль уровня жидкостей в ёмкостях, полезного ископаемого в бункерах и т. д.) используется контрольно-измерительная аппаратура, автоматические регулирующие устройства на основе радиоактивных изотопов.

Контрольные вопросы

1. Что называется радиоактивностью горных пород?
2. Как классифицируются минералы по степени их радиоактивности?
3. Какие параметры, характеризующие радиационные свойства пород Вам известны?
4. Какие виды излучения имеют место при радиоактивном распаде?

5. Какие методы применяются для определения радиоактивности горных пород?
6. Что Вы знаете об относительных методах измерения радиоактивности горных пород?
7. Что такое радиоактивность, приведенная к относительному содержанию урана?
8. Какие методы применяют при разведке месторождений полезных ископаемых?
9. Как используются радиационные свойства пород в практике горного дела?

13. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРОДНОГО МАССИВА

13.1. Основные соотношения механики сплошного деформируемого тела

Для математического описания процессов, протекающих в породном массиве вследствие проведения выработок, в механике горных пород используют, как правило, соотношения механики сплошного деформируемого тела: теории упругости, пластичности и ползучести.

Основным в механике сплошного деформируемого тела является предположение о том, что рассматриваемая среда лишена структуры и обладает сплошностью с непрерывным распределением вещества, так называемый **континуум**. Эта гипотеза позволяет считать напряжения и деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат точек тела. Предполагается также, что любые достаточно малые, т.н. элементарные, объемы рассматриваемой среды обладают одинаковыми физико-механическими свойствами. Применительно к механике горных пород таким гипотетическим сплошным и однородным телом является породный массив, вмещающий горные выработки.

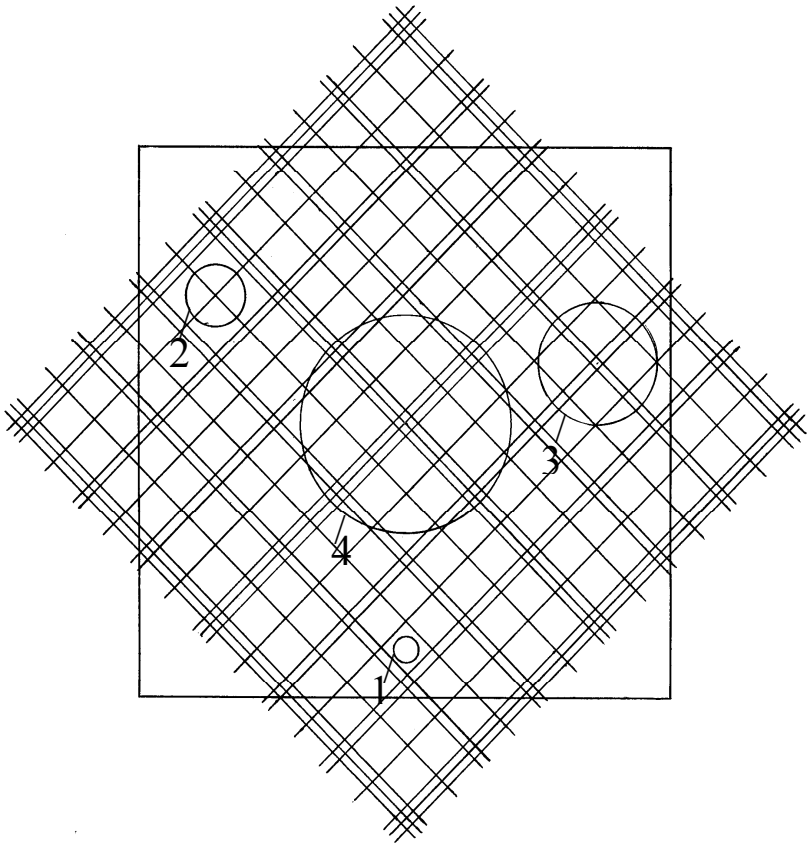


Рис. 13.1. Уровни неоднородности в породных массивах:
1 – микроскопический; 2 – субмакроскопический;
3 – макроскопический; 4 – мегаскопический.

Однако реальный породный массив, как природная система, обладает высокой степенью неупорядоченности, в которой в зависимости от размеров изучаемой области можно выделить (рис. 13.1) четыре масштабных уровня неоднородности:

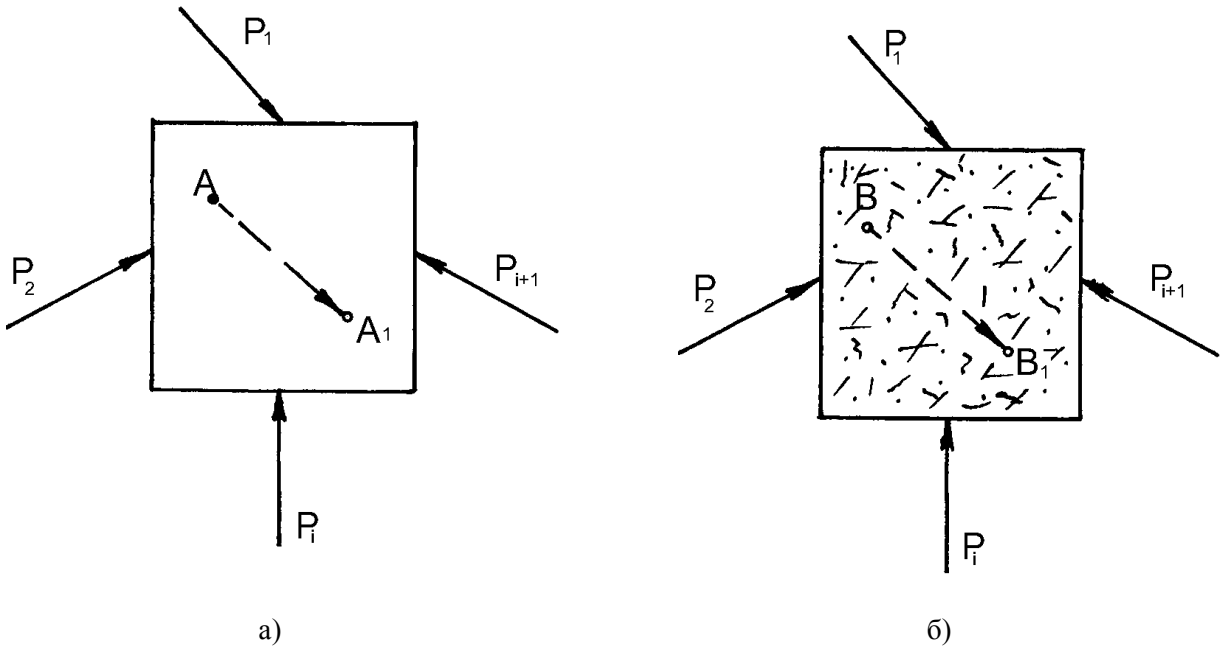
1. Микроскопический: среда рассматривается на уровне кристаллов, размер элементов неоднородностей составляет 10^{-8}-10^{-5} м; **2. Субмакроскопический**: среда рассматривается на уровне элементарного объема литологической разности, размер элементов неоднородностей составляет $10^{-}5$-10^{-2} м;

3. Макроскопический: среда рассматривается на структурном уровне, размеры элементов неоднородностей составляют 10^{-2}-10^{1} м;

4. Мегаскопический: среда рассматривается как сложноструктурное образование, обладающее текстурой и находящиеся под действием гравитационных и тектонических сил, размер элементов неоднородностей составляет более 1,0 м.

Первые два уровня изучает физика горных пород, а два последующих – это предмет исследований механики горных пород.

На макроскопическом уровне горные породы обладают внутренней неоднородностью. Они содержат поликристаллы минералов разной крепости, микротрещины, поры, включения и другие дефекты, приводящие к местной концентрации напряжений. Однако, поскольку этих микродефектов очень много, то в силу статистических законов в одних и тех же условиях относительные перемещения точек реального деформируемого тела (B и B_1) будут практически совпадать с перемещениями соответствующих точек (A и A_1) однородной модели (рис. 13.2). При этом, чем меньше размеры микродефектов и чем их больше, тем меньше погрешность, связанная с применением методов механики сплошной среды.



а) б)

Рис. 13.2. Однородная (а) и неоднородная (б) модели породной среды

Из сказанного выше следует, что элементарный объем породного массива должен быть достаточно малым, чтобы выполнялась исходная предпосылка о сплошности среды, и, в то же время, достаточно большим, чтобы он обладал всеми усредненными свойствами изучаемого объекта на субмакроскопическом уровне.

Такой элементарный объем называют **физически малым**. Его можно представить в виде куба, имеющего соответствующее число граней и ребер. Грань такого кубика образует **элементарную площадку**, а ребро – **элементарную длину**.

Задача о возможной величине погрешности, получаемой вследствие замены реальной неоднородной среды однородной сплошной моделью, была поставлена и решена проф. Ф.С. Ясинским в 1887 г. В результате ее решения было установлено, что величина возможной ошибки зависит от характерных размеров исследуемой области L и размеров l слагающих ее элементарных частиц (объемов). Согласно теории Ф.С. Ясинского, среду можно считать идеальной (сплошной и однородной), если имеет место неравенство

$$\frac{L}{l} > a^2, \qquad (13.1)$$

где a – некоторое, достаточно большое число, выбранное с таким расчетом, чтобы при принятой степени точности величина a^{-1} была значительно меньше единицы и ею можно было бы пренебречь.

Позднее, применительно к металлам, были поставлены специальные опыты, которые показали, что проволока из особой стали с ясно выраженной зернистой структурой имеет по длине вполне постоянные свойства, если количество зерен в ее поперечном сечении становится больше 30.

Другими опытами с металлами было установлено, что при измерении деформаций тензорезисторами с малой базой показания их становятся стабильными, если в пределах базы находится более 10 зерен структуры.

К.В. Руппенейт и Ю.М. Либерман, решая специально поставленную для этой цели статистическую задачу, определили, что с вероятностью 0,98 грань элементарного объема песчаника должна иметь размер около 29 мм и содержать не менее 8 зерен.

В настоящее время нередко используют классификацию осадочных пород по крупности зерна, предложенную ИГН АН СССР (табл. 13.1). В этой же таблице приведен ориентировочный размер элементарной площадки.

Размер L исследуемой области в задачах механики горных пород, как правило, на порядок больше размеров выработок и равен 40-50 м. Величина a^{-1} для выработок, заложенных даже в такой неоднородной породе, как конгломерат, в соответствии с табл. 13.1 равна 0,012, в аргиллите – 0,005, что значительно меньше единицы, как того и требует теория Ф. С. Ясинского.

Таблица 13.1

Размер элементарной площадки применительно к осадочным породам

Наименование породы	Средний размер зерна, мм	l, мм
Конгломерат	10,0	67
Гравелит	1,0 – 10,0	6,7 – 67
Песчаник крупнозернистый	0,5 – 1,0	3,3 – 6,7
Песчаник среднезернистый	0,25 – 0,5	1,7 – 3,3
Песчаник мелкозернистый	0,1 – 0,25	0,7 – 1,7
Алевролит крупнозернистый	0,05 – 0,1	0,3 – 0,7
Алевролит мелкозернистый	0,01 – 0,05	0,1 – 0,3
Аргиллит	0,01	0,1

Таким образом, при изучении механических явлений, протекающих в породном массиве вокруг выработок, вполне обоснованно можно применять соотношения механики сплошного деформируемого тела, основанные на гипотезе непрерывной однородной среды.

Переход от сумакроскопического уровня неоднородностей породного массива к макро- и мегаскопическому выполняется на основе учета масштабного эффекта.

13.2. Механические процессы в массиве горных пород

Физические процессы в горных породах – явления взаимодействия физических полей с горной породой, в результате которых в породе возникают и протекают различные изменения состава, строения и состояния массивов горных пород.

В горных породах различают следующие *физические поля*: механическое поле; тепловое; электрическое; магнитное; радиационное; гидравлическое; газодинамическое (последние два являются вещественными полями).

Наибольший интерес для горняка представляют механические процессы в массиве горных пород, происходящие под действием механического поля и вызывающие формирование определенного напряженно-деформированного состояния массива; его изменение при ведении горных работ, сдвижения пород, их разрушение, взаимодействие пород с крепью горных выработок.

Механическое состояние массива характеризуется его: сплошностью или дискретностью, трещиноватостью и слоистостью, неоднородностью и анизотропией, а также его напряженно-деформационным состоянием.

Породный массив – сложная физическая среда, поведение которой в общем случае характеризуется напряжением, деформацией, температурой, временем, трещиноватостью, неоднородностью, анизотропией, наличием вещественных гидравлических и газовых полей.

Изучение такой среды в полном ее объеме невозможно из-за сложности объекта.

Поэтому при исследовании механических процессов в массиве обычно рассматривают не собственно массив, а некое его идеализированное отображение – геомеханическая модель.

На основании принятой геомеханической модели составляют расчетные схемы той или иной задачи.

13.3. Сплошность и дискретность

Сплошным называют *массив*, в котором горная порода непрерывно заполняет геометрический объем исследуемой части массива.

Дискретным называют *массив*, который представляет собой систему отдельностей, каждая из которых имеет определенную форму.

В общем случае массив из-за наличия трещиноватости является дискретной средой.

Но в некоторых случаях геометрическую модель дискретного массива представляют как среду сплошную. В этом случае такой массив называют квазисплошной.

Известно несколько *критериев квазисплошности массива*.

Например, по Крупенникову, массив является квазисплошным, если выполняется условие

$$\Delta A < \varepsilon \text{ при } \Delta a < l_0,$$

где ΔА – разность значений напряжений, деформаций и смещений в соседних точках массива с приращением координат Δа; ε – допускаемая погрешность при определении параметра (обычно 15% среднего значения) l_0 – линейный размер элементарного объема.

Элементарный объем – объем, обладающий всеми свойствами исследуемого массива, но насколько малый, что напряженно-деформированное состояние в нем рассматривается как в точке.

Для горных пород $V_э \approx 0{,}025$ см^3 ($l_0 \approx 0{,}29$ см).

Если это условие не выполняется, то массив рассматривают, как дискретную среду.

По Баклашову вычисляют минимальный размер исследуемого массива, позволяющий применять методы механики сплошной среды

$$L = l_0 / \varepsilon^2, \text{ где } l_0 = 10h,$$

где h – средний размер структурного блока массива (ограниченного трещинами).

Например: h = 1 м, l_0 = 10 м, тогда $L=10\cdot 1/0{,}15^2=444$ м.

Массив, с размером меньшим, чем 444 метра – дискретный, с большим – квазисплошной.

13.4. Трещиноватость и слоистость массива

Трещиноватость горных пород – это совокупность трещин различного происхождения и различных размеров, формы и пространственной ориентировки.

Трещиной называют разрыв сплошности среды, величина которого на порядок и более превосходит межатомные расстояния в кристалической решетке (т.е. более 10^{-9}м).

По происхождению трещиноватость горных пород разделяется на нетектоническую, тектоническую и планетарную. Нетектоническая трещиноватость горных пород – это следствие растрескивания горных пород в процессе охлаждения (для магматических пород), уплотнения, дегидратации (для осадочных горных пород).

К нетектонической трещиноватости относится также технологическая трещиноватость, вызванная ведением горных работ, трещиноватость горных

пород в зоне влияния горной выработки, вызванная БВР, горным давлением и т.д.

Тектоническая трещиноватость развивается в горных породах в связи с тектоническими процессами, т.е. вызывается – и складкообразованием, глубинными подвижками платформ.

Планетарная трещиноватость связана с напряжениями, вызванными изменением частоты вращения Земли и ее формы.

В механике горных пород при характеристике массива под трещиной понимают не все трещины, а только те, наличие которых приводит к разрыву поля деформации.

Наличие трещиноватости приводит к изменению прочностных и деформационных характеристик массива в целом.

Прочность пород в массиве меньше, чем в образце за счет наличия трещин

$$\sigma_м = K_c \sigma_{об},$$

где $К_с$ – коэффициент структурного ослабления пород в массиве (табл. 13.2).

Таблица 13.2.

Классификация ВНИМИ для горных пород в массиве по трещиностости

Категория пород по трещиноватости	Расстояние между поверхностями ослабления *l*, м	Коэффициент структурного ослабления, $К_с$
Практически монолитные	более 1,0	0,9
Малотрещиноватые	0,5-1,0	0,8
Среднетрещиноватые	0,3-0,5	0,6
Трещиноватые	0,1-1,3	0,4
Весьма трещиноватые	до 0,1	0,2

Трещиноватость влияет на деформационные характеристики пород в массиве следующим образом. Обычно для квазисплоных массивов вычисляют эквивалентный модуль деформации, который зависит от вида трещиноватости.

Наиболее полно этот вопрос исследовал Руппенейт. Приведем некоторые его решения.

Для массива, имеющего количество систем трещин от 1 до 3; у которого длина трещины $l_{тр} > L$ характерного размера исследуемой области

$$E^{э}_{\perp оси X} = \frac{E}{1 + \sum_{1}^{n} \eta_i (1 - \sin^4 \theta_i)};$$

$$E^{э}_{Ш\,осиX} = \frac{E}{1 + \sum_{1}^{n} \eta_i (1 - \cos^4 \theta_i)},$$

где Е – модуль упругости ненарушенной породы (образца); n –число систем трещин;

$$\eta_i = \frac{\delta_i}{\beta_i h_i},$$

δ_i – ширина раскрытия i-той трещины; $\beta = 3\ 10^{-4}$ – относительная площадь контактов стенок трещин; h_i – среднее расстояние между трещинами i-той системы; Θ_i – угол между направлением плоскости трещины и выбранным направлением оси х.

$$\mu^{э}_{\perp,Ш} = \mu + \sum_{1}^{n} \eta_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i$$

В массиве, эквивалентном сыпучей среде

$$E^{э} = 1{,}6(1 + \frac{1}{M})\beta E,$$

где М – пустотность сыпучей среды, ед.

Слоистость различают, как микрослоистость – т.е. слоистость в пределах одной литологической разности и как макрослоистость – т.е. наличие в массиве различных литологических разностей.

Микрослоистость вызывает в породе неоднородность и анизотропию свойств.

Макрослоистость (табл. 13.3) может быть 2 видов: без резких скачков свойств и с резким изменением свойств пород от слоя к слою.

Таблица 13.3

Классификация массива горных пород по слоистости

Категория пород по слоистости	Толщина слоев, м
Весьма тонкослоистые	до 0,2
Тонкослоистые	0,2-1,0
Среднеслоистые	1,0-3,0
Крупнослоистые	3,0-10,0
Весьма крупнослоистые	более 10,0

В первом случае массив обычно рассматривают как квазисплошной, а во втором – массив не может рассматриваться как сплошной (условие Крупенникова не выполняется).

13.5. Неоднородность и анизотропия

Неоднородность массива по признаку А – зависимость этого признака в пределах данного объема от координат точки опробования.

Анизотропия объекта по признаку А – зависимость этого признака в пределах данного объема от направления (геометрическая анизотропия).

В зависимости от неоднородности и анизотропии различают следующие виды массивов горных пород (табл. 13.4).

Таблица 13.4

Виды массивов горных пород

Характеристика массива	Однородный (квазиоднородный)	Статистически неоднородный	Неоднородный с упорядоченной неоднородностью
Изотропный	Свойства пород: - не зависят от направления; - не зависят от координат точки опробования	Свойства пород: - не зависят от направления; - являются случайными функциями координат точки опробирования	Свойства пород: - не зависят от направления; - являются непрерывными функциями координат точки опробирования
Анизотропный	Свойства пород: - зависят от направления; - не зависят от координат точки опробования	Свойства пород: - зависят от направления; - являются случайными функциями координат точки опробирования	Свойства пород: - не зависят от направления; - являются непрерывными функциями координат точки опробирования

Критерием однородности для одного слоя является величина коэффициента вариации его свойств: если его величина меньше 25% – массив квазиоднородный, если больше – массив неоднородный.

Если массив состоит из нескольких слоев, то возможны 2 случая:

– при переходе из одного в другой слой нет резкого изменения механизированных свойств,

– наоборот, есть резкое изменение свойств.

Критерием однородности для первого случая служит уравнение

$$\mathbf{A_1(1 - 3V) \le A_2 < A_1(1 + 3V)},$$

где A_1 – среднее значение свойства для рассматриваемого объема; A_2 – среднее значение свойства для данной неоднородности; V – коэффициент вариации.

При соблюдении этого условия – массив квазиоднороден, если нет – неоднороден.

Массивы со вторым типом неоднородности всегда считаются неоднородными.

С точки зрения сплошности массивы однородные и квазиоднородные рассматриваются как сплошные, а неоднородные – как дискретные.

13.6. Теория напряжений

Принимая во внимание гипотезу об однородности и непрерывном распределении вещества, выделим в деформированном породном массиве, который находится в равновесии, произвольную точку *A* (x, y, z).

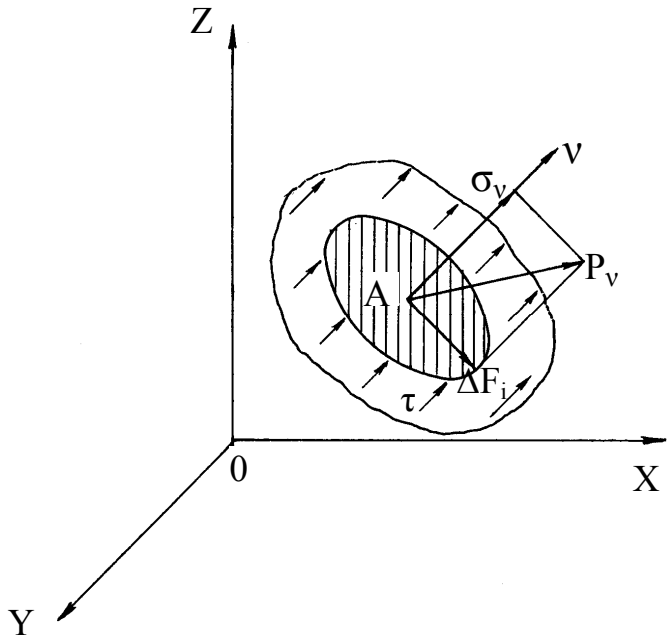


Рис. 13.3. Схема к выводу величины напряжения

Мысленно рассечем рассматриваемый массив плоскостью, проходящей через точку *A* на две части и отбросим одну из них (рис. 13.3.). При этом для того, чтобы оставшаяся часть осталась в состоянии равновесия к плоскости сечения необходимо приложить некоторые внутренние силы p_v, распределенные по этому сечению и отражающие действие отброшенной части породного массива на оставшуюся. **Величина, характеризующая интенсивность распределения внутренних сил, называется напряжением**.

Выделим в окрестности точки *A* элемент ΔF площади сечения. Пусть v – внешняя нормаль к элементу площади ΔF. Обозначим углы, образованные нормалью с осями координат через α_x, α_y, α_z. Косинусы этих углов называются **направляющими** и обозначаются, соответственно, через l, m, n. Внутренние силы p_v заменим главным вектором ΔP_v, приложенным в точке *A*. Отношение ΔP_v к ΔF характеризует среднюю интенсивность распределения внутренних сил по рассматриваемой элементарной площадке. При стремлении ΔF к нулю предел отношения имеет вполне определенное значение, называемое **полным напряжением** p_v в точке *A* по площадке с нормалью v:

$$p_v = \lim \frac{\Delta P_v}{\Delta F}. \qquad (13.2)$$

Для дальнейшего рассмотрения целесообразно ввести в рассмотрение две составляющие полного напряжения p_v: проекцию вектора P_v на нормаль v к площадке, т.е. **нормальное напряжение** σ_v, и проекцию вектора P_v на плоскость элементарной площадки ΔF_i – **касательное напряжение** τ_v.

Очевидно, что через точку A можно провести множество различно ориентированных площадок ΔF_i. Каждой из площадок соответствует свой вектор полного напряжения P_{vi}. Совокупность векторов напряжений во всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку, полностью характеризует напряженное состояние в этой точке.

Напряженное состояние в точке A может быть определено также заданием векторов напряжений P_x, P_y, P_z в трех взаимноперпендикулярных площадках, проходящих через это точку (рис. 13.4). Пересекаясь, эти площадки образуют некоторую прямоугольную систему координат.

Полное напряжение, например, P_x в координатной плоскости $y0z$, т.е. в площадке с нормалью x, в общем случае раскладывается на три напряжения, параллельные осям координат: нормальное напряжение σ_x и и касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz}. Эти составляющие называют еще **компонентами** напряжения. Индексы у касательных напряжений означают: первый – координатную ось, нормальную к рассматриваемой площадке, второй – координатную ось, которой рассматриваемая составляющая касательного напряжения параллельна. Таким образом, имеется три компонента **нормального** σ_x, σ_y и σ_z и шесть – касательного **напряжений** – τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy}.

Зная величины и направления нормальных и касательных напряжений в трех взамноперпендикулярных площадках, которые принимаются за координатные плоскости, можно вычислить напряжения в любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку, если известны направляющие косинусы l, m, n нормали v к этой площадке по отношению к выбранным осям.

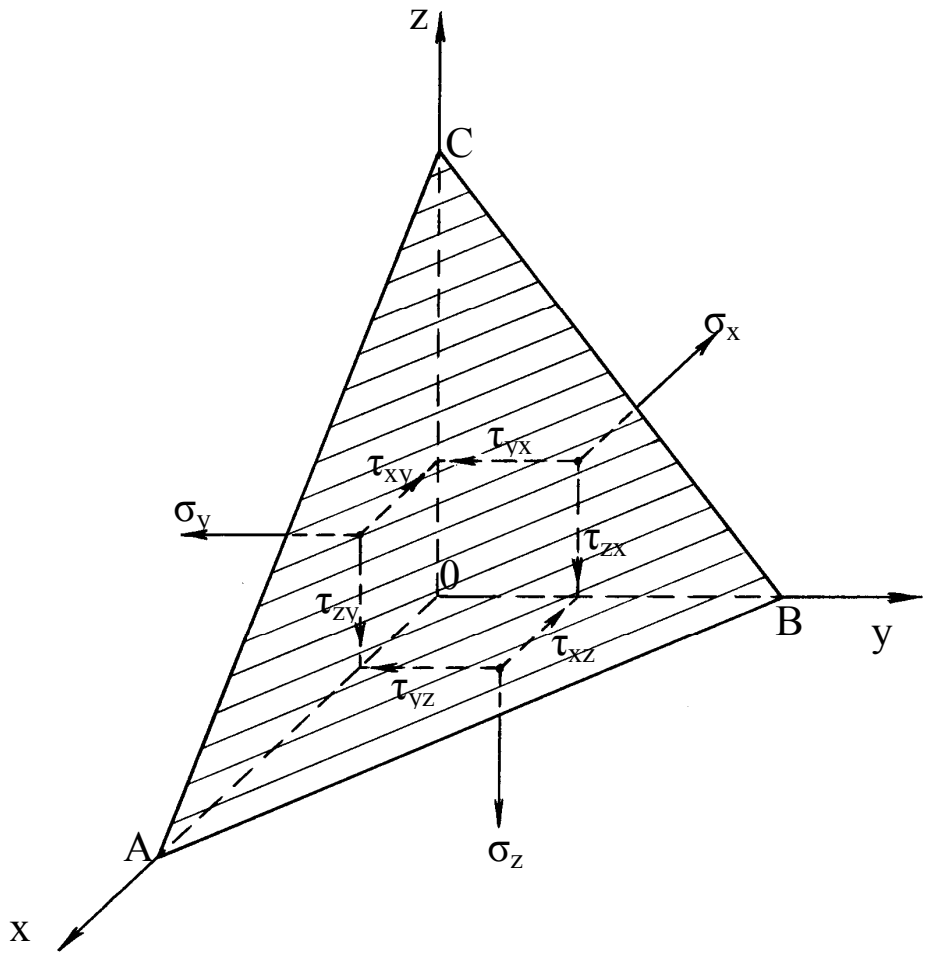


Рис. 13.4. Обозначение компонентов напряжения на косой произвольно ориентированной площадке

Итак, полное напряжение P_v можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям X_v, Y_v, Z_v. Тогда из условия равновесия пирамиды *ABCO* получим следующие выражения для составляющих полного напряжения P_v в наклонной грани пирамиды:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned}\right\} \qquad (13.3)$$

Полное напряжение P_v на наклонной площадке определится через свои составляющие следующим образом:

$$P_\nu = \sqrt{X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2}. \qquad (13.4)$$

Таким образом, напряженное состояние в произвольной точке породного массива считается установленным, если известны девять компонентов напря-

жений, из которых, в силу закона парности касательных напряжений ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и т.д.) независимыми являются шесть.

В геомеханике (см. рис.4.5) часто используют иное представление о распределении напряжений в породном массиве. Для этого в окрестности исследуемой точки выделяют прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис.13.5). На гранях параллелепипеда изображают составляющие компоненты напряжения. Компоненты напряжения на параллельных гранях равны, если расстояние между ними стремится к нулю.

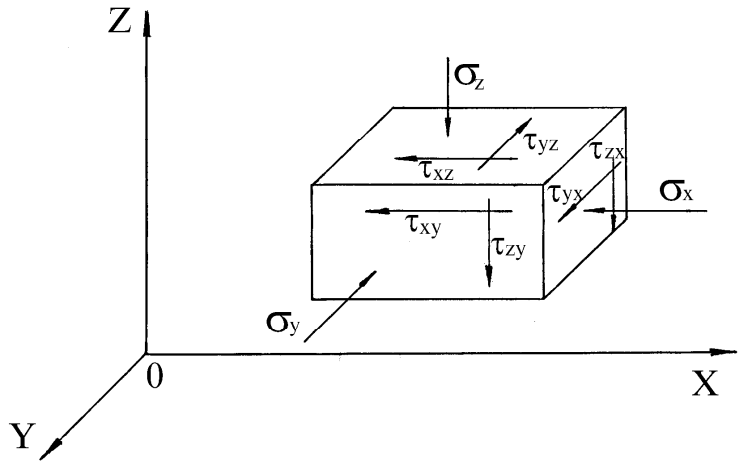


Рис.13.5.. Обозначение компонентов напряжений на гранях элементарного куба

Можно доказать, что напряженное состояние в точке исследуемого тела есть некоторая величина, не зависящая от выбора координатных осей. Эта величина называется **тензором напряжения**, а компоненты напряженного состояния - **компонентами тензора**. Более строгое определение понятия «тензор» рассматривается в специальном разделе математики – тензорном исчислении.

Как числа и векторы, тензоры можно складывать, умножать. Так, суммой двух тензоров является новый тензор, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых тензоров. Умножить тензор на число – значит умножить на это число каждый из его компонент.

Тензор напряжения записывается в форме следующей симметричной матрицы

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \qquad (13.5)$$

Если ввести понятие о среднем, или **гидростатическом**, напряжении

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \qquad (13.6)$$

то тензор напряжения можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$T_н = T_н^o + Д_н, \tag{13.7}$$

где $T_н^o$ - **шаровой тензор**, равный

$$T_н^o = \begin{vmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ср} \end{vmatrix}, \tag{13.8}$$

и $Д_н$ - **девиатор напряжений**, равный

$$Д_н = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{ср} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{ср} \end{vmatrix}. \tag{13.9}$$

Шаровой тензор в общем напряженном состоянии обеспечивает уменьшение (увеличение) объема деформируемого тела без изменения формы, а девиатор – изменение его формы.

Систему координат всегда можно изменить таким образом, что направления координатных осей совпадут с линиями действия таких нормальных напряжений, при которых касательные напряжения равны нулю. Эти напряжения называют **главными** и обозначают σ_1, σ_2, σ_3. Причем, подразумевается, что

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Главные напряжения в точке σ_1, σ_2, σ_3 можно вычислить, зная девять компонент напряжения при произвольной ориентации системы координат. Так, например, для определения величины σ_1 следует приравнять нулю определитель

$$\Delta_{\acute{\imath}} = \begin{vmatrix} \sigma_{\tilde{o}} - \sigma_1 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{\acute{o}} - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.10)$$

Развернув этот определитель в строчку, получим кубическое уравнение с одним неизвестным σ_1:

$$\sigma_1^3 = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\sigma_1^2 + \left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2\right)\sigma_1 - \\ - \left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xt}^2\right) = 0. \qquad (13.11)$$

Коэффициенты при σ_1^2, σ_1 и свободный член в уравнении (13.11) называются, соответственно, **первым, вторым и третьим инвариантами** тензора напряжения и обозначаются I_1, I_2, I_3.

Первый инвариант I_1 называется линейным. Он характеризует изменение объема вещества в окрестности инварианта I_2 и определяет возможность перехода тела в пластическую область. Мизес показал, что пластическая текучесть наступает, если второй инвариант тензора девиатора напряжений достигает некоторой критической величины, характерной для данного тела:

$$I_2 = k^2, \qquad (13.12)$$

где k – константа материала, которая равна пределу текучести при чистом сдвиге.

Третий инвариант также имеет определенный физический смысл.

Теория деформаций. Под деформацией породного массива подразумевают изменение взаимного положения его точек. По-прежнему полагаем, что породная среда является сплошной и однородной. Тогда в любой ее точке находится материальная частица. Пусть координаты этой частицы будут *x*, *y*, *z*. В процессе деформирования породной среды рассматриваемая частица получит перемещения *u*, *v*, *w* по направлениям координатных осей *x*, *y*, *z* и в результате будет иметь координаты *x*+*u*, *y*+*v*, *z*+ *w*. В общем случае перемещения *u*, *v*, *w* меняются от точки к точке и поэтому являются функциями координат *x*, *y*, *z*.

Исследование деформаций начнем на примере двухмерной задачи плоской деформации. Под плоской деформацией будем понимать такой частный случай деформированного состояния, при котором все частицы, находившиеся первоначально в одной плоскости, останутся после деформирования в той же

плоскости. Предположим, что координатные оси выбраны так, что оси *x* и *y* лежат в плоскости деформации. Тогда *w*=0, а величины *u* и *v* не зависят от координат *z*.

Рассмотрим малый прямоугольный элемент *АВСД* недеформированной породной среды со стороны *dx* и *dy* (рис.13.6).

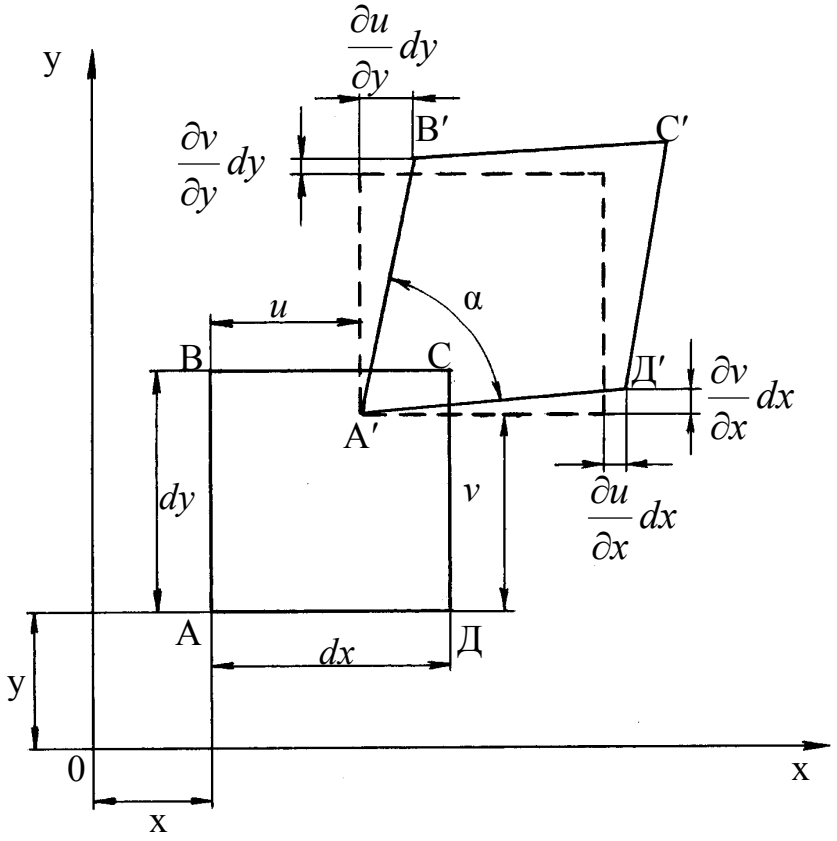


Рис.13.6. Схема к выводу соотношений между компонентами перемещений и деформаций

После деформации элемент занимает положение *А′В′С′Д′*. С геометрической точки зрения различают два основных типа деформаций: **продольную** – изменение первоначальной длины – и **деформацию сдвига** – изменение величины первоначально прямого угла. Продольная деформация обозначается буквой ε, сдвиговая – γ.

Продольная деформация определяется как предел отношения изменения длины отрезка $\Delta\delta$ к его первоначальной длины ΔL, т.е.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta L}, \qquad (13.13)$$

или

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{A'Д' - АД}{АД}. \qquad (13.14)$$

Выражая длины отрезков *А′Д′* и *АД* через *U* и *dx* и пренебрегая величинами высшего порядка малости для продольной деформации в направлении оси *x*, после преобразований получим, что

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \nu}{\partial y}. \qquad (13.15)$$

Чтобы определить деформацию сдвига, рассмотрим искажение первоначально прямого угла *ВАД*. Деформация сдвига *xy* в точке *A* определится как изменение величины угла между двумя элементарными отрезками *AB* и *АД*, первоначально параллельными осями *x* и *y*. Из геометрического рассмотрения получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (13.16)$$

Для трехмерной задачи компоненты деформаций могут быть получены аналогичным образом. Они будут равны:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{dx},\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial \nu}{dy},\ \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{dz}, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x},\ \ \gamma_{yz} = \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\ \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \qquad (13.17)$$

Эти соотношения известны под названием **уравнений Коши**. Шесть величин ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, называются компонентами деформации. Деформации сдвига, как следует из (13.17), обладают симметрией, т.е. $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$; $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ и т.д.

По аналогии с напряжениями можно ввести в рассмотрение понятие о средней деформации:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right). \qquad (13.18)$$

Тогда тензор деформации, подобно тензору напряжения, можно также разложить на **шаровой тензор деформаций** и **девиатор деформаций**:

$$T_д = T_д^o + Д_д. \qquad (13.19)$$

Шаровой тензор деформации представляет собой следующую матрицу

$$T_{\partial} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}, \qquad (13.20)$$

а девиатор деформаций, соответственно, равен

$$Д_{\partial} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}. \qquad 13.21)$$

Первый характеризует величину объемного расширения (сжатия), второй – формоизменение объема в окрестности рассматриваемой точки среды.

Связь между напряжениями и деформациями. Все тела, находящиеся в напряженном состоянии, получают деформацию. Зависимость между деформацией и приложений силой впервые была сформулирована Гуком применительно к тонкому стрежню. В случае объемного напряженного состояния закон Гука формулируется следующим образом: **в любой точке сплошной среды каждый из шести компонентов напряжений является линейной функцией шести компонентов деформации, и наоборот**. Это положение называется **обобщенным законом Гука** и записывается так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]. \end{aligned} \qquad (13.22)$$

Составляющие тензоров напряжения и деформации связаны между собой следующими линейными зависимостями:

$$T_н^о = GT_д^о, \tag{13.23}$$

$$Д_н = 2GД_д. \tag{13.24}$$

Выражение (13.23) называют **законом упругого изменения объема**, а выражение (13.24) – **законом упругого изменения формы**.

13.7. Виды напряженного состояния

Из предыдущего параграфа следует, что в самом общем случае напряженно-деформированное состояние выделенного элементарного объема в окрестности рассматриваемой точки характеризуется наличием девяти компонентов напряжений и девяти компонентов деформаций. Такое напряженно-деформированное состояние, как уже отмечалось, называется **объемным.**

Решение объемных задач даже только с применением методов теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому решение любой геомеханической задачи начинают с анализа особенностей напряженно-деформированного состояния для того, чтобы упростить исходную расчетную схему и привести ее по возможности к так называемой плоской задаче, когда всего лишь два компонента напряжений и два компонента деформаций зависят от координат точек тела.

Так, например, если тонкую пластину, находящуюся в состоянии равновесия под действием внешних сил, нагрузить равномерно распределенными по толщине усилиями, приложенными к ее границе параллельно плоскости пластины, то компоненты напряжений $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ на обеих поверхностях пластины будут равны нулю и можно предположить, что они равны нулю и внутри пластины (рис.13.). Такое напряженное состояние будет определяться только компонентами напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и называется **плоским напряженным состоянием**. Доказано, что в тонких пластинах все три неизвестные компоненты напряжений не зависят от координаты *Z*, а являются только функциями координат *X* и *Y*.

Плоское напряженное состояние не является характерным для задач геомеханики. Но упрощения, подобные приведенным выше, возможны и в другом предельном случае, когда размер тела в направлении оси *Z* очень велик.

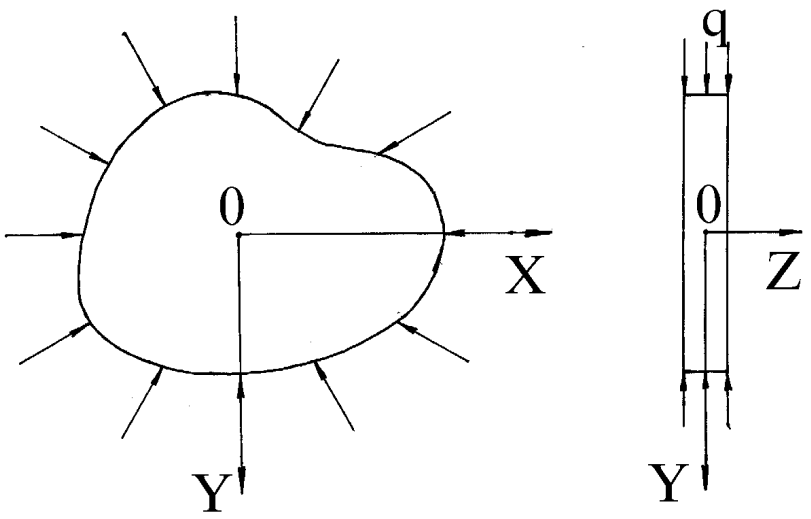


Рис.13.7. Плоское напряженное состояние

Это могут быть, например, подпорная стенка или длинная горизонтальная выработка (рис.13.8.а,б). Очевидно, что если мы будем рассматривать напряженно-деформированное состояние массива вокруг выработки на достаточном удалении от ее торцов, то все сечения, перпендикулярные продольной оси выработки *Z*, будут находиться в одинаковых условиях.

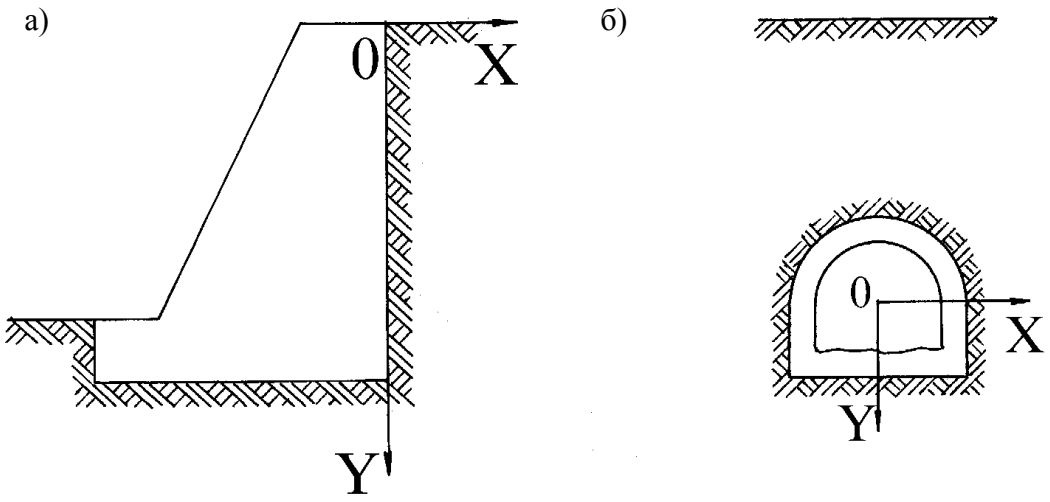


Рис.13.8.а,б. Плоское деформированное состояние

Компоненты перемещений *u* и *v* не зависят от координаты *Z* и являются функциями координат *X* и *Y*. Продольные перемещения ω при этом равны нулю. Такое напряженное состояние называется **плоской деформацией**.

Принимая во внимание соотношение (13.18), получим

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Продольные напряжения σ_z можно получить, используя закон Гука (13.22).

$$\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Эти нормальные напряжения действуют по всем поперечным сечениям, достаточно удаленным от торцов выработки.

Таким образом, задача о плоской деформации, как и задача о плоском напряженном состоянии, сводится к определению компонентов напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy}, как функций *X* и *Y*.

Это обстоятельство, как будет показано далее, существенно упрощает задачу и позволяет получить ее решение в замкнутом виде, то есть в виде конечных формул.

Одноосное напряженное состояние характеризуется одним компонентом напряжений и соответствующим ему компонентом деформации. Оно реализуется в стержневых системах. В задачах механики подземных сооружений такое напряженно-деформированное состояние встречается при расчете конструкций крепи горных выработок, различных ферм, балок.

13.8. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие малого элементарного параллелепипеда с размерами вдоль осей *X* и *Y* соответственно Δx, Δy, b и толщиной, равной единице.

Обозначим площадки, на которых действуют напряжения, индексами 1,2,3,4. С учетом изменения напряжений в пространстве, напряжения, например, σ_x для граней 1 и 3, не строго равны друг другу. Символы σ_x, σ_y, τ_{xy}, относятся к т.О (x,y) в центре прямоугольника на рис.13.9.

Значения напряжений посередине граней будем обозначать через $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_x)_3$, и т.д. Поскольку грани прямоугольника малы, то усилия, приложенные к ним, определятся путем умножения соответствующих напряжений на площадь граней, по которым они действуют. Массовые силы в данном случае имеют тот же порядок, что и напряжения. Обозначим компоненты массовых сил через *X* и *Y*, тогда уравнение равновесия сил, действующих параллельно оси *X*, будет иметь вид:

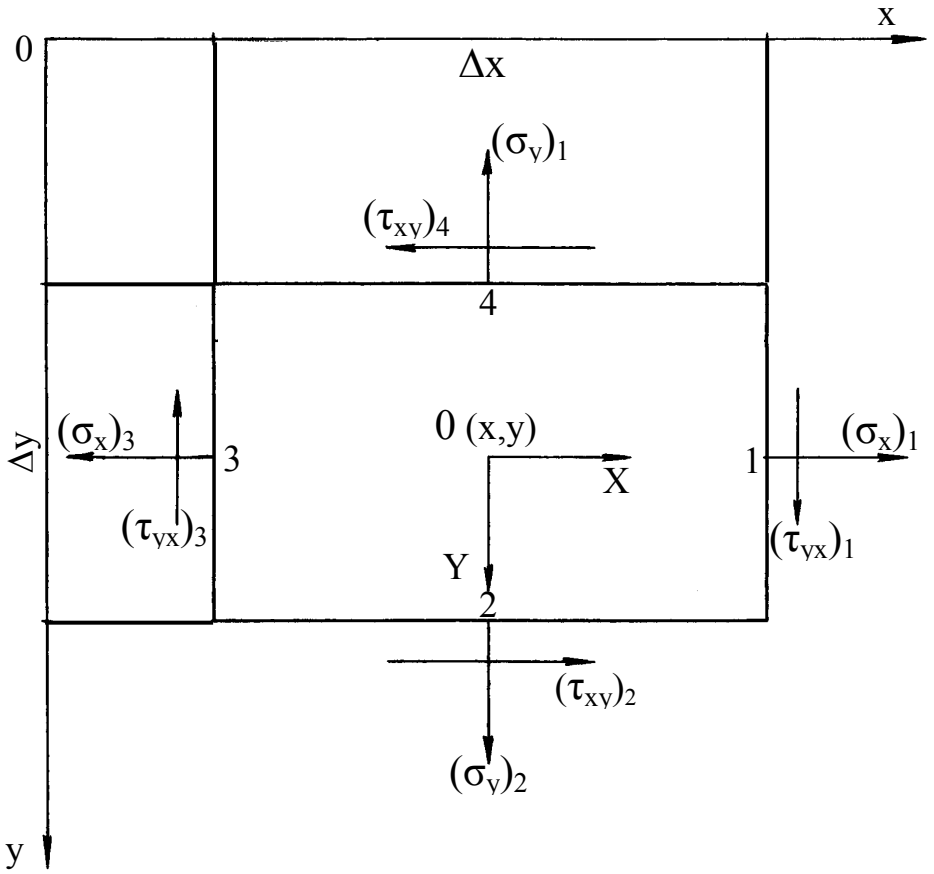


Рис.13.9. К выводу дифференциальных уравнений равновесия всистеме прямоугольных координат

$$(\sigma_x)_1 \Delta y - (\sigma_x)_3 \Delta y + (\tau_{xy})_2 \Delta x - (\tau_{xy})_4 \Delta x + X \Delta x \Delta y = 0,$$

или, после деления всех членов уравнения на $\Delta x \Delta y$,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{\Delta x} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{\Delta y} + X = 0. \qquad (13.25)$$

Если теперь уменьшить размеры элементарного параллелепипеда, положив $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то, согласно определению производной, предел выражения $\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{\Delta x}$ будет равен $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, а второй член уравнения (13.25) станет равным $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$. Аналогичные выражения получим, проецируя все силы на ось *Y*.

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \qquad (13.26)$$

Это и есть два дифференциальных уравнения равновесия для двухмерной плоской задачи.

Практически во всех задачах геомеханики единственной массовой силой является вес горных пород. Тогда, направив ось Y вниз и обозначив через γ объемный вес горных пород ($\gamma = \gamma_0 g$), получим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma = 0. \qquad (13.27)$$

Очень многие задачи механики горных пород удобно решать в полярной системе координат (r, θ), в которой компоненты напряжений имеют обозначения σ_r,σ_θ и $\tau_{r\theta}$. (рис. 13.10).

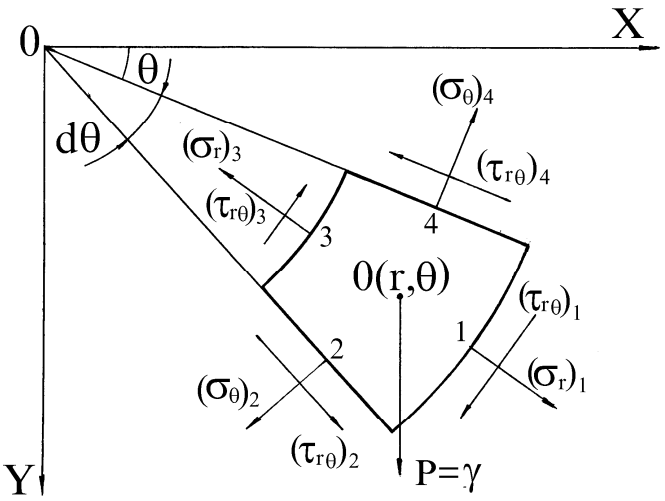


Рис. 13.10. К выводу дифференциальных уравнений равновесия в полярных координатах

Между напряжениями, записанными в полярной и прямоугольной системе координат, существуют следующие функциональные соотношения

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta, \qquad (13.28)$$

$$\tau_{r\theta} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right).$$

Подставляя (13.28) в (13.27), получим дифференциальное уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \gamma\sin\theta = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \gamma\cos\theta = 0. \end{aligned} \qquad (13.29)$$

В случае полярно-симметричной задачи ($\tau_{r\theta}$=0) и при отсутствии массовых сил (γ=0) уравнения равновесия (13.29) сводятся к одному, более простому

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \qquad (13.30)$$

13.9. Граничные условия

Уравнения равновесия должны удовлетворяться во всех точках исследуемого тела. При достижении границ области компоненты напряжений должны быть такими, чтобы они находились в равновесии с внешними силами, приложенными к границе. В силу этого внешние силы можно рассматривать как продолжение внутренних напряжений.

Рассмотрим малую треугольную призму, такую, что ее гипотенуза совпадает с границей тела (рис. 13.11). Обозначим через $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ компоненты поверхностных сил P, отнесенных к единице поверхности в этой точке границы. Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\overline{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \overline{Y} = m\sigma_y + l\tau_{yx}, \qquad (13.31)$$

где l, m – направляющие косинусы нормали ν к границе.

В частном случае рассмотрения равновесия прямоугольной пластинки координатные оси обычно направляют параллельно граням пластинки и граничные условия (13.31) можно упростить. Пусть, например, одна из сторон пластинки параллельна оси X, тогда нормаль ν на этой части границы будет параллельна оси Y; отсюда l=0, m=1. Уравнения (13.31) в этом случае примут вид:

$$\overline{X} = \pm\tau_{xy}; \qquad \overline{Y} = \pm\sigma_y. \qquad (13.32)$$

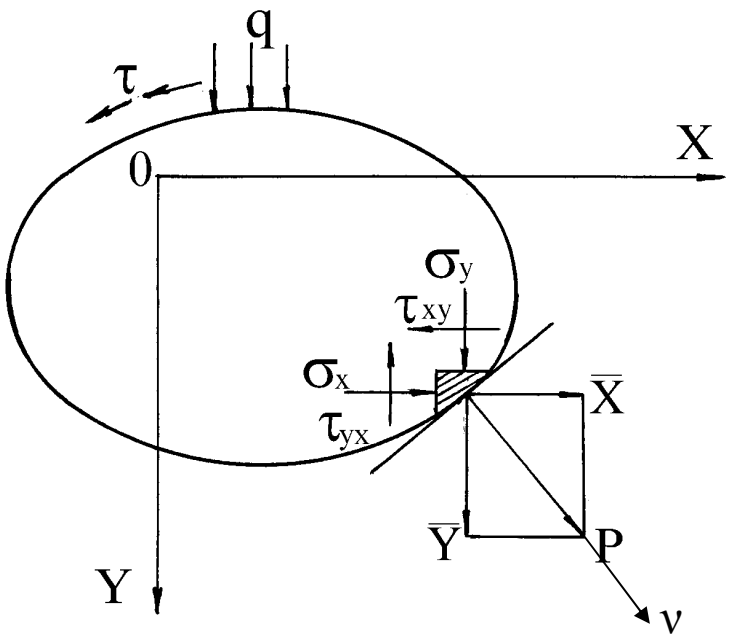


Рис.13.11. К определению граничных условий

причем знак (+) берется в том случае, если нормаль ν проведена в сторону положительных значений y; в противном случае берется знак (-). Из последних формул видно, что компоненты напряжений на границе равны компонентам поверхностных усилий, отнесенных к единице площади границы.

13.10. Уравнение совместности деформаций

Определение компонентов напряжений, возникающих вокруг горных выработок, является одной из основных задач механики горных пород. В двухмерной задаче необходимо для этого решить дифференциальные уравнения равновесия (13.27) или (13.28) таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (13.32). Однако заметим, что компонентов напряжений три, а уравнений равновесия – два, то есть задача является статически неопределимой. Чтобы получить ее решение, необходимо рассмотреть упругую деформацию тела.

Соотношения Коши применительно к плоской задаче имеют следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \nu}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x}, \tag{13.33}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\nu}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial \nu}{r\partial\theta}. \tag{13.34}$$

Заметим, что три компонента деформации выражаются через две функции u и v, то есть они не могут выбираться произвольно: между компонентами деформации должна существовать определенная взаимосвязь. Для того, чтобы

установить ее, продифференцируем дважды первое из уравнений (13.33) по y, второе по x, а третье один раз по x, а второй – по y и получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (13.35)$$

Дифференциальное соотношение (13.35) называется **уравнением совместности деформаций.** Оно должно удовлетворяться при подстановке компонентов деформаций, чтобы обеспечить существование функций u и v, связанных с компонентами деформаций уравнениями (13.33).

Физически условие совместности деформаций можно объяснить следующим образом. Если прямоугольную пластину условно разделить на маленькие прямоугольники линиями, параллельными его сторонам, а потом деформировать ее и зафиксировать эти деформации, то, вырезав затем маленькие деформированные прямоугольники, сложить их обратно можно только зная зависимость, согласно которой деформации передаются от одного прямоугольника к смежному с ним. Эта зависимость и есть условие совместности деформаций.

Используя соотношения закона Гука для исследуемого вида плоского состояния, условие совместности может быть переписано в напряжениях. С незначительной погрешностью и для плоской деформации, и для плоского напряженного состояния уравнение совместности, выраженное через компоненты напряжений, при отсутствии массовых сил или их постоянстве имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0, \qquad (13.36)$$

где $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

В полярной системе координат уравнение совместности может быть записано следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\sigma_r + \sigma_\theta \right) = 0. \qquad (13.37).$$

Можно показать, что в случае полярно-симметричной расчетной схемы уравнения (13.36) и (3.37) сводятся к простому выражению

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 2p,$$

где p – интенсивность внешней нагрузки.

Уравнения равновесия и совместности деформаций позволяют решить задачу об определении компонентов поля напряжений в замкнутом виде.

Интересно отметить, что полученные уравнения не содержат механических характеристик материала. Это значит, что распределение напряжений в любых объектах, если форма их и внешние усилия совпадают, одинаковы для любых изотропных материалов. Данное заключение обладает большой важностью. Как будет показано далее, для некоторых прозрачных материалов, таких как целлулоид, агар-агар, желатин и др., напряжения можно определить экспериментально, используя поляризованный свет, а затем переносить полученные результаты на такие же по форме объекты, но сделанные из другого материала, например, стали, горной породы и т.п.

13.11. Определение механических свойств горных пород в натурных условиях

Как уже отмечалось выше, механические свойства горных пород, получаемые в лабораторных условиях, не соответствуют механическим свойствам реальных массивов горных пород и это несоответствие проявляется в виде масштабного эффекта. Об образце горных пород можно говорить как о некоторой идеализированной модели породного массива. Отмеченное обстоятельство послужило поводом для изыскания путей получения механических констант в натурных условиях, т.е. непосредственно в горных выработках.

Для определения предела прочности на одноосное сжатие и деформационных характеристик известны следующие схемы. В горной выработке в процессе проходки оставляли небольшие целики нетронутой породы, которым затем пилами придавали по возможности правильную геометрическую форму. С помощью гидродомкратов, способных развивать усилие в 150-200 т, столб нагружался до разрушения. В процессе нагружения измерялись деформации вертикальные и горизонтальные, что позволяло определить упругие показатели. Для равномерной передачи давления под опорой домкрата устраивали специальную постель из песка, медного листа и слоя бетона (рис. 13.12,а). Столбы размером $0{,}6 \times 0{,}6 \times 1{,}0$ м располагали с учетом залегания пород – перпендикулярно и параллельно напластованию.

Для изучения сопротивления пород сдвигу во ВНИМИ проводились опыты по схеме, которая изображена на рис. 13.12, б. Для определения параметров сцепления – С и угла внутреннего трения – ρ опыты проводились под разными углами α к напластованию.

Получение механических констант горных пород в натурных условиях сопряжено со значительной трудоемкостью работ. Эти уникальные эксперименты имеют скорее методологическое значение, чем практическое.

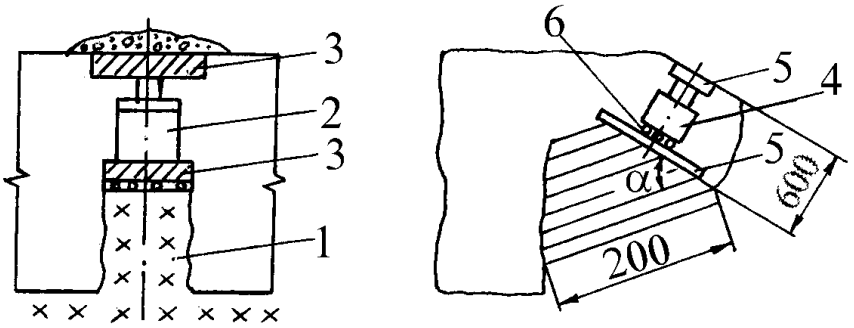


Рис. 13.12. Схемы испытания горных пород в выработках:
а) – на сжатие; б) – на сдвиг; 1 – столб породы; 2 – домкрат;
3 – стальные плиты; 4 – домкрат; 5 – плиты; 6 – ролики.

Перспективными следует признать методы, основанные на установлении корреляционной зависимости между определяемыми механическими константами и скоростью прохождения акустических (ультразвуковых) колебаний через породный массив. Такие исследования в массовом масштабе были выполнены Л.В. Шаумян для Норильского месторождения полиметаллов и О.С. Алферовым для осадочных пород Донбасса. Особое значение имеет последняя работа, в которой породы одной и той же литологической разности разделены на литологические типы в зависимости от фациальной принадлежности, для которых и определялись корреляционные зависимости. Пример такой зависимости приведен на рис. 13.13.

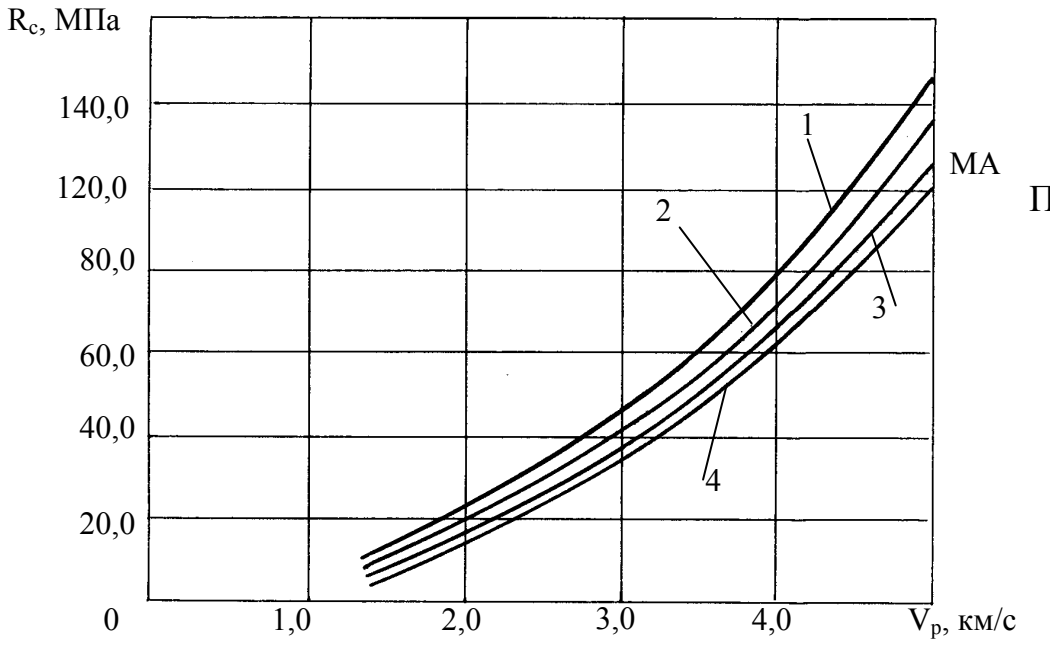


Рис. 13.13. Связь акустических и прочностных свойств для алевролитов
(1 – R_c=59,6 Vp^2; ^{2} – R_c=52,0 Vp^2; 1 – R_c=48,9 Vp^2; 1 – R_c=47,1 Vp^2).

13.12. Статистическая обработка результатов измерений

Все реальные процессы, протекающие в природе, обусловлены большим числом внешних и внутренних факторов, действующих случайным образом. Например, процесс разрушения породных образцов одной и той же литологической разности, определенной фациальной принадлежности протекает в каждом отдельном случае по-разному. Это обусловлено случайной формой структурных связей, величиной содержащейся в образце влаги, наличия текстурных особенностей (внутренние факторы), а также несколько отличающимися размерами образца, технологией их изготовления, и скоростью нагружения (внешние факторы). Таким образом, процесс разрушения образцов с целью получения их механических характеристик – это случайный процесс. Для каждого испытанного образца в процессе лабораторных исследований получают своё, отличное от других, значение механической характеристики.

Для получения достоверных значений искомой механической характеристики необходимо выполнить измерения на возможно большем числе образцов. Для этого пробы, идущие на последующее изготовление образцов, отбирают по определенной методике таким образом, чтобы они в максимальной степени представляли все возможные для данного породного массива колебания минерального состава и структурных особенностей.

По специальным методикам устанавливается необходимое число образцов, в соответствии с которым из **генеральной совокупности** случайным образом отбирают определенное число проб. Отобранная партия проб представляет собой **случайную выборку.** Из каждой пробы изготавливают 3…4 образца максимально допустимых по данной методике размеров.

Результаты измерений каждой группы образцов по всей случайной выборке подвергают статистической обработке. Прежде всего, определяют среднее арифметическое значение всех n измерений параметра X_i

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,. \tag{13.38}$$

Затем вычисляют: среднее квадратическое отклонение единичного результата

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}, \tag{13.39}$$

коэффициент вариации (%), т.е. среднее относительное отклонение полученных результатов измерений от среднего арифметического

$$\eta = \frac{S_n}{\overline{X}} \times 100\%, \tag{13.40}$$

доверительный интервал

$$\Delta X = \frac{t_{n\alpha} S_n}{\sqrt{n}} \quad . \tag{13.41}$$

Коэффициент Стьюдента $t_{n\alpha}$ учитывает отличие случайной выборки от генеральной совокупности и зависит от числа образцов n и требуемой доверительной вероятности (чаще всего α = 0,85-0,95). Окончательный результат статистической обработки результатов измерений записывается, например, следующим образом

R_c (200±10) МПа при α = 0,95.

Запись показывает, что среднее значение параметра (предел прочности на одноосное сжатие) равно 200 ($\overline{X}$), а отклонение его от среднего арифметического в 95% случаев не превышает 10 (ΔX).

Из формулы (13.41) легко определить необходимое число испытаний для обеспечения ошибки измерений не более $\xi = \frac{\Delta X}{\overline{X}}$ при известном коэффициенте вариации изучаемого параметра:

$$n = (t_{n\alpha}\, \eta / \xi)^2 . \tag{13.42}$$

Так, если η = 20%, ошибка измерений 15%, то n = 7 образцам (при α = 0,95, $t_{n\alpha}$ = 1,96).

Контрольные вопросы

1. В каких случаях массив является сплошным или дискретным?
2. Что такое трещиноватость горных пород?
3. Что называется трещиной?
4. Какую трещиноватость учитывает классификация Н.М. Проскурякова?
5. По каким признакам классифицируют трещины В.В.Ржевский и Г.Я.Новик?
6. Приведите классификацию трещиноватости горных пород по ВНИМИ.
7. Дайте классификацию горных пород по слоистости.
8. Что называют «физически малым элементарным объемом»?
9. В чем суть соотношения Ф.С. Ясинского?
10. Назовите виды напряженного состояния.
11. Что такое «тензор напряжения» и «тензор деформации»?

12.Сформулируйте «закон упругого изменения объема» и «закон упругого изменения формы».

13.Запишите обобщенный закон Гука и соотношения Коши.

14. Чем отличается плоское напряженное состояние от плоско деформированного?

15.Запишите уравнение равновесия в прямоугольной системе координат, в полярной.

16. В чем состоит физический смысл уравнения совместности деформаций?

17.Как формулируются граничные условия в задачах геомеханики?

18.Как используют на практике факт отсутствия в уравнениях равновесия прочностных и деформационных характеристик?

14. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТРОНУТОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

14.1 Общие сведения

Основной задачей механики горных пород является изучение явлений, происходящих в породах, окружающих горную выработку. Решить задачу о напряжениях и деформациях в массиве, нарушенном горной выработкой, возможно только, если известны напряжения, которые были в массиве до ее проведения.

Поэтому изучение напряжений в нетронутом (ненарушенном) массиве является одной из важнейших задач механики горных пород.

Напряженное состояние массива определяется тензором напряжения, состоящим, как известно, из шести компонентов:

нормальных – σ_x, σ_y и σ_z

и касательных – τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}.

В механике горных пород положительное направление оси ординат z удобнее принимать сверху вниз и начало координат совмещать с поверхностью.

Нетронутым, или ***ненарушенным***, ***массивом*** горных пород называются участки земной коры, незатронутые горными работами, т. е. такие, в которых не имеется горных выработок (или разработок); находящиеся же на соседних участках выработки удалены настолько, что они не оказывают влияния на напряженное состояние пород рассматриваемого участка. Другими словами, это массив пород, напряженное состояние которого определяется только естественными природными условиями.

Изучение напряженного состояния ненарушенного массива является крайне сложной задачей по ряду причин и, в первую очередь, в силу того, что для непосредственных замеров напряжений в натуре требуется проведение горной выработки, хотя бы буровой скважины, что уже в той или иной степени ведет к нарушению состояния массива.

Решение этой задачи моделированием или теоретическими методами также является крайне сложным в связи с большим числом имеющих разнообразный характер естественных факторов, создающих напряженное состояние массива пород.

Рассмотрим основные факторы и условия, с которыми связано формирование напряженного состояния массива горных пород.

Глубина залегания изучаемого массива горных пород от поверхности является главным фактором, от которого зависит во всех участках земной коры напряженное состояние, причем компонента σ_z за счет гравитационных сил по мере увеличения глубины пропорционально возрастает.

Вторым фактором, определяющим напряженное состояние в некоторых участках земной коры, являются силы, связанные с *тектонической деятельностью.*

Этот фактор может иметь региональное значение в так называемых горно-складчатых массивах.

Действительно, в некоторых областях складок наблюдаются нарушения породы, показывающие, что они подвергались действию усилий, связанных со сложным характером напряженного состояния массива.

На напряженное состояние массива пород в виде местных явлений могут оказывать также влияние неоднородность строения массива пород, анизотропность, а также жесткость соседних пород.

*Неоднородность строения массива и его анизотропность***,** несомненно, могли вызвать при формировании массива местные усложнения напряженного состояния пород в связи с тем, что неоднородное поле сопротивления должно вызвать неоднородное же распределение напряжений.

Степень жесткости соседних пород также могла влиять на распределение напряжений как местное явление в районах контактов более прочных и менее прочных пород.

Важным и очень сложным фактором, несомненно, влияющим на современное напряженное состояние пород массива, является *время***.** Причем этот фактор не регионального, а общего повсеместного характера.

Земная кора находится в непрерывном движении, поэтому, если посмотреть на массив пород во времени, имеющем значения порядка геологических эпох, то, очевидно, напряженное состояние такого массива следует считать переменным.

Вместе с этим есть области с интенсивной современной тектонической деятельностью, в которых напряженное состояние массива пород может изменяться в очень короткие отрезки времени, буквально на глазах людей.

Горные работы и подземные сооружения хотя и могут в отдельных случаях иметь довольно продолжительный срок существования (например, известны подземные сооружения, сохранившиеся до наших дней и срок существования которых составляет 4-5 тыс. лет), однако сравнительно с геологическими эпохами даже эти сроки являются крайне малыми отрезками времени. Деятельность человека на протяжении жизни имеет еще более короткие сроки.

Поэтому в механике горных пород принято считать, что напряженное состояние массива пород является постоянным, имея статический характер.

Что же касается напряженного состояния в областях, опасных по сейсмическим явлениям, то это является специальным вопросом, который пока не может рассматриваться в общей механике горных пород. Если даже общие положения механики горных пород еще довольно слабо разработаны, то такой специальный вопрос, как напряженное состояние пород в областях, опасных по сейсмическим явлениям, вообще не исследован, хотя и является весьма важным.

Однако вопрос о влиянии фактора времени на напряженное состояние массива пород имеет еще и другое значение.

Экспериментально установлено, что все породы в той или иной степени обладают свойством ползучести.

Породы, находясь долгий период времени под напряжением, компоненты которого по величине были разные, в зависимости от характеристики ползучести, присущей им в период формирования данного участка массива, должны

были проявить свойство релаксации. Поэтому время должно было сравнять или хотя бы приблизить по величине компоненты напряжения.

Эксперименты и опыты в области изучения свойств ползучести пород, как будет указано ниже, подтверждают эти соображения, показывая, что такое выравнивание напряжений в действительности происходит.

Наконец, как местные явления могут оказывать влияние на напряженное состояние массива пород и такие факторы, как давление газов и вод, находящихся в порах и пустотах пород.

Изложенные общие соображения о факторах и условиях, влияющих на формирование напряжений, позволяют прийти к некоторым общим положениям, которые в настоящее время принято считать исходными при оценке напряженного состояния ненарушенного массива горных пород.

Основным фактором во всех случаях является глубина и гравитационные силы.

Влияние тектонических сил следовало бы учитывать для массивов горно-складчатого типа. Имеются отдельные исследования напряженного состояния горных пород на участках, где было заметно проявление тектонических сил. Наблюдения показывают, что в таких участках характер напряженного состояния массива горных пород значительно отличается от обычного, наиболее распространенного характера. Например, горизонтальная составляющая напряжения может в несколько раз превышать вертикальную. Однако методы учета влияния этого фактора, разрабатываемые в настоящее время, пока еще не получили практического распространения.

Время как фактор, влияющий на проявление свойства ползучести пород, необходимо учитывать во всех случаях.

Что же касается местных явлений и связанных с ними распределений напряжений в породах, то, очевидно, что их учитывать нецелесообразно. Здесь еще также следует иметь в виду, что в связи с ползучестью пород эти местные явления могли быть и локализованы.

Так как обычно рассматриваются относительно небольшие участки земной коры и в течение коротких промежутков времени, то общее состояние принимается статическим.

В результате пока напряженное состояние нетронутого массива (не имеющего явно выраженный горно-складчатый характер) принимается как статическое, равновесное, объемное под влиянием собственного веса.

14.2 Напряженное состояние ненарушенного массива горных пород

Для оценки компонентов напряжения ненарушенного массива, исходя из изложенных выше общих соображении, порода принимается как однородная и изотропная среда.

Мысленно в массиве на глубине Н от поверхности выделяется единичный кубик (рис. 14.1), имеющий размеры, обеспечивающие его объем не менее и не более элементарного объема.

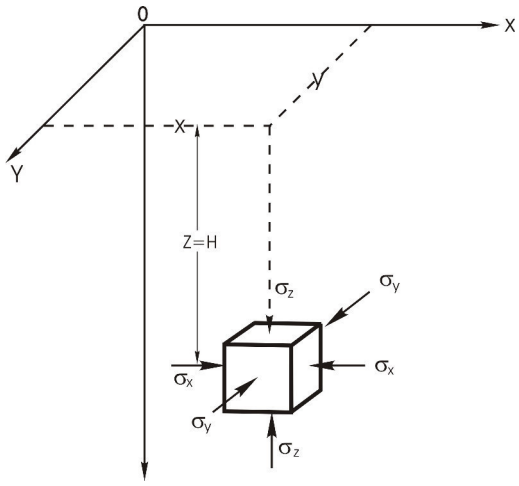


Рис. 14.1. Схема к определению напряженного состояния ненарушенного массива

Для удобства ориентировка кубика в пространстве принимается такая, что компоненты σ_x, σ_y и σ_z будут главными нормальными напряжениями.

Тогда в общем виде компоненты напряжения будут определяться следующими выражениями

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z = \gamma H, \sigma_x = \sigma_\gamma = \lambda_2 \gamma H \\ &\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (14.1)$$

где γ – средний объемный вес пород, залегающих выше рассматриваемого кубика; λ_2 – коэффициент горизонтального распора или бокового давления; Н – глубина от поверхности.

Важнейшей характеристикой напряженного состояния ненарушенного массива пород является коэффициент бокового давления λ_2, показывающий отношение величины горизонтальной составляющей напряжения к вертикальной. Определение значений этого коэффициента должно производиться в зависимости от типа породы и основных ее свойств.

14.3 Определение коэффициента бокового давления в прочных породах

В некоторых случаях порода может быть принятой как упругая среда. Тогда коэффициент бокового давления может быть определен с помощью коэффициента Пуассона (поперечной деформации) из следующего выражения:

$$\lambda_2 = \frac{\mu}{1 - \mu} \qquad (14.2)$$

Такое определение λ_2 можно получить, исходя из положения, что сумма деформаций по одной из осей кубика, получающихся за счет действия напряжений по всем трем осям, равна нулю.

Запишем это условие, приняв за продольное направление, совпадающее с действием σ_x

$$\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{E}\mu - \frac{\sigma_z}{E}\mu = 0$$

Здесь E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона.

Имея в виду, что $\sigma_x = \sigma_y$ и решив приведенное уравнение относительно σ_x, получим, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z .$$

Поэтому в идеально упругой породе компоненты напряжения будут определяться

$$\sigma_z = \gamma H ;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\gamma H . \qquad (14.3)$$

Коэффициент поперечных деформаций (коэффициент Пуассона) изменяется в пределах от 0,08 до 0,5. Соответственно крайние возможные пределы изменения значений λ составляют от 0,1 до 1. Следует подчеркнуть, что в соответствии с физическим смыслом коэффициента ν, его значения *не могут превышать* 0,5, *поэтому и значения коэффициента бокового распора* λ *не могут быть больше* 1. Это положение играет принципиальную роль и должно использоваться при анализе и интерпретации результатов натурных измерений.

Предельные значения ν = 0,5 и λ = 1 выражают, как это следует из формул (14.1) и (14.3), условие *гидростатического распределения напряжений* в массиве, т. е. такого распределения, когда

$$\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y . \qquad (14.4)$$

Гипотеза о гидростатическом распределении напряжений в массиве пород была впервые высказана известным швейцарским геологом А. Геймом во второй половине XIX в. Гидростатическое напряженное состояние является частным случаем напряженного состояния массива, выражаемого формулами (14.1) и (14.3), и может иметь место при пластическом состоянии горных пород в рассматриваемой точке массива. По мнению многих исследователей, даже весьма прочные породы по мере роста глубины и связанного с ним роста дав-

ления и температуры постепенно переходят в пластическое состояние, так что на достаточно больших глубинах распределение напряжений приближается к гидростатическому независимо от состава пород, слагающих массив. Однако в случае весьма прочных скальных пород эти глубины исчисляются, по-видимому, десятками километров, т.е. значительно больше глубин, реально достижимых при горных разработках. Для таких же пород, как глины, слабые глинистые и песчаные сланцы, каменные соли, слабые угли, способных к вязкопластическому течению при сравнительно невысоких нагрузках, напряженное состояние массивов даже на небольших глубинах может быть гидростатическим.

Заметим, что при строгом аналитическом подходе распределение напряжений в массиве должно выражаться более сложными закономерностями, учитывающими кривизну Земли. Однако на глубинах, достижимых горными работами, поправка на кривизну ничтожно мала и учет ее не имеет практического смысла.

Массив горных пород слагается, как правило, слоями различной плотности (объемного веса). Поэтому формулы (14.1) и (14.3) в наиболее общем случае массивов, сложенных чередующимися разновидностями пород с различными значениями объемного веса, принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \Sigma\gamma_i h_i; \\ \sigma_x &= \sigma_y = \xi_i \Sigma\gamma_i h_i \end{aligned}\right\}, \qquad (14.5)$$

где γ_i – объемный вес i-го слоя пород; h_i – толщина *i*-го слоя.

Заметим, что значения реактивных боковых напряжений σ_x и σ_y зависят от коэффициента бокового распора λ_i рассматриваемого *i*-го слоя независимо от коэффициентов λ_{i-1}, λ_{i-2} и т.д. вышележащих слоев. Таким образом, в том случае, если массив сложен весьма разнородными слоями пород, коэффициенты поперечных деформаций ν которых существенно различны, напряжение σ_z будет монотонно возрастать по мере роста глубины, напряжения же σ_x и σ_y при общей тенденции к возрастанию с глубиной могут при переходе от слоя с большим к слою с меньшим значением ν (и соответственно λ) даже уменьшаться.

Выше мы полагали, что активная гравитационная составляющая общего поля напряжений вертикальна. В действительности это не всегда так. Неравномерное распределение масс в горизонтальной плоскости, обусловленное изменениями рельефа земной поверхности (например, наличием гор и котловин), а также изменениями плотности пород в горизонтальных эпиплоскостях, вносит аномалии, приводящие к тем или иным отклонениям активной гравитационной составляющей σ_z от вертикали. Отклонения эти обычно не превышают нескольких градусов, в редких случаях достигая 10…15°. Отклонения обусловливаются также наклонным залеганием чередующихся слоев различной плотно-

сти, складчатостью и неравномерной мощностью различных слоев пород, слагающих массивы.

14.4. Коэффициент бокового давления в сыпучих породах

Сыпучая порода в некоторых случаях может считаться обладающей только трением ($\varphi \neq 0, c = 0$).

Приняв это условие, можно определить значение коэффициента бокового давления (горизонтального распора) из следующего выражения

$$\lambda_2 = \mathrm{tg}^2 \frac{90^0 - \varphi}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}. \qquad (14.6)$$

Приведенное выражение для нахождения коэффициента бокового давления можно получить из задачи об активном давлении идеально сыпучей породы.

Рассмотрим эту задачу, имея еще в виду, что этим решением вообще часто пользуются в механике горных пород.

Представим, что имеется массив, сложенный идеально сыпучей породой, характеризующейся углом внутреннего трения φ и объемным весом γ. Глубину от поверхности примем H (рис. 14.2), а ширину (перпендикулярно к плоскости схемы) – равной единице.

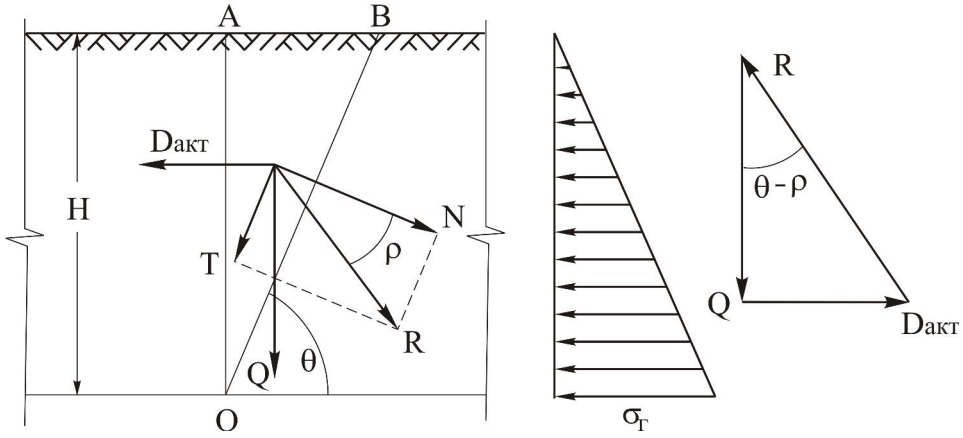


Рис. 14.2. Схемы к задаче об активном давлении в сыпучей породе

Мысленно отсечем левую часть массива по плоскости АО, тогда призма АВО за счет своего веса начнет сползать вниз.

Но так как имеется массив, то призма будет находиться в предельном состоянии и поэтому оказывать давление на мысленную плоскость АО.

Равнодействующую давления сползающей призмы, которое называется *активным давлением* сыпучей породы, обозначим $D_{акт.}$

Примем как некоторое допущение, что при сползании призмы по плоскости АО трение отсутствует. Угол Θ наклона плоскости ОВ призмы должен

определиться из условия, что будет сползать наибольший объем породы, т. е. считая, что дальнейшее увеличение угла Θ приведет к тому, что часть породы за счет трения по плоскости ОВ уже не будет находиться в предельном состоянии.

Обозначим вес сползающей призмы Q, а равнодействующую давления на наклонную плоскость R.

Предельное состояние призмы будет определяться следующим условием

$$\mathbf{T = N \cdot tq\varphi},$$

где T – усилие, сдвигающее призму вниз; N – нормальное усилие, прижимающее призму к наклонной плоскости; φ – угол внутреннего трения породы.

Поэтому угол между направлением действия сил Q и R будет равен $\Theta - \varphi$.

Призма находится в равновесии, поэтому можно написать из силового треугольника

$$\mathbf{D_{акк} = Q \cdot tq(\Theta - \varphi)},$$

или

$$\mathbf{D_{акт} = \gamma \frac{H \cdot H \cdot ctq\Theta}{2} tq(\Theta - \varphi) = \frac{\gamma H^2}{2} ctq\Theta \cdot tq(\Theta - \varphi)}. \quad (14.7)$$

Для нахождения условия максимума определим первую производную последнего выражения и приравняем ее нулю

$$\mathbf{\frac{dD}{d\Theta} = \frac{\gamma H^2}{2} \cdot \frac{\dfrac{tq\Theta}{\cos^2(\Theta - \varphi)} - \dfrac{tq(\Theta - \varphi)}{\cos^2\Theta}}{tq\varphi^2\Theta} = 0}.$$

После преобразования будем иметь условие максимума

$$\mathbf{\Theta = \frac{90^0 + \varphi}{2}}. \quad (14.8)$$

Подставив это условие в выражение (14.7), получим формулу для определения величины равнодействующей активного давления сползающей призмы на мысленную стенку глубиной H

$$D_{акк} = \frac{\gamma H^2}{2} tq^2 \frac{90^0 + \varphi}{2}. \quad (14.9)$$

Для нахождения давления на единицу площади стенки или величину горизонтальной составляющей напряжения на глубине Н от поверхности необходимо дифференцировать значение $D_{акт}$ по Н

$$p_г = \frac{dD}{dH} = \gamma H tq^2 \frac{90^0 + \varphi}{2}. \quad (14.10)$$

Так как γH есть σ_1, т.е. вертикальная составляющая напряжения на глубине Н, то можно записать

$$\sigma_2 = \sigma_1 tq^2 \frac{90^0 + \varphi}{2},$$

что и приводит к любой форме выражения (14.4).

Чистые пески характеризуются углом внутреннего трения 30…35°, поэтому коэффициент бокового давления в идеально сыпучей породе будет в среднем определяться

$$\lambda_2 = 0{,}27 – 0{,}33.$$

Коэффициенты бокового давления, полученные экспериментальным путем, для реальных грунтов, обладающих не только трением, но и сцеплением, по данным проф. Н.А. Цытовича имеют следующие значения:

пески – 0,35…0,41; суглинки – 0,50…0,70; глины – 0,70…0,74.

Контрольные вопросы

1. Какой массив горных пород называют ненарушенным?
2. Какие силы вызывают напряжения в ненарушенном горном массиве?
3. Что такое коэффициент бокового распора?
4. Чему равен коэффициент бокового распора для упругой среды?
5. Чему равен коэффициент бокового распора для сыпучей среды?

15. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕХАНИКЕ

15.1. Общие сведения

Массивы горных пород (горная выработка, кровля, целик, ствол и т.д.) являются трехмерными системами, состоящие из слоев анизотропных пород, которые могут иметь переменные толщину, внешнюю нагрузку и различные граничные условия.

Оценим возможность применения некоторых известных методов к исследованию их напряженно-деформируемого состояния как многослойных толстых пластин (плит) с учетом поперечного сдвига (влиянием поперечных сил).

Тот факт, что на одних краях массива горных пород (плиты) заданы перемещения, а на других усилия, делает задачу смешанной. Задачи об изгибе плиты со смешанными условиями опирания сложнее обычных, поэтому, в обширной литературе о пластинах (оболочках) имеется сравнительно мало работ, посвященных изгибу даже обычных однослойных пластин (оболочек) со смешанными краевыми условиями.

В общем случае, когда жесткость – функция координат и отсутствует свободное опирание на противоположных краях, сложность дифференциальных разрешающих уравнений (13.26) и граничных условий (13.25), приведенных в разделе 13, вынуждает применять приближенные методы.

Одним из широко используемых численных методов решения краевых задач является метод сеток, несмотря на простоту и возможность применения его к пластинам (оболочкам) с произвольной толщиной при любых условиях крепления и нагрузке, фактически в таких задачах используется редко, так как дифференциальное уравнение равновесия имеет переменные коэффициенты и шаг сетки должен быть меньше, чем при постоянных толщине и нагрузке, а тем более при учете анизотропности спаев и поперечного сдвига, то значительно увеличивается количество подлежащих составлению и решению алгебраических уравнений. Матрица системы получается плохо обусловленной, большой по объему, имеет мало отличных от нуля элементов, составление программы усложняется формулами, вытекающими из краевых условий.

По методу прямых конечностными разностями заменяют частные производные только по одному направлению. При этом получают систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, общее решение которых можно найти для некоторых частных случаев переменных толщин, нагрузки, слоистости и анизотропии горных пород. Получить точное решение системы дифференциальных уравнений методом прямых можно только при изменении толщины и нагрузки по простым законам с учетом только изотропии слоев. В общем случае это сделать не удается, поэтому для отыскания решения необходимо использовать один из численных методов интегрирования. Кроме того, недостатком метода прямых является необходимость составления и решения алгебраических уравнений для удовлетворения краевым условиям на противоположных краях пластины (оболочки) при любых способах их закрепления.

По методу коллокаций прогибы пластины (оболочки, представляются в виде конечного ряда заданных функций, умноженных на параметры. Для вы-

числения параметров строится система алгебраических уравнений из условий, что уравнения и граничные условия удовлетворяются в ряде точек пластины (оболочки). Метод коллокаций дает хорошие результаты, если заданные функции удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям. В общем случае такие функции подобрать трудно.

Приведенная краткая характеристика конечноразностных методов показывает, что применение их для расчета массивов горных пород, в принципе возможно, но для решения плоских задач.

Более распространенными в настоящее время получили **метод конечных элементов** (МКЭ) и **метод граничных элементов** (МГЭ). Другое название последнего – метод граничных интегралов (МГИ). Интенсивное их развитие и применение в практике инженерных расчетов стало возможным с развитием и доступностью вычислительной техники. В последние два десятилетия благодаря применению этих методов существенно расширился класс задач, решаемых в механике горных пород.

15.2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов заимствован из строительной механики. Его суть заключается в следующем.

Из бесконечного массива выделяется некоторая интересующая нас область, например, в окрестности подлежащей изучению выработки (рис. 15.1,а).

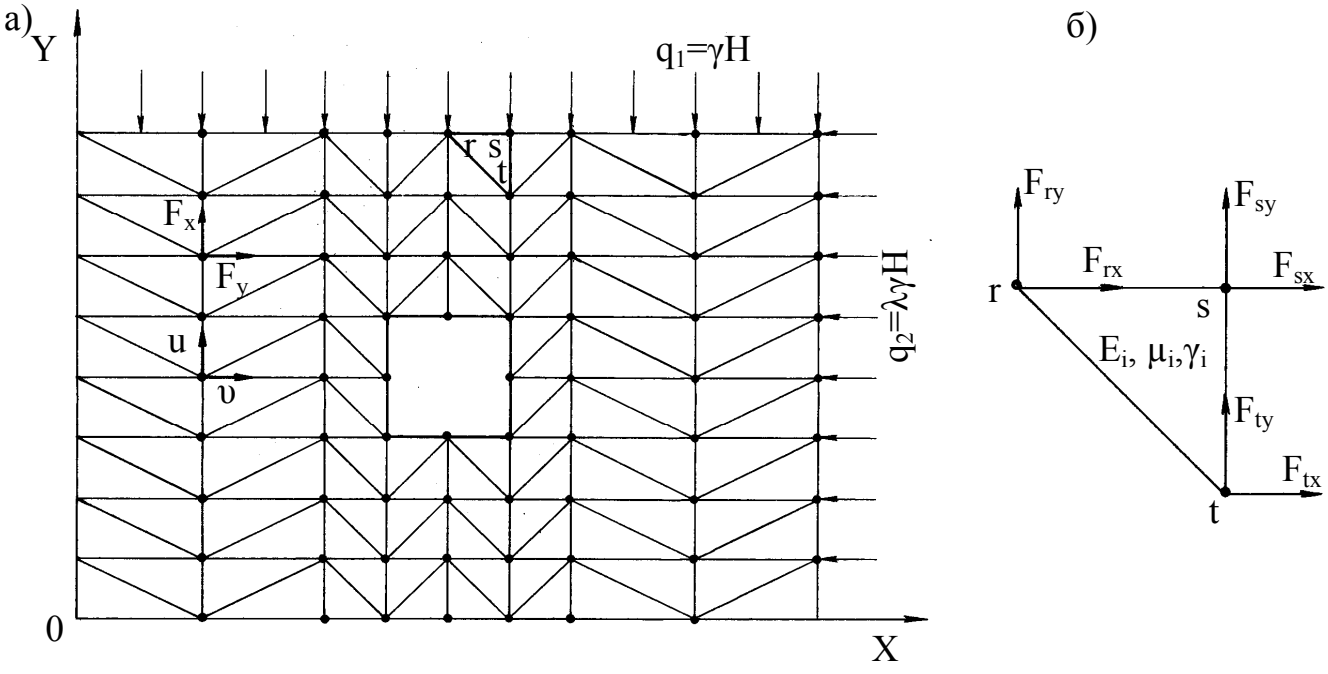


Рис.15.1. Конечноэлементная аппроксимация исследуемой области (а) и ее произвольный *i*-ый элемент (б)

Действие отброшенной части массива заменяем усилиями, приложенными на границе области:

$$\sigma_y = -\gamma H\,; \qquad \sigma_x = -\lambda\gamma H\,.$$

Вся исследуемая область делится на подобласти, достаточно малые, чтобы считать внутри их среду однородной и изотропной (рис.14.1,б). Поэтому свойства среды в каждой из подобластей описываются постоянными (для данной подобласти) характеристиками: E, μ, γ. Эти подобласти называются **конечными элементами**. Они взаимодействуют друг с другом в **узлах** через **узловые силы** – $\overline{F}$ и **узловые перемещения** δ. В таком виде исследуемая область подобна некоторой стержневой системе. Сообщая одному узлу усилие или перемещение, получим отклик во всей системе, в каждом из ее узлов.

Однако, основная идея метода заключается в том, что перемещения внутренних точек каждого элемента (вектор $\vec{\delta}$ с компонентами (проекциями) $\{\delta\}=\{U, V\}$) связываются с перемещениями узлов (вектором $\vec{\delta}_e$ с компонентами $\{\delta\}_e = \{\delta_r, \delta_s, \delta_t\} = \{U_r, V_r, U_s, V_s, U_t, V_t\}$). Эта связь выражается некоторой функцией, которая называемой **функцией формы**.

$$\{\delta\}_e = \Phi\{\delta\}_e\,. \tag{15.1}$$

Ее надо подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям на контуре элемента и соблюсти условие неразрывности деформаций (13.33). Наиболее просто получить эту функцию для конечного элемента треугольной формы. Именно поэтому чаще всего исследуемую область разбивают на конечные элементы треугольной формы.

Компоненты вектора перемещений произвольной внутренней точки (рис. 15.2) связывают с компонентами вектора перемещений узлов (подробный вывод опускаем):

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2S}\left[\left(a_r + b_r x + c_r y\right)u_r + \left(a_S + b_S x + c_S y\right)u_S + \left(a_t + b_t x + c_t y\right)u_t\right], \\ v_e &= \frac{1}{2S}\left[\left(a_r + b_r x + c_r y\right)v_r + \left(a_S + b_S x + c_S y\right)v_S + \left(a_t + b_t x + c_t y\right)v_t\right], \end{aligned} \tag{15.2}$$

где

$$\begin{array}{lll} a_r = X_s У_t - X_t У_s, & b_r = У_s - У_t, & c_r = X_t - X_s. \\ a_s = X_t У_r - X_r У_t, & b_s = У_t - У_r, & c_s = X_r - X_t. \\ a_t = X_r У_s - X_s У_r, & b_t = У_r - У_s, & c_t = X_s - X_r. \end{array}$$

Здесь – X_s, $У_s$, X_t, $У_t$, X_r, $У_r$ координаты узлов элементов, S – площадь треугольного элемента, определяемая следующей матрицей:

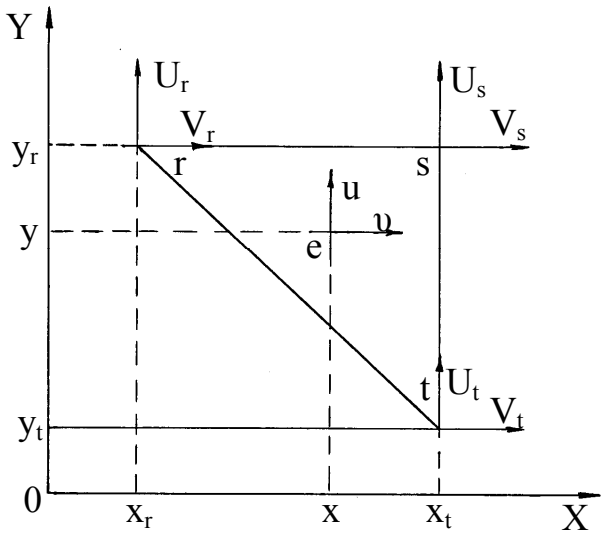


Рис.15.2. К определению вектора перемещений произвольной внутренней

$$S=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & X_r & Y_r\\ 1 & X_S & Y_S\\ 1 & X_t & Y_t\end{bmatrix}.$$

Поскольку мы имеем дело с векторными величинами, все соотношения и далее удобно записать в матричной форме. С вектором перемещений связывают вектор деформаций:

$$\{\varepsilon\}=B\{\delta\}_e, \qquad (15.3)$$

где B – координатная матрица. Она определяется следующим образом:

$$B=\frac{2}{2S}\begin{bmatrix}b_r & 0 & b_S & 0 & b_t & 0\\ 0 & c_r & 0 & c_S & 0 & c_t\\ c_r & b_r & c_S & b_S & c_t & b_t\end{bmatrix}. \qquad (15.4)$$

Далее, используя матрицу упругости

$$D=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1-\mu & \mu & 0\\ \mu & 1-\mu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2\end{bmatrix}, \qquad (15.5)$$

переходят к напряжениям:

$$\{\sigma\}=D\{\varepsilon\}=DB^T\{\delta\}_e. \qquad (15.6)$$

где B^T – транспонированная матрица B. Последнее равенство – не что иное, как закон Гука в матричном виде.

Поставленная задача будет решена, если будут известны перемещения узлов под действием приложенной нагрузки. А они, конечно, связаны с усилиями в узлах, т.е. с вектором $\{F\}_e$. Эта связь вытекает из условия: работа узло-

вых сил по перемещению узлов должна быть равна работе внутренних сил, т.е. напряжений. Для треугольного элемента это условие дает уравнение:

$$\{F\}_e = [k]_e \{\delta\}_e . \qquad (15.7)$$

Здесь $[k]_e$ – так называемая матрица жесткости элемента, образованная следующим образом:

$$[k]_e = \frac{h}{2S} B^T D B , \qquad (15.8)$$

На этом подготовительная работа заканчивается.

Самым главным этапом создания конечно-элементной модели является построение для всей системы **обобщенной матрицы жесткости**, в которую входят жесткости каждого элемента. При этом все внешние нагрузки приведены к узловым силам. Например, на рис. 15.3 показано, как массовая сила P, действующая в центре тяжести элемента, а также распределенная нагрузка q приводятся к системе узловых сил.

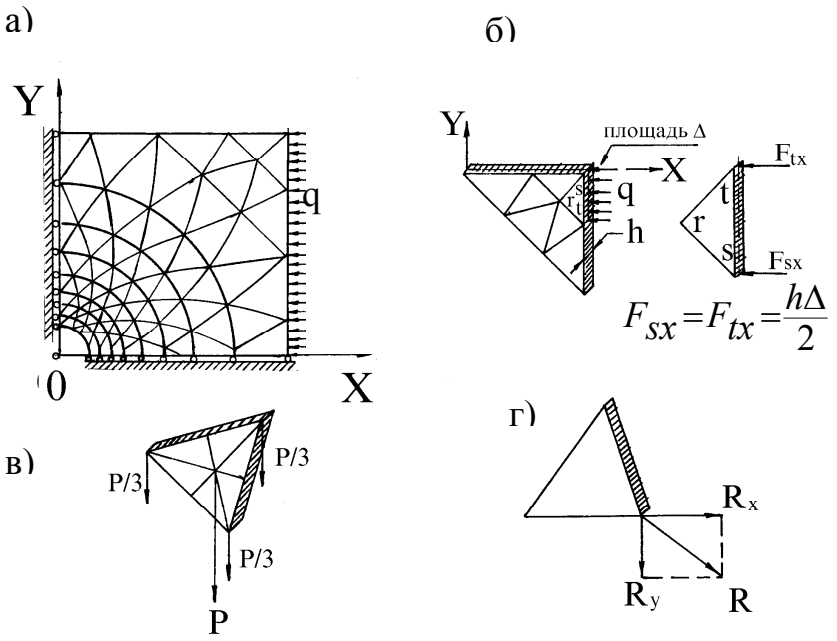


Рис. 15.3. Примеры приведения нагрузок к статистически эквивалентной системе узловых сил: а) – распределенная нагрузка, действующая на исследуемую область; б) – замена распределенной нагрузки q узловыми силами F_{tx} и F_{sx}; в) – разложение силы тяжести P на систему узловых сил; г) – разложение узловой силы R на составляющие R_x и R_y.

Для линейных задач справедлив принцип суперпозиции. Из множества векторов $\{F\}_e$ и $\{\delta\}_e$ формируется обобщенный вектор сил $\{F\}$ и вектор перемещений узлов $\{U\}$, которые связаны между собой равенством:

$$\{F\} = K \{U\}. \qquad (15.9)$$

Здесь K – обобщенная матрица жесткости системы, элементами которой являются матрицы жесткости каждого конечного элемента:

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{m} k_{1,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^{m} k_{1,2}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{1,j}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{1,2n}^{(e)} \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \sum_{e=1}^{m} k_{i,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^{m} k_{i,2}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{i,j}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{i,2n}^{(e)} \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \ldots\ldots & & & & & \\ \sum_{e=1}^{m} k_{2n,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^{m} k_{2n,2}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{2n,j}^{(e)} & \ldots\ldots & \sum_{e=1}^{m} k_{2n,2n}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Это равенство, записанное в матричной форме, представляет собой систему линейных уравнений.

$$\begin{aligned}
&U_1K_{11} + V_1K_{12} + U_2K_{13} + V_2K_{14} + ... + U_{2n}K_{1,2n-1} + V_{2n}K_{1,2n} = F_{x1} \\
&U_1K_{21} + V_1K_{22} + U_2K_{23} + V_2K_{24} + ... + U_{2n}K_{2,2n-1} + V_{2n}K_{2,2n} = F_{y1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&U_1K_{2n-1,1} + V_1K_{2n-1,2} + U_2K_{2n-1,3} + V_2K_{2n-1,4} + ... + U_{2n}K_{2n-1,2n-1} + V_{2n}K_{2n-1,2n} = F_{xn} \\
&U_1K_{2n,1} + V_1K_{2n,2} + U_2K_{2n,3} + V_2K_{2n,4} + ... + U_{2n}K_{2n,2n-1} + V_{2n}K_{2n,2n} = F_{yn}.
\end{aligned} \tag{15.10}$$

Неизвестными здесь являются перемещения узлов конечноэлементной сетки $\{U\}$. Обобщенный вектор сил $\{F\}$ – это столбец свободных членов в системе уравнений. Коэффициенты при неизвестных - элементы матрицы жесткости, которые включают в себя координаты узлов и упругие константы. Если область разбита на m элементов, которые соединяются между собой в n узлах, то мы получим систему $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных перемещений.

Полученную систему можно решить одним из известных методов (Гаусса, Зейделя и др.).

Определив в результате решения для каждого узла компоненты вектора перемещений, через координатную матрицу B переходим к деформациям в центре тяжести конечного элемента $\{\varepsilon\}$ (15.3), а от деформаций через матрицу упругости D к напряжениям $\{\delta\}$ (15.6). Таким образом, поставленная задача

решена. В центре каждого элемента получены значения полного тензора напряжений, деформаций, перемещений.

Для того, чтобы получить достаточно точное распределение напряжений вблизи выработки, конечные элементы нужно делать мелкими, следовательно, их будет много. Для каждого элемента нужно сформировать несколько матриц, которые потом сливаются в общую матрицу жесткости, т.е. нужно формировать большие массивы чисел. Для этого необходим большой объем оперативной памяти ПЭВМ. Для такой симметричной задачи достаточно рассмотреть четверть области, закрепив жестко линии симметрии. Из существа метода вытекают его огромные возможности для математического моделирования различных неоднородностей. По сути, для каждого элемента можно задать свои свойства, правда только упругие. В частности, легко моделируется слоистость. Можно имитировать зону разрушенных пород, задав соответствующие (меньшие) значения модуля упругости, или наоборот, учесть наличие некоторых более жестких элементов. Например, на рис. 15.4 показано распределение напряжений вокруг выработки с анкерным креплением. Металлические анкеры моделировались путем введения элементов с модулем упругости и коэффициентом Пуассона, равными соответствующим характеристикам стали, и задания особых граничных условий.

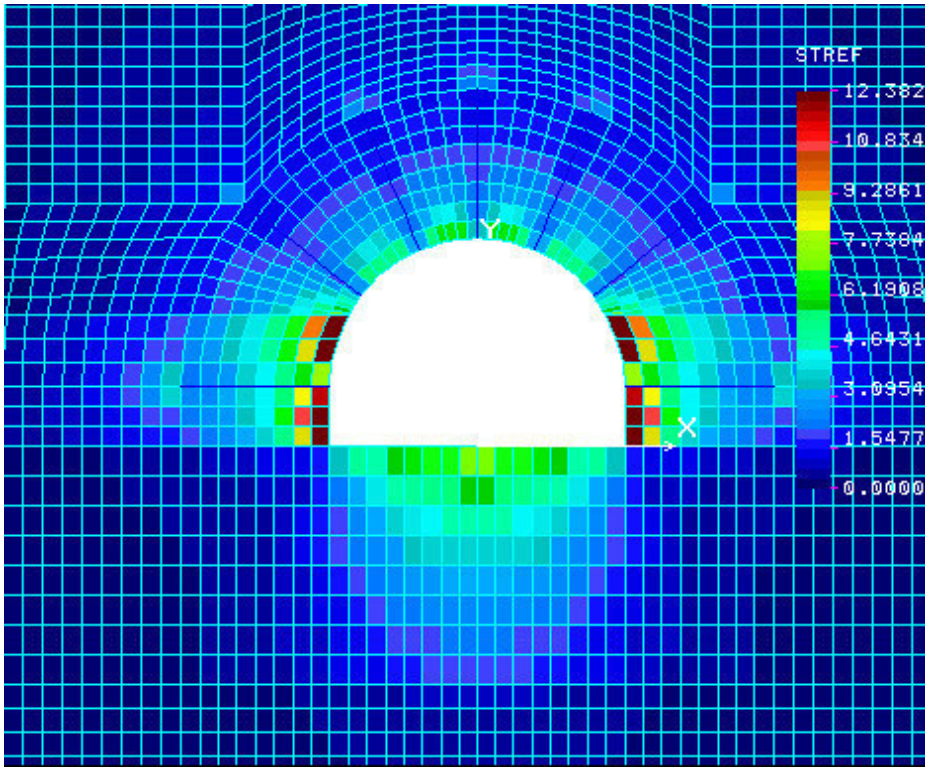


Рис.15.4. Картина распределения величины σ_e/R_c в окрестности выработки при установке 7 анкеров

Имеются лицензированные программные продукты, реализующие МКЭ для различных задач механики. Они обладают широкими возможностями и мощным интерфейсом. В Национальном горном университете разработаны собственные версии вычислительных программ учебного и исследовательского плана. К настоящему моменту на их основе получено много решений различ-

ных геомеханических задач. Причем, не только в упругой постановке и не только для двумерной (плоской) области.

Точно также можно разбить на подобласти и некоторую трехмерную область. Только конечными элементами будут уже не треугольники, а, например, тетраэдры (рис. 15.5). Конечно, в этом случае связь между перемещениями внутренней точки элемента и перемещениями узлов будет иметь более сложную форму. Гораздо большую размерность будет иметь матрица жесткости системы. Потребуется большая оперативная память машины.

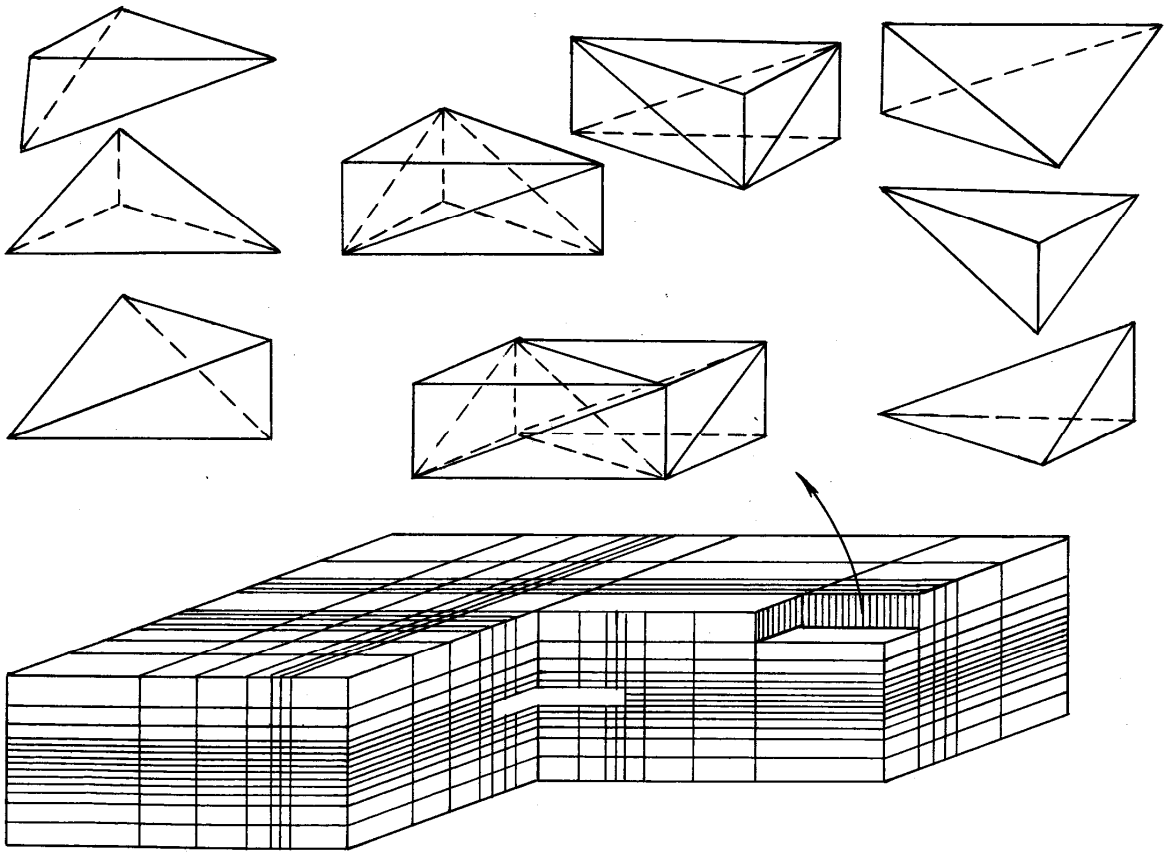


Рис.15.5. Аппроксимация исследуемой области конечными элементами-тетраэдрами

Разработаны алгоритмы и для решения задач, в которых связь между напряжениями и деформациями отличается от закона Гука, является нелинейной. В этом случае решение строится как последовательность упругих решений. Для этого необходимо иметь две экспериментальные кривые деформирования материала «$\sigma - \varepsilon$» и «$\sigma_i - \varepsilon_i$», где σ_i, ε_i - соответственно интенсивность напряжений и деформаций (рис. 15.6).

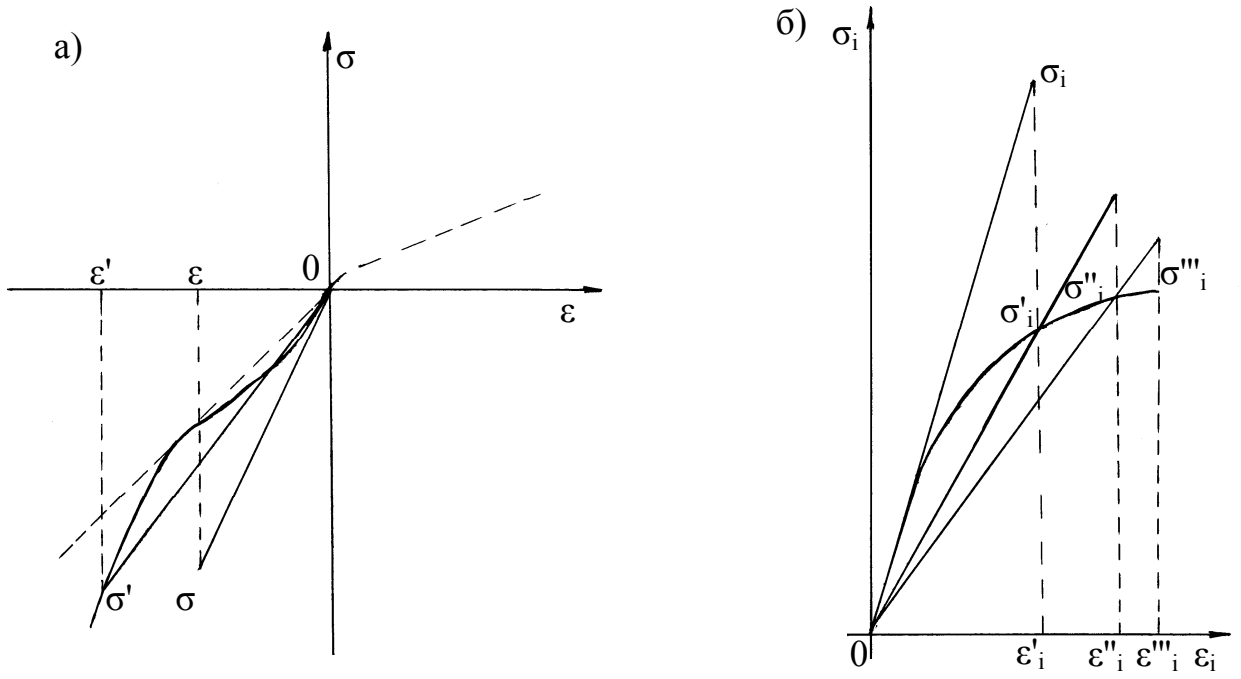


Рис. 15.6. Схематическая зависимость между напряжениями и деформациями (а) и интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (б)

Последовательность решения такова. На «нулевом» шаге осуществляется упругое решение. Если хотя бы в одном элементе интенсивность напряжений превосходит предел текучести или расчетная точка (σ,ε) не лежит на экспериментальной кривой, то расчет повторяется при новых, уточненных, значениях приведенных модулей E', μ' G' для этого элемента.

Эти модули определяются по кривым деформирования по формулам:

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot \frac{3\dfrac{\sigma}{\varepsilon}}{\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2\dfrac{\sigma}{\varepsilon}};\ \mu' = \frac{\dfrac{\sigma}{\varepsilon} - \dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2\dfrac{\sigma}{\varepsilon}};\ G' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{E'}{2(1+\mu')}. \qquad (15.11)$$

Для вычисленных значений σ, σ_i находятся соответствующие значения σ', σ'_i, лежащие на кривых деформирования. Последние используются для вычисления новых значений E', γ', G'. Весь упругий расчет повторяется так до тех пор, пока точки (σ,ε) не «лягут» на кривые деформирования с заданной точностью.

На рис. 15.7 показано распределение напряжений вокруг выработки в случае «пучения» пород почвы. Задача решена методом итераций для случая потери упругопластической устойчивости приконтурного породного массива.

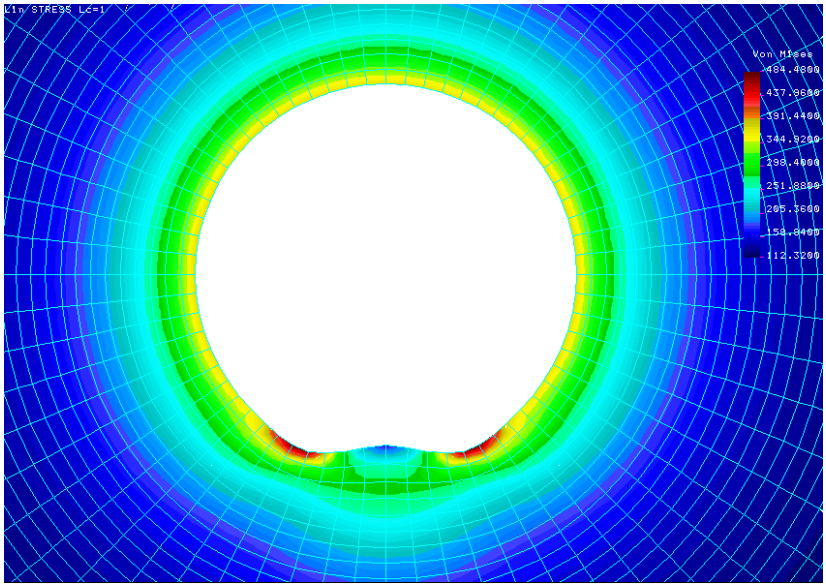


Рис.15.7. Картина распределения напряжений на контуре круглой одиночной выработки при вспучивании пород почвы

Следует отметить, что описанная выше процедура решения нелинейных задач также требуют большого объема оперативной памяти.

Кстати, именно нехватка памяти являлась одно время сдерживающим фактором для использования МКЭ при переходе на персональные ЭВМ.

Возможно, поэтому в геомеханике интенсивно стал использоваться другой, также очень эффективный, численный метод решения задач механики деформируемого тела – метод граничных элементов.

15.3. Метод граничных элементов

Идея метода граничных элементов заключается в следующем. В теории упругости решены некоторые простые задачи, например, известная задача Кельвина о действии сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (рис.15.8).

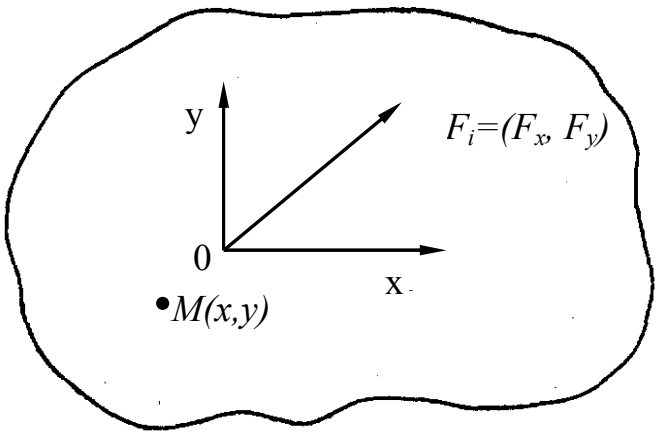


Рис. 15.8. Действие сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (задача Кельвина)

В произвольной точке области M (x, y) определены напряжения σ и перемещения U от действия этой силы. В прямоугольной системе координат они определяются через некоторую функцию координат точки и ее производные.

$$g(x,y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \ln\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}. \qquad (15.12)$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона. Выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= F_x\left[2(1-\mu)g_{,x} - xg_{,xx}\right] + F_y\left(2\mu g_{,y} - yg_{,xx}\right), \\
\sigma_{yy} &= F\left(2\mu g_{,x} - xg_{,yy}\right) + F_y\left[2(1-\mu)g_{,y} - yg_{,yy}\right], \\
\sigma_{xy} &= F_x\left[(1-2\mu)g_{,y} - xg_{,xx}\right] + F_y\left[(1-2\mu)g_{,x} - yg_{,xy}\right]
\end{aligned} \qquad (15.13)$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{F_x}{2G}\left[(3-4\mu)g - xg_{,x}\right] + \frac{F_y}{2G}\left(-yg_{,x}\right), \\
u_y &= \frac{F_x}{2G}\left(-xg_{,y}\right) + \frac{F_y}{2G}\left[(3-4\mu)g - yg_{,y}\right].
\end{aligned}$$

Можно убедиться, что полученные в таком виде напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, а перемещения – условию совместности деформаций.

Приведенное решение представляет собой пример так называемого сингулярного решения: напряжения и перемещения как функции координат точки непрерывны всюду за исключением начала координат (точки приложения силы *F*), где они не определены, т.е. сингулярны.

Если в бесконечной среде будут действовать несколько сосредоточенных сил, то решение задачи о напряжениях и перемещениях в произвольной точке среды можно получить методом суперпозиции (рис. 15.9). Выражения для напряжений и перемещений примут более сложный вид, поскольку в них внесет свой «вклад» каждая из действующих сил.

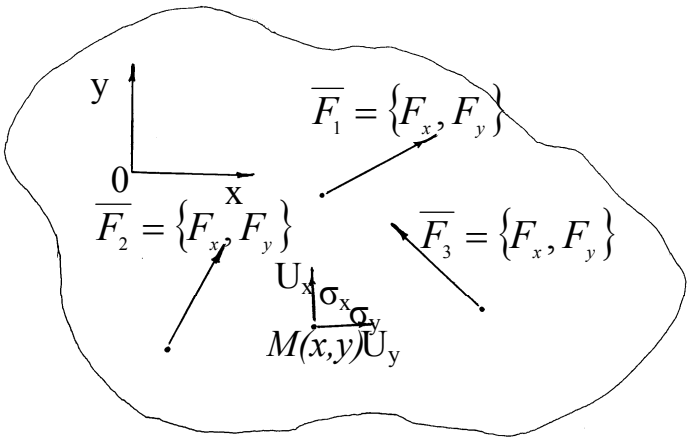


Рис.15.9. Действие нескольких сосредоточенных сил в бесконечной упругой среде

Можно пойти дальше и, используя тот же принцип, получить решения для случая, когда усилия приложены не к точкам, а равномерно распределены вдоль некоторого отрезка конечной длины (2*a*) в бесконечно упругом теле (рис. 15.10).

Решение при этом существенно усложняется. Напряжения и перемещения произвольной точки среды выражаются через функцию:

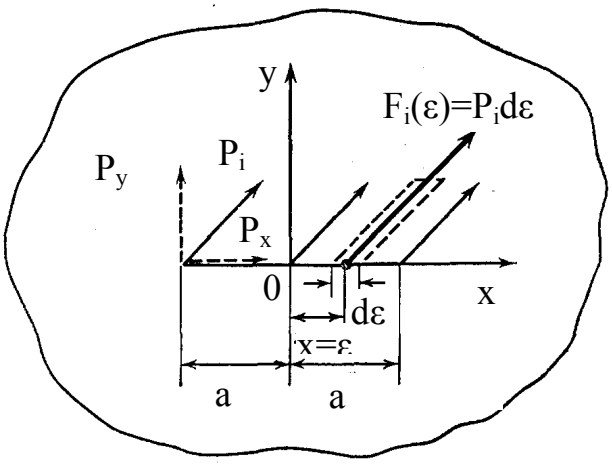


Рис. 15.10. Интегрирование решения Кельвина

$$f(x,y)=\int_{-a}^{a} g(x-\xi,y)d\xi$$

или

$$f(x,y)=-\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\begin{array}{l} y\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-a}-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x+a}\right)-(x-a)\times \\ \times\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x+a)\ln\sqrt{(x+a)^2=y^2}\end{array}\right], \quad (15.14)$$

и ее частные производные:

$$\begin{aligned} f'_x &= +\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}-\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2}\right], \\ f'_y &= -\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a}\right], \\ f''_{xy} &= +\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\frac{y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{y}{(x+a)^2+y^2}\right], \\ f''_{xx} &= -f''_{yy}=+\frac{1}{4\pi(1-\mu)}\left[\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}-\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right]. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Напряжения и перемещения в произвольной точке среды от действия постоянного усилия *P* имеют вид:

$$\sigma_x = P_x\left[(3-2\nu)f'_x + yf''_{xy}\right] + P_y\left(2\nu f'_y + yf''_{yy}\right);$$
$$\sigma_y = P_x\left[-(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}\right] + P_y\left[2(1-\nu)f'_y - yf''_{yy}\right]; \qquad (15.16)$$
$$\tau_{xy} = P_x\left[2(1-\nu)f'_y + yf''_{yy}\right] + P_y\left[(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}\right]$$

перемещения

$$u_x = \frac{P_x}{2G}\left[(3-4\nu)f + yf'_y\right] + \frac{P_y}{2G}\left(-yf'_x\right);$$
$$u_y = \frac{P}{2G}\left(-yf'_x\right) + \frac{P_y}{2G}\left[(3-4\nu)f - yf'_y\right] \qquad (15.17)$$

В точках $x=\pm a$ функция $f(x, y)$, а, следовательно, и напряжения, а также связанные с ними перемещения, имеют особенность (сингулярность).

Представим теперь, что таких отрезков в бесконечном теле много, они примыкают друг к другу, образуя некоторую замкнутую ломаную линию. Напряжения в произвольной точке среды получим, суммируя вклады от действия усилий на каждом из этих отрезков. Этот принцип использован для решения уже известной нам задачи об одиночной выработке в массиве, которую можно представить как полость в бесконечном упругом теле. Контур этой полости заменяется описанной выше ломаной и представляет собой некоторую границу в упругом теле. Поэтому отрезки ломаной, на которых приложены усилия P_j, $j = 1, N$ (N – число отрезков), называются **граничными элементами**. Численная процедура заключается в суммировании вкладов от усилий на каждом *j-м* отрезке – граничном элементе. Влияние каждого усилия на соответствующем отрезке дает сингулярное решение, которое удовлетворяет уравнению равновесия. Поэтому нет необходимости разбивать область на подобласти как в МКЭ. Делится на элементы только граница области (рис. 15.11).

Длина каждого элемента – $2a^i$. Вместе с глобальной системой координат *XOY* рассматривают для каждого элемента локальные координаты *n, s,* изменяющиеся от точки к точке. На каждом из N отрезков действуют постоянные нормальное P_s^j и касательное P_n^j напряжения. На рис. 15.11 для простоты показаны только напряжения, приложенные к *j*-му отрезку и обозначенные P_s^j и P_n^j. В конечном итоге, как и в МКЭ, задача сводится к решению системы линейных уравнений:

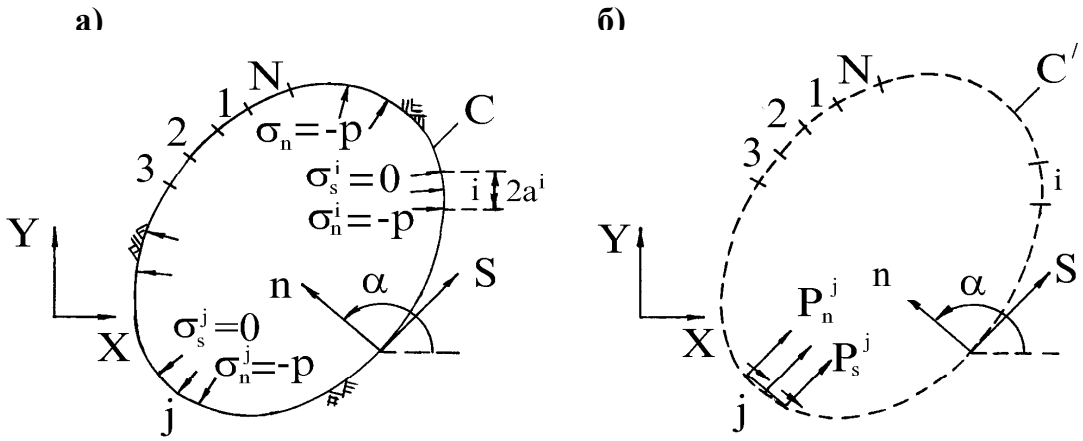


Рис. 15.11. Иллюстрация метода граничных элементов для задачи о полости: а) физическая задача; б) численная модель.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_S^i &= \sum_{j=1}^{N} A_{SS}^{ij} P_S^i + \sum_{j=1}^{N} A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^{N} A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned}\right\} i = 1,....N. \qquad (15.18)$$

Здесь A_{SS}^{ij}, – так называемы коэффициенты влияния, суммирующие вклады каждого *i-го* усилия, заданного на *j-м* элементе границы. Левая часть уравнений содержит напряжения (касательные и нормальные), которые возникают в точке среды под действием суммарного влияния усилий P_s^j и P_n^j приложенных на каждом из *N* отрезков. Принципиальным моментом, однако, является то, что действительные нормальное и касательное напряжения на *j-м* отрезке не равны P_s^j и P_n^j. Для каждого граничного элемента необходимо различать две разные группы напряжений: **приложенные** P_s^j и P_n^j и **действительные** σ_S^j, σ_n^j, которые вызваны действием приложенных напряжений на всех *N* элементах кривой. Величины P_s^j и P_n^j в правых частях уравнений (15.17) являются **«фиктивными»**. Их нужно определить так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Рассмотрим эти условия.

В задачах геомеханики используется понятие начальных напряжений, имеющих место в массиве до начала производства горных работ. Изначально в каждой точке породного массива действуют напряжения:

$$(\sigma_y)_0 = \gamma H,$$

$$(\sigma_x)_0 = \lambda\gamma H.$$

От влияния выработки возникают дополнительные напряжения: σ_y, σ_x.

Полные напряжения в точке равны:

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= \left(\sigma_y\right)_0 + \sigma_y, \\ \sigma'_x &= \left(\sigma_x\right)_0 + \sigma_x. \end{aligned} \tag{15.19}$$

На контуре выработки полные напряжения равны нулю. Тогда дополнительные напряжения на контуре (границе области) выражаются через начальные:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -(\sigma_y)_0 = -\gamma H, \\ \sigma_x &= -(\sigma_x)_0 = -\lambda\gamma H. \end{aligned} \tag{15.20}$$

Это и есть граничные условия. Таким образом, перейдя к локальной системе координат *n*, *s* сформируем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -(\sigma_S)_0 &= \sum_{j=1}^{N} A_{SS}^{ij} P_S^J + \sum_{j=1}^{N} A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ -(\sigma_n)_0 &= \sum_{j=1}^{N} A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^{N} A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned}\right\}, i = 1,\ldots N.$$

Решив ее, определим значения «фиктивных» напряжений P_s^j и P_n^j и через них определим напряжения и перемещения в любой точке области.

Теперь более ясен смысл коэффициентов влияния. Так, коэффициент A_{Sn}^{ij}, например, дает действительное касательное напряжение в центре *i-го* отрезка (σ_S^i), вызванное постоянной единичной нагрузкой, приложенной на *j*-м отрезке ($P_n^j = 1$).

По сравнению с МКЭ метод граничных элементов более экономичен. Система уравнений имеет порядок намного меньший, поскольку она сформирована только для *N* элементов, заданных на контуре выработки. Однако метод граничных элементов имеет несколько меньше возможностей для моделирования различных неоднородностей среды и нелинейности физических соотношений. Хотя и здесь существуют различные подходы. Все зависит от базового решения.

В рассмотренном выше подходе (он называется метод «фиктивных нагрузок») в качестве базового было принято решение задачи Кельвина.

Разработан и другой подход, использующий в качестве базового решение известной в теории упругости задачи о разрыве смещений вдоль некоторого отрезка конечной длины внутри бесконечного упругого тела. В форме «разрыв-

ных смещений» МГЭ очень эффективен для решения задач, связанных с трещиноватостью горных пород. Есть возможность моделировать и «зияющие» трещины, и заполненные материалом-заполнителем. В последнем случае граничные элементы, которые моделируют трещину, представлены как упругий контакт соответствующей жесткости. Например, приведено решение для двух сближенных выработок, одна из которых пересечена трещиной рис. 15.12.

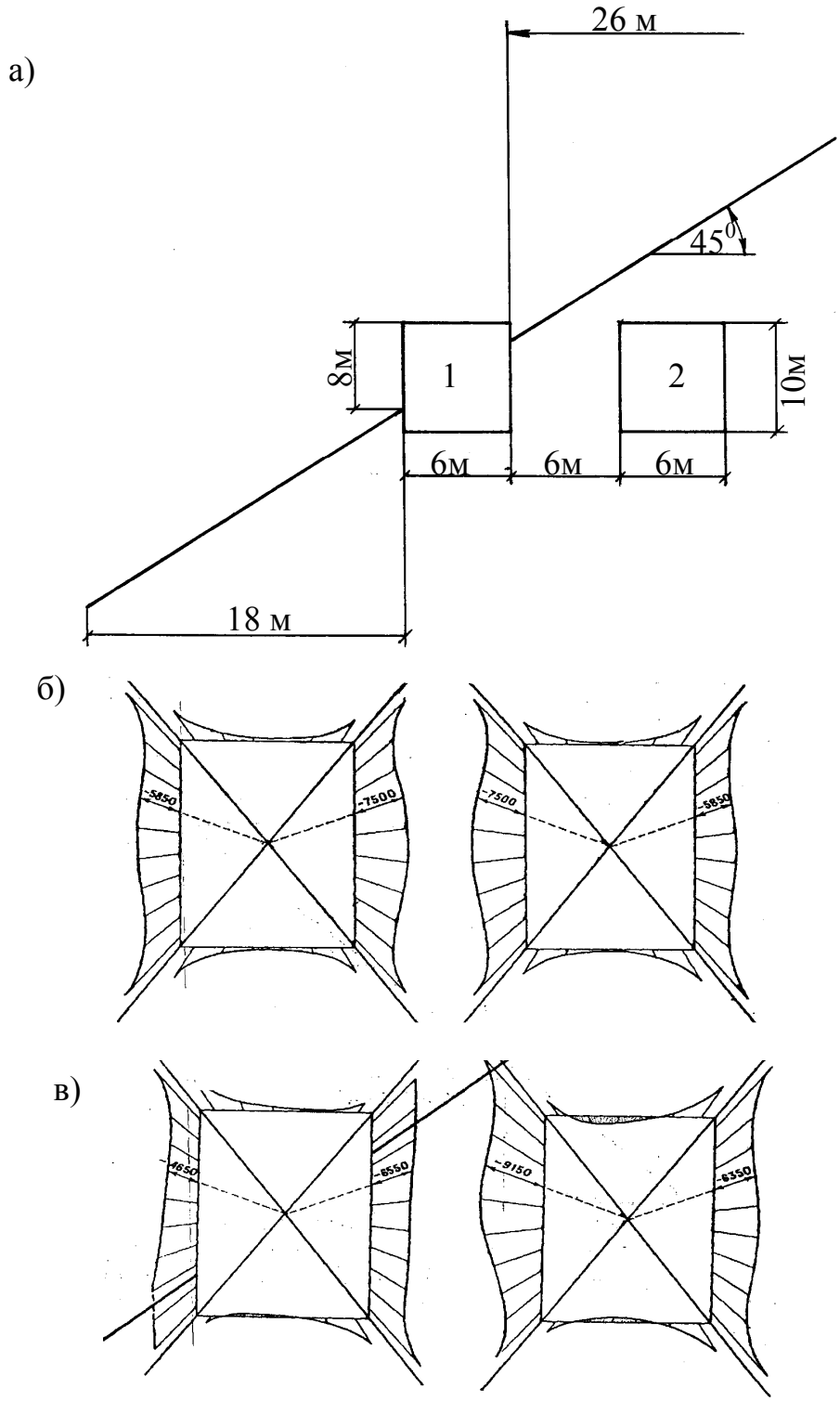


Рис. 15.12. Расчетная схема (а) и тангенциальные напряжения на контуре выработки в случае отсутствия нарушения (б), и наличие нарушения (в)

С помощью таких упругих контактов (пластовых элементов) легко моделируется угольный пласт, который отличается по жесткости от вмещающих пород. Например, приводится решение задачи о влиянии геологического нарушения на напряженное состояние пород впереди забоя выработки. В настоящее время в Национальном горном университете (НГУ) под руководством Л.В.Новиковой активно развивается научная школа, направлением которой является приложение численных методов (МКЭ, МГЭ) к различным задачам механики горных пород, в том числе и для трехмерных областей массива рис. 15.13.

Современные стандартные программные средства позволяют существенно расширить возможности МГЭ. Так, например, на кафедре строительных геотехнологий и конструкций НГУ разработан программный продукт (ПП) **Underground,** который предназначен для решения различных, как внешних, так и внутренних задач механики твердого тела. Однако, основной упор при разработке программного продукта делался на определение напряженно-деформированного состояния горного массива в окрестности как одиночной, так и системы горных выработок, проведенных в устойчивых породных массивах. В зависимости от особенностей конкретной задачи ПП **Underground** реализует метод граничных элементов или в форме разрывных смещений, или в форме фиктивных нагрузок, а также прямой метод граничных интегралов.

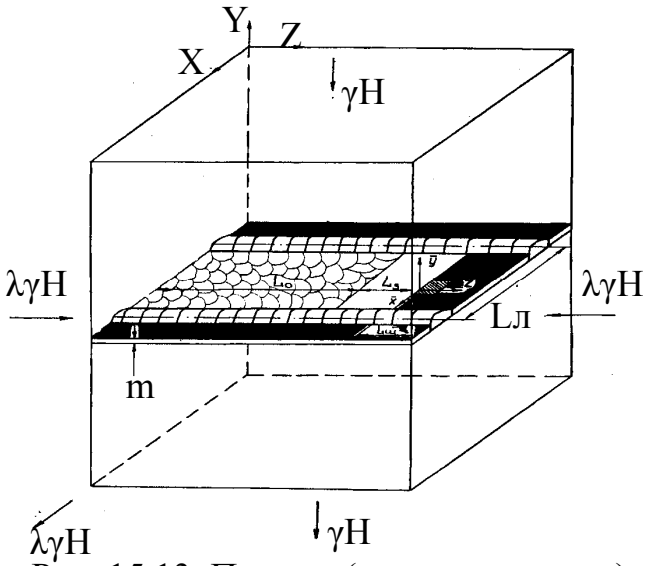


Рис. 15.13. Пример (расчетная схема) решения сложной трехмерной задачи численными методами

ПП **Underground** написан на объектно-ориентированном языке программирования Object-Pascal в вычислительной среде Delphi 5 с использованием приложений AutoCAD и Microsoft Excel. В связи с этим он имеет ряд преимуществ в сравнении с программами, написанными на менее современных языках программирования.

Во-первых, существенно повышена точность расчета за счет возможности аппроксимации контура горной выработки значительно большим количеством граничных элементов. Это количество ограничивается лишь возможностями ЭВМ. Так, например, задача с 500-ми граничными элементами (ГЭ) на ЭВМ с оперативной памятью 128 МВ решается менее минуты, задача с 2000-ми ГЭ решается приблизительно 20 мин, и это далеко не предел. Можно и дальше увеличивать количество ГЭ, но при этом резко увеличивается продолжительность расчета, так как начинает работать виртуальная память, скорость работы которой на несколько порядков ниже оперативной. При увеличении оперативной памяти ЭВМ увеличивается число аппроксимирующих ГЭ в задаче, решаемой за один и тот же промежуток времени. С увеличением количества ГЭ соот-

ветственно уменьшается их длина, поэтому повышается точность оконтуривания выработок криволинейного очертания, повышается точность расчетов напряженно-деформированного состояния породного массива вблизи границы за счет того, что можно максимально приблизить к контуру выработки точки, в которых определяются напряжения и смещения.

Во-вторых, несколько усовершенствован по сравнению с базовой программой TWODD алгоритм расчета. Появилась возможность быстро переходить от одного варианта метода граничных элементов к другому, не выходя из программы. Взамен статических массивов введены динамические, которые создаются и обнуляются по мере необходимости. За счет этого более рационально используется оперативная память ЭВМ. В метод разрывных смещений введен расчет тангенциальных напряжений на контуре выработки, чего не было в базовой программе. В исследуемых точках породного массива определяется эквивалентное напряжение $\sigma_{\dot{y}}$ и коэффициент запаса прочности *k*. По полученным данным строятся диаграммы, что позволяет сразу же, без дополнительных расчетов, судить о состоянии приконтурного массива.

В-третьих, существенно повысилось удобство пользования. Возможности вычислительной среды Delphi 5 позволили насытить программу всевозможными визуальными компонентами, которые позволяют удобно и быстро вводить исходные данные, следить за ходом решения, а также получать результат в виде наглядных диаграмм, которые тут же можно сохранять как рисунки, отправлять на печать и копировать в буфер обмена для последующей вставки в другие приложения. На рис. 15.14 приведен пример расчета, характеризующий состояние приконтурного массива в окрестности выработки круглого поперечного сечения, проведенной в устойчивых горных породах с пределом прочности на одноосное сжатие 5МПа, на одноосное растяжение – 1,7 МПа на глубине 200 м.

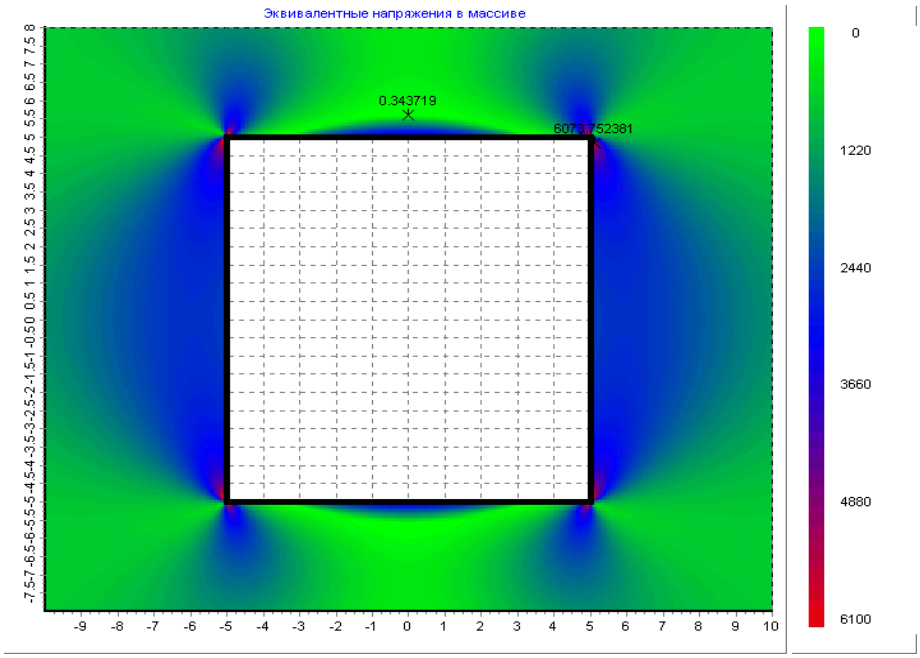


Рис. 15.14. Распределение коэффициента устойчивости массива горных пород в окрестности протяженной горной выработки кругового сечения

Здесь расчетная схема представлена четвертью сечения выработки, симметричной относительно линий параллельных осям *OX* и *OY*, которые пересекаются в точке (0,0). Контур выработки показан жирной линией. Изолинии соединяют точки массива с одинаковым значением коэффициента устойчивости.

Связь с AutoCAD позволяет наглядно аппроксимировать контур горной выработки (выработок) и тут же задавать граничные условия. Достаточно начертить в AutoCAD расчетную схему и координаты ГЭ считываются с графического изображения и передаются в программу. Это открывает большие возможности для моделирования сложных расчетных схем.

И, наконец, связь с Microsoft Excel позволяет выводить результаты в виде числового материала в книгу Microsoft Excel, если пользователь желает их более детально обработать.

15.4. Метод дискретных элементов

Метод дискретных элементов (МДЭ) (в английском варианте: «The distinct element method» – метод видимых (отличимых) элементов), разработан доктором Г. Кундаллом в 1978 году. Он базируется на двух фундаментальных законах физики – втором законе Ньютона и законе упругих деформаций Гука.

Областью применения МДЭ являются грунты, основания и фундаменты; породные массивы, имеющие сложную структуру; механические системы с освобождающимися связями; нелинейные динамические процессы, для которых он наиболее эффективен; химико-физические процессы (например, движение коллоидной жидкости); процессы обогащения полезных ископаемых методом флотации в тяжелых средах и многое другое.

Суть МДЭ применительно к моделированию сложноструктурных породных массивов, содержащих искусственные полости (выработки), состоит в следующем. Реальный породный массив в модели заменяется дискретными элементами, которые, в принципе, могут иметь любую форму, и лучше, если она будет близка к очертаниям элементов структуры массива.

Однако, по ряду причин, важнейшей из которых является простота создания математической модели дискретной среды, элементы ее проще всего представить в виде шаров, которые в общем случае имеют разный диаметр. Геометрическая модель такой среды приведена на рис. 15.15.

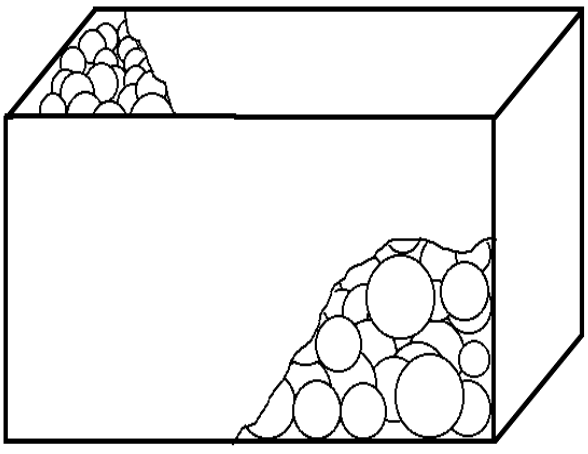


Рис. 15.15. Геометрическая модель метода дискретных элементов

Как видно из рисунка, модель сплошной или сыпучей (дискретной) среды, как правило, представляет собой шесть попарно параллельных плоскостей, которые, пересекаясь, отделяют некоторое замкнутое пространство, в котором размещены шары – элементы неподвижных плоскостей. Верхняя плоскость чаще всего отсутствует и внешняя

нагрузка прикладывается непосредственно к шарам. Шары взаимодействуют между собой и с ограничивающими плоскостями посредством сил трения и диссипативных сил, а также, и это главное, посредством неидеальных высвобождающихся связей, которые противодействуют их взаимопроникновению. Если иных связей нет, то шары имитируют сыпучую среду. Шары могут быть также «склеены» между собой и стенами посредством таких неидеальных невысвобождающихся связей, которые не только препятствуют их взаимопроникновению, но также разбеганию и вращению. В этом случае рассматриваемая механическая система имитирует сплошной массив.

Как только реакции в невысвобождающихся связях превышают некоторый предел, они ликвидируются как разрушенные и тогда уже система шаров и плоскостей имитирует разрушенный массив, который состоит из несвязанных между собой частиц и, возможно, сыпучего материала между ними. В самом же общем случае модель, состоящая из шаров и ограничивающих плоскостей, может имитировать сплошной породный массив, содержащий разрушенные участки.

Для того, чтобы среда состоящая из упругих шаров разного диаметра соответствовала реальному породному массиву, вводятся следующие допущения:

1. Форма и размер дискретных элементов (шаров) не изменяются под действием приложенных нагрузок.
2. Реальные деформации дискретных элементов заменяются кажущимся взаимопроникновением шаров.
3. Временной шаг должен быть настолько малым, чтобы за то время, пока он продолжается, нарушения (дислокации) не могли распространяться на какие либо другие шары, кроме тех, которые находятся в непосредственном контакте с рассматриваемым шаром.

Последнее допущение является особенно важным, поскольку обуславливает очень удобное взаимодействие элементов – шаров: на каждом временном шаге равнодействующая сил, приложенная к каждому отдельному шару определяется исключительно координатами центров рассматриваемого шара и тех шаров, которые в данный момент с ним соприкасаются.

Расчетная схема метода дискретных элементов приведена на рис. 14.16.

Элементы-шары нагружены гравитационными силами и проявляют при взаимодействии друг с другом упругие и вязкие свойства.

Физико-механические свойства дискретных элементов задаются таким образом, чтобы их поведение в общей массе было адекватно поведению исходной среды. Для каждого элемента известны масса, скорость, ускорение и координаты центра тяжести. Кроме того, к каждому элементу в отдельности прикладывается сила F_i, как равнодействующая сил тяжести, упругой реакции, вязкого и кулонова трения, отражающих текущее механическое состояние массива в рассматриваемый момент времени.

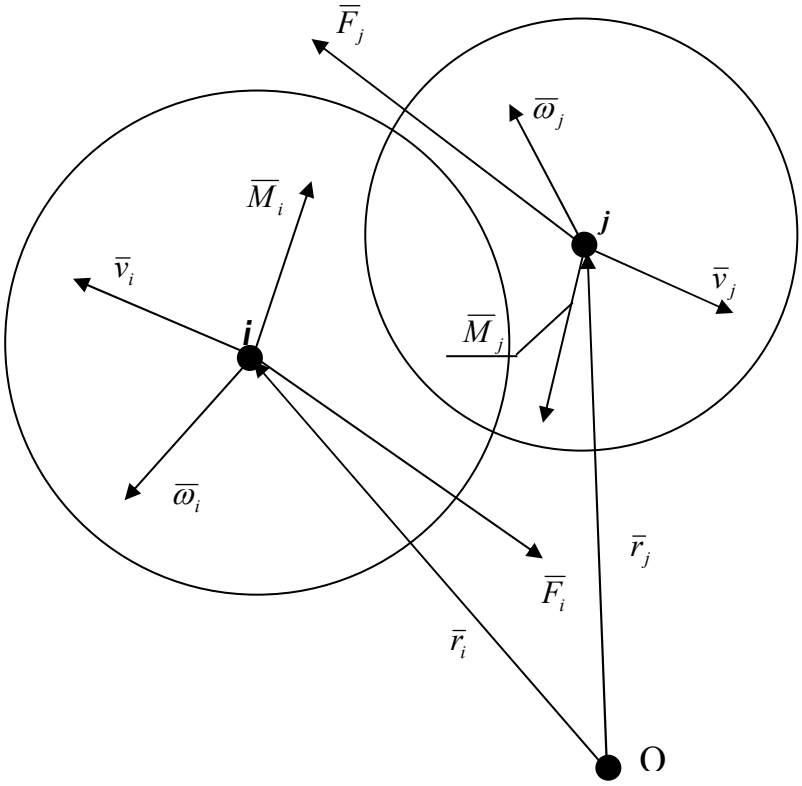


Рис. 15.16. Расчетная схема взаимодействия двух шаров

Движение каждого элемента описывается уравнением Лагранжа 2-го рода. Из всех численных методов, применяемых для решения поставленной задачи, наиболее эффективен модифицированный метод Эйлера.

Известны два способа использования метода Эйлера. Первый заключается в том, что вначале, исходя из физических соображений, составляют систему дифференциальных уравнений и уравнений начальных условий, а потом решают их, используя формализованный метод Эйлера.

В соответствии со вторым способом метод Эйлера используют не только для решения поставленной задачи, но и для описания собственно физического процесса, т.е. для постановки самой задачи.

Второй способ и был использован для разработки математической модели метода дискретных элементов в векторном изложении. Способ ориентирован на использование возможностей современных вычислительных машин, в частности матричной математической системы Matlab.

Описание физического процесса и вычисление его параметров в соответствии с формализованным методом Эйлера приведены в табл. 15.1.

Таблица 15.1.

Схема вычисления движения системы дискретных элементов

Этап	n	t	$\bar{r}$	$\bar{v}$	$\bar{\omega}$	$\bar{F}$	$\bar{M}$	$\bar{a}$	$\bar{\varepsilon}$
Начальные условия	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\Delta t}{2}$	–	0	0	–	–	–	–
	0	0	$\bar{r}^0$	–	–	$\bar{F}^0$	$\bar{M}^0$	$\bar{a}^0$	$\bar{\varepsilon}^0$
Основной расчет	$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta t}{2}$	–	$\bar{v}^{\frac{1}{2}}$	$\bar{\omega}^{\frac{1}{2}}$	–	–	–	–
	1	Δt	$\bar{r}^1$	–	–	$\bar{F}^1$	$\bar{M}^1$	$\bar{a}^1$	$\bar{\varepsilon}^1$
	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3\Delta t}{2}$	–	$\bar{v}^{1\frac{1}{2}}$	$\bar{\omega}^{1\frac{1}{2}}$	–	–	–	–
	- -								
	$\frac{2i-1}{2}$	$\frac{2i-1}{2}\Delta t$	–	$\bar{v}^{\frac{2i-1}{2}}$	$\bar{\omega}^{\frac{2i-1}{2}}$	–	–	–	–
	i	$i\Delta t$	$\bar{r}^i$	–	–	$\bar{F}^i$	$\bar{M}^i$	$\bar{a}^i$	$\bar{\varepsilon}^i$
	- -								

В табл. 15.1 на рис. 15.16 приняты следующие обозначения:

n – номер полушага и шага по модельному времени (n=-$\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$...);

t – модельный отсчет времени (знак «+» следует формально понимать, как временные шаги в будущее, а знак «–», как временные шаги в прошлое относительно момента времени $t = 0$);

$\bar{r}$ (или $\overline{r^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются радиусы-векторы центров шаров: $\bar{r} = \left(\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, ..., \overline{r_N}\right)$ или $\overline{r^n} = \left(\overline{r_1^n}, \overline{r_2^n}, \overline{r_3^n}, ..., \overline{r_N^n}\right)$, где N – общее число шаров;

$\bar{\nu}$ (или $\overline{\nu_n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы скоростей центров шаров: $\bar{\nu} = \left(\overline{\nu_1}, \overline{\nu_2}, ..., \overline{\nu_N}\right)$ или $\overline{\nu_1^n}, \overline{\nu_2^n}, ..., \overline{\nu_N^n}$;

$\bar{\omega}$ (или $\overline{\omega^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых скоростей шаров: $\bar{\omega} = \left(\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, ..., \overline{\omega_N}\right)$ или $\overline{\omega^n} = \left(\overline{\omega_1^n}, \omega_2^n, ..., \overline{\omega_N^n}\right)$;

$\overline{F}$ (или $\overline{F^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы равнодействующих всех активных и пассивных сил (кроме сил инерции) для каждого отдельного шара: $\overline{F} = \left(\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_N}\right)$ или $\overline{F^n} = \left(\overline{F_1^n}, \overline{F_2^n}, ..., \overline{F_N^n}\right)$;

$\overline{M}$ (или $\overline{M^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы моментов сил, которые входят в матрицу-строку $\overline{F}$: $\overline{M} = \left(\overline{M_1}, \overline{M_2}, ..., \overline{M_N}\right)$ или $\overline{M^n} = \left(\overline{M_1^n}, \overline{M_2^n}, ..., \overline{M_N^n}\right)$;

$\bar{a}$ (или $\overline{a^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы ускорений центров шаров: $\bar{a} = \left(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_N}\right)$ или $\overline{a_1^n}, \overline{a_2^n}, ..., \overline{a_N^n}$;

$\bar{\varepsilon}$ (или $\overline{\varepsilon^n}$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых ускорений центров шаров: $\bar{\varepsilon} = \left(\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, ..., \overline{\varepsilon_N}\right)$ или $\overline{\varepsilon^n} = \overline{\varepsilon_1^n}, \overline{\varepsilon_2^n}, ..., \overline{\varepsilon_N^n}$.

Наиболее сложным в такой вычислительной модели является определение равнодействующих сил, которые действуют в данный момент модельного времени на каждый шар. Для *i-го* шара равнодействующая сила F_i складываются из нормальных и тангенциальных сил упругопластического взаимодействия с соседними шарами и ограничивающими плоскостями и сил трения в точках контакта с ними. Условия контакта между дискретными элементами можно описать рядом формальных параметров, значения которых определяются на основе сравнительного анализа численных и физических экспериментов.

Переменные, вычисляемые в табл. 15.1 считаются постоянными величинами во времени на протяжении каждого модельного шага и скачкообразно изменяются в его конце. Дробные значения временных шагов позволяют на порядок повысить точность вычислений без увеличения количества шагов. Вычисления производятся в следующем порядке:

- учитывая ускорения и скорости, которые заданы в начальных условиях (минус полшага и нулевой шаг), находят значения скоростей на первом полушаге;
- исходя из полученных значений скоростей и начальных условий, находят координаты центров шаров, равнодействующие сил и моментов, а затем и соответствующие значения ускорений на первом модельном шаге;
- исходя из значений скоростей, которые получены на первом полушаге, и ускорений – на первом шаге, находят значения скоростей на полуторном шаге и т.д.

Обращает внимание на себя отсутствие в табл. 15.1 значений угловых координат центров шаров (есть только их радиусы – векторы). Это следствие допущения о неизменности формы шаров, которое компенсируется допущением об их взаимодействии путем взаимопроникновения. В результате существенно упрощается алгоритм вычислений.

Результатом расчетов на основе метода дискретных элементов является получение общей картины напряженно-деформированного состояния рассматриваемого породного массива с определением величин главных напряжений, оседаний (перемещений) и деформаций, вызванных образованием в сплошной среде полости заданных размеров.

Отличительной особенностью данного метода, по отношению к изложенным выше методам конечных и граничных элементов, применимых только в случае моделирования сплошных сред, является возможность описания нелинейных динамических процессов, возникающих в деформирующемся породном массиве, содержащем полости и участки разрушенных горных пород.

К недостаткам метода можно отнести достаточно высокие требования к технической базе для его реализации. Для обработки больших массивов данных и решения реальных задач необходимы достаточно высокое быстродействие компьютера и большой объем оперативной памяти.

15.5. Вариационные методы решения краевых задач в геомеханике

В настоящее время для расчета пластин и оболочек широко применяют вариационные методы теории упругости.

Известно, что основные проблемы механики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Так, например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Ввиду этого проблема решения граничной задачи для дифференциального уравнения данной механической системы оказывается, в общем, эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы.

Для решения задач об изгибе пластин (оболочек) можно использовать вариационный принцип Рейсснера, при котором одновременно отыскивается прогиб и все моменты, представляющие также как и прогиб, в виде конечных сумм произведений неопределенных параметров на заданные координатные функции, которые выбирают так, чтобы они были равны нулю на свободных краях пластины (оболочки). Расчетные формулы и машинный алгоритм принципа Рейсснера очень сложный.

Расчет пластин (оболочек) по методу Бутнова-Галеркина значительно усложняется, так как необходимо удовлетворять координатными функциями все граничные условия, в том числе и условия на свободных краях. Последнее обстоятельство препятствует использование на практике метода Треффца и метода наименьших квадратов. Однако если эти условия выполняются, то эти методы весьма эффективны в применении. Можно утверждать, что ввиду сложности задач о напряженно-деформируемом состоянии массивов горных пород, любой метод исследования, обеспечивающий необходимую точность, потребует весьма громоздких вычислений. Поэтому, естественно, следует применять такой метод, который просто реализуется на ПЭВМ и позволяет получить решение, не прибегая к дополнительным (по сравнению с обычной теорией пластин и оболочек) приближенным допущениям.

Для решения краевых задач горной геомеханики является эффективным применение метода Ритца – одного из основных прямых методов вариационного исчисления.

Метод (процесс) Ритца является одним из методов построения минимизирующей последовательности. Для упрощения выкладок ограничимся случаем вещественного гильбертова пространства H; результаты переносятся на комплексное пространство без изменений.

Пусть A – положительно определенный оператор в пространстве H. Задача о построении обобщенного решения уравнения

$$Au = f \qquad (15.21)$$

равносильна задаче о построении элемента энергетического пространства, который реализует минимум функціонала

$$F(u) = [u,u]_A - 2(u,f) \tag{15.22}$$

в энергетическом пространстве. Эту последнюю задачу будем приближенно решать следующим образом.

Выберем последовательность элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ..., \tag{15.23}$$

удовлетворяющих следующим трем условиям:

1) все элементы $\varphi_n \in H_A$;

2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ линейно независимы;

3) последовательность (14.23) полна в H_A.

Элементы (14.23), следуя Ритцу будем называть координатными. Совокупность координатных элементов назовем координатной системой.

Построим линейную комбинацию первых n координатных элементов

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} a_j \varphi_j \tag{15.23}$$

с произвольными численными коэффициентами a_j. Подставим U_n вместо u в функционал (15.21); это превратит $F(u)$ в функцию n независимых переменных $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \left[\sum_{j=1}^{n} a_j A\varphi_j, \sum_{k=1}^{n} a_k A\varphi_k \right] - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \left[\varphi_j, \varphi_k \right] a_j a_k - 2\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, f)\, a_k \end{aligned} \tag{15.24}$$

Выберем коэффициенты a_j так, чтобы функция (15.24) приняла минимальное значение. Как увидим, это приводит к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_1, a_2, ..., a_n$. Функция (15.24) достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1,2,...,n \tag{15.25}$$

Производные (15.25) легко вычисляются:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k, \varphi_j]a_k - 2(f, \varphi_j) \tag{15.26}$$

Приравняв эти производные нулю, получим систему Ритца

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k, \varphi_j]a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1,2,...,n \tag{15.27}$$

или в более подробной записи,

$$\begin{aligned}
&[\varphi_1, \varphi_1]a_1 + [\varphi_1, \varphi_2]a_2 + ... + [\varphi_1, \varphi_n]a_n = (f, \varphi_1);\\
&[\varphi_2, \varphi_1]a_1 + [\varphi_2, \varphi_2]a_2 + ... + [\varphi_2, \varphi_n]a_n = (f, \varphi_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[\varphi_n, \varphi_1]a_1 + [\varphi_2, \varphi_n]a_2 + ... + [\varphi_n, \varphi_n]a_n = (f, \varphi_n).
\end{aligned} \tag{15.28}$$

Координатные элементы (15.22) можно выбрать из области D_A; тогда $[\varphi_k, \varphi_j] = A(\varphi_k, \varphi_j)$, и система Ритца принимает вид (D_A– область определения оператора A)

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)a_2 + ... + (A\varphi_1, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_1);\\
&(A\varphi_2, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)a_2 + ... + (A\varphi_2, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A\varphi_n, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_n, \varphi_2)a_2 + ... + (A\varphi_n, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_n)\ .
\end{aligned} \tag{15.29}$$

определитель системы (14.28)

$$\begin{vmatrix}
[\varphi_1, \varphi_1][\varphi_1, \varphi_2]...[\varphi_1, \varphi_n]\\
[\varphi_2, \varphi_1][\varphi_2, \varphi_2]...[\varphi_2, \varphi_n]\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[\varphi_n, \varphi_1][\varphi_n, \varphi_2]...[\varphi_n, \varphi_n]
\end{vmatrix} \tag{15.30}$$

есть определитель системы Грамма линейно независимых элементов $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n$ и поэтому отличен от нуля. Отсюда следует, что система уравнений Ритца всегда разрешима, если оператор $\grave{A}$ положительный. Найдя коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ и подставив их в (15.23), получим элемент u_n, который будем называть приближенным решением уравнения (15.1) по Ритцу. Зная прогибы, определим деформации и напряжения.

Теорема. Если A – оператор положительно определенный, то приближенные по Ритцу решения уравнения (15.1) сходятся к точному обобщенному решению этого уравнения как по энергии, так и в метрике исходного пространства.

Легко видеть, что последовательность приближенных решений по Ритцу – минимизирующая для функционала энергии.

Приближенное по Ритцу решение u_n тем ближе (в смысле близости по энергии) к точному, чем больше n. Для достижения высокой точности приходиться брать большое n, т.е. большое число координатных функций. Это приводит к необходимости решать систему (15.29) с большим числом уравнений и неизвестных. Отметим только, что решение системы (15.29) облегчается ее симметричностью.

Замечание 1. Если система (15.29) уже построена и по тем или иным причинам желательно получить менее точное приближение, не содержащее некоторых из координатных функций, то коэффициенты a_k, соответствующие этому менее точному приближению, найдутся из системы, которая получается из системы (15.29) усечением, т.е. вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих отброшенным координатным функциям.

Замечание 2. Требование полноты координатной системы не вполне необходимо. Действительно, нет необходимости в том, чтобы любой элемент энергетического пространства можно было аппроксимировать координатными элементами – достаточно, чтобы такую аппроксимацию допускало обобщенное решение. Поэтому, если заранее известно, что искомое решение принадлежит к некоторому классу, более узкому, чем D_A, то достаточно, чтобы координатная система была полна в этом классе. Например, если известно, что искомая функция четная относительно какого-либо из независимых переменных, то можно брать в качестве координатных только четные функции той же переменной, и достаточно, чтобы выбранная система координатных функций была полной относительно четных функций из H_A.

Метод Ритца имеет простую схему расчета и позволяет исследовать массивы горных пород с любым сочетанием слоев при любой нагрузке и условиях закрепления, различной анизотропией пород. Для решения многих важных для практики задач достаточно, в отличие от метода Бубнова – Галеркина, чтобы координатные функции удовлетворяли только геометрическим граничным условиям, записываемых относительно функции прогиба и ее производной (угла поворота).

Приведем решения некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии массивов горных пород, используя вариационный метод исчисления.

Таким образом, существует довольно обширная группа численных методов, позволяющая достаточно точно установить напряженно-деформированное состояние породного массива в окрестности выработок при любом, в том числе и произвольном, их расположении в пространстве.

Контрольные вопросы

1. Назовите наиболее известные численные методы, применяемые в геомеханике?
2. В чем состоит идея метода конечных элементов?
3. Что такое «матрица жесткости» в МКЭ?

4. Что такое «матрица упругости» в МКЭ?
5. Назовите этапы решения задач геомеханики МКЭ.
6. Каков алгоритм решения упругопластических задач в МКЭ?
7. В чем суть метода граничных элементов?
8. Что такое «сингулярное решение»?
9. Каковы возможности МКЭ и МГЭ? В чем их преимущества и недостатки?
10. В чем суть метода дискретных элементов?
11. В чем суть вариационных методов решения задач в горной геомеханике, их преимущество перед остальными методами?
12. Назовите основные вариационные методы, в чем их отличие?

16. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

16.1. Общие сведения

Выше были рассмотрены, в основном, аналитические методы решения геомеханических задач. Для одиночных выработок, расположенных в однородном изотропном породном массиве и имеющих круглую форму поперечного сечения, такие решения можно получить в замкнутом виде. В случае более сложной формы поперечного сечения исследуемых выработок при наличии примыкающего выработанного пространства и структурных неоднородностей породного массива, прибегают к численным методам исследований. Но и в этом случае не удается воспроизвести в достаточно полной мере процесс деформирования породного массива по мере создания в нем искусственных полостей. Одним из методов исследования сложноструктурных объектов в геомеханике является моделирование в лабораторных условиях различных физических процессов горного производства. Цель моделирования заключается в воспроизведении и изучении на модели физического процесса, подобного происходящему в натурных условиях. Метод моделирования позволяет на уменьшенных или увеличенных по отношению к действительности моделях проводить качественные и количественные детальные исследования изучаемого процесса.

Являясь одним из основных составляющих комплексных исследований, методы моделирования достаточно широко используются в различных областях современного естествознания и техники. Применительно к механике подземных сооружений эти методы позволяют выяснить основные качественные элементы механизма процессов сдвижения, деформации и разрушения горных пород при ведении очистных и подготовительных работ, являясь необходимым этапом при разработке новых гипотез и теорий, а также проверки решений, полученных аналитическими методами.

В механике горных пород, изучающей, как правило, объекты весьма больших размеров, применяют моделирование, связанное с уменьшением абсолютных размеров объектов. По принципам, на которых оно основано, различают моделирование двух видов: **физическое и аналоговое**. Первое предусматривает воссоздание в модели тех же самых физических полей, которые действуют и в объекте натуры, но измененных по своим абсолютным значениям в соответствии с принятым масштабом моделирования. Аналоговое моделирование предусматривает замену в модели одних физических полей другими, например, замену натурного поля механических напряжений электрическим полем в модели. При этом на моделях изучают закономерности явлений и процессов, протекающих в натурных объектах, используя математическую аналогию различных по физической природе процессов, т.е. математическую тождественность основных законов и совпадение дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы.

Массив горных пород является весьма сложной средой, в которой при ведении горных работ одновременно происходят процессы деформирования различного характера: упругие, упруго-пластические смещения и разрушение по-

род с разрывом сплошности. Поэтому теоретические расчеты деформирования горных пород, прочности и устойчивости горных выработок и различных сооружений в породных массивах часто представляют собой труднорешаемую задачу. Натурные исследования отличаются значительной трудоемкостью, высокой стоимостью, требуют довольно длительного периода времени. Кроме того, в натурных условиях обычно весьма ограничены возможности варьирования параметрами системы, технологией и последовательностью ведения горных работ, тогда как при моделировании можно проследить влияние основных параметров в самых широких пределах.

Таким образом, моделирование открывает такие возможности изучения процессов механики горных пород, которые не дают ни аналитические методы, ни наблюдения и измерения в натурных условиях.

В то же время на моделях невозможно воспроизвести все детали моделируемых объектов, поэтому моделирование позволяет вести изучение процессов с определенной степенью упрощения и схематизации натурных объектов, что существенно облегчает интерпретацию результатов шахтных наблюдений и измерений, позволяя с большей степенью обобщения проследить и уточнить механизм процессов и максимально полно изучить влияние на эти процессы действующих факторов.

Обычно при решении задач механики горных пород методами моделирования испытанию подвергают серию моделей различных масштабов, используя при этом наиболее эффективный для решения конкретной задачи метод. Например, сначала, на моделях мелкого масштаба изучают общие закономерности процессов в пределах всего участка массива, подверженного влиянию выработки, а затем на моделях более крупного масштаба детально изучают закономерности процессов в некоторой области массива, в частности, процессов взаимодействия пород с крепью выработки. При этом в модели крупного масштаба воспроизводится лишь некоторая часть массива, а действие всей остальной части компенсируют с помощью нагрузки, осуществляемой нагрузочными приспособлениями рычажного, пружинного или гидравлического типа.

Первые попытки моделирования проявлений горного давления были осуществлены в 1885 г. М. Файолем, который рассматривал слоистые горные породы как ряд несвязанных между собой породных слоев и изучал проявление деформации изгиба горных пород на простейших моделях, состоящих из пачки полос, опирающейся на две опоры. Опыты, проделанные с различными материалами (железо, куски плоских рудничных канатов, глина, стекло, гипс и др.), показали затухание величин прогиба слоев снизу вверх, что послужило поводом для создания гипотезы свода давления.

К методам наблюдений на простых моделях относятся также опыты А. Леона, Ф. Левинсона-Лессинга, М.М. Протодьяконова, Г. Шпаккелера, Ф.А. Белаенко и др.

На сегодняшний день, учитывая сложность механических процессов, происходящих в толще пород при проведении выработки, методы моделирования продолжают оставаться необходимым звеном исследований.

Наиболее удобным для исследования проявлений горного давления является метод моделирования на эквивалентных материалах, предложенный Г.Н. Кузнецовым в 1936 г.

Весьма ценным методом, позволяющим получать важные относительные количественные характеристики неоднородных напряженных состояний элементов сложных механических систем, является также оптический метод исследования напряженного состояния вокруг подземных выработок, начало которому было положено Ф. Левинсоном-Лессингом.

При одновременном действии сил тяжести и упругости механическому подобию удовлетворяет метод центробежного моделирования, разработанный и практически развитый Г.И. Покровским и др.

Среди других методов моделирования заслуживают внимания электроаналоговые методы моделирования, т.е. электрическое моделирование физических полей, а также различные комбинированные методы, например, сочетающие принцип метода эквивалентных материалов и принцип центробежного моделирования и др.

16.2. Модели в механике горных пород

Основная цель геомеханики, как уже отмечалось, состоит в прогнозировании поведения породного массива при создании в нем искусственных полостей. Инженеру еще на стадии проектирования горнодобывающего предприятия необходимо иметь знания о том, какова будет нагрузка на крепь горных выработок и величина смешений контура породного обнажения, какова вероятность газодинамических проявлений горного давления, будут ли устойчивы почва выработок, борта карьеров и откосы отвалов, и о многих других геомеханических показателях, которые позволили бы впоследствии безопасно и экономично осваивать земные недра. Получают эти знания исследователи на основе построения, математического описания и анализа соответствующих геомеханических моделей.

Моделирование лежит в основе человеческой деятельности. Мы вообще воспринимаем окружающий мир, как совокупность моделей: психологических, философских, физических, экономических и других, которые являются лишь приближенным отражением в сознании человека объективно существующей реальности. Чем выше уровень знаний об окружающем нас мире, тем ближе модели соответствуют действительности. При этом очевидно, что полное соответствие модели реальным объектам недостижимо в принципе. По этому поводу выполнены обширные исследования, написаны сотни книг и статей.

Весьма полезное обобщение этих работ выполнено в работе И.И. Блехмана, А.Д. Мышкиса и Я.Г. Пановко. Авторы дают такое определение модели: **«объект М является моделью объекта А относительно некоторой системы S характеристик (свойств), если М строится (или выбирается) для имитации А по этим характеристикам»**. При этом под объектом А подразумевается любое материальное тело, действие, ситуация. Модель может быть **исследовательской**, для изучения указанных характеристик, или **рабочей**, для непосредственного использования, например, автопилот, детская игрушка,

деньги и т.п. В геомеханике рассматриваются только исследовательские модели.

Процесс решения задач в геомеханике состоит, как правило, из нескольких основных этапов.

Вначале формулируется общая задача и определяется конечная цель исследований. Например, требуется изучить распределение напряжений и деформаций (перемещений) вокруг горной выработки и найти такие инженерные решения (форма выработки, вид, конструкция, несущая способность крепи и т.п.), при которых выработка будет иметь техническую устойчивость в течение заданного промежуточного времени.

Следующий, очень важный, этап исследований состоит в изучении объекта исследований в натурных условиях. Для этого собирают геологические, гидрогеологические и горнотехнические характеристики того участка породного массива, в котором будет сооружаться выработка. При необходимости производят отбор проб литологических разностей, изготовление породных образцов и их испытание в условиях сертифицированных лабораторий.

Устанавливаются физико-механические характеристики вмещающих пород, их слоистость и трещиноватость, размеры и расположение выработки в пространстве, способ сооружения, срок службы и т.п. Если существуют аналогичные объекты, например однотипные подготовительные выработки, камеры, то с целью сбора дополнительной информации в них устраивают замерные станции, в пределах которых по разработанной методике выполняют соответствующие натурные измерения. Анализируется опыт эксплуатации подобных объектов в сходных горно-геологических условиях. Собранные данные являются основой для проведения лабораторных испытаний на **физически реализуемых моделях**, например, с помощью оптического моделирования, моделирования на эквивалентных материалах, центробежного моделирования и т.п.

Данные физического моделирования в совокупности с результатами натурных измерений являются тем исходным материалом, посредством которого создаются так называемые **физические умозрительные модели**.

Таковыми являются, например, сплошная упругая среда в теории упругости, идеальной шарнир в строительной механике, сыпучая среда в статике сыпучей среды и т.п. Умозрительные физические модели достаточно близко отражают изучаемый объект, но не имеют свойственных ему дефектов, несовершенств.

На основе умозрительной физической модели создается **математическая модель.** Следует отметить, что в зависимости от целей исследования, состояния математического аппарата, имеющихся возможностей вычислительных машин один и тот же объект может иметь несколько неэквивалентных моделей.

Так, например, один и тот же объект может быть описан с помощью упругой и упругопластической, дискретной и непрерывной, детерминированной и стохастической, а также других моделей. Многообразие моделей одного и того же объекта позволяет рассмотреть его с разных точек зрения, выделяя и подчеркивая интересующие исследователя параметры. Такой подход позволяет получить достаточно глубокие и всесторонние знания о процессах, происходящих в объекте.

Если математическая модель выбрана, то степень оптимальности ее построения определяется уровнем адекватности и числом независимых переменных, т.н. **управляющих параметров**. То есть, с одной стороны математическая модель *M* должна быть адекватна реальному объекту *A* в рамках изучаемых характеристик (свойств) *S*, а с другой стороны – полученные результаты должны быть доступны анализу и пониманию. Последнее возможно только в том случае, если число управляющих параметров сравнительно невелико и, вообще говоря, не превышает трех, а иногда даже одного.

Создание моделей это и наука, и в то же время искусство, уровень которого во многом определяется личностью и опытом исследователя.

После того, как математическая модель объекта определена, выбирается **метод исследований,** на основе которого будет выполнена реализация этой модели. При этом необходимо заранее представлять необходимую точность вычислений, которая должна соответствовать природе изучаемого объекта. В геомеханике это горные выработки, расположенные в породном массиве, определение физико-механических свойств которого возможно со сравнительно невысокой степенью точности.

В этой связи нет смысла привлекать к решению математической модели методы, дающие неоправданно точные результаты. Так, например, при использовании численных методов исследований напряжений и деформаций вокруг выработок элементы, на которые разбивается массив, должны иметь разумные размеры, число итераций при решении определенного класса упругопластических задач должно быть сравнительно небольшим и т.д.

После того, как на основе выбранного метода решена математическая модель, проверяется ее адекватность реальному объекту путем сравнения полученных результатов с натурными и лабораторными измерениями. Если совпадение этих результатов является достаточно близким, то поставленная задача решена и можно приступить к их осмыслению, формулировке выводов и определению направлений дальнейшего применения установленных закономерностей.

16.3. Основные положения теории подобия

С учетом специфики горного дела величины, полученные на моделях, нельзя механически переносить на натурные условия простым умножением на соответствующий масштаб. В основе моделирования физических явлений лежит учение о подобии, основы которого заложены еще И. Ньютоном, сформулировавшим общее понятие динамического подобия механических систем.

Основные свойства подобных явлений и признаки подобия рассматриваемых явлений между собой характеризуются тремя теоремами подобия. Первая, установленная Ж. Бертраном в 1848 г., основана на общем понятии динамического подобия Ньютона и втором законе механики Ньютона. Академик М.В. Кирпичев дает следующую формулировку первой теоремы подобия: «Подобными называют явления, происходящие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках отношения одноименных величин есть постоянные числа».

Вторая теорема подобия сформулирована в начале XX в. независимо друг от друга Дж. Букингемом и А. Федерманом. Она устанавливает возможность преобразования физического уравнения связи, описывающего данное явление, при этом получается уравнение, составленное из критериев (или инвариантов) подобия. Согласно второй теореме результаты опытов по изучению какого-либо физического явления, представленные в виде критериальных уравнений связи, можно перенести на другие явления, подобные исследованному.

Третья теорема подобия сформулирована и доказана в 1930 г. акад. М.В. Кирпичевым и носит название теоремы о существовании подобия. Согласно этой теореме, для существования подобия между явлениями необходимо и достаточно, чтобы эти явления имели подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии подобия.

Закон Ньютона относится к рассмотрению движения и равновесия одной материальной частицы. Механическое же состояние деформируемого тела в каждой точке с координатами x, y, z характеризуется компонентами напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}, компонентами перемещения u, υ, ω и компонентами деформаций ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}.

Между этими величинами, характерными для каждого напряженного состояния натуры и модели, должно быть взаимно однозначное соответствие, так как только при этом условии можно путем моделирования определить натурные величины смещения пород и давления их на крепь.

Для выяснения условий, обеспечивающих существование однозначного соответствия механических состояний натуры и модели, должна быть рассмотрена в общем виде система уравнений, отражающая деформированное состояние среды. Поскольку процессы сдвижения и деформирования горных пород в окрестности выработки являются весьма медленными, то инерционными силами можно пренебречь и тогда уравнения равновесия могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \gamma;$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Механическое подобие процессов в модели и натуре будет обеспечено, если записанные для модели и натуры в безразмерном виде уравнения равновесия будут тождественно совпадать. Введем безразмерные координаты и напряжения:

$$x = l\xi; y = l\eta; z = l\zeta;$$
$$\sigma_x = \gamma l R_\xi; \sigma_y = \gamma l R_\eta; \tau_{xy} = \gamma l R_{\xi\eta},$$

тогда уравнения равновесия примут следующий вид:

$$\frac{\partial R_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial R_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} = 1$$

и т.д.

Для того чтобы обеспечить требуемое тождество уравнений равновесия для натуры и модели, необходимо, чтобы любой компонент безразмерного напряжения в натуре $\left(R_{ik}\right)_н = \frac{\left(\sigma_{ik}\right)_н}{\left(\gamma l\right)_н}$ был равен соответствующему

компоненту в модели $\left(R_{ik}\right)_м = \frac{\left(\sigma_{ik}\right)_м}{\left(\gamma l\right)_м}$, поэтому $\frac{\left(\sigma_{ik}\right)_н}{\left(\sigma_{ik}\right)_м} = \frac{\gamma_н}{\gamma_м} \cdot \frac{l_н}{l_м} = \frac{\gamma_н}{\gamma_м}\lambda,$

где λ – линейный масштаб моделирования. Следовательно, масштаб напряжений

$$\mu = \frac{\gamma_н}{\gamma_м}\lambda.$$

Здесь и далее индексом «*н*» обозначены параметры натуры, индексом «*м*» - модели, *l* – линейный размер, γ – объемный вес (плотность).

Масштаб сил (β) может быть найден умножением масштаба напряжений на масштаб площадей, т. е.

$$\beta = \frac{\gamma_н}{\gamma_м}\lambda\lambda^2 = \frac{\gamma_н}{\gamma_м}\lambda^3.$$

При характеристике того или иного процесса механическое подобие может быть определено заданием переходных множителей или масштабов для длин (геометрическое подобие), для времени (кинематическое подобие) и для масс (динамическое подобие).

Условие геометрического подобия для двух подобных систем состоит в том, что все размеры пространства, занятого системой в модели, и размеры отдельных элементов модели изменены в определенное число раз по сравнению с соответствующими размерами натурной системы.

Условие кинематического подобия этих систем состоит в том, что любые сходственные точки (частицы) систем, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отличающиеся постоянным множителем.

Условие динамического подобия систем состоит в том, что массы любых сходственных частиц этих систем отличаются друг от друга постоянным множителем.

Для моделирования процессов в условиях пластического деформирования (без учета времени) необходимо, чтобы уравнения, связывающие деформации и напряжения, были тождественны как для натуры, так и для модели при условии написания их безразмерной формы.

Важным элементом в соблюдении условий подобия является отражение в модели структурных и текстурных особенностей массива – слоистости, кливажа, отдельностей и пр.

Однако, количественная оценка геолого-петрографических особенностей строения и сложения пород весьма затруднительна, отсутствуют пока объективные способы количественного учета этих факторов при оценке прочностных свойств массива как целого.

16.4. Метод эквивалентных материалов

Этот метод применяют для исследования вопросов, связанных с проявлением горного давления в очистных подготовительных выработках при разработке месторождений полезных ископаемых; в подземных капитальных выработках; при изучении вопросов, связанных с породами, сдвижения массивов и других физических процессов, происходящих в массивах в связи с проведением в них горных работ.

Изучение всех этих вопросов аналитическим методом и непосредственно на практике связано с большими трудностями, поэтому использование метода моделирования имеет большое теоретическое и практическое значение.

В предвоенные годы во ВНИМИ Г.Н.Кузнецовым был разработан метод моделирования, в основу которого была положена идея создания моделей горных массивов из искусственных материалов, эквивалентных по своим деформационным и плотностным свойствам горным породам при принятом масштабе моделирования. Сейчас этот метод широко используется под названием МЭМ.

Сущность метода эквивалентных материалов заключается в том, что на физических моделях с известными допущениями и при соблюдении условий подобия изучают интересующие нас физические процессы и результаты этих исследований используют для разработки теории «механизма» процесса, а также для разработки практических рекомендаций для промышленности. Например, МЭМ широко применяют для изучения процесса сдвижения пород массива при очистной выемке полезных ископаемых (рис. 16.1).

При достаточном удалении от штреков характер проявления давления горных пород на крепь во времени будет изменяться только в направлении движения очистного забоя. Следовательно, задача изучения давления пород в очистных выработках сводится к плоской и рассматривается для сечения А–А.

На плоской модели (см. рис. 16.1, б) с соблюдением условий подобия воспроизводится процесс выемки полезного ископаемого, в результате которого в модели происходит процесс сдвижения пород, подобный натуре.

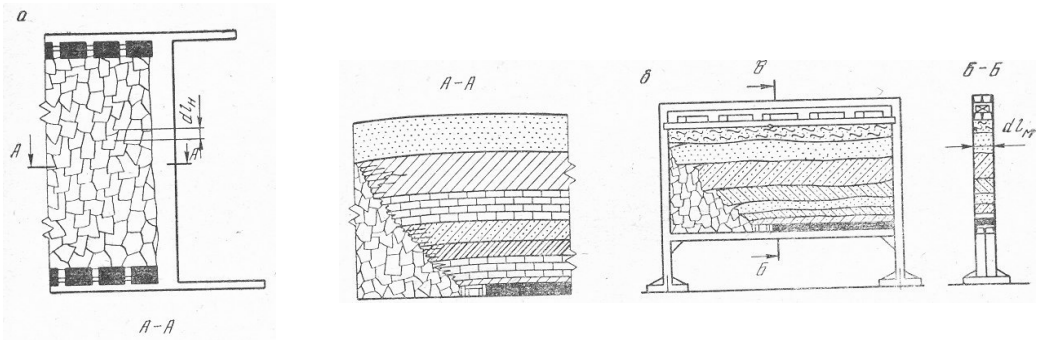


Рис. 16.1. Схема к моделированию задачи деформаций горных пород на эквивалентных материалах: *а* – образец; *б* – модель.

В основе метода лежит теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобия.

Геометрическое подобие. Обеспечивается в том случае, если все линейные размеры будут уменьшены в определенное постоянное число раз по сравнению с той областью натуры, в которой изучается данное явление.

$$\frac{\ell'_{\text{н}}}{\ell'_{\text{м}}} = \frac{\ell''_{\text{н}}}{\ell''_{\text{м}}} = \ldots = \frac{\ell^{i}_{\text{н}}}{\ell^{i}_{c}} = C_{\ell}, \qquad (16.1)$$

где $\ell_{\text{ì}}, \ell_{\text{í}}$ – линейные размеры модели и натуры, соответственно.

Кинематическое подобие будет обеспечено в том случае, если сходственные частицы, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отличающиеся постоянным множителем, т.е.

$$\frac{\tau'_{\text{н}}}{\tau'_{\text{м}}} = \frac{\tau''_{\text{н}}}{\tau''_{\text{м}}} = \ldots = \frac{\tau^{i}_{\text{н}}}{\tau^{i}_{\text{м}}} = C_{\tau} \qquad (16.2)$$

Динамическое подобие имеет место в том случае, если массы двух сходственных частиц (соответствующим образом расположенных в пространстве и времени) отличаются друг от друга в одно и тоже число раз

$$\frac{m'_{\text{н}}}{m'_{\text{м}}} = \frac{m''_{\text{н}}}{m''_{\text{м}}} = \ldots = \frac{m^{i}_{\text{н}}}{m^{i}_{\text{м}}} = C_{\text{т}} \qquad (16.3)$$

Выразив в равенствах (16.3) массу через объем и плотность, получим

$$C_m = \frac{\ell_{\text{н}}^3 \rho_{\text{н}}}{\ell_{\text{м}}^3 \rho_{\text{м}}} \tag{16.4}$$

или

$$C_m = C_\rho C_\ell^3, \tag{16.5}$$

где

$$C_\rho = \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_{\text{м}}} \tag{16.6}$$

Так как множитель подобия C_ℓ задан геометрическим подобием, то для соблюдения условий динамического подобия достаточно задать соотношение плотностей, т.е. C_ρ. Из условия механического подобия $(\frac{C_\text{ð}}{C_\rho C_\ell^2 C_\text{v}^2} = 1)$, выражая множители подобия через соответствующие соотношения и произведя преобразования, будем иметь инвариант подобия Ньютона

$$\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}} \ell_{\text{н}}^2 v_y^2} = \frac{p_{\text{м}}}{\rho_{\text{м}} \ell_{\text{м}}^2 v_{\text{м}}^2} = iden = N_\ell . \tag{16.7}$$

Следовательно, определив параметры модели, при которых соотношения множителей подобия удовлетворяют условию (16.7), мы получим модель, динамические процессы в которой будут подобны соответствующим процессам в натуре.

Обращаясь к конкретной задаче о давлении пород на крепь подземной выработки, установим критерии подобия и множители подобия для моделирования указанного процесса методом ЭМ.

На основании вышеизложенного выделим основные силы, которые определяют характер физического процесса.

В первом приближении можно ограничиться учетом двух родов сил, а именно: внешних сил – тяжести и внутренних сил – напряжений, возникающих в породе.

Преобразуем формулу (16.7), выражающую общий закон подобия Ньютона для случая совместного действия сил тяжести и внутренних напряжений. Заменяя в ней значения квадратов скоростей через ускорения и длины, получим

$$\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}} a_{\text{н}} \ell_{\text{н}}^3} = \frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{м}} a_{\text{м}} \ell_{\text{м}}^3} = \text{idem} . \tag{16.8}$$

В данном случае деформация и разрушение породы происходит за счет действия сил тяжести, т.е. $a = g$.

$$\begin{aligned} \rho_м a_м &= \rho_м g_м = \gamma_м, \\ \rho_н a_н &= \rho_н g_н = \gamma_н. \end{aligned}, \tag{16.9}$$

где γ – объемный вес материала.

Введем в (101) обозначение

$$\frac{\delta}{\ell^2} = N(\sigma), \tag{16.10}$$

под которым подразумеваем предельные напряжения: на растяжение, сжатие, сдвиг или деформационные характеристики пород.

Подставив зависимости (16.9), (16.10) в (16.8), получим

$$K = \frac{N_м}{\gamma_м \ell_м} = \frac{N_н}{\gamma_н \ell_н} = \text{idem}, \tag{16.11}$$

где $\hat{E}$ – безразмерное число, являющееся определяющим критерием подобия.

На основании полученного выражения можно установить основные требования к модели, обеспечивающие механические подобия явления. Если модель изготовить из материала натуры, то будем иметь одинаковые физико-механические свойства и натуры: $N_м = N_н$; $\gamma_м = \gamma_н$.

Однако смысл модулирования в данном случае заключается в том, чтобы геометрические размеры модели были меньше размеров натуры, т.е. $\ell_м \neq \ell_н$.

В этом случае равенство (16.11) не имеет места. Для сохранения условий его инвариантности следует полагать, что $N_м = N_н$; $\gamma_м \neq \gamma_н$ или $N_м \neq N_н$; $\gamma_м \neq \gamma_н$.

В первом случае

$$\gamma_м = \gamma_н \frac{\ell_н}{\ell_м}, \tag{16.12}$$

т.е. объемный вес материала модели должен быть значительно больше объемного веса материала натуры.

Во втором случае

$$N_м = \frac{\ell_м \gamma_м}{\ell_н \gamma_н} N_м. \tag{16.13}$$

Зная механические свойства материала натуры и задаваясь соотношениями $\ell_м / \ell_н$ è $\gamma_м / \gamma_н$, получим значения механических свойств материала модели, которые необходимы для обеспечения подобия модели и натуры.

При изучении процесса разрушения пород в качестве определяющих характеристик механических свойств пород должны быть взяты предельные значения прочности породы при ее разрушении, которые могут быть определены путем построения огибающей кругов Мора.

Таким образом, при подборе материалов-эквивалентов в качестве определяющих характеристик прочности пользоваться совокупностью значений временного сопротивления пород на сжатие R_c и растяжения R_p или же совокупностью значений коэффициента сцепления C_o и угла внутреннего трения tgφ. В этом случае необходимо соблюдать следующие равенства:

условие подобия внешних сил

$$P_м = \frac{\gamma_м}{\gamma_н}\frac{\ell_м^3}{\ell_н^3} P_н \qquad (16.14)$$

условие подобия процессов разрушения

$$\begin{aligned} &R_{с.м.}\frac{\ell_м}{\ell_н}\frac{\gamma_м}{\gamma_н} R_{с.н.}; \\ &R_{р.м.}\frac{\ell_м}{\ell_н}\frac{\gamma_м}{\gamma_н} R_{р.н.} \end{aligned} \qquad (16.15)$$

Или

$$\begin{aligned} &C_м = \frac{l_м \gamma_м}{l_н \gamma_н} C_н; \\ &\mathrm{tg}\ _м = tg\ _н. \end{aligned} \qquad (16.16)$$

Для подобия процессов механики горных пород в области упругих деформаций соблюдаются равенства

$$\begin{aligned} &E_м = \frac{\gamma_м}{\gamma_н}\frac{\ell_м}{\ell_н} E_н; \\ &\mu_м = \mu_н, \end{aligned} \qquad (16.17)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона.

Для подобия механических процессов в массиве горных пород в области пластических деформаций во всем диапазоне напряжений начальных до разрушающих без учета влияния времени должно быть соблюдено условие

$$\frac{\varepsilon_{n\text{м}}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_{\text{м}}} = \frac{\varepsilon_{n\text{н}}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_{\text{н}}} \ . \qquad (16.18)$$

При этом

$$(\varepsilon_y + \varepsilon_n) = f(\sigma),$$

где ε_n, ε_y – пластическая и упругая относительные деформации.

Достоинством метода эквивалентных материалов следует считать возможность воспроизводить процессы неупругого деформирования и разрушения пород массива вблизи горных выработок. Необходимо также отметить, что этот метод позволяет строить объемные модели и на их основе решать трехмерные задачи петромеханики.

Указанные обстоятельства способствовали широкому внедрению метода эквивалентных материалов в лабораторную практику: более 150 конкретных задач горной механики решено на моделях из эквивалентных материалов, причем около 30 из них – на объемных моделях.

В то же время методу моделирования на эквивалентных материалах присущи серьезные недостатки.

1. Широкий диапазон физико-механических свойств пород, слагающих моделируемый массив, трудно воспроизвести на каком-либо типе эквивалентных материалов только за счет изменения его состава, поэтому при построении модели исследователь вынужден прибегать к целому ряду эквивалентных материалов, отличающихся по своим исходным компонентам и физико-математическим свойствам, что усложняет постановку эксперимента.

2. В большинстве случаев при изготовлении модели оказывается затруднительным, а иногда и вовсе невозможным выполнить условия подобия внешних сил, процессов разрушения и процессов деформирования (упругого и пластического) так как указанные условия подобия механических характеристик модели и натуры должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\sigma_{\text{сж.н}}}{\sigma_{\text{сж.м}}} = \frac{\sigma_{\text{р.н}}}{\sigma_{\text{р.м}}} = \frac{C_{\text{н}}}{C_{\text{м}}} = \frac{E_{\text{н}}}{E_{\text{м}}}. \qquad (16.19)$$

3. Изучение деформационных процессов в окружающем выработки массиве требует сооружения моделей внушительных размеров, что сопровождается значительным повышением трудоемкости самого эксперимента.

4. Достоверность и репрезентативность результатов, полученных на моделях из эквивалентных материалов, в значительной степени зависит от технологии изготовления, поэтому даже при правильно подобранных компонентах возможны существенные погрешности.

5. Модель, обеспечивающая удовлетворительную сходимость с натурой при изучении медленно протекающих процессов, не может быть использована

для моделирования динамических процессов в горном массиве в силу невыполнения всех условий подобия.

6. Закладка динамометров в модель для измерения напряжений зачастую приводит к искажению напряженно-деформационного состояния изучаемого массива.

7. Измерение смещений на мелкомасштабных моделях не может быть выполнено с достаточной точностью, т.е. чувствительность серийных измерительных устройств не обеспечивает требуемую точность измерения смещений отдельных точек массива с учетом принятого масштаба.

Моделирование на эквивалентных материалах позволяет с большой степенью детальности проследить механизм процессов в толще пород при движении забоя выработки, особенно процессов деформирования пород с разрывом сплошности, что обычно исключено при других методах моделирования. Вследствие этого метод эквивалентных материалов является наиболее действенным, благодаря чему он получил широкое применение при решении различных задач механики горных пород.

Одним из преимуществ метода моделирования на эквивалентных материалах является возможность измерения показателей, отражающих НДС массива в интересующих областях, которые в натурных условиях осуществить практически невозможно ввиду труднодоступности участков массива.

При условии удовлетворения всех критериев подобия для эквивалентных материалов и обеспечении геометрического подобия натуры и модели, совпадение механических процессов может быть обеспечено при подобии граничных условий.

В принципе, модель достаточно полно отражает напряженно-деформированное состояние (НДС) массива в натуре. Соблюдение же граничных условий по торцам модели не представляется возможным, однако, в силу известного принципа Сен-Венана, можно утверждать, что роль торцов становится заведомо малой на расстояниях от них, равных толщине модели. Поэтому при отработке моделей замеры величин смещений кровли и давления на крепь являются достоверными только в ее средней части.

Лабораторный подбор и испытания эквивалентного материала для изготовления моделей направлены в сторону изыскания удобообрабатываемых смесей, которые не обладали бы длительными сроками схватывания и твердения, а по своим физико-механическим свойствам обеспечивали бы подобие с горными породами. При этом безразмерные константы - коэффициенты Пуассона и углы внутреннего трения должны численно совпадать в эквивалентном материале и натурных горных породах.

По природе связующих веществ применяемые в настоящее время эквивалентные материалы разделяются на четыре группы:

1. На основе углеводородов нефтяного происхождения (вазелин, парафин, масла и др.) – обладают пластичными и упругопластичными свойствами.
2. На основе неорганических гидравлических связующих (цемент, гипс, жидкое стекло, тиосульфат натрия) – обладают хрупким характером разрушения, а при добавлении в состав глины приобретают пластичные свойства.

3. На основе синтетических полимеров (эпоксидная, карбомидная, кремнийорганическая и др. смолы) – обладают упруго-пластичными и хрупкими свойствами.

4. На основе смол естественного происхождения (пек, канифоль и др.) – обладают свойствами хрупких материалов.

В последние годы все более популярным становится также моделирование на кусочках пиленого сахара, который дает хорошие качественные результаты.

При подборе эквивалентных материалов с конкретными свойствами используют различные модификаторы, присадки и инертные заполнители. В качестве последних применяются мелкие кварцевые пески и мелкодисперсные материалы (цемент, мел, инертная пыль, порошки солей металлов и др.). Подобрав и уточнив рецептуры эквивалентных материалов для всей моделируемой толщи, приступают к следующему этапу - изготовлению самой модели.

Модели изготавливают непосредственно в испытательных стендах, представляющих собой жесткие рамные металлические конструкции. Для изготовления и испытания плоских моделей, выполненных в разрезе по простирнию перпендикулярно к плоскостям напластования, слоистости или полосчатости моделируемой толщи, применяют стенды, подобные представленному на рис. 16.2.

Если необходимы плоские модели, выполненные для наклонного залегания пород в разрезе вкрест простирания, применяют поворотные (круговые) стенды. Для объемных моделей служат трехмерные поворотные стенды.

В зависимости от решаемых задач моделирование ведут в различных геометрических масштабах: мелких, от 1:400 до 1:100, или крупных, от 1:60 до 1:10. Толщи слабых пород моделируют только в крупных масштабах.

Разделение толщи пород в модели на отдельные слои обеспечивают путем присыпки поверхности каждого слоя крупной молотой слюдой, трещиноватость или кливаж воспроизводят насечкой свежеприготовленных слоев до отвердения или схватывания материалов.

Рис. 16.2. Общий вид плоского стенда для моделирования на эквивалентных материалах (Национальный горный университет)

При изготовлении плоских моделей вместо опалубки используют прозрачные ограждающие стенки, стационарно закрепляемые на весь период ис-

пытания модели. Для этих целей применяются листовые закаленные стекла, укрепляемые на стыках швеллерами, которые обеспечивают необходимую жесткость прозрачного бокового ограждения.

После изготовления модели и набора эквивалентным материалом прочности (или его остывания) на поверхность моделируемого массива наносится мерная сетка, в намеченных слоях устанавливают марки и датчики для регистрации картины поля напряжений, деформаций и смещений в период испытания, а также выполняются полости, имитирующие горные выработки, в которые встраиваются приборы, воспроизводящие работу крепи.

Напряженное состояние и деформации элементов модели определяют также с помощью спаренных микроскопов, жестко соединенных между собой и позволяющих определять с высокой точностью смещения двух точек относительно друг друга. База измерений в моделях указанными выше приборами составляет 40…50 мм, а относительная погрешность $(1 \div 2) \cdot 10^{-4}$, т. е. на порядок ниже, чем при измерениях в натуре.

Для определения сдвижений точек плоской модели в процессе ее испытания служит метод фотофиксации - периодическое фотографирование боковой поверхности модели с установленными в ней марками и последующие измерения смещений марок на фотоснимках, осуществляемые на компараторе. Метод фотофиксации позволяет быстро и одновременно регистрировать смещения всех точек на боковой поверхности модели, но точность определения смещений точек модели, учитывая масштаб моделирования, оказывается обычно ниже точности определения смещений соответствующих точек при измерениях непосредственно в натурных условиях. Установка на боковой поверхности модели блочных тензометров позволяет повысить точность определения смещений точек методом фотофиксации в 20 раз. При масштабе фотоснимка 1:10 и геометрическом масштабе модели 1:100 значения сдвижений точек в пересчете на натуру могут быть определены в этом случае с точностью до 1 мм. Такую же точность определения смещений обеспечивают зеркальные и оптические тензометры, при этом смещения реперов в увеличенном виде фиксируют на экране.

Для воспроизведения работы крепей применяют приборы пьезометрического и рычажного типов – для моделей мелких масштабов, рычажно-маятникового и гидравлического типов – для моделей крупных масштабов.

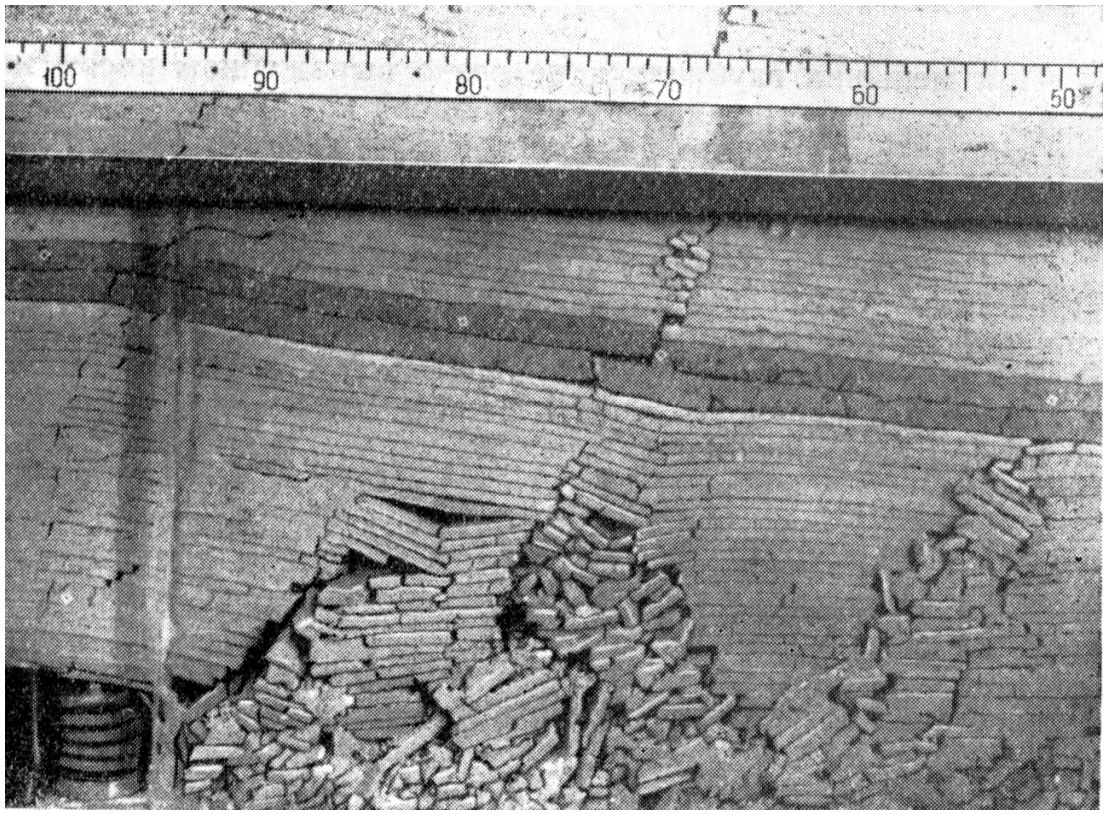
Завершающим этапом моделирования является собственно испытание модели, т.е. воспроизведение в определенном масштабе времени процесса изменений полей напряжений, деформаций и смещений с разрывом сплошности при разработке. Исходя из конкретной задачи, при испытании модели более подробно изучают распределение напряжений в массиве вокруг забоя выработки, либо развитие деформаций и сдвижений толщи пород и земной поверхности, либо развитие деформаций, разрушений и смещений пород в призабойном пространстве и взаимодействие пород с крепью и т. д.

На рис. 16.3 показаны виды некоторых моделей из эквивалентного материала с различными вариантами решаемых исследователями задач.

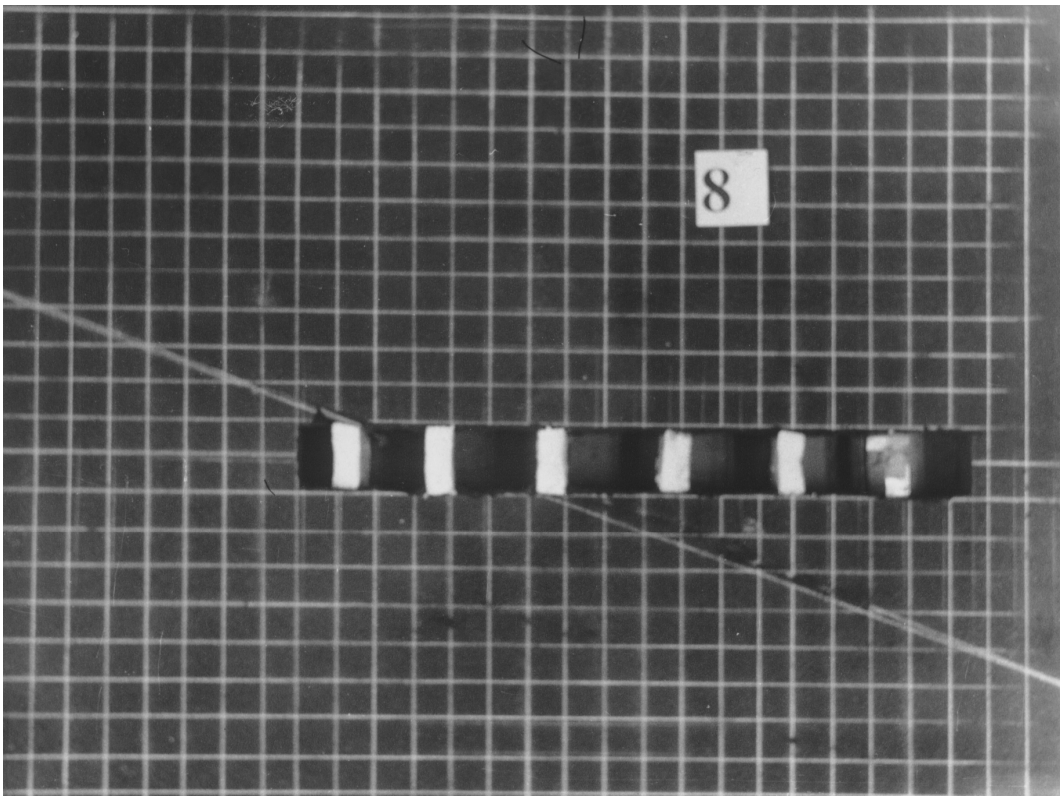
По окончании испытания модели обычно из ее части, не подвергнутой деформациям при испытаниях, вырезают образцы материалов-эквивалентов для проведения контрольных определений их свойств.

Обработка результатов исследований производится путем построения функциональных зависимостей изучаемых параметров от изменения горно-геологических и горнотехнических условий. Они представляются в виде относительных показателей, при этом полученные в результате зависимости должны сопоставляться с результатами натурных исследований.

а)



б)



в)

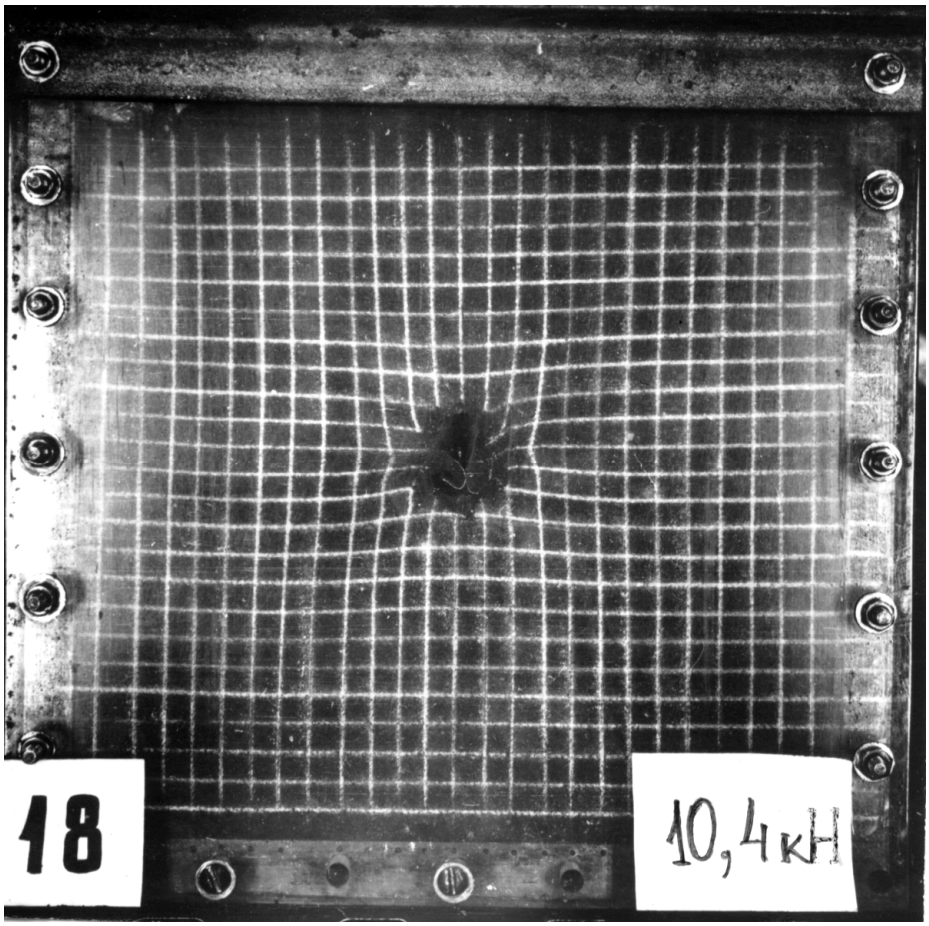


Рис. 15.3. Некоторые варианты моделей из эквивалентных материалов, выполненные на различных стендах:
а) – изучение характера смещений толщи пород над выработанным пространством;
б) – изучение характера смещения пород вокруг забоя подготовительной выработки пересекающей трещину;
в) – изучение характера деформирования приконтурного массива в окрестности одиночной выработки, закрепленной металлической арочной крепью с обратным сводом.

Для построения прогнозных зависимостей серии опытов планируют так, чтобы максимально охватить все необходимые условия и получить надежные результаты, для чего используют современные научные методы планирования экспериментов, например, метод латинских квадратов.

16.5. Метод центробежного моделирования

Метод центробежного моделирования заключается в замене гравитационных сил инерционными, создаваемыми в модели в результате ее вращения в каретке центрифуги. В принципе, метод позволяет моделировать объемное НДС пород вокруг выработок как в упругой области, так и за ее пределами.

Модель объекта, выполненную в заданном геометрическом масштабе, помещают в центрифугу и путем равномерного вращения нагружают объемны-

ми инерционными силами, придавая тем самым породам модели некоторый фиктивный объемный вес. Это позволяет в ряде случаев для изготовления модели использовать материал, одинаковый по своим физико-механическим свойствам с материалом натуры, что создает определенные преимущества перед методом эквивалентных материалов.

Центрифуга представляет собой коромысло, укрепляемое на вертикальной вращающейся оси (рис.16.4). К нему прикрепляют съемные каретки, в которые помещаются исследуемые модели. Из условий безопасности и с учетом значительных размеров центрифуг (диаметр 3…5 м), их размещают в помещениях с массивными ограждениями, чаще всего – в подвалах.

С помощью специального устройства при работе центрифуги измеряют и контролируют скорость вращения и разворот кареток из вертикального в горизонтальное положение (при наборе скорости вращения) и обратный разворот (при снижении скорости).

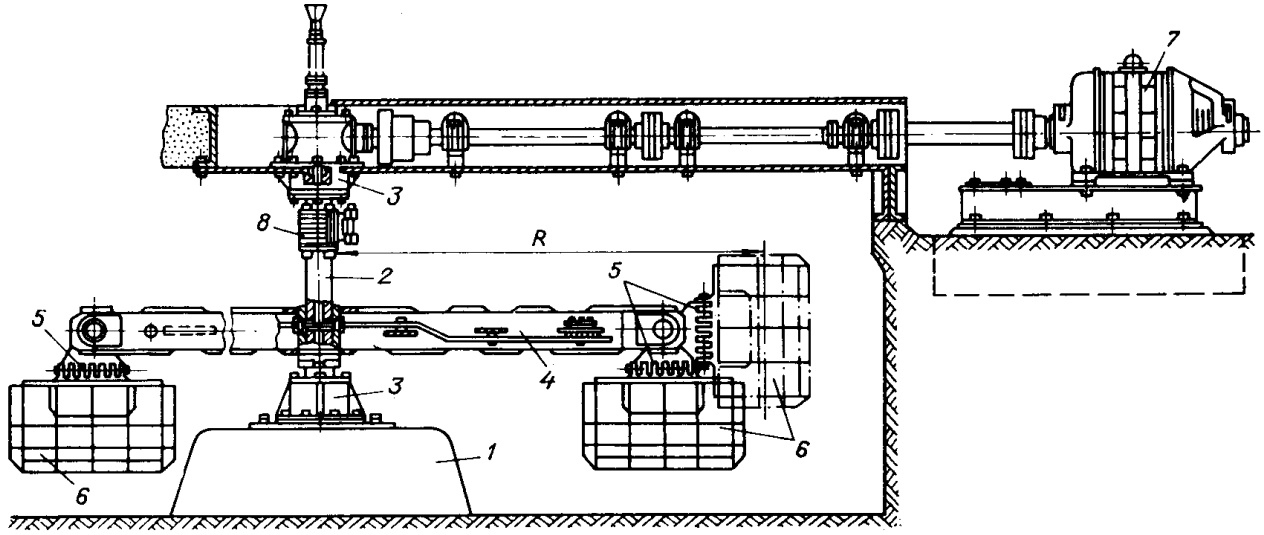


Рис. 16.4. Конструктивная схема центрифуги: 1 – фундамент; 2 – ось вращения; 3 – подшипники; 4 – коромысло; 5 – коммутаторы; 6 – каретки; 7 – электродвигатель

Наблюдения за деформациями модели ведут с помощью электрических или других тензодатчиков, аэростатических динамометров, сельсиновых пар, индикаторов часового типа и пр. датчиков, позволяющих в процессе вращения центрифуги непрерывно получать информацию на пульте управления (дистанционно). Фиксируя деформации и напряжения пород модели в различных точках, изучают таким путем закономерности процессов для моделируемых условий, а также устанавливают оптимальные параметры горно-технических объектов и сооружений по фактору устойчивости.

Для непосредственного наблюдения за макродеформациями моделей в процессе центрифугирования применяют также дистанционные фото-, киноустановки и кино-телевизионно-стробоскопные установки, позволяющие проследить кинетику деформаций модели на кинопленке. Стробоскопы (приборы,

позволяющие фиксировать быстропротекающие периодические процессы) применяют также для визуального наблюдения.

При решении задач механики горных пород с применением центробежного моделирования обычно испытывают несколько $(2 \div 6)$ идентичных моделей (моделей-близнецов), помещая их попарно в каретки центрифуги. Результаты экспериментов затем усредняют, одновременно контролируя достоверность опытов по признаку повторяемости результатов в пределах случайных отклонений, т. е. воспроизводимости эксперимента.

Метод центробежного моделирования с успехом и большой степенью надежности применяют при решении задач, связанных с определением размеров устойчивых потолочин камер, оптимальной формы и параметров бортов карьеров и отвалов, давления обрушенных пород на днища очистных блоков, влияния длительной нагрузки на крепь капитальных выработок, пройденных в пластичных глинистых породах и др. Использование специальных устройств позволяет моделировать в центрифуге одновременное действие статического поля напряжений и динамического поля, создаваемого при взрывных работах.

Достоинством центробежного моделирования является то, что это единственный из методов моделирования, в котором, благодаря использованию натуральных горных пород, соблюдается соответствие между размерами частиц и молекул. Для некоторых задач это имеет важное значение.

Вместе с тем данный метод имеет и ряд недостатков. Один из них – отсутствие однородности механического силового поля, т.к. вследствие ограниченного радиуса центрифуги силовые линии и эквипотенциальные поверхности в модели непараллельны. Кроме того, с удалением от центра тяжести модели в ту или иную сторону по ее высоте изменяется эффективный радиус вращения, соответственно, изменяется и масштаб моделирования. Указанное обстоятельство и технические возможности ограничивают предельные размеры моделей по высоте, а, следовательно, и возможные глубины моделируемой толщи пород.

При центробежном моделировании также крайне затруднительно, а иногда и совсем невозможно, воспроизводить слоистые толщи разнородных по составу и свойствам пород, большие технические трудности представляет и воспроизведение в модели перемещения забоя во времени, что ограничивает область эффективного применения данного метода, поэтому в ряде случаев возникает необходимость обращения к другим методам моделирования.

16.6. Моделирование тепловых процессов

Дифференциальное уравнение теплопроводности в случае постоянных физических параметров тела имеет следующий вид:

$$\partial t / \partial \tau = a \nabla^2 t \,. \qquad (16.20)$$

где t – температура тела, отсчитанная от температуры среды, окружающей

твердое тело, как от нуля; τ – время; a – коэффициент температуропроводности, постоянный во всем теле; $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$ – оператор Лапласа; x, y, z – координаты.

Приведенное уравнение (16.20) описывает бесконечное множество рассматриваемых тепловых процессов. Чтобы из целого класса явлений выделить единичное явление, необходимо к нему присоединить начальные и граничные условия, а также задать значение коэффициента температуропроводности $\grave{a}$.

Начальное условие должно представлять собой распределение температур во всей исследуемой области для момента времени $\tau = 0$ и может быть записано в виде

$$t_{\text{нач}} = t^*, \tag{16.21}$$

где t^* – известная температура в фиксированной точке тела с координатами $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$ в начальный момент времени.

Граничные условия могут быть заданы в виде равенства тепловых потоков на поверхности тела.

$$-\lambda(\partial t/\partial n)\text{пов.} = \alpha(t)\text{пов.}, \tag{16.22}$$

где λ – коэффициент теплопроводности, постоянный во всем теле; α – коэффициент теплоотдачи; n – внешняя нормаль к поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи α в общем случае зависит от координат поверхности и времени. Поэтому, выражение для коэффициента теплоотдачи может быть записано в следующем виде:

$$\alpha = f(x_r, y_r, z_r, \tau, a, \lambda), \tag{16.23}$$

где x_r, y_r, z_r – координаты границы (поверхности) твердого тела.

Для установления подобия процессов в рассматриваемом случае необходимо дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия привести к безразмерному виду и обеспечить равенство безразмерных параметров, начальных и краевых условий. С этой целью введем следующие масштабные преобразования:

$$\begin{aligned}
&x = l_0 X; \quad && \tau = \tau_0 T^0; \\
&y = l_0 Y; \quad && t = t_0 T; \\
&z = l_0 Z; \quad && n = l_0 N; \\
&a = l_0 A; \quad && t^* = t_0 T^*; \\
&\alpha = \alpha_0 A^0; \quad && t_{нач} = t_0 T_{нач}; \\
&\lambda = \lambda_0 \Lambda;
\end{aligned} \tag{16.24}$$

где величины, отмеченные индексом «нуль», являются размерными масштабами, выбор которых вначале произволен.

После введения преобразований (16.24) в уравнения (16.20)-(16.23) получаем

$$\left[\frac{t_0}{\tau_0}\right]\frac{\partial T}{\partial T^0}=\left[\frac{t_0 a_0}{l_0^2}\right]A\nabla^2 T \qquad (16.24)$$

при $$T^0=0 \text{ и } \dot{O}_{\text{íà÷}}=\dot{O}^*. \qquad (16.25)$$

На поверхности тела

$$-\left[\lambda_0 t_0/l_0\right]\Lambda\left(\partial T/\partial N\right)\text{пов}=\left[t_0\alpha_0\right]A^0(T_{\text{пов}}), \qquad (16.26)$$

причем

$$A^0=f(X_r,Y_r,Z_r,A,\Lambda,T^0). \qquad (16.27)$$

Чтобы уравнения (16.24) и (16.26) стали безразмерными, необходимо принять

$$1/\tau_0=a_0/l_0^2 \text{ и } \alpha_0=\lambda_0/l_0. \qquad (16.28)$$

Система уравнений связи между масштабами (16.28) состоит из двух уравнений, содержащих пять масштабов. Поэтому три из них, имеющие независимые размерности, могут быть выбраны произвольно. Уравнения связи не содержат вовсе масштаба температур t_0, а поэтому он должен быть выбран произвольно.

Таким образом, выбирая произвольно следующие четыре масштаба с независимыми размерностями t_0,λ_0,a_0,l_0, полагаем

$$t_0=t^*,\quad \lambda_0=\lambda;\quad a_0=a;\quad l_0=l_0. \qquad (16.29)$$

Равенство $l_0=l_0$ следует понимать в том смысле, что в качестве масштаба длин можно выбирать любой геометрический параметр твердого тела.

Масштабы τ_0 и α_0 определяют с помощью уравнений (16.28) и равенства (15.29):

$$\tau_0=l^2/a;\quad \alpha=\lambda/l_0. \qquad (16.30)$$

Тогда выражения для безразмерных величин примут вид

$$X = x/l_0; \quad Y = y/l_0; \quad Z = z/l_0; \quad T^0 = a\tau/l_0^2;$$
$$T = t/t^*; \quad T_{\text{нач}} = t_{\text{нач}}/t^*; \quad A_0 = al_0/\lambda; \qquad (16.31)$$
$$\Lambda = 1; \quad A = 1; \quad N = n/l_0.$$

Дифференциальное уравнение (16.20), начальное (16.21) и граничное (16.22) условия теперь могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\partial t/\partial T^0 = \nabla^2 T; \qquad (16.32)$$

$$T_{\text{нач}} = T^* \text{ при } T^0 = 0; \qquad (16.33)$$

$$-(\partial T/\partial N)_{\text{пов}} = A^0 (T)_{\text{пов}}, \qquad (16.34)$$

$$A^0 = f_a(X_r, Y_r, Z_r, T^0). \qquad 16.35)$$

Причем интеграл уравнения (16.35), удовлетворяющий начальному и граничному условиям (16.33) и (16.34) должен являться выражением, в котором зависимая переменная T представлена как функция всех величин (координат, времени и параметров), входящих в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия:

$$T = F(X, Y, Z, T^0, A^0, T_{\text{нач}}), \qquad (16.36)$$

причем $T_{\text{нач}}$ и A^0 определяются условиями (15.33) и (15.35).

Поэтому для обеспечения подобия необходимо и достаточно, чтобы в модели все критерии, входящие в интеграл исходного дифференциального уравнения (16.36) (кроме критериев X, Y, Z, T^0), были равны соответствующим критериям образца.

Следовательно, задача осуществления подобия сводится к реализации следующих требований:

– обеспечения геометрического подобия модели и образца;

– тождественности в модели и образце безразмерных начального и граничного условий, т.е.:

$$T_{\text{нач.м}} = T_{\text{нач.н}} \text{ или } (t/t^*)_{\text{м}} = (t/t^*)_{\text{н}};$$
$$A^0_{\text{м}} = A^0_{\text{н}} \text{ или } (al_0/\lambda)_{\text{м}} = (al_0/\lambda)_{\text{н}}. \qquad (16.37)$$

Если эти требования выполнены, то в сходственные моменты времени, т.е. при

$$T^0_{\text{і}} = T^0_{\text{і}} \text{ или } (a\tau/l_0^2)_{\text{м}} = (a\tau/l_0^2)_{\text{н}},$$

и во всех сходственных точках, т.е. при

$$X_м = X_н \text{ или } (\tilde{o}/l_0)_м = (\tilde{o}/l_0)_н;$$
$$Y_м = Y_н \text{ или } (y/l_0)_м = (ó/l_0)_н;$$
$$Z_м = Z_н \text{ или } (z/l_0)_м = (z/l_0)_н$$

будет иметь место равенство

$$T_м = T_н \text{ или } (t/t^*)_м = (t/t^*)_н,$$

т.е. будет иметь место подобие температурных полей модели и образца.

16.7. Моделирование гидродинамических процессов

Рассмотрим подобие стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости для следующих случаев:

– при наличии влияния веса;

– при отсутствии влияния веса;

– вязкостное и инерционное течение.

Последние три вида течения являются частными случаями первого.

Течение при наличии влияния веса.

Дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+q+\nu\nabla^2 v_x;\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+q+\nu\nabla^2 v_y;\\ v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+q+\nu\nabla^2 v_z; \end{aligned} \qquad (16.38)$$

уравнение сплошности

$$\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y+\partial v_z/\partial z=0\ . \qquad (16.39)$$

Уравнения движения (16.38) и сплошности (16.39) могут быть записаны в векторной форме:

$$(V,qrad)\nu=-\frac{1}{\rho}qrad\ p+q+\nu\nabla^2 V \qquad (16.40)$$

уравнение сплошности

$$divV=0, \qquad (16.41)$$

где V – вектор скорости; v – скалярная величина того же вектора; v_x, v_y, v_z – проекции вектора V на координатные оси x, y, z (причем x направлена вертикально); p – давление, отсчитанное от давления в некоторой точке потока, как от нуля; ρ – плотность жидкости; $v = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости; μ – коэффициент вязкости жидкости; q – ускорение свободного падения; ∇ – оператор Лапласа.

Величины ρ, v, q – рассматриваются как постоянные во всем поле.

Краевые условия в рассматриваемой задаче не могут содержать никаких других физических переменных, кроме скорости, которая может быть задана на границе в виде уравнения, выражающего скорость как функцию координат точек границы. Если рассматривают течение жидкости внутри какого-либо аппарата, то границами потока следует считать входное сечение потока, где имеют место управляемые краевые условия, и поверхности твердых стенок, окаймляющих поток, где имеют место неуправляемые граничные условия (в случае неподвижных стенок $v = 0$. Поскольку это условие автоматически соблюдается и в модели, и в образце, то задание краевых условий сводится к заданию скорости на входном сечении изучаемого объекта. Это заключение можно отнести и ко всем задачам, разбираемым в дальнейшем.

Так как в рассматриваемой задаче размерность скорости может быть представлена как

$$[v] = [v / l_0] \text{ или } [v] = \left[\sqrt{q l_0}\right],$$

то граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= f_x(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,y} &= f_y(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,z} &= f_z(x_r, y_r, z_r, l_i, q). \end{aligned} \qquad (16.42)$$

или

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \varphi_x(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,y} &= \varphi_y(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,z} &= \varphi_z(x_r, y_r, z_r, l_i v). \end{aligned} \qquad (16.43)$$

Как показали исследования, оба способа записи краевых условий приводит к одному и тому же конечному результату.

Для приведения уравнений (16.38), (16.39), (16.42) и (16.43) к безразмерному виду напишем масштабные преобразования:

$$x = l_0 X;\ v_x = v_0 V_x;\ p = p_0 P;\ q = q_0 G;\ y = l_0 Y;\ v_y = v_0 Y_y;\ v = v_0 N;$$

$$v_{rx} = v_0 V_{rx};\quad z = l_0 Z;\quad v_z = v_0 V_z;\quad \rho = \rho_0 R;\quad v_{ry} = v_0 V_{ry};\quad v_{rz} = v_0 V_{rz}.$$

После введения преобразований в уравнения (16.38) и (16.39) получаем:

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0}\right]\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0}\right]\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial X}+[q_0]G+\left[\frac{V_0\nu}{l_0^2}\right]N\nabla^2 V_x;$$

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0}\right]\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=-\left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0}\right]\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial Y}+[q_0]G+\left[\frac{V_0\nu}{l_0^2}\right]N\nabla^2 V_y;$$

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0}\right]\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0}\right]\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial Z}+[q_0]G+\left[\frac{V_0\nu}{l_0^2}\right]N\nabla^2 V_z;$$

$$\left[\frac{v_0}{l_0}\right]\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=0;$$

$$[v_0]V_{r,x}=f_x(l_0X_r,l_0Y_r,l_0Z_r,l_0L_i,q_0G);$$

$$[v_0]V_{r,y}=f_y(l_0X_r,l_0Y_r,l_0Z_r,l_0L_i,q_0G);$$

$$[v_0]V_{r,z}=f_z(l_0X_r,l_0Y_r,l_0Z_r,l_0L_i,q_0G).$$

Для приведения этих уравнений к безразмерному виду необходимо, чтобы

$$v_0^2/l_0=p_0/(\rho_0 l_0)=q_0=V_0v_0/l_0^2 \tag{16.44}$$

Из условий (16.44) можно получить три уравнения связи, которые содержат шесть масштабов. Следовательно, любые три из них, имеющие независимые размерности, можно выбрать в качестве основных, например, $l_0=l;\ \rho_0=\rho;\ q_0=q$, а три остальных определить из уравнения связи

$$v_0=(ql_0)^{1/2};\quad p_0=\rho q l_0;\quad V=(ql_0^3)^{1/2}.$$

Тогда выражения для безразмерных величин можно записать:

$$\begin{gathered}
X=\frac{x}{l_0};\quad V_x=\frac{v_x}{(ql_0)^{1/2}};\quad V_{r,x}=\frac{v_{r,x}}{(ql_0)^{1/2}};\\
Y=\frac{y}{l_0};\quad V_y=\frac{v_y}{(ql_0)^{1/2}};\quad V_{r,y}=\frac{v_{r,y}}{(ql_0)^{1/2}};\\
Z=\frac{z}{l_0};\quad V_z=\frac{v_z}{(ql_0)^{1/2}};\quad V_{r,z}=\frac{v_{r,z}}{(ql_0)^{1/2}};\\
L_i=\frac{l_i}{l_0};\quad R=1;\quad P=\frac{p}{\rho q l_0};\\
N=\frac{V}{(ql_0^3)^{1/2}};\quad G=1.
\end{gathered} \tag{16.45}$$

или

$$L = 1/l_0; \quad V = \nu/(ql_0)^{1/2}; \quad P = p/\rho q l_0; \quad N = \nu/(ql_0^3)^{1/2}; \\ G = 1; \quad R = 1. \tag{16.46}$$

где 1 – радиус вектора; L – безразмерный радиус-вектор какой-либо точки в потоке; G – единичный вектор.

Уравнение движения:

$$V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial x} + N\nabla^2 V_x; \\ V_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial y} + N\nabla^2 V_y; \\ V_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial z} + N\nabla^2 V_z, \tag{16.47}$$

или в векторной форме

$$(V, \text{qrad})V = 1 - \text{qrad}\, P + N\nabla^2 V. \tag{16.48}$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{16.49}$$

или в векторной форме

$$div V = 0 \tag{16.50}$$

Граничные условия

$$V_{r,x} = F_x(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,y} = F_y(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,z} = F_z(X_r, Y_r, Z_r, L_i). \tag{16.51}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (16.47) и (16.49), удовлетворяющей граничным условиям (16.51), можно представить в виде:

$$V_x = F_x(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_y = F_y(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_z = F_x(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ P = F_p(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N). \tag{16.52}$$

Следовательно, для соблюдения подобия двух потоков необходимо и достаточно осуществить равенство безразмерной скорости на границе потока в модели и образца и равенство критерия N в сравниваемых потоках, т.е. (в векторной форме)

$$(V_r)_м = (V_r)_н \text{ и } (N)_м = (N)_н ,$$

Или

$$\left[V_r/(ql_0)^{1/2}\right]_м = \left[V_r/(ql_0)^{1/2}\right]_н \text{ и } \left[v_r/(ql_0^3)^{1/2}\right]_м = \left[v_r/(ql_0^3)^{1/2}\right]_н . \qquad (16.53)$$

Если эти условия будут соблюдены, то в сходственных точках модели и образца, т.е. при

$$(l/l_0)_м = (l/l_0)_н$$

будут иметь место равенства:

$$\left[V/(ql_0)^{1/2}\right]_м = \left[V/(ql_0)^{1/2}\right]_н \text{ и } \left[p/(\rho ql_0)\right]_м = \left[p/(\rho ql_0)\right]_н .$$

Интересно заметить, что имеющие широкое применение критерии Re, Eu, Fr могут быть представлены как степенные функции критериев V, P, N.

$$V/R = vl_0/\nu = \mathrm{Re}; \quad R/V^2 = p/(\rho v^2) = Eu; \quad V^2 = v^2/(ql_0) = Fr.$$

Из условий (16.53) видно, что осуществление требования $(N)_м = (N)_н$ при условии, что жидкость в модели и образце одна и та же, т.е. $\nu_м = \nu_н$, возможно только при $l_{0,м} = l_{0,н}$, т.е. когда размеры модели и образца одинаковы. В этом случае для выполнения условий $V_{r,м} = V_{r,н}$ должно иметь равенство $\bar{v}_{r,м} = \bar{v}_{r,н}$.

Установление вида функций F_x, F_y, F_z, F_p в большинстве практических задач осуществляется опытным путем. Однако экспериментальное определение указанных функций связано с большими трудностями (вести измерения скоростей и давлений в значительном количестве точек). Поэтому для практических задач нередко переходят на средние значения скорости и давления и устанавливают равенство ускоренных по сечению критериев давления $\overline{P}_F$ и скорости $\overline{V}_F$.

Перейдя к замене критериев $\overline{P}_F$, $\overline{V}_F$ и N критериями Re, Eu, Fr, было установлено на основании многочисленных экспериментальных исследований, что функциональная связь между критериями $\overline{P}_F$, $\overline{V}_F$ и N может быть представлена в виде

$$\overline{Eu} = \psi(\overline{\mathrm{Re}}, \overline{Fr}), \qquad (16.54)$$

где

$$\overline{Eu} = (p_1 - p_2)/(\rho\overline{v}_i^2); \quad \overline{\mathrm{Re}} = \overline{v}_i l_0 / \nu; \quad \overline{Fr} = \overline{v}_i^2/(ql_0).$$

В гидравлике для подсчета сопротивления, возникающего вследствие трения при движении жидкости в канале или трубе, обычно пользуются формулой Дарси:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр}} \frac{\rho(\overline{v})^2}{2} \frac{l}{d},$$

а при определении местных сопротивлений – формулой Вейсбаха:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр.м}} \frac{\rho(\overline{v})^2}{2},$$

где Δp – падение напора между двумя сечениями; $\overline{v}$ – средняя по сечению трубы скорость; ρ – плотность жидкости; l – длина трубы; d – гидравлический диаметр.

На сопоставление приведенных формул с выражением для критерия $\overline{Eu}$ можно заключить, что

$$\xi_{\text{тр.м}} = 2\overline{Eu};$$
$$l/d = 1\xi_{\text{тр}} = 2\overline{Eu},$$

т.е. коэффициенты сопротивления $\xi_{\text{òð}}$ и $\xi_{\text{òð.ì}}$ в общем случае в соответствии с выражением (16.54) являются функции критериев $\overline{\mathrm{Re}}$ и $\overline{Fr}$.

Течение при отсутствии влияния веса характеризуется отсутствием свободных поверхностей, т.е. имеет место напорное течение. В этом случае влиянием веса можно пренебречь по сравнению с влиянием остальных сил, действующих на элементарную частицу жидкости.

На основании анализа дифференциальных уравнений:
движения

$$(\overline{V}, \mathrm{qrad})\overline{V} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{qrad}\, p + \nu\nabla^2\overline{V};$$

сплошности

$$dinV = 0;$$

граничных условий

$$V_r = \varphi(1_r, l_i, \nu),$$

где V_r – вектор скорости в точках, расположенных на границах потока; 1_r – радиус-вектор этих точек,
можно получить систему уравнений связи

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p}{\rho_0 l_0} = \frac{V_0 v_0}{l_0^2}, \qquad (16.55)$$

Используя уравнения связи, можно показать. так же как это было сделано при рассмотрении предыдущей задачи. что для осуществления подобия нужно на границах модели осуществить распределение критерия V ,тождественно одинаковое с тем, которое имеет место в образце, т.е. выполнить условие

$$\left(\frac{V_r l_0}{v}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{V_r l_0}{v}\right)_{\text{н}}.$$

Переходя к усредненным по сечению критериям $\overline{V}$ и $\overline{P}$ и заменяя их критериями $\overline{Eu}$ и $\overline{\text{Re}}$, результаты опытов, имеющих целью установление эмпирических законов сопротивления при напорном течении, обычно обрабатывается в виде функциональной зависимости

$$\overline{Eu} = \psi(\overline{\text{Re}}).$$

Вязкостный режим течения. Этот режим течения характеризуется исчезающе малым влиянием инерционных сил по сравнению с силами трения и давления. В этом случае на основании анализа уравнений:

движения

$$-\text{qrad} + \mu\nabla^2 V = 0;$$

сплошности

$$divV = 0;$$

граничных условий

$$V_\Gamma = \psi(1_\Gamma, l_i, v^*),$$

где v^* – параметрическое значение скорости,
получается одно уравнение святи

$$\frac{p_0}{l_0} = \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2}, \qquad (16.56)$$

на основании которого, устанавливается подобие двух потоков.

Для осуществления подобия необходимо выполнить равенство критериев V на границах потоков в модели и в образце, т.е.

$$V_{\Gamma.\text{м}} = V_{\Gamma.\text{н}} \text{ или } \left(\frac{V_\Gamma}{v^*}\right)_\text{м} = \left(\frac{V_\Gamma}{v^*}\right)_\text{н}.$$

Отсюда видно, что подобие может быть осуществлено независимо от размеров модели.

Инерционный режим течения. В этом случае влиянием сил трения, ввиду их малости по сравнению с силами давления и инерции, на режим течения можно пренебречь.

Тогда после приведения уравнений:
движения

$$(v, \text{qrad})v = \frac{1}{\rho}\text{qrad}\, p;$$

сплошности

$$div = 0;$$

граничных условий

$$V_\Gamma = f(1_\Gamma, l, v^*)$$

и безразмерному виду получим уравнение связи

$$v_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}. \qquad (15.57)$$

Следовательно, для установления подобия между двумя потоками необходимо выполнить то же условие, что и при вязкостном режиме, т.е.

$$\left(\frac{V_\Gamma}{v^*}\right)_\text{н} = \left(\frac{V_\Gamma}{v^*}\right)_\text{м}.$$

В данном случае подобие может быть осуществлено, так же как при вязкостном режиме, независимо от размеров модели, которая, разумеется, должна быть геометрически подобна образцу.

Сопоставим условия, необходимые для осуществления подобия в рассматриваемых задачах:
при наличии сил тяжести:

$$\left\lfloor v_r/(ql_0^3)^{1/2}\right\rfloor_\text{м} = \left\lfloor v_r/(ql_0^3)^{1/2}\right\rfloor_\text{н};$$

$$\left\lfloor v/(ql_0^3)^{1/2}\right\rfloor_\text{м} = \left\lfloor v/(ql_0^3)^{1/2}\right\rfloor_\text{н};$$

при напорном течении

$$\left(\frac{V_\Gamma l_0}{\nu}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{V_\Gamma l_0}{\nu}\right)_{\text{н}};$$

при вязкостном течении

$$\left(\frac{V_\Gamma}{\nu^*}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{V_\Gamma}{\nu^*}\right)_{\text{н}};$$

при инерционном течении

$$\left(\frac{V_{\tilde{\text{A}}}}{\nu^*}\right)_{\text{ì}} = \left(\frac{V_{\tilde{\text{A}}}}{\nu^*}\right)_{\text{í}}.$$

$$\frac{\nu_{\text{м}}}{\nu_{\text{н}}} = C_\nu; \quad \frac{l_{\text{м}}}{l_{\text{н}}} = C_e; \quad \frac{q_{\text{м}}}{q_{\text{н}}} = C_q = 1; \quad \frac{\nu_{\text{м}}}{\nu_y} = C_\nu,$$

получим при наличии влияния сил тяжести

$$C_\nu = C_e^{1/2}; \quad C_\nu = C_e^{3/2};$$

при напорном течении

$$C_\nu C_l = C_V;$$

при вязкостном и инерционном течении

$$C_\nu = C_V.$$

Следовательно, для первых двух режимов имеем ограничения в выборе множителей подобия. Действительно, выбрав в первом случае множитель геометрического подобия C_l, мы тем самым предопределяем множители подобия C_ν и C_V. Аналогично и в случае напорного течения.

В противоположность рассмотренным двум первым видам течения, при осуществлении подобия вязкости и инерционного течения мы свободны в выборе множителей подобия. В последних двух случаях подобие обеспечивается одним лишь подобием распределения скоростей. Это свойство инерционного и вязкостного режимов течения называется автомоделью. При этом для вязкостного режима имеет место

$$\overline{Eu}\,\overline{\text{Re}} = \text{const},$$

а для инерционного режима

$$\overline{Eu} = \text{const}.$$

Вязкостный режим наблюдается в области малых значений числа $\overline{\text{Re}}$, а инерционный – в области больших значений числа $\overline{\text{Re}}$. В соответствии с этим

принято говорить о первой и второй автомодельных областях. Значение автомодельности для практики моделирования совершенно очевидно, так как оно позволяет осуществить подобие на модели любых размеров с использованием любой рабочей жидкости.

16.8. Моделирование конвективного теплообмена

Рассмотрим стационарный конвективный теплообмен между твердым телом и омывающей его несжимаемой вязкой жидкостью. При этом физические параметры будем считать зависящими от температуры и давления.

Для сокращения запишем уравнения конвективного теплообмена в векторной форме:

уравнение движения

$$\rho(V,\mathrm{qrad})v = -\mathrm{qrad}\,p + \rho q + \mu\nabla^2 V; \qquad (16.58)$$

уравнение сплошности

$$div\rho V = 0; \qquad (16.59)$$

уравнение переноса тепла или уравнение энергии

$$(V,\mathrm{qrad}\,t) = a\nabla^2 t \qquad (16.60)$$

где $a = \lambda/\rho cq$ – коэффициент температуропроводности; μ – коэффициент вязкости;

$$(V,\mathrm{qrad}\,t) = v_x\frac{\partial t}{\partial x} + v_y\frac{\partial t}{\partial y} + v_z\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Параметры μ,ρ,c,λ в общем случае являются переменными и зависят от температуры, т.е.:

$$\mu + f_\mu(t); \quad c = f_c(t); \quad \rho = f_\rho(t); \quad \lambda = f_\lambda(t). \qquad (16.61)$$

краевые условия будут

$$V_r = f_V(1_r, l_i, v_0); \quad t_r = f_t(1_r, l_i, t^*). \qquad (16.62)$$

Составим масштабные преобразования и, введя их в уравнения (16.58)-(16.60), получим в конечном итоге систему уравнений связи:

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p_0}{\rho_0 l_0} = q_0 = \frac{\mu_0 v_0}{\rho_0 l_0^2}; \qquad \rho_0 q_0 v_0 c_0 = \frac{\lambda_0}{l_0}. \qquad (16.63)$$

Из девяти масштабов, связанных четырьмя уравнениями (15.63), пять масштабов могут быть выбраны произвольно:

$$q_0 = q; \quad t_0 = t^*; \quad \rho_0 = \rho_0; \quad c_0 = c_0; \quad l_0 = l_0,$$

а остальные четыре определены из условия (15.63):

$$p_0 = \rho_0 q l_0; \quad v_0 = (q l_0)^{1/2}; \quad \mu_0 = \rho_0 (q l_0^3)^{1/2}; \quad \lambda_0 = \rho_0 c_0 (q^3 l_0^3)^{1/2}. \qquad (16.64)$$

Равенства $\rho_0 = \rho_0; \quad c_0 = c_0; \quad l_0 = l_0$ следует понимать в том смысле, что выбор указанных масштабов является произвольным.

Выражения для безразмерных величин:

$$V = \frac{v}{\sqrt{q l_0}}; \quad L = \frac{1}{l_0}; \quad P = \frac{p}{\rho_0 q_0 l_0};$$

$$T = \frac{t}{t^*}; \quad M = \frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{q l_0^3}}; \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad G = 1;$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}}; \quad C = \frac{c}{c_0}; \quad T^* = 1.$$

После этого дифференциальные и характеристические уравнения и краевые условия в безразмерном виде запишем следующим образом:
уравнение движения

$$R(V, \mathrm{qrad})V = -\mathrm{qrad}\, P + R + M\nabla^2 V; \qquad (16.65)$$

уравнение сплошности

$$divRV = 0; \qquad (16.66)$$

уравнение энергии

$$RC(V, \mathrm{qrad}\, T) = q\,\mathrm{rad}\,\Lambda\nabla^2 T. \qquad (16.67)$$

характеристические уравнения:

$$\Lambda = F_\Lambda(T); \quad C = F_c(T); \quad M = F_M(T); \quad R = F_R(T). \qquad (16.68)$$

Краевые условия:

$$V_r = F_v(L_r, L_i); \quad T_r = \Phi(L_r, L_i). \qquad (16.69)$$

На основании безразмерных уравнений (16.65)-(16.69) можно заключить, что решение рассматриваемой задачи может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} V &= \Phi_V(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M.R); \\ P &= \Phi_P(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M.R); \\ T &= \Phi_T(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M.R). \end{aligned} \qquad (16.70)$$

Так как подобие двух систем означает тождество полей безразмерных переменных, то для осуществления подобия необходимо:
в сходственных точках рассматриваемых систем, т.е.

$$L_{\text{М}} = L_{\text{Н}}, \tag{16.71}$$

иметь тождественно одинаковое распределение критериев V и T на границах рассматриваемых систем, т.е.

$$V_{r.\text{М}} = V_{r,\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}}\right)_{\text{Н}};$$
$$T_{r.\text{М}} = T_{r.\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{t_r}{t^*}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{t_r}{t^*}\right)_{\text{Н}}, \tag{16.72}$$

и чтобы безразмерные характеристические параметры сравниваемых систем были также одинаковыми, т.е.

$$P_{\text{М}} = P_{\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0}\right)_{\text{Н}};$$

$$\Lambda_{\text{М}} = \Lambda_{\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}}\right)_{\text{Н}};$$

$$C_M = C_H \text{ или } \left(\frac{c}{c_0}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{c}{c_0}\right)_H; \tag{16.73}$$

$$M_{\text{М}} = M_{\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{ql_0^3}}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{ql_0^3}}\right)_{\text{Н}};$$

$$R_{\text{М}} = R_{\text{Н}} \text{ или } \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{\text{Н}}.$$

16.9. Методы фотомеханики

Поляризационно-оптический, или просто оптический, метод моделирования позволяет устанавливать распределение и значения напряжений в массивах пород и элементах сооружений любой конфигурации, когда деформации модели происходят без разрыва сплошности.

Еще в 1816 г. Д.Брустер обнаружил, что если кусок стекла, находящийся в напряженном состоянии, осветить поляризованным светом, то на этом стекле будет видна окрашенная в яркие цвета фигура. Эти цвета, как было установлено, зависят от величины действующих напряжений. Д.Брустер предложил воспользоваться наблюдаемым эффектом для определения напряжений в телах сложной конфигурации, при помощи изготовляемых из стекла моделей, которые должны исследоваться в поляризованном свете при различных условиях нагружения. Позже была установлена зависимость между оптическим эффектом и величиной разности действующих в некоторой точке тела главных нормальных напряжений, при этом было замечено, что изменение толщины плоской модели пропорционально сумме главных нормальных напряжений, действующих в этой же точке.

Практическое применение оптический метод исследования напряжения получил только с 1901 г., когда в качестве материала для моделей стали применять целлулоид и была разработана техника измерения напряжений.

Таким образом, оптический метод основан на свойстве большинства прозрачных изотропных материалов (целлулоид, бакелит, фенолит и др.), называемых оптически чувствительными, при приложении механических нагрузок приобретать оптическую анизотропию и проявлять способность двойного лучепреломления. Последнее заключается в том, что луч света, проходя через прозрачную кристаллическую среду, разлагается на две взаимно перпендикулярные плоскополяризованные составляющие, которые распространяются внутри среды с различной скоростью.

Применительно к решению задач горного давления впервые этот метод был применен Ф.Левинсон-Лессингом и А.Зайцевым при исследовании влияния формы сечений тоннелей на характер распределения напряжений. Эксперименты проводили на пластинках из целлулоида с различными по форме отверстиями. Цель этих опытов – выяснить влияние отверстия и его формы на характер распределения напряжений под действием приложенной внешней нагрузки. Проведенные опыты показали, что наибольшее сжимающее напряжение (при одноосном начальном напряженном состоянии) возникает по боковым сторонам отверстия и что оно достигает, примерно, тройного значения по отношению к сжимающему напряжению в ненарушенном массиве; наименьшие напряжения возникают при овальном и подковообразном сечениях, вытянутых в направлении действующих сил.

Применение метода фотоупругости в механике горных пород базируется на теореме Леви-Митчела о независимости характера распределения напряжений в плоских моделях (в том числе – из оптически чувствительных материалов) от упругих постоянных моделей при равенстве нулю равнодействующей всех приложенных внешних сил (главного вектора) и равнодействующей всех моментов (главного момента), что позволяет при моделировании обеспечивать только геометрическое подобие модели и натуры.

Оптически чувствительные материалы, применяемые для изготовления моделей, должны обладать высокой прозрачностью, оптической и механической изотропностью, стабильными оптико-механическими характеристиками и необходимой прочностью. Вместе с тем они должны хорошо обрабатываться и

проявлять достаточно малые краевые эффекты, связанные с появлением оптической разности хода на контуре пластин вследствие внутренних напряжений.

Под руководством П.М. Цимбаревича были проведены эксперименты по исследованию НДС массива при помощи оптико-поляризационного метода с применением в качестве оптически-активного материала игдантина, состоящего из смеси желатинового раствора и глицерина. Игдантин заливался в разъемную ванну с боковыми стеклянными стенками, а нагрузка модели осуществлялась собственным весом материала. Однако попытки применения желатиновых растворов не дали положительных результатов, т.к. на контактах слоев полностью искажалась картина распределения напряжений.

Производство новых полимерных материалов с разнообразными оптико-механическими свойствами открыло широкие возможности в подборе материалов для оптического моделирования. В частности, для задач механики горных пород весьма удобно применение органических стекол и эпоксидных смол. В пластинках из указанных материалов в принятом масштабе вырезаются контуры изучаемых выработок (или систем выработок), вокруг которых исследуется распределение напряжений при различных схемах нагружения пластинок по контуру растягивающими или сжимающими силами.

Широкое применение для решения задач горной геомеханики получил этот метод в послевоенный период.

Оптико-поляризационный метод изучения НДС реализуется в виде методов фотомеханики, рассматривающих следующие свойства.

Фотоупругость – исследование процессов упругого деформирования материалов.

Фотопластичность – исследование процессов остаточного деформирования материалов при известных предшествующих состояниях.

Фотоползучесть – исследование поведения материалов во времени под нагрузкой.

Напряженное деформированное состояние исследуемых объектов зависит от характера внешних воздействий на них до и в момент проведения экспериментов. В задачах статической фотомеханики физические воздействия, их интенсивность и направление остаются практически неизменными в течение достаточно длительного времени; силами инерции можно пренебречь.

В задачах динамической фотомеханики, наоборот, учитывается изменение характеристик при механических воздействиях во времени и влияние сил инерции.

В основе методов фотомеханики лежит эффект двойного лучепреломления, проявляющийся в оптически чувствительных материалах под воздействием механических напряжений. При просвечивании таких материалов поляризованным светом в моделях наблюдается оптическая картина, по которой судят о напряженно-деформированном состоянии моделируемого объекта.

Допустим, что в результате проведения горизонтальной выработки в массиве горных пород произойдет нарушение силового равновесия. Вокруг выработки возникает поле напряжений (рис. 16.5, *а*), характер которого в случае однородных изотропных пород будет оставаться постоянным для любого поперечного сечения по длине выработки. Следовательно, задача может быть пред-

ставлена как плоская для сечения, перпендикулярного оси выработки, которая имеет аналитическое решение.

Для изучения напряженного состояния пород вокруг выработки изготавливают модель из оптически активного материала с соблюдением условий геометрического и силового подобия. Через модель пропускают луч поляризованного света, и на экране получают поле напряжений (рис. 16.5, *б*) в виде линий судят о качественной характеристике поля напряжений, о направлении векторов напряжений, о концентрации напряжений и о точках или районах, наиболее опасных с точки зрения устойчивости или прочности обнажения.

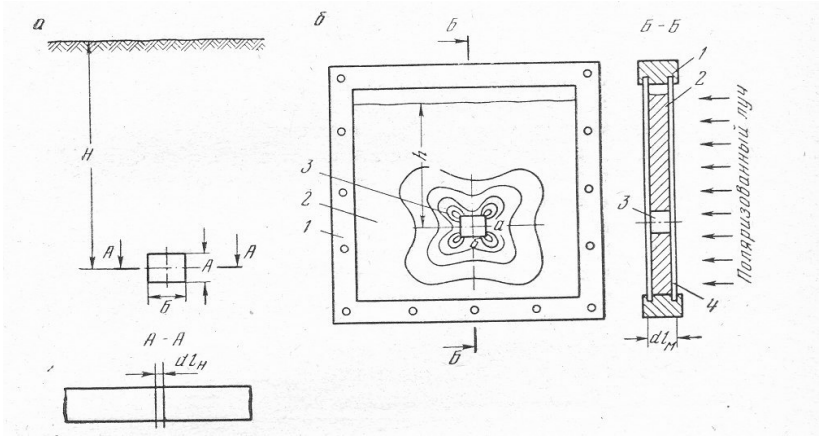


Рис. 16.5. Схема к моделированию оптическим методом задачи напряженного состояния пород вокруг выработки.: *а* – образец; *б* – модель; 1 – рамка модели; 2 – оптически активный материал; 3 – модель выработки; 4 – стекло.

Методы фотомеханики позволяют применить и объемные модели. Так, например, при изучении оптическим методом прочности бурового инструмента и разрушаемости пород широко применяют объемные модели, на основании которых становится возможным составить тензор напряжений в контактных зонах, подойти к решению вопроса о роли ядра уплотнения в процессе воздействия бурового инструмента и о влиянии предварительных выколов и свободных поверхностей в процессе разрушения породы.

Кроме того, оптический метод позволяет оценить влияние параметров удара на разрушаемость горной породы и затупления лезвия бурового инструмента на эффективность бурения, а также помогает решить вопрос об участии волн напряжений в процессе разрушения горных пород при ударном бурении.

Методы объемной фотомеханики также применяют и для исследования статической работы подземных сооружений. В круг таких задач входит исследование напряженного состояния горного массива вокруг вертикальных и горизонтальных выработок, пройденных в слоистых породах с наклонным залеганием пластов и различными физико-механическими свойствами, исследование распределения напряжений в сопряжениях различных выработок, определение напряжений в крепях и массиве при переменном сечении выработок небольшой протяженности и т.д.

Наибольшее практическое значение имеют следующие типовые задачи механики горных пород:

I тип. Определение условий сохранения и потери устойчивости элементов массивов и сооружений при различных исходных состояниях и комплексах воздействий на них, в том числе при ведении горных работ. Элементами исследуемых объектов, устойчивость которых должна быть обеспечена, являются: поверхности подземных выработок (кровли, почвы, бока), целики, потолочные камеры и кровли лав, борты карьеров, земная поверхность. Учитывают стадийность процессов деформирования и разрушения элементов, предельные их состояния, а также видоизменения сочетаний условий.

II тип. Установление закономерностей взаимодействия элементов массивов между собой и с элементами сооружений, в том числе с крепями горных выработок, в зависимости от естественно-геологических условий и видов взаимодействий. Взаимодействием считается взаимозависимое изменение в пространстве и времени граничных поверхностей контакта. Вид закономерности механического взаимодействия крепи и пород, определяющий условия их совместной работы, реализуется в различных режимах, включая заданную нагрузку, заданную деформацию, взаимовлияющую деформацию, комбинированный режим.

III тип. Изучение влияния горных выработок и комплексов горных работ на окружающие породные массивы различных структур и свойств, находящиеся в различных состояниях и подвергающиеся различным воздействиям.

Основными вопросами изучения являются: установление зон опорного давления, разгрузки, сдвижений и разрушений массивов, определение очертаний и размеров защищенных зон, выяснение распространения волн напряжений, вызванных взрывами, на различные подземные и наземные объекты.

Таким образом, оптический метод исследования напряжений позволяет решать весьма сложные задачи, которые недоступны математическому анализу.
Теоретические основы оптического метода исследования упругих полей напряжений и смещений базируется на использовании закона Гука о прямой пропорциональности между напряжением и деформацией и на явлении оптической анизотропии изотропных тел, подвергнутых действию внешних сил, или при наличии внутренних напряжений. С помощью оптического метода обнаруживают не сами величины нормальных напряжений, а разность между ними, т.е. максимальные касательные напряжения τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \qquad (16.74)$$

где σ_1, σ_2 – главные нормальные напряжения.

Поэтому с помощью оптического метода определяется существенная характеристика для суждения о прочности конструкции по теории Кулона.

Второй принцип, использованный при оптическом моделировании, вытекает из общей теории света. Если, например, световой луч от обычного источника света направить на стеклянную пластинку под углом, то луч делится на

две части: одна часть – отражается, другая – преломляется. Опыты показывают, что отраженный и преломленный лучи оказывается плоско-поляризованными и их колебания будут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Наибольшей поляризации световой луч достигает в том случае, если отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу (рис. 16.6).

Интересными оптическими свойствами обладает ряд кристаллов (турмалин, слюда, кальций). Если кристалл кальцита поставить своим основанием на бумагу с черной точкой и посмотреть сверху, то можно увидеть два изображения точки (рис. 16.7).

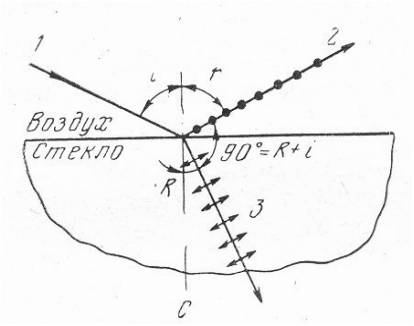


Рис.16.6. Отражение и преломление световых лучей: i – угол падения; γ – угол отражения; R –угол преломления; 1– падающий луч; 2– отраженный луч; 3 – преломленный луч.

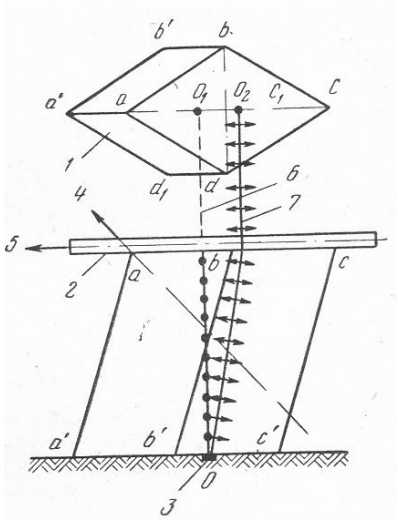


Рис. 16.7. Двойное лучепреломление:
1–кристалл кальцита; 2–пластинка турмалина; 3–метка; 4–оптическая ось кристалла кальцита; 5–ось поляризации пластинки турмалина; 6–обыкновенный луч; 7–необыкновенный луч.

В этом случае имеет место двойное лучепреломление. Ели теперь с помощью

пластинки турмалина проанализировать обыкновенный и необыкновенный лучи, то оказывается, что оба луча являются плоско-поляризованными.

При этом колебания обыкновенного луча происходят в плоскости, перпендикулярной диагональной плоскости $\grave{a}, a', c', c$, а колебания необыкновенного луча лежат в этой плоскости $\grave{a}, a', c', c$, т.е. колебания лучей происходят в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Явление двойного лучепреломления можно также наблюдать и в изотропных веществах под действием нагрузки. Например, сформированный или напряженный кусок стекла, целлулоида, акелита и т.д. обнаруживает все свойства двойного лучепреломления. Свойство двойного лучепреломления изотропных тел под нагрузкой (открыто Брюстером в 1816 г.) положило начало методу фотоупругости.

Как известно, при плоском напряженном состоянии тела в каждой точке имеются площадки, по которым касательные напряжения отсутствуют и дей-

ствуют только главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2. Под действием этих напряжений создаются деформации, которые приводят материал к оптической анизотропии. Вследствие этого луч света, проходящий через напряженное прозрачное тело, будет разлагаться на два плоско-поляризованных луча, колебания которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, параллельных направлению распространения луча.

При этом распространение лучей в напряженно-деформированной пластине происходит с различными скоростями в соответствии с величинами σ и ε, что приводит к оптическому сдвигу фаз и линейной разности хода. Как показывают многочисленные опыты, разность хода в общем случае определяется по формуле

$$\Gamma = C_\sigma \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + C_\varepsilon \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (16.75)$$

где C_ε и C_σ – постоянные, называемые оптическими коэффициентами деформации и напряжения, зависящими от применяемых материалов; δ – толщина пластинки; σ_1 и σ_2 – главные нормальные напряжения; ε_1 и ε_2 – деформации в направлении главных нормальных напряжений.

Поскольку в стадии упругого деформирования материалов существует строгая пропорциональность между σ и ε, обобщенная зависимость (16.75) преобразуется к виду

$$\Gamma = C_\sigma \delta(\sigma_1 - \sigma_2). \qquad (16.76)$$

В этом случае выражение (4.22) согласно выражению (4.20) можно представить в виде

$$\Gamma = 2C_\sigma \delta \tau_{\max}. \qquad (16.77)$$

При пластичном деформировании материалов на интерферационную картину полос решающее влияние оказывают деформации, так как напряжения на этой стадии деформации изменяются незначительно. В связи с этим зависимость (15.75) может быть представлена в виде линий

$$\Gamma = C_\sigma \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \qquad (16.78)$$

Следовательно, зная толщину модели δ, оптическую постоянную $\tilde{N}_\sigma$ и определив разность хода Γ, можно установить значение максимальных скалывающих напряжений при исследовании модели в стадии упругого деформирования и относительных деформаций при изучении процессов ползучести или пластического деформирования.

Определение разности хода Γ основывается на свойстве поляризованного света в зависимости от частоты колебаний давать различные цвета. Точно так же, как частота звукового колебания определяет высоту звука, частота светового колебания определяет качество света, которое глаз воспринимает как цвет.

Следовательно, определенной частоте колебания соответствует определенный цвет. Луч света, составленный только из одного цвета, называется монохроматическим, или однородным.

Очевидно, для каждого монохроматического света имеется вполне определенная длина волны. Так как длина волны определяется выражением

$$\lambda = vT,$$

где v – скорость распространения света; T – период колебания волны, а частота колебания при этом определяется как величина, обратная периоду колебания:

$$P_k = \frac{1}{T},$$

то можно установить связь между частотой колебания и длиной волны, а, следовательно, и цветом света. В пустоте все лучи монохроматического света распространяются с одинаковой скоростью $\tilde{N}^* = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Следовательно, длина волны для каждого монохроматического света будет определяться только в зависимости от частоты колебания P_k:

$$\lambda = \frac{C^*}{P_k}. \qquad (16.79)$$

Поэтому, получив на экране различные цвета, можно определить, имея таблицу соотношений цвета и длины волн, величину разности хода $\Gamma = n\lambda$, а, следовательно, величина максимальных касательных напряжений

$$\tau_{\max} = n\frac{\lambda}{2C_\sigma\delta} = n\frac{\tau_0^{1,0}}{\delta} = n\frac{\sigma_0^{1,0}}{2\delta}, \qquad (16.80)$$

где n – порядок полосы; $\sigma_0^{1,0}$ – цена полосы оптически чувствительного материала.

Разность хода может быть определена по методу сопоставления цветов, по методу полос и по методу компенсаций. При методе сопоставления цветов искомую разность хода определяют непосредственно по цветной картинке изохром, полученной при белом источнике света, и последующем сопоставлении с интерферационными цветами эталонных колец Ньютона, для которых составлена таблица. При методе полос используется монохроматический источник света и учитываются порядковый номер полосы в исследуемой области, а также цена полосы материала. При методе компенсаций к искомой разности хода, создаваемой в упругой напряженной области объекта, оператор добавляет компенсатором разность хода, равную по величине, но обратную по знаку. При ре-

зультирующей разности хода, равной нулю, при скрещенных поляроидах в измеряемой точке модели наблюдается затемнение.

После этих замечаний можно приступить к рассмотрению принципа действия оптико-поляризационной установки.

Рассмотрим образец изотропного прозрачного тела, подвергнутого равномерной нагрузке (рис. 16.8).

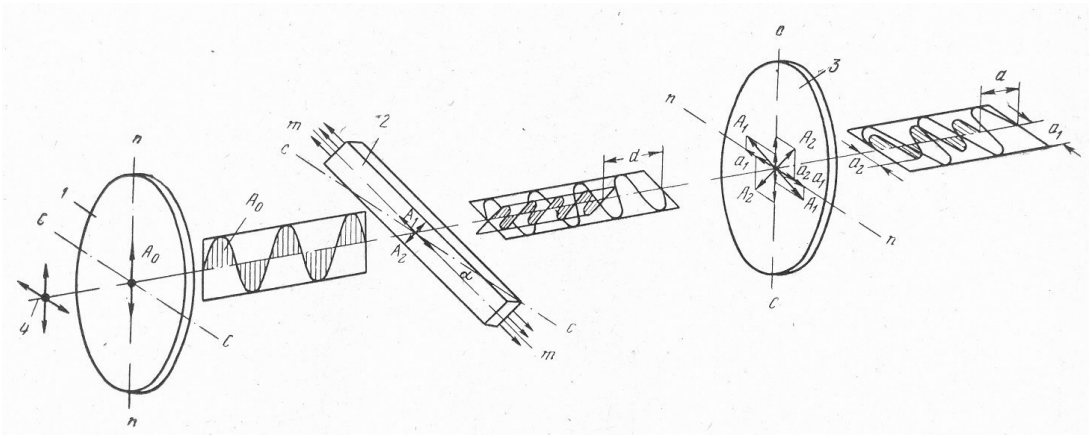


Рис. 16.8. Принципиальная схема оптической установки: 1 – поляризатор; 2 – образец; 3 – анализатор; 4 – источник света; $\grave{A}_0, A_1, A_2, a_1, a_2$ – амплитуда колебания; $C-C$ – горизонтальная ось поляризатора; $n-n$ –вертикальная ось поляризатора; $m-m$ –ось модели.

Обыкновенный луч, проходя через поляризатор 1, приобретает только вертикальные колебания и падает на образец 2, повернутый на угол α к горизонтальной оси. В результате напряженного состояния образца поляризованный свет, преломляясь, распадается на два луча. Колебания лучей идут в плоскостях главных напряжений. В результате преломления в зависимости от напряженности образца лучи приобретают разные скорости распространения. Пройдя образец, лучи падают на анализатор 3, ориентированный так, что он пропускает только колебания, перпендикулярные плоскости поляризации поляризатора 1. Таким образом, через анализатор пройдут только лучи a_1 и a_2. Так как после образца лучи вследствие разной скорости распространения получили некоторую разность хода, то, следовательно, и после анализатора получили некоторую разность хода между горизонтальными составляющими колебаний.

Если обозначить через A_0 амплитуду колебаний луча после поляризатора: a_1 и a_2 – амплитуды колебаний лучей после анализатора, то можно написать следующую зависимость для результирующей амплитуды колебаний после анализатора:

$$A_3 = a_1 + a_2 = A_0 \,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha\left[\mathrm{Sin}(\phi - 2\pi n) - \mathrm{Sin}\,\phi\right].$$

Значение $A_{\max}$ достигается при $\varphi = -\pi n$

$$A_{\max} = A_0 \operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Sin} \pi n .$$

Интенсивность света

$$J = A^2 \operatorname{Sin}^2 2\alpha \operatorname{Sin}^2 \pi n .$$

Максимальная интенсивность света имеет место при $\alpha = 45^{\circ}$C, давая наиболее яркую картину цветов на экране, а, следовательно, распределения, скалывающие напряжения $\tau_{\max}$. Кроме ярких цветов на экране получают и темные места, которые удовлетворяют одному из трех условий:

1. Свободные от напряжения точки, не дающие двух преломлений (поляризатор и анализатор скрещены, свет будет в них погашен).

2. Точки, в которых главные напряжения равны. В этих точках нет сдвига фаз, как нет и разности хода (скорости распространения лучей равны друг другу). Следовательно, амплитуды $\grave{a}_1$ и $\grave{a}_2$ при этом равны и тогда имеем

$$a_1 + a_2 = A_0 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\varphi + (-A_0 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi) = 0 .$$

Это дает в результате темноту на экране. Наличие таких особых точек является весьма значительным при изучении моделей, так как в них $\sigma_1 = \sigma_2$.

3. Точки, для которых плоскости направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризатора и анализатора. В этом случае $\alpha = 0$ при 90° и $J = 0,$ т.к. $\operatorname{Sin} 2\alpha = 0$.

Последний случай представляет большую ценность для исследования напряжений, т.к. он дает точные сведения о направлении двух главных напряжений в любой точке образца. Следовательно, вращая образец (или поляризатор – анализатор) с одновременным отсчетом углов, для каждого угла получим систему черных точек для линий, в которые эти точки могут сливаться. В этих точках будем знать направления главных напряжений. Линии, соединяющие точки, где направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, называются изоклинами. Допустим, имеем изоклину 1, соответствующую углу поворота образца на угол α_1, изоклину 2, соответствующую углу поворота образца на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ и т.д. (рис. 16.9).

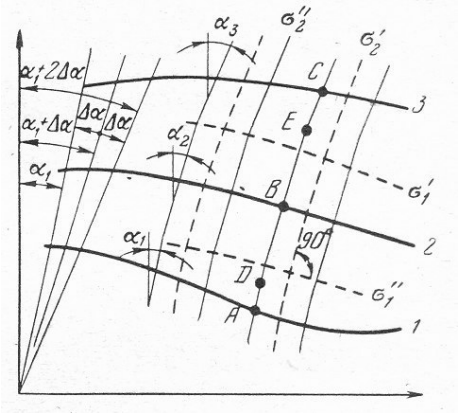


Рис. 16.9. Построение изостат:
1,2,3 – изоклины;
$\text{À}, \text{D}, \text{B}, \text{E}, \text{C}, \sigma_1', \sigma_1'', \sigma_2', \sigma_2''$ – изостаты.

Проведем из точек A,B,C прямые под углами к вертикали, равными соответственно $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ и т.д. Точки пересечения прямых между собой обозначим через D,E. Получим, таким образом, ломаные линии, которые являются изостатами (кривые направления одной из главных сил напряжения σ_1). В каждой точке изостаты под углом 90° к изолинии σ_1 направлена σ_2. Таким образом, изостаты представляют собой ортогональное семейство кривых, касательные к которым совпадают с направлением главных нормальных напряжений.

Чтобы отличить темные места, соответствующие изоклинам, от тех, которые являются следствием условий 1 и 2, надо помнить, что изоклины изменяют свое положение при последовательных поворотах образца или системы поляризатора-анализатора. Точки образца, где $\sigma_1-\sigma_2=0$ (т.е. свободные от напряжения), при любом повороте остаются на тех же местах.

Таким образом, при исследовании образца или модели на изолированной установке получают значение τ_{max}, после напряжений σ_1 и σ_2, а, следовательно, определяют область пониженных и повышенных напряжений.

Изучение напряжений на объемных моделях основано на методе «замораживания» напряжений (деформаций) и методе рассеянного света. Первый метод, в котором предусматривается использование обычных поляризационных установок, нашел более широкое применение. Второй требует специального оптического оборудования, промышленное изготовление которого еще не налажено.

При методе рассеянного света нагруженная модель помещается в иммерсионную жидкость и просвечивается тонкой полоской плоско-поляризованного монохроматического света большой яркости, который проходя через модель, освещает рассматриваемую плоскость внутри модели. В просвечиваемом сечении при наблюдении со стороны, перпендикулярной к плоскости сечения, видна картина полос интерференции света, связанных с коэффициентом преломления, а, следовательно, и с деформацией в каждой точке модели.

Разность квазиглавных нормальных напряжений, лежащих в плоскости, перпендикулярной к проходящему лучу, определится по формуле

$$\sigma_1'-\sigma_2'=\frac{C_\sigma}{\mathrm{a}} \qquad (16.81)$$

где σ_1',σ_2' – квазиглавные напряжения (наибольшие и наименьшие нормальные напряжения в исследуемой плоскости); a – расстояние между полосами интерференции;

Направляя плоский пучок поляризованного света различным образом по отношению к модели, можно определить напряжение в любом сечении модели без предварительного приготовления специальных срезов, как это делается при методе «замораживания».

Метод «замораживания» основан на способности некоторых оптически активных материалов, нагруженных при нагреве и охлажденных под нагрузкой до комнатной температуры, сохранять оптический эффект после снятия нагруз-

ки. Модели изготавливают из оптически активных материалов, имеющих двухфазную структуру. При нагревании модели из таких материалов до определенных температур, в зависимости от вида и марки материала, большая часть материала размягчается и не оказывает сопротивления прилагаемой нагрузке. Часть материала (скелет), оставшаяся в твердом состоянии, полностью воспринимает прилагаемую нагрузку, под действием которой в модели возникают деформации и напряжения. Если затем, не снимая нагрузки, модель охладить до комнатной температуры, то размягченная при нагревании часть материала затвердевает (замораживается) и будет удерживать полученную скелетом деформацию при снятии нагрузки, а также и после распиливания модели в различных направлениях на тонкие пластинки толщиной 2-4 мм. В дальнейшем, через каждую такую пластинку, представляющую уже плоскую модель, пропускается луч поляризованного света, и на экране получается плоское поле напряжений. В результате на основании просвечивания поляризованным светом всех пластинок получим объемную картину распределения напряжений в модели, соответствующую характеру распределения напряжений в натуре.

Оптический эффект, получающийся при прохождении поляризованного света через объемную модель, связан с понятием квазиглавных напряжений σ_1' и σ_2'. При нормальном просвечивании среза (пластинки) квазиглавные напряжения σ_1' и σ_2' действуют так же, как главные напряжения σ_1 и σ_2 в плоской модели.

Квазиглавные напряжения могут быть выражены через неглавные напряжения, действующие в той же плоскости, аналогично плоской задаче. Например, для плоскости $\tilde{o}\,\acute{o}$, нормальной к оси z, напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, отнесенные к осям x и y, связаны с разностью квазиглавных напряжений соотношениями:

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1' - \sigma_2')\,\mathrm{Cos}\,2\varphi_0; \tag{16.82}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\sigma_1' - \sigma_2')}{3}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi_0, \tag{16.83}$$

где φ_0 – угол между направлением $\tilde{o}$ и направлением квазиглавного напряжения σ_1'.

Поляризованный луч света, пройдя пластинку с «замороженными» напряжениями, приобретает некоторую разность хода Γ, пропорциональную разности квазиглавных напряжений $(\sigma_1' - \sigma_2')$, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси распространения света:

$$\Gamma = C_0 \delta (\sigma_1' - \sigma_2'), \tag{16.84}$$

или выражая разность хода через число полос, получаем

$$n = \frac{C_0 \delta(\sigma_1' - \sigma_2')}{\lambda}, \qquad (16.85)$$

где λ – длина волны применяемого света; n – число полос.

Таким образом, полученные из объемной модели, исследуют аналогично плоской модели.

Подобие при оптическом методе. При изучении оптических явлений с помощью оптического метода необходимо так же, как при других методах моделирования физических явлений, соблюдать подобие соответственных одноименных параметров и комплексов. Установление связей между константами подобия и выявление критериев подобия находят из анализа размерностей самых общих уравнений, описывающих изучаемое явление. Поэтому в зависимости от постановки задачи: изучается ли процесс резания, удара или статического давления, для каждого процесса должны быть установлены значения критериев и множителей подобия.

Например, при моделировании задач в стадии упругого деформирования, связанных с установлением общей картины напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке месторождений полезных ископаемых, необходимо обеспечить условия подобия и применять для перехода от модели к натуре исходя из зависимостей, приведенных в табл. 16.1.

Таблица 16.1

Подобия при оптическом методе

Действующие нагрузки	Условия подобия		
	смещения	деформации	напряжения
Объемные силы тяжести	$C_u = C_l^2 C_v C_E$	$C_\varepsilon = C_i\, C_v C_E$	$C_\sigma = C_l\, C_v$
Объемные центробежные силы	$C_u = \frac{C_l^2 C_v}{K_{Ö}} C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_i C_v}{K_{Ö}} C_E$	$C_\sigma = \frac{C_l\, C_v}{K_{Ц}}$
Распределенная нагрузка по площади	$C_u = C_l\, C_{Å} C_s$	$C_\varepsilon = C_s C_v$	$C_\sigma = C_s$
Распределенная нагрузка по длине	$C_u = C_q C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_q C_E}{C_l}$	$C_\sigma = \frac{C_q}{C_l}$
Сосредоточенные силы	$C_u = \frac{C_p C_E}{C_l}$	$C_\varepsilon = \frac{C_p C_E}{C_l^2}$	$C_\sigma = \frac{C_p}{C_l^2}$
Примечание. $K_{Ц}$ – масштаб центрифугирования; $\hat{E}_{Ö} = \frac{R_{Ö}}{q}\varpi^2$, $R_{Ц}$ – радиус вращения; ϖ – угловая скорость; q – ускорение силы тяжести.			

Временное условие подобия определяется исходя из выражения

$$C_\tau = \frac{C_\eta}{C_v C_l}, \tag{16.86}$$

где $C_\eta = \frac{\eta_н}{\eta_м}$ – множитель подобия вязкости.

Выполнение граничных условий достигается при равенстве коэффициентов бокового распора:

$$\lambda_н = \lambda_м . \tag{16.87}$$

При моделировании задач горной механики в стадии пластического деформирования горных пород помимо требований геометрического и силового подобия, приведенного в табл.16.1, должны быть выполнены дополнительные требования:

$$\eta_м = \eta_н , \qquad \mu_м = \mu_н . \tag{16.88}$$

Кроме того, должны быть подобными кривые $\sigma - \varepsilon$ для материалов модели и натуры.

Метод фотопластичности основан на способности полимерных материалов переходить при определенных условиях напряжений из упругого состояния в пластическое и сохранять остаточные деформации после снятия внешних нагрузок. Поэтому при фотопластичности в основном используют модели с «замораживанием» напряжений.

Моделировать ползучесть массива горных пород более сложно, чем процессы упругого или пластического деформирования, так как необходимо соблюдать условия подобия как в первый момент после нагружения, так и в процессе ползучести. Условия подобия определяются исходя из анализа уравнений равновесия, соотношений Коши, связывающих напряжения с деформациями, граничных условий совместности деформаций и уравнений состояния.

Как показали исследования, масштаб напряжений в области линейной ползучести не зависит от параметров, характеризующих физико-механические свойства среды. Он определяется, как в случае упругой задачи, соотношением

$$C_\sigma = \frac{C_\delta}{C_l^2} . \tag{16.89}$$

Коэффициенты силового и геометрического подобия могут быть произвольными. Обычно их выбирают исходя из удобства проведения экспериментов.

Дополнительные критерии подобия, связанные с реологическими свойствами горных пород, выводят в зависимости от принятого уравнения состоя-

ния, анализируя размерности. Например. для уравнения линейно-наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\sigma(\tau)}{E} + \int_0^\tau L_{(\tau-\nu)}\sigma_{(\nu)}d_\nu, \tag{16.90}$$

$$\sigma_{(\tau)} = E\varepsilon_{(\tau)} - \int_0^\tau R_{(\tau-\nu)}\varepsilon_{(\nu)}d_\nu. \tag{16.91}$$

На основании аппроксимирующей функции определяются ядра ползучести $L_{(\tau-\nu)}$ и релаксации $R_{(\tau-\nu)}$ и реологические параметры α и β уравнения состояния.

В этом случае дополнительными требованиями являются

$$(\alpha_м) = (\alpha_н) \tag{16.92}$$

и

$$(\delta\tau^{1-\alpha})_м = (\delta\tau^{1-\alpha})_н, \tag{16.93}$$

где α – безразмерный параметр; δ – имеет размерность $C^{\alpha-1}$.

Сходственные моменты времени, когда поля напряжений в натуре и модели подобны, определяют из условия

$$\tau_н = \left(\frac{\delta_м}{\delta_н}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\tau_м \tag{16.94}$$

Для ядра в виде дробно-экспоненциальной функции (ядра Работнова) критерии подобия

$$(\alpha)_м = (\alpha)_н \tag{16.95}$$

Масштаб времени определяют на основании

$$C_\tau = \frac{\tau_{он}}{\tau_{ом}} = \left(\frac{\beta_м}{\beta_н}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{16.96}$$

где τ_0 – время ретардации (последствия), которое принимается за единицу измерения,

$$\tau_0 = \frac{1}{(-\beta)\frac{1}{\alpha+1}}. \tag{16.97}$$

При изучении напряженно-деформированного состояния массива горных пород и крепи выработок в натурных условиях известное применение получил метод фотоупругих элементов и покрытий.

Для измерения напряжений и деформаций исследуемого объекта на его поверхность наносят или наклеивают тонкий слой оптически чувствительного материала – фотоупругого покрытия, который деформируется упруго независимо от характера деформирования исследуемого объекта. Измерение разности хода поляризованных лучей в покрытии позволяет определить на основании основного закона фотомеханики, разность главных деформаций или разность главных напряжений и их направления в исследуемой точке.

Связь между напряжениями в исследуемом объекте и фотоупругом покрытии определяется зависимостью

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{E_{П}(1-\mu^2)}[(1-\mu_{П}\mu)\sigma_{1П.2П} - (\mu_{П}-\mu)\sigma_{2П.1П}]. \qquad (16.98)$$

Для раздельного определения главных напряжений $\sigma_{1\ddot{I}}$ и $\sigma_{1\ddot{I}}$ или главных деформаций применяют известные в фотомеханике методы – интегрирования уравнений равновесия плоской задачи, косого (наклонного) просвечивания покрытия, электроаналогии, а также способы измерения поперечных деформаций и абсолютных разностей хода с помощью квантовых оптических генераторов (лазеров).

При разделении напряжений с помощью наклонного просвечивания фотоупругого покрытия возможны два случая: одно нормальное и одно наклонное просвечивание либо только два наклонных. В первом случае напряжения определяют из выражений:

$$\sigma_{1П} = \frac{1}{2tC_{\sigma}}\left(\frac{\Gamma_{\theta 1}Cos\theta - \Gamma Cos^2\theta}{1-Cos^2\theta}\right); \qquad (16.99)$$

$$\sigma_{2\ddot{I}} = \frac{1}{2tC_{\sigma}}\left(\frac{\Gamma_{\theta 1}Cos\theta - \Gamma}{1-Cos^2\theta}\right),$$

во втором

$$\sigma_{1\ddot{I},2\ddot{I}} = \frac{1}{2tC_{\sigma}}\left(\frac{\Gamma_{\theta 1,\theta 2} + \Gamma_{\theta 1,\theta 1}Cos^2\theta}{1-Cos^4\theta}\right)Cos\theta, \qquad (16.100)$$

где θ – угол наклонного просвечивания.

При исследовании объектов, находящихся в условиях плоско-напряженного состояния, компоненты деформаций и напряжений определяют с помощью наклейки двух фотоупругих датчиков в непосредственной близости

друг от друга, что при отсутствии высоких градиентов деформаций соответствует измерению напряжений в одной точке исследуемого объекта, при этом один датчик наклеивают по всей площади, а второй – лишь по концам, аналогично наклейке одноосного фотоупругого тензометра.

Определение параметра изоклины φ и относительной разности хода поляризованных лучей Γ_1 в первом датчике в сочетании с измерениями относительной разности хода лучей $\tilde{A}_2$ во втором датчике позволяют найти компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, а также главные нормальные напряжения σ_1, σ_2.

Если источник в полярископе излучает белый свет, то модель и анализатор после прохождения лучей света через поляризатор получают на экране изображение, окрашенное в различные цвета светового спектра. При этом каждая цветная полоса представляет собой геометрическое место точек с одинаковой оптической разностью хода Γ и, следовательно, с одной и той же разностью главных нормальных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$, полуразность которых представляет собой максимальное касательное напряжение, определяемое по зависимости (16.74).

Таким образом, цветные полосы на экране полярископа представляют собой линии равных максимальных касательных напряжений исследуемой модели. Эти линии называют **изохромами**. Картину изохром, получаемую в поле анализатора, можно визуально наблюдать и фотографировать (рис. 16.10,а).

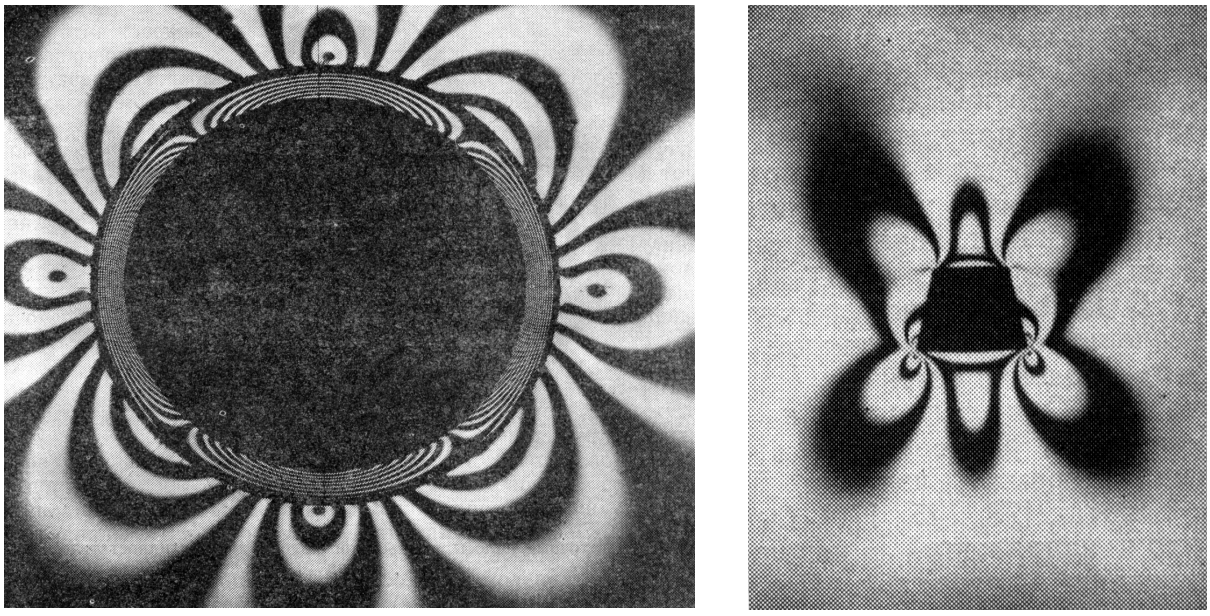


Рис. 16.10. Изохроматическая картина полос в оптических моделях:
а) кольцевая крепь; б) крепь трапециевидной формы.

В некоторых точках исследуемой модели плоскость колебания луча совпадает с направлением какого-либо из главных нормальных напряжений. В таких точках двойного лучепреломления не происходит. Если плоскости поляри-

зации поляризатора и анализатора взаимно перпендикулярны, т.е. скрещены, то лучи в указанных выше точках модели через анализатор не проходят. В результате на экране появляются черные линии, пересекающие цветную картину изохром. Эти линии суть геометрических мест точек, в которых направления главных нормальных напряжений параллельны между собой. Такие линии называют **изоклинами.**

Поворачивая скрещенные поляризатор и анализатор на различные углы, получают систему изоклин, позволяющую определить направления главных нормальных напряжений в любой точке модели. По изоклинам строят траектории главных напряжений, называемые **изостатами**.

При просвечивании напряженной модели темные пятна образуются также в точках, свободных от напряжений, и в точках, где главные напряжения равны между собой. Эти точки называют **изотропными** или особыми. Особые точки определяют структуру изохром и изоклин и поэтому имеют важное значение при исследовании распределения напряжений в модели.

Если требуется исключить появление на экране изоклин, то вместо плоской поляризации света используют круговую. Для этого в полярископе конструктивно предусмотрены пластинки из слюды такого же диаметра, как и у поляроидов. Одну из них вводят в оптическую систему позади поляризатора (относительно источника света), другую – впереди анализатора. Для света, поляризованного по кругу, все направления в модели, на которую он падает, равноценны, поэтому по изостатическим направлениям луч не погасает.

Кроме белого, при исследовании распределения напряжений в модели используется также монохроматический свет с определенной длиной волны, что значительно облегчает количественный анализ напряжений в различных точках модели. Для этого применяют натриевые или ртутные лампы со светофильтрами. Обычно выделяют зеленую линию светового спектра с длиной волны λ = 546 мкм. Если напряженную модель просвечивать монохроматическим светом, то на экране вместо цветной картины изохром получается чередующийся ряд темных и светлых полос (рис. 16.10, б), причем в тех точках, где разность хода равна четному числу полуволн (т.е. целому числу волн), происходит погасание света, и образуются темные полосы; в тех же точках, где разность хода равна нечетному числу полуволн, проходящий свет достигает наибольшей интенсивности и наблюдаются светлые полосы.

Подсчитав число полос, которые прошли через исследуемую точку модели при ее нагружении легко определить оптическую разность хода, а по ней - максимальное касательное напряжение в этой точке.

Однако в соответствии с основным законом фотоупругости для этого необходимо знать оптический коэффициент напряжений C_σ, который является показателем относительной чувствительности оптически активных материалов. Коэффициент C_σ устанавливают путем испытания контрольных образцов в режиме растяжения, сжатия или чистого изгиба. Он имеет размерность, обратную размерности напряжения; обычно его выражают в брюстерах, причем $1 \cdot 10^{-7}$ см^2/кгс = 0,98 брюстера.

Имея данные о коэффициенте C_σ, определяют оптическую разность хода Γ и далее переходят к величинам $\sigma_1 - \sigma_2$ и τ_{max}. Для этого применяют различные способы. Один из них – способ полос - в общих чертах описан выше. Этот способ применяют для моделей из материалов с высокой оптической чувствительностью. Он довольно прост и обеспечивает точность, достаточную для практических целей. Другим является способ сопоставления цветов по цветной картине изохром, получаемой при просвечивании модели белым светом. Для определения по картине изохром значения оптической разности хода Г используют шкалу цветов или таблицу цветов Ньютона. Определив цвет и порядок изохромы в данной точке модели и установив по таблице соответствующую разность хода, вычисляют значение $\sigma_1 - \sigma_2$.

Данный способ менее точен, чем предыдущий, так как включает в себя цветовую ошибку индивидуального наблюдателя.

Более точным является способ компенсации, предусматривающий использование специального прибора – компенсатора. Принцип этого способа состоит в том, что на разность хода лучей, создаваемую моделью, компенсатором накладывается разность хода, равная по значению, но обратная по знаку. Результирующая разность хода оказывается нулевой, т.е. при скрещенных поляроидах в исследуемой точке модели происходит затемнение.

Однако конечной задачей является раздельное получение значений главных напряжений в каждой точке модели. Способы разделения главных напряжений основаны на использовании дифференциальных уравнений равновесия с привлечением при определениях картин изохром и изостат. Особо следует отметить способ разделения напряжений с использованием линий сумм главных напряжений – **изопахик**, которые могут быть получены различными методами – с помощью эффекта муаровых полос, лазерной или голографической интерферометрии.

При решении задач, которые не могут быть сведены к плоским, применяют объемные модели. Для нахождения напряжений в какой-либо внутренней области объемной модели выделяют эту область так, чтобы по пути прохождения светового луча напряженное состояние практически не менялось. Основные способы решения объемных задач: а) способ, основанный на использовании свойств оптически чувствительных материалов моделей фиксировать («замораживать») оптический эффект; б) способ рассеянного света; в) способ оптически чувствительных вклеек.

Наибольшее распространение получил первый способ – «замораживание» с последующей распиловкой объемной модели на тонкие срезы толщиной 1…3 мм. Он основан на открытом Г. Оппелем в 1936 г. эффекте сохранения картины полос некоторыми оптически чувствительными материалами, обусловленном особенностями их двухфазной молекулярной структуры. Сперва модель нагружают при повышенной температуре; затем, не убирая нагрузки, постепенно охлаждают до комнатной. При снятии нагрузки деформации, полученные при повышенной температуре, остаются, соответствующее им двойное лучепреломление также сохраняется. Температуры «замораживания» различных оптически чувствительных материалов колеблются в пределах 80…150°С.

В последние годы метод фотоупругости все шире применяют и для решения динамических задач. При этом возникающие в моделях интерференционные картины дают возможность безинерционно исследовать распространение волн напряжений на всех стадиях динамического процесса. Поляризационно-оптическое исследование динамических явлений связано с особенностями моделирования, техники регистрации быстропротекающих процессов, определения зависимости между механическими и оптическими величинами и выбора методов разделения напряжений. В частности, для применяемых материалов необходимо оценивать влияние вязкоупругих свойств с точки зрения погрешности в определении напряжений и деформаций. Для регистрации интерференционных картин применяют высокоскоростные камеры, в качестве источников света используют обычно газоразрядные импульсные лампы.

Моделирование динамических нагрузок осуществляют с помощью копров различных конструкций, а также взрывов специальных зарядов.

Для разделения напряжений одновременно с регистрацией картин полос производят запись деформаций в модели с помощью тензометрических или геометрических (муар, голография, сетки) методов.

Другое направление связано с использованием метода фотомеханики при изучении деформирования пород в условиях проявления неупругих деформаций, в частности деформаций пластичности и ползучести. В этом случае речь идет об эффекте фотопластичности и фотоползучести применяемых оптически чувствительных материалов.

При моделировании динамических процессов, а также напряженного состояния объектов с учетом деформаций пластичности и ползучести в отличие от статических задач необходимо добиваться соответствия реологических свойств натуры и материала модели.

Таким образом, оптическое моделирование позволяет получить весьма наглядное представление о поле напряжений в массиве пород вокруг выработок любой конфигурации. Даже качественная картина распределения напряжений иногда позволяет сделать важные заключения и выводы, выделить наиболее и наименее напряженные участки, наметить пути достижения оптимального распределения напряжений.

16.10. Другие методы моделирования

При решении задач механики горных пород, наряду с применением описанных выше различных методов, используют также и их комбинации, например, принципа центробежного моделирования и принципа поляризационно-оптического метода, либо метода эквивалентных материалов и центробежного моделирования.

Метод, сочетающий принцип метода эквивалентных материалов и принцип центробежного моделирования, получил научную, технологическую разработку и широкое применение в результате многолетних (с 1946 г.) исследований Криворожского научно-исследовательского горнорудного института (НИГРИ), проводившихся под руководством проф. И.Р. Ривкина.

Применением в модели эквивалентных материалов взамен натуральных горных пород и нагружением модели в центрифуге, обеспечивается выполнение условий подобия в геометрическом масштабе модели.

Таким образом, сущность данного метода состоит в том, что вместо модели из натуральных горных пород, применяемой в методе центробежного моделирования, модель изготавливают из эквивалентных материалов, механические характеристики которых удовлетворяют условию в некотором достаточно крупном геометрическом масштабе. Модель помещают в центрифугу и подвергают испытаниям при параметрах вращения, определяемых принятым масштабом центробежного моделирования. В данной комбинации двух методов геометрический масштаб модели из эквивалентных материалов, испытываемой в центрифуге, равен произведению этих двух геометрических масштабов.

Подбирая эквивалентные материалы с учетом геометрического масштаба, например, 1:20 и задавая параметры вращения центрифуги при масштабе центробежного моделирования 1:20, обеспечивается общий геометрический масштаб модели 1:400, в котором и необходимо изготовить все элементы модели, подготавливаемой к испытаниям.

Изложенный подход существенно расширяет технические возможности изготовления материалов и испытания моделей в широком диапазоне геометрических масштабов.

Объемные модели из оптически чувствительных материалов также обычно нагружают с использованием центрифуги, сочетая в этом случае принципы оптического метода и метода центробежного моделирования.

Среди прочих методов заслуживают особого внимания электроаналоговые методы моделирования, т.е. электрическое моделирование физических полей. Эти методы основаны, как отмечалось выше, на совпадении дифференциальных уравнений, описывающих процессы в электрическом и механическом силовых полях. Такие модели могут быть двух типов. В первом – методе электрогидродинамических аналогий (ЭГДА), предложенном в 1922 г. акад. Н.Н. Павловским, используют меняющиеся электрические свойства сплошной проводящей среды.

Второй, известный как метод электрических сеток прямой аналогии (ЭСПА), предусматривает замену сплошной среды сеткой из некоторых элементарных электрических ячеек, параметры которых назначают исходя из свойств среды в механической системе и критериев подобия. Электрические ячейки - элементы напряжения, силы тока, индуктивности, емкости - служат аналогами механического напряжения, скорости упругого смещения, массы, податливости элементарных объемов моделируемого массива пород.

Электроаналоговые методы применяют в настоящее время для решения задач, связанных с динамическими процессами в породных массивах, а дальнейшее развитие этих методов может открыть пути моделирования совместного действия статических и динамических процессов механики горных пород.

Часто используют в сочетании оптический метод и метод эквивалентных материалов. Например, оптическим методом наиболее детально изучают распределение напряжений в зоне опорного давления, а методом эквивалентных

материалов для тех же условий исследуют развитие деформаций толщи с разрывом сплошности и механизм взаимодействия сдвигающихся пород с крепью.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теоремы подобия, лежащие в основе моделирования физических явлений?
2. Сформулируйте условия геометрического, кинематического и динамического подобия механических систем.
3. На какой основе изготавливают эквивалентные материалы?
4. Изложите методику подбора эквивалентного материала на основе песчано-парафиновой смеси.
5. Изложите методику испытаний моделей из эквивалентных материалов.
6. Раскройте физические принципы, лежащие в основе центробежного моделирования.
7. Изложите физическую сущность моделирования тепловых процессов в горном деле.
8. Изложите физическую сущность моделирования гидродинамических процессов.
9. Изложите физические предпосылки оптического метода моделирования.
10. Дайте определение «изохром», «изоклин», «изостат».
11. Какие точки при исследовании оптических моделей называют «изотропными»?
12. В чем состоит «метод замораживания напряжений при оптическом моделировании?

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Механика горных пород: Т1/ Под ред. С.С. Гребенкина, Н.Н. Гавриша.– Донецк: ДонНТУ, 2004.– 455 с.

2. Соболев В.В. Физика горных пород/ В.В. Соболев, А.П. Стариков.– Днепропетровск: Донбасс,2012.– 455 с.

3. Руппенейт К.В. Деформируемость массива трещиноватых горных пород/ К.В. Руппенейт.–М.: Недра, 1965.– 224 с.

4. Моделирование геомеханических процессов в массиве горных пород/ Под общей ред. Ю.А. Петренка.–Донецк: НОУЛИДЖ, 2009.– 161 с.

5. Ефремов И.А. Методы решений краевых задач в горной геомеханике: монография / И.А. Ефремов, С.И. Александров, И.Ф. Марийчук и др.// Под общей ред. И.А.Ефремова.– Донецк: НОУЛИДЖ, 2013.– 291 с.

6. Ржевский В.В. Основы физики горных пород/ В.В.Ржевский, Г.Я. Новик.–М.: Недра, 1984.– 359 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ 3
1.1. Объект и метод исследования механики горных пород 4
1.2. Горные породы 6
1.3. Классификация физико-технических свойств пород 11
2. ПОРИСТОСТЬ И СТРУКТУРА ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА 12
2.1.Основные параметры 12
2.2. Основные методы определения пористости образцов пород 14
2.3. Пористость осадочных пород 16
2.4. Пористость магматических и метаморфических пород 17
2.5. Пористость природных углей 18
3. ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД 20
3.1.Основные параметры магматических и метаморфических пород 20
3.2.Плотностные свойства рыхлых и разрыхленных пород 23
3.3. Методы определения плотности минералов и горных пород 26
3.4. Трещиноватость породных массивов 30
Контрольные вопросы 30
4. ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД 31
4.1. Механические напряжения в горных породах 31
4.2. Понятие о напряжениях и деформациях 31
4.3. Теории прочности пород 47
4.4. Стандартные методы определения прочностных параметров скальных пород 61
4.4.1. Основные показатели механических свойств горных пород 61
4.4.2. Определение предела прочности при одноосном сжатии 64
4.4.3. Метод определения предела прочности при одноосном растяжении 67
4.4.4. Метод определения предела прочности при сдвиге 68
4.4.5. Метод определения предела прочности при изгибе 70
4.4.6. Метод определения предела прочности при объемном сжатии 70
4.4.7. Метод комплексного определения пределов прочности при многократном раскалывании и сжатии 71
4.4.8. Методы определения механических свойств сжатием образцов встречными сферическими инденторами 73
4.4.9. Нестандартные методы определения прочностных параметров скальных пород 74
4.4.10. Метод удара ручным и пружинным шариковыми молотками 77
4.4.11. Метод вдавливания стального шарика с помощью пружинного пистолета 79
4.5. Определение прочностных параметров рыхлых и разрыхленных пород 79
4.5.1. Метод определения механических свойств глинистых пород при одноосном сжатии 80
4.5.2. Испытание глинистых пород при растяжении 83
4.5.3. Метод испытания глинистых пород на сдвиг 84
4.6. Определение прочности горных пород приборами для трехосного

сжатия 88
4.7. Определение угла внутреннего трения песков по углу естественного откоса 89
4.8. Пределы изменения прочностных параметров пород угольных шахт Донбасса 90
Контрольные вопросы 91
5. Деформационные свойства пород 93
5.1. Деформации в горных породах 93
5.2. Упругие свойства горных пород 95
5.3. Пластические и реологические свойства горных пород 97
5.4. Понятие о теории наследственной ползучести 107
Контрольные вопросы 114
6. АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД 114
6.1.Акустические волны в породах 114
6.2. Параметры акустических свойств горных пород 114
6.3. Определение акустических параметров пород в лабораторных условиях 118
6.4.Использования акустических свойств горных пород в горном деле 119
Контрольные вопросы 122
7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ГОРНЫХ ПОРОД 123
7.1. Крепость 123
7.2. Контактная прочность 126
7.3. Абразивность 126
7.4. Дробимость 128
7.5. Сопротивляемость резанию 129
7.6. Буримость 131
7.7. Взрываемость 132
7.8. Липкость и сопротивление копанию рыхлых и разрыхленных пород 133
7.9. Использование горно-технологических свойств в горной практике 134
Контрольные вопросы 135
8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД 137
8.1. Общие сведения о температурном поле в горных породах 137
8.2. Основные тепловые параметры горных пород 137
8.3. Определение параметров термодинамических свойств пород в лабораторных условиях 139
8.4. Использование тепловых свойств и явлений в горном деле 141
Контрольные вопросы 142
9. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОД 143
9.1. Общие сведения о воде в горных породах 143
9.2. Параметры гидравлических свойств горных пород 144
9.3. Воздействие жидкости на горные породы 149
9.4. Определение гидравлических параметров горных пород 150
9.5. Использование гидравлических свойств горных пород для дегазации угольных пластов, ослабления и упрочнения пород 151

Контрольные вопросы 152
10. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД 153
Контрольные вопросы 159
11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД 160
11.1. Базовые параметры электромагнитных свойств пород 160
11.2. Использование электрических магнитных свойств горных пород для горного производства 163
Контрольные вопросы 165
12. РАДИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОРОД 166
12.1. Базовые параметры радиационных свойств горных пород и методы их определения 166
12.2. Использование радиационных свойств пород в горной практике 168
Контрольные вопросы 168
13. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРОДНОГО МАССИВА 170
13.1. Основные соотношения механики сплошного деформируемого тела 170
13.2. Механические процессы в массиве горных пород 173
13.3. Сплошность и дискретность 173
13.4. Трещиноватость и слоистость массива 174
13.5. Неоднородность и анизотропия 177
13.6. Теории напряжений 178
13.7. Виды напряженного состояния 187
13.8. Дифференциальные уравнения равновесия 189
13.9. Граничные условия 192
13.10. Уравнение совместности деформаций 194
13.11. Определение механических свойств горных пород в натурных условиях 195
13.12. Статистическая обработка результатов измерений 197
Контрольные вопросы 198
14. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТРОНУТОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД 200
14.1. Общие сведения 200
14.2. Напряженное состояние ненарушенного массива горных пород 202
14.3. Определение коэффициента бокового давления в прочных породах 203
14.4. Коэффициент бокового давления в сыпучих породах 206
Контрольные вопросы 208
15. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕХАНИКЕ 209
15.1. Общие сведения 209
15.2. Метод конечных элементов 210
15.3. Метод граничных элементов 218
15.4. Метод дискретных элементов 227
15.5. Вариационные методы решения краевых задач в геомеханике 232
Контрольные вопросы 235
16. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ 237

16.1. Общие сведения 237
16.2. Модели в механике горных пород 239
16.3. Основные положения теории подобия 241
16.4. Метод эквивалентных материалов 244
16.5. Метод центробежного моделирования 254
16.6. Моделирование тепловых процессов 256
16.7. Моделирование гидродинамических процессов 260
16.8. Моделирование конвективного теплообмена 269
16.9. Методы фотомеханики 271
16.10. Другие методы моделирования 290
Контрольные вопросы 292
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 293
СОДЕРЖАНИЕ 294