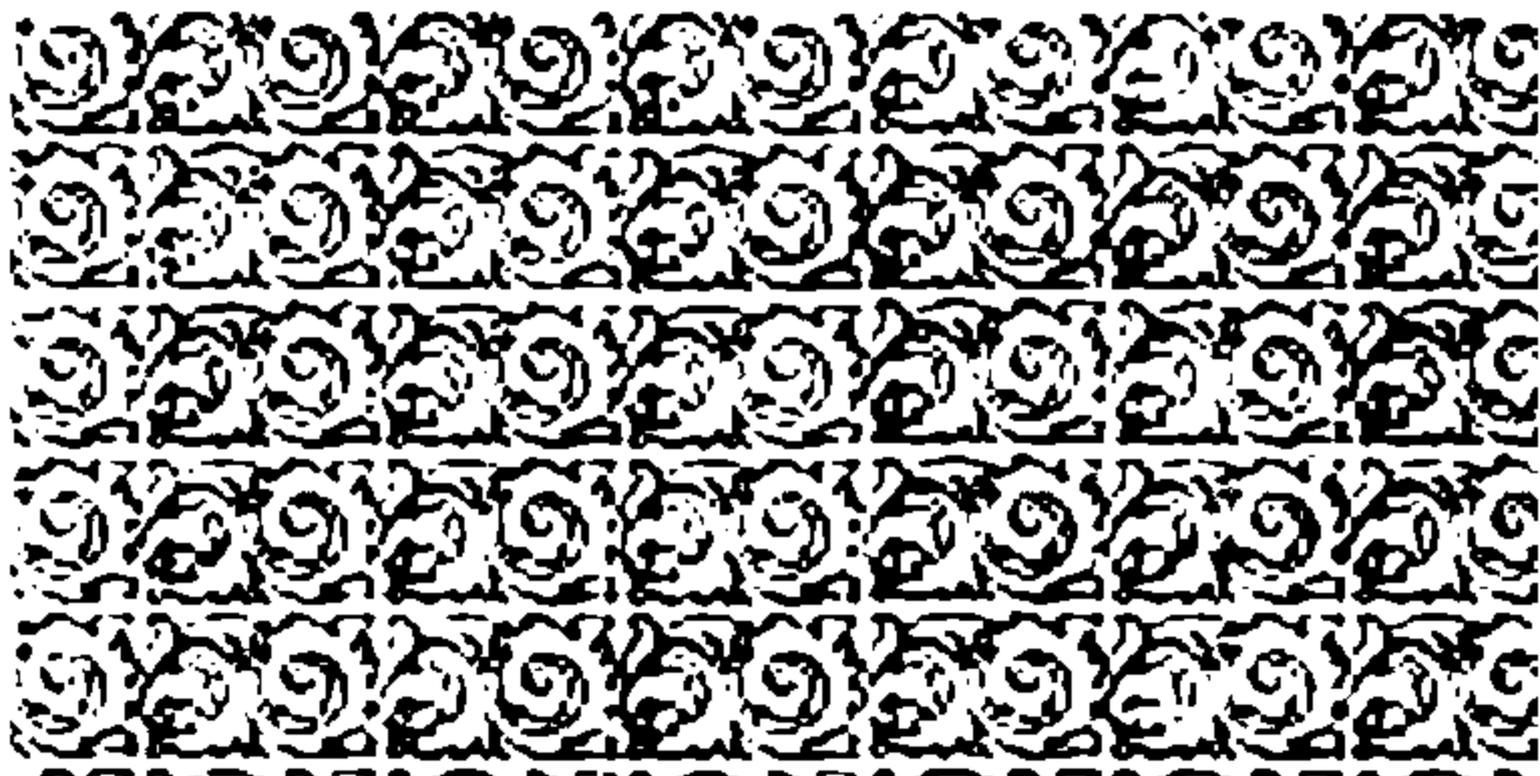




# Применение теории случайных функций в геодезии



Кузьменко И.И., Полетаев Ю.В., Шоловцова Л.А.



И. Н. КУЗЬМЕНКО, Ю. В. ПОЛИЩУК,  
Л. А. ШАПОВАЛОВА

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ В ГЕОДЕЗИИ

КИЕВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»  
1980

**Применение теории случайных функций в геодезии.** Кузьменко И. Н., Полищук Ю. В., Шаповалова Л. А. Киев, издательское объединение «Вища школа». 1980. 144 с.

В монографии освещены новые вопросы теории погрешностей геодезических измерений, основанных на применении в этой теории случайных процессов. Рассмотрены разнообразные точные и приближенные аналитические методы анализа погрешностей измерений для различных, по необходимости упрощенных, моделей систем измерений. Показаны возможности сочетания теории случайных функций с математической теорией исследования операций при решении производственных и научных геодезических задач. Изложены задачи, связанные с прогнозированием развития тех или иных процессов.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов геодезических и смежных специальностей. Может быть полезной широкому кругу инженеров и техников, связанных с обработкой и прогнозированием измерений, а также лицам, интересующимся вопросами математической обработки геодезических измерений. Табл. 35. Ил. 51. Список лит.: 35 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук А. С. Харченко, канд. геогр. наук Б. П. Сергиенко, канд. техн. наук В. В. Киричук.

Редакция естественной литературы  
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

*Инна Николаевна Кузьменко  
Юрий Владимирович Полищук  
Людмила Алейзовна Шаповалова*

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ В ГЕОДЕЗИИ

Редактор Н. Н. Филоненко  
Художественный редактор Т. С. Преснякова  
Технический редактор Е. Г. Рублев  
Корректор А. И. Король

Информ. бланк № 5730

Сдано в набор 28.01.80. Подп. в печать 20.06.80. БФ 06117. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 9,0 усл.-печ. л. 8,83 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз. Изд. № 1333-к. Зак. 0-140. Цена 1 р. 30 к.

Издательство при Киевском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 252001, Киев-1, Крещатик, 4.

Киевская книжная типография научной книги республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Киев-4, Репина, 4.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теорию случайных функций (теорию случайных или стохастических процессов) применяют в теории погрешностей измерений с первой половины XX ст. Современная теория погрешностей измерений\* построена на основе теории вероятностей и математической статистики. Для ее изложения широко используют линейную алгебру и многомерную геометрию. Теория погрешностей измерений — физико-математическая дисциплина. Она близка к метрологии — учению об измерениях. В ней должное место занимает теория погрешностей положений, теория графов и геоетрографические вопросы решения задач на плоскости и в пространстве, теория градиентов и линий положения. Теория погрешностей измерений — составная часть теории математической обработки геодезических измерений (ТМОГИ) и служит как бы введением в теорию уравнительных вычислений.

В последнее время для решения задач теории погрешностей измерений привлекаются многие разделы математической теории исследования операций — теория и практика математического программирования (линейного, нелинейного, динамического, стохастического), теория массового обслуживания (теория очередей), надежности, статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Долгое время эта теория ограничивалась изучением только независимых случайных погрешностей. Последующие усилия были направлены на построение корреляционной теории погрешностей измерений, охватившей не только зависимые случайные, но и совместно действующие систематические погрешности.

Большинство опубликованных работ отечественных и зарубежных авторов по стохастическим процессам имеет либо высокую теоретическую направленность, основанную на широком использовании абстрактной теории меры, либо посвящено прикладной теории случайных функций в определенной области научных знаний. В геодезической литературе случайные процессы освещены слабо. В руководствах по математической об-

---

\* Термин «погрешности измерений» введен согласно ГОСТ 16263-70 — Метрология (термины и определения). М., 1978.

работке геодезических измерений они не рассматриваются. Но почти нет ни одной ветви геодезических знаний, в которой не возникла бы необходимость исследования вероятностного процесса. Теорию случайных процессов применяют в исследованиях погрешностей диаметров кругов, нивелирной рефракции, точности изображения рельефа на топографических картах, обновления этих карт, выборе методов построения фотограмметрических сетей и т. д.

Особенно важным является привлечение теории случайных процессов при создании автоматизированных аэрофотограмметрических и картографических систем, автоматизированных систем геодезических измерений для математической и графической обработки результатов этих измерений, решении задач инженерной, физической и космической геодезии.

Теория случайных функций способствует более строгому анализу точности геодезических измерений величин, изменяющихся во времени, выполнению их математико-статистической обработки и проектированию этих измерений.

В предлагаемой книге приведены основы прикладной теории случайных функций, применяемой при решении геодезических задач. В нее включены необходимые сведения из различных разделов теории математической обработки измерений, теории вероятностей и математической обработки измерений, теории вероятностей и математической статистики, теории приближения функций и др. Предполагаемый широкий круг читателей обусловил необходимость такого построения монографии, при котором возможно ее использование без дополнительной подготовки.

Мы стремились раскрыть возможности сочетания теории случайных функций с математической теорией исследования операций при решении производственных и научных геодезических задач.

Авторы с благодарностью примут все замечания и предложения, направленные на улучшение содержания книги.

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

## § 1. Случайные функции

В современной теории погрешностей измерений случайную погрешность рассматривают как случайную функцию условий измерений. Это может быть функция многих аргументов. Каждая случайная погрешность зависит от факторов, переменных во времени. Поэтому случайной функцией называют функцию двух переменных, первая из которых — параметр, обычно представляемая как время (для случайных процессов), а вторая — элементарное событие, принадлежащее некоторому выборочному пространству.

Различают два типа случайной функции  $X(t)$ : случайный процесс, когда аргумент  $t$  может принимать любые значения в заданном конечном или бесконечном интервале, и случайную последовательность, когда независимая переменная  $t$  может принимать только счетное множество значений. Однако такое деление случайных функций не всегда соблюдают. Обычно случайную функцию отождествляют со случайным процессом и рассматривают как непрерывную функцию своего аргумента, а о случайной последовательности говорят как о случайном процессе с дискретным характером.

Случайную функцию изучают аналитическим способом, основанным на определении многомерного закона ее распределения, и статистическим, основанным на определении только числовых характеристик такой функции. Первый способ применяют в теоретических исследованиях и для приближенного представления случайной функции, второй широко используют для решения различных прикладных задач в теории случайных функций.

Случайная функция в простейшем виде представлена в виде системы случайных величин  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ . Такую систему рассматривают как единое целое, обладающее дифференциальным законом распределения, или плотностью распределения  $\varphi[x(t)]$ , и интегральным законом распределения, или функцией распределения  $F[x(t)]$ .

Для системы независимых случайных величин дифференциальный закон распределения

$$\varphi[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \varphi[x_1(t)] \varphi[x_2(t)] \dots \varphi[x_n(t)]. \quad (1)$$

Интегральный закон распределения системы независимых случайных величин имеет вид

$$F[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = F[x_1(t)] F[x_2(t)] \dots F[x_n(t)]. \quad (2)$$

Конкретный вид, который принимает случайная функция  $X(t)$  в результате опыта, называют выборочной функцией. При конечном интервале времени его называют реализацией случайной функции.

Семейство реализаций функции, соответствующее вероятностному процессу с непрерывным параметром, приведено на рис. 1. Оно относится к случайным изменениям отметки (высо-

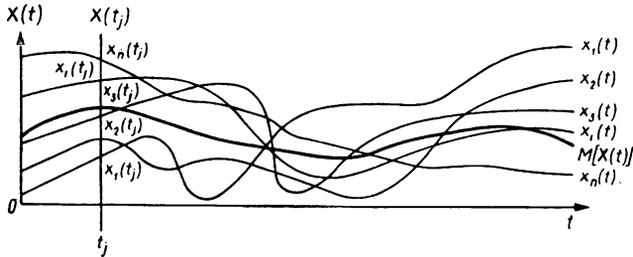


Рис. 1

та, альтитуда) полета самолета по ряду маршрутов при аэрофотосъемке. Реализации случайной функции наглядно получают с помощью самопишущего прибора, осциллограммы записи изменений процесса во времени, киносъемки или периодической фотосъемки. Утолщенной линией показано математическое ожидание случайной функции.

Каждая реализация случайной функции  $X(t)$ , обладая случайным (стохастическим) происхождением, представлена в виде обычной неслучайной функции  $x(t)$ . При заданном значении аргумента  $t_j$  она превращается в случайную величину  $X(t_j)$ , которая называется сечением случайной функции, соответствующим  $t_j$ . Значениями этой случайной величины будут  $x_1(t_j)$ ,  $x_2(t_j)$ , ...,  $x_n(t_j)$ . На графиках с помощью кривых и поверхностей изображаются только реализации случайной функции, но не сама случайная функция  $X(t)$ . Тем не менее эти графики показывают, что случайная функция представлена либо системой реализаций — выборочных функций, либо совокупностью случайных величин, зависящих от параметра  $t$ .

Основными числовыми характеристиками случайного процесса являются математическое ожидание, определяющее такую неслучайную функцию, вокруг которой группируются реализации случайной функции; дисперсия, показывающая степень рассеивания этих реализаций, и корреляционная функция, определяющая внутреннюю структуру случайного процесса, силу взаимной связи реализаций случайной функции.

Математическое ожидание системы случайных величин имеет вид

$$M[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \times \\ \times \varphi[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] dx_1, dx_2, \dots, dx_n. \quad (3)$$

Дисперсию системы случайных величин вычисляют по формуле

$$D[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = M\{[x_1(t) - Mx_1(t)]^2 [x_2(t) - \\ - Mx_2(t)]^2 \dots [x_n(t) - Mx_n(t)]^2\}. \quad (4)$$

Стандарт или средняя квадратическая погрешность принимает вид

$$\sigma[X(t)] = \sqrt{D[X(t)]}. \quad (5)$$

Довольно часто пользуются центрированной случайной величиной — флуктуацией

$$\delta[X(t)] = X(t) - M[X(t)]. \quad (6)$$

Очевидно,

$$M\delta[X(t)] = 0. \quad (7)$$

Нормированная случайная величина

$$X_0'(t) = \delta[X(t)]/\sigma[X(t)]. \quad (8)$$

Для нее

$$M[X_0'(t)] = 0 \text{ и } D[X_0'(t)] = 1. \quad (9)$$

Корреляционная функция определяется по формулам, приведенным в § 2 этой главы.

Параметр  $t$  в формулах (1—9) может относиться не только ко времени, но и температуре, скорости, весу, расстоянию и т. д. Например, уклон местности может быть представлен в функции расстояния или площади, скорость ветра — в функции высоты, длина измерительного прибора — в функции температуры и т. д.

Для практических исследований случайных функций часто отказываются от громоздкого построения многомерных законов распределения и ограничиваются определением лишь некоторых параметров этих законов. Наиболее удобным является использование теории моментов, разработанной П. Л. Чебышевым. Моментом (обычным моментом)  $n$ -го порядка случайной величины  $X(t_i)$  называется равенство

$$V_n(C) = M[X(t_i) - C]^n,$$

где  $C$  — любое вещественное число. При  $C=0$  получаем начальный момент  $n$ -го порядка

$$V_n [X(t_i)] = M [X(t_i)]^n.$$

Центральный момент  $n$ -го порядка случайной величины ( $t_i$ ) определяют по формуле

$$\mu_n [X(t_i)] = M \{X(t_i) - m_1 [X(t_i)]\}^n.$$

Практически применяют моменты первых четырех порядков.

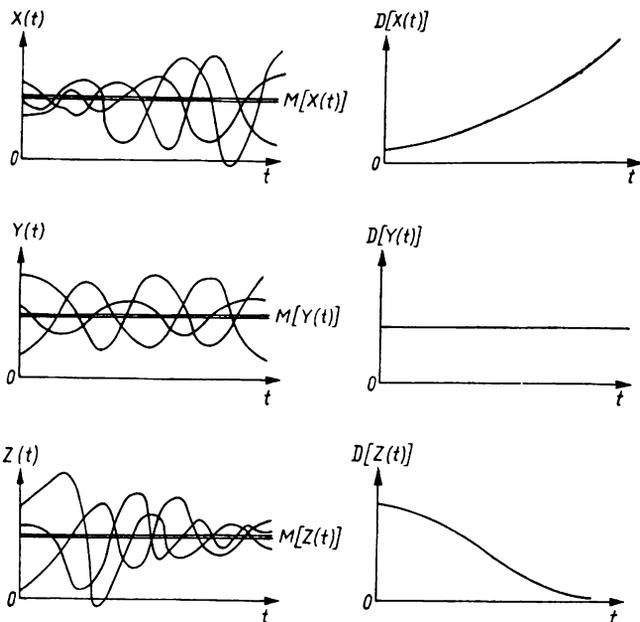


Рис. 2

Наиболее важные — моменты первого и второго порядков. На них основаны числовые характеристики случайных величин. Первый начальный момент — математическое ожидание случайной величины  $\mu_1 [X(t_i)] = M [X(t_i)]$ . Второй момент  $V_2(C)$  принимает минимальное значение, когда  $C=M [X(t_i)]$ . Это будет второй центральный момент, выражающий дисперсию

$$\mu_2 [X(t_i)] = M \{X(t_i) - M [X(t_i)]\}^2 = D [X(t_i)].$$

Заметим, что  $D [X(t_i)] = \mu_2 [X(t_i)] - \{M [X(t_i)]\}^2$ .

Дисперсия характеризует разброс возможных реализаций случайной функции. Не исключено появление одинаковой дисперсии при всех значениях аргумента  $t$ , т. е.  $D [X(t)] = D (X)$ . Если такая дисперсия окажется равной нулю, то можно считать, что случайная функция  $X(t) = M [X(t)]$  с вероятностью, равной единице.

Бывают случаи, когда математические ожидания случайных функций равны, а их дисперсии различны. Например, на рис. 2 показаны реализации случайных функций  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $Z(t)$ , имеющих одинаковые математические ожидания  $M[X(t)] = M[Y(t)] = M[Z(t)]$ , но различные дисперсии.

## § 2. Корреляционные функции

К основным характеристикам случайного процесса, кроме математического ожидания и дисперсии, относится также корреляционная функция.

Математическое ожидание и дисперсия определяют только полосу возможных реализаций случайной функции, но не по-

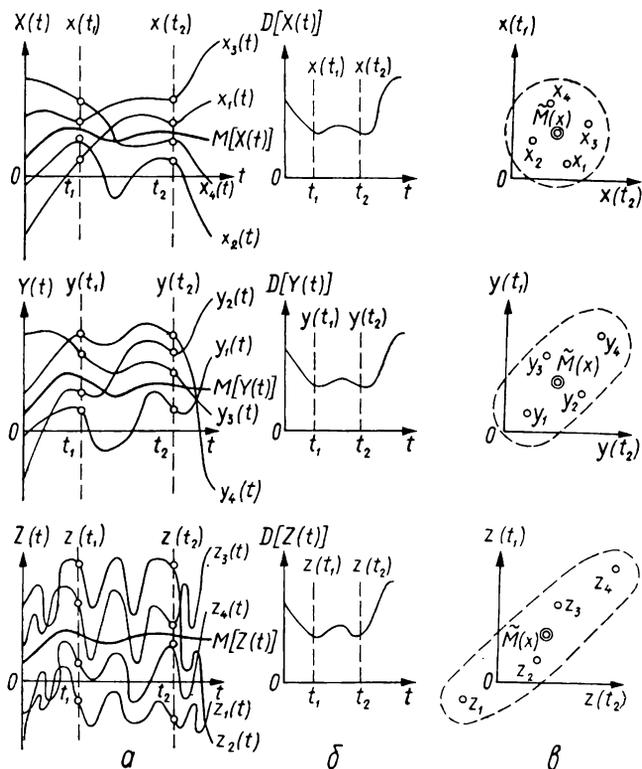


Рис. 3

ведение этих реализаций внутри такой полосы. Из рис. 3 видно, что при дифференцировании случайных функций  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $Z(t)$  получаются различные результаты. Реализации этих случайных функций обладают различной изменчивостью по характеру и скорости (интенсивности) и различной зависимостью.

На рис. 3 приведены семейства реализаций (а) случайных функций, скеластические кривые (б), показывающие изменения дисперсий, и корреляционные эллипсы (в), характеризующие взаимную связь случайных ординат по сечениям  $t_1$  и  $t_2$ . Связь между случайными величинами  $X(t_i)$  и  $X(t_j)$  выражается с помощью корреляционного момента, вычисляемого по флюктуациям.

$$\delta[X(t_i)] = X(t_i) - M[X(t_i)]; \delta[X(t_j)] = X(t_j) - M[X(t_j)].$$

Степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к разным аргументам  $t$ , характеризуется ковариационной или корреляционной функцией, представляемой в виде неслучайной функции, которая для каждой пары сечений случайной функции соответствующих аргументов  $t_i$  и  $t_j$  равна корреляционному моменту.

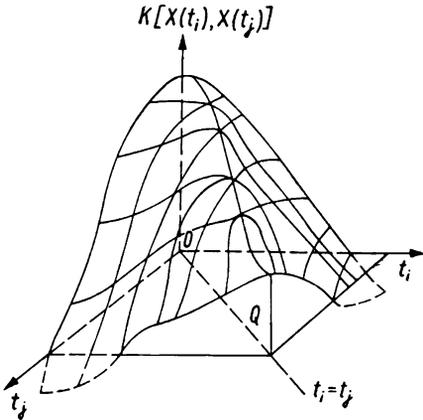


Рис. 4

что означает корреляцию случайного процесса с самим собой. Интервал  $(t_i - t_j)$  называют запаздыванием. Корреляционная функция зависит от двумерного закона распределения, и корреляционный момент, или момент связи, случайной величины  $X(t_i)$  и  $X(t_j)$  составляет

$$K[X(t_i), X(t_j)] = M\{\delta[X(t_i)] \delta[X(t_j)]\}.$$

Очевидно, такой момент зависит от интервала между сечениями  $t_i$  и  $t_j$ . Он уменьшается с увеличением этого интервала. При одних и тех же математических ожиданиях и дисперсиях две случайные функции могут иметь различные автокорреляционные функции. Корреляционная функция может быть зависимой не от отдельных значений  $t_i$  и  $t_j$ , а от разности  $\tau = t_i - t_j$ . Если при одном из значений  $t_i$  или  $t_j$ , случайная функция  $X(t)$  становится неслучайной величиной, то  $K[X(t_i), X(t_j)] = 0$  при любом значении другого аргумента.

Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов. Она изображается в трехмерной системе прямоугольных координат  $t_i, t_j$  и  $K[(t_i), (t_j)]$  в виде поверхности, сим-

$$K[X(t_i), X(t_j)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[x(t_i)] \delta[x(t_j)] \varphi[x(t_i), \\ x(t_j)] dx_i dx_j.$$

Корреляционную функцию случайного процесса часто называют автокорреляционной,

метричной относительно вертикальной плоскости  $Q$ , проходящей через биссектрису угла  $t_i Q t_j$  (рис. 4). Это свойство корреляционной функции соответствует свойству корреляционной матрицы системы случайных величин (табл. 1), приближенно выражающих случайную функцию. По главной диагонали этой матрицы располагаются дисперсии. Симметрично относительно нее размещаются корреляционные моменты, удовлетворяющие условию  $K[X(t_i), X(t_j)] = K[X(t_j), X(t_i)]$ .

Таблица 1

$t_i$	$t_j$					
	$t_1$	$t_2$		$t_j$		$t_n$
$t_1$	$D_1$	$K_{12}$		$K_{1j}$	$\dots$	$K_{1n}$
$t_2$	$K_{21}$	$D_2$		$K_{2j}$	$\dots$	$K_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
$t_i$	$K_{i1}$	$K_{i2}$		$D_i$	$\dots$	$K_{in}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
$t_n$	$K_{n1}$	$K_{n2}$		$K_{nj}$	$\dots$	$D_n$

Из классического неравенства Буняковского-Шварца вытекает, что корреляционная функция обладает следующим свойством:

$$|K[X(t_i), X(t_j)]| \leq \sigma[X(t_i)] \sigma[X(t_j)].$$

Корреляционная функция является также положительно определенной, т. е.

$$\int \int_{(B)} K[x(t_i), x(t_j)] f[x(t_i)] f[x(t_j)] d[x(t_i)] d[x(t_j)] \geq 0,$$

где  $f[x(t_i)]$  и  $f[x(t_j)]$  — любые функции,  $(B)$  — любая область интегрирования, одинаковая для обоих аргументов.

Для нормального случайного процесса характеристики  $M[X(t)]$  и  $K[X(t_i), X(t_j)]$  — исчерпывающие.

Часто вместо корреляционной функции пользуются коэффициентом корреляции, вычисляемым по формуле

$$r[X(t_i), X(t_j)] = K[X(t_i), X(t_j)] / \sigma[X(t_i)] \sigma[X(t_j)].$$

Коэффициент корреляции — безразмерная величина. При этом  $r[X(t_i), X(t_j)] = r[X(t_j), X(t_i)]$ . Его общее свойство выражается неравенствами  $-1 \leq r[X(t_i), X(t_j)] \leq 1$ .

Если  $r[X(t_i), X(t_j)] = 0$ , то случайные величины  $X(t_i)$  и  $X(t_j)$  будут некоррелированы. Однако некоррелированность случайных величин не служит утверждением их независимости. Исключения составляют случайные величины, имеющие нор-

мальное распределение. При  $t_i = t_j$  и  $r[X(t), X(t)] = 1$  случайные величины считаются полностью коррелированными — связанными. Они линейно-зависимы друг от друга.

При рассмотрении совокупности случайных функций (системы случайных функций), используют дополнительную числовую характеристику — взаимную корреляционную функцию, определяемую в виде неслучайной функции, которая для каждой па-

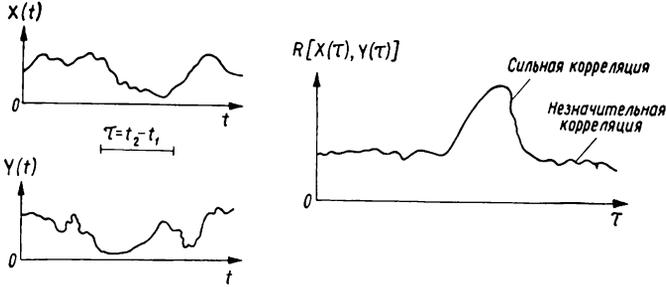


Рис. 5

ры сечений случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  равна корреляционному моменту  $R[X(t_i)Y(t_j)] = M\{\delta[X(t_i)]\delta[Y(t_j)]\}$ .

Если известна совместная двумерная плотность распределения  $\varphi[X(t_i), Y(t_j)]$  случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ , то взаимная корреляционная функция имеет вид

$$K[X(t_i), Y(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[x(t_i)] \delta[y(t_j)] \varphi[x(t_i), y(t_j)] dx dy.$$

На рис. 5 показан график взаимной корреляционной функции. Взаимная корреляционная функция, также как обычная корреляционная функция, не изменяется при суммировании случайных и неслучайных функций. Она обладает свойством симметрии, т. е.  $K[X(t_i), Y(t_j)] = K[Y(t_j), X(t_i)]$ . От нее осуществляют переход к нормированной взаимной корреляционной функции с помощью коэффициента корреляции

$$r[X(t_i), Y(t_j)] = R[X(t_i), Y(t_j)] / \sigma[X(t_i)] \sigma[Y(t_j)].$$

Для некоррелированных случайных функций  $X(t_i)$  и  $Y(t_j)$   $R[X(t_i), Y(t_j)] = 0$ . Однако часто суждение о некоррелированности таких случайных функций строят не на основе приведенного равенства, а исходя из физических соображений.

Практически корреляционную функцию системы случайных процессов определяют по формуле

$$K[Z(t_i), Z(t_j)] = K[X(t_i), X(t_j)] + K[Y(t_i), Y(t_j)] + R[X(t_i), Y(t_j)] + R[X(t_j), Y(t_i)].$$

Знак и величина взаимной корреляционной и нормированной взаимной корреляционной функций определяют силу и характер взаимной связи двух случайных функций. Если  $R[X(t_i), Y(t_j)]$  или  $r[X(t_i), Y(t_j)]$  положительные, то отклонения  $X(t_i)$  в момент  $t_i$  от  $M[X(t_i)]$  и отклонения  $Y(t_j)$  в момент  $t_j$  от  $M[Y(t_j)]$  будут направлены в одну сторону. Такая тенденция проявляется тем сильнее, чем ближе  $r[X(t_i), Y(t_j)]$  к единице. Если же  $R[X(t_i), Y(t_j)]$  или  $r[X(t_i), Y(t_j)]$  отрицательные, то указанные отклонения будут направлены в разные стороны. Эта тенденция усиливается по мере приближения  $r[X(t_i), Y(t_j)]$  к минус единице. Такой вывод сделан на свойствах корреляционных моментов случайных величин.

**МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**§ 1. Статистические оценки характеристик  
случайных процессов**

В прикладной теории случайных функций оперируют числовыми характеристиками, определяя при этом приближенные значения теоретических числовых характеристик случайных функций. Такие эмпирические числовые характеристики являются статистическими оценками или статистиками. Основное внимание уделяют статистической оценке математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции случайного процесса.

В статистической теории случайных функций понятия семейства реализаций случайной функции и представление о генеральной совокупности таких реализаций — фундаментальное. В этой ветви теории стохастических процессов статистически определяют свойства генеральных совокупностей. Для теоретических показателей, характеризующих эти свойства, находят статистические оценки или статистики. К статистическим оценкам предъявляют ряд требований.

Первое из них состоит в состоятельности оценки, т. е. сходимости эмпирической числовой характеристики  $\tilde{\Theta}$  по вероятности к соответствующей теоретической числовой характеристике  $\Theta$  при возрастании числа  $n$  наблюдений, т. е. при любом  $\epsilon > 0$  должно выполняться условие  $P(|\tilde{\Theta} - \Theta| < \epsilon) \rightarrow 1$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{stox} \tilde{\Theta} = \Theta$ .

Для состоятельности оценки достаточно соблюдать условие  $M(\tilde{\Theta} - \Theta)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Статистической оценкой математического ожидания случайной функции  $X(t)$  или статистическим математическим ожиданием является функция  $\bar{x}(t)$ , которая равна арифметической средней каждого сечения семейства реализации случайной функции  $X(t)$ . Если число равноточных реализаций  $m$ , то для каждого аргумента  $t_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , получаем простую арифметическую среднюю

$$\bar{x}(t_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j(t_i). \quad (10)$$

При неравноточных реализациях с весами  $p_1, p_2, \dots, p_m$  определяем общую арифметическую среднюю или среднюю взвешенную

$$\bar{x}(t_i) = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^m p_j x_j(t_i), \quad (11)$$

где  $P = \sum_{j=1}^m p_j$ .

Арифметическая средняя  $\bar{x}(t_i)$  — состоятельная оценка математического ожидания  $M[X(t_i)]$ . Отсюда  $\bar{x}(t_i) \approx M[X(t_i)]$ .

Состоятельность — предельное свойство, относящееся к поведению оценки при стремлении объекта выборки к бесконечности. Состоятельная оценка обеспечивает практическую близость статистики  $\tilde{\theta}$  к теоретической числовой характеристике  $\theta$ , по крайней мере для большого числа  $n$  наблюдений. Однако при малом  $n$  даже состоятельная статистика может значительно отклоняться от теоретической числовой характеристики.

Функция  $\tilde{D}[x(t)]$ , равная эмпирической дисперсии каждого сечения семейства реализации случайной функции  $X(t)$ , — статистическая оценка дисперсии  $\tilde{D}[X(t)]$  случайной функции  $X(t)$ . Если выполнено  $m$  равноточных реализаций, то статистическая или эмпирическая дисперсия для аргумента  $t_i$  имеет вид

$$\tilde{D}[x(t_i)] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \{\delta_j[x(t_i)]\}^2. \quad (12)$$

Эмпирическую дисперсию простой арифметической средней вычисляют по формуле

$$\tilde{D}[\bar{x}(t_i)] = \frac{1}{m} \tilde{D}[x(t_i)]. \quad (13)$$

Заметим, что  $\delta_j[x(t_i)] = x_j(t_i) - \bar{x}(t_i)$  и  $\sum_{j=1}^m \delta_j[x(t_i)] = 0$ .

Если выполнено  $m$  неравноточных реализаций с весами  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , то вычисляют эмпирическую дисперсию наблюдения с весом, равным единице, или эмпирическую дисперсию единицы веса

$$\tilde{D}[x(t_i)] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p_j \{\delta_j[x(t_i)]\}^2. \quad (14)$$

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^m p_j \{\delta_j[x(t_i)]\} = 0.$$

Эмпирическая дисперсия общей арифметической средней принимает вид

$$\tilde{D}[\bar{x}(t_i)] = \tilde{D}[x(t_i)]/V\bar{P}. \quad (15)$$

Статистическая оценка дисперсии является состоятельной. Поэтому считают, что  $\tilde{D}[x(t_i)] \approx D[X(t_i)]$ .

Эмпирический стандарт определяют по формуле

$$\tilde{\sigma}[x(t_i)] = \sqrt{\tilde{D}[x(t_i)]}. \quad (16)$$

Такую положительную величину при равнооточных реализациях условно называют статистическим или эмпирическим стандартом одной реализации, а при неравнооточных реализациях — эмпирическим стандартом единицы веса. При этом  $\tilde{D}[x(t_i)]$  в первом случае вычисляют по формуле (12), а во втором случае — по формуле (14). Эмпирический стандарт арифметической средней составляет

$$\tilde{\sigma}[\bar{x}(t_i)] = \sqrt{\tilde{D}[\bar{x}(t_i)]}. \quad (17)$$

Статистической оценкой корреляционной функции или автокорреляционной функции случайного процесса  $X(t)$  есть функция, которая для каждой пары сечений семейства реализаций случайной функции  $X(t)$ , соответствующих аргументам  $t_s$  и  $t_k$ , равна эмпирическому корреляционному моменту

$$\tilde{K}[x(t_s), x(t_k)] = \frac{1}{m} \sum_{s \neq k} \{\delta[x(t_s)] \delta[x(t_k)]\}. \quad (18)$$

В этой формуле  $\delta[x(t_s)] = x(t_s) - \bar{x}(t_s)$  и  $\delta[x(t_k)] = x(t_k) - \bar{x}(t_k)$ .

Эмпирический корреляционный момент — состоятельная оценка теоретического корреляционного момента. Поэтому

$$\tilde{K}[x(t_s), x(t_k)] = \tilde{K}_{s,k} \approx K[X(t_s), X(t_k)] = K_{s,k}.$$

Эмпирический нормированный корреляционный момент или эмпирический коэффициент корреляции определяют по формуле

$$\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)] = \tilde{K}[x(t_s), x(t_k)] / \sigma[x(t_s)] \cdot \sigma[x(t_k)]. \quad (19)$$

Он является также состоятельной оценкой теоретического коэффициента корреляции. Отсюда

$$\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)] = \tilde{r}_{s,k} \approx r[X(t_s), X(t_k)] = r_{s,k}.$$

Второе требование, предъявляемое к статистическим оценкам, состоит в их несмещенности, т. е. в отсутствии системати-

ческой погрешности в самой статистике. При любом конечном и даже малом числе  $m$  реализаций должно выполняться условие  $M(\tilde{\Theta}) = \Theta$ .

Если  $M(\tilde{\Theta}) > \Theta$ , то статистика  $\tilde{\Theta}$  — положительно смещенная, при  $M(\tilde{\Theta}) < \Theta$  — отрицательно смещенная. Арифметическая средняя — несмещенная оценка математического ожидания, т. е.  $M[\bar{x}(t_i)] = M[X(t_i)]$ .

Однако не всякая состоятельная статистика несмещенная. Например, эмпирическая дисперсия, вычисляемая по формуле (12), служит состоятельной оценкой теоретической дисперсии, но она смещенная, так как  $M\{\tilde{D}[x(t_i)]\} \neq D[X(t_i)]$ . При этом  $M\{\tilde{D}[x(t_i)]\} < D[X(t_i)]$ . Следовательно, указанная статистическая оценка будет отрицательно смещенной. Выполнив необходимые преобразования, получаем

$$M\{\tilde{D}[x(t_i)]\} = \frac{m-1}{m} D[x(t_i)].$$

Для получения несмещенной статистической оценки теоретической дисперсии эмпирическую дисперсию вычисляют по формуле

$$\tilde{D}[x(t_i)] = \sum_{j=1}^m \{\delta_j[x(t_i)]\}^2 / m - 1. \quad (20)$$

Несмещенная эмпирическая дисперсия единицы веса имеет вид

$$\tilde{D}[x(t_i)] = \sum_{j=1}^m p_j \{\delta_j[x(t_i)]\}^2 / m - 1. \quad (21)$$

Эмпирические дисперсии арифметической средней вычисляются с помощью выражений (13) и (15). Легко убедиться в том, что поправка на смещение дисперсии приобретает существенное значение с уменьшением числа  $m$  реализаций случайной функции  $X(t)$ . При большом числе наблюдений ( $m > 30$ ) вычисления по выражениям (12), (20) и (14), (21) дают практически одинаковые результаты.

Обычно эмпирический стандарт определяют по формуле (16), в которую подставляют несмещенную статистическую оценку теоретической дисперсии. При равнооточных реализациях случайной функции  $X(t)$  получаем формулу Бесселя

$$\tilde{\sigma}[x(t_i)] = \sqrt{\sum_{j=1}^m \{\delta_j[x(t_j)]\}^2 / m - 1}.$$

Эмпирический стандарт единицы веса составляет

$$\tilde{\sigma}[x(t_i)] = \sqrt{\sum_{j=1}^m p_j \{\delta_j [x(t_i)]\}^2 / m - 1}.$$

Однако найденные таким путем эмпирические стандарты состоятельные, но смещенные оценки теоретических стандартов, так как  $M\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\} \neq \sigma[x(t_i)]$ . При этом  $M\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\} < \sigma[x(t_i)]$ . Такое же положение возникает при определении эмпирического стандарта арифметической средней по формуле (17). Несмещенная статистическая оценка теоретического стандарта имеет вид

$$\tilde{\sigma}[x(t_i)] = h \sqrt{\sum_{j=1}^m \{\delta_j [x(t_i)]\}^2 / m - 1}.$$

Несмещенную статистическую оценку теоретического стандарта вычисляют по формуле

$$\tilde{\sigma}[x(t_i)] = h \sqrt{\sum_{j=1}^m \{\delta_j [x(t_i)]\}^2 p_j / m - 1}.$$

Коэффициент  $h$  в этих формулах зависит от числа  $m$  реализаций случайной функции. При  $m=3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 20$  соответственно  $h=1,13; 1,09; 1,06; 1,05; 1,04; 1,03; 1,02; 1,01$ . Практически всегда считают, что  $h=1$ . Это объясняется тем, что во всех случаях  $\tilde{\sigma}[x(t)] \approx \sigma[X(t)]$ .

Степень такого приближения снижается с уменьшением числа  $m$  реализаций случайной функции. Из дальнейшего изложения видно, что это снижение значительно превышает вариации коэффициента  $h$ .

Вычисляемый по формуле (18) эмпирический корреляционный момент — отрицательно смещенная статистическая оценка теоретического корреляционного момента. Несмещенная его оценка

$$\tilde{K}[x(t_s), x(t_k)] = \sum_{s \neq k} \{\delta[x(t_s)] \delta[x(t_k)]\} / m - 1. \quad (22)$$

В этом случае  $M\{\tilde{K}[x(t_s), x(t_k)]\} = K\{\delta[X(t_k)] \delta[X(t_s)]\}$ . Переход от выражения (18) к (22) имеет смысл осуществлять при малом числе  $m$  реализаций случайной функции. Эмпирический коэффициент корреляции определяют по формуле (19) с учетом несмещенной оценки корреляционного момента и эмпирических стандартов, найденных по несмещенным оценкам дисперсий. При этом  $M\{\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]\} \neq r[X(t_s), X(t_k)]$ . Такое смещение статистической оценки теоретического коэффициента корреля-

ции возрастает с уменьшением числа  $m$  реализаций случайной функции  $X(t)$ . Однако при уменьшении  $m$  происходит настолько сильное снижение точности определения эмпирического коэффициента корреляции, что практически теряется необходимость учета его смещения.

Состоятельность и несмещенность оценки — не взаимно обусловленные свойства. Возможна несмещенная оценка, не обладающая состоятельностью. Например, такая ситуация возникает для арифметического среднего случайных величин, функция распределения которых  $F(x) = (1 - 1/2e^{-x})$ , где  $x \geq 0$ . Иногда несмещенной оценки не существует или она дает бессмысленный результат. Однако состоятельная оценка, асимптотическое распределение которой имеет конечное среднее, является асимптотически несмещенной.

Третье требование, предъявляемое к статистическим оценкам числовых характеристик случайной функции, сводится к их эффективности. Лучшей или более эффективной считается та статистика, дисперсия которой меньше. Она определяется обычным путем

$$D(\tilde{\Theta}) = M[\tilde{\Theta} - M(\tilde{\Theta})]^2 = M(\tilde{\Theta} - \Theta)^2.$$

В математической статистике приводятся критерии сравнительной эффективности статистических оценок, разбираются асимптотически эффективные оценки, исходя из того, что при конечном числе экспериментов нельзя получить дисперсию меньше некоторой минимально возможной величины  $D_{\min}$ , определяемой плотностью распределения. Если  $D(\tilde{\Theta})$  равна такой минимальной границе дисперсии  $D_{\min}$  (МГД-оценка), то считают, что  $D(\tilde{\Theta})$  — наилучшая оценка. Не будем останавливаться на неравенстве Крамера — Рао, лежащем в основе определения МГД-оценки, на минимально достижимой дисперсии, на которой основана МГД-оценка для случаев, когда это неравенство не выполняется, так как приведенные выше статистики уже отобраны по соображениям эффективности. Например, для определения центра группирования можно было бы воспользоваться не только математическим ожиданием, но и медианой или модой. Однако дисперсии эмпирических оценок этих показателей превышают дисперсию арифметической средней. Для  $m$  наблюдений дисперсия медианы принимает вид

$$D(Me) = \sigma^2(x) [\pi/2(m+2) + \pi^2/4(m+2)(m+4)].$$

Стандарт ее составит  $\sigma(Me) = c\sigma(x)/\sqrt{m}$ .

При этом  $c \geq 1$ . Для  $m=2, 4, 6, 10, 20$  и  $\infty$  получаем  $c=1,00; 1,09; 1,14; 1,16; 1,18; 1,21;$  и  $1,25$ . Арифметическая средняя — более эффективная оценка центра группирования, чем центр или середина размаха. Стандарт такой оценки —  $d/\sqrt{m}$ . Для тех же

значений  $m$  получаем  $d=1,00; 1,09; 1,19; 1,36; 1,69$  и  $\infty$ . Для отыскания действительного значения измеряемой величины с заранее заданной точностью применение арифметической средней требует меньшего числа измерений. Следовательно, требование эффективности оценки имеет технико-экономическое значение. В этом смысле арифметическая средняя не всегда выступает как эффективная оценка. Изложенные выше соображения относились к нормальному распределению погрешностей измерений. Если распределение плосковершинное, то наиболее эффективной оценкой центра группирования есть середина размаха и наименее эффективной — медиана. Этот вывод справедлив для  $3 < m \leq 20$  при  $-1,2 \leq E_k(x) < -0,8$ . Если же  $-0,8 \leq E_k(x) < 2,0$ , то наиболее эффективна арифметическая средняя. Для  $E_k(x) \approx 2$  арифметическая средняя и медиана одинаково эффективны.

Аналогично поступим и в оценке четвертого требования, предъявляемого к статистикам. Оно заключается в достаточности статистики и взято из теории информации. Статистическая оценка достаточна, если она вбирает в себя всю информацию, которую дают результаты наблюдений о числовой характеристике  $\Theta$  случайной функции  $X(t)$ . Изложенные выше эмпирические числовые характеристики — достаточные. В математической статистике это подтверждается использованием метода максимального правдоподобия (МП). Статистические оценки считают МП-оценками или правдоподобными, если при использовании их плотность распределения максимальна. Приведенные оценки оказались состоятельными и обладающими минимальной дисперсией. Распределение их при увеличении числа реализаций случайной функции приближается к нормальному, т. е. они — наилучшие асимптотически нормальные оценки (НАН-оценки). Эти оценки асимптотически эффективны, но чаще всего смещенные. Однако такие смещения не приводят к каким-либо осложнениям и учитываются сравнительно просто. Рассмотренные выше статистические оценки инвариантны, т. е. оценкой  $f(\Theta)$  является  $f(\tilde{\Theta})$ .

В классической теории погрешностей измерений широко используют оценки, полученные в результате применения способа наименьших квадратов. Эти НК-оценки обладают своими оптимальными свойствами, но в случае нормального распределения совпадают с МП-оценками. Для линейной модели, когда наблюдения имеют одинаковые дисперсии, попарно некоррелированы и являются линейными функциями неизвестных параметров, НК-оценки будут несмещенными и иметь минимальную дисперсию.

Обращаясь к технике статистических вычислений, необходимо иметь в виду, что в случае больших объектов выборки прибегают к их группировке. При вычислении эмпирических

моментов для уменьшения погрешностей округлений вводят поправки В. Шеппарда. Контроль вычислений выполняют, основываясь на связи между начальными и центральными моментами разных порядков

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = v_2 - v_1^2, \quad \mu_3 = v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3, \\ \mu_4 &= v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.\end{aligned}$$

Теория моментов применяется для характеристики распределения случайных величин, отыскания параметров законов распределения, сопоставления статистического и теоретического распределений, выравнивания или сглаживания статистического распределения.

## § 2. Точность и надежность статистических оценок характеристик случайных процессов

Арифметическая средняя  $\bar{x}(t_i)$ , определяемая по формулам (10) или (11) — статистическая оценка математического ожидания  $M[X(t_i)]$ . Точность этой статистики характеризуется эмпирической дисперсией  $\tilde{D}[\bar{x}(t_i)]$ , вычисляемой соответственно по формулам (13) и (15). Такая дисперсия находится по эмпирической дисперсии одной реализации (12) или эмпирической дисперсии единицы веса (14). Дисперсия случайной величины, эмпирической дисперсии одной реализации случайной функции  $X(t)$  имеет вид

$$D\{\tilde{D}[x(t_i)]\} = (a/m) - (2b/m^2) + (c/m^3).$$

В этой формуле

$$\begin{aligned}a &= \mu_4[X(t_i)] - \{\mu_2[X(t_i)]\}^2; \quad b = \mu_4[X(t_i)] - 2\{\mu_2[X(t_i)]\}^2; \\ c &= \mu_4[X(t_i)] - 3\{\mu_2[X(t_i)]\}^2,\end{aligned}$$

где  $\mu_2[X(t_i)] = M\{X(t_i) - M[X(t_i)]\}^2 = D[X(t_i)]$  — теоретический центральный момент второго порядка,  $\mu_4[X(t_i)] = M\{X(t_i) - M[X(t_i)]\}^4 = M\{\delta[X(t_i)]\}^4$  — теоретический центральный момент четвертого порядка.

Практически пользуются эмпирическими центральными моментами. Такой момент второго порядка будет

$$\tilde{\mu}'_2[x(t_i)] = \sum_{j=1}^m \{\delta_j[x(t_i)]\}^2/m = \tilde{D}'[x(t_i)].$$

Несмещенная его оценка вычисляется по формуле

$$\tilde{\mu}_2[x(t_i)] = \sum_{j=1}^m \{\delta_j[x(t_i)]\}^2/m - 1 = \tilde{D}[x(t_i)],$$

эмпирический центральный момент четвертого порядка — по формуле

$$\tilde{\mu}'_4 [x(t_i)] = \sum_{j=1}^m \{\delta_j [x(t_i)]\}^4 / m. \quad (23)$$

Такая состоятельная оценка теоретического центрального момента четвертого порядка — смещенная. Несмещенная оценка

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] &= m(m^2 - 2m + 3) \tilde{\mu}'_4 [x(t_i)] - \\ &- 3m(2m - 3) \{\tilde{\mu}_2 [x(t_i)]\}^2 / (m - 1)(m - 2)(m - 3). \end{aligned}$$

Относительный стандарт определения эмпирического центрального момента четвертого порядка имеет вид

$$\sigma \{ \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] \} / \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] \approx 3,2 / \sqrt{n}.$$

Заметим, что эмпирические центральные моменты  $\tilde{\mu}_3(x)$  и  $\tilde{\mu}_4(x)$  называют эмпирическими кумулянтами или К-статистиками Р. Фишера.

Если число  $m$  реализаций случайной функции большое, то  $\tilde{\mu}_4 [x(t_i)] \approx \mu'_4 [x(t_i)]$ . В случае малого  $m$  получается большая погрешность определения эмпирического центрального момента четвертого порядка и практическая необходимость в несмещенной оценке отпадает. Поэтому такой момент достаточно вычислять по формуле (23). Полагают, что

$$\tilde{\mu}_2 [x(t_i)] \approx \mu [X(t_i)] \quad \text{и} \quad \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] \approx \mu_4 [X(t_i)].$$

Тогда находят

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] - \{\tilde{\mu}_2 [x(t_i)]\}^2, \quad \tilde{b} = \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] - 2\{\tilde{\mu}_2 [x(t_i)]\}^2, \\ \tilde{c} &= \tilde{\mu}_4 [x(t_i)] - 3\{\tilde{\mu}_2 [x(t_i)]\}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\tilde{D} \{ \tilde{D} [x(t_i)] \} = (\tilde{a}/m) - (2\tilde{b}/m^2) + (\tilde{c}/m^3).$$

Второй и третий члены в этой формуле небольшие. Пренебрегая ими, получаем

$$\tilde{D} \{ \tilde{D} [x(t_i)] \} \approx \tilde{a}/m. \quad (24)$$

Если распределение флуктуаций нормальное, то

$$\mu_4 [X(t_i)] = 3 \{D [X(t_i)]\}^2.$$

Распространяя это равенство на статистические оценки, выражение (24) запишем так:

$$\tilde{D}\{\tilde{D}[x(t_i)]\} \approx 2\{\tilde{D}[x(t_i)]\}^2/m. \quad (25)$$

Относительный стандарт эмпирической дисперсии принимает вид

$$\tilde{\sigma}\{\tilde{D}[x(t_i)]\}/\tilde{D}[x(t_i)] \approx 1,4/\sqrt{n}.$$

На основе формулы (24) получают эмпирическую дисперсию эмпирического стандарта

$$\begin{aligned} \tilde{D}\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\} &\approx \tilde{D}\{\tilde{D}[x(t_i)]\}/4\tilde{D}[x(t_i)] = \\ &\tilde{D}[x(t_i)]\{1 + 0,5\tilde{E}[x(t_i)]\}/2m, \end{aligned}$$

которую вычисляют с помощью эмпирического эксцесса или куртозиса, характеризующего крутость или островершинность кривой распределения и определяемого по формуле

$$\tilde{E}[x(t_i)] = \frac{\tilde{\mu}_4[x(t_i)]}{\{\tilde{D}[x(t_i)]\}^2} - 3.$$

Эмпирический эксцесс — приближенное значение теоретического эксцесса, т. е.

$$\tilde{E}[x(t_i)] \approx E[X(t_i)] = \frac{\mu_4[X(t_i)]}{\{D[X(t_i)]\}^2} - 3.$$

Если распределение нормальное, то  $\tilde{\mu}_4[x(t_i)]/\tilde{\sigma}^4[x(t_i)] = 3$  и  $E_k(x) = 0$ . Эксцесс может быть положительным (при острой и высокой вершине кривой распределения) и отрицательным (при низкой и пологой вершине). Иногда отрицательный эксцесс называют дефектом.

Эмпирический эксцесс находится со стандартом

$$\begin{aligned} \sigma\{\tilde{E}[x(t_i)]\} &= \sqrt{24m(m-2)(m-3)/(m-1)^2(m+3)(m+5)} \approx \\ &\approx \sqrt{24(m-3)/(m+3)(m+5)}. \end{aligned}$$

Необходимость определения эксцесса возникает для предварительной оценки нормальности распределения флюктуаций. При этом вычисляют сначала показатель симметричности распределения — асимметрию. Если распределение симметричное, то центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Поэтому каждый такой момент может быть использован для оценки симметричности распределения. Обычно пользуются третьим центральным моментом и вычисляют коэффициент асимметрии или эмпирическую асимметрию с помощью выражения

$$\tilde{S}[x(t_i)] = \tilde{\mu}_3[x(t_i)]/\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\}^3. \quad (26)$$

Эмпирическая асимметрия — приближенная характеристика теоретической асимметрии

$$\tilde{S}[x(t_i)] \approx S[X(t_i)] = \mu_3[X(t_i)]/\{\sigma[X(t_i)]\}^3.$$

Если распределение симметричное, то  $S[x(t_i)] = 0$ . Нормальная кривая распределения имеет характерную симметричную куполообразную форму. Для определения эмпирической асимметрии находят статистический центральный момент третьего порядка по флюктуациям  $\delta_i(x) = x_i - \bar{x}$ . Его вычисляют по формуле

$$\tilde{\mu}'_3(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i^3(x)/n.$$

Однако такая оценка теоретического третьего центрального момента — смещенная, т. е.  $M[\tilde{\mu}'_3(x)] \neq \mu_3(x)$ . Несмещенную оценку находят из выражения  $\tilde{\mu}_3(x) = n^2 \mu'_3(x)/(n-1)(n-2)$ .

Стандарт определения эмпирического центрального момента третьего порядка будет  $\tilde{\sigma}[\tilde{\mu}_3(x)] \approx 3,9\tilde{\sigma}^3(x)/\sqrt{n}$ .

Асимметрия может быть положительной и отрицательной. Эмпирическая асимметрия находится со стандартом

$$\begin{aligned} \sigma[\tilde{S}_k(x)] &= \sqrt{6(n-1)/(n+1)(n+3)} \approx \\ &\approx \sqrt{6/n+3} \approx \sqrt{6/n}. \end{aligned}$$

Ее сходимость к теоретической асимметрии возрастает по мере увеличения числа  $n$  наблюдений. Однако при малом числе наблюдений асимметрия находится довольно грубо. Она считается существенной, если превышает  $\sigma[\tilde{S}_k(x)]$ . Существуют и другие способы определения асимметрии (К. Пирсона, Д. Юла и др.).

Асимметрия и эксцесс арифметической средней вычисляются по формулам

$$S[\bar{x}(t_i)] = S[x(t_i)]/\sqrt{n} \quad \text{и} \quad E[\bar{x}(t_i)] = E[x(t_i)]/\sqrt{n}. \quad (27)$$

В случае нормального распределения флюктуаций  $S[X(t_i)] = E[X(t_i)] = 0$ .

С учетом условий (26) и (27) эти равенства распространяются на эмпирические асимметрию и эксцесс. Проверка нормальности распределения флюктуаций с помощью асимметрии и эксцесса довольно грубая. Однако она достаточна для оценки целесообразности использования формул, рассчитанных на нормальное распределение флюктуаций. Если распределение флюктуаций нормальное, то точность эмпирической дисперсии

оценивают по выражению (25). Стандарт эмпирического стандарта имеет вид

$$\tilde{\sigma}\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\} \approx \{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\}/\sqrt{2m}.$$

При вычислении эмпирического стандарта по формуле Бесселя используют выражение

$$\tilde{\sigma}\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\} \approx \{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\}/\sqrt{2(m-1)}.$$

По приведенным формулам получают точечные оценки числовых характеристик случайных функций:  $\bar{x}(t_i)$ ,  $\tilde{D}[x(t_i)]$ ,  $\tilde{\sigma}[x(t_i)]$ ,  $\tilde{D}[\bar{x}(t_i)]$ ,  $\tilde{\sigma}[\bar{x}(t_i)]$ ,  $\tilde{D}\{\tilde{D}[x(t_i)]\}$  и  $\tilde{\sigma}\{\tilde{\sigma}[x(t_i)]\}$ .

Точность эмпирического стандарта арифметической средней, определяемого по формуле (17), имеет следующую оценку:

$$\tilde{\sigma}\{\tilde{\sigma}[\bar{x}(t_i)]\} \approx \{\tilde{\sigma}[\bar{x}(t_i)]\}/\sqrt{2(m-1)}.$$

Теоретически создаваемая модель нормального распределения погрешностей измерений предусматривает изменение их от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В действительности, все погрешности не превышают по модулю некоторой величины предельной погрешности, зависимой от условий измерений. Поэтому погрешности измерений подчиняются ограниченному или усеченному закону распределения. Такое обстоятельство обусловлено и тем, что при выполнении геодезических и других технических измерений соблюдаются определенные допуски. Результаты измерений, сопровождаемые погрешностью, превышающей допустимую, считают неправильными. Следовательно, вариации случайных погрешностей сужаются и результаты измерений не являются случайной повторной выборкой. Они образуются в процессе преднамеренной или пристрастной выборки. Из обработки исключают все результаты, вызывающие какие-либо сомнения. Если нормальная плотность распределения случайной погрешности, изменяющейся в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  будет  $\varphi(x)$ , то плотность ее распределения, изменяющейся в пределах от  $a$ , до  $b$ , — иная. Вне указанного интервала такая плотность распределения  $\varphi_1(x) = 0$ , а в его пределах, т. е. для  $a \leq x \leq b$ ,

$$\varphi_1(x) = \frac{c}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} e^{-[x-M(x)]^2/2\sigma^2(x)}. \quad (28)$$

При этом

$$\begin{aligned} c &= 1/F[b - M(x)/\sigma(x)] - F[a - M(x)/\sigma(x)] = \\ &= 1/\Phi(z_b) - \Phi(z_a). \end{aligned} \quad (29)$$

В формулах (28), (29)  $M(x)$  и  $\sigma(x)$  — параметры неусеченного нормального распределения,  $z_a = [a - M(x)]/\sigma(x)$ ,  $z_b = [b - M(x)]/\sigma(x)$ ,  $z = x - M(x)/\sigma(x)$ , нормированная функция Лапласа  $\Phi(z) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dz. \text{ Напомним, что } \Phi(0) = 0, \Phi(-\infty) = -0,5,$$

$\Phi(+\infty) = 0,5$  и  $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ . Кроме того,  $F(z) = 0,5 + \Phi(z)$ . Значения нормированной функции Лапласа приведены в табл. 2. Плотность распределения нормированной случайной величины  $z$  имеет вид

$$\varphi_1(z) = c\varphi(z)/\sigma(x).$$

Таблица 2

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
0,0	0,0000	1,0	0,3413	2,0	0,4772	3,0	0,4987
0,1	0,0398	1,1	0,3643	2,1	0,4821	3,1	0,4990
0,2	0,0793	1,2	0,3849	2,2	0,4861	3,2	0,4993
0,3	0,1179	1,3	0,4032	2,3	0,4893	3,3	0,4995
0,4	0,1554	1,4	0,4192	2,4	0,4918	3,4	0,4997
0,5	0,1915	1,5	0,4332	2,5	0,4938	3,5	0,4998
0,6	0,2257	1,6	0,4452	2,6	0,4953	3,7	0,4999
0,7	0,2580	1,7	0,4554	2,7	0,4965	4,0	0,49997
0,8	0,2881	1,8	0,4641	2,8	0,4974	4,5	0,499997
0,9	0,3159	1,9	0,4713	2,9	0,4981	5,0	0,4999997

Нормированные нормальные плотности распределения  $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$  приведены в табл. 3. Функция распределения для  $a < x < b$  определяется по формуле

$$F_1(z) = c[\Phi(z_b) - \Phi(z_a)].$$

Если  $x \leq a$ , то  $F_1(z) = 0$ . В случае  $x > b$  имеем  $F_1(z) = 1$ . Математическое ожидание усеченной случайной величины  $M_1(x) = M(x) + B\sigma(x)$ .

При этом  $B = [\varphi(z_a) - \varphi(z_b)] / [\Phi(z_b) - \Phi(z_a)]$ .

Дисперсию усеченной случайной величины определяют из выражения

$$D_1(x) = D(x) \{1 - B^2 - c[z_b\varphi(z_b) - z_a\varphi(z_a)]\}.$$

Стандарт имеет вид  $\sigma_1(x) = \sqrt{D_1(x)}$ .

Для симметрично усеченного распределения, когда  $a = -b$ , все нечетные центральные моменты равны нулю. Поэтому  $M_1(x) = M(x)$ .

$$\text{Дисперсия } D_1(x) = D(x) \left[ 1 - \frac{z_b\varphi(z_b)}{\Phi(z_b)} \right].$$

Экссесс симметрично усеченного нормального распределения составляет

$$E_k(x) = (\gamma^2 - 1)(3 - z_b^2\gamma^2),$$

где  $\gamma = \sigma(x)/\sigma_1(x)$ .

Он будет отрицательным. При геодезических измерениях предельные погрешности вычисляют по правилам  $2\sigma$  или  $3\sigma$ , т. е.  $z_b=2$  или  $3$ . Тогда эксцесс будет соответственно  $-0,67$  или  $-0,17$ . Н. И. Идельсон полагал, что одним из важнейших положений современной теории погрешностей является теорема А. Эддингтона, которая утверждает, что объединение нескольких групп измерений с нормально распределенными случайными погрешностями приводит к нормально распределенной совокупности лишь тогда, когда стандарты отдельных групп одинаковы. Практически на соблюдение такого условия трудно

Таблица 3

$z$	$\varphi(z)$	$z$	$\varphi(z)$	$z$	$\varphi(z)$	$z$	$\varphi(z)$	$z$	$\varphi(z)$
0,0	0,399	1,0	0,242	2,0	0,054	3,0	0,0044	4,0	0,000134
0,1	0,397	1,1	0,218	2,1	0,044	3,1	0,0033	4,1	0,000089
0,2	0,391	1,2	0,194	2,2	0,035	3,2	0,0024	4,2	0,000059
0,3	0,381	1,3	0,171	2,3	0,029	3,3	0,0017	4,3	0,000039
0,4	0,368	1,4	0,150	2,4	0,022	3,4	0,0012	4,4	0,000025
0,5	0,352	1,5	0,130	2,5	0,018	3,5	0,0009	4,5	0,000016
0,6	0,333	1,6	0,111	2,6	0,014	3,6	0,0006	4,6	0,000010
0,7	0,312	1,7	0,094	2,7	0,010	3,7	0,0004	4,7	0,000006
0,8	0,290	1,8	0,079	2,8	0,008	3,8	0,0003	4,8	0,000004
0,9	0,266	1,9	0,066	2,9	0,006	3,9	0,0002	4,9	0,000002

рассчитывать. Поэтому строгая нормальность распределения погрешностей измерений не выполняется и рассматриваемая совокупность будет обладать положительным эксцессом. В ней большие по модулю погрешности измерений встречаются чаще, чем в нормальной совокупности. Однако такая картина возникает лишь тогда, когда на результаты измерений не накладываются технические допуски. С учетом их действия образуется усеченное нормальное распределение или близкое к нему с отрицательным эксцессом. Появление такого эксцесса является закономерным для композиции законов распределений, встречающихся в практике геодезических измерений. Например, почти всегда действуют попутные погрешности округлений при отчетах, имеющие равномерное распределение с отрицательным эксцессом, равным  $-1,2$ . Для суммарной случайной погрешности  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , где эксцессы погрешностей  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  будут  $E(\Delta_1)$  и  $E(\Delta_2)$ , получаем эксцесс

$$E(\Delta) = [E(\Delta_1)\sigma^4(\Delta_1) + E(\Delta_2)\sigma^4(\Delta_2)]/[\sigma^2(\Delta_1) + \sigma^2(\Delta_2)]^2.$$

Если  $\Delta_1$  имеет нормальное распределение с эксцессом  $E(\Delta_1) = 0$ , а  $\Delta_2$  — равномерное распределение с эксцессом  $E(\Delta_2) = -1,2$ , получаем  $-1,2 < E(\Delta) < 0$ . Действие центральной предельной теоремы проявляется в том, что с ростом числа  $n$  наблюдений асимметрия и эксцесс убывают. Случайная вели-

чина  $x$  приобретает нормальное распределение, асимметрия и эксцесс приближаются к нулю. Существуют и другие способы определения эксцесса. Например, по Линдбергу необходимо подсчитать число  $s$  флюктуаций в пределах от  $-0,5\tilde{\sigma}(x)$  до  $+0,5\tilde{\sigma}(x)$  и для ряда  $n$  наблюдений вычислить эксцесс по формуле

$$\tilde{E}_k(x) = 100 \frac{s}{n} - 38,29.$$

Его стандарт  $\sigma[\tilde{E}_k(x)] \approx 42/\sqrt{n}$ .

При проверке распределения применяют среднюю погрешность

$$\tilde{\Theta}(x) = \sum_{i=1}^n |\delta_i(x)|/n.$$

Дисперсия этой погрешности

$$D[\tilde{\Theta}(x)] \approx \frac{\tilde{\sigma}^2(x)}{n} (1 - 2/\pi).$$

Следовательно, средняя погрешность — менее эффективная оценка рассеивания по сравнению со средней квадратической погрешностью. Однако при нормальном распределении она приобретает контрольное значение, так как  $\tilde{\Theta}(x) \approx 0,8\tilde{\sigma}(x)$ .

Контрольное значение имеет и медианная или срединная погрешность — середина вариационного ряда флюктуаций  $\delta_i(x)$

При нормальном распределении эта погрешность  $\tilde{r}(x)$  — эмпирическое значение вероятной погрешности  $r(x)$ , для которой вероятность появления погрешностей больше или меньше равна половине, т. е.  $2\Phi[r(x)] = 0,5$ . Для проверки используют соотношение  $\tilde{r}(x) \approx 2\tilde{\sigma}(x)/3$ .

Однако лучше использовать критерий  $z = \tilde{\Theta}(x)/\tilde{\sigma}(x)$ .

Гипотеза о нормальности распределения отвергается, если  $z$  выходит за пределы интервала  $z_a < z < z_b$ , где значения  $z_a$  и  $z_b$  берут из табл. 4 в зависимости от числа  $n$  наблюдений и принятой доверительной вероятности  $P$ .

Суждение о теоретических числовых характеристиках случайной функции  $X(t)$  в результате эксперимента приобретает с некоторой доверительной вероятностью  $P$ . Задавшись  $P$ , строят доверительный интервал, накрывающий теоретическую числовую характеристику. Теория доверительных интервалов разработана в основном Р. Фишером и Ю. Нейманом. Доверительные интервалы могут быть центральными. Для математического ожидания  $M[X(t_i)]$  доверительный интервал — центральный и имеет вид

$$\bar{x}(t_i) - \gamma\sigma[\bar{x}(t_i)] < M[X(t_i)] < \bar{x}(t_i) + \gamma\sigma[\bar{x}(t_i)].$$

Таблица 4

n	P=0,95		P=0,99	
	z <sub>a</sub>	z <sub>b</sub>	z <sub>a</sub>	z <sub>b</sub>
30	0,74	0,86	0,71	0,88
35	0,74	0,86	0,72	0,88
40	0,75	0,86	0,72	0,87
50	0,75	0,85	0,73	0,87
70	0,76	0,84	0,74	0,86
100	0,76	0,83	0,75	0,85
150	0,77	0,83	0,76	0,84
200	0,77	0,82	0,76	0,83
300	0,78	0,82	0,77	0,83
500	0,78	0,81	0,78	0,82
700	0,79	0,81	0,78	0,82
1000	0,79	0,81	0,78	0,81

Таблица 5

k	γ							
	0,90	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
1	6,31	12,71	—	—	—	—	—	—
2	2,92	4,30	6,20	6,96	9,92	14,09	—	—
3	2,35	3,18	4,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,50	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	2,10	2,57	3,16	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,94	2,45	2,97	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,90	2,36	2,84	3,00	3,50	4,03	4,78	5,41
8	1,86	2,31	2,75	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,68	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,63	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
12	1,78	2,18	2,56	2,68	3,06	3,43	3,93	4,32
14	1,76	2,14	2,51	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
16	1,75	2,12	2,47	2,58	2,92	3,25	3,69	4,02
18	1,73	2,10	2,44	2,55	2,88	3,15	3,61	3,92
20	1,72	2,09	2,42	2,53	2,84	3,12	3,55	3,85
25	1,71	2,06	2,38	2,49	2,79	3,08	3,45	3,72
30	1,70	2,04	2,36	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
>30	1,64	1,96	2,24	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29

Коэффициент  $\gamma$  (табл. 5) зависит от принятой доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $k=m-1$ . При этом предполагают, что распределение флюктуаций нормальное. Тогда нормированная случайная величина  $z = \bar{x}(t) - M[X(t)] / \sqrt{\sigma[x(t)]}$  имеет распределение Стьюдента (В. Госсета) и коэффициент  $\gamma$  определяется из уравнения

$$P = 2B \int_0^{\gamma} \left(1 + \frac{z^2}{k}\right)^{-0,5(k+1)} dz.$$

В этом уравнении

$$B = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) / \sqrt{k\pi} \Gamma(k/2).$$

С увеличением числа степеней свободы распределение Стьюдента приближается к нормальному. Для  $k > 30$  оно практически не отличается от нормального. Некоторая неопределенность и расплывчатость оценки  $M[X(t_i)]$  при малом числе измерений обусловлена не недостатками расчета доверительного интервала по Стьюденту, а малой информацией, приобретаемой в случае малой выборки. С ростом числа степеней свободы доверительный интервал сужается. По заданной доверительной вероятности  $P$  и числу степеней свободы  $k = m - 1$  строится доверительный интервал, накрывающий теоретический стандарт  $\sigma[X(t_i)]$ . Он имеет вид

$$z_1 \tilde{\sigma}[x(t_i)] < \sigma[X(t_i)] < z_2 \tilde{\sigma}[x(t_i)].$$

По предложению А. Н. Колмогорова принято, что  $P\{\sigma[X(t_i)] > z_2 \tilde{\sigma}[x(t_i)]\} = P\{\sigma[X(t_i)] < z_1 \tilde{\sigma}[x(t_i)]\} = 0,5(1 - P)$ . Тогда коэффициенты  $z_1$  и  $z_2$  определяются отдельно. Полагая, что случайные погрешности обладают нормальным распределением,

Таблица 6

k	P					
	0,99		0,95		0,90	
	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>
2	—	—	0,52	6,28	0,58	4,42
3	0,48	6,47	0,57	3,73	0,62	2,92
4	0,52	4,40	0,60	2,87	0,65	2,37
5	0,55	3,48	0,62	2,45	0,67	2,09
6	0,57	2,98	0,64	2,20	0,69	1,92
7	0,59	2,66	0,66	2,04	0,70	1,80
8	0,60	2,44	0,68	1,92	0,72	1,71
9	0,62	2,28	0,69	1,83	0,73	1,65
10	0,63	2,15	0,70	1,76	0,74	1,59
12	0,65	1,98	0,72	1,65	0,76	1,52
14	0,67	1,85	0,73	1,58	0,77	1,46
16	0,68	1,76	0,74	1,52	0,78	1,42
18	0,70	1,70	0,76	1,48	0,79	1,38
20	0,71	1,64	0,78	1,44	0,80	1,36
30	0,75	1,48	0,80	1,34	0,83	1,27
40	0,77	1,39	0,82	1,28	0,85	1,23
50	0,79	1,34	0,84	1,24	0,86	1,20
60	0,81	1,30	0,85	1,22	0,87	1,18
70	0,82	1,27	0,86	1,20	0,88	1,16
80	0,83	1,25	0,87	1,18	0,89	1,15
100	0,84	1,22	0,88	1,16	0,90	1,13
120	0,89	1,15	0,91	1,11	0,92	1,11

эти коэффициенты вычислены для разных доверительных вероятностей  $P$  и числа степеней свободы  $k = m - 1$  (табл. 6). Из этой таблицы видно, что доверительные границы при оценке  $\sigma[X(t_i)]$  расположены резко асимметрично, особенно для малого числа степеней свободы.

Таблица 7

$k$	$P$					
	0,95		0,99		0,9973	
	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$
2	0,36	4,44	0,31	9,99	0,28	19,24
3	0,44	2,95	0,38	6,13	0,35	7,98
4	0,49	2,40	0,43	3,69	0,39	5,17
5	0,53	2,12	0,47	3,03	0,43	3,99
6	0,56	1,95	0,50	2,65	0,46	3,35
7	0,59	1,83	0,52	2,40	0,49	2,95
8	0,61	1,76	0,54	2,23	0,51	2,68
9	0,63	1,68	0,56	2,10	0,53	2,49
10	0,64	1,63	0,58	2,00	0,54	2,34
12	0,67	1,55	0,61	1,86	0,57	2,13
14	0,69	1,49	0,63	1,76	0,59	1,92
16	0,71	1,45	0,65	1,68	0,61	1,88
18	0,72	1,42	0,66	1,63	0,63	1,80
20	0,73	1,39	0,68	1,58	0,64	1,73
25	0,76	1,34	0,71	1,49	0,67	1,62
30	0,78	1,30	0,73	1,44	0,70	1,54
40	0,80	1,25	0,76	1,36	0,73	1,45
50	0,82	1,22	0,78	1,32	0,75	1,39
60	0,84	1,20	0,80	1,28	0,77	1,34

Существуют и другие способы построения доверительных интервалов. При минимизировании разности  $z_2 - z_1$  получают интервалы меньшей длины (табл. 7), что имеет значение при малом числе измерений. Можно найти значения  $z_1$  и  $z_2$ , соответствующие условию минимума  $z_2/z_1$ . Часто ограничиваются построением одностороннего доверительного интервала

$$P \{ \tilde{\sigma} [x(t_i)] \leq z_p \sigma [X(t_i)] \} = P.$$

Значения  $z_p$  берут из табл. 8.

Доверительный интервал характеризует надежность или достоверность статистической оценки (характеристики). Он строится относительно теоретической или статистической характеристики. Чем больше доверительная вероятность при заданном интервале или чем меньше доверительный интервал при заданной вероятности, тем более достоверная статистическая характеристика. Для построения доверительного интервала нужно знать закон распределения статистической характеристики. Ес-

ли такая характеристика получена на основании закона больших чисел и количество экспериментов велико, то обычно вступает в действие центральная предельная теорема теории вероятностей, и распределение статистической характеристики становится приближенно нормальным. Это используется в приведенных ранее расчетах доверительных интервалов.

Таблица 8

P		k	P		k	P		
0,95	0,99		0,95	0,99		0,95	0,99	
1	1,96	2,58	12	1,32	1,48	70	1,14	1,20
2	1,73	2,15	14	1,30	1,44	80	1,13	1,18
3	1,61	1,94	16	1,28	1,41	100	1,12	1,16
4	1,54	1,82	18	1,27	1,39	150	1,09	1,13
5	1,49	1,74	20	1,25	1,37	200	1,08	1,11
6	1,45	1,67	25	1,23	1,33	300	1,07	1,09
7	1,42	1,62	30	1,21	1,30	500	1,05	1,07
8	1,39	1,58	40	1,18	1,26	1000	1,04	1,05
9	1,37	1,55	50	1,16	1,23			
10	1,35	1,52	60	1,15	1,21			

Таким образом, при решении многих задач математико-статистической обработки результатов измерений мы сталкиваемся с необходимостью знания законов распределения случайных функций. Чаще всего закон распределения устанавливается на основе физических соображений. Однако в этом случае почти всегда нужно гипотетически проверять построенный закон путем экспериментального изучения характера распределения случайных погрешностей измерений. Реже закон распределения определяется статистическим путем. Тогда становится обязательным его физическое обоснование.

Для экспериментального отыскания закона распределения случайной величины  $X$  производят  $n$  независимых наблюдений этой величины:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если число наблюдений, в которых величина  $X$  будет менее  $x_i$ , равно  $m_i$ , то статистический интегральный закон можно представить в виде

$$\tilde{F}(x_i) = m_i/n,$$

где  $n = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Он выражается прерывной (ступенчатой) функцией независимо от того, является случайная величина  $X$  дискретной или непрерывной. Статистическая вероятность (частота)  $\tilde{p} = m_i/n$  определяется со стандартом  $\sigma(\tilde{p}) \approx \sqrt{p(1-p)/n}$ .

Если  $p$  стремится к нулю или единице, то  $\sigma(p)$  стремится к нулю. Максимальное значение стандарта соответствует  $p=0,5$ . Стандарт эмпирического интегрального закона распределения равен относительному стандарту определения статистической вероятности, т. е.

$$\sigma[\tilde{F}(x)] = \sqrt{F(x)[1-F(x)]}/\sqrt{n}.$$

Для определения статистического дифференциального закона распределения диапазон значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  делят на  $l$  равных участков  $\Delta x$ , каждый из которых хорошо аппроксими-

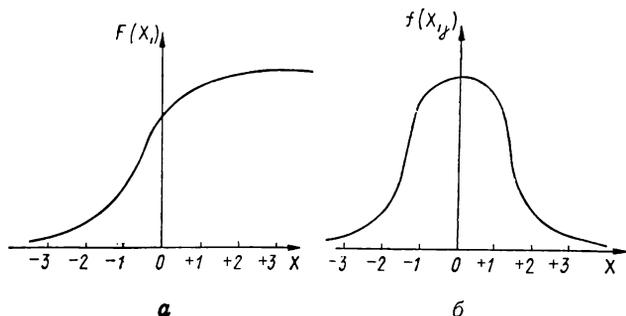


Рис. 6

руется прямолинейным отрезком. Для каждого участка от  $x_i$  до  $x_j$  находим число наблюдений  $m_{ij}$  и вычисляем статистическую вероятность (частоту)  $p_{ij}=m_{ij}/n$ . Тогда статистический дифференциальный закон распределения будет

$$\tilde{f}\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) = \tilde{f}(x_{ij}) = p_{ij}/(x_j - x_i).$$

Стандарт эмпирической плотности распределения имеет вид

$$\sigma[\tilde{f}(x_{ij})] = \sigma(\Delta F)/\Delta x,$$

где  $\Delta x = x_j - x_i$ ,  $\sigma(\Delta F) = \sqrt{[F(x_j) - F(x_i)][1 - F(x_j) + F(x_i)]}/\sqrt{n}$ .

Графики интегрального (а) и дифференциального (б) законов распределения приведены на рис. 6. Они аппроксимированы кривыми нормального закона распределения. Теоретический закон распределения находится в пределах некоторого доверительного интервала. Для интегрального закона распределения этот интервал имеет следующий вид:

$$\tilde{F}[x(t)] - \Delta F \leq F[X(t)] \leq \tilde{F}[x(t)] + \Delta F.$$

При этом  $\Delta F \approx a \sqrt{\tilde{F}[x(t)]\{1 - \tilde{F}[x(t)]\}}/\sqrt{n}$ .

Строится доверительный интервал с заданной вероятностью  $P$ , на основании которой определяется коэффициент  $a$ . Для его отыскания используют равенство  $P = 2\Phi(a)$ .

Аналогично находится доверительный интервал для дифференциального закона распределения  $\tilde{f}(x) - \Delta f \leq \tilde{f}(x) \leq f(x) + \Delta f$ .

В этом случае  $\Delta f$  определяется по формуле

$$P \approx 2\Phi \left\{ \Delta f / \sigma [\tilde{f}(x)] \right\}.$$

Статистические законы распределения находят также по статистическим числовым характеристикам. При этом исключительную роль играет нормальный закон распределения. Закон распределения, близкий к нормальному, может быть разложен в ряд, основанный на нормальном законе распределения. Коэффициенты этого ряда выражаются с помощью числовых характеристик случайной величины. Плотность распределения  $f(z)$  центрированной и нормированной случайной величины  $z$  представляют в виде ряда Шарлье

$$f(z) = c_0 \varphi^{(0)}(z) + \frac{c_1}{1!} \varphi^{(1)}(z) + \frac{c_2}{2!} \varphi^{(2)}(z) + \dots,$$

где  $c_0, c_1, c_2, \dots$  — постоянные коэффициенты.

При этом  $z = [x - M(x)] / \sigma(x)$ . Плотность нормального распределения составляет

$$\varphi^{(0)}(z) = e^{-0,5z^2} / \sqrt{2\pi}.$$

Последовательные производные такой функции будут  $\varphi^{(1)}(z) = d\varphi(z)/dz$ ,  $\varphi^{(2)}(z) = d^2\varphi(z)/dz^2$ , ...

Для  $z \geq 0$  они приведены в табл. 9. Связь их с плотностью нормального распределения имеет вид

$$d^n \varphi(z) / dz^n = (-1)^n H_n(z) \varphi(z).$$

Полиномы Чебышева — Эрмита  $n$ -ой степени будут

$$H_n(z) = (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(z)}{\varphi^{(0)}(z)}.$$

Для их вычисления достаточно знать, что  $H_0(z) = 1$ ,  $H_1(z) = z$  и пользоваться рекуррентной формулой  $H_{k+1}(z) - zH_k(z) + kH_{k-1}(z) = 0$ .

Поэтому  $H_3(z) = z^3 - 3z$ ,  $H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3$ ,  $H_5(z) = z^5 - 10z^3 + 15z$ ,  $H_6(z) = z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15$ .

Следовательно,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k}{k!} H_k(z) \varphi^{(0)}(z)$ .

Полиномы Чебышева—Эрмита обладают свойством ортогональности. Коэффициенты ряда Шарлье определяются с помощью уравнения

$$c_k = \frac{1}{k!} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) H_k(z) dz.$$

Выражая их через центральные моменты, получаем  $c_0 = 1$ ;  $c_1 = 0$ ;  $c_2 = 0$ ;  $c_3 = -\mu_3(z)/3!$ ;  $c_4 = [\mu_4(z) - 3]/4!$ ;  $c_5 = -[\mu_5(z) - 10\mu_3(z)]/5!$ ;  $c_6 = [\mu_6(z) - 15\mu_4(z) + 30]/6!$

Таблица 9

$z$	$\varphi^{(0)}(z)$	$\varphi^{(1)}(z)$	$\varphi^{(2)}(z)$	$\varphi^{(3)}(z)$	$\varphi^{(4)}(z)$	$\varphi^{(5)}(z)$	$\varphi^{(6)}(z)$
0,0	0,3989	0,0000	-0,3989	0,0000	1,1968	0,0000	-5,9841
0,1	0,3970	-0,0397	-0,3930	0,1187	1,1671	-0,5915	-5,7762
0,2	0,3910	-0,0782	-0,3754	0,2315	1,0799	-1,1420	-5,1711
0,3	0,3814	-0,1144	-0,3471	0,3330	0,9413	-1,6142	-4,2223
0,4	0,3683	-0,1473	-0,3094	0,4184	0,7607	-1,9777	-3,0124
0,5	0,3521	-0,1760	-0,2640	0,4841	0,5501	-2,2114	-1,6448
0,6	0,3332	-0,1999	-0,2133	0,5278	0,3283	-2,3052	-0,2331
0,7	0,3122	-0,2186	-0,1592	0,5486	0,0937	-2,2601	1,1135
0,8	0,2897	-0,2318	-0,1043	0,5469	-0,1247	-2,0880	2,2938
0,9	0,2661	-0,2395	-0,0506	0,5244	-0,3203	-1,8095	3,2303
1,0	0,2420	-0,2420	0,0000	0,4839	-0,4839	-1,4518	3,8715
1,1	0,2178	-0,2396	0,0458	0,4890	-0,6091	-1,0458	4,1958
1,2	0,1942	-0,2330	0,0854	0,3635	-0,6926	-0,6230	4,2103
1,3	0,1714	-0,2228	0,1182	0,2918	-0,7341	-0,2130	3,9475
1,4	0,1497	-0,2096	0,1437	0,2180	-0,7364	0,1590	3,4595
1,5	0,1295	-0,1943	0,1619	0,1457	-0,7042	0,4736	2,8109
1,6	0,1109	-0,1775	0,1730	0,0781	-0,6440	0,7181	2,0712
1,7	0,0940	-0,1599	0,1778	0,0176	-0,5632	0,8870	1,3078
1,8	0,0790	-0,1421	0,1768	-0,0341	-0,4692	0,9809	0,5801
1,9	0,0656	-0,1247	0,1713	-0,0760	-0,3693	1,0058	-0,0647
2,0	0,0540	-0,1080	0,1620	-0,1080	-0,2700	0,9718	-0,5939
2,1	0,0440	-0,0924	0,1500	-0,1302	-0,1765	0,8915	-0,9899
2,2	0,0355	-0,0780	0,1362	-0,1436	-0,0927	0,7784	-1,2488
2,3	0,0283	-0,0652	0,1215	-0,1492	-0,0214	0,6460	-1,3788
2,4	0,0224	-0,0538	0,1066	-0,1483	0,0362	0,5064	-1,3965
2,5	0,0175	-0,0438	0,0920	-0,1424	0,0800	0,3697	-1,3242
2,6	0,0136	-0,0353	0,0782	0,1328	0,1105	0,2438	-1,1864
2,7	0,0104	-0,0281	0,0656	0,1207	0,1293	0,1338	-1,0076
2,8	0,0079	-0,0222	0,0541	-0,1073	0,1379	0,0429	-0,8097
2,9	0,0060	-0,0173	0,0441	-0,0934	0,1385	-0,0281	-0,6110
3,0	0,0044	-0,0133	0,0354	-0,0798	0,1330	-0,0798	-0,4255
3,5	0,0009	-0,0030	0,0098	-0,0282	0,0694	-0,1300	0,1078
4,0	0,0001	-0,0005	0,0020	-0,0070	0,0218	-0,0594	0,1286

Очевидно, для нормированной случайной величины  $z$  имеем  $c_3 = -S(z)/6$ ,  $c_4 = E(z)/24$ .

Ряд Грама — Шарлье типа А, или А-ряд Шарлье, приобретает для плотности распределения такой вид:

$$f(z) = \varphi^{(0)}(z) - S(z)\varphi^{(3)}(z)/6 + E(z)\varphi^{(4)}(z)/24. \quad (30)$$

## Функция распределения

$$F(z) = F_0(z) - S(z) \varphi^{(2)}(z)/6 + E(z) \varphi^{(3)}(z)/24. \quad (31)$$

Приведенные ряды могут быть продолжены. Они сходятся, если существует интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(z) e^{0,25z^2}}{z} \right| dz$ . Эта сходимость имеет равномерный характер в интервале, где  $\varphi(z)$  непрерывна.

При построении ряда с ограниченным числом членов получают приближенные значения плотности распределения. Для больших  $z$  могут получиться отрицательные, хотя и малые по абсолютной величине плотности распределения  $f(z)$ . Практически такие большие значения  $z$  рассматриваются редко, и  $A$ -ряд Шарлье позволяет достаточно точно представить распределение случайной величины, обладающее законом, не очень сильно отличающимся от нормального. В случае дискретного распределения применяют ряд Шарлье типа  $B$ , или  $B$ -ряд Шарлье.

Статистические законы распределения  $\tilde{f}(z)$  и  $\tilde{F}(z)$  получают с помощью ряда Шарлье для  $\tilde{z}_i = x_i - \bar{x}/\tilde{\sigma}(x)$ . Ряд Шарлье сглаживает опытную кривую распределения. Эту аппроксимацию можно выполнить по способу наименьших квадратов, решая систему уравнений поправок

$$F_0(z_i) - S(z) \varphi^{(2)}(z_i)/6 + E(z) \varphi^{(3)}(z_i)/24 - \tilde{F}(z_i) = v_i.$$

Для определения  $S(z)$  и  $E(z)$  переходят к системе нормальных уравнений. В результате находят не только значения асимметрии и эксцесса, но и их вес, стандарты и доверительные интервалы. Распределение Шарлье более сложное, чем нормальное. Оно имеет не два, а четыре параметра. Кривая Шарлье получается не всегда гладкая, а может иметь «холмы» и «впадины».

Закон распределения случайных погрешностей измерений устанавливается чаще всего на основе физических соображений. Он выдвигается в виде статистической гипотезы и подвергается опытной проверке. Статистическая гипотеза — более узкое понятие по сравнению с научной. Она относится к поведению случайных величин. Статистические гипотезы делят на параметрические, относящиеся только к параметрам законов распределения, и непараметрические, сводящиеся к оценке формы или свойств закона распределения. Они могут быть простыми, когда рассматриваются все  $l$  параметров закона распределения, и сложными, когда рассматривается только  $k$  этих параметров, т. е. вводится  $k$  ограничений и число степеней свободы равно  $l-k$ .

Существуют разные методы проверки статистических гипотез. Первоначальную статистическую гипотезу называют нулевой. Для ее проверки используют статистику (оценку), распределение которой в условиях нулевой гипотезы известно. Эту статистику называют критерием проверки. В зависимости от величины такого критерия статистическая гипотеза принимается или отвергается. Это заключение имеет вероятностный характер и существенно зависит от того, против каких альтернативных гипотез она проверяется. Оно основано на принципе практической уверенности. С помощью достаточно малой вероятности  $q$  (уровня значимости или размера критерия) определяют, в какой мере нулевая гипотеза не противоречит результатам измерений. Обычно  $q=0,10; 0,05; 0,01$  и т. д. Вероятность  $p=1-q$  — рабочая характеристика или размер критерия.

Для заданного  $q$  находят критическую область значений критерия проверки. Если этот критерий попадает в такую область, то нулевая гипотеза отвергается. Область допустимых значений критерия проверки является дополнением критической области. Если критерий проверки попадает в эту область, то нулевая гипотеза принимается, т. е. она в таком случае соответствует результатам измерений. С уменьшением уровня значимости  $q$  увеличивается область допустимых значений критерия проверки за счет сужения критической области. Вероятность отвергнуть правильную гипотезу уменьшается. Критерий проверки теряет свою чувствительность и возрастает вероятность принять неправильную гипотезу за правильную. Если уровень значимости  $q$  увеличивается, то чувствительность критерия проверки повышается. Критическая область расширяется в результате снижения области допустимых значений критерия проверки. Вероятность отвергнуть правильную гипотезу увеличивается.

При отыскании числовых характеристик случайных величин и процессов следует определить наилучшую точечную или интервальную оценку неизвестного параметра. Проверка статистических гипотез сводится к оценке приемлемости известной величины в качестве значения параметра. Такая проверка осуществляется в свете полученных результатов наблюдений и связана с оценкой параметров. Она сопровождается ошибками двух родов. Ошибка первого рода сводится к браковке правильной гипотезы. Ее устраняют выбором малого уровня значимости. Ошибка второго рода заключается в принятии ложной гипотезы и устраняется применением разных критериев проверки статистических гипотез. В математической статистике исследуются критерии проверки по их мощности. Критерий считается более мощным, когда вероятность отклонения неправильной гипотезы велика. Связь этой вероятности (мощности) с параметрами распределения критерия проверки выражается функцией мощности.

Ранее был рассмотрен ряд критериев проверки статистических гипотез, связанных в основном с проверкой нормальности распределения. Для проверки распределения используют также размах или широту выборки  $\tilde{R}$  — разность между максимальным  $x_{\max}$  и минимальным  $x_{\min}$  членами вариационного ряда, т. е.  $R = x_{\max} - x_{\min}$ .

Таблица 10

n	P			n	P		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
1	1,28	1,64	2,33	16	2,48	2,73	3,23
2	1,63	1,96	2,58	18	2,52	2,76	3,26
3	1,81	2,12	2,71	20	2,56	2,80	3,29
4	1,94	2,23	2,81	25	2,64	2,87	3,35
5	2,04	2,32	2,88	30	2,70	2,93	3,44
6	2,11	2,39	2,94	40	2,79	3,01	3,49
7	2,17	2,44	2,98	50	2,86	3,08	3,54
8	2,22	2,49	3,02	75	2,99	3,20	3,66
9	2,27	2,53	3,05	100	3,08	3,28	3,72
10	2,31	2,57	3,09	150	3,19	3,40	3,82
12	2,38	2,63	3,14	200	3,28	3,48	3,89
14	2,43	2,68	3,19	300	3,29	3,59	4,08
				500	3,53	3,72	4,17

Если случайная величина  $x$  обладает непрерывным законом распределения  $F(x)$ , то для ряда  $n$  наблюдений законы распределения экстремальных членов имеют вид

$$P(x_{\min} < x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad P(x_{\max} > x) = [F(x)]^n.$$

Для вариационного ряда  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ , обладающего нормальным распределением с параметрами  $M(x) = 0$  и  $M(x^2) = \sigma^2(x)$ , получаем  $M(|x_1|) \approx \sigma(x) \sqrt{\pi/2}/n$ .

Поведение максимального члена более сложное. Его возрастание относительно  $x_{\min}$  происходит довольно быстро лишь для малых  $n$ . Если  $n$  увеличивается, то «раздвигание» крайних членов вариационного ряда уменьшается и в поведении их проявляется «асимптотическая устойчивость». Размах возрастает пропорционально  $\sqrt{\ln n}$ . Дисперсия крайних членов с увеличением  $n$  стремится к нулю. Для больших  $n$   $D(x_{\min}) = D(x_{\max}) \approx \sigma^2(n) \pi^2 / \ln n \cdot 6$ .

Доверительный интервал, накрывающий  $z_{\max} = x_{\max} - M(x) / \sigma(x)$ , будет  $M(x) - z_q \sigma(x) < z_{\max} < M(x) + z_q \sigma(x)$ .

Для различных доверительных вероятностей  $P$  значения  $z_q$ , вычисленные для нормального распределения, приведены в табл. 10.

Интегральная функция размаха имеет следующий вид:

$$P(R < R_p) = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x + R_p) - F(x)]^{n-1} \varphi(x) dx.$$

Для нормального распределения  $R_p = t\sigma(x)$ . Если эмпирический размах равен  $\tilde{R}$ , то статистический стандарт будет

$$\tilde{\sigma}(x) = \tilde{R}/\alpha, \quad (32)$$

где  $\alpha = M[\tilde{R}/\sigma(x)]$ .

Такая оценка стандарта несмещенная, но при возрастании  $n$  становится мало эффективной. Если для  $n=2$  эффективность размаха равна 1,00, то для  $n=5, 10$  и  $25$  она будет 0,96, 0,85 и 0,65. Поэтому размах целесообразно применять для  $n < 10$ . Значения  $t$ ,  $\alpha$ ,  $\beta = \sigma[R/\sigma(x)]$  и  $\gamma = \beta/\alpha$  приведены в табл. 11.

Таблица 11

n	t				α	β	γ
	p=0,90	p=0,95	p=0,99	p=0,995			
2	2,33	2,77	3,64	3,97	1,13	0,85	0,76
3	2,90	3,31	4,12	4,42	1,69	0,89	0,52
4	3,24	3,63	4,40	4,69	2,06	0,88	0,43
5	3,48	3,86	4,60	4,89	2,33	0,86	0,37
6	3,66	4,03	4,76	5,03	2,53	0,85	0,34
7	3,81	4,17	4,88	5,15	2,70	0,83	0,31
8	3,93	4,29	4,99	5,26	2,85	0,82	0,29
9	4,04	4,39	5,08	5,34	2,97	0,81	0,27
10	4,13	4,47	5,16	5,42	3,08	0,80	0,26
11	4,21	4,55	5,23	5,49	3,17	0,79	0,25
12	4,29	4,62	5,29	5,54	3,26	0,78	0,24
13	4,35	4,69	5,35	5,60	3,34	0,77	0,23
14	4,41	4,74	5,40	5,65	3,41	0,76	0,22
15	4,47	4,80	5,45	5,70	3,47	0,75	0,22
16	4,52	4,85	5,49	5,74	3,53	0,75	0,21
17	4,57	4,89	5,54	5,79	3,59	0,74	0,21
18	4,61	4,93	5,57	5,82	3,64	0,74	0,20
19	4,65	4,97	5,61	5,86	3,69	0,73	0,20
20	4,69	5,01	5,65	5,89	3,74	0,73	0,20

Иногда находят допустимые или толерантные пределы  $u_1$  и  $u_2$ , в которых с вероятностью  $P$  определяют  $V\%$  результатов наблюдений. Для нормального распределения они будут  $u_1 = \bar{x} - k\tilde{\sigma}(x)$  и  $u_2 = \bar{x} + k\tilde{\sigma}(x)$ . Здесь

$$k = k_\infty \left( 1 + x_p/V\sqrt{2n} + \frac{5x_p^2 + 10}{12n} \right).$$

Значения  $k_\infty$  и  $x_p$  вычисляются по формулам  $P = 2\Phi(k_\infty)$  и  $P - 0,5 = \Phi(x_p)$ .

Для определения смещения центра группирования в ряде наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  применяют способ последовательных разностей, предложенный Э. Аббе. Последовательные разности будут  $d_1 = x_2 - x_1$ ;  $d_2 = x_3 - x_2$ ; ... ;  $d_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ .

Очевидно,  $M(d_i^2) = 2D(x) = 2\sigma^2(x)$ .

Таблица 12

n	q			n	q		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,30	0,31	0,39	13	0,30	0,43	0,58
5	0,21	0,27	0,41	14	0,31	0,45	0,59
6	0,18	0,28	0,44	15	0,33	0,46	0,60
7	0,19	0,31	0,47	16	0,34	0,48	0,61
8	0,20	0,33	0,49	17	0,36	0,49	0,62
9	0,22	0,35	0,51	18	0,37	0,50	0,63
10	0,24	0,38	0,53	19	0,38	0,51	0,64
11	0,26	0,40	0,55	20	0,39	0,52	0,65
12	0,28	0,41	0,56				

Несмещенная оценка дисперсии  $D(x)$  имеет вид

$$\tilde{\sigma}^2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 / 2(n-1).$$

Ее дисперсия составляет  $[\tilde{\sigma}^2(x)] \approx \frac{3n-4}{(n-1)^2} \tilde{\sigma}^4(x)$ .

Следовательно, оценка  $\sigma(x)$  по формуле (32) является менее эффективной, чем по формуле Бесселя. Однако, определяя дисперсии  $\tilde{D}_1(x)$  и  $\tilde{D}_2(x)$  по этим формулам, можно проследить за изменениями центра группирования. Если такое изменение происходит, то  $\tilde{D}_2(x)$  даст преувеличенную оценку  $D(x)$ . Оно выясняется с помощью критерия Аббе  $\delta = \tilde{D}_1(x) / \tilde{D}_2(x)$ .

При нормальном распределении  $M(\delta) = 1$  и  $D(\delta) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)$ .

Смещение центра группирования считают существенным, если  $\delta$  попадает в критическую область  $\delta < \delta_p$ .

При  $n > 20$  критерий  $\delta$  имеет почти нормальное распределение (особенно для  $n > 60$ ) и определяется по формуле  $\delta_p \approx 1 - u_p / \sqrt{n+1}$ .

Для заданного уровня значимости  $q = 1 - P$  ( $P$  — доверительная вероятность) имеем  $0,5 - \Phi(u_p) = q$ . Если  $n \leq 20$ , то  $\delta_p$  берут из табл. 12.

Равноточность измерений (наблюдений) по разным сечениям семейства реализаций случайной функции  $X(t)$  проверяют по дисперсионным отношениям  $F = \tilde{D}[x(t_s)]/\tilde{D}[x(t_k)]$ .

Они составляются так, чтобы  $\tilde{D}[x(t_s)] \geq \tilde{D}[x(t_k)]$ . Тогда  $F \geq 1$ . Если флуктуации распределены нормально, то дисперсионное отношение обладает  $F$ -распределением. Для заданной доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $s$  и  $k$ , по которым найдены эмпирические дисперсии  $\tilde{D}[x(t_s)]$  и  $\tilde{D}[x(t_k)]$ , значения  $F_p$  приведены в табл. 13. Наблюдения не считают равноточными, если  $F > F_p$ .

Таблица 13

$k$	$s$											
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	60	120	$\infty$
<b><math>P=0,90</math></b>												
2	8,5	9,0	9,2	9,3	9,3	9,4	9,4	9,4	9,5	9,5	9,5	9,5
3	5,5	5,5	5,4	5,3	5,3	5,2	5,2	5,2	5,2	5,2	5,1	5,1
5	4,1	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1
7	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5
10	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1
15	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
20	3,0	2,6	2,4	2,2	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6
30	2,9	2,5	2,3	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,5
60	2,8	2,4	2,2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3
120	2,7	2,3	2,1	1,9	1,8	1,7	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2
$\infty$	2,7	2,3	2,1	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,0
<b><math>P=0,95</math></b>												
3	10,1	9,6	9,3	9,0	8,9	8,8	8,7	8,7	8,6	8,6	8,5	8,5
5	6,6	5,8	5,4	5,1	4,9	4,7	4,6	4,6	4,5	4,4	4,4	4,4
7	5,6	4,7	4,3	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2
10	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	3,0	2,8	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5
15	4,5	3,7	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1
20	4,4	3,5	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8
30	4,2	3,3	2,9	2,5	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6
60	4,0	3,2	2,8	2,4	2,2	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,3	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,4	1,3
$\infty$	3,8	3,0	2,6	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5	1,5	1,3	1,2	1,0
<b><math>P=0,99</math></b>												
5	16,3	13,3	12,1	11,0	10,5	10,1	9,7	9,6	9,4	9,2	9,1	9,0
7	12,2	9,5	8,5	7,5	7,0	6,6	6,3	6,2	6,0	5,8	5,7	5,6
10	10,0	7,6	6,6	5,6	5,2	4,8	4,6	4,4	4,2	4,1	4,0	3,9
15	8,7	6,4	5,4	4,6	4,1	3,8	3,5	3,4	3,2	3,0	3,0	2,9
20	8,1	5,8	4,9	4,1	3,7	3,4	3,1	2,9	2,8	2,6	2,5	2,4
30	7,6	5,4	4,5	3,7	3,3	3,0	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0
60	7,1	5,0	4,1	3,3	3,0	2,6	2,4	2,2	2,0	2,0	1,9	1,8
120	6,9	4,8	3,9	3,2	2,8	2,5	2,2	2,0	1,9	1,7	1,5	1,4
$\infty$	6,6	4,6	3,8	3,0	2,6	2,3	2,0	1,9	1,7	1,5	1,3	1,0

Равноточность реализаций случайной функции  $X(t)$  в  $n$  сечениях, для которых несмещенные эмпирические дисперсии будут  $\tilde{D}[x(t_1)], \tilde{D}[x(t_2)], \dots, \tilde{D}[x(t_n)]$ , можно проверить способом М. С. Бартлетта. При этом предполагают, что флуктуации в сечениях независимы и имеют нормальное распределение. Предварительно, на основе нулевой гипотезы  $D[X(t_1)] =$

Таблица 14

к	P					
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
1	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	10,8
2	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	13,8
3	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	16,3
4	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	18,5
5	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	20,5
6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	22,5
7	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	24,3
8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	26,1
9	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	27,9
10	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	29,6
12	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	32,9
14	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	36,1
16	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	39,2
18	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	42,3
20	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	45,3
22	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	48,3
24	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	51,2
26	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	54,1
28	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	56,9
30	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	59,7

$= D[X(t_2)] = \dots = D[X(t_n)] = D[X(t)]$ , определяют несмещенную статистическую оценку  $D[X(t)]$  по формуле

$$\tilde{D}[x(t)] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^n (m_i - 1) \tilde{D}[x(t_i)],$$

где  $N = \sum_{i=1}^n m_i$ ,  $m_i$  — число реализаций в сечении  $t_i$ .

Обычно  $m_1 = m_2 = \dots = m_n$ . Поэтому  $N = mn$  и

$$\tilde{D}[x(t)] = \sum_{i=1}^n \tilde{D}[x(t_i)]/n.$$

Критерием проверки в этом случае будет

$$Q_i = (m - 1) \tilde{D}[x(t_i)]/\tilde{D}[x(t)].$$

Наблюдения относят к неравноточным, если  $Q_i > \chi_p^2$ .

Значения  $\chi_p^2$  приведены в табл. 14 по заданной доверительной вероятности  $P$  и числу степеней свободы  $k = m - 1$ . Эти значения даны для  $k \leq 30$ . Если  $k > 30$ , то  $P(Q_i > \chi_p^2) \approx 0,5 - \Phi(z)$ , где

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2} dz$  — нормированная функция Лапласа (табл. 2).

Параметр  $z$  определяется из уравнения

$$\chi_p^2 = 0,5 (z + \sqrt{2k - 1})^2.$$

Такой способ эффективен в случае  $N \geq 100$ . При меньшем числе сечений и реализаций лучше воспользоваться способом. В. Кохрена. Выбираем  $\max \tilde{D}[x(t_i)]$  и вычисляем статистику

$$G = \max \tilde{D}[x(t_i)] / n \cdot \tilde{D}[x(t)].$$

Наблюдения считают неравноточными, если  $G > G_p$ .

Значения  $G_p$  приведены в табл. 15 по аргументам  $P$ ,  $n$  и  $k = m - 1$ .

Есть ряд других критериев для проверки равноточности наблюдений. Наиболее простым является критерий Хартли

$$F' = \max \tilde{D}[x(t_i)] / \min \tilde{D}[x(t_s)].$$

Гипотеза о равноточности наблюдений отвергается, если  $F' > F'_p$ .

Для случая одинакового числа  $m$  реализаций при  $n$  аргументах значения  $F'_p$  приведены в табл. 16 в зависимости от доверительной вероятности  $P$ , числа аргументов  $n$  и числа степеней свободы  $k = m - 1$ .

Дисперсия эмпирического корреляционного момента  $\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)]$  определяется по формуле

$$D\{\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)]\} = \{\tilde{D}[X(t_i)] \times \\ \times \tilde{D}[X(t_j)] + \tilde{K}^2[X(t_i), X(t_j)]\} / n - 1.$$

Однако

$$\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)] = \tilde{r}[X(t_i), X(t_j)] \sqrt{\tilde{D}[X(t_i)] \tilde{D}[X(t_j)]}.$$

Поэтому

$$D\{\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)]\} = \tilde{D}[X(t_i)] \times \\ \times \tilde{D}[X(t_j)] \frac{1 + \tilde{r}^2[X(t_i), X(t_j)]}{n - 1}.$$

Следовательно,

$$D\{\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)]\} \leq \tilde{D}[X(t_i)] \tilde{D}[X(t_j)] 2/n - 1$$

$$\text{или } \sigma\{\tilde{K}[X(t_i), X(t_j)]\} \leq \tilde{\sigma}[X(t_i)] \tilde{\sigma}[X(t_j)] \sqrt{2/n - 1}.$$

n	m-1						
	1	2	3	4	5	6	7

$P=0,99$

2	1,00	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90
3	0,99	0,94	0,88	0,83	0,73	0,76	0,73
4	0,97	0,86	0,78	0,72	0,68	0,64	0,61
5	0,93	0,79	0,70	0,63	0,59	0,55	0,53
6	0,88	0,72	0,63	0,56	0,52	0,49	0,46
7	0,84	0,66	0,57	0,51	0,47	0,43	0,41
8	0,79	0,61	0,52	0,46	0,42	0,39	0,37
10	0,72	0,54	0,45	0,39	0,36	0,33	0,31
12	0,65	0,48	0,39	0,34	0,31	0,29	0,27
15	0,57	0,41	0,33	0,29	0,26	0,24	0,22
20	0,48	0,33	0,27	0,23	0,20	0,19	0,17
30	0,36	0,24	0,19	0,16	0,15	0,13	0,12
60	0,22	0,14	0,11	0,09	0,08	0,07	0,07
120	0,12	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04
$\infty$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

$P=0,95$

2	1,00	0,98	0,94	0,91	0,88	0,85	0,83
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,68	0,65
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,48	0,46
6	0,78	0,62	0,56	0,48	0,43	0,40	0,37
7	0,73	0,56	0,50	0,43	0,39	0,37	0,35
8	0,68	0,52	0,44	0,37	0,33	0,34	0,32
10	0,60	0,44	0,37	0,33	0,30	0,28	0,27
12	0,54	0,39	0,33	0,29	0,26	0,24	0,23
15	0,47	0,33	0,28	0,24	0,22	0,20	0,19
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,15
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,11
60	0,17	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,06
120	0,12	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04
$\infty$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Стандарт эмпирического коэффициента корреляции определяется по формуле

$$\sigma\{\tilde{r}[X(t_i), X(t_j)]\} \approx \frac{1 - \{\tilde{r}[X(t_i), X(t_j)]\}^2}{\sqrt{n}}$$

Очевидно,  $\sigma\{\tilde{r}[X(t_i), X(t_j)]\} \leq 1/\sqrt{n}$ .

Для интервальной оценки теоретического коэффициента корреляции прибегают к преобразованию Р. Фишера. Коэффициент корреляции представляют в виде гиперболического тангенса некоторой величины  $z$ , т. е.

$$\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)] = \text{th } \tilde{z}. \quad (33)$$

$m-1$						
8	9	10	16	36	144	$\infty$

 $P=0,99$ 

0,88	0,87	0,85	0,79	0,71	0,60	0,50
0,71	0,69	0,67	0,62	0,52	0,42	0,33
0,59	0,57	0,55	0,49	0,41	0,33	0,25
0,50	0,49	0,47	0,41	0,34	0,26	0,20
0,44	0,42	0,41	0,35	0,29	0,22	0,17
0,39	0,38	0,36	0,31	0,25	0,19	0,14
0,35	0,34	0,32	0,28	0,22	0,17	0,13
0,29	0,28	0,27	0,23	0,18	0,14	0,10
0,25	0,24	0,23	0,20	0,15	0,12	0,08
0,21	0,20	0,19	0,16	0,13	0,10	0,07
0,16	0,16	0,15	0,12	0,10	0,07	0,05
0,12	0,11	0,10	0,09	0,07	0,05	0,03
0,06	0,06	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

 $P=0,95$ 

0,82	0,80	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
0,63	0,62	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
0,52	0,50	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
0,44	0,42	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
0,35	0,34	0,33	0,31	0,26	0,22	0,17
0,34	0,33	0,31	0,26	0,23	0,18	0,14
0,30	0,29	0,28	0,24	0,20	0,16	0,12
0,25	0,24	0,24	0,20	0,17	0,13	0,10
0,22	0,21	0,20	0,17	0,14	0,11	0,08
0,18	0,17	0,17	0,14	0,11	0,09	0,07
0,14	0,14	0,13	0,11	0,09	0,07	0,05
0,10	0,10	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03
0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Тогда состоятельной оценкой  $z$  будет выражение

$$\tilde{z} = 0,5 \ln \frac{1 + \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]}{1 - \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]} = 1,51 \lg \frac{1 + \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]}{1 - \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]}.$$

Несмещенная оценка определяется по уравнению

$$\tilde{z} = 0,5 \ln \frac{1 + \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]}{1 - \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]} + \frac{\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]}{2(n-1)}.$$

Эта случайная величина даже при небольшом числе  $n$  сечений реализаций случайной функции  $X(t)$  имеет почти нор-

мальное распределение с параметрами

$$M(\tilde{z}) = 0,5 \ln \frac{1 + r[X(t_s), X(t_k)]}{1 - r[X(t_s), X(t_k)]} + \frac{r[X(t_s)X(t_k)]}{2(n-1)};$$

$$D(\tilde{z}) = \frac{1}{n-1} + \frac{4 - \{r[X(t_s), X(t_k)]\}^2}{2(n-1)}.$$

Для малых  $\tilde{r}$  принимают, что  $D(\tilde{z}) \approx 1/n - 3$  и  $\sigma(\tilde{z}) \approx 1/\sqrt{n-3}$

Таблица 16

k	n										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P = 0,95$											
3	15,4	26,6	36,8	46,9	55,1	63,8	72,1	80,5	87,4	93,7	101,0
4	9,6	14,8	19,2	23,1	26,7	29,9	33,2	36,2	38,5	40,9	43,4
5	7,2	10,4	12,9	15,3	17,3	19,1	20,7	22,2	23,0	25,0	26,0
6	5,8	8,1	10,0	11,6	12,9	14,1	15,0	16,1	17,0	17,8	18,5
7	5,0	6,8	8,1	9,3	10,3	11,1	11,9	12,6	13,2	13,7	14,4
8	4,4	5,9	7,0	7,9	8,6	9,3	9,9	10,4	10,8	11,4	11,8
9	4,0	5,2	6,1	6,9	7,6	8,1	8,6	8,9	9,3	9,7	10,1
10	3,7	4,8	5,5	6,2	6,7	7,2	7,6	7,9	8,2	8,5	8,9
12	3,3	4,1	4,7	5,2	5,6	5,9	6,2	6,5	6,7	7,0	7,2
15	2,9	3,5	3,9	4,3	4,6	4,9	5,1	5,2	5,4	5,6	5,8
20	2,5	2,9	3,3	3,5	3,7	3,9	4,0	4,1	4,3	4,4	4,5
30	2,1	2,4	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4
60	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,3
$P = 0,90$											
3	9,3	16,4	23,1	29,4	35,4	41,2	46,9	52,4	57,8	61,2	68,2
4	6,4	10,2	13,5	16,4	19,0	21,5	23,9	26,0	28,2	30,2	32,2
5	5,1	7,6	9,6	11,4	13,0	14,5	15,8	17,2	18,2	19,3	20,4
6	4,3	6,2	7,7	9,0	10,1	11,1	12,0	12,8	13,6	14,3	15,0
7	3,8	5,3	6,5	7,4	8,3	9,0	9,7	10,3	10,9	11,4	11,8
8	3,4	4,7	5,6	6,4	7,1	7,7	8,2	8,5	9,1	9,5	9,9
9	3,2	4,2	5,0	5,7	6,2	6,7	7,1	7,5	7,9	8,2	8,5
10	3,0	3,9	4,6	5,1	5,6	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3	7,5
12	2,7	3,4	4,0	4,4	4,8	5,1	5,3	5,6	5,8	6,0	6,2
15	2,4	3,0	3,4	3,7	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	4,9	5,0
20	2,1	2,6	2,9	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
30	1,8	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1
60	1,5	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2

Доверительный интервал, накрывающий  $z$  с заданной доверительной вероятностью  $P$ , имеет вид

$$\tilde{z} - z_p \sigma(\tilde{z}) < z < z + z_p \sigma(\tilde{z}).$$

При  $P=0,90; 0,95; 0,99; 0,997; 0,999; 0,9999$   $z_p$  соответственно равно 1,64; 1,96 2,58; 3,00; 3,29; 3,89.

Вспомогательная величина  $\tilde{z}$  находится по эмпирическому коэффициенту корреляции (табл. 17). Табл. 17 пользуются для перевода  $[\tilde{z} - z_p \sigma(\tilde{z})]$  в  $r'$  и  $[\tilde{z} + z_p \sigma(\tilde{z})]$  в  $r''$ . Доверительный интервал, накрывающий теоретический коэффициент корреляции  $r[X(t_s), X(t_k)]$ , будет  $r' < r[X(t_s), X(t_k)] < r''$ .

Таблица 17

$\tilde{r}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,1	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19
0,2	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30
0,3	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41
0,4	0,42	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,50	0,51	0,52	0,54
0,5	0,55	0,56	0,58	0,59	0,60	0,62	0,63	0,65	0,66	0,68
0,6	0,69	0,71	0,72	0,74	0,76	0,78	0,79	0,81	0,83	0,85
0,7	0,87	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97	1,00	1,02	1,05	1,07
0,8	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,26	1,29	1,33	1,38	1,42
0,9	1,47	1,53	1,59	1,66	1,74	1,83	1,95	2,09	2,30	2,65
$\tilde{r}$	0,990	0,991	0,992	0,993	0,994	0,995	0,996	0,997	0,998	0,999
$\tilde{z}$	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,994	3,106	3,250	3,453	3,800

Коэффициент корреляции считают существенным, если

$$|\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]| \geq z_p \sigma \{ \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)] \}.$$

Для каждого значения  $z_p$  может быть найден минимально существенный коэффициент корреляции, например, для  $z_p = 3$ , получаем

$$|\min \tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]| = \frac{\sqrt{n-36} - \sqrt{n}}{6}.$$

Если  $n$  невелико, то применяют преобразование Р. Фишера и  $\tilde{z}$  считают существенной по критерию Каппа  $\tilde{z} > z_p \sigma(\tilde{z})$ .

Коэффициент  $z_p$  определяют по заданной доверительной вероятности  $P$ . Пользуются также  $t$ -критерием

$$t = |\tilde{z}| \sqrt{\frac{n-2}{1 - \{\tilde{r}[x(t_s), x(t_k)]\}^2}}.$$

Гипотеза  $r[X(t_s), X(t_k)] = 0$  отвергается тогда, когда  $t > \gamma$ , где параметр  $\gamma$  приведен в табл. 5 по заданной доверительной вероятности  $P$  и числу степеней свободы  $k = n - 2$ .

Если эмпирические коэффициенты корреляции  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_s$  получены из  $n_1, n_2, \dots, n_s$  пар наблюдений, то для проверки одинако-

вой коррелированности общей совокупности наблюдений вспомогательные величины  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_s$  определяют по формуле (33) и вычисляют комбинированную вспомогательную величину

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^s \tilde{z}_i (n_i - 3)}{\sum_{i=1}^s (n_i - 3)}.$$

Затем определяют показатель

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s (z_i - \bar{z}) (n_i - 3).$$

Однородность коэффициентов корреляции  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_s$  отвергается тогда, когда  $\chi^2 > \chi_p^2$ .

Параметр  $\chi_p^2$  приведен в табл. 14 по заданной доверительной вероятности  $P$  и числу степеней свободы  $k=s-1$ . Если  $\chi^2 \leq \chi_p^2$ , то вычисляют комбинированный коэффициент корреляции с помощью выражения  $\bar{r} = \text{th} \bar{z}$ .

Изложенное выше свидетельствует о том, что отыскание малого коэффициента корреляции эмпирическим путем довольно затруднительно. Например, для определения коэффициента корреляции, близкого к нулю, с предельной погрешностью 0,03 необходимо выполнить 10 тыс. наблюдений. Поэтому в ряде случаев коэффициент корреляции определяют теоретически.

### § 3. Пример математико-статистического анализа случайного процесса

Рассмотрим результаты наблюдений (мм) за осадкой инженерного сооружения (табл. 18). Они осуществлены по шести маркам в периоды  $t_1=0, t_2=0,5, t_3=1, t_4=2, t_5=3, t_6=5, t_7=9$  и  $t_8=12$  месяцев.

Таблица 18

$x(t)$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$x_1(t)$	12,2	7,3	10,4	6,4	6,1	4,6	5,3	2,7
$x_2(t)$	8,4	12,0	8,9	8,8	8,6	6,1	3,3	3,7
$x_3(t)$	9,5	9,8	8,0	9,3	7,5	6,9	3,8	2,3
$x_4(t)$	10,9	11,3	7,2	7,5	6,7	7,2	2,9	1,9
$x_5(t)$	8,2	6,6	9,5	10,4	5,6	4,9	4,9	2,9
$x_6(t)$	12,0	8,8	11,2	8,0	8,1	5,7	4,4	3,3
$\bar{x}(t)$	10,2	9,3	9,2	8,4	7,1	5,9	4,1	2,9

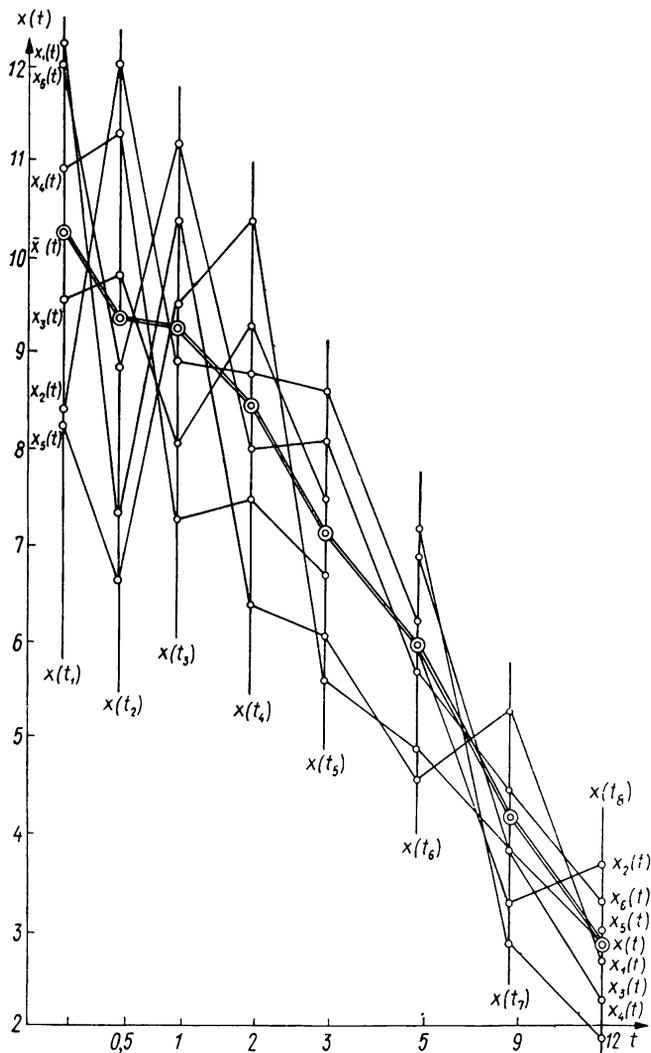


Рис. 7

Результаты наблюдений — равноточные и статистической оценкой математического ожидания  $M[X(t_i)]$  будет простая арифметическая средняя  $x(t_i)$  (табл. 18, рис. 7).

Для определения эмпирических дисперсий  $\tilde{D}[x(t_i)]$  использованы флюктуации (табл. 19), показывающие сужение разброса результатов наблюдений с возрастанием периода  $t$  (рис. 8). Вычисление эмпирических дисперсий и стандартов приведено в табл. 20, доверительные интервалы, накрывающие  $M[X(t_i)]$  и  $\sigma[X(t_i)]$  — в табл. 21. Для  $M[X(t_i)]$  они показаны

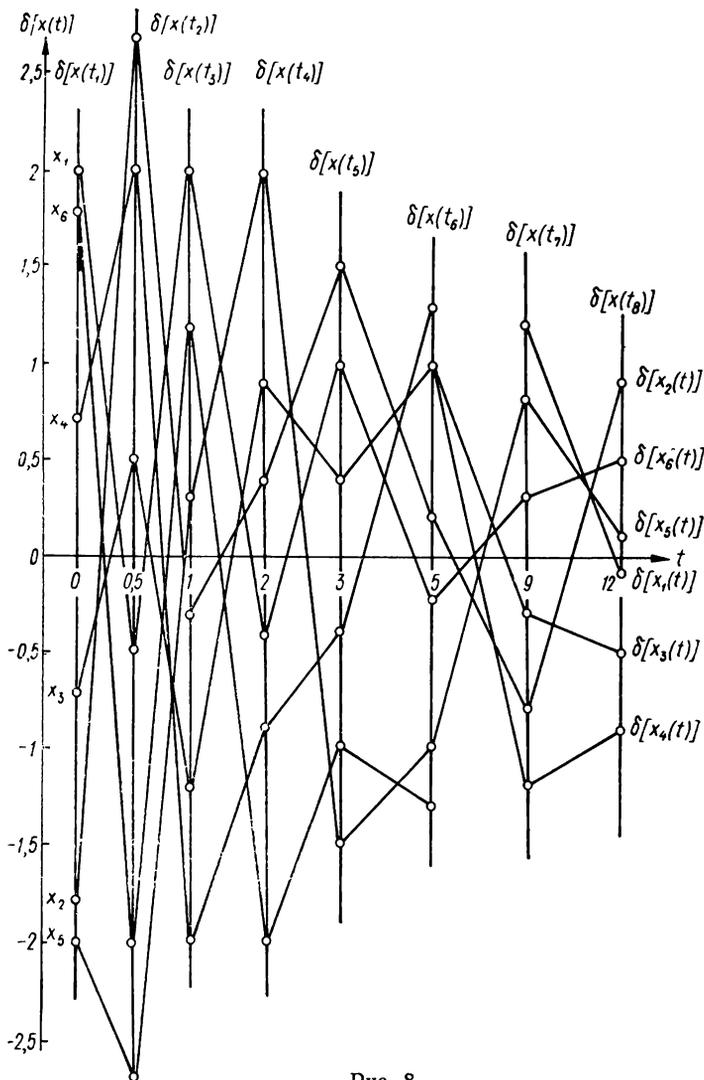


Рис. 8

на рис. 9, график изменения стандартов  $\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$  (скедастическая кривая) — на рис. 10 с указанием соответствующих доверительных интервалов.

В табл. 22 приведены дисперсионные отношения, вычисленные по формуле с. 41. Они показывают, что только весьма отдаленные сечения можно считать неравноточными. Практически этим обстоятельством можно пренебрегать, что подтверждает использование способа М. С. Бартлетта ( $\tilde{D}[x(t)] = 1,96; P = 0,90; \chi_q^2 = 9,2; P = 0,95, \chi_q^2 = 11,1; P = 0,99; \chi_q^2 = 15,1; Q_1 = 7,72; Q_2 = 11,55; Q_3 = 5,52;$

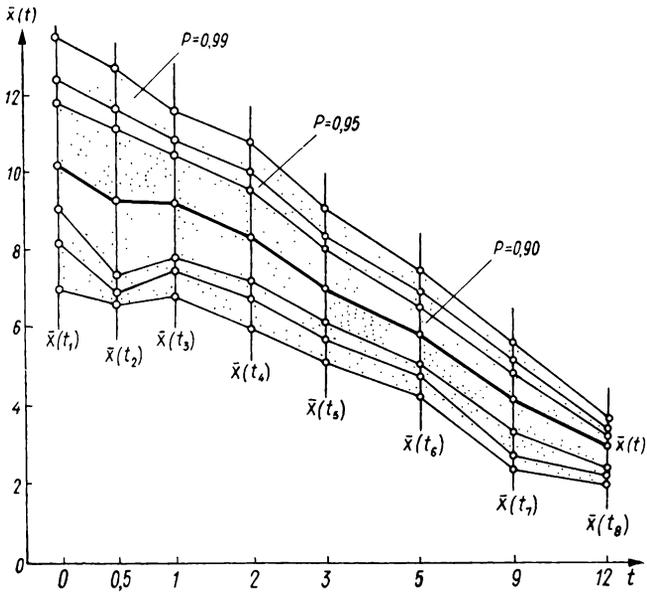


Рис. 9

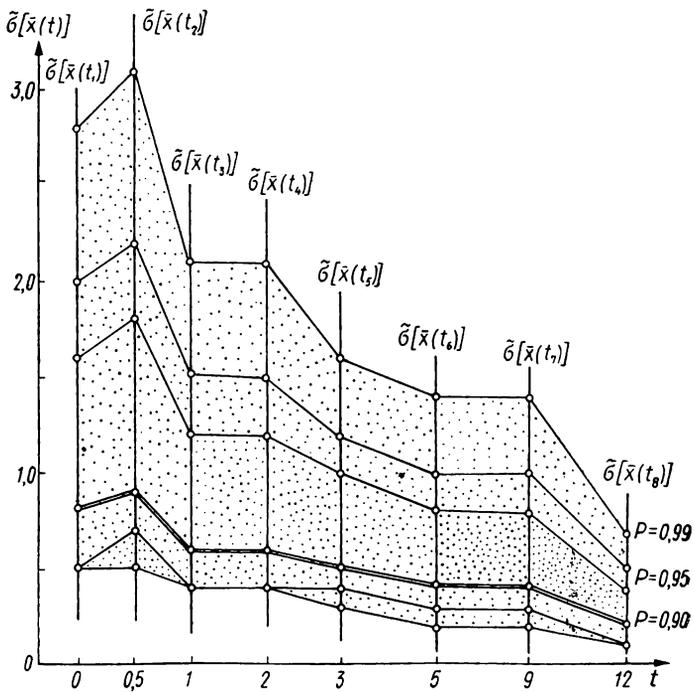


Рис. 10

Таблица 19

$\delta[x(t)]$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$\delta[x_1(t)]$	2,0	-2,0	1,2	-2,0	-1,0	-1,3	1,2	-0,1
$\delta[x_2(t)]$	-1,8	2,7	-0,3	0,4	1,5	0,2	-0,8	0,9
$\delta[x_3(t)]$	-0,7	0,5	-1,2	0,9	0,4	1,0	-0,3	-0,5
$\delta[x_4(t)]$	0,7	2,0	-2,0	-0,9	-0,4	1,3	-1,2	-0,9
$\delta[x_5(t)]$	-2,0	-2,7	0,3	2,0	-1,5	-1,0	0,8	0,1
$\delta[x_6(t)]$	1,8	-0,5	2,0	-0,4	1,0	-0,2	0,3	0,5
$\Sigma$	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 20

$\delta^2[x(t)]$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$\delta^2[x_1(t)]$	4,00	4,00	1,44	4,00	1,00	1,69	1,44	0,01
$\delta^2[x_2(t)]$	3,24	7,29	0,09	0,16	2,25	0,04	0,64	0,81
$\delta^2[x_3(t)]$	0,49	0,25	1,44	0,81	0,16	1,00	0,09	0,25
$\delta^2[x_4(t)]$	0,49	4,00	4,00	0,81	0,16	1,69	1,44	0,81
$\delta^2[x_5(t)]$	4,00	7,29	0,09	4,00	2,25	1,00	0,64	0,01
$\delta^2[x_6(t)]$	3,24	0,25	4,00	0,16	1,00	0,04	0,09	0,25
$\Sigma$	15,46	23,08	11,06	9,94	6,82	5,46	4,34	2,14
$\bar{D}[x(t_i)]$	3,09	4,62	2,21	1,99	1,36	1,09	0,87	0,43
$\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma})$	0,5	0,7	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,2
$\tilde{\sigma}[x(t_i)]$	1,8	2,2	1,5	1,4	1,2	1,0	0,9	0,6
$\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	0,8	0,9	0,6	0,6	0,5	0,4	0,4	0,2

$Q_4 = 4,98$ ;  $Q_5 = 3,40$ ;  $Q_6 = 2,73$ ;  $Q_7 = 2,17$ ;  $Q_8 = 1,07$ ), способа В. Кохрена ( $G = 0,29$ ;  $G_p = 0,42$  для  $P = 0,99$ ,  $G_p = 0,33$  для  $P = 0,95$ ) и критерия Хартли ( $F' = 10,7$ ,  $F'_p = 20,7$  для  $P = 0,95$  и  $F'_p = 12,0$  для  $P = 0,90$ ).

Все наблюдения для каждого сечения обладают нулевой асимметрией. Эмпирический эксцесс приведен в табл. 23. Внешне обнаруживается, что распределение наблюдений является платикуртичным (с отрицательным эксцессом). Однако погрешность определения эмпирического эксцесса настолько велика, что этим обстоятельством можно пренебречь.

В табл. 24 приведены эмпирические корреляционные моменты, эмпирическая корреляционная матрица в табл. 26, коэффи-

Таблица 21

Параметры доверительных интервалов	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$P=0,90;$	$\gamma=2,10;$		$z_1=0,67;$		$z_2=2,09$			
$\tilde{\gamma}\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	1,7	1,9	1,3	1,3	1,0	0,8	0,8	0,4
$\bar{x}(t)-$	8,5	7,4	7,9	7,1	6,1	5,1	3,3	2,4
$\bar{x}(t)+$	11,9	11,2	10,5	9,7	8,1	6,7	4,9	3,2
$z_1\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	0,5	0,7	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,1
$z_2\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	1,6	1,8	1,2	1,2	1,0	0,8	0,8	0,4
$P=0,95;$	$\gamma=2,57;$		$z_1=0,62;$		$z_2=2,45$			
$\tilde{\gamma}\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	2,1	2,3	1,6	1,6	1,3	1,0	1,0	0,5
$\bar{x}(t)-$	8,1	7,0	7,6	6,8	5,8	4,9	3,1	2,3
$\bar{x}(t)+$	12,3	11,6	10,8	10,0	8,4	6,9	5,1	3,3
$z_1\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1
$z_2\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	2,0	2,2	1,5	1,5	1,2	1,0	1,0	0,5
$P=0,99;$	$\gamma=4,03;$		$z_1=0,55;$		$z_2=3,48$			
$\tilde{\gamma}\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	3,2	3,6	2,4	2,4	2,0	1,6	1,6	0,8
$\bar{x}(t)-$	7,0	5,7	6,8	6,0	5,1	4,3	2,5	2,0
$\bar{x}(t)+$	13,5	12,9	11,6	10,8	9,1	7,5	5,7	3,6
$z_1\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1
$z_2\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)]$	2,8	3,1	2,1	2,1	1,7	1,4	1,4	0,7

Таблица 22

$P=0,90,$	$F_q=3,2$	$P=0,95,$	$F_q=4,5$	$P=0,99,$	$F_q=9,3$		
$F_{12}$	1,5	$F_{23}$	2,1	$F_{35}$	1,6	$F_{48}$	4,6
$F_{13}$	1,4	$F_{24}$	2,3	$F_{36}$	2,0	$F_{56}$	1,2
$F_{14}$	1,5	$F_{25}$	3,4	$F_{37}$	2,6	$F_{57}$	1,6
$F_{15}$	2,3	$F_{26}$	4,2	$F_{38}$	5,1	$F_{58}$	3,2
$F_{16}$	2,8	$F_{27}$	5,3	$F_{45}$	1,5	$F_{67}$	1,3
$F_{17}$	3,7	$F_{28}$	10,7	$F_{46}$	1,8	$F_{68}$	2,3
$F_{18}$	7,2	$F_{34}$	1,1	$F_{47}$	2,3	$F_{78}$	2,0

коэффициенты корреляции — в табл. 25. В результате вычислений получена матрица эмпирических коэффициентов корреляции (табл. 27). По ней составлена картограмма коэффициентов корреляции (рис. 11).

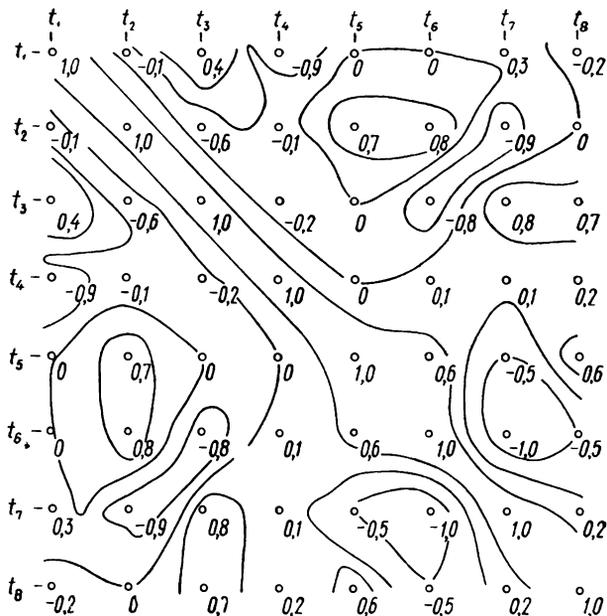


Рис. 11

Таблица 23

$\delta^4[x(t)]$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$\delta^4[x_1(t)]$	16,00	16,00	2,07	16,00	1,00	2,86	2,07	0,00
$\delta^4[x_2(t)]$	10,50	53,14	0,01	0,03	5,06	0,00	0,41	0,66
$\delta^4[x_3(t)]$	0,24	0,06	2,07	0,66	0,03	1,00	0,01	0,06
$\delta^4[x_4(t)]$	0,24	16,00	16,00	0,66	0,03	2,86	2,07	0,66
$\delta^4[x_5(t)]$	16,00	53,14	0,01	16,00	5,06	1,00	0,41	0,00
$\delta^4[x_6(t)]$	10,50	0,06	16,00	0,03	1,00	0,00	0,01	0,06
$\Sigma$	53,48	133,40	36,16	33,38	12,18	7,72	4,98	1,44
$\tilde{\mu}_4[x(t)]$	8,9	23,1	6,0	5,6	2,0	1,3	0,8	0,2
$\tilde{D}^2[x(t)]$	9,55	21,34	4,88	3,96	1,85	1,19	0,76	0,18
$\tilde{E}[x(t)]$	-2,1	-1,9	-1,8	-1,6	-1,9	-1,9	-2,0	-2,0

$$\sigma\{\tilde{E}[x(t)]\} \approx 0,8; \quad P=0,997; \quad \gamma=3; \quad \gamma\sigma\{\tilde{E}[x(t)]\} \approx 2,4$$

$\delta(t_1)\delta(t_1)$	$\delta(t_1)\delta(t_2)$	$\delta(t_1)\delta(t_3)$	$\delta(t_1)\delta(t_4)$
4,00	-4,00	2,40	-4,00
3,24	-4,86	0,54	-0,72
0,49	-0,35	0,84	-0,63
0,49	1,40	-1,40	-0,63
4,00	5,40	-0,60	-4,00
3,24	-0,90	3,60	-0,72
15,46	-2,31	5,38	-10,70
$K(t_1, t_1)$	$K(t_1, t_2)$	$K(t_1, t_3)$	$K(t_1, t_4)$
3,09	-0,46	1,08	-2,14
$\delta(t_2)\delta(t_3)$	$\delta(t_2)\delta(t_4)$	$\delta(t_2)\delta(t_5)$	$\delta(t_2)\delta(t_6)$
-2,40	4,00	2,00	2,60
-0,81	1,08	4,05	0,54
-0,60	0,45	0,20	0,50
-4,00	-1,80	-0,80	2,60
-0,81	-5,40	4,05	2,70
-1,00	0,20	-0,50	0,10
-9,62	-1,47	9,00	9,04
$K(t_2, t_3)$	$K(t_2, t_4)$	$K(t_2, t_5)$	$K(t_2, t_6)$
-1,92	-0,29	1,80	1,81
$\delta(t_3)\delta(t_6)$	$\delta(t_4)\delta(t_7)$	$\delta(t_5)\delta(t_8)$	$\delta(t_4)\delta(t_4)$
-1,56	1,44	-0,12	4,00
-0,06	0,24	-0,27	0,16
-1,20	0,36	0,60	0,81
-2,60	2,40	1,80	0,81
-0,30	0,24	0,03	4,00
-0,40	0,60	1,00	0,16
-6,12	5,28	3,04	9,94
$K(t_3, t_6)$	$K(t_3, t_7)$	$K(t_3, t_8)$	$K(t_4, t_4)$
-1,22	1,06	0,61	1,99

Таблица 24

	$\delta(t_1)\delta(t_5)$	$\delta(t_1)\delta(t_6)$	$\delta(t_1)\delta(t_7)$	$\delta(t_1)\delta(t_8)$	$\delta(t_2)\delta(t_2)$
	-2,00	-2,60	2,40	-0,20	4,00
	-2,70	-0,36	1,44	-1,62	7,29
	-0,28	-0,70	0,21	0,35	0,25
	-0,28	0,91	-0,84	-0,63	4,00
	3,00	3,00	-1,60	-0,20	7,29
	1,80	-0,36	0,54	0,90	0,25
	-0,46	-0,11	2,15	-1,40	23,08
	$K(t_1, t_5)$	$K(t_1, t_6)$	$K(t_1, t_7)$	$K(t_1, t_8)$	$K(t_2, t_2)$
	-0,09	-0,02	0,43	-0,28	4,62
	$\delta(t_2)\delta(t_7)$	$\delta(t_2)\delta(t_8)$	$\delta(t_3)\delta(t_3)$	$\delta(t_3)\delta(t_4)$	$\delta(t_3)\delta(t_5)$
	-2,40	0,20	1,44	-2,40	-1,20
	-2,16	2,63	0,09	-0,12	-0,45
	-0,15	-0,25	1,44	-1,08	-0,48
	-2,40	-1,80	4,00	1,80	0,80
	-2,16	-0,27	0,09	0,60	-0,45
	-0,15	-0,25	4,00	-0,80	2,00
	-9,42	0,26	11,06	-2,00	0,22
	$K(t_2, t_7)$	$K(t_2, t_8)$	$K(t_3, t_3)$	$K(t_3, t_4)$	$K(t_3, t_5)$
	-1,88	0,05	2,21	-0,40	0,04
	$\delta(t_4)\delta(t_5)$	$\delta(t_4)\delta(t_6)$	$\delta(t_4)\delta(t_7)$	$\delta(t_4)\delta(t_8)$	$\delta(t_5)\delta(t_5)$
	2,00	2,60	-2,40	0,20	1,00
	0,60	0,08	-0,32	0,36	2,25
	0,36	0,90	-0,27	-0,45	0,16
	0,36	-1,17	1,08	0,81	0,16
	-3,00	-2,00	1,60	0,20	2,25
	-0,40	0,08	-0,12	-0,20	1,00
	-0,08	0,49	-0,41	0,92	6,82
	$K(t_4, t_5)$	$K(t_4, t_6)$	$K(t_4, t_7)$	$K(t_4, t_8)$	$K(t_5, t_5)$
	-0,02	0,10	-0,08	0,18	1,36

$\delta(t_5)\delta(t_6)$	$\delta(t_5)\delta(t_7)$	$\delta(t_5)\delta(t_8)$	$\delta(t_6)\delta(t_8)$
2,60	-1,20	0,10	1,69
0,30	-1,20	1,35	0,04
0,40	-0,12	-0,20	1,00
-0,52	0,48	0,36	1,69
1,50	-1,20	-0,15	1,00
-0,20	0,30	0,50	0,04
4,08	-2,94	1,96	5,46
$K(t_5, t_6)$	$K(t_5, t_7)$	$K(t_5, t_8)$	$K(t_6, t_8)$
0,82	-0,59	0,39	1,09

$\tilde{\sigma}(t_1)\tilde{\sigma}(t_1)$	$\tilde{\sigma}(t_1)\tilde{\sigma}(t_2)$	$\tilde{\sigma}(t_1)\tilde{\sigma}(t_3)$	$\tilde{\sigma}(t_1)\tilde{\sigma}(t_4)$
3,09	3,96	2,70	2,52
$\tilde{r}(t_1, t_1)$	$\tilde{r}(t_1, t_2)$	$\tilde{r}(t_1, t_3)$	$\tilde{r}(t_1, t_4)$
1,00	-0,11	0,40	-0,85
	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_2)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_3)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_4)$
	4,62	3,30	3,08
	$\tilde{r}(t_2, t_2)$	$\tilde{r}(t_2, t_3)$	$\tilde{r}(t_2, t_4)$
	1,00	-0,58	-0,10
		$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_3)$	$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_4)$
		2,21	2,10
		$\tilde{r}(t_3, t_3)$	$\tilde{r}(t_3, t_4)$
		1,00	-0,19
			$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_4)$
			1,99
			$\tilde{r}(t_4, t_4)$
			1,00
	$\tilde{\sigma}(t_7)\tilde{\sigma}(t_8)$		
	0,54		
	$\tilde{r}(t_7, t_8)$		
	0,22		
$\tilde{\sigma}(t_7)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_8)\tilde{\sigma}(t_8)$		
0,87	0,43		
$\tilde{r}(t_7, t_7)$	$\tilde{r}(t_8, t_8)$		
1,00	1,00		

$\delta(t_6)\delta(t_7)$	$\delta(t_6)\delta(t_8)$	$\delta(t_7)\delta(t_7)$	$\delta(t_7)\delta(t_8)$	$\delta(t_8)\delta(t_8)$
-1,56	0,13	1,44	-0,12	0,01
-0,16	0,18	0,64	-0,72	0,81
-0,30	-0,50	0,09	0,15	0,25
-1,56	-1,17	1,44	1,08	0,81
-0,80	-0,10	0,64	0,08	0,01
-0,06	-0,10	0,09	0,15	0,25
-4,44	-1,56	4,34	0,62	2,14
$K(t_6, t_7)$	$K(t_6, t_8)$	$K(t_7, t_7)$	$K(t_7, t_8)$	$K(t_8, t_8)$
-0,89	-0,31	0,87	0,12	0,43

Таблица 25

$\tilde{\sigma}(t_1)\tilde{\sigma}(t_5)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_8)$
2,16	1,80	1,62	1,08
$\tilde{r}(t_1, t_5)$	$\tilde{r}(t_1, t_6)$	$\tilde{r}(t_1, t_7)$	$\tilde{r}(t_1, t_8)$
-0,04	-0,01	0,28	-0,25
$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\sigma(t_2)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_2)\tilde{\sigma}(t_8)$
2,44	2,20	1,98	1,32
$\tilde{r}(t_2, t_5)$	$\tilde{r}(t_2, t_6)$	$\tilde{r}(t_2, t_7)$	$\tilde{r}(t_2, t_8)$
0,73	0,82	-0,94	0,04
$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_5)$	$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_3)\tilde{\sigma}(t_8)$
1,80	1,50	1,35	0,90
$\tilde{r}(t_3, t_5)$	$\tilde{r}(t_3, t_6)$	$\tilde{r}(t_3, t_7)$	$\tilde{r}(t_3, t_8)$
0,02	-0,81	0,82	0,68
$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_5)$	$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_4)\tilde{\sigma}(t_8)$
1,68	1,40	1,26	0,84
$\tilde{r}(t_4, t_5)$	$\tilde{r}(t_4, t_6)$	$\tilde{r}(t_4, t_7)$	$\tilde{r}(t_4, t_8)$
-0,01	0,07	0,06	0,21
$\tilde{\sigma}(t_5)\tilde{\sigma}(t_5)$	$\tilde{\sigma}(t_5)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_5)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_5)\tilde{\sigma}(t_8)$
1,36	1,20	1,08	0,72
$\tilde{r}(t_5, t_5)$	$\tilde{r}(t_5, t_6)$	$\tilde{r}(t_5, t_7)$	$\tilde{r}(t_5, t_8)$
1,00	0,63	-0,54	0,56
	$\tilde{\sigma}(t_6)\tilde{\sigma}(t_6)$	$\tilde{\sigma}(t_6)\tilde{\sigma}(t_7)$	$\tilde{\sigma}(t_6)\tilde{\sigma}(t_8)$
	1,09	0,90	0,60
	$\tilde{r}(t_6, t_6)$	$\tilde{r}(t_6, t_7)$	$\tilde{r}(t_6, t_8)$
	1,00	-0,99	-0,50

Таблица 26

$t$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$t_1$	<b>3,09</b>	-0,46	1,08	-2,14	-0,09	-0,02	0,43	-0,28
$t_2$	-0,46	<b>4,62</b>	-1,92	-0,29	1,80	1,81	-1,88	0,05
$t_3$	1,08	-1,92	<b>2,21</b>	-0,40	0,04	-1,22	1,06	0,61
$t_4$	-2,14	-0,29	-0,40	<b>1,99</b>	-0,02	0,10	-0,08	0,18
$t_5$	-0,09	1,80	0,04	-0,02	<b>1,36</b>	0,82	-0,59	0,39
$t_6$	-0,02	1,81	-1,22	0,10	0,82	<b>1,09</b>	-0,89	-0,31
$t_7$	0,43	-1,88	1,06	-0,08	-0,59	-0,89	<b>0,87</b>	0,12
$t_8$	-0,28	0,05	0,61	0,18	0,39	-0,31	0,12	<b>0,43</b>

Таблица 27

$t$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$t_1$	1,00	-0,11	0,40	-0,85	-0,04	-0,01	0,28	-0,25
$t_2$	-0,11	1,00	-0,58	-0,10	0,73	0,82	-0,94	0,04
$t_3$	0,40	-0,58	1,00	-0,19	0,02	-0,81	0,82	0,68
$t_4$	-0,85	-0,10	-0,19	1,00	-0,01	0,07	0,06	0,21
$t_5$	-0,04	0,73	0,02	-0,01	1,00	0,63	-0,54	0,56
$t_6$	-0,01	0,82	-0,81	0,07	0,63	1,00	-0,99	-0,50
$t_7$	0,28	-0,94	0,82	0,06	-0,54	-0,99	1,00	0,22
$t_8$	-0,25	0,04	0,68	0,21	0,56	-0,50	0,22	1,00

## ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

## § 1. Стационарный случайный процесс

Случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно, называют стационарными. Они имеют вид непрерывных колебаний около некоторого среднего значения. Реализации таких процессов находятся как бы в состоянии статистического равновесия. С течением времени средняя амплитуда и характер колебаний существенно не изменяются. Такие процессы весьма часто проявляются в системе длительно продолжающихся измерений.

Стационарный случайный процесс обычно рассматривают как процесс, продолжающийся неопределенно долго. При его исследовании начало отсчета может совпадать с любым моментом времени. Для каждого из отрезков или участков времени получаются одни и те же числовые характеристики случайной функции. Часто говорят, что стационарный случайный процесс «не имеет ни начала, ни конца». Он инвариантен относительно любых сдвигов во времени. Отличается такой процесс от нестационарного отсутствием тенденции развития во времени.

Вероятностные характеристики нестационарной случайной функции зависят от начала отсчета времени. Однако не все нестационарные случайные процессы одинаковы. Некоторые на определенных отрезках времени с тем или иным приближением могут быть приняты за стационарные. Практически в любой динамической системе измерений образование случайных погрешностей начинается с нестационарной стадии, которая называется переходным процессом. После затухания этой стадии наступает установившийся режим — стационарный случайный процесс. Такой режим описывается более простыми числовыми характеристиками. Линейные преобразования стационарных случайных функций менее сложны, чем нестационарных.

Случайную функцию  $X(t)$  считают стационарной, если вероятностные характеристики ее не зависят от сдвига аргумента  $t$ , под которым подразумевают не только время. При изучении этих функций практически редко пользуются законами распределений, ограничиваясь определением основных числовых характеристик: математического ожидания  $M[X(t)]$ , дисперсии  $D[X(t)]$  и корреляционной функции  $K[X(t_s), X(t_k)]$ .

Таким образом, в прикладной теории стационарных случайных функций не рассматривается стационарность в узком смыс-

ле, определяемая совпадением законов распределения систем случайных величин  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  и систем случайных величин  $X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau)$  при любых значениях  $n$ , выбранных аргументах  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и величинах сдвига  $\tau$ . Стационарность в узком смысле относится к случайным функциям  $X(t)$ , для которых  $n$ -мерный закон распределения не зависит от аргументов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Этот закон определяется разностью аргументов  $t_2-t_1, t_3-t_1, \dots, t_n-t_1, t_3-t_2, \dots$ . Например, стационарным в узком смысле является процесс

$$X(t) = \sum_{k=1}^m a_k \cos(t\omega_k + u_k),$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — вещественные постоянные;  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  — числа из интервала от  $-\pi$  до  $+\pi$ , которые можно считать упорядоченными ( $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ );  $u_1, u_2, \dots, u_k$  — независимые случайные величины, обладающие равномерным распределением на интервале от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Совместное распределение величин  $X(t_i)$  и  $X(t_j)$  такое же, как и величин  $X(t_{i+h})$  и  $X(t_{j+h})$ . В узком смысле будет

стационарен процесс  $X(t) = \sum_{k=1}^m a_k e^{i(t\omega_k + u_k)}$ , где  $t = \dots, -1, 0, +1, \dots$

В прикладной теории стационарных случайных функций пользуются представлением о стационарности в широком смысле. В особенностях числовых характеристик случайных функций ищут способы оценки стационарности случайного процесса. Обычно полагают, что стационарный случайный процесс должен удовлетворять трем условиям

$$M[X(t_s)] = \text{const}, \quad D[X(t_s)] = \text{const}, \quad K[X(t_s), X(t_k)] = K(\tau). \quad (34)$$

Однако не все эти условия равноценные. Нельзя считать постоянство математического ожидания существенным требованием к стационарной случайной функции. Переходя к центрированной случайной функции — флюктуации, мы сразу же выполняем равенство  $M\{\delta[X(t)]\} = 0$ , т. е. первое условие (34). Следовательно, в случае переменного математического ожидания  $M[X(t)]$  достаточно перейти к флюктуациям для того, чтобы выполнить одно из требований к стационарному случайному процессу.

Для оценки необходимости соблюдения второго условия стационарности (постоянства дисперсии  $D[X(t)]$ ) напомним, что  $D[X(t)] = K[X(t), X(t)]$ . Поэтому достаточно исследовать особенности поведения корреляционной функции в режиме стационарного случайного процесса. В общем выражении корреляционной функции  $K[X(t_s), X(t_k)]$  примем, что  $t_s = t$  и  $t_k = t + \tau$ . Поэтому корреляционная функция  $K[X(t), X(t + \tau)]$  будет тогда характеризовать стационарный случайный процесс, когда она

станет независимой от положения аргумента  $\tau$  на оси  $0t$ . Такая функция зависит от длины промежутка  $\tau$ , т. е.

$$K[X(t), X(t + \tau)] = K[X(\tau)] = K(\tau). \quad (35)$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса определяется не двумя  $(t_s, t_k)$ , а одним аргументом  $(\tau)$ . Это весьма упрощает операции со стационарными случайными функциями. Если  $t + \tau = t$  или  $\tau = 0$ , то второе условие стационарности имеет вид  $D[X(t)] = K[X(t), X(t)] = K[X(0)] = \text{const}$ .

Оно является частным случаем условия (35). Следовательно, оно наиболее существенное. Если ограничиться разбором центрированных случайных функций, то для оценки стационарности случайного процесса достаточно соблюдать только условие (35).

Известно, что  $K[X(t_s), X(t_k)] = K[X(t_k), X(t_s)]$ . Для стационарного случайного процесса  $t_k - t_s = \tau$ . Следовательно,  $K(\tau)$  — четная функция своего аргумента или  $K[X(\tau)] = K[X(-\tau)]$ .

Поэтому корреляционную функцию  $K(\tau)$  находят только для положительного значения аргумента  $\tau$ . График корреляционной функции называют коррелограммой или автокоррелограммой. Для гармонического колебания (рис. 12, а) она имеет вид косинусоиды  $K[X(\tau)] = 0,5x^2 \cos 2\pi f\tau$ . Ее форма периодически повторяется. Период сохраняется, но информация о фазе теряется. Для суммы гармонического колебания со случайным шумом (рис. 12, б) ход гармонического процесса нарушается. На автокоррелограмме узкополосного случайного шума (рис. 12, в) характерно затухание амплитуды. При больших значениях сдвига амплитуда стремится к нулю. Для широкополосного случайного процесса (рис. 12, г) с нулевым средним значением автокоррелограмма имеет вид крутого пика с быстрым спаданием к нулю. В предельном случае белого шума, когда амплитуды равномерно распределяются по всем частотам, автокоррелограмма приобретает вид функции Дирака (при  $\tau = 0$ ).

Гармоническое колебание считается детерминированным процессом. В данном примере оно рассматривается как выборочная функция случайного процесса  $X(t) = X \sin(2\pi ft + \Theta)$  с начальной фазой  $\Theta$  как случайной величиной. Плотность его распределения  $\varphi(x) = (\pi \sqrt{X^2 - x^2})^{-1}$  при  $|x| < X$  и  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \geq X$ . Графики плотностей распределений узкополосного и широкополосного случайных процессов имеют колоколообразный вид и в идеальном случае соответствуют нормальному закону  $\varphi(x) = [\sigma(x)\sqrt{2\pi}]^{-1} e^{-x^2/2\sigma^2(x)}$ . На рис. 12 они приведены для характеристики случайных процессов. Автокорреляционная функция выражает зависимость значений процесса в разные периоды времени. Она является мощным средством выявления детерминированных процессов, которые могут маскироваться случайным шумом.

Часто используют нормированную функцию или коэффициент корреляции стационарного случайного процесса

$$r[X(\tau)] = K[X(\tau)]/D[X(0)].$$

Это — коэффициент корреляции между сечениями случайной функции, разделенными интервалом  $\tau$ . Очевидно,  $r[X(0)] = 1$ . Кроме того,  $K[X(\tau)] \leq K[X(0)] = D[X(\tau)]$ .

В ранее рассмотренном примере анализа случайной функции  $X(t) = Y \sin \omega t + Z \cos \omega t$ , где  $Y$  и  $Z$  — некоррелированные

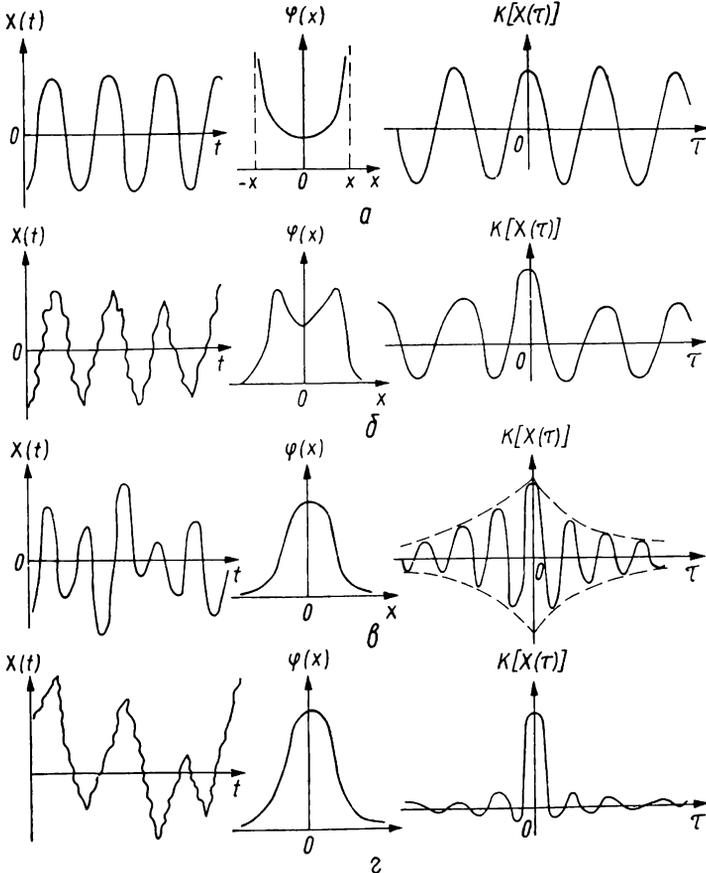


Рис. 12

случайные величины с математическими ожиданиями  $M(Y) = M(Z) = 0$  и конечными дисперсиями  $D(Y)$  и  $D(Z)$ , обнаруживается нестационарность случайного процесса. Однако для  $D(Y) = D(Z) = D$  рассматриваемая случайная функция — стационарная. Корреляционная функция становится зависимой только от разности аргументов  $t_i$  и  $t_j$ . Она была представлена

в виде показательной функции  $K[X(\tau)] = De^{-a|\tau|}$ . Условие стационарности в широком смысле сохраняется при любой плотности распределения случайной частоты  $\omega$  колебаний. Заметим, что указанный тип показательной корреляционной функции довольно часто встречается при решении практических задач.

Экспериментальное исследование случайных процессов завершается определением корреляционной функции чаще всего

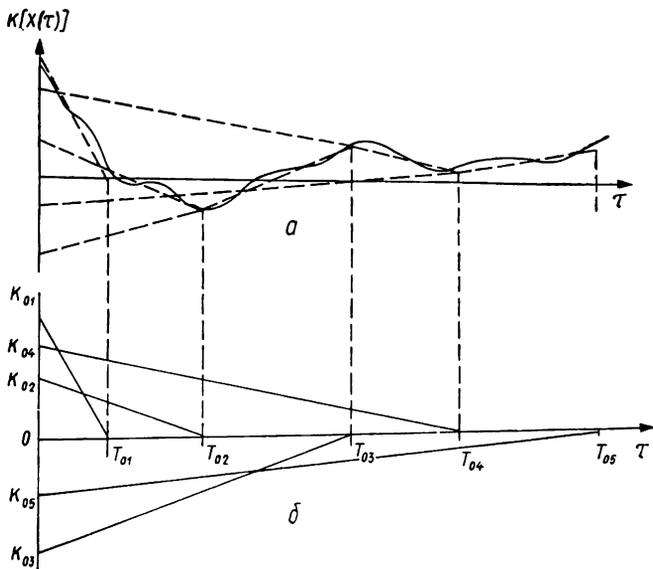


Рис. 13

в графическом виде (коррелограмма или автокоррелограмма). Такой график показывает зависимость между коэффициентом автокорреляции и периодом запаздывания ( $t_i - t_j$ ). На автокоррелограмме флюктуации получаются с такими же периодами, что и в исходной случайной функции, но с такими фазами, при которых максимум достигается при нулевом запаздывании. Коррелограммы используют для прогнозирования процесса. Для этого полученную кривую корреляционной функции стремятся аппроксимировать типовыми корреляционными функциями. Из дальнейшего изложения видно, что их форму и вид выбирают исходя из возможности наиболее простого нахождения спектральной плотности случайной функции. Корреляционную функцию случайного процесса определяют путем аппроксимации в виде алгебраической суммы типовых корреляционных функций, которые подбирают, руководствуясь необходимой точностью аппроксимации, особенно для малых значений  $\tau$ .

Типовые корреляционные функции делят на ряд классов. Наиболее простые — треугольные корреляционные функции, метод аппроксимации с помощью которых показан на рис. 13. В

этом примере корреляционная функция  $K[X(\tau)]$  с достаточной точностью изображена алгебраической суммой кусочно-линейной функции

$$K[X(\tau)] = K_{01}(\tau) + K_{02}(\tau) + K_{03}(\tau) + K_{04}(\tau) + K_{05}(\tau). \quad (36)$$

Каждая типовая треугольная корреляционная функция определена двумя параметрами —  $K_0$  и  $T_0$ . Для положительных значений  $\tau$  она приведена на рис. 14.

Часто корреляционную функцию (рис. 15) записывают в указанном ранее показательном виде  $K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|}$ , где

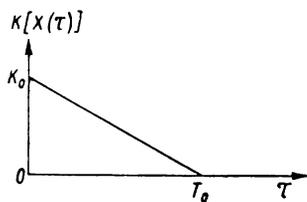


Рис. 14

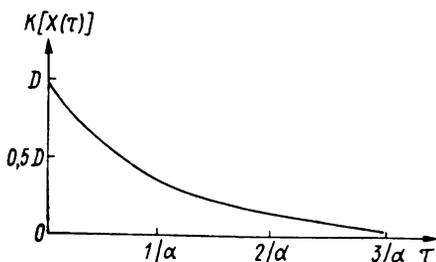


Рис. 15

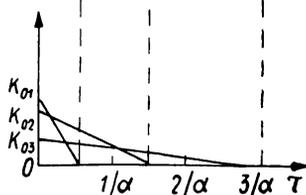
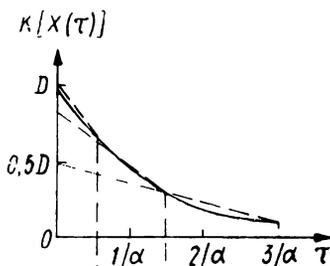
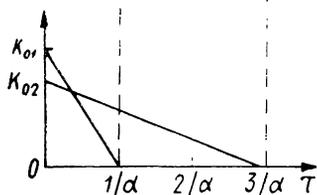
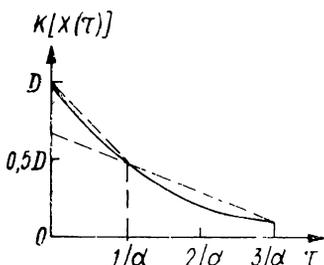


Рис. 16

$D$  — дисперсия,  $\alpha$  — положительная величина. В результате аппроксимации кусочно-линейной функцией она представляется суммой двух или трех типовых треугольных корреляционных функций (рис. 16).

Корреляционная функция стационарного случайного процесса представляется в экспоненциально-косинусном виде:

$K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau$ . График такой корреляционной функции показан на рис. 17. Более общий вид типовой корреляционной функции будет

$$K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega\tau + \gamma \sin \omega|\tau|). \quad (37)$$

Эта корреляционная функция графически представлена на рис. 18. Она удобна для аппроксимации. Коэффициент  $\gamma$  выбирается так, чтобы производная корреляционной функции при  $\tau=0$  была равной нулю. Это достигается в случае  $\gamma = \alpha/\omega$ . Фор-

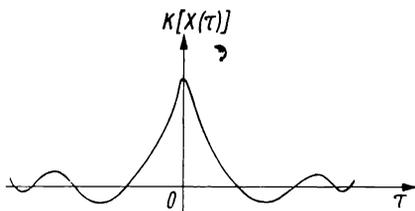


Рис. 17

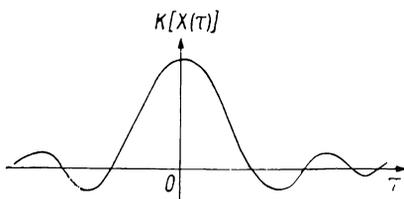


Рис. 18

мула (37) выражает корреляционную функцию лишь тогда, когда  $|\gamma| \leq \alpha/\omega$ . С помощью линейной комбинации типовых корреляционных функций с любой точностью может быть осуществлена аппроксимация любой корреляционной функции.

Аппроксимация методом типовых косинусоидальных корреляционных функций основана на представлении корреляционной функции случайного процесса в виде конечной суммы типовых косинусоидальных корреляционных функций. Это представление осуществляется в области  $\tau$ , где  $K[X(\tau)]$  заметно отличается от нуля. Для этого выбирают такое  $T_0$ , при котором  $K[X(\tau)] \approx 0$  в случае  $|\tau| > T_0$ . Такой выбор основан на том, что  $K[X(\tau)]$  при неограниченном возрастании  $|\tau|$  стремится к нулю. Корреляционную функцию  $K[X(\tau)]$  приближенно выражают в виде тригонометрического ряда

$$\tilde{K}(\tau) = \sum_{k=0}^n A_k \cos k \frac{\pi}{T_0} \tau.$$

Коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  находят способом наименьших квадратов, соблюдая условие

$$J = \int_{-T_0}^{T_0} \{K[X(\tau)] - \tilde{K}(\tau)\}^2 d\tau = \min.$$

Оно получается в развернутом виде, если составить  $(n+1)$  частные производные  $\partial J/\partial A_k$ , где  $k=0, 1, 2, \dots, n$ , и приравнять

их нулю. Тогда найдем значения коэффициентов разложения  $\tilde{K}(\tau)$  в ряд Фурье

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} K[X(\tau)] d\tau, \quad A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} K[X(\tau)] d\tau.$$

Корреляционная функция для  $|\tau| \leq T_0$  приобретает вид

$$K[X(\tau)] = \tilde{K}(\tau) = \sum_{k=0}^n A_k \cos k \frac{\pi}{T_0} \tau.$$

Для  $|\tau| > T_0$  имеем  $K[X(\tau)] = 0$ .

Коэффициенты разложения в ряд Фурье могут быть приближенно найдены по формулам трапеций. Для этого интервал  $\tau$  в пределах от 0 до  $T_0$  разбивают на  $n$  равных частей  $\Delta\tau$ . Тогда

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} \{K[X(\tau_{m-1})] + K[X(\tau_m)]\} \Delta\tau;$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} \left\{ K[X(\tau_{m-1})] \cos k \frac{\pi}{T_0} \tau_{m-1} + \right. \\ \left. + K[X(\tau_m)] \cos k \frac{\pi}{T_0} \tau_m \right\} \Delta\tau.$$

В этих формулах  $\Delta\tau = T_0/n$  и  $\tau_m = mT_0/n$ . Если принять, что

$$y_0 = K[X(\tau_0)]/2; \quad y_1 = K[X(\tau_1)]; \quad \dots; \quad y_{n-1} = K[X(\tau_{n-1})] \text{ и}$$

$$y_n = K[X(\tau_n)]/2,$$

то

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n y_m \text{ и } A_k = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^n y_m \cos k \frac{\pi m}{n}.$$

Например, для  $n = 6$  предварительно вычисляют суммы  $y_0 + y_6 = \alpha_0$ ;  $y_1 + y_5 = \alpha_1$ ;  $y_2 + y_4 = \alpha_2$ ;  $y_3 = \alpha_3$ , разности  $y_0 - y_6 = \beta_0$ ;  $y_1 - y_5 = \beta_1$ ;  $y_2 - y_4 = \beta_2$ , суммы  $\alpha_0 + \alpha_3 = \gamma_0$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1$  и разности  $\alpha_0 - \alpha_3 = \delta_0$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta_1$ . Тогда  $6A_0 = \gamma_0 + \gamma_1$ ;  $3A_6 = \delta_0 - \delta_1$ ;  $3A_1 = (\beta_0 + 0,5\beta_2) + 0,866\beta_1$ ;  $3A_5 = (\beta_0 + 0,5\beta_2) - 0,866\beta_1$ ;  $3A_2 = \delta_0 + 0,5\delta_1$ ;  $3A_4 = \gamma_0 - 0,5\gamma_1$  и  $3A_3 = \beta_0 - \beta_2$ .

Для  $n = 12$  предварительно вычисляют суммы  $y_0 + y_{12} = \alpha_0$ ;  $y_1 + y_{11} = \alpha_1$ ;  $y_2 + y_{10} = \alpha_2$ ;  $y_3 + y_9 = \alpha_3$ ;  $y_4 + y_8 = \alpha_4$ ;  $y_5 + y_7 = \alpha_5$ ;  $y_6 = \alpha_6$ , разности  $y_0 - y_{12} = \beta_0$ ;  $y_1 - y_{11} = \beta_1$ ;  $y_2 - y_{10} = \beta_2$ ;  $y_3 - y_9 = \beta_3$ ;  $y_4 - y_8 = \beta_4$ ;  $y_5 - y_7 = \beta_5$ , суммы  $\alpha_0 + \alpha_6 = \gamma_0$ ;  $\alpha_1 + \alpha_5 = \gamma_1$ ;  $\alpha_2 + \alpha_4 = \gamma_2$ ;  $\alpha_3 = \gamma_3$ ; разности  $\alpha_0 - \alpha_6 = \delta_0$ ;  $\alpha_1 - \alpha_5 =$

$= \delta_1$ ;  $\alpha_2 - \alpha_4 = \delta_2$  и величины  $\varepsilon_0 = \beta_0 - \beta_4$ ;  $\varepsilon_1 = \beta_1 - \beta_3 - \beta_5$ .  
 Тогда  $12A_0 = (\gamma_0 + \gamma_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)$ ;  $6A_2 = (\gamma_0 + \gamma_2) - (\gamma_1 + \gamma_3)$ ;  
 $6A_6 = \delta_0 - \delta_2$ ;  $6A_4 = (\beta_0 + 0,866\beta_2 + 0,5\beta_4) + (0,966\beta_1 + 0,707\beta_3 +$   
 $+ 0,259\beta_5)$ ;  $6A_{11} = (\beta_0 + 0,866\beta_2 + 0,5\beta_4) - (0,966\beta_1 + 0,707\beta_3 +$   
 $+ 0,259\beta_5)$ ;  $6A_2 = (\delta_0 + 0,5\delta_2) + 0,866\delta_1$ ;  $6A_{10} = (\delta_0 + 0,5\delta_2) - 0,866\delta_1$ ;  
 $6A_3 = \varepsilon_0 + 0,866\varepsilon_1$ ;  $6A_9 = \varepsilon_0 - 0,866\varepsilon_1$ ;  $6A_4 = (\gamma_0 - 0,5\gamma_2) + (0,5\gamma_1 -$   
 $- \gamma_3)$ ;  $6A_8 = (\gamma_0 - 0,5\gamma_2) - (0,5\gamma_1 - \gamma_3)$ ;  $6A_5 = (\beta_0 - 0,866\beta_2 + 0,5\beta_4) +$   
 $+ (0,966\beta_5 - 0,707\beta_3 + 0,259\beta_1)$ ;  $6A_7 = (\beta_0 - 0,866\beta_2 + 0,5\beta_4) -$   
 $- (0,966\beta_5 - 0,707\beta_3 + 0,259\beta_1)$ .

Для аппроксимации применяют метод типовых экспоненциальных корреляционных функций. Корреляционная функция случайного процесса приближенно представляется в виде алгебраической суммы таких типовых функций:

$$K[X(\tau)] \approx \sum_{k=1}^n A_k e^{-\alpha_k |\tau|},$$

где  $\alpha_k$  — положительные показатели.

Если  $\alpha_k = k\alpha$ , где  $\alpha$  — положительная величина и  $k$  — целое число (1, 2, ..., n), то

$$K[X(\tau)] \approx \sum_{k=1}^n A_k e^{-k\alpha |\tau|}.$$

Для такого приближенного представления корреляционной функции из экспоненциальных функций  $e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $e^{-2\alpha|\tau|}$ , ...,  $e^{-n\alpha|\tau|}$  строят ортогонально нормированные функции  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$ , ...,  $\varphi_n(\tau)$ . Корреляционная функция выражается линейной их комбинацией, т. е.

$$K[X(\tau)] \approx \sum_{k=1}^n B_k \varphi_k(\tau). \quad (38)$$

Наилучшее приближение находят путем определения коэффициентов  $B_1, B_2, \dots, B_n$  способом наименьших квадратов. Для этого соблюдают условие

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ K[X(\tau)] - \sum_{k=1}^n B_k \varphi_k(\tau) \right\}^2 d\tau = \min. \quad (39)$$

Условия ортогональности функций  $\varphi_k(\tau)$  имеют вид

$$\int_0^{\infty} \varphi_k(\tau) \varphi_i(\tau) d\tau = 0,$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $k \neq i$ .

Условия нормированности таких функций —  $\int_0^{\infty} \varphi_k^2(\tau) d\tau = 1$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Функции  $\varphi_k(\tau)$  представляют в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= a_{11}e^{-\alpha|\tau|}; \quad \varphi_2(\tau) = a_{21}e^{-\alpha|\tau|} + a_{22}e^{-2\alpha|\tau|}, \dots, \varphi_n(\tau) = \\ &= a_{n1}e^{-\alpha|\tau|} + a_{n2}e^{-2\alpha|\tau|} + \dots + a_{nn}e^{-n\alpha|\tau|}\end{aligned}$$

$$\text{или } \varphi_k(\tau) = \sum_{i=1}^k a_{ki}e^{-i\alpha|\tau|}.$$

Коэффициенты  $a_{ki}$ , где  $k \geq i$ , выбирают из  $0,5(n^2 - n)$  условий ортогональности и  $n$  условий нормированности. Общее число этих коэффициентов  $(n^2 + n)/2 = [n(n + 1)]/2$  равно числу условий ортогональности и нормированности. Поэтому коэффициенты  $a_{k1}$  находятся однозначно. Учитывая, что  $\int_0^{\infty} a_{11}^2 e^{-2\alpha\tau} d\tau = 1$ , получаем  $a_{11} = \sqrt{2\alpha}$ . Из условий  $\int_0^{\infty} (a_{21}e^{-\alpha\tau} + a_{22}e^{-2\alpha\tau}) d\tau = 1$  и  $\int_0^{\infty} a_{11}e^{-\alpha\tau} \times (a_{21}e^{-\alpha\tau} + a_{22}e^{-2\alpha\tau}) d\tau = 0$ , находим  $\alpha_{22} = 6\sqrt{\alpha}$  и  $\alpha_{21} = -4\sqrt{\alpha}$ . Аналогично определяем остальные коэффициенты. В результате получаем

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}; \quad \varphi_2(\tau) = \sqrt{\alpha} (-4e^{-\alpha|\tau|} + 6e^{-2\alpha|\tau|}); \\ \varphi_3(\tau) &= \sqrt{6\alpha} (3e^{-\alpha|\tau|} - 12e^{-2\alpha|\tau|} + 10e^{-3\alpha|\tau|}); \quad \varphi_4(\tau) = \sqrt{2\alpha} (-8e^{-\alpha|\tau|} + \\ &+ 60e^{-2\alpha|\tau|} - 120e^{-3\alpha|\tau|} + 70e^{-4\alpha|\tau|}); \quad \varphi_5(\tau) = \sqrt{10\alpha} (5e^{-\alpha|\tau|} - \\ &- 60e^{-2\alpha|\tau|} + 210e^{-3\alpha|\tau|} - 280e^{-4\alpha|\tau|} + 126e^{-5\alpha|\tau|}).\end{aligned}$$

Минимизируя интеграл (39), получают коэффициенты  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Для этого решают систему уравнений  $dI/dB_k = 0$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Однако непосредственно дифференцируя интеграл (39), получаем  $\int_0^{\infty} \left\{ K[X(\tau)] - \sum_{i=1}^n B_i \varphi_i(\tau) \right\} \varphi_k(\tau) d\tau = 0$  или  $\sum_{i=1}^n B_i \int_0^{\infty} \varphi_i(\tau) \varphi_k(\tau) \times (\tau) d\tau = \int_0^{\infty} K[X(\tau)] \varphi_k(\tau) d\tau$ . Так как функции  $\varphi_i(\tau)$  и  $\varphi_k(\tau)$  — ортогональные и нормированные, то  $B_k = \int_0^{\infty} K[X(\tau)] \varphi_k(\tau) d\tau$ .

Подставляя функции  $\varphi_k(\tau)$  в приближенное равенство (38), получаем

$$K[X(\tau)] \approx \sum_{i=1}^n B_k \sum_{i=1}^k a_{ki} e^{-i\alpha|\tau|} \approx \sum_{k=1}^n A_k e^{-k\alpha|\tau|}.$$

$$\text{При этом } A_k = \sum_{i=k}^n B_i a_{ik}.$$

Две случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  одного и того же аргумента считают стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция зависит от разности аргументов, т. е.

$$R[X(t_i), Y(t_j)] = K[X(\tau), Y(\tau)].$$

При стационарной связи случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  соблюдается равенство

$$K[X(\tau), Y(\tau)] = K[Y(-\tau), X(-\tau)].$$

Следовательно, кривая  $K[Y(\tau), X(\tau)]$  — зеркальное отражение кривой  $K[X(\tau), Y(\tau)]$  относительно оси ординат (рис. 19).

Для стационарных и стационарно связанных случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеем

$$|K[X(\tau), Y(\tau)]| \leq \sigma[X(\tau)] \sigma[Y(\tau)].$$

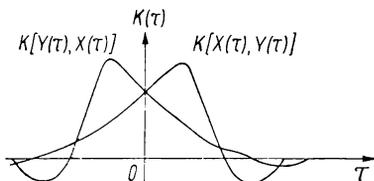


Рис. 19

Например, случайные функции  $X(t) = Z \cos \omega t + U \sin \omega t$  и  $Y(t) = -Z \sin \omega t + U \cos \omega t$ , где  $Z$  и  $U$  — некоррелированные

случайные величины, у которых  $M(Z) = M(U) = 0$  и  $D(Z) = D(U) = D$  имеют корреляционные функции  $K[X(\tau)] = K[Y(\tau)] = D \cos \omega \tau$ . Взаимная корреляционная функция  $R[X(t_i), Y(t_j)] = -D \cos \omega t_i \sin \omega t_j + D \sin \omega t_i \cos \omega t_j = D \sin \omega \times (t_i - t_j) = D \sin \omega \tau$ . Следовательно, эти случайные функции стационарно связанные. Однако случайные функции  $X(t) = Z \cos \omega t + U \sin \omega t$  и  $Y(t) = Z \cos \omega t + V \sin \omega t$ , где  $Z$ ,  $U$  и  $V$  — некоррелированные случайные величины, у которых  $M(Z) = M(U) = M(V) = 0$  и  $D(Z) = D(U) = D(V) = D$  — стационарные, но не обладающие стационарной связью. Их корреляционные функции будут

$$K[X(t_i), X(t_j)] = K[Y(t_i); Y(t_j)] = D \cos \omega (t_i - t_j).$$

Взаимная корреляционная функция не будет зависеть от разности аргументов  $t_i$  и  $t_j$ . Она имеет вид  $R[X(t_i), Y(t_j)] = D \cos \omega t_i \cos \omega t_j$ .

Изучение нестационарных случайных процессов, как отмечалось выше, более сложное, чем одномерных стационарных случайных функций (временных рядов). Применение к ним выводов и методов математико-статистического анализа, разработанных для стационарных условий, не всегда допустимо. Более того, общих приемов анализа нестационарных многомерных случайных функций еще нет. Между тем нестационарные случайные процессы, статистические свойства которых изменяются во времени, широко распространены в геодезии. Они характер-

ны для переменных условий работы измерительной аппаратуры, измерений в среде с резко изменяющимися параметрами и т. д.

При анализе нестационарных случайных функций идут двумя путями. Первый из них состоит в том, что случайный процесс считается приближенно стационарным — псевдостационар-

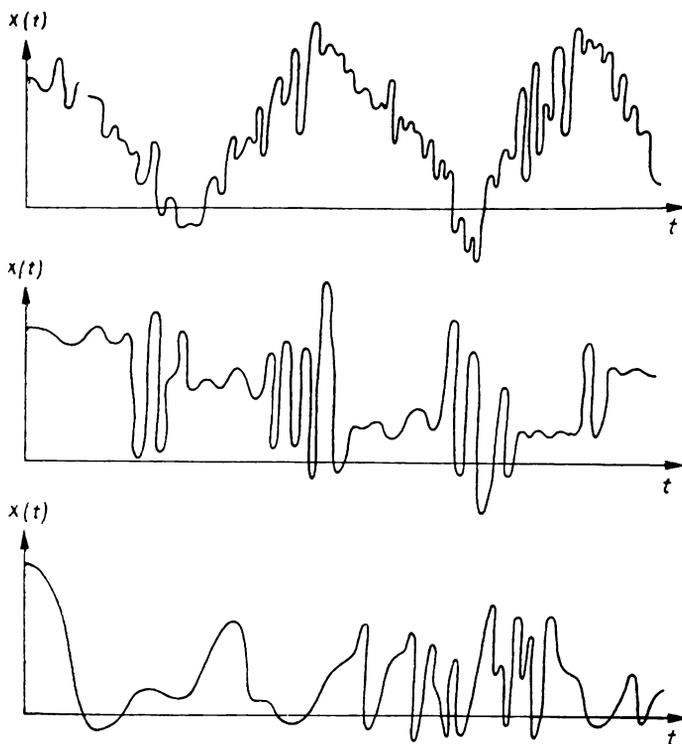


Рис. 20

ным. Для его изучения используют методы теории стационарных случайных функций. Второй путь основан на классификации нестационарных случайных процессов и разработке для каждого из типов таких процессов специальных приемов математико-статистического анализа. Некоторые типы нестационарных случайных процессов, обладающие переменным математическим ожиданием, дисперсией и частотной структурой, показаны на рис. 20.

Многие динамические системы могут быть описаны, хотя бы приближенно, с помощью стационарных случайных функций. Некоторые явно нестационарные случайные процессы выражаются через неслучайные функции и стационарные случайные функции. При этом речь идет о стационарности в широком

смысле. Известно, что стационарная случайная функция в таком смысле может оказаться нестационарной в узком смысле.

Однако часто в теории погрешностей измерений этим обстоятельством пренебрегают. Обычно надеются на действие центральной предельной теоремы и останавливаются на нормальных случайных функциях, для которых стационарность в широком и узком смысле совпадает.

Для приближенного представления стационарной случайной функции используют разложение ее на некоррелированные элементарные случайные функции, каждая из которых определяется одной случайной величиной и одной неслучайной функцией. Если приближенное выражение случайной функции  $X(t)$  будет  $\tilde{X}(t)$ , то при таком разложении требуется, чтобы

$$M[X(t)] \approx M[\tilde{X}(t)] = \tilde{M}[X(t)]. \quad (40)$$

Корреляционная функция  $K[X(t_1), X(t_2)]$  приближенно представляется в виде  $\tilde{K}[X(t_1), X(t_2)]$ . Здесь так же соблюдается условие  $K[X(t_1), X(t_2)] \approx \tilde{K}[X(t_1), X(t_2)]$ .

Условие (40) выполняется, если

$$\tilde{X}(t) = M[X(t)] + \sum_{i=0}^m Z_i f_i(t),$$

где  $Z_i$  — взаимно некоррелированные случайные величины, у которых  $M(Z_i) = 0$  и  $f_i(t)$  — неслучайные функции.

Если дисперсия случайной величины  $Z_i$  равна  $D(Z_i)$ , то

$$\tilde{K}[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{i=0}^m D(Z_i) f_i(t_1) f_i(t_2).$$

Для приближенного представления  $\tilde{X}(t)$  стационарной случайной функции  $X(t)$  в промежутке  $-0,5T < t < 0,5T$  корреляционную функцию  $K[X(\tau)]$  следует выразить в интервале  $-T < \tau < T$  рядом Фурье с периодом  $2T$ , т. е.

$$K[X(\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{-ik\Delta\omega\tau},$$

$$\text{где } \Delta\omega = \pi/T; \quad A_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K[X(\tau)] e^{-ik\Delta\omega\tau} d\tau =$$

$$= \Delta\omega/2\pi \int_{-T}^T K[X(\tau)] \cos k\Delta\omega\tau d\tau.$$

$$A_k = A_{-k}.$$

Представление о стационарности распространяется на систему случайных функций  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$ . Она будет стационарной в узком смысле, если все  $n$ -мерные законы ее распределения не зависят от значений аргумента  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , а только от их интервалов  $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$ . Система случайных функций будет стационарной в широком смысле, если все математические ожидания  $M[X_1(t)], M[X_2(t)], \dots, M[X_m(t)]$  постоянные, а все корреляционные и взаимные корреляционные функции зависят от разности  $\tau$  аргументов. Таким образом, ста-

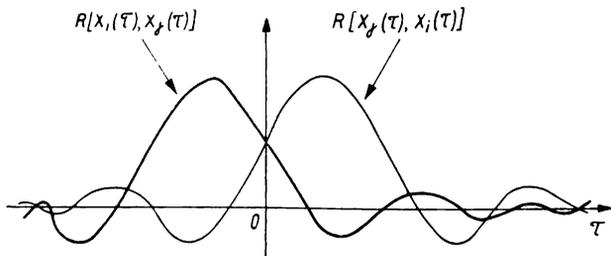


Рис. 21

ционарность случайных функций  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$  не является достаточным условием стационарности системы этих случайных функций. Для стационарности указанной системы в широком смысле нужно, чтобы взаимные корреляционные функции зависели от разности  $\tau$  аргументов. При соблюдении этого требования случайные функции считают стационарно связанными. Для них взаимные корреляционные функции будут

$$R[X_i(\tau), X_j(\tau)] = M \{ [X_i(t) - M[X_i(t)]] [X_j(t+\tau) - M[X_j(t+\tau)]] \}.$$

Они обладают свойствами симметрии:

$$R[X_i(\tau), X_j(\tau)] = R[X_i(-\tau), X_j(-\tau)];$$

$$R[X_j(\tau), X_i(\tau)] = R[X_j(-\tau), X_i(-\tau)].$$

Это свойство показано на графике взаимных корреляционных функций (рис. 21). Очевидно,

$$R[X_i(\tau), X_j(\tau)] \leq \sigma[X_i(\tau)] \sigma[X_j(\tau)].$$

Нормированные взаимные корреляционные функции определяются по формуле

$$r[X_i(\tau), X_j(\tau)] = R[X_i(\tau), X_j(\tau)] / \sigma[X_i(\tau)] \sigma[X_j(\tau)].$$

## § 2. Эргодические стационарные случайные функции

подавляющему большинству стационарных случайных функций характерны свойства эргодичности. Это относится к случайным функциям, обладающим стационарностью в узком и

широком смысле. Свойства эргодичности состоят в том, что каждая отдельная реализация стационарной случайной функции—представитель всей совокупности таких возможных реализаций. Она ведет себя почти так же, как любая другая реализация случайной функции. При этом предусмотрена реализация достаточной продолжительности.

Если стационарная случайная функция имеет свойство эргодичности, громоздкую математико-статистическую обработку множества реализаций случайной функции можно заменить изучением одной реализации той же продолжительности. В этом случае отпадает необходимость двухступенчатой обработки: приближенного определения числовых характеристик случайной функции и осреднения этих характеристик.

Различают стационарные случайные процессы  $X(t)$ , эргодичные по математическому ожиданию, дисперсии и корреляционной функции. В первом случае рассмотрим функцию  $Y(t) = f[X(t)]$ . Если случайная функция  $X(t)$  стационарная, то  $M[Y(t)] = M\{f[X(t)]\}$ .

Стационарная в узком смысле случайная функция  $X(t)$  будет эргодической по математическому ожиданию тогда, когда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f[X(t)] dt - M[Y(t)] \right\}^2 = 0, \quad (41)$$

где  $t_0$  — произвольный начальный момент времени,  $T$  — интервал осреднения функции  $f[X(t)]$ .

Это равенство определяет сходимость по дисперсии случайной величины  $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f[X(t)] dt$  к  $M[Y(t)]$  при  $T \rightarrow \infty$ . Естественно, что в таком случае имеется сходимость по вероятности. Здесь учитывается проявление закона больших чисел применительно к среднему значению случайной функции  $Y(t)$ . Эргодическое свойство стационарной в узком смысле случайной функции  $X(t)$ , выраженное равенством (41), позволяет найти приближенное значение  $M[Y(t)]$  путем осреднения значений  $Y(t)$  по времени. Используя одну из реализаций случайной функции на достаточно большом, но конечном интервале времени  $T$ , получают

$$M[Y(t)] \approx \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Y(t) dt.$$

При каждом конечном значении  $T$  такая величина является случайной. Выполнив некоторые преобразования, найдем

$$M \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Y(t) dt - M[Y(t)] \right\}^2 = 2/T^2 \int_0^T (T - \tau) K[y(\tau)] d\tau.$$

При этом

$$K[Y(\tau)] = M\{[Y(t) - M[Y(t)]]\{Y(t + \tau) - M[Y(t)]\}\}.$$

Таким образом, условие эргодичности стационарной в узком смысле случайной функции  $X(t)$  по отношению к математическому ожиданию  $M[Y(t)]$  представляют в следующем виде:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T (1 - \tau/T) K[Y(\tau)] d\tau = 0. \quad (42)$$

Стационарная в узком и широком смысле случайная функция  $X(t)$  — эргодическая по отношению  $M[X(t)]$ , если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left\{1/T \int_{t_0}^{t_0+T} X(t) dt - M[X(t)]\right\}^2 = 0.$$

При соблюдении такого условия предоставляется возможность найти приближенное значение  $M[X(t)]$  не по множеству реализаций случайной величины  $X(t)$ , а по одной из них на достаточно большом, но конечном интервале времени  $T$ . Условие эргодичности стационарной в узком и широком смысле случайной функции  $X(t)$  будет

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T (1 - \tau/T) K[X(\tau)] d\tau = 0.$$

Стационарная случайная функция  $X(t)$  — эргодическая по отношению к корреляционной функции  $r[X(\tau)]$ , если при любом  $\tau$  соблюдается условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{1/T \int_{t_0}^{t_0+T} [X(t) - M[X(t)]] [X(t + \tau) - M[X(t)]] dt - K[X(\tau)]\right\}^2 = 0. \quad (43)$$

При выполнении такого условия приближенное значение корреляционной функции находится не по множеству реализаций случайной функции, а по одной достаточно большой реализации на конечном интервале времени  $T$ , т. е.

$$K[X(\tau)] \approx 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} \{X(t) - M[X(t)]\} \{X(t + \tau) - M[X(t)]\} dt.$$

Для каждого конечного значения  $T$  такая величина — случайная, имеющая математическое ожидание  $M[X(\tau)]$ . Отсюда условие эргодичности (43) эквивалентно сходимости по диспер-

сии и сходимости по вероятности этой случайной величины к ее математическому ожиданию. Сходимость по дисперсии записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \{K[X(\tau)] - M(K[X(\tau)])\}^2 = 0.$$

Стационарная случайная функция  $X(t)$  эргодическая по отношению к дисперсии  $D[X(t)]$ , если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [X(t) - M[X(t)]]^2 dt - D[X(t)] \right\}^2 = 0.$$

Это — частный случай эргодичности стационарного случайного процесса  $X(t)$  по отношению к его корреляционной функ-

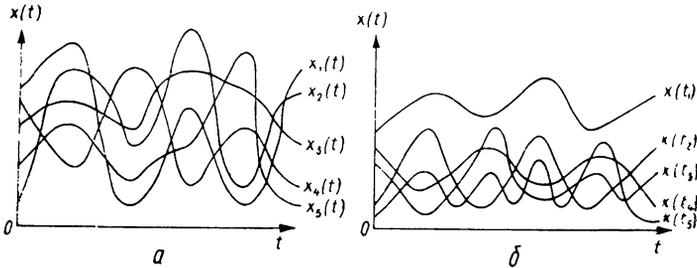


Рис. 22

ции. Всякий случайный процесс, эргодический по отношению к корреляционной функции,— эргодический по отношению к дисперсии. Из изложенного видно, что условия эргодичности стационарного случайного процесса по отношению к математическому ожиданию и корреляционной функции не одинаковые. Поэтому может существовать стационарная случайная функция, эргодическая по отношению к математическому ожиданию и неэргодическая к дисперсии и корреляционной функции.

Обычно пользуются более простыми и в то же время достаточными условиями эргодичности стационарной случайной функции. По отношению к математическому ожиданию и корреляционной функции для этого достаточно неограниченного убывания абсолютного значения корреляционной функции  $K[X(\tau)]$  к нулю при  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Следует иметь в виду, что для эргодической стационарной случайной функции определение основных числовых характеристик возможно не по каждой, а почти по каждой отдельной реализации. Это обусловлено тем, что не исключено появление реализации, не обладающей свойством эргодичности. Однако вероятность ее возникновения близка к нулю.

Суждение об эргодичности стационарной случайной функции часто строится на основе ее физического анализа. Для неэргодической стационарной случайной функции характерна воз-

возможность ее разложения на более элементарные случайные процессы, которые осуществляются с различной вероятностью и обладают своими характеристиками. Такая внутренняя неоднородность случайного процесса вызывается разными обстоятельствами и довольно наглядно обнаруживается на графиках случайного процесса (рис. 22, а — эргодического, б — неэргодического).

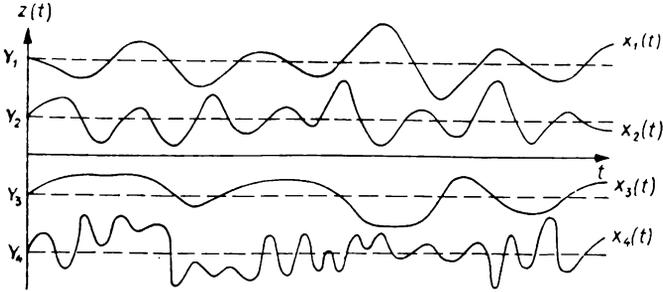


Рис. 23

Неэргодичность случайного процесса  $Z(t)$  может быть обусловлена, например, включением в него обычной случайной величины  $Y$ . Тогда случайная функция приобретает такой вид:

$$Z(t) = X(t) + Y.$$

Допустим, что  $X(t)$  — эргодическая стационарная случайная функция с числовыми характеристиками  $M[X(t)]$  и  $K[X(\tau)]$ . Случайная величина  $Y$  обладает числовыми характеристиками  $M(Y)$  и  $D(Y)$ . Случайная функция  $X(t)$  и случайная величина  $Y$  некоррелированы. Математическое ожидание случайной функции  $Z(t)$  будет  $M[Z(t)] = M[X(t)] + M(Y)$ .

Корреляционная функция в таком случае находится по формуле  $K[Z(\tau)] = K[X(\tau)] + D(Y)$ .

Очевидно, случайная функция  $Z(t)$  — стационарная, но не имеет эргодического свойства. У нее каждая реализация отличается от других реализаций, а их числовые характеристики зависят от принятого значения случайной величины (рис. 23). Для неэргодического стационарного случайного процесса характерный вид имеет корреляционная функция, которая при  $\tau \rightarrow \infty$  не стремится к нулю, а приближается к дисперсии случайной величины  $D(Y)$  (рис. 24).

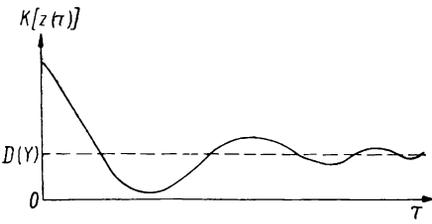


Рис. 24

Очевидно, случайная функция  $Z(t)$  — стационарная, но не имеет эргодического свойства. У нее каждая реализация отличается от других реализаций, а их числовые характеристики зависят от принятого значения случайной величины (рис. 23). Для неэргодического стационарного случайного процесса характерный вид имеет корреляционная функция, которая при  $\tau \rightarrow \infty$  не стремится к нулю, а приближается к дисперсии случайной величины  $D(Y)$  (рис. 24).

Практически нет возможности исследовать случайный процесс и его корреляционную функцию на бесконечном участке времени  $\tau$ , который всегда ограничен. Если обнаружится, что корреляционная функция при увеличении  $\tau$  не убывает и при некотором значении  $\tau$  остается приблизительно постоянной, то следует считать, что в состав случайного процесса входит обычная случайная величина. Этот случайный процесс не является эргодическим.

Стационарная система случайных функций эргодическая по отношению к взаимной корреляционной функции, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \{X_i(t) - M[X_i(t)]\} \{X_j(t + \tau) - M[X_j(t + \tau)]\} dt - R[X_i(\tau), X_j(\tau)] \right]^2 = 0,$$

где  $t_0$  — произвольный момент времени.

Если случайные функции  $X_i(t)$  и  $X_j(t)$  обладают нормальными законами распределения, то это условие приобретает следующий вид:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \tau_1/T) \{R[X_i(\tau_1), X_i(\tau_1)] R[X_j(\tau_1), X_j(\tau_1)] + R[X_i(\tau + \tau_1), X_j(\tau + \tau_1)] R[X_i(\tau - \tau_1), X_j(\tau - \tau_1)]\} d\tau_1 = 0.$$

Практически эргодичность по отношению к взаимной корреляционной функции определяют по неограниченному убыванию, по абсолютной величине корреляционных функций  $R[X_i(\tau), X_i(\tau)]$ ,  $R[X_j(\tau), X_j(\tau)]$  и взаимной корреляционной функции  $R[X_i(\tau), X_j(\tau)]$  при беспредельном увеличении  $|\tau|$ . Эргодическая стационарная система случайных функций обеспечивает более простое определение вероятностных характеристик по экспериментальным данным.

### **§ 3. Математико-статистический анализ эргодической стационарной случайной функции**

Допустим, что стационарная случайная функция  $X(t)$  обладает эргодическим свойством. Для определения ее характеристик используем одну из реализаций на достаточно большом отрезке времени. Она будет практически эквивалентной множеству реализаций той же продолжительности. Эквивалентность оценивается в смысле объема информации о поведении

случайной функции. Характеристики эргодической случайной функции находятся не путем осреднений по множеству наблюдений, а в результате подсчета средних по времени. Математическое ожидание приближенно вычисляется по формуле

$$\tilde{M}[X(t)] \approx 1/T \int_0^T x(t) dt.$$

При неограниченном возрастании интервала времени  $T$  такое эмпирическое математическое ожидание  $\tilde{M}[X(t)]$  будет по дисперсии и вероятности сходиться к математическому ожиданию  $M[X(t)]$ . Фактически реализация случайной функции  $x(t)$  получается на ограниченном интервале времени. Поэтому  $\tilde{M}[X(t)]$  — случайная величина. Чем больше интервал  $T$ , тем меньше вероятность существенного отклонения статистического математического ожидания от теоретического. Если этот интервал находится в пределах от  $t_0$  до  $T+t_0$ , то

$$\tilde{M}[X(t)] \approx 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt.$$

Практически интеграл заменяют конечной суммой и находят  $x(t)$  для определенных значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Чаще всего принимают равноотстоящие значения  $t$ . Промежуток между ними —  $T/n$ . Тогда при равнооточных наблюдениях оценкой математического ожидания является простая арифметическая средняя

$$\bar{x}(t) = 1/n \sum_{i=1}^n x(t_i),$$

где  $t_i = T_0 + \frac{T}{n}(i-1)$ .

Она дает точечную оценку математического ожидания, т. е.

$$\bar{x}(t) \approx M[X(t)].$$

Доверительный интервал, накрывающий теоретическое математическое ожидание, строится по Стьюденту

$$\bar{x}(t) - \gamma\tilde{\sigma}(\bar{x}) < M[X(t)] < \bar{x}(t) + \gamma\tilde{\sigma}(\bar{x}).$$

Определив флюктуации по времени  $\delta[x(t_j)] = x(t_j) - \tilde{M}[X(t)] = x(t_j) - \bar{x}(t)$ , находят эмпирическую корреляционную функцию

$$\tilde{K}[X(\tau)] = 1/T - \tau \int_0^{T-\tau} \delta[x(t)] \delta[x(t+\tau)] dt.$$

При неограниченном возрастании времени  $T$  эмпирическая корреляционная функция по дисперсии и вероятности сходится к теоретической корреляционной функции. Практически время  $T$  ограниченное. Если оно достаточно большое, то вероятность существенного отклонения эмпирической корреляционной функции от теоретической окажется небольшой. Заменяя интеграл приближенной суммой, получаем

$$\tilde{K}[x(\tau)] = 1/n \sum_{i=1}^n \delta[x(t_i)] \delta[x(t_i + \tau_j)],$$

где  $\tau_j = Tj/n$ .

Для вычисления эмпирической корреляционной функции применяют также формулу

$$\tilde{K}[X(\tau)] = 1/T - \tau \int_{t_0}^{t_0+T-\tau} x(t) x(t + \tau) dt - \tilde{M}[X(t)].$$

Тогда

$$\tilde{K}[X(\tau)] = 1/n \sum_{i=1}^n x(t_i) x(t_i + \tau_j) - \bar{x}(t).$$

Однако приведенные статистические оценки корреляционной функции являются смещенными. Несмещенная оценка определяется по выражению

$$\tilde{K}[X(\tau)] = 1/n - 1 \sum_{i=1}^n \delta[x(t_i)] \delta[x(t_i + \tau_j)].$$

Вычисление корреляционной функции упрощается в случаях использования технических устройств — корреляторов. Эмпирическая корреляционная функция — точечная оценка теоретической корреляционной функции, т. е.  $\tilde{K}[X(\tau)] \approx K[X(\tau)]$ .

Статистическая дисперсия эргодической стационарной случайной функции вычисляется по формуле  $\tilde{D}[X(\tau)] = \tilde{K}[X(0)]$ .

Следовательно,

$$\tilde{D}[X(\tau)] = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} \{\delta[X(t)]\}^2 dt$$

или

$$\tilde{D}[X(\tau)] = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 dt - \tilde{M}[X(t)].$$

Переходя к конечным суммам, получаем

$$\tilde{D}[X(\tau)] = 1/n \sum_{i=1}^n \{\delta[x(t_i)]\}^2$$

или

$$\tilde{D}[X(\tau)] = 1/n \sum_{i=1}^n [x(t_i)]^2 - \bar{x}(\tau). \quad (44)$$

Эмпирическая дисперсия — точечная оценка теоретической дисперсии, т. е.  $\tilde{D}[X(\tau)] \approx D[X(\tau)]$ .

Однако с помощью выражения (44) получают смещенную оценку теоретической дисперсии. Несмещенная оценка имеет вид

$$\tilde{D}[X(\tau)] = 1/n - 1 \sum_{i=1}^n \{\delta[x(t_i)]\}^2.$$

Эмпирический стандарт находится по формуле

$$\tilde{\sigma}[X(\tau)] = \sqrt{1/n - 1 \sum_{i=1}^n \{\delta[x(t_i)]\}^2}.$$

Он является точечной оценкой теоретического стандарта, т. е.  $\tilde{\sigma}[X(\tau)] = \sigma[X(\tau)]$ .

Доверительный интервал, накрывающий  $\sigma[X(\tau)]$ , строится с помощью приведенных ранее способов и составляет  $z_1 \tilde{\sigma}[X(\tau)] < \sigma[X(\tau)] < z_2 \tilde{\sigma}[X(\tau)]$ .

Примерное суждение о точности определения эмпирического стандарта получают из выражения

$$\sigma\{\tilde{\sigma}[X(\tau)]\} \approx \tilde{\sigma}[X(\tau)]/\sqrt{2(n-1)}.$$

Статистический стандарт арифметической средней

$$\tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)] = \tilde{\sigma}[X(\tau)]/\sqrt{n}.$$

Он используется в качестве точечной оценки теоретического стандарта арифметической средней  $\tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)] \approx \sigma[\bar{X}(\tau)]$ .

Приближенное суждение о точности этой оценки получают по формуле

$$\sigma\{\tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)]\} \approx \tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)]/\sqrt{2(n-1)}.$$

Доверительный интервал, накрывающий теоретический стандарт с вероятностью  $P$ , будет

$$z_1 \tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)] < \sigma[X(\tau)] < z_2 \tilde{\sigma}[\bar{x}(\tau)].$$

Интервал, накрывающий  $M[X(\tau)]$  с доверительной вероятностью  $P$ , находится по Стьюденту и составляет

$$\bar{x}(\tau) - \gamma\sigma[\bar{x}(\tau)] < M[X(\tau)] < \bar{x}(\tau) + \gamma\sigma[\bar{x}(\tau)].$$

Эмпирическая корреляционная или автокорреляционная функция определяется для значений  $\tau$ , равных  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, n\Delta t$ , где  $n=T/\Delta t$ . Выбор  $\Delta t$  обусловлен характером реализации случайной функции  $X(t)$ . Если она изменяется плавно, то  $\Delta t$  может быть достаточно большой. При резких и частых колебаниях  $\Delta t$  уменьшают. Полагают, что на полный период самой высокочастотной гармонике должно приходиться 5—10 опорных точек. Однако выбор их числа может диктоваться темпом наблюдений или устройством записывающей аппаратуры. Во всех случаях не стремятся вставлять камеральным путем дополнительные точки. Они не повысят точность характеристик случайной функции, а только усложнят обработку.

Эмпирическая корреляционная функция будет

$$\tilde{K}[x(\tau)] = 1/n - 1 \sum_{i \neq j} \delta[x(t_i)] \delta[x(t_j)].$$

Она служит точечной оценкой теоретической корреляционной функции  $\tilde{K}[x(\tau)] \approx K[X(\tau)]$ .

Эмпирическую нормированную корреляционную функцию или эмпирический коэффициент корреляции определяют из выражения

$$\tilde{r}[x(\tau)] = \tilde{K}[x(\tau)]/\tilde{D}[x(\tau)].$$

Он выражает точечную оценку теоретического коэффициента корреляции  $\tilde{r}[x(\tau)] \approx r[X(\tau)]$ . Точность этой оценки приближенно вычисляют по формуле

$$\sigma\{\tilde{r}[x(\tau)]\} \approx \frac{1 - \tilde{r}^2[x(\tau)]}{\sqrt{n}}.$$

Для интервальной оценки выполняют преобразование Р. Фишера, приравнивая коэффициент корреляции гиперболическому тангенсу  $z$ , т. е.  $\tilde{r}[x(\tau)] = \text{th } \tilde{Z}$  или  $\tilde{Z} = 1/2 \ln\{1 + \tilde{r}[x(\tau)]\}/\{1 - \tilde{r}[x(\tau)]\}$ . Случайная величина  $\tilde{Z}$  имеет почти нормальное распределение со стандартом  $\sigma(\tilde{Z}) = 1/\sqrt{n-3}$ . Теоретическое значение ее накрывается доверительным интервалом  $\tilde{Z} - \gamma\sigma(\tilde{Z}) < Z < \tilde{Z} + \gamma\sigma(\tilde{Z})$ , где  $\gamma$  зависит от доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $k = n - 2$ .

От  $\tilde{Z} - \gamma\sigma(\tilde{Z})$  и  $\tilde{Z} + \gamma\sigma(\tilde{Z})$  переходят к  $r'[x(\tau)]$  и  $r''[x(\tau)]$  и строят доверительный интервал

$$r'[x(\tau)] < |\tilde{r}[x(\tau)]| < r''[x(\tau)].$$

Корреляционная связь считается существенной, если  $|\tilde{r}[x(\tau)]| > \tilde{\sigma}\{\tilde{r}[x(\tau)]\}$ . Для такой проверки применяют формулу Каппа  $\tilde{Z} > \gamma\sigma(\tilde{Z})$ . Пользуются также критерием  $t$ , определяемым по уравнению

$$t = |\tilde{Z}| \sqrt{\{n-2\}/\{1-\tilde{r}[x(\tau)]\}}.$$

Гипотеза  $r[X(\tau)] = 0$  отвергается, если  $t > \gamma$ , где  $\gamma$  находится по заданной доверительной вероятности  $P$  и числу степеней свободы  $k = n - 2$ . Если коэффициент корреляции существенный, то эмпирический стандарт арифметической средней будет

$$\tilde{\sigma}[\bar{x}(t)] = \frac{\tilde{\sigma}[x(t)]}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{2}{n} \sum_{i \neq j} \tilde{r}[x(\tau)]}.$$

Для определения характеристик эргодической стационарной случайной функции нужно иметь большое число  $n$  наблюдений (не менее 100). Вычисление корреляционной функции может не охватывать всего периода  $T$ . Например, принимают  $\tau = m\Delta t = mT/n$ . Тогда

$$\tilde{K}[x(\tau)] = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \delta[x(t_i)] \delta[x(t_{i+m})].$$

Ее вычисляют для  $m = 1, 2 \dots$  последовательно вплоть до таких значений  $m$ , при которых  $\tilde{K}[x(\tau)]$  практически приближается к нулю или совершает небольшие нерегулярные колебания относительно его. Математико-статистическая обработка эргодического стационарного случайного процесса сопровождается аппроксимацией обычно только нормированной корреляционной функции подходящей типовой корреляционной функцией и спектральным анализом случайного процесса.

#### § 4. Нестационарные случайные функции

Наиболее простой пример нестационарной случайной функции — элементарная случайная функция

$$X(t) = Zf(t),$$

где  $Z$  — случайная величина с математическим ожиданием  $M(Z) = 0$ ,  $f(t)$  — неслучайная функция с аргументом  $t$ .

Обычно нестационарной является сумма элементарных случайных функций

$$X(t) = \sum_{i=1}^m Z_i f_i(t).$$

Здесь  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  — система случайных величин, у которых  $M(Z_1) = M(Z_2) = \dots = M(Z_m) = 0$ ,  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$  — неслучайные функции одного и того же аргумента  $t$ . Корреляционная функция будет

$$K[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K(Z_i, Z_j) f_i(t_1) f_j(t_2).$$

Дисперсия составляет

$$D[X(t)] = K[X(t), X(t)] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K(Z_i, Z_j) f_i(t) f_j(t).$$

Если случайные величины  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  некоррелированы, то корреляционный момент  $K(Z_i, Z_j) = 0$  (при  $i \neq j$ ). Тогда

$$K[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{i=1}^m K(Z_i, Z_i) f_i(t_1) f_i(t_2).$$

Дисперсия будет 
$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^m K(Z_i, Z_i) f_i^2(t).$$

Однако не всегда сумма элементарных случайных функций нестационарная. Например, свойства стационарности приобретаются случайными процессами, корреляционные функции которых содержат постоянные или периодические составляющие. Стационарным будет периодический случайный процесс постоянной частоты и случайная функция, не изменяющаяся во времени. Периодическая стационарная случайная функция записывается в таком виде:

$$X(t) = M[X(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t),$$

где случайные составляющие  $X_k(t)$  некоррелированы между собой и  $M[X_k(t)] = 0$ .

При этом  $X_k(t) = C_k \cos(k\omega + \Phi_k)$ , где  $C_k$  и  $\Phi_k$  — случайные амплитуда и фаза  $k$ -ой составляющей частоты  $k\omega$  независимы.

Очевидно, корреляционная функция  $K[X(t), X(t+\tau)]$  зависит от разности аргументов  $\tau$ .

Приведем условия стационарности периодической случайной функции:

$$X(t) = M[X(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega),$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — случайные амплитуды косинусоидальной и синусоидальной частей  $k$ -ой составляющей частоты  $k\omega$ . Они сводятся к некоррелированности отдельных периодических составляющих, а также косинусоидальной и синусоидальной их частей и равенству дисперсий случайных амплитуд этих частей. Тогда корреляционная функция

$$K[X(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} D \cos k\omega.$$

При этом  $M(a_k) = M(b_k)$ ,  $M(a_k b_k) = 0$  и  $D = D[X_k(t)] = M(a_k^2) = M(b_k^2)$ .

Нестационарным является случайный процесс, представленный в виде  $X(t) = f(t) + Z(t)$ , где  $f(t)$  — неслучайная функция и  $Z(t)$  — стационарная случайная функция.

Математическое ожидание этой функции зависит от аргумента  $t$  и имеет следующий вид:

$$M[X(t)] = f(t) + M[Z(t)].$$

Между тем корреляционная функция  $K[X(t_i), X(t_j)]$  зависит от разности аргументов  $\tau = t_j - t_i$  и равна корреляционной функции стационарного случайного процесса  $Z(t)$ .

К нестационарному относится случайный процесс

$$X(t) = \psi(t) + f(t) Z(t), \quad (45)$$

где  $\psi(t)$  и  $f(t)$  — неслучайные функции,  $Z(t)$  — стационарная случайная функция.

Очевидно, его математическое ожидание

$$M[X(t)] = \psi(t) + f(t) M[Z(t)].$$

Корреляционная функция определяется из выражения

$$K[X(t_1), X(t_2)] = f(t_1) f(t_2) K[Z(\tau)],$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ .

Дисперсия будет  $D[X(t)] = f^2(t) D[Z(\tau)]$ .

Нестационарной является линейная комбинация случайных функций (45), т. е.

$$X(t) = \psi(t) + \sum_{i=1}^m f_i(t) Z_i(t),$$

где  $\psi(t)$  и  $f_i(t)$  — неслучайные функции,  $Z_i(t)$  — стационарные случайные функции.

Математическое ожидание

$$M[X(t)] = \psi(t) + \sum_{i=1}^m f_i(t) M[Z_i(\tau)].$$

Корреляционная функция принимает вид

$$K[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m f_i(t_1) f_k(t_2) K[Z_i(\tau), Z_k(\tau)].$$

В нее входит взаимная корреляционная функция случайных процессов  $Z_i(t)$  и  $Z_k(t)$ , определяемая по формуле

$$K[Z_i(\tau), Z_k(\tau)] = M\{\{Z_i(t_1) - M[Z(\tau)]\}\{Z_k(t_2) - M[Z(\tau)]\}\},$$

где  $i \neq k$ .

Дисперсия случайной функции  $X(t)$  имеет вид

$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m f_i(t) f_k(t) D[Z_i(\tau), Z_k(\tau)].$$

Она находится по дисперсии случайных функций  $Z_i(t)$ ,  $Z_k(t)$  и составляет

$$D[Z_i(\tau), Z_k(\tau)] = M\{\{Z_i(t) - M[Z(t)]\}\{Z_k(t) - M[Z(t)]\}\}.$$

Если случайные функции  $Z_1(t)$ ,  $Z_2(t)$ , ...,  $Z_m(t)$  некоррелированы, то при  $i \neq k$   $K[Z_i(\tau), Z_k(\tau)] = 0$  и  $D[Z_i(\tau), Z_k(\tau)] = 0$ . Тогда корреляционная функция будет

$$K[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{i=1}^m f_i(t_1) f_i(t_2) K[Z_i(\tau), Z_i(\tau)].$$

Дисперсия определяется по уравнению

$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^m f_i^2(t) D[Z(t)].$$

Нестационарной будет случайная функция  $X(t)$ , которая путем замены независимой переменной  $t$  приводится к сумме неслучайной функции и произведения неслучайной функции на стационарную случайную функцию. Рассмотрим условия приводимости случайного процесса  $X(t) = M[X(t)] + X_0(t)$ , где  $M[X_0(t)] = 0$ , к случайному процессу  $X(t) = f(t^*) + Z(t^*)$ , где  $t^* = \chi(t)$ . Функция  $f(t^*)$  находится из равенства  $M[X(t)] = f(t^*)$ . Например, для  $t^* = \chi(t) = t^2$  и  $M[X(t)] = at^2 e^{-\alpha t}$  получаем  $f(t^*) = at^* e^{-\alpha \sqrt{t^*}}$ . Условие приводимости будет  $K[X(t_1), X(t_2)] = K[Z(\tau^*)] = K\{Z[\chi(t_2) - \chi(t_1)]\}$ , где  $\tau^* = t_2^* - t_1^*$ ,  $t_1^* = \chi(t_1)$ ,  $t_2^* = \chi(t_2)$  и  $K[Z(\tau^*)] = M[Z(t_1^*) Z(t_2^*)]$ . Очевидно, такое преобразование случайных процессов осуществимо, если  $D[X(t)] = \text{const}$ .

Для приводимости случайного процесса  $X(t) = M[X(t)] + X_0(t)$ , где  $M[X_0(t)] = 0$ , к случайному процессу  $X(t) = \psi(t^*) + f(t^*)Z(t^*)$ , где  $\psi(t^*)$ ,  $f(t^*)$  — неслучайные функции независимой переменной  $t^*$  и  $Z(t^*)$  — стационарная случайная функция  $t^*$ , у которой  $M[Z(t^*)] = 0$  нужно соблюдать условие  $r[X(t_1), X(t_2)] = r[X(t^*)] = r\{Z[\chi(t_2) - \chi(t_1)]\}$ .

Нестационарной будет случайная функция  $X(t)$ , представляющая собой последовательность равноотстоящих через вре-

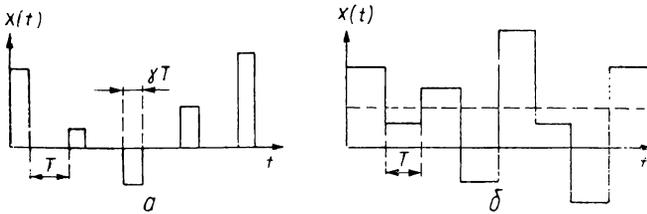


Рис. 25

мя  $T$  прямоугольных импульсов длительностью  $\gamma T$ , моменты возникновения которых фиксированы, а высоты  $X$  — случайные. Возможные реализации этой случайной функции при  $\gamma = 0,4$  (а) и  $1,0$  (б) приведены на рис. 25.

При равномерном законе чередования импульсов в пределах от  $0$  до  $T$  случайная функция  $X(t)$  приобретает стационарный характер.

## ГЛАВА 4

### СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

#### § 1. Гармонические процессы

В окружающем нас мире мы наблюдаем бесконечное разнообразие колебательных явлений. Одни из них влияют на производство геодезических измерений, другие изучаются с помощью геодезических методов, третьи используются в геодезических измерительных системах, четвертые служат механико-математической основой для объяснения физических явлений и процессов, изучаемых в геодезической науке. Это обуславливает необходимость привлечения в геодезических исследованиях теории колебаний.

Вначале рассмотрим детерминированные колебательные процессы, среди которых выделяют периодические, повторяющиеся через определенный промежуток времени — период  $T$ , и непериодические, не обладающие такой повторяемостью. Период проявляется в том, что для всех  $x$  сохраняется равенство  $f(x+T) = f(x)$ . Периодом может быть  $nT$ , где  $n$  — любое целое число. Если  $nT \neq 0$ , то колебательный процесс является периодическим. Если  $f(x)$  имеет период  $T$ , то  $\varphi(x) = f(ax)$  будет иметь период  $T/a$ .

Периодические процессы делят на гармонические, или простые гармоники, выражаемые простой периодической функцией, например,  $A \sin(\omega x + \alpha)$  или  $a \cos \omega x + b \sin \omega x$ , имеющей период  $2\pi/\omega$ , и полигармонические, представляемые в виде суммы простых гармоник. Гармонический процесс — частный случай полигармонического. При разложении периодической функции с периодом  $2\pi$  на простые гармоники круговые частоты  $\omega$  выбирают так, чтобы каждая из простых гармоник имела  $2\pi$  в качестве одного из своих периодов, т. е. составляющие гармоники должны обладать целыми частотами. Непериодические процессы делят на почти периодические, получаемые путем суммирования независимых гармонических процессов, и переходные. Если  $x$  — амплитуда,  $f$  — циклическая частота, выражающая число циклов — периодов в единицу времени, т. е.  $f = 1/T$ ,  $\Theta$  — начальная фаза, то простое гармоническое колебание, представленное в функции времени  $t$ , будет  $x(t) = x \sin(2\pi ft + \Theta)$ .

Если пренебречь начальной фазой, то  $x(t) = x \sin(2\pi ft)$ .

Графически это выражение изображается синусоидой, половина высоты которой будет амплитудой  $x$  (рис. 26). Изменение фазового угла  $\Theta$  вызывает смещение синусоиды вдоль ко-

ординаты времени  $t$ . Эти изменения находятся в пределах  $0—180^\circ$ . Две синусоиды с одинаковым периодом могут обладать постоянным сдвигом фаз, равным разности фазовых углов. Если этот сдвиг составляет  $180^\circ$ , то синусоиды находятся в противоположной фазе. При сдвиге фаз, равном  $0^\circ$ , синусоиды находятся в фазе. Синусоида как функция времени представляется частотным спектром, т. е. в амплитудно-частотном виде. Этот спектр состоит из одной составляющей амплитуды на данной

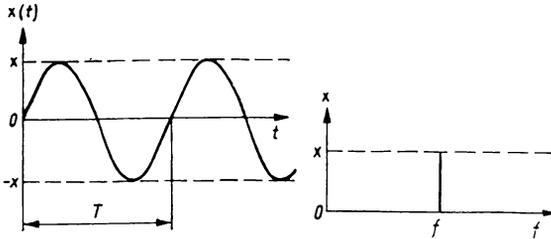


Рис. 26

частоте. Он называется дискретным или линейчатым. Есть много физических процессов, обладающих гармоническим характером. Например, такой характер имеют колебания напряжения на выходе генератора переменного тока. Более общий вид присущ полигармоническим процессам, представляемым функцией времени  $x(t) = x(t \pm kT)$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Такая функция повторяет свои значения через одинаковые интервалы. Одно полное колебание происходит за период  $T$ . Число циклов в единицу времени выражает основную частоту  $f_1$ . Полигармонический процесс обращается в гармонический, когда  $f_1 = f$ . За некоторым исключением его можно разложить в равномерно сходящийся ряд с периодом  $2\pi$ .

$$x(t) = [a_0/2] + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (46)$$

в котором

$$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt, \quad a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos ktdt,$$

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ktdt,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Если  $x(t)$  на сегменте  $(-\pi, \pi)$  имеет конечное число разрывов и абсолютно интегрируемая, то (46) является рядом Фурье. Он может быть записан в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

При этом

$$c_k = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} dt,$$

где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Функция  $x(t)$  считается четной, если  $x(t) = x(-t)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат. Для нечетной функции  $x(-t) = -x(t)$ . Ее график симметричен относительно начала координат. Линейная комбинация нескольких функций (сумма произведений этих функций на постоянные множители) будет четной для четных функций и нечетной — для нечетных. Произведение двух четных или нечетных функций является четным, а произведение четной функции на нечетную — нечетным. Для четной функции с периодом  $2\pi$  в ряде Фурье отсутствуют члены с синусами, т. е.

$$x(t) = (a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt. \quad (47)$$

Здесь

$$a_0 = (2/\pi) \int_0^{\pi} x(t) dt, \quad a_k = (2/\pi) \int_0^{\pi} x(t) \cos kt dt.$$

Для нечетной функции с периодом  $2\pi$  в ряде Фурье отсутствуют члены с косинусами, т. е.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (48)$$

При этом

$$b_k = (2/\pi) \int_0^{\pi} x(t) \sin kt dt.$$

Например, для  $x(t) = -\pi/4$  (на  $-\pi, 0$ ) и  $x(t) = \pi/4$  (на  $0, \pi$ ) с периодом  $2\pi$  нужно воспользоваться формулой (48). Тогда  $x(t) = \sin t + (1/3) \sin 3t + (1/5) \sin 5t + \dots$ . Если  $t = \pi/2$ , то  $\pi/4 = 1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + \dots$ . Для  $x(t) = |t|$  с периодом  $2\pi$  (на  $-\pi, \pi$ ) необходимо применить формулу (47). Тогда  $x(t) = (\pi/2) - (\pi/4) [\cos t + (1/9) \cos 3t + \dots]$ . Если  $t = 0$ , то  $(\pi^2/8) = 1 + (1/3^2) + (1/5^2) + \dots$ . Сумма членов этого ряда будет  $s = \pi^2/6$ .

Следовательно,  $(\pi^2/6) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ .

Если функция имеет произвольный период  $T=2l$ , т. е. обладает видом  $x(at)$  с периодом  $(T/a) = (2l/a)$ , то параметр  $a$  выбирают так, чтобы  $(2l/a) = 2\pi$  или  $a = l/\pi$ . В этом случае

$$x(at) = (a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \pi (k/l) t + b_k \sin \pi (k/l) t).$$

Здесь

$$a_c = (1/l) \int_{-l}^l x(at) dt; \quad a_k = (1/l) \int_{-l}^l x(at) \cos \pi(k/l) t dt;$$
$$b_k = (1/l) \int_{-l}^l x(at) \sin \pi(k/l) t dt.$$

Если функция  $x(at)$  четная, то все  $b_k = 0$  и

$$x(at) = (a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi(k/l) t. \quad (49)$$

При этом

$$a_0 = (2/l) \int_0^l x(at) dt; \quad a_k = (2/l) \int_0^l x(at) \cos \pi(k/l) t dt.$$

Для нечетной функции  $x(at)$  имеем  $a_k = 0$  и  $x(at) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \pi(k/l) t$ .

В этом случае

$$b_k = (2/l) \int_0^l x(at) \sin \pi(k/l) t dt.$$

Например,  $x(at) = |\sin at|$  является четной функцией с периодом  $2l = \pi$ . Воспользовавшись формулой (49), получаем

$$|\sin(at)| = (2/\pi) - (4/\pi) [(1/3) \cos 2t + (1/15) \cos 4t + (1/35) \cos 6t + \dots].$$

Комплексная форма ряда Фурье для функции с любым периодом  $2l$  имеет вид

$$x(at) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi k t/l}.$$

В этой формуле

$$c_k = (1/2l) \int_{-l}^l x(at) e^{-i\pi k t/l} dt,$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если  $x_0 = a_0/2$ , то полигармонический процесс записывают рядом Фурье в ином виде

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos(2\pi k f_1 t - \theta_k).$$

При этом

$$x_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \theta = \text{arctg}(b_k/a_k),$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда видно, что полигармонический процесс состоит из постоянной компоненты  $x_0$  и бесконечного числа синусоидальных компонент, которые называются гармониками. У гармоник амплитуда равна  $x_k$ , начальная фаза —  $\Theta_k$ . Частоты всех гармоник кратны основной частоте  $f_1$ . При анализе периодических процессов часто начальными фазами  $\Theta_k$  пренебрегают. Тогда

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos 2\pi k f_1 t.$$

Такому выражению полигармонического колебания соответствует дискретный спектр, показанный на рис. 27.

Иногда полигармонический процесс состоит только из нескольких компонент. Компонента с основной частотой может отсутствовать. Полигармонические процессы имеют

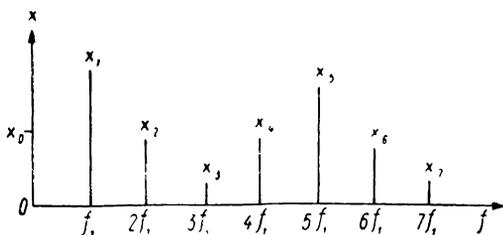


Рис. 27

значительно большее распространение, чем физические процессы, описываемые простой гармонической функцией времени. Часто гармоническим считают полигармонический процесс, лишь приближенно описываемый такой функцией.

Гармонический анализ — наиболее распространенный метод исследования периодических процессов. Он дает возможность понять сущность периодических флюктуаций. Его применение основано на том, что любую функцию можно представить бесконечным рядом синусоидальных и косинусоидальных функций, т. е. в виде ряда Фурье. В измерительной практике обычно встречаются не непрерывные, а дискретные наблюдения, выполняемые чаще всего через равные промежутки времени. Если в анализируемом интервале есть конечное число наблюдений, то их учитывают конечным числом синусов и косинусов. Гармонический анализ заключается в отыскании конечной суммы членов с синусами и косинусами. Первая или основная гармоника обладает периодом, равным времени исследования процесса. Вторая гармоника имеет период, равный половине основного, третья — одной трети, четвертая — одной четвертой и т. д. Если число наблюдений равно  $N$ , то число гармоник будет  $N/2$ .

Разные гармоники рассматриваются как независимые объекты исследований и объясняются различными физическими причинами. Некоторые гармоники легко объясняются, а другие требуют очень тонкой интерпретации. С помощью гармонического анализа создаются лучшие условия для решения диффе-

ренциальных уравнений, описывающих динамическую систему. Этот анализ используется также для математического моделирования колебательных процессов. Он создает математическое представление, эквивалентное той или иной периодической функции. Не всегда возникает необходимость в отыскании всех  $N/2$  гармоник. Часто исследуемый периодический процесс хорошо описывается первыми двумя гармониками. Допустим, что случайная переменная  $x(t)$  задана в следующем виде:

$$x(t) = \bar{x}(t) + a_1 \sin [360^\circ (t/T)] + b_1 \cos [360^\circ (t/T)] + \\ + a_2 \sin [360^\circ (2t/T)] + b_2 \cos [360^\circ (2t/T)] + \dots$$

В этом выражении будет  $[(N/2)-1]$  синусных членов и  $N/2$  — косинусных. При этом  $a_{N/2} = 0$ . Таким образом,  $x(t)$  представляется в виде суммы среднего  $\bar{x}(t)$  и всех  $N/2$  гармоник

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_{i=1}^{N/2} \{a_i \sin [360^\circ (it/T)] + b_i \cos [360^\circ (it/T)]\}.$$

Здесь  $T$  — основной или полный период периодической функции,  $i$  — номер гармоники (целое число от 1 до  $N/2$ ). Гармонический анализ начинают с определения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  по формулам

$$a_i = (2/N) \sum_{i=1}^{N/2} x_i(t) \sin [360^\circ (it/T)]; \\ b_i = (2/N) \sum_{i=1}^{N/2} x_i(t) \cos [360^\circ (it/T)], \quad (50)$$

где  $i$  — целое число от 1 до  $-(N/2)-1$ .

Для последней гармоники коэффициент  $a$  равен нулю, а коэффициент  $b$  — половине значения, вычисленного по формуле (50). Есть упрощенные способы вычисления коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ . Например, учитывая независимость  $a_i$  и  $b_i$  от начала отсчета переменной  $x(t)$ , можно из всех  $x_i(t)$  предварительно вычесть некоторое число, близкое к  $x_i(t)$ . Не имеет существенного значения выбор начала отсчета времени  $t$ . При его изменении  $a_i$  и  $b_i$  принимают другие значения, но общая амплитуда гармоники сохраняется. Удобно предварительно составить таблицу нужных значений синусов и косинусов, умноженных на  $2/N$ . Например, в табл. 28 эти значения приведены для 12 наблюдений (шесть гармоник). Для шестой гармоники применяется коэффициент  $1/N$ . Результаты анализа легче поддаются интерпретации, если относящиеся к одной гармонике синусы и косинусы объединяются в один член

$$a_i \sin [360^\circ (it/T)] + b_i \cos [360^\circ (it/T)] = c_i \cos [(360^\circ i/T) (t - t_i)].$$

Номера наблюдений	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
1	0,0833	0,1443	0,1667	0,1443	0,0833
2	0,1443	0,1443	0,0000	-0,1443	-0,1443
3	0,1667	0,0000	-0,1667	0,0000	0,1667
4	0,1443	-0,1443	0,0000	0,1443	-0,1443
5	0,0833	-0,1443	0,1667	-0,1443	0,0833
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	-0,0833	0,1443	-0,1667	0,1443	-0,0883
8	-0,1443	0,1443	0,0000	-0,1443	0,1443
9	-0,1667	0,0000	0,1667	0,0000	-0,1667
10	-0,1443	-0,1443	0,0000	0,1443	0,1443
11	-0,0833	-0,1443	-0,1667	-0,1443	-0,0833
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

При этом

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \text{ и } t_i = (T/360^\circ i) \arctg(a_i/b_i) = \\ = T/(360^\circ i) \arcsin(a_i/c_i),$$

где  $c_i$  — амплитуда  $i$ -й гармоники,  $t_i$  — время, при котором эта гармоника имеет максимум.

В ряде случаев можно ограничиться определением только первых двух или трех гармоник. Все зависит от того, какая часть общей дисперсии  $x(t)$  учитывается этими гармониками. Если такая часть велика, то можно дальнейшие гармоники не вычислять. Дисперсия за счет  $i$ -й гармоники равна  $c_i^2/2$  для всех гармоник, за исключением последней, для которой дисперсия равна  $c_i^2$ . Определение указанной части дисперсии заключается в вычислении отношения  $c_i^2/2$  или  $c_i^2$  к общей дисперсии  $D[x_i(t)]$ . Все гармоники не коррелируют между собой. Поэтому никакие две гармоники не будут учитывать одну и ту же часть дисперсии  $x(t)$ . Следовательно, дисперсии, учитываемые разными гармониками, можно складывать. Например, если дисперсия, учитываемая первой гармоникой, равна  $c_1^2/2D = 0,86$ , а второй  $c_2^2/D = 0,09$ , то эти гармоники учитывают 95 % флюктуаций. В вычислении дальнейших гармоник нет необходимости.

Разложение периодической функции по синусам и косинусам более удобно, чем по другим тригонометрическим функциям, так как синусы и косинусы обладают свойством ортогональности. Для них за период  $T$  средние значения произведений  $\sin[360^\circ(it/T)] \sin[360^\circ(jt/T)]$  равны нулю, за исключением  $i=j$ , и средние значения произведений  $\sin[360^\circ(it/T)] \cos \times [360^\circ(jt/T)]$  равны нулю для всех  $i$  и  $j$ . Это обеспечивает независимость отыскания коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ . Коэффициен-

$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
0,1443	0,0833	0,0000	0,0833	-0,1443	-0,0833
-0,0833	-0,0833	-0,1667	-0,0833	0,0833	0,0833
0,0000	-0,1667	0,0000	-0,1667	0,0000	-0,0833
-0,0833	-0,0833	0,1667	-0,0833	-0,0833	0,0833
-0,1443	0,0833	0,0000	-0,0833	0,1443	-0,0833
-0,1667	0,1667	-0,1667	0,1667	-0,1667	0,0833
-0,1443	0,0833	0,0000	-0,0833	0,1443	-0,0833
-0,0833	-0,0833	0,1667	-0,0833	-0,0833	0,0833
0,0000	-0,1667	0,0000	0,1667	0,0000	-0,0833
0,0833	-0,0833	-0,1667	-0,0833	0,0833	0,0833
0,1443	0,0833	0,0000	-0,0833	-0,1443	-0,0833
0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,0833

ты  $a_1$  и  $b_1$  для периода  $T$  и коэффициенты  $a_2$  и  $b_2$  для периода  $T/2$  получаются такими же, как и в случае применения способа наименьших квадратов.

Полученные регулярные колебания исключаются из временного ряда. Остаток образует непериодический временной ряд. В нем не будет ярко выраженных циклов. Если обнаруживаются короткопериодические флюктуации в мелком временном масштабе, не поддающиеся изучению из-за такой частоты наблюдений, то их сглаживают различными способами. Например, для этого пользуются способом скользящей средней. Медленные, постепенные изменения случайной переменной в течение всего анализируемого периода называют трендом. Обычно тренд не длится бесконечно долго. Его можно выделить путем использования способа наименьших квадратов. Часто это делается в результате линейного или параболического корреляционного анализа. Для прогнозирования (экстраполяции) тренд применяется редко. Он может неожиданно прекратиться.

Обычно периодический процесс можно описать рядом гармонических колебаний с соизмеримыми частотами. Периодический процесс образуется суммированием синусоидальных волн с соизмеримыми частотами. Кривая, образующаяся при сложении синусоиды и косинусоиды с одинаковым периодом, представляет синусоиду с тем же периодом. При сложении двух синусоид с разными периодами получают несинусоидальную кривую. У нее не будет больше пиков, чем на составляющей синусоиде наиболее высокой частоты. При сложении двух синусоид, отношение частот которых близко к единице, возможно биение. Суммарная кривая не является синусоидой, но по внешнему виду близка к ней и имеет приблизительно синусоидальный характер изменения амплитуд. Она имеет ту же частоту, что и главная (мажорная) компонента, обладающая наибольшей

амплитудой. Амплитуда суммарной кривой изменяется в пределах от суммы до разности амплитуд компонент. Частота бие-ния соответствует разности частот компонент. Плавные кривые, которые, с одной стороны, касаются вершин, а с другой — впадин, называют огибающими. Они образуют полосу огибающих. Фазы верхней и нижней огибающих противоположны, частота огибающих равна разности частот компонент.

Суммирование синусоидальных волн с произвольными частотами формирует непериодический процесс. Он становится

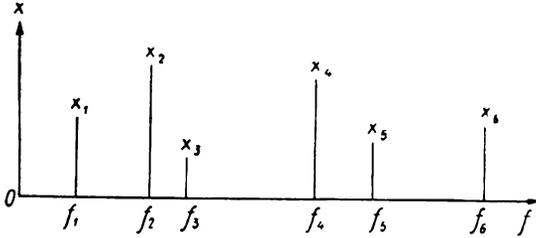


Рис. 28

периодическим лишь тогда, когда отношения всех возможных пар частот представляются рациональными числами. В этом случае существует некоторый основной период, который удовлетворяет условию (46). Например, процесс, описываемый уравнением  $x(t) = x_1 \sin(2t + \Theta_1) + x_2 \sin(3t + \Theta_2) + x_3 \sin(7t + \Theta_3)$ , является периодическим, так как  $2/3$ ,  $2/7$  и  $3/7$  — рациональные числа. Основной период равен единице. Однако процесс, описываемый уравнением  $x(t) = x_1 \sin(2t + \Theta_1) + x_2 \sin(3t + \Theta_2) + x_3 \sin(\sqrt{50}t + \Theta_3)$ , не будет периодическим, так как отношения  $2/\sqrt{50}$  и  $3/\sqrt{50}$  — иррациональные числа. Основной период равен бесконечности. Тем не менее его считают почти периодическим, т. е. таким, который может быть описан функцией времени

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(2\pi f_k t + \theta_k), \quad (51)$$

где не все отношения  $f_n/f_m$  — рациональные числа.

Почти периодические процессы возникают довольно часто при суммировании независимых гармонических процессов. Если пренебречь начальными фазами  $\Theta_n$ , то формуле (51) соответствует дискретный спектр (рис. 28), аналогичный спектру полигармонического процесса, но с несоизмеримыми частотами компонент.

Весьма многочисленны и разнообразны переходные непериодические процессы. Примеры переходных процессов приведены на рис. 29 ( $a$  — изменение температуры воды в чайнике

после выключения нагревателя,  $\delta$  — свободные колебания инерционной механической системы после прекращения действия вынуждающей силы,  $\sigma$  — изменение во времени напряжения в тросе с приложенной нагрузкой к его концам и разрывом в момент  $c$ ).

Переходные процессы нельзя представить с помощью дискретного спектра. Однако достаточно часто возможно непре-

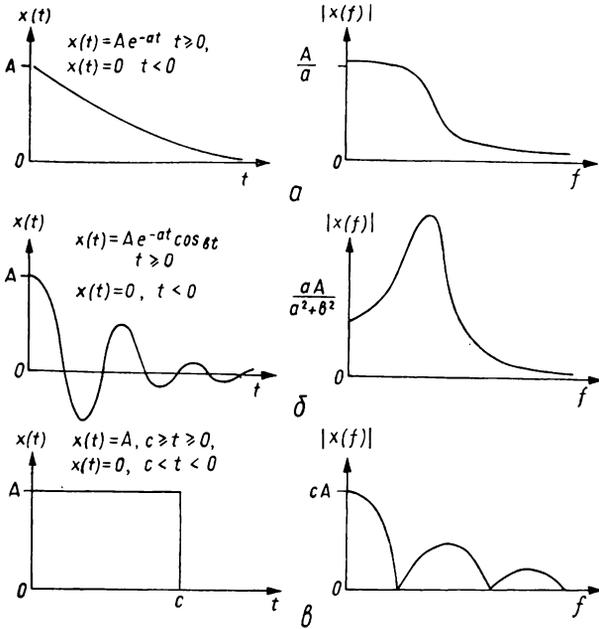


Рис. 29

рывное спектральное представление их с помощью интеграла Фурье, который часто рассматривают как континуальный аналог ряда Фурье. Вместо суммирования по индексу  $k$ , пробегаящему целые значения, применяют интегрирование по непрерывно изменяющемуся переменному  $u \geq 0$ . При этом

$$x(t) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos ut + b(u) \sin ut] du.$$

Коэффициенты  $a(u)$  и  $b(u)$  находятся по формулам

$$a(u) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos ut dt; \quad b(u) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin ut dt.$$

Комплексная форма интеграла Фурье будет  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iut} du$ .

При этом  $c(u) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-iut} dt$ .

Спектр Фурье  $x(t)$  в общем случае — комплексная функция, которая записывается в показательной форме  $x(t) = |x(f)| e^{-i\Theta(f)}$ , где  $|x(f)|$  — модуль,  $\Theta(f)$  — аргумент.

Спектры Фурье для указанных примеров переходных процессов приведены на рис. 29.

## § 2. Спектральное разложение стационарной случайной функции

Ранее была установлена связь между характером корреляционной функции и внутренней структурой случайного процесса. Вид корреляционной функции зависит от частот случайного процесса и их соотношения в этом процессе. Отсюда делают вывод о спектральном составе случайного процесса. При этом руководствуются приведенными выше положениями теории колебаний, где спектром считалась функция, описывающая распределение амплитуд по разным частотам. Колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических колебаний

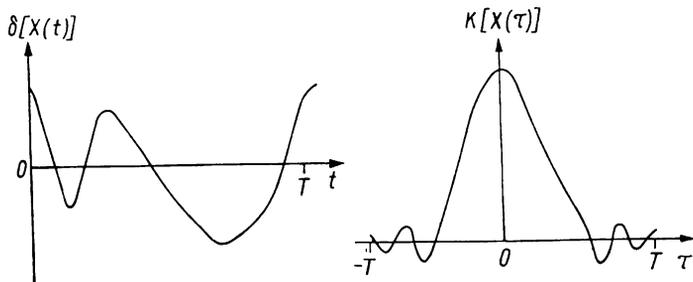


Рис. 30

различных частот, или «гармоник». Спектр показывает преобладающий род колебаний в рассматриваемом процессе и его внутреннюю структуру.

Аналогично строится спектральное описание стационарного случайного процесса, для которого амплитуды колебаний — случайные величины. Поэтому спектр стационарной случайной функции описывает распределение дисперсий по разным частотам. Рассматривают стационарную случайную функцию  $X(t)$  в нецентрированном виде  $\delta[X(t)]$ , наблюдаемую на интервале от 0 до  $T$ , и корреляционную функцию этого случайного про-

цесса  $X(t)$ , т. е.  $K[X(t), X(t+\tau)] = K[X(\tau)]$ . Случайный процесс и его корреляционная функция приведены на рис. 30. Учтено, что корреляционная функция является четной, иначе  $K[X(\tau)] = K[X(-\tau)]$ . Следовательно, она изображается в виде симметричной кривой.

Спектральный анализ заключается в применении одного из типов гармонического анализа к автокорреляционной функции. Известно, что четная функция на интервале от  $-T$  до  $T$  может быть разложена в ряд Фурье с использованием только четных—косинусоидальных гармоник, т. е.

$$K[X(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau. \quad (52)$$

При этом  $\omega_k = k\omega_1$  и  $\omega_1 = 2\pi/2T = \pi/T$ .

Коэффициенты  $D_k$  определяются в зависимости от  $K[X(\tau)]$  и  $\omega_k$ . Для  $D_0$  получаем

$$D_0 = (1/2T) \int_{-T}^T K[X(\tau)] d\tau = (1/T) \int_0^T K[X(\tau)] d\tau. \quad (53)$$

При  $k \neq 0$ , найдем

$$D_k = (1/T) \int_{-T}^T K[X(\tau)] \cos \omega_k \tau d\tau = (2/T) \int_0^T K[X(\tau)] \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (54)$$

Если в формуле (52) перейти от аргумента  $\tau$  к двум аргументам  $t$  и  $t'$ , то

$$\cos \omega_k \tau = \cos \omega_k (t' - t) = \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t.$$

Отсюда

$$K[X(t), X(t')] = \sum_{k=0}^{\infty} (D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t).$$

В этом каноническом разложении корреляционной функции имеем координатные функции, попеременно косинусы и синусы частот, кратных  $\omega_1$ , и коэффициенты  $D_k$ , равные дисперсиям. Отсюда получаем центрированную случайную функцию  $\delta[X(t)]$  в виде канонического разложения

$$\delta[X(t_0)] = \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos \omega_k t + W_k \sin \omega_k t). \quad (55)$$

Здесь  $V_k$  и  $W_k$  — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями  $M(V_k) = M(W_k) = 0$  и дисперсиями  $D(V_k) = D(W_k) = D_k$ , определяемыми по формулам (53) и (54). В каноническом разложении центрированной случайной

функции  $\delta[X(t)]$  координатными функциями являются  $\cos \omega_k t$  и  $\sin \omega_k t$  для разных значений  $\omega_k$ . Поэтому уравнение (55) — спектральное разложение стационарной случайной функции. На ней основана спектральная теория стационарных случайных процессов, в которой спектральное разложение дает возможность разложить стационарную случайную функцию на гармонические колебания с разными частотами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$ . Амплитуды этих колебаний — случайные величины. Дисперсия центрированной случайной функции  $\delta[X(t)]$  будет

$$D\{\delta[X(t)]\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Таким образом, она равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения. Дисперсия  $D\{\delta[X(t)]\}$  распределяется по разным частотам. Одним частотам соответствует большая дисперсия, а другим — меньшая. Спектр стационарного случайного процесса, автоспектр или спектр дисперсий приведен на рис. 31, где по оси  $\omega_k$  отложены частоты  $\omega$ , а по оси  $0D_k$  — дисперсии  $D$ . Сумма этих частных дисперсий равна  $D\{\delta[X(t)]\}$ .

Возвратимся к ранее рассмотренному временному ряду, состоящему из  $N$  наблюдений некоторой скалярной переменной с интервалом времени  $\Delta t$ . Общая длина ряда  $N\Delta t = T$ . Она принимается за основной период или период первой гармоники. В принципе можно рассчитать  $N/2$  гармоник, вклад каждой из которых за исключением последней, в общую дисперсию выра-

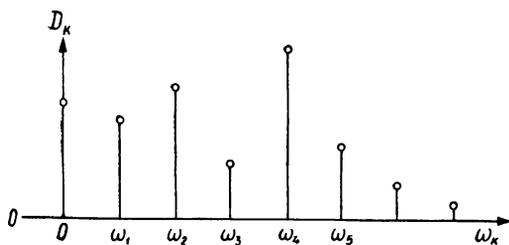


Рис. 31

жается величиной  $c_i^2/2$ , где  $i$  — номер гармоники. Спектр выражается графиком зависимости  $c_i^2/2$  от  $i$ . Физически он показывает вклад каждой гармоники в общую дисперсию. Здесь очевидна аналогия с оптическим спектром, показывающим вклад различных

длин волн или частот в энергию заданного источника света. Спектр временного ряда отражает вклад колебаний с разными частотами в дисперсию временного ряда.

С помощью спектрального анализа не пытаются определять амплитуды отдельных гармоник, а ограничиваются отысканием сглаженного спектра для стационарного случайного процесса. Важно найти спектр не данного короткого временного ряда, а бесконечно длинного. Заданный временной ряд рассматривается как короткая случайная выборка из бесконечной генераль-

ной совокупности. Поэтому существенную роль в спектральном анализе имеют способы такого предельного перехода, позволяющие оценить сглаженный спектр на основании короткого временного ряда. Довольно громоздко такая процедура выполняется путем сглаживания амплитуд  $c_i^2/2$  всех  $N/2$  отдельных гармоник с помощью алгебраических приемов осреднения, эквивалентных вычерчиванию сглаженной кривой. Она значительно ускоряется при использовании технических устройств — механических или электронных анализаторов. Однако чаще всего прибегают к гармоническому анализу автокоррелограмм.

### § 3. Спектральная плотность стационарной случайной функции

При построении спектрального разложения стационарной центрированной случайной функции  $\delta[X(t)]$  на участке времени от 0 до  $T$  получают дискретный, прерывистый или линейчатый спектр дисперсий. При возрастании  $T$  сведения о случайном процессе расширяются. В случае  $T \rightarrow \infty$  имеем  $\omega_1 = \pi/T \rightarrow 0$ . Следовательно, расстояния между частотами на рис. 27 будут неограниченно уменьшаться, и дискретный спектр дисперсий станет приближаться к непрерывному, в котором сколь угодно малому интервалу частот  $\Delta\omega$  соответствует элементарная дисперсия  $\Delta D(\omega)$ .

Для графического построения непрерывного спектра по оси  $OX$  нельзя отложить дисперсии  $D_k$ , так как они безгранично

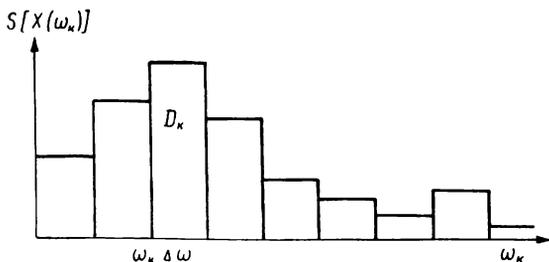


Рис. 32

убывают при  $T \rightarrow \infty$ , а нужно отложить среднюю плотность дисперсий или дисперсию, соответствующую единице длины заданного интервала частот  $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/2T$ . Такая средняя плотность дисперсий будет  $S[X(\omega_k)] = D_k/\Delta\omega$ .

По оси  $O\omega$  отложим интервалы  $\Delta\omega$  и на них построим прямоугольники с площадью  $D_k$ . Такая ступенчатая диаграмма, показывающая спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени, приведена на рис. 32. Она похожа на гистограмму статистического распреде-

ления. Площадь такой диаграммы равна дисперсии центрированной случайной функции  $\delta[X(t)]$ .

При неограниченном возрастании  $T$  интервал  $\Delta\omega \rightarrow 0$  и ступенчатая диаграмма приближается к некоторой кривой  $S[X(\omega)]$ , которая называется спектральной плотностью дисперсии или спектральной плотностью стационарной случайной функции  $\delta[X(t)]$  (рис. 33). Площадь, ограниченная кривой  $S[X(\omega)]$  и осью  $0\omega$ , равняется дисперсии центрированной случайной функции  $\delta[X(t)]$ , т. е.

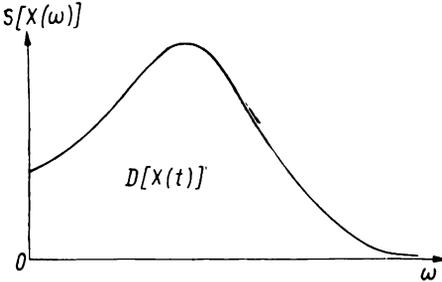


Рис. 33

$$D[X(t)] = \int_0^{\infty} S[X(\omega)] d\omega. \quad (56)$$

Эта формула представляет собой разложение дисперсии  $D[X(t)]$  на сумму элементарных слагаемых  $S[X(\omega)]d\omega$ . Спектральная плотность  $S[X(\omega)]$  харак-

теризует частотный состав стационарного случайного процесса. Она не является самостоятельной характеристикой этого процесса, так как полностью определяется его корреляционной функцией. Выполнив преобразования, получаем

$$S[X(\omega)] = (2/\pi) \int_0^{\infty} K[X(\tau)] \cos \omega\tau d\tau. \quad (57)$$

Это — интеграл Фурье, выражающий спектральную плотность через корреляционную функцию. К преобразованиям Фурье относят не только формулу (57), но и формулу

$$K[X(\tau)] = \int_0^{\infty} S[X(\omega)] \cos \omega\tau d\omega. \quad (58)$$

При  $\tau=0$  получают разложение дисперсии по частотам (56). Выражение (58) является частным видом интеграла Фурье. Оно относится к частному случаю преобразования Фурье, к косинус-преобразованию. Уравнения (57) и (58) были выведены Н. Винером для ограниченного класса стационарных случайных функций и А. Я. Хинчиным для любых стационарных случайных процессов. Поэтому их называют формулами Винера — Хинчина. Спектральная плотность — важная характеристика стационарной случайной функции. По ней определяется корреляционная функция, по которой находится спектральная плотность.

Спектральная плотность — вещественная функция  $\omega$ . Она представляет собой четную функцию, т. е.  $S[X(\omega)] = S[X(-\omega)]$ .

Спектральная плотность — неотрицательная функция, т. е.  $S[X(\omega)] \geq 0$ .

Спектральная плотность, выраженная через циклическую частоту, будет

$$S[X(f)] = 4 \int_0^{\infty} K[X(\tau)] \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (59)$$

Спектральные плотности гармонического процесса (а), суммы гармонического процесса и случайного шума (б), узкопо-

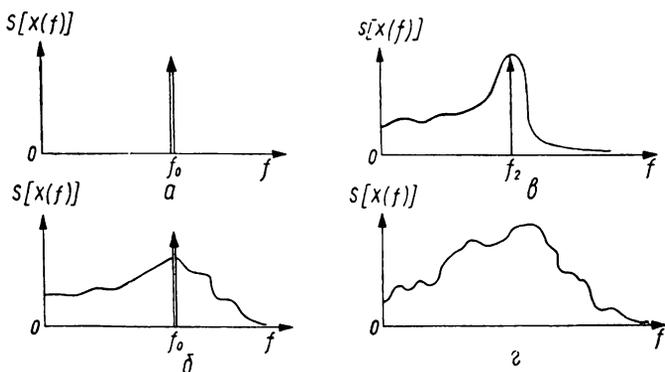


Рис. 34

лосного (в) и широкополосного (г) случайного шума показаны на рис. 34. Дискретный спектр гармонического колебания будет  $S[X(f)] = 0,5X^2\delta(f-f_0)$ , где  $\delta(f-f_0)$  — дельта-функция. Спектральная плотность гармонического колебания равна бесконечности на частоте  $f_0$  этого колебания, нулю — при других значениях частоты. Однако интеграл (59), взятый в любых пределах, включающих в себя частоту гармонического колебания, имеет конечное значение  $0,5X^2$ . Спектральная плотность суммы гармонического колебания и случайного шума равна сумме их спектральных плотностей. Спектральная плотность узкополосного случайного шума имеет узкий пик, хотя в целом — это гладкая непрерывная кривая. Наличие такого пика определило название узкополосного случайного шума. Относительно гладкая и широкая спектральная плотность характерна для широкополосного случайного шума. Отсюда и его название. Для белого шума спектральная плотность одинакова на всех частотах.

Изменение масштаба  $t$  переменной  $\tau$  в корреляционной функции приводит к обратному изменению масштаба переменной  $\omega$  в спектральной плотности и самой величины спектральной плотности. Если корреляционной функции  $K[X(\tau)]$  соответствует спектральная плотность  $S[X(\omega)]$ , то корреляционной

функции  $K[X(m\tau)]$  будет соответствовать спектральная плотность  $(1/m)S[X(\omega/m)]$  (рис. 35)

а: 1 —  $K[X(m)]$ ; 2 —  $K[X(2m)]$ ; 3 —  $K[X(3m)]$ ;

б: 1 —  $K[X(\tau)]$ ; 2 —  $K[X(2\tau)]$ ; 3 —  $K[X(3\tau)]$ ;

в: 1 —  $S[X(\omega)]$ ; 2 —  $(1/2)S[X(\omega/2)]$ ; 3 —  $(1/3)S[X(\omega/3)]$ ;

г: 1 —  $S[X(\omega)]$ ; 2 —  $(1/2)S[X(\omega/2)]$ ; 3 —  $(1/3)S[X(\omega/3)]$ .

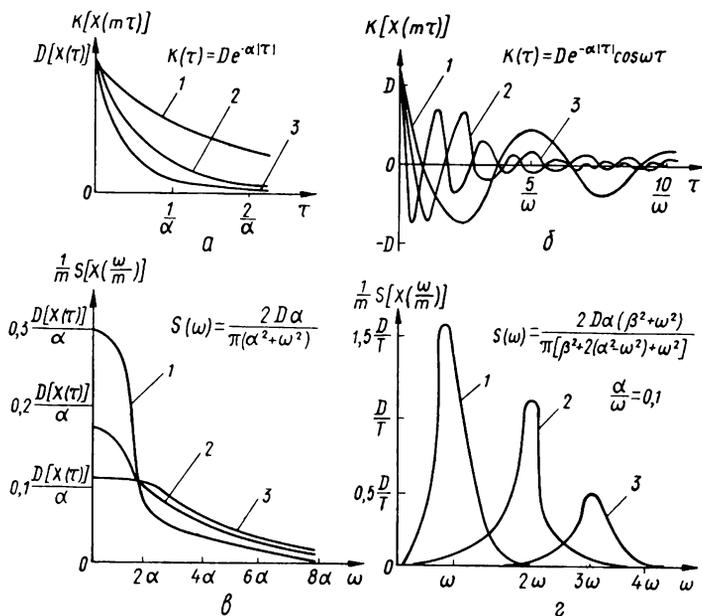


Рис. 35

С укрупнением масштаба по оси  $\tau$  возрастает затухание корреляционной функции, понижается максимальное значение спектральной плотности и полоса ее расширяется.

Применяют также нормированную спектральную плотность, вычисляемую по формуле

$$S[X(\omega)] = S[X(\omega)]/D[X(t)].$$

Она связана с нормированной корреляционной функцией преобразованиями Фурье. При этом

$$r[X(\tau)] = \int_0^{\infty} S[X(\omega)] \cos \omega \tau d\omega \quad (60)$$

и

$$S[X(\omega)] = (2/\pi) \int_0^{\infty} r[X(\tau)] \cos \omega \tau d\tau. \quad (61)$$

Для  $\alpha=0$ , когда  $r[X(\tau)] = 1$ , получаем

$$\int_0^{\infty} S[X(\omega)] d\omega = 1. \quad (62)$$

Следовательно, площадь, ограниченная на графике нормированной спектральной плотностью, равна единице. При этом мы рассматривали непрерывное распределение дисперсий по частотам. Возможны ситуации, в которых случайная функция имеет в своем составе чисто периодическую составляющую ча-

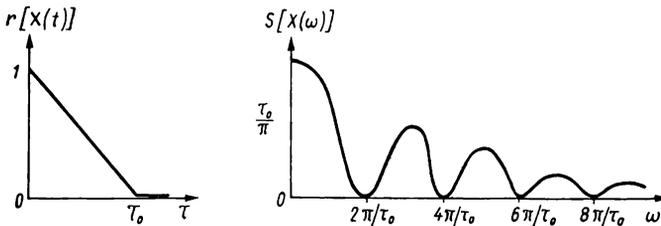


Рис. 36

сты  $\omega_k$  со случайной амплитудой. Тогда в спектральном разложении этой случайной функции будет не только непрерывный спектр частот, но и отдельная частота  $\omega_k$  с конечной дисперсией  $D_k$ . Если имеется несколько периодических составляющих, то спектральное разложение корреляционной функции имеет две части — дискретный и непрерывный спектр, т. е.

$$K[X(\tau)] = \sum_k D_k \cos \omega_k \tau + \int_0^{\infty} S[X(\omega)] \cos \omega \tau d\omega.$$

Практически при образовании «смешанного» спектра случайную функцию лучше разделить на два слагаемых — с непрерывным и дискретным спектром. Такие слагаемые подвергаются отдельному исследованию. Часто конечная дисперсия приходится на нулевую частоту ( $\omega=0$ ). Это значит, что в состав случайной функции входит обычная случайная величина с дисперсией  $D_0$ . Ее так же имеет смысл выделить и исследовать отдельно.

В качестве примера определим нормированную спектральную плотность  $S[X(\omega)]$  стационарного случайного процесса  $X(t)$ , нормированная корреляционная функция которого убывает по линейному закону от 1 до 0 при  $0 < \tau < \tau_0$  и для  $\tau > \tau_0$  равна  $r[X(t)] = 0$ . Графики этой линейной нормированной корреляционной функции и соответствующей нормированной спектральной плотности приведены на рис. 36. Нормированная корреляционная функция имеет вид  $r[X(t)] = 1 - (\tau/\tau_0)$  при  $0 < \tau <$

$\tau < \tau_0$  и  $r[X(\tau)] = 0$  при  $\tau > \tau_0$ . Применяя формулу (61), получаем

$$S[X(\omega)] = (2/\pi\tau_0\omega^2)(1 - \cos \omega\tau_0).$$

Эта нормированная спектральная плотность достигает абсолютного максимума при  $\omega=0$ . Он равен  $\tau_0/\pi$ . При возрастании  $\omega$  спектральная плотность достигает ряда относительных максимумов. Их высота убывает с возрастанием  $\omega$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  получаем  $S[X(\omega)] \rightarrow 0$ . Скорость изменения нормированной спектральной плотности зависит от параметра  $\tau_0$ , играющего

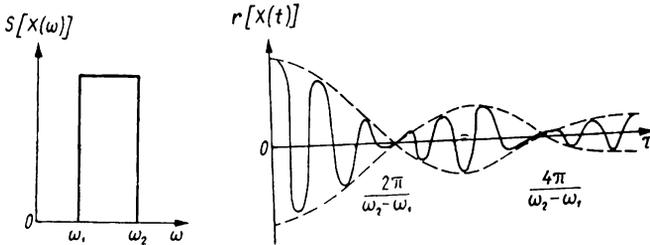


Рис. 37

роль своеобразного масштаба. Площадь кривой  $S[X(\omega)]$  остается постоянной и равной единице. При увеличении  $\tau_0$  масштаб по оси ординат возрастает, а по оси абсцисс — уменьшается. В этом случае преобладание в спектре нулевой частоты становится ярко выраженным. Если  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , то случайная функция  $X(t)$  вырождается в обычную случайную величину. При этом  $r[X(t)] = 1$  и спектр становится дискретным с одной частотой  $\omega_0 = 0$ .

Решим обратную задачу. Найдем нормированную корреляционную функцию, соответствующую спектральной плотности  $S[X(\omega)]$  стационарной случайной функции  $X(t)$ , являющейся постоянной в интервале частот  $\omega_1, \omega_2$  и равной нулю вне этого интервала (рис. 37). Значение  $S[X(\omega)]$  находим из условия (62), т. е.  $S[X(\omega)](\omega_2 - \omega_1) = 1$ . Следовательно,  $S[X(\omega)] = 1/(\omega_2 - \omega_1)$ .

Воспользовавшись формулой (60), получаем

$$r[X(t)] = [2/\tau(\omega_2 - \omega_1)] \cos \{[(\omega_2 + \omega_1)/2] \tau\} \sin \{[(\omega_2 - \omega_1)/2] \tau\}.$$

Такая нормированная корреляционная функция изображается убывающими по амплитуде колебаниями с рядом узлов, в которых она равна нулю. Вид этих колебаний зависит от частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В предельном случае, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , спектр случайной функции обращается в дискретный с одной частотой  $\omega$ , а нормированная корреляционная функция приобретает вид

косинусоиды, т. е.  $r[X(t)] = \cos \omega t$ . Центрированная стационарная случайная функция будет

$$\delta [X(t)] = U \cos \omega t + V \sin \omega t,$$

где  $U$  и  $V$  — некоррелированные случайные величины, у которых  $M(U) = M(V) = 0$  и  $D(U) = D(V) = D$ .

Она представляет собой одно гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , случайной амплитудой, равной  $\sqrt{U^2 + V^2}$ , и случайной фазой  $\Phi$ , определяемой по формулам  $\cos \Phi = U/\sqrt{U^2 + V^2}$  и  $\sin \Phi = V/\sqrt{U^2 + V^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \delta [X(t)] &= \sqrt{U^2 + V^2} (\cos \Phi \cos \omega t + \sin \Phi \sin \omega t) = \\ &= \sqrt{U^2 + V^2} \cos (\omega t - \Phi). \end{aligned}$$

Определяем спектральную плотность стационарного случайного процесса, имеющего показательную корреляционную функцию  $K[X(\tau)] = D e^{-\alpha|\tau|}$ , где  $\alpha > 0$ . Воспользовавшись формулой (57), имеем

$$S[X(\omega)] = (2D/\pi) \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau.$$

Прибегая к интегрированию по частям, имеем

$$S[X(\omega)] = 2D\alpha / [\pi(\alpha^2 + \omega^2)]. \quad (63)$$

Для стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид  $K[X(\tau)] = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau$ , спектральная плотность будет

$$S[X(\omega)] = [2D\alpha(\beta^2 + \omega^2)] / \pi[\beta^2 + 2(\alpha^2 - \omega^2) + \omega^4], \quad (64)$$

где  $\beta^2 = \alpha^2 + \omega^2$ .

Простота математических преобразований часто достигается записью спектрального разложения в комплексной форме. Операции дифференцирования, интегрирования, решения линейных дифференциальных уравнений легче осуществлять, когда гармонические колебания представляются показательной функцией. Поэтому к комплексной форме записи прибегают даже тогда, когда сама случайная функция является действительной. Допустим, что на участке от 0 до  $T$  центрированная случайная функция имеет вид канонического разложения

$$\delta [X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где  $U_k$  и  $V_k$  — некоррелированные случайные величины, у которых  $M(U_k) = M(V_k) = 0$  и  $D(U_k) = D(V_k) = D_k$ .

Если  $\omega_k = \omega_1 k$  и  $\omega_0 = k$ , то

$$\delta [X(t)] = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t).$$

Для того, чтобы такому спектральному разложению придать комплексную форму, пользуются формулами Эйлера:

$$\begin{aligned} \cos \omega_k t &= (1/2)(e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}); \quad \sin \omega_k t = \\ &= (1/2i)(e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}) = (-i/2)(e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}). \end{aligned}$$

Тогда разложение с координатными функциями  $e^{i\omega_k t}$  и  $e^{-i\omega_k t}$  приобретает следующий вид:

$$\delta[X(t)] = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [0,5U_k(e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}) - 0,5iV_k(e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t})].$$

Для того, чтобы воспользоваться одной координатной функцией  $e^{i\omega_k t}$ , область частот распространяют на отрицательные значения  $\omega$ , т. е. в равенстве  $\omega_k = k\omega_1$  считают  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Принимая, что  $U_{-k} = U_k$  и  $V_{-k} = V_k$ , получаем

$$\delta[X(t)] = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0,5(U_k - iV_k)e^{i\omega_k t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} 0,5(U_k + iV_k)e^{i\omega_k t}.$$

В этом разложении коэффициенты — комплексные случайные величины  $W_k = 0$  для  $k = 0$ ,  $W_k = 0,5(U_k - iV_k)$  для  $k > 0$

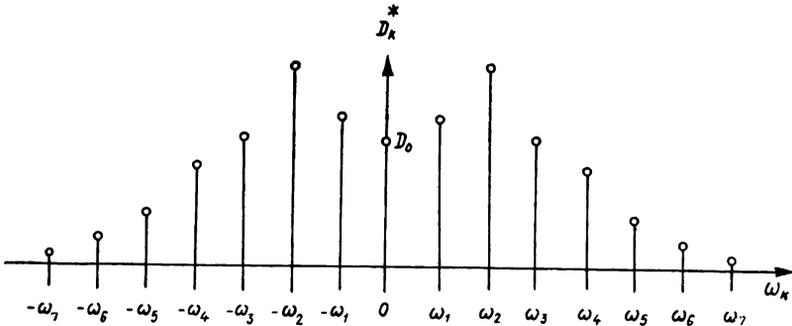


Рис. 38

и  $W_k = 0,5(U_k + iV_k)$  для  $k < 0$ . В теории случайных функций доказывается, что такие случайные коэффициенты некоррелированы между собой. Тогда каноническое разложение центрированной случайной функции будет

$$\delta[X(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}.$$

Оно имеет комплексные координатные функции  $e^{i\omega_k t}$  и комплексные коэффициенты  $W_k$ . Для  $k = 0$  получаем ту же дисперсию  $D_0$ , что и в случае действительной формы спектрального

разложения. Дисперсия комплексной величины  $W_k$  для  $k \neq 0$  определяется суммой дисперсий действительной и мнимой частей, т. е.  $D(W_k) = 0,25D(U_k) + 0,25D(V_k) = 0,5D_k$ . Обозначим  $D_k^* = 0,5D_k$  при  $k \neq 0$  и  $D_k^* = D_0$  при  $k = 0$ . Дискретный спектр случайной функции  $\delta[X(t)]$  распространяется на частоты от

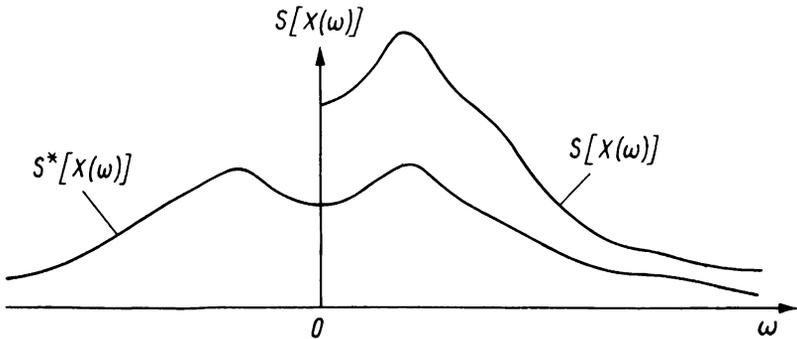


Рис. 39

$-\infty$  до  $\infty$  и имеет вид, приведенный на рис. 38. Он симметричен относительно оси ординат. При этом

$$D[X(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k.$$

Корреляционная функция будет

$$K[X(t_1), X(t_2)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k(t_2-t_1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^* e^{i\omega_k t}.$$

Дисперсия имеет вид

$$D_k^* = (1/2T) \int_{-T}^T K[X(\tau)] e^{-i\omega_k \tau} d\tau.$$

Переходя к пределу  $T \rightarrow \infty$ , получаем спектральную плотность  $S^*[X(\omega)] = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} D_k^*/\Delta\omega$ . Отсюда

$$K[X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S^*[X(\omega)] e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (65)$$

Следовательно,

$$S^*[X(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} K[X(\tau)] e^{-i\omega \tau} d\tau.$$

Приведенные две формулы представляют собой комплексную форму преобразования Фурье. Они получаются непосредственно из ранее рассмотренного преобразования Фурье, в котором  $S[X(\omega)] = 2S^*[X(\omega)]$  и область интегрирования расширяется от  $-\infty$  до  $\infty$ . Сопоставление  $S[X(\omega)]$  и  $S^*[X(\omega)]$  приведено

на рис. 39. Примем в формуле (65), что  $k=0$ . Тогда дисперсия функции  $\delta[X(t)]$  будет

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S^*[X(\omega)] d\omega.$$

Аргументом спектральной плотности может быть не только круговая частота  $\omega$ , но и частота колебаний  $f=\omega/2\pi$ , выражен-

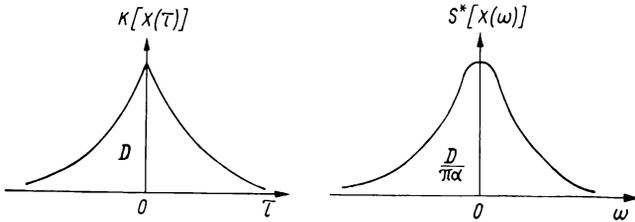


Рис. 40

ная в герцах. Тогда  $\omega=2\pi f$  и формула (65) приобретают следующий вид:

$$K[X(\tau)] = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S^*[X(2\pi f)] e^{2\pi i f \tau} df.$$

Введя обозначение  $G[X(f)] = 2\pi S^*[X(2\pi f)]$ , получаем

$$K[X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} G[X(f)] e^{2\pi i f \tau} df.$$

При этом

$$G[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} K[X(\tau)] e^{-2\pi i f \tau} d\tau.$$

Различные выражения спектральной плотности имеют одинаковое практическое применение и отличаются друг от друга только масштабом. Вновь обращаясь к показательной корреляционной функции  $K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|}$ , где  $\alpha > 0$ , и воспользовавшись комплексной формой преобразования Фурье, имеем

$$S^*[X(\omega)] = D\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2).$$

Графики спектральной плотности (63) и (64) показаны на рис. 35. Для комплексной формы преобразований Фурье графики  $K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|}$  и  $S^*[X(\omega)] = D\alpha/\pi(\alpha^2 + \omega^2)$  приведены на рис. 40. Корреляционная функция при уменьшении  $\alpha$  убывает медленно и становится более плавной. В спектре случайной функции больший удельный вес приобретают малые частоты. Кривая спектральной плотности вытягивается вверх и сжимается с боков. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  случайная функция вырож-

дается в обычную случайную величину с дискретным спектром, имеющим одну линию с частотой  $\omega_0=0$ . При увеличении  $\alpha$  корреляционная функция быстро убывает, колебания ее становятся резкими и беспорядочными. В спектре малые частоты выражены слабо. Если  $\alpha \rightarrow \infty$ , то спектр случайной функции приближается к равномерному, или «белому» спектру, в котором нет преобладающих частот.

Заметим, что белый шум физически нереализуем, так как его дисперсия бесконечно велика. Однако понятие о нем успешно используют при исследовании мешающих воздействий. У белого шума спектральная плотность на диапазоне частот от 0 до  $\infty$  будет  $S[X(\omega)] = S(X)$ .

Корреляционная функция приобретает следующий вид:

$$K[X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[X(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi S(X) \delta(\tau),$$

где  $\delta(\tau)$  — единичная импульсная функция.

Она — линейчатая. При  $\tau \neq 0$  получаем  $K[X(\tau)] = 0$ , для  $\tau = 0$  имеем  $K[X(\tau)] = \infty$ .

Определяем нормированную спектральную плотность  $S^*[X(\omega)]$  для стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид  $K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ . Нормированная корреляционная функция  $r[X(\tau)] = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ . В комплексной форме получаем

$$r[X(\tau)] = 0,5e^{-\alpha|\tau|} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}).$$

График этой функции приведен на рис. 41. Обычным путем находим

$$S^*[X(\omega)] = (1/2\pi) \{[\alpha/\alpha^2 + (\omega + \beta)^2] + [\alpha/\alpha^2 + (\omega - \beta)^2]\}. \quad (66)$$

График этой функции зависит от соотношения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , т. е. убывания по закону  $e^{-\alpha|\tau|}$  или колебаний по закону  $\cos \beta\tau$ . Для малых  $\alpha$  преобладают колебания, близкие к периодическим с частотой  $\beta$ , случайной амплитудой и фазой. В спектре преобладают частоты, близкие к  $\beta$ . Для сравнительно больших  $\alpha$  идет процесс убывания и спектральный состав становится более равномерным. В пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  приходим к «белому» спектру. График нормированной спектральной плотности (66) для  $\beta=2$ ,  $\alpha=1$  и  $\beta=2$ ,  $\alpha=3$  приведен на рис. 42. В первом случае ярко выражен максимум для  $\omega = \pm\beta$ , а во втором случае кривая спектральной плотности остается почти постоянной в большом диапазоне частот.

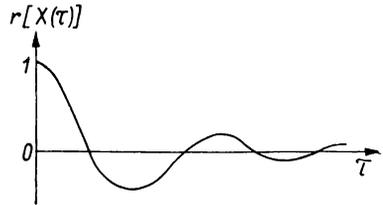


Рис. 41

Спектральная плотность стационарного случайного процесса, имеющего корреляционную функцию  $K[X(\tau)] = De^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega\tau + \gamma \sin \omega|\tau|)$ , будет

$$S[X(\omega)] = \{2D[(\alpha + \gamma\omega)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega)\omega^2]\} / \{\pi[\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega^2)\omega^2 + \omega^4]\}. \quad (67)$$

По своему смыслу такая спектральная плотность не может быть отрицательной. Поэтому формула (67) применяется для  $\gamma \leq \alpha/\omega$ .

Разные виды спектральной плотности широко применяются для анализа случайных процессов экспериментальным путем.

Однако таким путем проще получить вначале корреляционную функцию, а затем найти спектральную плотность. Если корреляционная функция задана аналитически, то плотность вычисляют по выражению (57). При экспериментальных исследованиях

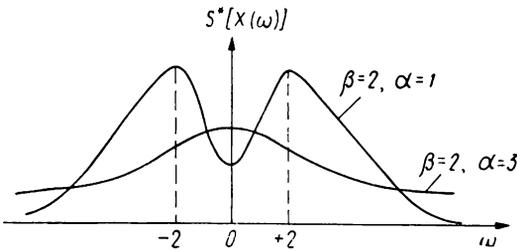


Рис. 42

корреляционная функция определяется графически. Тогда прибегают к приближенной оценке спектральной плотности. Для этого аппроксимируют полученную кривую типовыми корреляционными функциями, приведенными в гл. 3, § 1. Эти функции выбирают так, чтобы аналитически более просто найти спектральную плотность. Корреляционная функция случайного процесса представляется в виде алгебраической суммы типовых корреляционных функций. Чем точнее такая сумма аппроксимирует корреляционную функцию, тем точнее находится спектральная плотность. Отклонения действительной корреляционной функции от аппроксимирующей для малых  $\tau$  вызывают еще большие отклонения вычисленной спектральной плотности от действительной для больших  $\omega$ .

Наиболее просто аппроксимация корреляционной функции случайного процесса типовыми корреляционными функциями осуществляется с помощью типовых треугольных корреляционных функций, которые задаются параметрами  $K_0$  и  $T_0$  (гл. 3, рис. 13). Для положительного значения  $\tau$  имеем  $K_0(\tau) = R_0[1 - (\tau/T_0)]$ , если  $0 \leq \tau \leq T_0$ , и  $K_0(\tau) = 0$ , если  $\tau \geq T_0$ . Спектральная плотность будет

$$S_0[X(\omega)] = (2/\pi) R_0 T_0 (\sin 0,5\omega T_0 / 0,5\omega T_0)^2.$$

Приняв, что  $\omega T_0 = \lambda$  и  $\varepsilon(\lambda) = (2/\pi) [\sin \lambda/2 / (\lambda/2)]^2$ , получаем  $S_0[X(\omega)] = R_0 T_0 \varepsilon(\lambda)$ .

Значения  $\varepsilon(\lambda)$  приведены в табл. 29. График этой функции показан на рис. 43. Корреляционная функция  $K[X(\tau)]$  аппроксимируется двумя или тремя типовыми корреляционными функциями. Ее спектральная плотность вычисляется по формуле (61). График спектральной плотности приведен на рис. 34. При аппроксимации корреляционной функции типовыми треугольными корреляционными функциями получаем приближенное значение спектральной плотности.

Используя для аппроксимации метод типовых косинусоидальных корреляционных функций, получают приближенное выражение корреляционной функции, которое можно представить в виде

$$K[X(\tau)] = \tilde{K}(\tau) = \sum_{k=0}^n A_k \cos k \times$$

$\times (\pi/T_0)\tau$  при  $|\tau| \leq T_0$  и  $K[X(\tau)] = 0$  при  $|\tau| > T_0$ . Подставляя это значение корреляционной функции в формулу (57), получаем

$$S[X(\omega)] = (2/\pi) \sum_{k=0}^n A_k \int_0^{T_0} \cos k (\pi/T_0) \tau \cos \omega \tau d\tau.$$

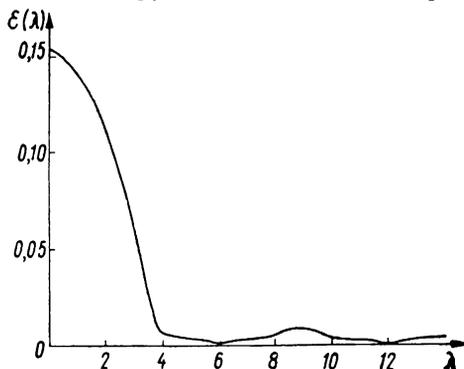


Рис. 43

Таблица 29

$\lambda$	$\varepsilon(\lambda)$	$\lambda$	$\varepsilon(\lambda)$	$\lambda$	$\varepsilon(\lambda)$	$\lambda$	$\varepsilon(\lambda)$
0,0	0,159	1,7	0,124	3,4	0,054	5,5	0,003
0,1	0,159	1,8	0,121	3,5	0,050	6,0	0,000
0,2	0,159	1,9	0,117	3,6	0,047	6,5	0,000
0,3	0,158	2,0	0,113	3,7	0,043	7,0	0,002
0,4	0,157	2,1	0,109	3,8	0,040	7,5	0,004
0,5	0,156	2,2	0,104	3,9	0,036	8,0	0,006
0,6	0,155	2,3	0,100	4,0	0,033	8,5	0,007
0,7	0,153	2,4	0,096	4,1	0,030	9,0	0,008
0,8	0,151	2,5	0,092	4,2	0,027	9,5	0,007
0,9	0,149	2,6	0,088	4,3	0,024	10,0	0,006
1,0	0,146	2,7	0,083	4,4	0,021	10,5	0,004
1,1	0,144	2,8	0,079	4,5	0,019	11,0	0,003
1,2	0,141	2,9	0,075	4,6	0,017	11,5	0,001
1,3	0,138	3,0	0,070	4,7	0,015	12,5	0,000
1,4	0,135	3,1	0,066	4,8	0,013	13,0	0,000
1,5	0,132	3,2	0,062	4,9	0,011	14,0	0,001
1,6	0,128	3,3	0,058	5,0	0,09	15,0	0,002

После интегрирования находим

$$S[X(\omega)] = T_0 \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k g_k(\omega T_0),$$

где  $g_k(x) = (2/\pi) [x \sin x/x^2 - (k\pi)^2]$ .

Как отмечалось, спектральная плотность является неотрицательной функцией  $\omega$ . Однако погрешности вычислений при некоторых  $\omega$  могут привести к отрицательному значению  $S[X(\omega)]$ . Для этих  $\omega$  нужно принять, что  $S[X(\omega)] = 0$ .

Если корреляционная функция аппроксимируется алгебраической суммой типовых экспоненциальных корреляционных функций, т. е.

$$K[X(\tau)] \approx \sum_{k=1}^n A_k e^{-\alpha_k |\tau|},$$

где  $\alpha_k$  — положительные показатели, то спектральная плотность будет

$$S[X(\omega)] \approx (2/\pi) \int_0^{\infty} K[X(\tau)] \cos \omega \tau d\tau = (2/\pi) \sum_{k=1}^n A_k \int_0^{\infty} e^{-\alpha_k \tau} \cos \omega \tau d\tau.$$

или

$$S[X(\omega)] \approx (2/\pi) \sum_{k=1}^n A_k \alpha_k / (\alpha_k^2 + \omega^2).$$

Если  $\alpha_k = k\alpha$ , где  $\alpha$  — положительная величина,  $k$  — целое число (1, 2, ..., n) то

$$S[X(\omega)] \approx (2/\pi) \sum_{k=1}^n A_k k\alpha / (k^2\alpha^2 + \omega^2).$$

Такой прием вычисления спектральной плотности — удобный. Он дает возможность выразить  $S[X(\omega)]$  в виде дробно-рациональной функции квадрата частоты  $\omega$  или квадрата модуля дробно-рациональной функции от частоты  $\omega$ , что важно для исследования случайного процесса. Однако для обеспечения необходимой точности аппроксимации может потребоваться большое число  $n$  членов, число которых зависит от правильности выбора параметра  $\alpha$ . Его принимают равным обратной величине постоянной времени затухания корреляционной функции. Это можно сделать лишь тогда, когда такая функция не имеет колебательно-затухающих составляющих.

Приближенное вычисление спектральной плотности часто сочетают с аналитическими способами ее определения. Для это-

го используют наиболее близкую из типовых корреляционных функций, которую вычитают из рассматриваемой и аппроксимируют полученный остаток. Тогда спектральная плотность будет равна сумме спектральной плотности, соответствующей аналитически заданной корреляционной функции, и спектральной плотности аппроксимированной разности корреляционных функций.

Существуют разные способы представления корреляционной функции в таком виде, при котором спектральная плотность выражается дробно-рациональной функцией квадрата частоты  $\omega$ . Однако и саму спектральную плотность можно преобразовать в дробно-рациональную функцию  $\omega^2$ , числитель и знаменатель которой сравнительно просто выражаются произведением элементарных сомножителей. Если  $S[X(\omega)]$  задана графически, то аппроксимация и определение ее составляющих упрощаются при переходе к логарифмическому виду. Тогда вместо операций умножения и деления составляющих спектральной плотности выполняется только алгебраическое суммирование составляющих логарифма спектральной плотности. Логарифмическая спектральная плотность определяется по формуле  $L[X(\omega)] = 10 \lg S[X(\omega)]$ .

Кривая логарифмической спектральной плотности показывает связь  $L$  в децибелах от  $\lg \omega$  в декадах. При этом 10 децибел соответствуют десятикратному изменению  $S$ , а декада — десятикратному изменению  $\omega$ . Во всех методах приближенного представления  $S[X(\omega)]$  в виде дробно-рациональной функции  $\omega^2$  кривая логарифмической спектральной плотности аппроксимируется алгебраической суммой типовых характеристик логарифмической спектральной плотности

$$e_{i1}(\omega) = 10 \lg [1 + (\omega/\omega_1)^2]^k,$$

где  $\omega_1$  — сопрягающие частоты,  $k$  — целое число.

Относительно кривой логарифмической спектральной плотности  $L[X(\omega)]$  описывается ломаная  $L^*[X(\omega)]$ , состоящая из сопрягающихся прямолинейных отрезков с наклонами  $20k$  децибел на декаду. При построении этих отрезков следует соблюдать определенные правила.

Если случайные функции представлены каноническими разложениями, то их линейные преобразования производятся с математическими ожиданиями и координатными функциями. Для стационарных случайных функций все сводится к линейному преобразованию спектральной плотности  $S[X(\omega)]$ . Для того, чтобы при стационарном воздействии реакция системы была стационарной, необходимо иметь постоянные, а не переменные параметры системы. Такая стационарная линейная система обычно описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В операторной форме

такое уравнение, связывающее реакцию системы  $y(t)$  с воздействием, будет

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) x(t), \quad (68)$$

где оператор дифференцирования  $p = d/dt$ .

Боле коротко его записывают в виде  $A_n(p)y(t) = B_m(p)x(t)$ . Отсюда оператор системы  $y(t) = [B_m(p)/A_n(p)]x(t)$ .

Решение уравнения (68) имеет два слагаемых:  $y_I(t)$  — определяющее вынужденные колебания системы под влиянием воздействия  $x(t)$ , и  $y_{II}(t)$  — определяющее свободные или собственные колебания, совершаемые системой при отсутствии входного воздействия, если система в начальный момент каким-то путем была выведена из состояния равновесия. Чаще встречаются устойчивые системы, в которых свободные колебания с течением времени затухают. Если рассматривать участок времени, удаленный от начала процесса, то можно считать, что переходные процессы завершены и система работает в установившемся режиме. Тогда  $y_{II}(t)$  можно не учитывать.

Поставленная задача упрощается, если  $x(t)$  и  $y(t)$  — несложные аналитические функции. Например, ее просто решить в случае  $x(t)$  — гармонического колебания определенной частоты. Тогда  $y(t)$  будет гармоническим колебанием той же частоты, но с другими амплитудой и фазой. Допустим, что  $x(t) = e^{i\omega t}$ . В этом случае  $y(t) = \Phi(i\omega)e^{i\omega t}$ .

Здесь комплексный множитель  $\Phi(i\omega)$  называется частотной характеристикой линейной системы. Его определяют путем преобразований уравнения (68) и выражают в следующем виде:

$$\Phi(i\omega) = B_m(i\omega)/A_n(i\omega),$$

где  $A_n(i\omega) = a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0$  и

$$B_m(i\omega) = b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0.$$

Если  $U$  — величина, не зависящая от  $t$ , и  $x(t) = Ue^{i\omega t}$ , то  $y(t) = U\Phi(i\omega)e^{i\omega t}$ .

Такая же процедура сохраняется при  $U$  — случайной величине, не зависящей от  $t$ . Воспользуемся изложенными соображениями для преобразования гармонических колебаний линейной системой. Математическое ожидание стационарной случайной функции определим как гармоническое колебание нулевой частоты ( $\omega = 0$ ). Тогда  $\Phi(0) = B_m(0)/A_n(0) = b_0/a_0$ . Следовательно,  $M[Y(t)] = (b_0/a_0)M[X(t)]$ .

Флюктуация  $\delta[X(t)] = X(t) - M[X(t)]$  на участке от 0 до  $T$  в виде спектрального разложения будет

$$\delta[X(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t},$$

где  $U_k$  — некоррелированные случайные величины, дисперсии которых образуют спектр случайной функции  $X(t)$ .

Реакция системы имеет следующий вид:

$$\delta[Y(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \Phi(i\omega_k) e^{i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}.$$

Очевидно, комплексные случайные величины  $W_k = U_k \Phi(i\omega_k)$  — некоррелированные и  $M(W_k) = 0$ . Их дисперсии будут  $D(W_k) = |\Phi(i\omega_k)|^2 D_k$ .

Таким образом, стационарная случайная функция, пройдя линейную стационарную систему, приобретает перестроенный спектр, в котором одни частоты усиливаются, а другие — ослабляются (фильтруются). Показателем реагирования системы служит квадрат модуля частотной характеристики. Спектральная плотность на выходе системы будет  $S[Y(\omega)] = |\Phi(i\omega)|^2 S[X(\omega)]$ .

Корреляционная функция определяется обычным путем, т. е.

$$K[Y(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[Y(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Иногда ограничиваются определением дисперсии

$$D[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[Y(\omega)] d\omega = 2 \int_0^{\infty} S[Y(\omega)] d\omega.$$

Приведем пример линейной динамической системы, работа которой описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка  $(a_1 p + a_0) y(t) = (b_1 p + b_0) x(t)$ .

На вход системы поступает стационарная случайная функция  $X(t)$  с математическим ожиданием  $M[X(t)]$  и корреляционной функцией  $K[X(\tau)] = D[X(t)] e^{-\alpha|\tau|}$ , где  $\alpha > 0$ . Заметим, что такая функция  $X(t)$  недифференцируема и для нее нельзя составлять указанное дифференциальное уравнение. Однако в теории случайных функций так поступают исходя из приближенного представления корреляционной функции. На выходе системы  $M[Y(t)] = (b_0/a_0) \times M[X(t)]$ , на входе —  $S[X(t)] = D[X(t)] \alpha / [\pi(\alpha^2 + \omega^2)]$ . Частотная характеристика будет  $\Phi(i\omega) = [b_1 i\omega + b_0] / [a_1 i\omega + a_0]$ . На выходе системы  $S[Y(\omega)] = \{D[X(t)] / \pi\} [(b_1^2 \omega^2 + b_0^2) / (a_1^2 \omega^2 + a_0^2)] \times [\alpha / (\alpha^2 + \omega^2)]$  и  $D[Y(t)] = D[X(t)] (a_1 b_0^2 + a_0 b_1^2 \alpha) / [a_0 a_1 (a_1 \alpha + a_0)]$ .

Если на вход системы поступает случайная функция  $X_1(t) = U_0 + X(t)$ , где  $U_0$  — случайная величина с дисперсией

$D, X(t)$  — стационарная случайная функция, то к реакции системы на воздействие  $X(t)$  добавляется  $V_0 = (b_0/a_0) U_0$ .

Решение прямой задачи заключается в оценке точности системы путем определения дисперсии  $D[Y(t)]$ . Решение обратной задачи сводится к выбору таких коэффициентов в уравнении (68), при которых дисперсия  $D[Y(t)]$  оказалась бы минимальной. Это решение усложняется тем, что необходимо учитывать систематические динамические погрешности  $m[Y(t)]$ , вызванные переходными процессами. Тогда обращают в минимум начальный второй момент  $\alpha_2 = D[Y(t)] + m[Y(t)]$ .

Пользуются и другими критериями, вытекающими из назначения системы. В более широком плане решается задача синтеза динамических систем, когда возникает необходимость выбора самого уравнения работы системы. Еще сложнее обстоит дело при определении оптимального оператора системы. В этих случаях приходится обращаться к аппарату «квазистационарных» случайных функций, у которых изменение вероятностных характеристик со временем происходит сравнительно медленно. Расчет «квазистационарных» динамических систем разработан В. С. Пугачевым.

Широко используют приближенное представление стационарной случайной функции в интервале  $-0,5T < t < 0,5T$  с помощью некоррелированных элементарных случайных функций

$$\tilde{X}(t) = M[X(t)] + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{X}_k(t).$$

Здесь  $k$ -я гармоника будет

$$\tilde{X}_k(t) = U_k \cos k\Delta\omega t + V_k \sin k\Delta\omega t,$$

где  $U_k$  и  $V_k$  — взаимно некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями  $M(U_k) = M(V_k) = 0$  и дисперсиями  $D(U_k) = D(V_k) = D$ ,  $\Delta\omega = \pi/T$ .

Корреляционная функция  $K[X(\tau)]$  в интервале  $-T < \tau < T$  представлена рядом Фурье с периодом  $2T$ .

$$K[X(\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\Delta\omega\tau}.$$

При этом  $A_k = (1/2T) \int_{-T}^T K[X(\tau)] e^{-ik\Delta\omega\tau} d\tau = (\Delta\omega/2\pi) \int_{-T}^T K[X(\tau)] \times \times \cos k\Delta\omega\tau d\tau$  и  $A_k = A_{-k} \approx \Delta\omega S[X(k\Delta\omega)]$ .

Дисперсия  $k$ -й гармоники  $\tilde{X}_k(t)$  будет  $D[X_k(t)] = (2\pi/T) \times \times S[X(k\Delta\omega)]$ .

Дисперсия приближенного представления стационарной случай-  
ной функции

$$D[\tilde{X}(t)] \approx 2 \int_0^{\infty} S[X(\omega)] d\omega.$$

Для стационарно связанной системы случайных функций  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$  определяют взаимную спектральную плотность  $S[X_k(\omega), X_j(\omega)]$ , представляющую собой преобразование Фурье взаимной корреляционной функции  $R[X_k(\tau), X_j(\tau)]$ , деленное на  $2\pi$ , т. е.

$$S[X_k(\omega), X_j(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R[X_k(\tau), X_j(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Обратное преобразование Фурье определяет взаимную корреляционную функцию

$$R[X_k(\tau), X_j(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[X_k(\omega), X_j(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Напомним, что преобразование Фурье справедливо для абсолютно интегрируемых функций. Однако их применяют и при нарушении этого условия. Они используются, в частности, тогда, когда корреляционная функция или спектральная плотность имеет постоянные либо переменные составляющие. В общем случае взаимная спектральная плотность является комплексной величиной. Она имеет вещественную часть  $P[X_k(\omega), X_j(\omega)]$  в виде четной функции  $\omega$  и мнимую часть  $Q[X_k(\omega), X_j(\omega)]$  в виде нечетной функции, т. е.

$$\begin{aligned} S[X_k(\omega), X_j(\omega)] &= \operatorname{Re}\{S[X_k(\omega), X_j(\omega)]\} + i \operatorname{Im}\{S[X_k(\omega), X_j(\omega)]\} = \\ &= P[X_k(\omega), X_j(\omega)] + iQ[X_k(\omega), X_j(\omega)]. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} P[X_k(\omega), X_j(\omega)] &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R[X_k(\tau), X_j(\tau)] \cos \omega\tau d\tau, \\ Q[X_k(\omega), X_j(\omega)] &= (-1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R[X_k(\tau), X_j(\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \end{aligned}$$

Возможные графики вещественной и мнимой частей взаимной спектральной плотности приведены на рис. 44. Взаимная корреляционная функция будет

$$\begin{aligned} R[X_k(\tau), X_j(\tau)] &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \{P[X_k(\omega), X_j(\omega)] \cos \omega\tau - \\ &- Q[X_k(\omega), X_j(\omega)] \sin \omega\tau\} d\omega. \end{aligned}$$

Взаимная дисперсия находится по формуле

$$D[X_k(\tau), X_j(\tau)] = R[X_k(0), X_j(0)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[X_k(\omega), X_j(\omega)] d\omega = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} P[X_k(\omega), X_j(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{S[X_k(\omega), X_j(\omega)]\} d\omega.$$

Подынтегральное выражение — вещественная четная функция  $\omega$ . При изменении переменной  $\tau$  у взаимной корреляционной функции происходит обратное изменение масштаба  $\omega$  у взаимной спектральной плотности и величины самой спектральной-

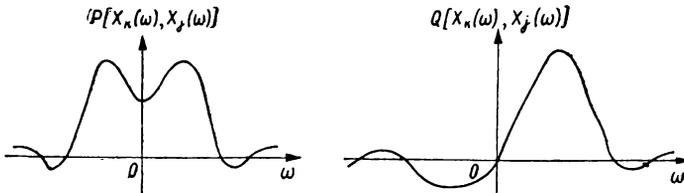


Рис. 44

ной плотности. Для  $R[X_k(m\tau), X_j(m\tau)]$  соответствует  $(1/m) \times S[X_k(\omega/m), X_j(\omega/m)]$ .

Нормированная взаимная спектральная плотность будет

$$S[X_k(\omega), X_j(\omega)] = (1/2\pi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K[X_k(\tau), X_j(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} / \\ / \{ \sigma[X_k(\tau)] \sigma[X_j(\tau)] \}$$

или

$$S[X_k(\omega), X_j(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} r[X_k(\tau), X_j(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$r[X_k(\tau), X_j(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} S[X_k(\omega), X_j(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Взаимные спектральные плотности  $S[X_k(\omega), X_j(\omega)]$  и  $S[X_j(\omega), X_k(\omega)]$  — комплексно сопряженные величины

$$S[X_k(\omega), X_j(\omega)] = S[X_j(-\omega), X_k(-\omega)],$$

$$S[X_j(\omega), X_k(\omega)] = S[X_k(-\omega), X_j(-\omega)].$$

Допустим, что случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  представлены линейными комбинациями  $m$  других некоррелированных случайных функций  $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t)$ , т. е.

$$X(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t) Z_k(t); \quad Y(t) = \sum_{k=1}^m B_k(t) Z_k(t),$$

где  $A_k(t)$  и  $B_k(t)$  — неслучайные функции.

Взаимная корреляционная функция  $X(t)$  и  $Y(t)$  будет

$$R[X(t_1), Y(t_2)] = \sum_{k=1}^m A_k(t_1) B_k(t_2) K[Z_k(t_1), Z_k(t_2)]$$

где  $K[Z_k(t_1), Z_k(t_2)]$  — корреляционная функция случайного процесса  $Z_k(t)$ .

Если  $A_k(t) = A_k$ ,  $B_k(t) = B_k$  и случайные функции  $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t)$  стационарны, то случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  будут стационарными и их взаимная корреляционная функция находится по формуле

$$R[X(\tau), Y(\tau)] = \sum_{k=1}^m A_k B_k K[Z_k(\tau), Z_k(\tau)],$$

где  $K[Z_k(\tau), Z_k(\tau)]$  — корреляционная функция стационарного случайного процесса  $Z_k(t)$ .

Взаимная спектральная плотность будет

$$S[X(\omega), Y(\omega)] = \sum_{k=1}^m A_k B_k S[Z_k(\omega)].$$

В этом выражении спектральная плотность стационарной случайной функции  $Z_k(t)$  составляет

$$S[Z_k(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} K[Z_k(\tau), Z_k(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Выразим  $Z_k(t)$  через некоррелированные элементарные случайные функции

$$Z_k(t) = Z_k f_k(t),$$

где  $k=1, 2, \dots, m$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_m$  — некоррелированные случайные величины,  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$  — неслучайные функции.

Тогда корреляционная функция будет

$$K[Z_k(t_1), Z_k(t_2)] = D(Z_k) f_k(t_1) f_k(t_2),$$

где  $D(Z_k)$  — дисперсия случайной величины  $Z_k$ .

Взаимная корреляционная функция приобретает следующий вид:

$$R[X(t_1), Y(t_2)] = \sum_{k=1}^m A_k(t_1) f_k(t_1) B_k(t_2) f_k(t_2) D(Z_k).$$

Если  $A_k(t) = A_k$  и  $B_k(t) = B_k$ , то

$$R[X(t_1), Y(t_2)] = \sum_{k=1}^m A_k B_k D(Z_k) f_k(t_1) f_k(t_2).$$

Если непрерывная и дифференцируемая  $k$  раз случайная функция  $X(t)$  стационарна, то она стационарно связана со

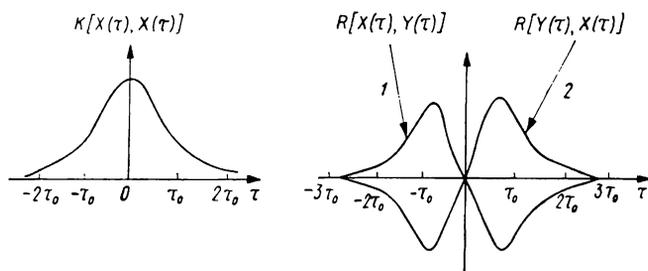


Рис. 45

своими  $k$  производными  $Y(t) = d^k X(t)/dt^k$ . Взаимная корреляционная функция зависит только от  $\tau$  и ее определяют по формуле

$$R[X(\tau), Y(\tau)] = \{d^k K[X(\tau), X(\tau)]\} / d\tau^k.$$

Графики корреляционной  $K[X(\tau), X(\tau)] = D[X(\tau)] e^{-(\tau/\tau_0)^2}$ , взаимных корреляционных функций  $R[X(\tau), Y(\tau)]$  и  $R[Y(\tau), X(\tau)]$  случайной функции  $X(t)$  и ее производной  $Y(t) = dX(t)/dt$  приведены на рис. 45.

Взаимная спектральная плотность  $S[X(\omega), Y(\omega)] = (i\omega)^k S[X(\omega)]$ .

Для приближенного вычисления взаимной спектральной плотности используются типовые корреляционные функции. Если  $X(t)$  и  $Y(t)$  стационарно связаны и обладают взаимной корреляционной функцией  $R[X(\tau), Y(\tau)]$ , то

$$\begin{aligned} S[X(\omega), Y(\omega)] &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} R[X(\tau), Y(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= P[X(\omega), Y(\omega)] + iQ[X(\omega), Y(\omega)]. \end{aligned}$$

Для вычисления значений  $P[X(\omega), Y(\omega)]$  и  $Q[X(\omega), Y(\omega)]$  применяют формулы

$$P[X(\omega), Y(\omega)] = (1/\pi) \int_0^{\infty} R_+(\tau) \cos \omega \tau d\tau;$$

$$Q[X(\omega), Y(\omega)] = (1/\pi) \int_0^{\infty} R_-(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

В них  $R_+(\tau)$  и  $R_-(\tau)$  — полусумма и полуразность значений взаимной корреляционной функции

$$R_+(\tau) = 0,5 \{R[X(-\tau), Y(-\tau)] + R[X(\tau), Y(\tau)]\};$$

$$R_-(\tau) = 0,5 \{R[X(-\tau), Y(-\tau)] - R[X(\tau), Y(\tau)]\}.$$

Заметим, что  $R_+(\tau)$  — четная,  $R_-(\tau)$  — нечетная функции, т. е.  $R_+(\tau) = R_+(-\tau)$ ,  $R_-(\tau) = -R_-(\tau)$ . Кроме того,  $R_+(0) = R[X(0), Y(0)]$ ,  $R_-(0) = 0$ . Выражение для вещественной части  $P[X(\omega), Y(\omega)]$  по форме совпадает с ранее приведенной формулой спектральной плотности

$$S[X(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} K[X_k(\tau), X_j(\tau)] \cos \omega \tau d\tau =$$

$$= (1/\pi) \int_0^{\infty} K[X_k(\tau), X_j(\tau)] \cos \omega \tau d\tau.$$

Это обстоятельство используется для аппроксимации корреляционной функции  $R_-(\tau)$  типовыми корреляционными функциями, чаще всего кусочно-линейной, например, треугольной, или экспоненциальной. В первом случае  $R_-(\tau)$  приближенно представляется алгебраической суммой некоторого числа типовых треугольных корреляционных функций. Аналогично представляют мнимую часть  $Q[X(\omega), Y(\omega)]$ . Типовая треугольная корреляционная функция имеет вид  $R_0(\tau) = R_0[1 - (\tau/T_0)]$  при  $0 \leq \tau \leq T_0$  и  $R_0(\tau) = 0$  при  $\tau \geq T_0$ .

Ей соответствует

$$Q(\omega) = (1/\pi) \int_0^{\infty} R_0(\tau) \sin \omega \tau d\tau = R_0 T_0 (\omega T_0 - \sin \omega T_0) / \pi (\omega T_0)^2.$$

Удобно ввести функцию  $\eta(\lambda) = (\lambda - \sin \lambda) / \pi \lambda^2$ , значения которой приведены в табл. 30. Тогда  $Q_0(\omega) = R_0 T_0 \eta(\omega T_0)$ .

Функция  $R_-(\tau)$  для положительных  $\tau$  может быть представлена суммой типовых экспоненциальных корреляционных функций

$$R_-(\tau) \approx \sum_{k=1}^n A_k e^{-k\alpha|\tau|} = \sum_{k=1}^n A_k e^{-k\alpha\tau},$$

где  $A_k$  = коэффициенты, удовлетворяющие условию  $\sum_{k=1}^n A_k = 0$ ,  $\alpha$  — положительная величина,  $k$  и  $n$  — целые числа.

Таблица 30

$\lambda$	$\eta(\lambda)$	$\lambda$	$\eta(\lambda)$	$\lambda$	$\eta(\lambda)$	$\lambda$	$\eta(\lambda)$
0,0	0,000	2,0	0,087	4,0	0,095	10,0	0,033
0,1	0,005	2,1	0,089	4,1	0,093	11,0	0,031
0,2	0,011	2,2	0,091	4,2	0,091	12,0	0,028
0,3	0,016	2,3	0,093	4,3	0,090	13,0	0,024
0,4	0,021	2,4	0,095	4,4	0,088	14,0	0,021
0,5	0,026	2,5	0,097	4,5	0,086	15,0	0,020
0,6	0,032	2,6	0,098	4,6	0,084	16,0	0,020
0,7	0,036	2,7	0,099	4,7	0,082	17,0	0,020
0,8	0,041	2,8	0,100	4,8	0,080	18,0	0,018
0,9	0,046	2,9	0,101	4,9	0,078	19,0	0,017
1,0	0,050	3,0	0,101	5,0	0,076	20,0	0,015
1,1	0,055	3,1	0,101	5,5	0,065	21,0	0,015
1,2	0,059	3,2	0,101	6,0	0,055	22,0	0,014
1,3	0,063	3,3	0,101	6,5	0,047	24,0	0,014
1,4	0,067	3,4	0,101	7,0	0,041	25,0	0,013
1,5	0,071	3,5	0,100	7,5	0,037	30,0	0,011
1,6	0,075	3,6	0,099	8,0	0,035	35,0	0,009
1,7	0,078	3,7	0,098	8,5	0,034	40,0	0,008
1,8	0,081	3,8	0,097	9,0	0,034	45,0	0,007
1,9	0,084	3,9	0,096	9,5	0,034	50,0	0,006

Коэффициенты  $A_k$  находят ранее приведенным способом. Мнимая часть взаимной спектральной плотности будет

$$Q[X(\omega), Y(\omega)] \approx (1/\pi) \sum_{k=1}^n A_k (\omega/\alpha^2 k^2 + \omega^2).$$

**§ 1. Приближенное представление функций**

Теория приближения функций довольно широко применяется в математической обработке геодезических измерений. На ее основе выводят эмпирические формулы, показывающие связь между величинами, найденными в результате наблюдений, приведенных в таблицах и графиках. К теории приближения функций прибегают тогда, когда имеющиеся формулы — сложные и затрудняют процесс вычислений. Приемы теории приближения функций — неотъемлемый аппарат математико-статистического анализа случайных процессов.

Основная проблема теории приближения функций заключается в выборе функции  $\varphi(x)$ , которая в каком-то смысле возможно мало отличается от заданной функции  $f(x)$ . Такой выбор осуществляется путем интерполирования, степенного и равномерного приближения.

При интерполировании искомая функция  $\varphi(x)$  в ряде заданных точек должна принимать то же значение, что и функция  $f(x)$ . В этих точках следует соблюдать условие  $\varphi_i(x) - f_i(x) = 0$ .

Если выполняют степенное приближение, то выдвигают требование, чтобы функция  $\varphi(x)$  в некотором основном промежутке от  $a$  до  $b$  удовлетворяла условию

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]^s dx = \min,$$

где  $a$  и  $b$  — конечные действительные числа,  $s > 0$ .

В случае  $s=2$  получаем квадратическое приближение. При равномерном, оптимальном или наилучшем приближении требуется, чтобы в указанном основном промежутке выполнялось условие  $\max |\varphi(x) - f(x)| = \min$ .

Часто искомая функция  $\varphi(x)$  представляется действительным полиномом — целой рациональной функцией от переменной  $x$  с действительными коэффициентами  $c_i$ , имеющей вид

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i. \tag{69}$$

Степень  $n$  представляется целым неотрицательным числом и может быть заранее назначена. Если вводится условие перио-

дичности, то функцию  $\varphi(x)$  выражают тригонометрическим действительным полиномом

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + b_i \sin ix),$$

где коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  — действительные числа и степень  $n$  может быть установлена заранее.

Рассматриваемая задача может быть определенной, т. е. допускать одно решение. При интерполировании это достигается таким ограничением степени полинома, когда число неопределенных коэффициентов равно числу заданных точек интерполирования и полученная система уравнений имеет одно решение. В случаях степенного и равномерного приближения требуется допустимость и единственность решения экстремальной задачи.

В теории приближения функций изучается возможность последовательности полиномов  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ... иметь пределом исходную функцию  $f(x)$ . Это дает возможность оценить точность изображения функции  $f(x)$  полиномом  $\varphi(x)$ . Такая оценка не представляет затруднений, если функция  $f(x)$  раскладывается в равномерно сходящийся ряд полиномов

$$f(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \dots$$

Приведем несколько примеров приближенного представления функции. Изобразим показательную функцию  $f(x) = 2^x$  полиномом  $\varphi(x) = Ax + B$  при условии  $f(x) = \varphi(x)$  в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -1$ . Следовательно,  $A + B = 2$  и  $-A + B = 0,5$ . Отсюда  $A = 0,75$  и  $B = 1,25$ . Таким образом,  $2^x \approx 0,25(3x + 5)$ . При этом приближении  $\varphi(x)$  будет значительно отличаться от  $f(x)$ . Более близкое приближение получим, построив полином  $\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C$  при условии равенства  $\varphi(x) = f(x)$  в точках  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  и  $x_3 = 0$ . Тогда имеем уравнения  $A + B + C = 2$ ,  $A - B + C = 0,5$  и  $C = 1$ . Отсюда  $A = 0,25$ ;  $B = 0,75$ ;  $C = 1,0$  или  $2^x \approx 0,25(x^2 + 3x + 4)$ .

Изобразим четную функцию  $f(x) = \cos x$  обыкновенным полиномом  $\varphi(x) = Ax^2 + B$  при условии равенства  $\varphi(x) = f(x)$  в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \pi/2$ . В этом случае  $\cos x \approx 1 - 0,405x^2$ . Если воспользоваться полиномом  $\varphi(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$  и соблюсти равенство  $\varphi(x) = f(x)$  в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi/3$  и  $x_3 = \pi/2$ , то  $\cos x \approx 0,1(0,37x^4 - 4,96x^2 + 10)$ .

Приближим функцию  $f(x) = 2^{\cos x}$  тригонометрическим полиномом  $\varphi(x) = A \cos x + B$  при условии  $f(x) = \varphi(x)$  в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \pi$ . Тогда  $2^{\cos x} \approx 0,25(3 \cos x + 5)$ . Потребуем соблюдения условия  $\varphi(x) = f(x)$  в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi/2$  и  $x_3 = \pi$ , изображая функцию  $f(x)$  полиномом  $\varphi(x) = A \cos 2x + B \cos x + C$ . Тогда  $2^{\cos x} \approx 1/8(\cos 2x + 6 \cos x + 9)$ .

Изобразим функцию  $f(x) = x^2$  линейной функцией  $\varphi(x) = Ax + B$  при условии  $J = \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx = \min$ . Таким образом, прямая  $\varphi(x)$  пересекается с параболой в некоторых точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , для которых  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . Следовательно,  $B < 0$ ,  $A + B < 1$ ,  $B > -0,25A^2$ ,  $A > 0$  и  $B > -1$ . В плоскости переменных  $A$  и  $B$  образуется замкнутый контур, для которого

$$J = \int_0^{x_1} (x^2 - Ax - B) dx - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - Ax - B) dx + \int_{x_2}^1 (x^2 - Ax - B) dx = (1/3) - (1/2)A + (1/3)(A^2 + 4B)^{3/2}.$$

Находим  $(\partial J / \partial A) = -0,5 + A\sqrt{A^2 + 4B} = 0$  и  $(\partial J / \partial B) = -1 + 2\sqrt{A^2 + 4B} = 0$ . Отсюда  $J = \min$  будет тогда, когда  $A = 1$  и  $B = -3/16$ . Следовательно,  $x^2 \approx x - (3/16)$ .

Решим эту же задачу, но при условии  $J = \int_0^1 [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \min$ . Очевидно,

$$J = \int_0^1 (x^2 - Ax - B)^2 dx = (1/3)A^2 + AB + B^2 - (1/2)A - (2/3)B + 1/5.$$

В этом случае  $(\partial J / \partial A) = (2/3)A + B - (1/2) = 0$  и  $(\partial J / \partial B) = A + 2B - (2/3) = 0$ . Отсюда  $A = 1$  и  $B = -1/6$ . Следовательно,  $x^2 \approx x - (1/6)$ .

Приведенную задачу решим с соблюдением условия  $e = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \varphi(x)| = \min$ . Величина  $|f(x) - \varphi(x)|$  на концах рассматриваемого промежутка имеет значения  $-B$  и  $1 - A - B$ , а внутри этого промежутка обладает максимумом, равным  $0,25A^2 + B$ . Таким образом,  $e$  равно наибольшему из чисел  $-B$ ,  $1 - A - B$  и  $0,25A^2 + B$ . Оно тогда принимает наименьшее значение, когда  $-B = 1 - A - B = 0,25A^2 + B$ . Отсюда  $A = 1$  и  $B = -1/8$ . Следовательно,  $x^2 \approx x - 1/8$ .

## § 2. Точечное интерполирование

Разбор задачи точечного интерполирования начнем с построения полинома  $\varphi(x)$  степени  $n$ , который в  $n+1$  заданных точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  принимает определенные значения  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Этот полином выражается уравнением (69), в котором

неизвестными являются коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ . Для их отыскания решаем систему из  $n+1$  линейного уравнения

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n &= y_1; \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n &= y_1; \\ c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \dots + c_nx_2^n &= y_2; \\ \dots &\dots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n &= y_n. \end{aligned} \tag{70}$$

Определитель Вандермонда, характеризующий эту систему, будет

$$W(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \tag{71}$$

Не трудно убедиться в том, что этот определитель равен произведению всевозможных разностей чисел, из которых он составлен. При этом предыдущие числа нужно вычитать из последующих, т. е.

$$\begin{aligned} W(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}); \\ &(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) \dots; \\ &\dots \\ &(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) = \prod_{i < j}^{0 \dots n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

Следовательно, он отличен от нуля, если среди чисел, из которых он составлен, нет равных между собой. При соблюдении этого условия система уравнений (70) имеет единственное решение. Запишем «расширенный» определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 0. \tag{72}$$

Такая запись удобна для непосредственного отыскания функции  $\varphi(x)$ . Раскладывая определитель (72) по элементам первого столбца, получаем алгебраические дополнения в виде

определителей Вандермонда. После соответствующих преобразований находим интерполяционный полином Лагранжа

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}. \quad (73)$$

Обратим внимание на то, что при  $n=1$  с помощью этой формулы решается задача аналитической геометрии, сводящаяся к проведению прямой через две точки. Если  $n=2$ , то по выражению (73) строится парабола с вертикальной осью. Эта кривая проходит через три точки  $(a, A)$ ,  $(b, B)$  и  $(c, C)$ . Формула Лагранжа имеет вид

$$\varphi(x) = A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Например, для  $a=0$ ,  $b=4$ ,  $c=6$  и  $A=1$ ,  $B=3$  и  $C=2$ , получаем  $\varphi(x) = 1 + 7/6x - 1/6x^2$ .

Аналогично решается задача построения тригонометрического полинома степени  $n$ , который в  $2n+1$  точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  принимал значения  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ .

Она сводится к определению коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  полинома

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + \\ & + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

Они находятся в результате решения системы из  $2n+1$  уравнений

$$\begin{aligned} a_0 + (a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i) + (a_2 \cos 2x_i + b_2 \sin 2x_i) + \dots \\ \dots + (a_n \cos nx_i + b_n \sin nx_i) = y_i. \end{aligned} \quad (74)$$

Построив «расширенный» определитель и разложив его по элементам первого столбца, получаем тригонометрический интерполяционный полином

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2n} y_i \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \dots \sin \frac{x-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x-x_{i+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin \frac{x_i-x_0}{2} \dots \sin \frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x_i-x_{i+1}}{2} \dots \sin \frac{x_i-x_{2n}}{2}}.$$

Например, для точек  $0; 5/6\pi$  и  $4/3\pi$  тригонометрический полином, принимающий значения  $1, 0,5$  и  $-0,5$ , будет  $\varphi(x) = (1/2) + \sin [x + (\pi/6)]$ .

Четный тригонометрический полином степени  $n$ , который в  $n+1$  точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  принимает значения  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ , имеет вид

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx. \quad (75)$$

Определив ранее приведенным способом его коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , найдем

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(\cos x - \cos x_0) \dots (\cos x - \cos x_{i-1})}{(\cos x_i - \cos x_0) \dots (\cos x_i - \cos x_{i-1})} \times \\ \times \frac{(\cos x - \cos x_{i+1}) \dots (\cos x - \cos x_n)}{(\cos x_i - \cos x_{i+1}) \dots (\cos x_i - \cos x_n)}.$$

Для  $x = 0, \pi/4, \pi$  и  $y = 1, 2, -2$  получаем  $\varphi(x) = [2 + (3/4)\sqrt{2}] + (3/2)\cos x + [(-5/2) + (3/4)\sqrt{2}]\cos 2x$ .

Нечетный тригонометрический полином степени  $n$  имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx. \quad (76)$$

Для его вычисления служит формула

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\sin x (\cos x - \cos x_1) \dots (\cos x - \cos x_{i-1})}{\sin x_i (\cos x_i - \cos x_1) \dots (\cos x_i - \cos x_{i-1})} \times \\ \times \frac{(\cos x - \cos x_{i+1}) \dots (\cos x - \cos x_n)}{(\cos x_i - \cos x_{i+1}) \dots (\cos x_i - \cos x_n)}.$$

Например, для  $x = \pi/4, 3\pi/4$  и  $y = 2, -3$  получаем  $\varphi(x) = (-1/\sqrt{2})\sin x + (5/2)\sin 2x$ . Нечетные полиномы обращаются в нуль при  $x = 0, \pi$ .

### § 3. Конечные разности

В теории приближения функций пользуются вычислением конечных разностей. Для любой функции  $f(x)$  первая конечная разность или конечная разность первого порядка определяется по выражению

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

где постоянное число  $h > 0$ .

Вторая конечная разность или конечная разность второго порядка будет

$$\Delta_2 f(x) = \Delta \Delta f(x) = [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = \\ = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Аналогично находим конечные разности любого порядка. Их определение может быть представлено рекуррентной формулой  $\Delta_{n+1} f(x) = \Delta \Delta_n f(x)$ .

Составляя конечные разности последовательных порядков, получаем

$$\Delta_n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} c_n^i f(x + ih). \quad (77)$$

При этом конечная разность нулевого порядка выражается заданной функцией, т. е.  $\Delta_0 f(x) = f(x)$ .

Из формулы (77) получаем

$$f(x + nh) = \sum_{i=0}^n c_n^i \Delta_i f(x).$$

Вычисление конечных разностей — как бы начальная форма дифференциального вычисления, источник его возникновения. Посредством предельного перехода устанавливается связь между конечной разностью и производной одного и того же порядка

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\Delta_n f(x)/h^n] = f^{(n)}(x).$$

Здесь производная  $f^{(n)}(x)$  предполагается непрерывной. В табл. 31 приведен пример вычисления последовательных конечных разностей для  $f(x) = \lg x$  и  $h=0,1$ .

Таблица 31

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta_2 f(x)$	$\Delta_3 f(x)$	$\Delta_4 f(x)$	$\Delta_5 f(x)$	$\Delta_6 f(x)$
1,0	0,00000						
1,1	0,04139	4139					
1,2	0,07918	3779	-360				
1,3	0,11394	3476	-303	57			
1,4	0,14613	3219	-257	46	-11		
1,5	0,17609	2996	-223	34	-12	-1	9
1,6	0,20412	2803	-193	30	-4	8	-11
1,7	0,23045	2633	-170	23	-7	-3	6
1,8	0,25527	2482	-151	19	-4	3	-1
1,9	0,27875	2348	-134	17	-2	2	-1
2,0	0,30103	2228	-120	14	-3	1	

Теория интерполирования возникла из практики составления и применения различных математических таблиц. Если в таблице отсутствует заданное значение переменной, то выполняют интерполирование. При этом полагают, что замена функции интерполяционным полиномом вызывает незначительную погрешность. Допустим, что  $f(x)$  задана своими значениями в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда полином  $\varphi(x)$  степени  $n$  в этих точках примет те же значения, т. е.

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad (78)$$

где  $i=0, 1, 2, \dots, n$ .

Интерполирование или интерполяция заключается в составлении интерполяционного полинома Лагранжа  $\varphi(x)$ , связанного с функцией  $f(x)$ , и вычислении его значений в точках  $x$ , не совпадающих с данными в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Функция  $f(x)$  называется интерполируемой, а точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  — интерполяционными или узлами. Только для них сохраняется равенство (78). В иных точках, в общем случае,  $\varphi(x) \neq f(x)$ . Интерполирование относится к отысканию значений функции  $\varphi(x)$ , близкой к функции  $f(x)$ , в точках  $x$ , расположенных между узлами. Вычисление значений  $\varphi(x)$  в точках  $x$ , лежащих за пределами промежутка, образованного узлами, называется экстраполированием или экстраполяцией. Интерполяционный полином Лагранжа, связанный с функцией  $y=f(x)$  в узлах  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , выражается формулой (73). Учитывая, что  $y_i = f(x_i)$ , получаем

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \times$$

$$\times \frac{(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Если интерполируемая функция  $f(x)$  — периодическая, то применяют тригонометрическое интерполирование. Для этого в выражениях (74), (75) и (76) принимают  $y_i=f(x_i)$ . Часто интерполирование выполняют в условиях равноотстоящих узлов, когда  $x_i=a+ih$ , где  $h \neq 0, i=0, 1, 2, \dots, n$ .

Тогда условие (78) приобретает следующий вид:

$$\varphi(a+ih) = f(a+ih), \quad (79)$$

где  $i=0, 1, 2, \dots, n$ .

Операция вычисления конечных разностей обладает дистрибутивным свойством

$$\Delta [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] = c_1 \Delta f_1(x) +$$

$$+ c_2 \Delta f_2(x) + \dots + c_n \Delta f_n(x).$$

Степень полинома при составлении конечной разности понижается на единицу. Конечная разность  $n$ -го порядка от полинома  $\varphi(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$  является постоянной величиной и составляет  $\Delta_n \varphi(x) = n! h^n c_n$ .

Например, для полинома  $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$  его значения в последовательных точках, образующих арифметическую прогрессию, и конечные разности трех порядков приведены в табл. 32.

Это дает возможность вычислять значения полинома  $\varphi(4), \varphi(5), \dots$  только путем сложения. В случае равноотстоящих узлов из выражения (79) видно, что значения функции  $\varphi(x)$  в

последующих точках выражаются через конечные разности в начальной точке  $\Delta_i \varphi(a) = \Delta_i f(a)$ .

Произвольный полином  $\varphi(x)$  степени  $n$  разлагается по факториальным полиномам

$$\varphi(x) = \varphi(a) + [(x-a)/1!h] \Delta\varphi(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta_2\varphi(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)(x-a-h)\dots[x-a-(n-1)h]}{n!h^n} \Delta_n\varphi(a).$$

На этом основано и построение интерполяционного полинома Ньютона, связанного с функцией  $f(x)$  и совокупностью точек  $a+ih$ , где  $i=0, 1, 2, \dots, n$ . Он имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta_2 f(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)(x-a-h)\dots[x-a-(n-1)h]}{n!h^n} \Delta_n f(a).$$

Таблица 32

$x$	$\varphi(x)$	$\Delta\varphi(x)$	$\Delta_2\varphi(x)$	$\Delta_3\varphi(x)$
0	-5	5		
1	0	5	0	6
2	5	11	6	6
3	16	23	12	6
4	39	41	18	
5	80			

Таблица 33

$x$	$\lg x$	$\Delta f(x)$	$\Delta_2 f(x)$
12	1,07918		
13	1,11394	3476	
14	1,14613	3219	-257

По внешнему виду он отличается от интерполяционного полинома Лагранжа, хотя и обеспечивает тождественное решение для равноотстоящих узлов. Более удобно вычислять его с помощью интерполяционного полинома Ньютона. Для улучшения приближения полином Лагранжа следует вычислить вновь. При этом достигается определение только дополнительного члена.

Во многих случаях ограничиваются линейной интерполяцией. Для  $a < x < a+h$  и  $n=1$  получаем  $\varphi(x) = f(a) + [(x-a)/h] \Delta f(a)$ .

Полагая, что  $f(x) = \varphi(x)$ , находим «правило пропорциональных частей»

$$\{[f(x) - f(a)]/[f(a+h) - f(a)]\} = (x-a)/h,$$

которое механически используется при выборе тех или иных значений функции  $f(x)$  из математических таблиц. Если оно

дает приближение функции с недостаточной точностью, то приближаются к квадратической интерполяции. Для  $n=2$  имеем

$$\varphi(x) = f(a) + \Delta f(a) \frac{x-a}{h} + \Delta_2 f(a) \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2}.$$

Таким образом, в результат линейной интерполяции вводится поправка

$$\delta = (1/2) \{ [f(a+2h) - f(a+h)] - [f(a+h) - f(a)] \} \times \\ \times \{ [(x-a)(x-a-h)]/h^2 \}.$$

Начальную точку  $a$  при квадратическом интерполировании можно выбрать двумя способами. Допустим, что в таблице есть значения функции  $f(x)$  в точках  $\dots x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$  и рассматриваемое значение  $x$  располагается в интервале от  $x_6$  до  $x_7$ . Первый способ заключается в том, что  $a=x_6, a+h=x_7, a+2h=x_8$ . Он более удобный, когда  $x > 0,5(x_6+x_7)$ .

Прибегая ко второму способу, считают, что  $a=x_5, a+h=x_6, a+2h=x_7$ . Его применяют при  $x < 0,5(x_6+x_7)$ . Необходимость введения поправки  $\delta$  чаще всего определяют путем непосредственного ее вычисления. В табл. 33 рассмотрен пример линейной и квадратической интерполяции в случае вычисления функции  $\lg 12,7$  по пятизначной таблице логарифмов натуральных чисел от 1 до 100.

При линейной интерполяции имеем  $1,07918 + 0,03476 \frac{0,7}{1} = 1,10351$ . Квадратическая интерполяция приводит к поправке  $\delta = (-1/2) 0,00257 \times 0,7 (-0,3) = 0,00027$ . Следовательно,  $\varphi(x) = 1,10378$ .

**СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**

**§ 1. Марковские случайные процессы**

В дискретном ряде фиксированных точек  $t_1, t_2, \dots$  значения случайной функции образуют случайную последовательность  $X_i = X(t_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots$ , произвольный член которой можно рассматривать как случайную функцию номера этого члена — целочисленного аргумента  $i$ . Следовательно, аргумент  $t$  исключается из рассмотрения. Если число членов — конечное, случайную последовательность называют конечной. Члены случайной последовательности часто рассматривают как составляющие случайного вектора. Поэтому конечные случайные последовательности изучают в свете теории случайных векторов.

Если число значений аргумента  $t_i$  бесконечно, то образуется бесконечная случайная последовательность. Уход  $t_i$  в бесконечность возможен по оси  $t$  либо в одну, либо в обе стороны. В общем случае значениями аргумента  $t_i$  являются все целые числа от  $-\infty$  до  $\infty$ . Иногда случайную последовательность называют решетчатой случайной функцией и ее целочисленный аргумент записывают в квадратных скобках, т. е.  $X_i = X[i]$ . Это делается для того, чтобы отличить его от непрерывно изменяющегося.

Полной вероятностной характеристикой случайной последовательности служит последовательность законов распределения ее членов. При этом такие члены рассматриваются по одному, два, три и т. д. Если законы распределения всех порядков — нормальные, случайную последовательность называют нормальной. Для решения практических задач часто ограничиваются определением моментов первого и второго порядка. Тогда математическое ожидание и корреляционная функция — основные характеристики случайной последовательности.

Математическим ожиданием случайной последовательности считают последовательность чисел, которые представляют собой математические ожидания соответствующих ее членов  $M[x(i)] = M[X(t_i)]$ .

Корреляционная функция случайной последовательности выражается корреляционным моментом двух произвольно выбранных членов этой последовательности

$$K[X(t_i), X(t_j)] = M\{\delta[X(t_i)] \delta[X(t_j)]\}.$$

Последовательность независимых случайных величин — простейшая случайная последовательность. Для нее корреляционная функция равна дисперсии соответствующего члена случайной последовательности ( $i=j$ ). При различных значениях аргумента ( $i \neq j$ ) эта функция равна нулю. Простой также является случайная последовательность, в которой зависимость распространяется лишь на небольшое число соседних членов. Эту случайную последовательность называют цепью Маркова.

В простой цепи Маркова условный закон распределения каждого члена случайной последовательности  $X_i$  относительно предыдущих членов  $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_{i-n}$ , где  $n > 1$ , зависит только от значения предшествующего члена  $X_{i-1}$ , т. е.

$$\Phi(x_i/x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-n}) = \Phi(x_i/x_{i-1}).$$

Такой марковский процесс без последствия протекает в системе, любое состояние которой в будущем зависит только от ее состояния в настоящем, а не в прошлом. Марковские процессы интерпретируют многие физические явления. Например, исследуя измерительное устройство, которое в какой-то мере подверглось износу, нас интересует возможность дальнейшей его эксплуатации. Поэтому основное внимание сосредоточивается на нынешнем состоянии устройства и работе его в будущем, а не на выяснении причин износа и последовательности его в прошлом. Цепь Маркова называют марковским случайным процессом с дискретными состояниями, если эти возможные состояния системы  $S_1, S_2, \dots$  можно перечислить (перенумеровать), сам процесс состоит из мгновенного перехода (перескакивания) из одного состояния в другое. Он полностью характеризуется двумерной плотностью распределения — совместной плотностью вероятности любых двух членов случайной последовательности. На основании двумерной плотности распределения  $\Phi_2[x_1(t_1), x_2(t_2)]$  определяют одномерную

$$\Phi_1[x_1(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2[x_1(t_1), x_2(t_2)] dx_2.$$

а также условную плотность распределения относительно непосредственно предшествующего члена случайной последовательности

$$\Phi(x_i/x_{i-1}) = [\Phi_2(x_{i-1}, x_i)]/[\Phi_1(x_{i-1})].$$

Такую условную плотность распределения называют плотностью вероятности перехода марковского случайного процесса. Совместная плотность распределения любого числа членов случайной последовательности будет

$$\Phi_{n+1}(x_{i-n}, \dots, x_{i-1}, x_i) = \Phi_1(x_{i-n}) \Phi(x_{i-n+1}/x_{i-n}) \dots \Phi(x_i/x_{i-1}).$$

Например, процесс с дискретными состояниями происходит в измерительной системе, состоящей из двух узлов, каждый из которых может в процессе ее эксплуатации выйти из строя. Состояния этой системы такие:  $S_1$  — оба узла работают;  $S_2$  — первый узел отказал, а второй работает;  $S_3$  — второй узел отказал, а первый работает;  $S_4$  — оба узла отказали. Процесс заключается в том, что система случайным образом переходит из одного состояния в другое.

Представление о марковском случайном процессе распространяется на случайные функции непрерывно изменяющегося скалярного аргумента.  $X(t)$ , если их значения при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  образуют простую марковскую цепь. В ней переход из состояния в состояние имеет постепенный, плавный характер.

Например, изменения напряжения в осветительной сети являются марковским процессом с непрерывным состоянием. Сложная марковская цепь — случайная последовательность, условный закон распределения каждого члена  $X_i$  которой относительно предыдущих членов  $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_{i-n}$  при любом  $n > l$  зависит от значений  $l$  непосредственно предшествующих членов  $X_{i-1}, X_{i-2}, X_{i-l}$ . Для такой цепи порядка  $l$  получаем

$$\Phi_i(x_i/x_{i-1}, \dots, x_{i-l}, \dots, x_{i-n}) = \Phi_i(x_i/x_{i-1}, \dots, x_{i-l}).$$

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями возможные состояния системы и ее переходы из состояния в состояние геометрически изображаются в виде графа состояний (рис. 46). Этот вид случайного процесса может быть с дискретным временем, когда переходы системы из состояния в состояние происходят в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , и с непрерывным временем, когда переходы системы из состояния в состояние происходят в случайный момент времени  $t$ .

Допустим, что в марковском случайном процессе с дискретными состояниями и дискретным временем система  $S$  может находиться в состояниях  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , и переходы из состояния в состояние возможны только в моменты  $t_1, t_2, \dots$ , соответствующие шагам или этапам процесса. Таким образом,  $S$  является функцией целочисленного аргумента — номера шага.

После  $k$  шагов система  $S$  находится в одном из состояний  $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$ , которые характеризуются вероятностями состояний  $p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$ . Все эти состояния образуют полную груп-

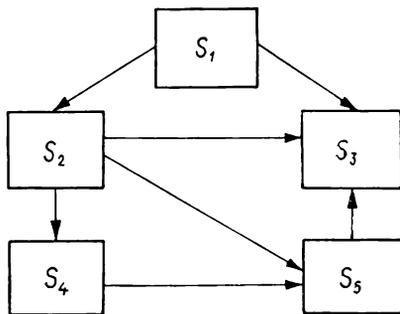


Рис. 46

пу несовместных событий, для которых  $\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1$ . Вероятности

перехода системы из состояния в состояние  $p_{ij}$  (переходные вероятности) могут быть записаны на графе состояний (рис. 47), который называется размеченным графом состояний. На этом графе записывают также вероятности задержки системы  $p_{ii}$  в том или ином состоянии на определенном шаге (этапе).

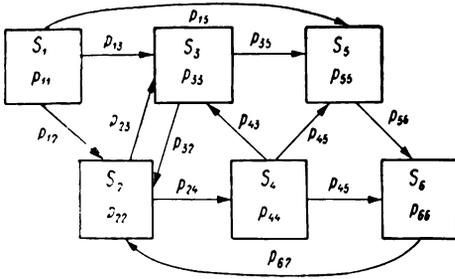


Рис. 47

Различают однородные цепи Маркова, когда переходные вероятности не зависят от номера шага, и неоднородные, у которых переходные вероятности при-

обретают разное значение для различных шагов. Для однородной цепи Маркова переходные вероятности и вероятности задержки образуют матрицу системы

$$\| P_{ij} \| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}. \quad (80)$$

Вероятности задержки располагаются по главной диагонали матрицы системы. Сумма членов каждой строки матрицы равна единице, т. е.  $\sum_{i=1}^n p_{ji} = 1$ . Поэтому  $p_{jj} = 1 - \sum_{i \neq j} p_{ji}$ . Вероятности состояния системы в начальный момент  $p_1(0) = 1, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0, \dots, p_n(0) = 0$ .

После первого шага они составят  $p_1(1) = p_{11}, p_2(1) = p_{12}, \dots, p_n(1) = p_{1n}$ .

Для определения вероятностей состояния системы после второго шага применяют формулу полной вероятности и находят

$$p_1(2) = p_1(1)p_{11} + p_2(1)p_{21} + \dots + p_n(1)p_{n1} = \sum_{j=1}^n p_{j1}p_j(1);$$

$$p_2(2) = p_1(1)p_{12} + p_2(1)p_{22} + \dots + p_n(1)p_{n2} = \sum_{j=1}^n p_{j2}p_j(1);$$

.....

$$p_n(2) = p_1(1)p_{1n} + p_2(1)p_{2n} + \dots + p_n(1)p_{nn} = \sum_{j=1}^n p_{jn}p_j(1).$$

Вероятности состояний системы после  $k$ -го шага будут

$$p_1(k) = p_1(k-1)p_{11} + p_2(k-1)p_{21} + \dots + p_n(k-1)p_{n1} =$$

$$= \sum_{j=1}^n p_{j1}p_j(k-1);$$

$$p_2(k) = p_1(k-1)p_{12} + p_2(k-1)p_{22} + \dots + p_n(k-1)p_{n2} =$$

$$= \sum_{j=1}^n p_{j2}p_j(k-1);$$

.....

$$p_n(k) = p_1(k-1)p_{1n} + p_2(k-1)p_{2n} + \dots + p_n(k-1)p_{nn} =$$

$$= \sum_{j=1}^n p_{jn}p_j(k-1).$$

Следовательно, вероятности состояний системы вычисляются по рекуррентной формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1)p_{ij}.$$

В неоднородной марковской цепи матрица (80) имеет другие элементы при переходе от одного шага к другому. Для  $k$ -го шага она будет  $\|p_{ij}^{(k)}\|$ . Поэтому в неоднородной марковской цепи

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1)p_{ij}^{(k)}.$$

Рассмотрим систему выбора масштаба топографической съемки, обусловленного необходимой полнотой (нагрузкой), топографическими объектами —  $S_1$ , подробностью их представления (предметов местности) —  $S_2$ , точностью такого представления —  $S_3$  и сечением рельефа —  $S_4$ . Каждый из этих масштабообразующих факторов обеспечивает решение задачи с той или иной вероятностью. Граф состояний системы приведен на рис. 48.

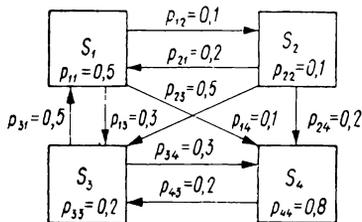


Рис. 48

Расчет однородной марковской цепи (табл. 34) показывает, что выбор масштаба топографической съемки зависит в основном от заданного сечения рельефа и полноты съемки. Такое суждение основано на принятых исходных переходных вероятностях и вероятностях задержки. Однако матрица этих вероятностей может изменяться от шага

к шагу. Неоднородная марковская цепь рассчитана начиная с определения  $p_1(2)$ ,  $p_2(2)$ ,  $p_3(2)$  и  $p_4(2)$  (табл. 35). Этот расчет свидетельствует о ведущем влиянии полноты (нагрузки) на выбор масштаба съемки.

Таблица 34

$p_{11}(0)$	1,00	$p_{21}(0)$	0,00	$p_{31}(0)$	0,00	$p_{41}(0)$	0,00
$p_{11}$	0,5	$p_{12}$	0,1	$p_{13}$	0,3	$p_{14}$	0,1
$p_{21}$	0,2	$p_{22}$	0,1	$p_{23}$	0,5	$p_{24}$	0,2
$p_{31}$	0,5	$p_{32}$	0,0	$p_{33}$	0,2	$p_{34}$	0,3
$p_{41}$	0,00	$p_{42}$	0,0	$p_{43}$	0,2	$p_{44}$	0,8
$p_1(1)$	0,5	$p_2(1)$	0,1	$p_3(1)$	0,3	$p_4(1)$	0,1
$p_1(1) p_{11}$	0,25	$p_1(1) p_{12}$	0,05	$p_1(1) p_{13}$	0,15	$p_1(1) p_{14}$	0,05
$p_2(1) p_{21}$	0,02	$p_2(1) p_{22}$	0,01	$p_2(1) p_{23}$	0,05	$p_2(1) p_{24}$	0,02
$p_3(1) p_{31}$	0,15	$p_3(1) p_{32}$	0,00	$p_3(1) p_{33}$	0,06	$p_3(1) p_{34}$	0,09
$p_4(1) p_{41}$	0,00	$p_4(1) p_{42}$	0,00	$p_4(1) p_{43}$	0,02	$p_4(1) p_{44}$	0,08
$p_1(2)$	0,42	$p_2(2)$	0,06	$p_3(2)$	0,28	$p_4(2)$	0,24
$p_1(2) p_{11}$	0,21	$p_1(2) p_{12}$	0,04	$p_1(2) p_{13}$	0,13	$p_1(2) p_{14}$	0,04
$p_2(2) p_{21}$	0,01	$p_2(2) p_{22}$	0,01	$p_2(2) p_{23}$	0,03	$p_2(2) p_{24}$	0,01
$p_3(2) p_{31}$	0,14	$p_3(2) p_{32}$	0,00	$p_3(2) p_{33}$	0,06	$p_3(2) p_{34}$	0,08
$p_4(2) p_{41}$	0,00	$p_4(2) p_{42}$	0,00	$p_4(2) p_{43}$	0,05	$p_4(2) p_{44}$	0,19
$p_1(3)$	0,36	$p_2(3)$	0,05	$p_3(3)$	0,27	$p_4(3)$	0,32
$p_1(3) p_{11}$	0,18	$p_1(3) p_{12}$	0,04	$p_1(3) p_{13}$	0,11	$p_1(3) p_{14}$	0,04
$p_2(3) p_{21}$	0,01	$p_2(3) p_{22}$	0,00	$p_2(3) p_{23}$	0,02	$p_2(3) p_{24}$	0,01
$p_3(3) p_{31}$	0,14	$p_3(3) p_{32}$	0,00	$p_3(3) p_{33}$	0,05	$p_3(3) p_{34}$	0,08
$p_4(3) p_{41}$	0,00	$p_4(3) p_{42}$	0,00	$p_4(3) p_{43}$	0,06	$p_4(3) p_{44}$	0,26
$p_1(4)$	0,33	$p_2(4)$	0,04	$p_3(4)$	0,24	$p_4(4)$	0,39

Чаще встречаются марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем — непрерывные цепи Маркова, в которых переходы из состояния в состояние происходят в случайные моменты времени. Если  $p_i(t)$  — вероятность того, что в момент  $t$  система  $S$  будет находиться в состоянии  $S_i$ , то для любого момента времени  $t$  имеем  $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$ . Расчет не-

прерывной марковской цепи заключается в отыскании вероятностей  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ...,  $p_n(t)$ . При этом вместо переходных вероятностей, рассматривают плотности вероятностей перехода

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p_{ij}(\Delta t)/\Delta t].$$

Их находят для  $i \neq j$ . Для малого  $\Delta t$   $p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t$ .

Если  $\lambda_{ij}$  не зависит от  $t$ , то марковский процесс считают однородным. В случае  $\lambda_{ij}$  функционально зависимой от  $t$  такой

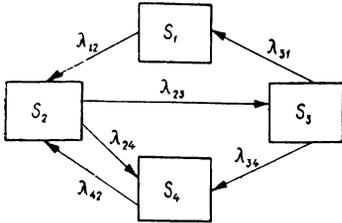


Рис. 49

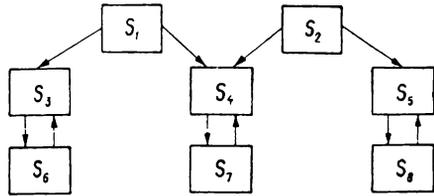


Рис. 50

процесс будет неоднородным. Плотности вероятностей перехода записывают на размеченном графе состояний (рис. 49). Для определения вероятностей состояний  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ...,  $p_n(t)$  интегрируют систему уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} [dp_1(t)/dt] &= -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{31}p_3(t), & [dp_2(t)/dt] &= -\lambda_{23}p_2(t) - \\ & -\lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{42}p_4(t); \\ [dp_3(t)/dt] &= -\lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{34}p_3(t) + \lambda_{23}p_2(t); \\ [dp_4(t)/dt] &= -\lambda_{42}p_4(t) + \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{34}p_3(t). \end{aligned} \quad (81)$$

Начальные условия зависят от начального состояния системы  $S$ . Если для  $t=0$  система была в состоянии  $S_1$ , то  $p_1(t)=1$ ,  $p_2(t)=p_3(t)=p_4(t)=0$ . Учитывая, что  $p_4(t)=1-[p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)]$ , можно было бы не приводить полной системы уравнений (81). Однако они легко выписываются по размеченному графу состояний. Эта система линейных дифференциальных уравнений с постоянными или переменными коэффициентами практически редко интегрируется в квадратурах. Чаще всего она решается численно обычным путем (вручную) или с помощью электронной вычислительной машины.

В случае  $\lambda_{ij}=\text{const}$  получаем простейшую (стационарную) систему. Если  $t \rightarrow \infty$ , то для конечного числа состояний системы и возможности перехода за определенное число шагов из одного состояния в другое вероятности состояний системы  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ...,  $p_n(t)$  имеют предельные или финальные значения, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$ .

При соблюдении указанных условий для  $t \rightarrow \infty$  система обладает предельным стационарным режимом. В этом случае пре-

$p_1(2)$	0,42	$p_2(2)$	0,06	$p_3(2)$	0,28	$p_4(2)$	0,24	$\Sigma 1,00$
$p_{11}^{(2)}$	0,4	$p_{12}^{(2)}$	0,2	$p_{13}^{(2)}$	0,1	$p_{14}^{(2)}$	0,3	1,00
$p_{21}^{(2)}$	0,1	$p_{22}^{(2)}$	0,2	$p_{23}^{(2)}$	0,6	$p_{24}^{(2)}$	0,1	1,00
$p_{31}^{(2)}$	0,6	$p_{32}^{(2)}$	0,2	$p_{33}^{(2)}$	0,0	$p_{34}^{(3)}$	0,2	1,00
$p_{41}^{(2)}$	0,2	$p_{42}^{(2)}$	0,2	$p_{43}^{(2)}$	0,1	$p_{44}^{(2)}$	0,5	1,00
$p_1(2) p_{11}^{(2)}$	0,17	$p_1(2) p_{12}^{(2)}$	0,08	$p_1(2) p_{13}^{(2)}$	0,04	$p_1(2) p_{14}^{(2)}$	0,13	0,42
$p_2(2) p_{21}^{(2)}$	0,01	$p_2(2) p_{22}^{(2)}$	0,01	$p_2(2) p_{23}^{(2)}$	0,04	$p_2(2) p_{24}^{(2)}$	0,00	0,06
$p_3(2) p_{31}^{(2)}$	0,17	$p_3(2) p_{32}^{(2)}$	0,06	$p_3(2) p_{33}^{(2)}$	0,00	$p_3(2) p_{34}^{(2)}$	0,05	0,28
$p_4(2) p_{41}^{(2)}$	0,05	$p_4(2) p_{42}^{(2)}$	0,05	$p_4(2) p_{43}^{(2)}$	0,02	$p_4(2) p_{44}^{(2)}$	0,12	0,24
$p_1(3)$	0,40	$p_2(3)$	0,20	$p_3(3)$	0,10	$p_4(3)$	0,30	1,00
$p_{11}^{(3)}$	0,6	$p_{12}^{(3)}$	0,3	$p_{13}^{(3)}$	0,1	$p_{14}^{(3)}$	0,0	1,00
$p_{21}^{(3)}$	0,0	$p_{22}^{(3)}$	0,0	$p_{23}^{(3)}$	0,7	$p_{24}^{(3)}$	0,3	1,00
$p_{31}^{(3)}$	0,5	$p_{32}^{(3)}$	0,4	$p_{33}^{(3)}$	0,0	$p_{34}^{(3)}$	0,1	1,00
$p_{41}^{(3)}$	0,1	$p_{42}^{(3)}$	0,1	$p_{43}^{(3)}$	0,2	$p_{44}^{(3)}$	0,1	1,00
$p_1(3) p_{11}^{(3)}$	0,24	$p_1(3) p_{12}^{(3)}$	0,12	$p_1(3) p_{13}^{(3)}$	0,04	$p_1(3) p_{14}^{(3)}$	0,00	0,40
$p_2(3) p_{21}^{(3)}$	0,00	$p_2(3) p_{22}^{(3)}$	0,00	$p_2(3) p_{23}^{(3)}$	0,14	$p_2(3) p_{24}^{(3)}$	0,06	0,20
$p_3(3) p_{31}^{(3)}$	0,05	$p_3(3) p_{32}^{(3)}$	0,04	$p_3(3) p_{33}^{(3)}$	0,00	$p_3(3) p_{34}^{(3)}$	0,01	0,10
$p_4(3) p_{41}^{(3)}$	0,03	$p_4(3) p_{42}^{(3)}$	0,03	$p_4(3) p_{43}^{(3)}$	0,06	$p_4(3) p_{44}^{(3)}$	0,18	0,30
$p_1(4)$	0,32	$p_2(4)$	0,19	$p_3(4)$	0,24	$p_4(4)$	0,25	1,00

дельные значения вероятностей  $p_i(t)$  показывают среднее время пребывания системы в тех или иных состояниях. Для системы, приведенной на рис. 49, такие пределы существуют, а для системы, граф состояний которой приведен на рис. 50, они отсутствуют. Например, для начального состояния  $S_1$  может быть достигнуто состояние  $S_6$ . Однако при начальном состоянии  $S_2$  нельзя достигнуть при  $t \rightarrow \infty$  состояния  $S_6$ . Для отыскания предельных значений вероятностей состояния системы нужно принять левые части в уравнениях Колмогорова, равными нулю. Тогда для определения  $p_1, p_2, \dots, p_n$  решается система линейных алгебраических уравнений, дополненная нормировочным условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А. Статистическое исследование зависимостей. М., Металлургия, 1968.
2. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
3. Андреев Н. И. Корреляционная теория статистически оптимальных систем. М., Наука, 1966.
4. Барглет М. С. Введение в теорию случайных процессов. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М., Наука, 1969.
6. Бохвалов Н. С. Численные методы. М., Наука, 1973.
7. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., Мир, 1974.
8. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., Недра, 1965.
9. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., Наука, 1972.
10. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., Сов. радио, 1972.
11. Видуев Н. Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений. Киев, Вища школа, 1978.
12. Видуев Н. Г., Кондра Г. С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М., Недра, 1969.
13. Видуев Н. Г., Кондра Г. С. Дисперсионный анализ геодезических измерений. М., Недра, 1968.
14. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1965.
15. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., Наука, 1971.
16. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. М., Сов. радио, 1973.
17. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М., Мир, 1971.
18. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1973.
19. Лана В. Г. Математические основы кибернетики. Киев, Вища школа, 1971.
20. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М., Наука, 1971.
21. Невельсон М. Г., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., Наука, 1972.
22. Пугачев В. С. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М., Сов. радио, 1973.
23. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.
24. Румицкий Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М., Наука, 1971.
25. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., Сов. радио, 1971.
26. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., Наука, 1971.
27. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. М., Высшая школа, 1971.
28. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М., Наука, 1973.
29. Нетшил А. В. Теория автоматического управления/Под ред. А. В. Нетшила, т. 7. М., Высшая школа, 1968; т. 2. М., Высшая школа, 1972.
30. Трохименко Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. М., Сов. радио, 1972.
31. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления. М., Наука, 1971.
32. Фиакко А. Ф., Мак-Кортик Г. Нелинейное программирование. М., Мир, 1972.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
<b>Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ</b>	
§ 1. Случайные функции	5
§ 2. Корреляционные функции	9
<b>Глава 2. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ</b>	
§ 1. Статистические оценки характеристик случайных процессов	14
§ 2. Точность и надежность статистических оценок характеристик случайных процессов	21
§ 3. Пример математико-статистического анализа случайного процесса	48
<b>Глава 3. ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ</b>	
§ 1. Стационарный случайный процесс	60
§ 2. Эргодические стационарные случайные функции	73
§ 3. Математико-статистический анализ эргодической стационарной случайной функции	78
§ 4. Нестационарные случайные функции	83
<b>Глава 4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ</b>	
§ 1. Гармонические процессы	88
§ 2. Спектральное разложение стационарной случайной функции	98
§ 3. Спектральная плотность стационарной случайной функции	101
<b>Глава 5. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ</b>	
§ 1. Приближенное представление функций	125
§ 2. Точечное интерполирование	127
§ 3. Конечные разности	130
<b>Глава 6. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ</b>	
§ 1. Марковские случайные процессы	135
<i>Список литературы</i>	143