

ГЕОДЕЗИЯ

М. М. МАШИМОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
ГЕОДЕЗИЯ

М. М. МАШИМОВ

ГЕОДЕЗИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

Под редакцией
В.П. САВИНЫХ и В.Р. ЯЦЕНКО



МОСКВА "НЕДРА" 1991

Машимов М. М.

М38 Геодезия. Теоретическая геодезия: Справочное пособие/
Под ред. В. П. Савиных и В. Р. Яценко. — М.: Недра,
1991. — 268 с.: ил.

ISBN 5-247-01331-X

Изложена теория систем геодезических координат и элементы теории потенциала. Приведены основные уравнения и дифференциальные формулы, связывающие астрономо-геодезические и гравиметрические измерения с параметрами систем геодезических координат и фигуры Земли, и строгие уравнения наземных и спутниковых геодезических измерений, методы их совместной обработки. Описаны уровенные поверхности, даны их характеристики. Уделено внимание фундаментальным параметрам Земли и производным от них постоянным. Показана связь планетарной геодезии с другими науками о Земле.

Для специалистов в области геодезии.

М $\frac{1802020000 - 035}{043(01) - 91}$ КБ-11-34-91

ББК 26.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В науках о Земле все более актуальными и содержательными становятся теории решения планетарных задач. Целью настоящей книги является изложение наиболее общих и строгих теорий геодезии, знание которых необходимо специалистам, занимающимся науками о Земле.

Разработка методов решения астрономо-геодезических задач на базе общей теории в эру геоинформационных технологий приобретает первостепенное значение. Общая теория позволяет по одной и той же методике обосновывать математическую модель каждой частной задачи. Математически строго и полно решая задачу, можно выявлять слабые и сильные элементы технологии. Совершенствование технологии, в свою очередь, стимулирует построение математической модели более высокого уровня и новые обобщения в теории. Ныне, как никогда, общая теория не только дает возможность использовать дедуктивный метод изложения, сокращающий затраты труда и времени на изучение каждой частной проблемы, но и вооружает сильным инструментом специалиста, обосновывающего постановку и решение новой проблемы или разрабатывающего строгое решение известной ранее задачи для удовлетворения возрастающих запросов практики. Исходя из этой концепции, автор применил дедуктивный метод изложения общих теорий и строгих методов решения задач геодезии.

Вторая концепция, которая определила содержание и принципы рассмотрения теоретических задач, состоит в том, что современная геодезия является планетарной и физической; твердая, водная и воздушная оболочки Земли и космос представляют единую динамическую систему, параметры которой непрерывно изменяются во времени. Синтез данных астрометрии, геодезии, гравиметрии, геофизики и геодинамики является необходимым условием строгого решения традиционных и новых задач планетарной геодезии.

В первых двух главах книги изложены теории систем координат, моментов инерции Земли, методы представления геогравитационного потенциала и изучения внутреннего строения Земли в геодезических целях. Вопросы редукции измерений в единую систему отсчета координат рассмотрены с применением методов координатных преобразований и матричной алгебры.

Третья глава посвящена теории вращения Земли и методам изучения ее динамической фигуры. Теории систем координат и гравитационного потенциала, моментов инерции и динамической фигуры Земли, механизм построения моделей гравитационного потенциала и внутреннего строения планетарного тела рассмотрены в общей постановке таким образом, что они могут применяться при изучении не только Земли, но и других планет земной группы.

В четвертой главе рассмотрена единая теория вывода строгих

уравнений наземных и спутниковых астрономо-геодезических и гравиметрических измерений. Приложения общей теории проиллюстрированы на примерах математического анализа всех видов измерений, включая радиоинтерферометрические, вариометрические и гравинерциальные измерения.

Пятая глава освещает планетарные, региональные и геодинамические задачи геодезии и ее связь с другими науками о Земле, вопросы согласования геодезических и геофизических постоянных для редукции измерений в единую систему отсчета координат и гравитации на заданную эпоху. В заключение главы рассматриваются математические принципы компьютерной обработки астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Целевую постановку задач и их описание можно легко отделить от математических выводов, которые при чтении книги могут быть опущены без ущерба для понимания идеи и способа решения конкретной задачи и проблемы.

Пределльно ясна и бесспорна роль теории в новых геоинформационных технологиях, которые основаны на математическом анализе и компьютерной обработке измерений. С этой точки зрения теории методов синтеза разнородных и разновременных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и их совместной обработки с учетом динамики макросистемы Земля — космос, подробно рассмотренные в книге, представляют интерес для широкого круга читателей, разрабатывающих и изучающих новые геоинформационные технологии на базе применения ЭВМ и новых достижений наук о Земле.

1. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ И ГРАВИТАЦИИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ

Системы координат, применяемые в современной геодезии, можно разделить на две группы: прямолинейные прямоугольные (двухмерные — на плоскости, трехмерные — в пространстве); полярные (двухмерные — на плоскости, на поверхности сферы или эллипсоида, трехмерные — в пространстве).

Система координат, начало которой находится в центре масс планетарного тела или вблизи него, называется планетоцентрической или квазипланетоцентрической. Координаты, связанные с общим земным эллипсоидом, будут планетарными (общеземными) и геоцентрическими, а координаты, связанные с референц-эллипсоидом, — референсными и квазигеоцентрическими.

В планетарной геодезии применяются также гелиоцентрическая (начало в центре масс Солнца), луноцентрическая (начало в центре масс Луны), марсоцентрическая (начало в центре масс Марса) и другие планетоцентрические системы координат. В отличие от планетографических координат, в которых основной координатной плоскостью является плоскость экватора соответствующего планетарного тела (Солнца, Венеры, Марса, Луны и др.), в планетоцентрической системе за основную координатную плоскость обычно принимается плоскость земного экватора или другие плоскости, связанные с Землей. В наименовании планетографических координат латинское название небесного тела заменяется соответствующим греческим названием (например, ареографические координаты — на Марсе, зенографические координаты — на Юпитере).

Планетографические координаты обычно применяют для изучения фигур небесных тел и определения положения точек на их поверхности. Планетоцентрические координаты используют в задачах определения фигуры Земли и положения точек земной поверхности и околоземного пространства. В зависимости от выбранной основной координатной плоскости различают экваториальную (экватор или плоскость, параллельная экватору), эклиптическую (плоскость эклиптики), горизонтную (плоскость местного горизонта) и орбитальную (плоскость орбиты небесного объекта) системы координат.

В зависимости от выбранного направления осей координат относительно точек пространства системы координат делятся на: звездные, если они ориентированы по далеким звездам; квазарные, если они ориентированы по далеким естественным радиосточникам (квазарам); земные, если они ориентированы по неподвижным точкам на земной поверхности.

Из-за прецессии и нутации оси вращения Земли, колебательных

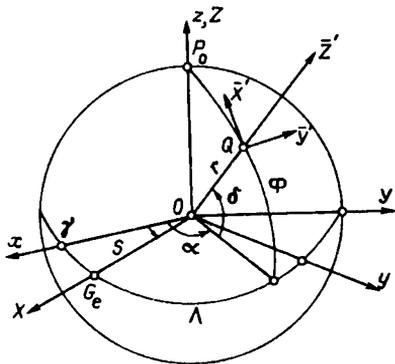


Рис. 1. Геоцентрические экваториальные и объектоцентрические горизонтальные координаты

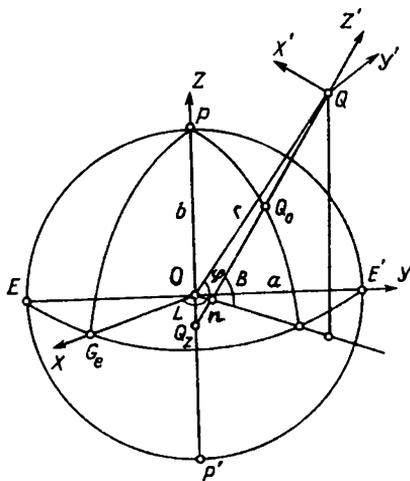


Рис. 2. Эллипсоидальные координаты B, L, H относительно земного эллипсоида с полуосями a и b

движений Земли относительно оси вращения и движения Земли в мировом пространстве начало отсчета, основные плоскости и оси координат с течением времени изменяют положение и направления в пространстве. Поэтому планетарные координаты необходимо фиксировать на эпоху, на которую заданы параметры, изменяющиеся со временем и определяющие начало и ориентирование осей координат.

В частном случае координаты, связанные с положением оси вращения и экватора Земли на момент наблюдения, называются мгновенными или истинными координатами.

В геоцентрической экваториальной системе оси координат задаются относительно характерных точек земной поверхности или небесной сферы. На рис. 1 главная ось Z (z) направлена на Северный полюс Земли P_0 . Если при этом ось X направить в точку G_e пересечения начального меридиана с экватором, то получим земную систему координат XYZ , которая участвует в суточном вращении Земли и неподвижна относительно точек земной поверхности. Эта система координат удобна для определения положения точек земной поверхности и изучения фигуры Земли.

Направляя ось x (см. рис. 1) в точку весеннего равноденствия γ , получим звездную систему координат xuz , не связанную с суточным вращением Земли, удобную для изучения движения небесных тел. Хотя ее начало перемещается в мировом пространстве с некоторым ускорением, участвуя в годовом движении Земли вокруг Солнца и Солнца в Галактике, но это движение относительно далеких звезд можно считать равномерным и прямолинейным. Поэтому движение околоземного небесного объекта в системе координат xuz можно изучать, пользуясь законами механики для инерциальной системы отсчета.

Для перехода от звездной системы отсчета координат к земной и

наоборот достаточно задать часовой угол S (звездное время) точки G_e на экваторе.

На рис. 1 также показаны пространственные геоцентрические полярные сферические координаты точки Q : радиус r , прямое восхождение α , склонение δ , долгота Λ , широта Φ и способы их отсчета на поверхности сферы радиуса $r = OQ$.

Положение точки Q относительно земного эллипсоида определяется геодезическими эллипсоидальными координатами: широтой B , долготой L и высотой H (рис. 2). Геодезической широтой точки Q называется острый угол L , образованный нормалью Qn к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора EG_eE' . Геодезической долготой точки Q называется двугранный угол, образованный плоскостью начального геодезического меридиана PG_eP' и плоскостью геодезического меридиана PQ_0P' данной точки. Заметим, что плоскость геодезического меридиана проходит через нормаль Qn и ось вращения эллипсоида POP' . Широты точек Северного полушария называются северными, они имеют знак «+»; широты точек южного полушария — южными и имеют знак «-». Точки, расположенные восточнее начального меридиана, имеют восточные долготы, а точки, расположенные западнее начального меридиана, — западные долготы. В геодезии принято отсчитывать долготы от начального меридиана против хода часовой стрелки от 0 до 360°. Отрезок нормали Q_0Q называется геодезической высотой. Геодезическая высота отсчитывается от поверхности земного эллипсоида в сторону увеличения высот. Если точка расположена ниже поверхности земного эллипсоида, то ее высоте приписывается знак «-».

От эллипсоидальных координат B, L можно однозначно перейти к координатам x, y на плоскости и обратно по соответствующим формулам, зависящим от способа отображения поверхности эллипсоида на плоскости.

Системы координат пространственные прямолинейные прямоугольные XYZ и эллипсоидальные BLH , а также плоские xy составляют геодезическую систему координат.

Геодезическая система координат находит широкое применение в теоретических исследованиях и практических работах в геодезии, топографии и картографии, так как она объединяет данные геодезии, топографических съемок и картографирования по всей поверхности Земли. Кроме того, она определяется положением центра масс, оси вращения и экватора Земли, а также нормалью к земному эллипсоиду, что весьма удобно для изучения физической фигуры Земли и геоида относительно земного эллипсоида, определения высот и решения других научных и практических задач.

К сферическим координатам относятся астрономические широты φ и долготы λ , связанные с отвесной линией. Астрономическую широту φ определяют как острый угол между отвесной линией точки Q и плоскостью экватора Земли. Астрономическая долгота λ есть двугранный угол, образованный плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического (истинного) меридиана точки Q . При этом плоскость

астрономического (истинного) меридиана содержит отвесную линию точки Q и линию, параллельную оси вращения Земли. Правила отсчета астрономических широт и долгот подобны правилам отсчета геодезических широт и долгот.

Как видно из определения геодезических и астрономических широт и долгот, между ними имеются существенные различия, которым в геодезии уделяется большое внимание.

В мелкомасштабном картографировании и в особых условиях решения геодезических задач, где не требуется высокой точности, отличиями геодезических и астрономических координат пренебрегают. В этом случае им дают общее название — географические координаты.

Система координат, начало которой совпадает с точкой наблюдения на Земле (на поверхности суши, морей и океанов, под водой или под землей), в воздушном и космическом пространстве, называется топоцентрической. Топоцентрические системы координат подразделяют на экваториальную, если за основную координатную плоскость принята плоскость, параллельная земному экватору, и горизонтную, если за основную координатную плоскость принята плоскость горизонта наблюдения.

В пространственной топоцентрической горизонтной системе координат (рис. 3) если главная ось Z' совпадает с нормалью точки Q_1 к земному эллипсоиду, то имеем геодезическую систему отсчета координат; если главная ось Z'_0 совпадает с отвесной линией точки Q_1 — астрономическую (физическую) систему отсчета координат. В первом случае основными координатными плоскостями будут плоскости геодезического горизонта и плоскость геодезического меридиана точки Q_1 , а во втором случае — плоскость истинного горизонта и астрономического (истинного) меридиана.

Пространственная топоцентрическая горизонтная геодезическая система координат (ПТГГСК) определяется следующим образом. Начало координат (рис. 4) совмещено с точкой Q_1 , ось Z' направлена по нормали к земному эллипсоиду в сторону увеличения высот, ось X' лежит на пересечении плоскостей геодезического горизонта и геодезического меридиана точки Q_1 и направлена на север, а ось Y' лежит в плоскости геодезического горизонта и дополняет левую декартову систему координат. Положение точки Q_2 относительно точки Q_1 определяется пространственными топоцентрическими горизонтными прямоугольными прямолинейными координатами X' , Y' , Z' и полярными сферическими координатами: топоцентрическим расстоянием s , геодезическим азимутом A и геодезическим зенитным расстоянием z .

Геодезический азимут A_{12} линии Q_1Q_2 есть двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана начальной точки Q_1 и плоскостью вертикала конечной точки Q_2 , содержащей нормаль точки Q_1 и точку Q_2 . Геодезическое зенитное расстояние z_{12} составляет угол между нормалью точки Q_1 и линией Q_1Q_2 .

Топоцентрические горизонтные координаты X' , Y' , Z' , z , A , s точки Q_2 относительно начала отсчета Q_1 ПТГГСК однозначно определяются

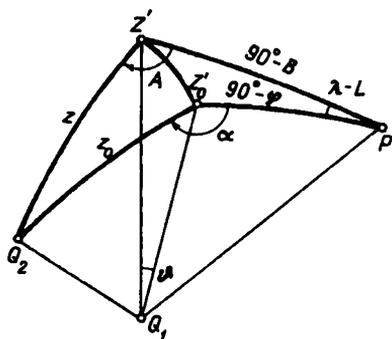


Рис. 3. Топоцентрические горизонтные геодезические и астрономические системы координат

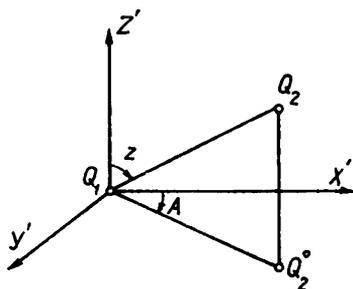


Рис. 4. Топоцентрические горизонтные координаты

через пространственные экваториальные координаты X, Y, Z или эллипсоидальные координаты B, L, H точек Q_1 и Q_2 .

В астрономической системе отсчета координат положение точки относительно начала координат Q_1 определяется пространственными топоцентрическими горизонтными полярными сферическими координатами: топоцентрическим расстоянием s , астрономическим азимутом α и астрономическим зенитным расстоянием z^0 .

Астрономическим азимутом α_{12} линии Q_1Q_2 называется двугранный угол между плоскостью астрономического меридиана начальной точки Q_1 и плоскостью вертикала конечной точки Q_2 , содержащей отвесную линию точки Q_1 и точку Q_2 . Астрономическим зенитным расстоянием z_{12}^0 линии Q_1Q_2 называется угол между отвесной линией точки Q_1 и линией Q_1Q_2 .

Геодезический (астрономический) азимут отсчитывается от северного направления геодезического (астрономического) меридиана начальной точки Q_1 по ходу часовой стрелки от 0 до 360°. Геодезическое (астрономическое) зенитное расстояние отсчитывается от нормали к эллипсоиду (отвесной линии) в начальной точке Q_1 по ходу часовой стрелки от 0 до 180°.

Угломерные приборы ориентируют в астрономической системе отсчета координат: вертикальная ось прибора совпадает с отвесной линией, горизонтальный круг — с плоскостью истинного горизонта, а вертикальный круг — с плоскостью вертикала.

Если известны азимут α_{12} и зенитное расстояние z_{12}^0 линии Q_1Q_2 , то после наведения зрительной трубы прибора на точку Q_2 и установки отсчетов на горизонтальном и вертикальном кругах, равных азимуту α_{12} и зенитному расстоянию z_{12}^0 соответственно, угломерный прибор будет ориентирован в астрономической системе отсчета координат. При этом начальный диаметр горизонтального круга (штрихи 0 и 180°) будет совмещен с плоскостью астрономического меридиана,

вертикальная ось вращения прибора — с отвесной линией точки стояния Q_1 . Этот способ ориентирования угломерного прибора часто используется в астрономо-геодезии, при топографических и инженерных съемках, в системах навигации и целеуказания.

Различие топоцентрических горизонтных координат в геодезической и астрономической системах отсчета обусловлено уклонением отвесной линии от нормали к земному эллипсоиду. Для перехода от астрономических координат к геодезическим и обратного перехода от геодезических к астрономическим координатам необходимо знать уклонение отвесной линии ϑ и азимут ψ вертикала, содержащего нормаль Q_1Z' к земному эллипсоиду и отвесную линию $Q_1Z'_0$ (см. рис. 3). В астрономо-геодезических определениях, топографических съемках и других инженерных работах, где не требуется высокой точности, различия астрономических и геодезических координат могут быть незначительны, если земной эллипсоид по размеру, форме и ориентировке в теле Земли определен так, что уклонения отвеса на этой территории не превышают нескольких угловых секунд. Это обстоятельство также определяет требования к точности установления земного эллипсоида как отсчетной поверхности для данной территории и изучения уклонений отвесных линий по всей этой территории.

В высокоточных астрономо-геодезических работах и при геодезических определениях для целей строительства и эксплуатации инженерных объектов требуется знать уклонения отвесной линии с точностью порядка $0,05—0,70''$.

Составляющие уклонения отвеса в плоскости меридиана $\xi = \vartheta \cos \psi$ и в плоскости первого вертикала $\eta = \vartheta \sin \psi$ являются необходимыми параметрами для задания систем отсчета координат в современной геодезии.

1.2. СВЯЗЬ ЗВЕЗДНЫХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДВУХ ЭПОХ

Переход от звездных геоцентрических экваториальных координат x_0, y_0, z_0 средней эпохи T_0 к соответствующим координатам x, y, z на момент наблюдения T осуществляется преобразованием координат за прецессию и нутацию.

Углы прецессии ζ_0, ζ, θ (рис. 5), выраженные в угловых секундах, вычисляются по формулам Ньюкома — Андуайе

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= (2304,253 + 1,3973T_0 + 0,00006T_0^2)\tau + \\ &+ (0,3023 - 0,0027T_0)/\tau^2 + 0,0180\tau^3; \\ \zeta &= (2304,253 + 1,3973T_0 + 0,00006T_0^2)\tau + \\ &+ (1,0950 + 0,0039T_0)\tau^2 + 0,01832\tau^3; \\ \theta &= (2004,685 - 0,8533T_0 - 0,00037T_0^2)\tau - \\ &- (0,4267 + 0,0037T_0)\tau^2 - 0,04180\tau^3; \tau = T - T_0. \end{aligned} \quad (1)$$

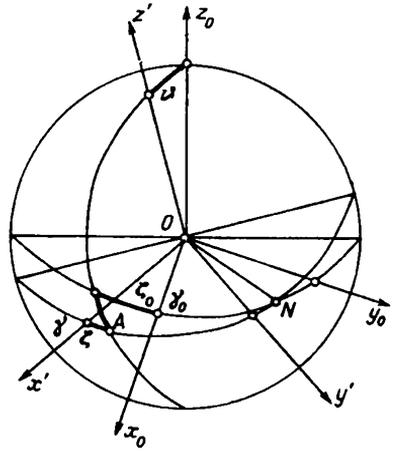


Рис. 5. Прецессионные углы

В этих формулах эпохи T и T_0 выражены в тропических столетиях, отсчитываемых от начальной эпохи 1900,0.

Координаты x' , y' , z' (см. рис. 5) получим тремя последовательными вращениями: на угол ζ_0 в плоскости Ox_0y_0 , на угол θ в плоскости OAz_0 и на угол ζ в плоскости $ON\gamma$. В результате для координат x' , y' , z' на эпоху T получим формулу

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где матрица прецессии

$$P = \begin{bmatrix} \cos\zeta & -\sin\zeta & 0 \\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\zeta_0 & -\sin\zeta_0 & 0 \\ \sin\zeta_0 & \cos\zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

имеет элементы:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \cos\zeta_0 \cos\zeta \cos\theta - \sin\zeta_0 \sin\zeta; \\ p_{12} &= \sin\zeta_0 \cos\zeta \cos\theta - \cos\zeta_0 \sin\zeta; \\ p_{13} &= -\cos\zeta \sin\theta; \\ p_{21} &= \cos\zeta_0 \sin\zeta \cos\theta + \cos\zeta \sin\zeta_0; \\ p_{22} &= -\sin\zeta_0 \sin\zeta \cos\theta + \cos\zeta_0 \sin\zeta; \\ p_{23} &= -\sin\zeta \sin\theta; \quad p_{31} = \cos\zeta_0 \sin\theta; \\ p_{32} &= -\sin\zeta_0 \sin\theta; \quad p_{33} = \cos\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразованные координаты x' , y' , z' называют средними координатами на эпоху T .

Для перехода от средних координат x', y', z' к истинным координатам x, y, z необходимо учесть влияние составляющих нутации по долготе $\delta\psi$ и наклонению $\delta\epsilon$. Представив $\delta\psi$ двумя составляющими: по прямому восхождению $\delta\psi \cos\epsilon$ и по склонению $\delta\psi \sin\epsilon$, и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрица нутации N имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} n_{11} &= 1; & n_{12} &= -\delta\psi \cos\epsilon; & n_{13} &= -\delta\psi \sin\epsilon; \\ n_{21} &= \delta\psi \cos\epsilon; & n_{22} &= 1; & n_{23} &= -\delta\epsilon; \\ n_{31} &= \delta\psi \sin\epsilon; & n_{32} &= \delta\epsilon; & n_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом формул (2) и (5) запишем

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = NP \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Ввиду ортогональности преобразования для обратного перехода имеем

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = P'N' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где P' и N' — транспонированные матрицы P и N .

1.3. СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И ПОЛЯРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

На рис. 1 через $r, \alpha, \delta, \Lambda$ и Φ обозначены геоцентрические экваториальные полярные сферические координаты: радиус, прямое восхождение, склонение, долгота и широта точки Q в звездной и земной системах отсчета координат. Геоцентрические декартовы координаты связаны с соответствующими геоцентрическими полярными сферическими координатами следующим образом:

$$X = r \cos \Phi \cos \Lambda; \quad Y = r \cos \Phi \sin \Lambda; \quad Z = r \sin \Phi; \quad (9)$$

$$x = r \cos \delta \cos \alpha; \quad y = r \cos \delta \sin \alpha; \quad z = r \sin \delta; \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \Lambda = \frac{Y}{X}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \delta = \frac{Z}{D} = \frac{z}{D}; \quad (11)$$

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Подставив в формулу (9) значения $\Lambda = \alpha - S$, $\Phi = \delta$ и учитывая (10), находим

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \bar{S} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где \bar{S} — матрица поворота, элементы которой есть функции звездного времени S на начальном меридиане

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Ввиду ортогональности преобразования для обратного перехода имеем

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{S}' \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где \bar{S}' — транспонированная матрица от исходной \bar{S} .

1.4. ФОРМУЛЫ, ВЫРАЖАЮЩИЕ СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

На рис. 2 через B , L и $H = Q_0Q$ обозначены эллипсоидальные геодезические координаты: широта, долгота и высота точки Q относительно земного эллипсоида. Отрезок Q_0n есть радиус кривизны нормального сечения эллипсоида в плоскости первого вертикала, который является функцией большой полуоси a , полярного сжатия α земного эллипсоида и геодезической широты B . Он вычисляется по формуле

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (15)$$

где e^2 — квадрат первого эксцентриситета меридианного эллипса:

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha). \quad (16)$$

Малый отрезок под экватором на рис. 2 равен

$$Q_2n = e^2 N. \quad (17)$$

Пользуясь принятыми обозначениями и соотношением (17), получим формулы связи пространственных прямоугольных координат X , Y , Z и пространственных эллипсоидальных координат B , L , H точки Q относительно земного эллипсоида с параметрами a , α в следующем виде:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Z &= (N + H - e^2 N) \sin B; \\ \operatorname{tg} L &= Y/Z; \operatorname{ctg} B = (D - e^2 N \cos B)/Z; \end{aligned} \quad (19)$$

$$H = D \sec B - N = Z \operatorname{cosec} B - (1 - e^2)N. \quad (20)$$

В формулах (19) и (20) через D обозначено экваториальное расстояние, вычисляемое по формуле (11) по известным значениям пространственных координат X и Y точки Q . Из первых двух строк формул (18) следует, что экваториальное расстояние может быть вычислено также по эллипсоидальным координатам, т. е.

$$D = (N + H) \cos B. \quad (21)$$

Широта B вычисляется методом последовательных приближений. Пользуясь известным соотношением $\sin B = \operatorname{tg} B / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}$ и формулой (15), исключим значение $N \cos B$ в формуле (19). Тогда получим следующие итерационные формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} B_k &= D(1 - e_k^2)/Z, \text{ если } D \geq Z \\ \operatorname{tg} B_k &= Z/D(1 - e_k^2), \text{ если } D > Z, \end{aligned} \quad (22)$$

где k — номер итерации. Нулевое и k -е приближения вычисляются по формулам

$$e_0^2 = \frac{e^2 a}{\sqrt{D^2 + \frac{Z^2}{1 - e^2}}}; \quad e_k^2 = \frac{e^2 a}{\sqrt{D^2 + \frac{1 - e^2}{(1 - e_{k-1}^2)^2} Z^2}} \quad (23)$$

Параметр e_k для малых высот имеет порядок e и с увеличением высот он быстро уменьшается, а при $H \rightarrow \infty$ $e_k = 0$. Для малых высот, как правило, достаточно принять $e_k = e_0$. Для космических высот можно принять $e_k^2 = e_1^2$.

Однако для конечных высот $H > 0,1$ км, включая и космические, параметр e_k^2 существенно отличается от e^2 , чтобы можно было пренебречь разностью $e_k^2 - e^2$.

В некоторых случаях для ускорения вычислений на ЭВМ можно применить итерационную формулу

$$\operatorname{ctg} B_k = \frac{D - e^2 a \operatorname{ctg}^2 B_{k-1}}{Z \sqrt{1 - e^2 + \operatorname{ctg}^2 B_{k-1}}}, \text{ если } D \leq Z; \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} B_k = \frac{Z}{D - e^2 a / \sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B_{k-1}}}, \text{ если } D > Z.$$

При этом первое приближение $\operatorname{ctg} B_1$ ($\operatorname{tg} B_1$) вычисляется по формулам (22) и (23).

Комбинации формул (22), (23) и (25) могут уменьшить затраты

машинного времени при вычислениях, связанных с преобразованием координат в режиме реального времени.

Из формулы (19) следует, что

$$\operatorname{ctg} B = [D(1 - e^2) + e^2 H \cos B] / Z.$$

Для точки Q_0 ($H = 0$), лежащей на поверхности земного эллипсоида, широту можно вычислять по формуле

$$\operatorname{ctg} B = D(1 - e^2) / Z, \quad (26)$$

не прибегая к итерациям.

1.5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОБЪЕКТОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ГОРИЗОНТНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И ИХ СВЯЗЬ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЭКВАТОРИАЛЬНЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ КООРДИНАТАМИ

На рис. 1 начало объектоцентрической горизонтной системы координат совмещено с центром Q небесного объекта, ось \bar{Z}' продолжает геоцентрический радиус r , ось \bar{X}' лежит в плоскости меридиана точки Q и направлена на Северный полюс, ось \bar{Y}' дополняет левую декартову систему координат.

Переход от объектоцентрической горизонтной к звездной геоцентрической экваториальной системе координат осуществляется переносом начала координат, двумя поворотами на угол $90^\circ - \delta$ вокруг оси \bar{Y}' и на угол α вокруг оси z , т. е.

$$\begin{bmatrix} x - x_Q \\ y - y_Q \\ z - z_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \delta & 0 & \cos \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \delta & 0 & \sin \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} x - x_Q \\ y - y_Q \\ z - z_Q \end{bmatrix} = A_{\alpha\delta} \begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Матрица поворота $A_{\alpha\delta}$ имеет элементы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \alpha; & a_{12} &= -\sin \alpha; & a_{13} &= \cos \delta \cos \alpha; \\ a_{21} &= -\sin \delta \sin \alpha; & a_{22} &= \cos \alpha; & a_{23} &= \cos \delta \sin \alpha; \\ a_{31} &= \cos \delta; & a_{32} &= 0; & a_{33} &= \sin \delta. \end{aligned} \quad (26)$$

Обратный переход

$$\begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{bmatrix} = A'_{\alpha\delta} \begin{bmatrix} x - x_Q \\ y - y_Q \\ z - z_Q \end{bmatrix}, \quad (27)$$

где $A'_{\alpha\delta}$ — транспонированная матрица $A_{\alpha\delta}$.

По аналогии для земной геоцентрической экваториальной системы координат запишем следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} x - x_Q \\ y - y_Q \\ z - z_Q \end{bmatrix} = A_{\Phi, \Lambda} \begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \\ \bar{Z}' \end{bmatrix} = A'_{\Phi, \Lambda} \begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где $A'_{\Phi, \Lambda}$ — транспонированная матрица $A_{\Phi, \Lambda}$.

Матрица поворота $A_{\Phi, \Lambda}$ имеет элементы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \Phi \cos \Lambda; & a_{12} &= -\sin \Lambda; & a_{13} &= \cos \Phi \cos \Lambda; \\ a_{21} &= -\sin \Phi \sin \Lambda; & a_{22} &= \cos \Lambda; & a_{23} &= \cos \Phi \sin \Lambda; \\ a_{31} &= \cos \Phi; & a_{32} &= 0; & a_{33} &= \sin \Phi. \end{aligned} \quad (30)$$

В формулах (25) — (29) через \bar{X}' , \bar{Y}' , \bar{Z}' обозначены пространственные объектоцентрические горизонтные координаты любой точки относительно начала отсчета координат Q — центра небесного объекта.

Элементы матриц, вычисляемые по формулам (26) и (30), являются функциями геоцентрических экваториальных сферических координат α , δ и Λ , Φ центра небесного объекта Q , принятого за начало отсчета координат.

1.6. СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ, ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

По определению пространственная топоцентрическая горизонтная система координат является аналогом пространственной объектоцентрической горизонтной системы координат. Поэтому все необходимые координатные преобразования осуществим по аналогии, пользуясь формулами (28) — (30), т. е.

$$\begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} X - X_Q \\ Y - Y_Q \\ Z - Z_Q \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где A' — транспонированная матрица A , которая имеет элементы:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\sin B \cos L; & a_{12} &= -\sin L; & a_{13} &= \cos B \cos L; \\
 a_{21} &= -\sin B \sin L; & a_{22} &= \cos L; & a_{23} &= \cos B \sin L; \\
 a_{31} &= \cos B; & a_{32} &= 0; & a_{33} &= \sin B.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

В формулах (31) и (32) через X' , Y' , Z' обозначены пространственные топоцентрические горизонтные координаты любой точки относительно начала отсчета координат Q .

Элементы матрицы A (33) вычисляются по геодезической широте B и геодезической долготе L точки Q , принятой за начало отсчета координат.

По определению пространственных топоцентрических горизонтных сферических координат z , A , s (см. рис. 4) имеем следующие формулы для координатных преобразований:

$$\begin{aligned}
 X' &= s \sin z \cos A; \\
 Y' &= s \sin z \sin A; \\
 Z' &= s \cos z;
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} z &= Z'/D; \\
 \operatorname{tg} A &= Y'/X'; \\
 s &= \sqrt{D^2 + Z'^2}.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

В формулах (35) горизонтное расстояние получают из выражения

$$D = \sqrt{X'^2 + Y'^2}.
 \tag{36}$$

Формулы (34) и (35) решают прямую и обратную геодезические задачи в пространстве. При этом сферические координаты z , A , s являются измеряемыми величинами, поэтому их часто называют эфемеридными координатами.

1.7. ПРЯМАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Прямая геодезическая задача формулируется следующим образом. Заданы эллипсоидальные геодезические координаты B_1 , L_1 , H_1 начальной точки Q_1 и пространственные горизонтные сферические координаты z_{12} , A_{12} , s точки Q_2 относительно начальной точки Q_1 . Требуется определить эллипсоидальные геодезические координаты B_2 , L_2 , H_2 точки Q_2 .

Поставленную задачу решают следующим образом.

1. По формулам (15) и (18) вычисляют пространственные геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты точки Q_1

$$\begin{aligned}
 N_1 &= a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}; \\
 X_1 &= (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1; \\
 Y_1 &= (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1; \\
 Z_1 &= (N_1 + H_1 - e^2 N_1) \sin B_1.
 \end{aligned}$$

2. Вычисляют элементы матрицы преобразования координат A_1 (33)

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin L_1 & \cos B_1 \cos L_1 \\ -\sin B_1 \sin L_1 & \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 \\ \cos B_1 & 0 & \sin B_1 \end{bmatrix}.$$

3. Пользуясь формулами (34), вычисляют пространственные топоцентрические горизонтные прямоугольные координаты точки Q_2 относительно начальной точки Q_1

$$\begin{bmatrix} X'_2 \\ Y'_2 \\ Z'_2 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} \sin z_{12} \cos A_{12} \\ \sin z_{12} \sin A_{12} \\ \cos z_{12} \end{bmatrix}.$$

4. Пользуясь формулами (31), вычисляют пространственные геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты точки Q_2

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + A_1 \times s \begin{bmatrix} \sin z_{12} \cos A_{12} \\ \sin z_{12} \sin A_{12} \\ \cos z_{12} \end{bmatrix}.$$

5. По формулам (19)—(23) преобразуют X_2, Y_2, Z_2 в эллипсоидальные геодезические координаты B_2, L_2, H_2 точки Q_2 .

1.8. ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Вычисление пространственных топоцентрических горизонтных сферических координат z, A, s по известным значениям пространственных эллипсоидальных геодезических координат B, L, H двух точек Q_1 и Q_2 составляет содержание обратной геодезической задачи. Список исходных данных включает B_i, L_i, H_i ($i = 1, 2$). Требуется вычислить $z_{12}, A_{12}, s, z_{21}$ и A_{21} .

Решение обратной геодезической задачи заключается в выполнении следующих операций.

1. По формулам (15) и (18) вычисляют геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты точек Q_i ($i = 1, 2$)

$$N_i = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i};$$

$$X_i = (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i;$$

$$Y_i = (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i;$$

$$Z_i = (N_i + H_i - e^2 N_i) \sin B_i.$$

2. Вычисляют элементы матриц преобразования координат A'_i (33)

$$A'_i = \begin{bmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix}.$$

3. Пользуясь формулами (32), вычисляют пространственные топоденрические горизонтные прямоугольные координаты точек Q_1 и Q_2

$$\begin{bmatrix} X_2' \\ Y_2' \\ Z_2' \end{bmatrix}_{(1)} = A_1' \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_1' \\ Y_1' \\ Z_1' \end{bmatrix}_{(2)} = A_2' \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{bmatrix}.$$

4. По формулам (35) и (36) вычисляют пространственные топоденрические горизонтные сферические координаты

$$s = \sqrt{X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2} = \sqrt{X_2'^2 + Y_2'^2 + Z_2'^2};$$

$$\operatorname{tg} A_{12} = Y_2'/X_2'; \quad \operatorname{tg} A_{21} = Y_1'/X_1';$$

$$\operatorname{ctg} z_{12} = Z_2'/\sqrt{X_2'^2 + Y_2'^2}; \quad \operatorname{ctg} z_{21} = Z_1'/\sqrt{X_1'^2 + Y_1'^2}.$$

Как видно, решения прямой и обратной геодезических задач состоят из элементарных операций преобразования пространственных координат, выполняемых на ЭВМ с любой заданной точностью.

1.9. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ. ОРБИТАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Элементы орбиты представляют собой параметры, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее форму и размеры, а также положение небесного объекта на орбите.

Элементы орбиты удобно задать относительно координатной плоскости Oxy , проходящей через центр масс Земли и точку весеннего равноденствия γ (рис. 6). Прямая $\Omega O \Omega'$, по которой пересекаются координатная плоскость Oxy и плоскость орбиты, называется линией узлов. Когда движение объекта происходит против часовой стрелки, если смотреть из полюса орбиты P_i , точка Ω называется восходящим узлом, а точка Ω' — нисходящим узлом. Дуга большого круга $\gamma\Omega$, обозначаемая через Ω , называется долготой восходящего узла или просто долготой узла. Дуга большого круга PP_i или угол, под которым плоскость орбиты пересекает координатную плоскость Oxy , называется наклоном орбиты и обозначается через i . Дуга большого круга $\Omega\Pi$, обозначаемая через ω , называется угловым расстоянием перигея Π от узла (аргументом перигея). Форма и размеры орбиты задаются эксцентриситетом e и большой полуосью a . Углы Ω , i определяют положение плоскости орбиты относительно основной координатной плоскости, а угол ω — ориентацию орбиты в этой плоскости. Для определения положения небесного объекта S на орбите вводится шестой элемент τ — момент прохождения небесного объекта через точку перигея Π .

Заметим, что положение небесного объекта в плоскости орбиты (см. рис. 6) можно задать полярными координатами относительно линии узлов: углом u , называемым аргументом широты, и геоцентрическим радиусом r небесного объекта.

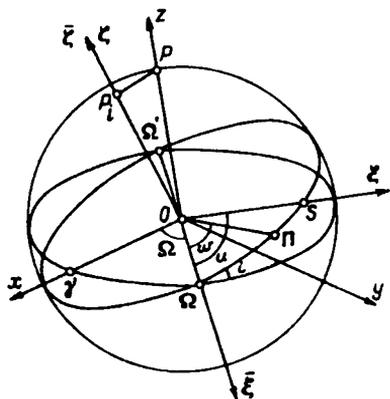


Рис. 6. Элементы эллиптической орбиты и орбитальные координаты

Элементы $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$ называются кеплеровскими элементами. Для планет за основную плоскость обычно принимают плоскость эклиптики, для околоземных небесных объектов — плоскость экватора. В первом случае кеплеровские элементы орбиты называются эклиптическими, во втором — экваториальными.

Рассмотрим орбитальные координаты, приняв плоскость экватора за основную плоскость Oxy . Оси неподвижных геоцентрических орбитальных координат определим следующим образом: ось ζ направлена на полюс орбиты P ; ось ξ направлена в точку восходящего узла Ω ; ось η дополняет правую декартову систему координат.

Геоцентрические орбитальные координаты преобразуем в геоцентрические экваториальные координаты по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_{\Omega i} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где матрица преобразования

$$A_{\Omega i} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

имеет элементы

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos \Omega; & a'_{12} &= -\sin \Omega \cos i; & a'_{13} &= \sin \Omega \sin i; \\ a'_{21} &= \sin \Omega; & a'_{22} &= \cos \Omega \cos i; & a'_{23} &= -\cos \Omega \sin i; \\ a'_{31} &= 0; & a'_{32} &= \sin i; & a'_{33} &= \cos i. \end{aligned} \quad (38)$$

Обратный переход осуществляется с помощью транспонированной матрицы $A'_{\Omega i}$ по формуле

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\varsigma} \end{bmatrix} = A'_{ij} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Подвижную геоцентрическую орбитальную систему координат определим следующим образом: ось ς направлена на полюс орбиты P_i ; ось ξ направлена по геоцентрическому радиусу r ; ось η лежит в плоскости орбиты, дополняя правую декартову систему координат.

Неподвижные орбитальные координаты $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\varsigma}$ (см. рис. 6) связаны с подвижными орбитальными координатами ξ , η , ς соотношением

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} = A_u \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Пользуясь формулами (37) и (40), получим выражение для преобразования подвижных орбитальных координат в экваториальные

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Матрица $A = \bar{A}_{\Omega i} A_u$ имеет элементы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i; \\ a_{12} &= -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i; \\ a_{13} &= \sin \Omega \sin i; \quad a_{21} = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i; \\ a_{22} &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i; \\ a_{23} &= -\cos \Omega \sin i; \\ a_{31} &= \sin u \sin i; \quad a_{32} = \cos u \sin i; \\ a_{33} &= \cos i. \end{aligned} \quad (42)$$

Обратный переход осуществляется с помощью транспонированной матрицы A' по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Подвижные орбитальные координаты небесного объекта: $\xi = r$, $\eta = 0$, $\varsigma = 0$, следовательно, экваториальные координаты небесного объекта будут

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (44)$$

1.10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЭЛЛИПСОИДНЫЕ, ЭКВАТОРИАЛЬНЫЕ И ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ГОРИЗОНТНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Пользуясь формулами (18), найдем полные дифференциалы экваториальных координат

$$\begin{aligned}dX &= \frac{\partial X}{\partial B} dB + \frac{\partial X}{\partial L} dL + \frac{\partial X}{\partial H} dH; \\dY &= \frac{\partial Y}{\partial B} dB + \frac{\partial Y}{\partial L} dL + \frac{\partial Y}{\partial H} dH; \\dZ &= \frac{\partial Z}{\partial B} dB + \frac{\partial Z}{\partial L} dL + \frac{\partial Z}{\partial H} dH.\end{aligned}\tag{45}$$

Предварительно определим производные двух функций

$$\begin{aligned}\frac{d}{dB}(N \cos B) &= \frac{dN}{dB} \cos B - N \sin B; \\ \frac{d}{dB}(N \sin B) &= \frac{dN}{dB} \sin B + N \cos B.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{dN}{dB} = \frac{d}{dB} \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \right) = \frac{e^2 N \cos B \sin B}{1 - e^2 \sin^2 B}$$

и радиус кривизны меридианного эллипса M связан с радиусом кривизны нормального сечения первого вертикала формулой

$$M = (1 - e^2)N / (1 - e^2 \sin^2 B),$$

соответственно,

$$\frac{d}{dB}(N \cos B) = -M \sin B; \quad \frac{d}{dB}(N \sin B) = M \cos B / (1 - e^2).$$

После этого нетрудно записать искомые частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \cos L; & \frac{\partial Y}{\partial B} &= -(M + H) \sin B \sin L; \\ \frac{\partial X}{\partial L} &= -(N + H) \cos B \sin L; & \frac{\partial Y}{\partial L} &= (N + H) \cos B \cos L; \\ \frac{\partial X}{\partial H} &= \cos B \cos L; & \frac{\partial Y}{\partial H} &= \cos B \sin L; \\ \frac{\partial Z}{\partial B} &= (M + H) \cos B; & \frac{\partial Z}{\partial L} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial H} &= \sin B.\end{aligned}\tag{46}$$

Пользуясь формулами (45) и (46), дифференциальные формулы, связывающие эллипсоидальные и экваториальные декартовы координаты, запишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} (M + H)dB \\ (N + H) \cos BdL \\ dH \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Матрица преобразования координат A имеет элементы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin B \cos L; & a_{12} &= -\sin L; & a_{13} &= \cos B \cos L; \\ a_{21} &= -\sin B \sin L; & a_{22} &= \cos L; & a_{23} &= \cos B \sin L; \\ a_{31} &= \cos B; & a_{32} &= 0; & a_{33} &= \sin B. \end{aligned} \quad (48)$$

Заметим, что матрица A ортогональна своей транспонированной A' , т. е. справедливо $AA' = A'A = E$. Имеет место ортогональное преобразование координат. Отрезки

$$\begin{aligned} dX' &= (M + H)dB, \\ dY' &= (N + H) \cos BdL, \\ dZ' &= dH \end{aligned} \quad (49)$$

составляют ортогональную систему координат.

В действительности, по определению топоцентрических горизонтных координат их малые приращения связаны с малыми приращениями эллипсоидальных координат в окрестности точки Q таким образом, что имеют место соотношения (49). Элементы матрицы A (48) точно соответствуют элементам (33).

Из формул (47) — (49) следует, что

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Обратное преобразование выполняется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}. \quad (51)$$

1.11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ КООРДИНАТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть δR_i представляет малые изменения экваториальных координат точки Q_i . Тогда, согласно формуле (51), эти изменения в системе топоцентрических горизонтных координат начальной точки Q_1 будут представлены формулой

$$(\delta R)_i = A'_i \delta R_i.$$

Исключив δR_i с помощью выражений (50), получим дифференциальную формулу

$$(\delta R_i)_1 = A'_1 A_i \delta R_i$$

для преобразования малых изменений топоцентрических горизонтных координат δR_i точки Q_i в топоцентрическую горизонтную систему начальной точки Q_1 .

При этом, умножая матрицы A'_1 и A_i с известными элементами (48), находим матрицу преобразования $B_i = A'_1 A_i$, элементы которой соответственно равны:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos B_1 \cos B_i + \sin B_1 \sin B_i \cos(L_i - L_1); \\ b_{12} &= \sin B_1 \sin(L_i - L_1); \\ b_{13} &= \cos B_1 \sin B_i - \sin B_1 \cos B_i \cos(L_i - L_1); \\ b_{21} &= -\sin B_i \sin(L_i - L_1); \quad b_{22} = \cos(L_i - L_1); \\ b_{23} &= \cos B_i \sin(L_i - L_1); \\ b_{31} &= \sin B_1 \cos B_i - \cos B_1 \sin B_i \cos(L_i - L_1); \\ b_{32} &= -\cos B_1 \sin(L_i - L_1); \\ b_{33} &= \sin B_1 \sin B_i + \cos B_1 \cos B_i \cos(L_i - L_1). \end{aligned} \tag{53}$$

С учетом формул (52) и (53) имеем

$$\begin{aligned} (\delta X_i)_1 &= b_{11} \delta X_i + b_{21} \delta Y_i + b_{31} \delta Z_i; \\ (\delta Y_i)_1 &= b_{12} \delta X_i + b_{22} \delta Y_i + b_{32} \delta Z_i; \\ (\delta Z_i)_1 &= b_{13} \delta X_i + b_{23} \delta Y_i + b_{33} \delta Z_i. \end{aligned} \tag{54}$$

Очевидно, что матрица $B = A'_1 A_i$ ортогональна своей транспонированной $B' = A_i A'_1$. Действительно, $BB' = A'_1 A_i A_i A'_1 = E$, так как $A_i A'_1 = A'_1 A_i = E$. Поправки δX_i , δY_i , δZ_i малы по величине, поэтому при вычислениях элементов матрицы B эллипсоидальные координаты в

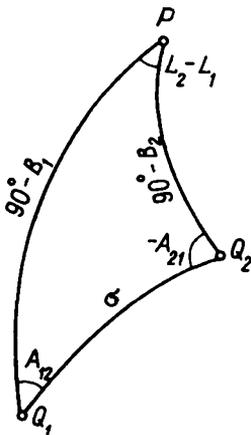


Рис. 7. Сферические координаты

формулах (53) можно считать сферическими. В сферическом приближении, согласно обозначениям, принятым на рис. 7, и формулам (53) имеем

$$\begin{aligned} b_{13} &= \sin\sigma \cos A_{12}; & b_{23} &= \sin\sigma \sin A_{12}; & b_{33} &= \cos\sigma; \\ b_{31} &= \sin\sigma \cos A_{21}; & b_{32} &= \sin\sigma \sin A_{21}. \end{aligned} \quad (55)$$

1.12. ЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ И ВРАЩЕНИЕ

Пусть референцная система XYZ определена в другой референцной системе $X_0Y_0Z_0$ положением начала координат dx_0, dy_0, dz_0 и эйлеровыми углами ω_0, σ, ω , показанными на рис. 8.

В такой постановке координаты из одной системы в другую будут преобразованы по формулам

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_0 - dx_0 \\ Y_0 - dy_0 \\ Z_0 - dz_0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} + P' \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Элементы матрицы P можно вычислить по формулам (4), принимая $\omega_0 = -\zeta_0, \sigma = \theta, \omega = \zeta$.

В национальных системах ось вращения референц-эллипсоидов устанавливается параллельно оси вращения Земли на эпоху, а начальные меридианы определяются относительно Гринвичского меридиана. Все зависит от точности фундаментальных астрономических определений широт и долгот, использованных при установлении национальных систем координат. В любом случае углы σ и $\omega - \omega_0$ малы. Поэтому в формуле (4), учитывая только члены первого порядка малости и вводя малые углы ξ_0, η_0, ν_0 , связанные с эйлеровыми углами соотношениями

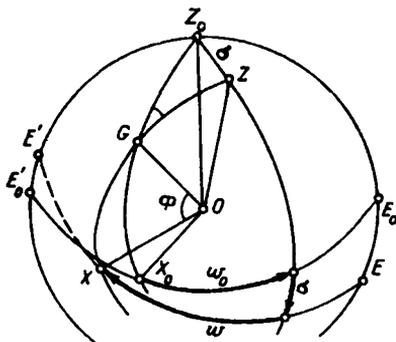


Рис. 8. Эйлеровы углы систем координат

$$\xi_0 = \sigma \cos \omega_0; \quad \eta_0 = \sigma \sin \omega_0; \quad \omega_0 = \arctg \frac{\eta_0}{\xi_0};$$

$$\sigma = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}; \quad \nu_0 = \omega - \omega_0, \quad (57)$$

получим матрицу P через новые малые параметры

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_0 & -\xi_0 \\ \nu_0 & 1 & -\eta_0 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Пользуясь рис. 8, запишем

$$\sin \psi_0 = \sin \omega_0 \sin \sigma / \cos \Phi = \sin(\omega - \omega_0) / \sin \Phi.$$

Отсюда, с учетом того, что $\sin(\omega - \omega_0) = \nu_0$ и $\sin \omega_0 \sin \sigma = \eta_0$, имеем $\nu_0 = \eta_0 \operatorname{tg} \Phi$. (59)

Долготный разворот $\nu_0 = \omega - \omega_0$ показывает, что в двух референчных системах нуль-пункты отсчета долгот на экваторе лежат в разных точках. Например, если начальные меридианы проходят через Гринвич, то $\nu_0 = 1,25\eta_0$. Если же нуль-пункты отсчета долгот совмещены на экваторе, то $\Phi = 0$ и долготный параметр ν_0 будет отсутствовать.

Представив формулы (56) в обычной записи

$$\begin{aligned} dX &= X - X_0 = -dx_0 - \nu_0 Y_0 - \xi_0 Z_0, \\ dY &= Y - Y_0 = -dy_0 + \nu_0 X_0 - \eta_0 Z_0, \\ dZ &= Z - Z_0 = -dz_0 + \xi_0 X_0 + \eta_0 Y_0, \end{aligned} \quad (60)$$

рассмотрим решение обратной задачи.

Каждый пункт Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), координаты которого известны в двух референчных системах, образует систему (60) из трех уравнений. При $n > 2$ система уравнений (60) будет переопределенной и несовместимой из-за влияния погрешностей положения пунктов в каждой референчной системе. Искомые параметры связи двух референчных систем можно вычислить с полной их оценкой, применяя принцип наименьших квадратов. Если это необходимо, то можно ввести масштабный коэффициент и оценить разномасштабность двух систем.

В частном случае одна из систем может быть и общей земной системой координат, установленной на определенную эпоху.

1.13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Малые приращения эллипсоидальных координат B, L, H из-за переноса центра эллипсоида и ориентирования его по новым осям X, Y, Z можно вычислить, пользуясь ранее выведенными уравнениями (51) и (60), т. е.

$$\begin{bmatrix} (M+H)dB \\ (N+H)\cos BdL \\ dH \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} -dx_0 - \nu_0 Y_0 - \xi_0 Z_0 \\ -dy_0 + \nu_0 X_0 - \eta_0 Z_0 \\ -dz_0 + \xi_0 X_0 + \eta_0 Y_0 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Вариации большой полуоси a и сжатия α эллипсоида, хотя и не повлияют на пространственные координаты X, Y, Z точки и поэтому не изменят ее геодезическую долготу $L = \arctg(Y/X)$, однако вызовут изменения ее широты и высоты.

Малые приращения широты B и высоты H найдем, пользуясь соотношениями

$$D = (N + H) \cos B; \quad Z = (N + H) \sin B - e^2 N \sin B, \quad (62)$$

вытекающими из (18).

Дифференцируя по аргументам B, H, a, α , пользуясь равенством $de^2 = 2d\alpha$ и формулой (46), находим

$$(M + H) \sin B dB - \cos B dH = \frac{N}{a} \cos B da + \frac{M \sin^2 B}{1 - e^2} \cos B d\alpha;$$

$$-(M + H) \cos B dB - \sin B dH = -\frac{N}{a} (1 - e^2) \sin B da + (M \sin^2 B - 2N) \sin B d\alpha.$$

Умножив первую строку на $\sin B$ ($\cos B$), а вторую строку — на $\cos B$ ($\sin B$), исключив члены с дифференциалом высоты (широты) и решив относительно dB (dH), находим

$$(M + H) dB = e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B da + \left(N + \frac{M}{1 - e^2} \right) \sin B \cos B d\alpha;$$

$$dH = -\frac{a}{N} da + N \sin^2 B d\alpha. \quad (63)$$

Полные приращения эллипсоидальных координат B, L, H из-за переноса центра, ориентирования по новым осям координат и изменения размеров референц-эллипсоида вычислим, складывая почленно левые и правые части формул (61) и (63). Умножая при этом на A' (48), находим

$$(M + H) dB = (dx_0 + v_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \sin B \cos L + (dy_0 - v_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \sin B \sin L - (dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0) \cos B + e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B da +$$

$$+ \left(N + \frac{M}{1 - e^2} \right) \sin B \cos B d\alpha;$$

$$(N + H) \cos B dL = (dx_0 + v_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \sin L - (dy_0 - v_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \cos L;$$

$$dH = -(dx_0 + v_0 Y_0 + \xi_0 Z_0) \cos B \cos L - (dy_0 - v_0 X_0 + \eta_0 Z_0) \cos B \sin L;$$

$$(dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0) \sin B - \frac{a}{N} da + N \sin^2 B d\alpha. \quad (64)$$

Пользуясь формулами (48), (61) и (63), получим дифференциальные формулы обратной задачи

$$dx_0 + v_0 Y_0 + \xi_0 Z_0 = (M + H) \sin B \cos L dB + (N + H) \cos B \sin L dL -$$

$$\left(dH + \frac{N}{a} da + \frac{M \sin^2 B}{1 - e^2} d\alpha \right) \cos B \cos L;$$

$$\begin{aligned}
 dy_0 - v_0 X_0 + \eta_0 Z_0 &= (M + H) \sin B \sin L dB - (N + H) \cos B \cos L dL - \\
 &- \left(dH + \frac{N}{a} da + \frac{M \sin^2 B}{1 - e^2} d\alpha \right) \cos B \sin L; \\
 dz_0 - \xi_0 X_0 - \eta_0 Y_0 &= -(M + H) \cos B dB - \left[dH + \frac{N}{a} (1 - e^2) da + \right. \\
 &\left. + (M \sin^2 B - 2N) d\alpha \right] \sin B.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Параметры a , α референц-эллипсоидов известны. Следовательно, имея эллипсоидальные геодезические координаты точек B_i , L_i , H_i ($i=1, 2, \dots, n \geq 2$) в двух референц-системах координат, с помощью формул (65) можно определить линейный сдвиг dx_0 , dy_0 , dz_0 и углы вращения одной системы отсчета геодезических координат относительно другой.

1.14. СВЯЗЬ ДВУХ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТНЫХ КООРДИНАТ

Предположим, что система топоцентрических горизонтных координат $QX^0Y^0Z^0$ в геодезической топоцентрической горизонтной системе координат $QX'Y'Z'$ определена тремя углами: углом прецессии Θ_0 , отсчитываемым по ходу часовой стрелки вокруг оси Z^0 ; углом чистого вращения u , отсчитываемым против хода часовой стрелки в плоскости QZ^0Z' ; углом прецессии Θ , отсчитываемым против хода часовой стрелки вокруг оси Z' (рис. 9).

Координаты из одной горизонтной системы в другую горизонтную систему преобразовываются по формулам

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = P_0 \begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix}; \tag{66}$$

$$\begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} = P'_0 \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}. \tag{67}$$

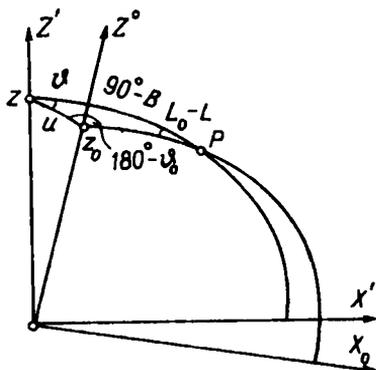


Рис. 9. Связь топоцентрических горизонтных координат

Матрица P_0 равна произведению трех матриц вращения

$$P_0 = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta_0 & \sin \Theta_0 & 0 \\ -\sin \Theta_0 & \cos \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и имеет элементы:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \cos \Theta_0 \cos \Theta \cos u + \sin \Theta_0 \sin \Theta; \\ p_{12} &= \sin \Theta_0 \cos \Theta \cos u - \sin \Theta \cos \Theta_0; \\ p_{13} &= \sin u \cos \Theta; \\ p_{21} &= \sin \Theta \cos \Theta_0 \cos u - \sin \Theta_0 \cos \Theta; \\ p_{22} &= \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos u + \cos \Theta_0 \cos \Theta; \\ p_{23} &= \sin u \sin \Theta; \quad p_{31} = -\sin u \cos \Theta_0; \\ p_{32} &= -\sin u \sin \Theta_0; \quad p_{33} = \cos u. \end{aligned} \quad (68)$$

На рис. 9 изображен полярный сферический треугольник, вершины которого представлены геодезическим z и негеодезическим z_0 зенитами точки Q и полюсом мира P . По определению систем координат сторонам треугольника u , $(90^\circ - B)$, $(90^\circ - B_0)$ противолежат соответственно углы $L_0 - L$, $(180^\circ - \Theta_0)$, Θ .

Решая сферический треугольник Pz_0z , находим

$$\begin{aligned} p_{12} &= \sin(L_0 - L) \sin B; \\ p_{21} &= -\sin(L_0 - L) \sin B_0. \end{aligned}$$

На практике углы u , $L_0 - L$, $B_0 - B$, $\Theta_0 - \Theta$ малы. Ограничиваясь в формулах (68) членами первого порядка малости и обозначая

$$\begin{aligned} \xi_0 &= u \cos \Theta, \quad \eta_0 = u \sin \Theta, \\ v_0 &= (L_0 - L) \sin B = (L_0 - L) \sin B_0, \end{aligned} \quad (69)$$

находим матрицу преобразования координат

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & v_0 & \xi_0 \\ -v_0 & 1 & \eta_0 \\ -\xi_0 & -\eta_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Формулу (66), с учетом (70), представим в обычной записи

$$\begin{aligned} X' &= X^0 + v_0 Y^0 + \xi_0 Z^0; \\ Y' &= Y^0 - v_0 X^0 + \eta_0 Z^0; \\ Z' &= Z^0 - \xi_0 X^0 - \eta_0 Y^0. \end{aligned} \quad (71)$$

Из сферического треугольника Pz_0z (см. рис. 9) следует

$$\begin{aligned} \sin u \sin \Theta &= \sin(L_0 - L) \cos B_0; \\ \sin u \cos \Theta &= \cos B \sin B_0 - \cos B_0 \sin B \cos(L_0 - L). \end{aligned}$$

Учитывая члены первого порядка малости и ранее принятые обозначения (69), получим

$$\eta_0 = (L_0 - L) \cos B_0; \quad \xi_0 = B_0 - B. \quad (72)$$

В частном случае, если ось Z^0 направлена по отвесной линии, то $B_0 = \varphi$, $L_0 = \lambda$ — астрономические координаты, а $\xi_0 = \xi$, $\eta_0 = \eta$ — составляющие астрономо-геодезического уклонения отвесной линии. Следовательно,

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi; \quad \xi = \varphi - B. \quad (73)$$

1.15. СВЯЗЬ ПОЛЯРНЫХ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Согласно принятым обозначениям (см. рис. 4) для геодезических топоцентрических сферических координат z — зенитного расстояния, A — азимута, s — наклонного расстояния имеем следующие формулы

$$z = \arccos \frac{Z'}{s}; \quad A = \arctg \frac{Y'}{X'}; \quad s = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}. \quad (74)$$

В топоцентрической горизонтной системе $QX^0Y^0Z^0$ формулы для полярных координат z_0 , A_0 , $s_0 = s$ получим, заменяя соответствующие индексы в формулах (74).

Из (71) с учетом членов первого порядка малости следует

$$\frac{Y'}{X'} - \frac{Y^0}{X^0} = \eta_0 \frac{Z^0}{X^0} - \xi_0 \frac{Y^0 Z^0}{X^0 X^0} - v_0 \left(1 + \frac{Y^0}{X^0} \frac{Y^0}{X^0} \right); \quad (75)$$

$$\frac{Z'}{s} - \frac{Z^0}{s} = -\frac{1}{s} (\xi_0 X^0 + \eta_0 Y^0).$$

Исключая в правой части выражения (75)

$$X^0 = s \sin z_0 \cos A_0; \quad Y^0 = s \sin z_0 \sin A; \quad Z^0 = s \cos z_0$$

и учитывая формулы (74), получим

$$\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A_0 = \frac{1}{\cos^2 A_0} (\eta_0 \cos A_0 \operatorname{ctg} z_0 - \xi_0 \sin A_0 \operatorname{ctg} z_0 - v_0);$$

$$\cos z - \cos z_0 = -\sin z_0 (\xi_0 \cos A_0 + \eta_0 \sin A_0).$$

Отсюда следует, что

$$A = A_0 - v_0 + (\eta_0 \cos A_0 - \xi_0 \sin A_0) \operatorname{ctg} z_0; \quad (76)$$

$$z = z_0 + \xi_0 \cos A_0 + \eta_0 \sin A_0.$$

В частном случае, если ось Z^0 направлена по отвесной линии, то $A_0 = \alpha$ — азимут (направление), z_0 — зенитное расстояние в астрономической топоцентрической горизонтной системе координат.

В принятых обозначениях с учетом формулы (59) имеем

$$A = \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi + (\eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha) \operatorname{ctg} z_0; \quad (77)$$

$$z = z_0 + \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha.$$

Обратим внимание, что выражение (77) верно для астрономического азимута, определенного по наблюдениям звезд или гироскопи-

ческим методом, и для измеренного горизонтального направления. Методические погрешности приводят к тому, что в формуле редукции измеренного горизонтального направления член $\eta \operatorname{tg} \Phi$ отсутствует. Это затушевывает общность астрономического азимута и горизонтального направления, определяемых в одной и той же астрономической топоцентрической горизонтной системе отсчета координат.

1.16. УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ

Из-за колебания Земли относительно своей оси вращения полюсы перемещаются на ее поверхности, описывая сложную спиралевидную кривую относительно некоторого среднего положения P_0 . Положение полюса, соответствующее эпохе наблюдения T , называют мгновенным полюсом. В настоящее время решением Международного астрономического союза и Международной ассоциации геодезии за начало принят средний полюс, установленный средними астрономическими широтами станций Международной службы движения полюса эпохи 1900—1905 гг.

Рассмотрим вывод формул преобразования декартовых геоцентрических координат из одной эпохи в другую с учетом движения полюсов Земли. На рис. 10 изображены системы геоцентрических декартовых координат $X_0Y_0Z_0$ на среднюю эпоху T_0 и XYZ на эпоху наблюдения T . Оси координат соответственно направлены: OX_0 — в точку X_0 пересечения линий среднего экватора $E_0E'_0$ и среднего гринвичского меридиана P_0G ; OZ_0 — в точку северного полюса P_0 на эпоху T_0 ; OY_0 лежит в плоскости среднего экватора, дополняя правую декартову систему координат; OX — в точку X пересечения линий мгновенного экватора EE' и начального меридиана PX ; OZ — в точку мгновенного полюса P на эпоху T ; OY — лежит в плоскости мгновенного экватора, дополняя правую декартову систему координат.

Пусть положение мгновенного полюса задано сферическим расстоянием σ и азимутом Θ или прямоугольными координатами $x_p = \sigma \cos \Theta$, $y_p = -\sigma \sin \Theta$. Сравнивая рис. 8 и 10, видим, что $\xi_0 = x_p$, $\eta_0 = -y_p$, $\nu_0 = -y_p \operatorname{tg} \Phi$ (Φ — широта точки пересечения начальных меридианов эпох T_0 и T). Следовательно, решение задачи сводится к вычислению матрицы вращения (58) по формуле

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & y_p \operatorname{tg} \Phi & -x_p \\ -y_p \operatorname{tg} \Phi & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \quad (78)$$

и вычислению мгновенных координат по формуле (56), полагая

$$dx_0 = dy_0 = dz_0 = 0.$$

Поправки к координатам эпохи T за приведение на эпоху T_0 будут

$$\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -y_p \operatorname{tg} \Phi & x_p \\ -y_p \operatorname{tg} \Phi & 0 & -y_p \\ -x_p & y_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

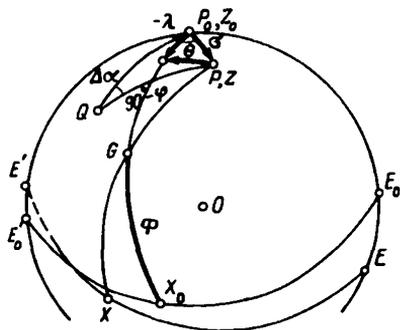


Рис. 10. Системы координат двух эпох

или в обычной записи

$$\begin{aligned} \delta X_p &= (Z x_p - Y \operatorname{tg} \Phi y_p); \\ \delta Y_p &= (X \operatorname{tg} \Phi - Z) y_p; \\ \delta Z_p &= Y y_p - X x_p. \end{aligned} \quad (79)$$

Выведенные уравнения позволяют решить прямую задачу учета движения полюсов и обратную задачу определения положения полюсов по наблюдениям, выполненным в разные эпохи.

Если начальные меридианы фиксируются одной и той же точкой на экваторе начальной эпохи, т. е. $\Phi = 0$, то матрица вращения (78) имеет вид

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

В этом случае поправки к координатам эпохи T за приведение на эпоху T_0 следующие:

$$\delta X_p = Z x_p; \quad \delta Y_p = -Z y_p; \quad \delta Z_p = Y y_p - X x_p. \quad (81)$$

Изменения широты и долготы точки Q из-за движения полюсов рассмотрим, пользуясь формулами (11),

$$\operatorname{tg} \varphi = Z / \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda = Y / X.$$

Изменения широты и долготы из-за вариаций декартовых координат, обусловленные движением полюсов, будут

$$\delta \varphi_p = -\frac{1}{r} (\delta X_p \sin \varphi \cos \lambda + \delta Y_p \sin \varphi \sin \lambda - \delta Z_p \cos \varphi);$$

$$\delta \lambda_p = -\frac{1}{D} (\delta X_p \sin \lambda - \delta Y_p \cos \lambda).$$

Исключая δX_p , δY_p , δZ_p (79), находим поправки за редукцию широты и долготы на эпоху T_0

$$\begin{aligned} \delta\varphi_p &= y_p \sin \lambda - x_p \cos \lambda, \\ \delta\lambda_p &= -(x_p \sin \lambda + y_p \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi + y_p \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \quad (82)$$

Решая сферический треугольник QP_0P , находим

$$\Delta\alpha = \sigma \sin(\Theta - \lambda) \operatorname{sec} \varphi.$$

Отсюда поправка за редукцию азимута на эпоху T_0

$$\Delta\alpha = -(x_p \sin \lambda + y_p \cos \lambda) \operatorname{sec} \varphi. \quad (83)$$

Выбор начального меридиана не может быть произвольным. Основным следует считать вариант, когда начальный меридиан любой эпохи проходит через точку Гринвича на экваторе X_0 , определенную на начальную эпоху T_0 . В этом случае во всех формулах будет отсутствовать член с $\operatorname{tg} \Phi$, так как $\Phi = 0$.

1.17. УЧЕТ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПОЛЯРНЫХ ОСЕЙ ЗЕМЛИ И РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоИДА

Пусть полярная ось референц-эллипсоида и ось вращения Земли не параллельны. Установим связь между соответствующими географическими координатами (см. рис. 10). За полюс референц-эллипсоида примем точку P , за полюс Земли на эпоху T_0 — точку P_0 , за начальный пункт триангуляции с широтой Φ — точку G_0 . Пусть заданы малый параметр σ и ориентирующий угол Θ .

Введем обозначения

$$m = \sigma \cos \Theta; \quad n = -\sigma \sin \Theta.$$

В такой постановке астрономические координаты достаточно привести к полюсу P , пользуясь формулами (82), и затем ввести поправки за уклонения отвесной линии с помощью формул (73).

Таким образом, редукционные формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B &= \varphi - \xi + (m \cos \lambda - n \sin \lambda); \\ L &= \lambda - \eta \operatorname{sec} \varphi + (m \sin \lambda + n \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi - n \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \quad (84)$$

Пользуясь формулами (77) и (83), запишем уравнение для геодезического азимута

$$A = \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi + (m \sin \lambda + n \cos \lambda) \operatorname{sec} \varphi + (\eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha) \operatorname{ctg} z_0. \quad (85)$$

Формулы (83) и (85) связывают геодезические и астрономические широты, долготы и азимуты через составляющие уклонения отвесной линии в общей постановке, когда полярная ось референц-эллипсоида и ось вращения Земли не параллельны.

Если оси вращения Земли и референц-эллипсоида параллельны, то малый параметр $\sigma = 0$ и формулы (84) и (85) будут соответствовать известным формулам (73) и (77).

1.18. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ПОЛЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ УСКОРЕНИЙ

Свойства пространства вокруг масс и их взаимодействие можно изучать, вводя понятие потенциальной энергии. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила F взаимного притяжения точечных масс m и M составляет

$$F = fMm/r^2.$$

Определим взаимную потенциальную энергию. Если расстояние между двумя массами увеличится на бесконечно малую величину dr , то будет совершена элементарная работа $dA = fMm dr/r^2$. С другой стороны, эта работа равна потере потенциальной энергии

$$-dV = fMm dr/r^2.$$

Отсюда потенциальная энергия $V = fMm/r$. Если для простоты массу m примем за единичную, то

$$V = fM/r. \quad (86)$$

В такой трактовке мы будем пользоваться скалярной функцией V , называя ее потенциалом массы M или потенциальной функцией.

Согласно второму закону механики, $F = mW$. В нашем случае ускорение $W = fM/r^2$. Сравнивая это выражение с формулой (86), находим ускорение

$$W = -dV/dr. \quad (87)$$

Знак минус в формуле показывает, что вектор-ускорение направлен по радиусу-вектору в противоположном направлении.

Таким образом, градиент потенциала V , взятый с обратным знаком, численно равен ускорению W , приобретаемому единичной массой вследствие взаимного притяжения с массой M на расстоянии r . По определению потенциальной энергии ее бесконечно малое приращение, взятое с обратным знаком, численно равно работе, совершаемой силой притяжения при бесконечно малом перемещении единичной массы в заданном направлении.

Выявим физический смысл приращения потенциала между точками Q_0 и Q , находящимися на конечном расстоянии. Для этого разность потенциалов представим работой, совершаемой силой гравитации при перемещении единичной массы из точки Q_0 в точку Q , т. е.

$$A = \left| - \int_{Q_0}^Q dV \right| = V(Q) - V(Q_0). \quad (88)$$

Как видно из этой формулы, работа гравитационной силы, совершаемая при перемещении единичной массы из одной точки в другую, не зависит от пути, а зависит только от разности потенциалов в конечной и начальной точках.

Очевидно, потенциал конечной массы M на бесконечности $r \rightarrow \infty$ равен нулю. Следовательно, подставляя в формулу (88) значение $V(Q_0) = 0$, устанавливаем, что потенциал точки Q равен работе, затраченной гравитационной силой на перемещение единичной массы из бесконечности в данную точку.

Потенциальная функция V отражает свойства пространства массы M и задает поле гравитационных ускорений таким образом, что в ортогональной системе координат

$$W_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i}; \quad W_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j}; \quad W_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k};$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

x, y, z — координаты единичной массы; x', y', z' — координаты массы M .

Составляющие ускорения по осям координат найдем, умножая модуль вектора-ускорения на направляющие косинусы,

$$W_x = W \cos(W, x); \quad W_y = W \cos(W, y); \quad W_z = W \cos(W, z). \quad (89)$$

Модуль вектора-ускорения имеет вид

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}. \quad (90)$$

Силовое поле притяжения некоторой материальной массы определяется ускорением в каждой точке ее пространства, иначе говоря, оно определяется силой, действующей на единичную массу, помещенную в эту точку. Поскольку сила в этом случае численно равна ускорению, часто объединяют эти два понятия.

Гравитационный потенциал, создаваемый многими точечными массами dm_i ($i = 1, 2, \dots, n$), обладает свойством суперпозиции. Поскольку потенциал есть скалярная функция, результирующий потенциал равен сумме элементарных потенциалов dV_i , создаваемых каждой элементарной массой. В частном случае гравитационный потенциал объемного тела можно представить суммой потенциалов элементарных масс dm_i , в общей совокупности образующих массу M объемного тела, т. е.

$$V = f \int_M \frac{dm}{\rho}. \quad (91)$$

Для объемного тела согласно определениям (89) — (91)

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = W_x = \sum_{i=1}^n W_i \cos(W_i, x);$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = W_y = \sum_{i=1}^n W_i \cos(W_i, y); \quad (92)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = W_z = \sum_{i=1}^n W_i \cos(W_i, z).$$

Для удаленной точки все расстояния до нее от точек объемного тела конечного размера можно считать равными ($\rho = r$) и все радиусы-

векторы ρ_i ($i=1, 2, \dots, n$) параллельными. В этом случае результирующий потенциал объемного тела можно заменить потенциалом (86) материальной точки с массой, равной массе объемного тела.

1.19. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ЕЕ ПОТЕНЦИАЛ

Положим, тело вращается около неизменной оси с постоянной угловой скоростью, как абсолютное твердое тело. В этом случае на каждую его точку кроме силы притяжения будет действовать центробежная сила, вызываемая вращением тела вокруг некоторой оси. Для аналитического выражения потенциала центробежной силы пространственные прямолинейные декартовы координаты представим через пространственные полярные координаты в форме (9)

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda; \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda; \quad z = R \sin \varphi, \quad (93)$$

где φ, λ — объектоцентрические широта и долгота.

Определим производные координат по времени. Принимая во внимание, что во времени изменяется только долгота, а ее производная равна угловой скорости вращения тела ω , находим

$$\dot{x} = -R \cos \varphi \sin \lambda \omega; \quad \dot{y} = R \cos \varphi \cos \lambda \omega; \quad \dot{z} = 0.$$

После повторного дифференцирования по времени, с учетом формулы (93)

$$\ddot{x} = -\omega^2 x; \quad \ddot{y} = -\omega^2 y; \quad \ddot{z} = 0.$$

Вторые производные координат по времени есть слагающие ускорения, в данном случае — ускорения центробежной силы. Они по аналогии со слагающими ускорения силы притяжения могут быть представлены частными производными потенциала центробежной силы

$$U = \omega^2(x^2 + y^2)/2. \quad (94)$$

Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x = -\ddot{x}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y = -\ddot{y}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (95)$$

Вторые производные от потенциала центробежной силы

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \omega^2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно оператор Пуассона $\nabla^2 U = 2\omega^2$ — величина постоянная во всем пространстве объемного тела.

Из формулы (95) видно, что на оси вращения объемного тела потенциал центробежной силы равен нулю, а наибольшего значения он достигает для точек, максимально удаленных от оси вращения. В частности для планетарного тела семейством таких точек является экватор.

Равнодействующая силы притяжения и центробежной силы тела, вращающегося вокруг своей оси, называется силой тяжести.

Потенциал силы тяжести W равен сумме потенциалов притяжения и центробежной силы, т. е.

$$W = V + U, \quad (96)$$

или, согласно формулам (91) и (94)

$$W = f \int \frac{dm}{\rho} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (97)$$

Очевидно, потенциал силы тяжести (97) вычисляется только для точек тела, вращающихся с угловой скоростью ω . Для точки, не занятой вращающейся массой $\omega = 0$, ее потенциал в чистом виде представляется потенциалом притяжения.

Следовательно для внешней точки второй дифференциальный оператор

$$\nabla^2 W = 2\omega^2,$$

а для внутренней точки

$$\nabla^2 W = -4\pi f\delta + 2\omega^2.$$

Зная потенциал силы тяжести точки W , легко вычислить составляющие силы тяжести по осям, представляющие собой частные производные потенциала W по координатам. Если силу тяжести или ускорение силы тяжести обозначим через g , то составляющие по осям координат будут

$$g_x = -\frac{\partial W}{\partial x}; \quad g_y = -\frac{\partial W}{\partial y}; \quad g_z = -\frac{\partial W}{\partial z}. \quad (98)$$

Зная составляющие g_x , g_y , g_z , нетрудно вычислить модуль вектора ускорения силы тяжести и его направление по формулам

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}; \quad (99)$$

$$\cos(g, x) = \frac{g_x}{g}; \quad \cos(g, y) = \frac{g_y}{g}; \quad \cos(g, z) = \frac{g_z}{g}. \quad (100)$$

Линия, по которой направлен вектор ускорения силы тяжести, называется отвесной линией в данной точке.

Составляющие по любому направлению легко получить через полное значение ускорения силы тяжести $g_s = g \cos(g, s)$.

Рассмотрим граничное распределение силы тяжести для Земли. При значительном удалении от центра Земли до известного предела сила тяжести по величине уменьшается, так как уменьшается сила притяжения, а центробежная сила, действующая в другую сторону, увеличивается. Во вращающейся атмосфере сила притяжения мала, а центробежная сила растет по мере увеличения расстояния, и на определенной высоте сила тяжести меняет знак, направляется от Земли и быстро возрастает по величине.

Нетрудно вычислить расстояние ρ , на котором сила тяжести меняет знак, а сила притяжения по величине равна центробежной силе. Для

приближенного расчета примем: сила притяжения земного шара $F_V = fM/\rho^2$; $fM = 398\,600 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$; центробежная сила $F_\omega = \omega^2 \rho$; $\omega = 0,7292115 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Решая равенство $F_V = F_\omega$ относительно ρ , находим $\rho \approx 42\,100 \text{ км}$. Таким образом, на высоте $35\,730 \text{ км}$ ускорение силы тяжести меняет знак и направлено от Земли.

О распределении ускорения силы тяжести внутри, на поверхности и вблизи Земли нельзя сделать вывод без специального исследования, так как оно зависит от внутреннего строения Земли. В первом приближении вблизи центра Земли сила тяжести уменьшается, а в самом центре равна нулю.

Фигура Земли определяется главным образом силой притяжения, так как влияние центробежной силы мало. Доказано, что только на удалении $42\,000 \text{ км}$ от центра Земли центробежная сила становится равной силе притяжения. Рассмотрим численное отношение этих сил на поверхности Земли. Наибольшей величины центробежная сила достигает на экваторе и равна $\omega^2 a$. Тогда как сила притяжения на экваторе имеет минимум и равна fMa^{-2} .

Отношение этих сил $q = \omega^2 a^3 / fM$ при $\omega = 0,7292115 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$; $a = 6378,14 \text{ км}$; $fM = 398\,600,5 \text{ км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ равно $1:288,9008$.

Выведем приближенную формулу оценки распределения силы тяжести внутри Земли. Принимая Землю за шар, состоящий из концентрических однородных слоев, на основании известных свойств потенциала определим, что слои, отстоящие от центра дальше исследуемой точки, эту точку не притягивают. Следовательно точку, отстоящую от центра на расстоянии r_0 , притягивает сила

$$F_0 = fM_0/r_0^2,$$

где M_0 — масса, заключенная внутри сферы радиуса r_0 .

Масса простого сферического слоя радиуса R и толщины dR равна

$$dm = 4\pi R^2 \delta dR,$$

или

$$M_0 = \int_0^{r_0} 4\pi R^2 \delta dR.$$

Если зададим плотность однородного сферического слоя как функцию его радиуса в форме

$$\delta = \delta_0(1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \dots), \quad (101)$$

то

$$M_0 = 4\pi \delta_0 \int_0^r (1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2) R^2 dR,$$

или

$$M_0 = 4\pi\delta_0 r_0^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\alpha_1 r_0 + \frac{1}{5}\alpha_2 r_0^2 \right).$$

Таким образом, искомая сила будет

$$F_0 = 4\pi f\delta_0 r_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\alpha_1 r_0 + \frac{1}{5}\alpha_2 r_0^2 \right). \quad (102)$$

На поверхности радиуса r_0 , удовлетворяющего условию

$$9\alpha_2 r_0^2 + \frac{15}{2}\alpha_1 r_0 + 5 = 0,$$

функция F_0 имеет экстремальное значение.

Формула (102) приближенная, ибо в ней из-за малости не учтена центробежная сила. Кроме того, внешние слои, в особенности в верхней части Земли, отличаются от простого сферического слоя. Однако во многих случаях формула (102) может найти применение, если известен закон распределения плотности внутри Земли.

1.20. УРОВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И СИЛОВЫЕ ЛИНИИ

Поскольку скалярные функции W и V зависят только от координат точки пространства массы M , можно для любой объемной массы задать поверхность, для точек которой потенциал будет постоянным. Такую поверхность называют изопотенциальной или уральной поверхностью. Ясно, что масса M создает вокруг себя бесчисленное множество уральных поверхностей. При этом следует заметить, что потенциальная сила как производная от потенциала на уральной поверхности в общем случае остается переменной по величине и направлению.

В пространстве конечных размеров в общем случае уральные поверхности объемного тела имеют сложную форму. Известно, что физическая фигура Земли имеет сложный вид, а распределение масс, особенно в ее наружных слоях, неравномерно. Поэтому уральные поверхности Земли (в ее теле, на поверхности и в околоземном пространстве) представлены такими сложными поверхностями, что приходится их изучать последовательными приближениями, разделяя на классы по уровню сложности.

Уральные поверхности не могут пересекаться или касаться друг друга, так как потенциал однозначно определяется координатами.

Каждой уральной поверхности соответствует единственное значение потенциала $W = C = \text{const}$, а работа при перемещении единичной массы по этой поверхности равна нулю, т. е. $dW = -g_s ds = 0$. Следовательно $g_s = g \cos(s, g) = 0$, так как $\cos(s, g) = 0$.

Таким образом, во всех точках уральной поверхности потенциальная сила направлена по нормали к уральной поверхности.

Для определения потенциальной силы достаточно взять производную потенциала по внешней нормали к уральной поверхности

$$g = -dW/dn. \quad (103)$$

Отрезок внешней нормали dh между двумя бесконечно близкими уровнями поверхностями будет

$$dh = -dW/g. \quad (104)$$

Отсюда заключаем, что расстояние между двумя бесконечно близкими уровнями поверхностями не остается постоянным из-за изменения потенциальной силы g при переходе от одной точки к другой точке уровня поверхности. В частном случае это расстояние постоянно только для двух сферических уровней поверхностей.

Кривые, касательные к которым во всех точках совпадают с направлением потенциальной силы, называются силовыми линиями. Силовые линии, по определению, пересекают все уровневые поверхности ортогонально.

Отрезок силовой линии между двумя уровнями поверхностями $W_0 = C_1$ и $W = C_2$ можно найти, интегрируя выражение (104),

$$C_1 - C_2 = \int_0^h g dh. \quad (105)$$

Таким образом, зная разность потенциалов между двумя уровнями поверхностями, можно определить отрезок силовой линии, заключенный между этими поверхностями, т. е. высоту одной уровневой поверхности относительно другой.

1.21. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Мы до сих пор рассматривали стационарное потенциальное поле. В действительности все планетарные тела имеют нестационарные потенциальные поля, изменяющиеся во времени. Например, Земля притягивается другими небесными телами, в первую очередь Солнцем и Луной. Притяжение изменяется во времени из-за периодического изменения направления и расстояний до этих небесных тел. Основным полем внешнего притяжения является поле притяжения Солнца. Для сравнения напомним, что притяжение Земли Меркурием не превосходит $1/3\ 000\ 000$, Марсом — $1/800\ 000$, Венерой — $1/32\ 000$, Юпитером — $1/16\ 000$ доли солнечного притяжения.

Земля не абсолютно твердое тело, поэтому она под влиянием действующих на нее сил деформируется. Приливное движение твердой и водной оболочки, движение земной коры и литосферных плит, дрейф континентов, изменения береговых линий и уровня океанов и морей — это не полный перечень изменений фигуры Земли. Эти и другие деформации Земли вызывают возмущения потенциального поля вследствие переноса масс с одной уровневой поверхности на другую и изменения их взаимного расположения.

Движение полюсов и неравномерность вращения Земли, сезонные атмосферные явления континентального и планетарного масштабов тоже изменяют параметры потенциального поля.

Нестационарность потенциального поля особенно заметна при изучении околоземных уровенных поверхностей, представляющих наибольший интерес для практики.

1.22. ГЕОИД

В теоретических исследованиях целесообразно иметь уровенную поверхность, которая была бы внешней по отношению ко всем притягивающим массам и менее чувствительной к незначительным вариациям параметров гравитационного поля Земли. Только для такой уровенной поверхности справедлива теорема Стокса, утверждающая, что если дана уровенная поверхность σ потенциала силы тяжести массы M , заключенной внутри нее и вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг неизменной оси, то ускорение силы тяжести в любой точке уровенной поверхности σ и потенциал притяжения V определяются однозначно во всем внешнем пространстве, независимо от распределения масс внутри поверхности.

Для Земли такой уровенной поверхностью могла бы быть поверхность изопотенциала, охватывающая ее вместе с вращающейся плотной атмосферой. Но в этом случае возникают трудности, связанные с изучением фигуры Земли и определением высот, из-за того, что такая уровенная поверхность далеко отстоит от места практических измерений. Она более пригодна для изучения потенциала притяжения на больших высотах. Для практических нужд приходится отказаться от такой гипотетической уровенной поверхности.

За главную уровенную поверхность принимают изопотенциальную поверхность силы тяжести, проходящую через начало отсчета высот и называемую *геоидом*. Поверхность геоида совпадает с невозмущенным средним уровнем Мирового океана и сообщаемых с ним морей, а под материками она во всех своих точках ортогональна силовым линиям.

Поверхность геоида не является внешней уровенной поверхностью, так как над нею возвышаются почти все материки и плотная атмосфера Земли. Кроме того, из-за колебания уровня Мирового океана и морей относительно среднего невозмущенного их уровня, поверхность геоида не может совпадать с реальной фигурой водной оболочки. Заметим, что разность уровней Тихого и Атлантического океанов в зоне Панамского канала составляет 0,6 м. Почти на 0,7 м выше уровня Черного моря располагается нуль-пункт Кронштадтского футштока.

Однако несмотря на указанные недостатки геоид, имеющий массу, равную массе Земли, и вращающийся с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли, на практике заменяет Землю в планетарном масштабе и представляет объект изучения.

Для научного и практического использования необходима более простая фигура, чем геоид. Такой фигурой является общеземной трехосный эллипсоид. Еще более простой математической моделью геоида служит общеземной двухосный эллипсоид, аппроксимирующий

геоид в планетарном масштабе. Хотя двухосный земной эллипсоид по уровню аппроксимации планетарного геоида уступает трехосному земному эллипсоиду, однако он имеет более простое математическое описание, чем трехосный эллипсоид, и находит самое широкое применение.

Потенциальное поле эллипсоида и математический аппарат, применяемый для его изучения, является одним из центральных вопросов в планетарной теории Земли, Луны и планет Солнечной системы.

1.23. ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ПЛАНЕТА. ВОЗМУЩАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ

При изучении фигуры и свойств пространства планетарного тела процесс приближений неизбежен. В первом приближении можно принять, что планетарное тело — шар с однородным или сферическим распределением плотности. Шаровая модель сильно упрощает теорию и ее практическое приложение. Действительно, применяя математический аппарат, рассмотренный в предыдущих параграфах, без особого труда можно определить потенциал и его производные как для внутренней, так и для внешней точки шара.

В следующем приближении планетарное тело можно представить однородным эллипсоидом. Эллипсоидальная модель, учитывающая полярное сжатие вращающегося тела и аппроксимирующая его в планетарном масштабе, является сильным приближением. Математический аппарат эллипсоидальной модели достаточно прост. Если принят однородный эллипсоид вращения, то интегралы берутся в конечных квадратах. Математический аппарат однородного трехосного эллипсоида более сложный. Подынтегральные функции оказываются эллиптическими. Однако, рассматривая математический аппарат эллиптических функций, убеждаемся, что трехосный эллипсоид не дает погрешностей в практических приложениях. Если принять модель неоднородного эллипсоида, более адекватную Земле и некоторым другим планетам, математический аппарат усложнится. Используя гипотезы о законе распределения плотности внутри планетарного тела, можно получить ряд упрощений в решении задачи.

Для реальной фигуры планетарного тела с неоднородным распределением плотности математический аппарат планетарной модели будет сложным и поэтому придется применять разложение функций в ряд.

Оказывается, убывание членов ряда будет быстрым, а вычисление их упрощается, если ось вращения и центр абстрактной фигуры совпадут с осью вращения и центром масс планетарного тела, их массы и угловые скорости вращения будут соответственно равны.

Главные члены, имеющие по величине шестой или третий порядок относительно других членов ряда, могут быть вычислены из шаровой или эллипсоидальной модели планетарного тела. Поэтому и в планетарной модели методически целесообразно использовать промежуточную шаровую или эллипсоидальную модель.

Одним из основных параметров является планетоцентрическая гравитационная постоянная fM , определяемая как произведение постоянной тяготения f и массы планетарного тела M . Действительно, в ранее полученных формулах потенциала, эта постоянная используется как основной коэффициент. Если взять шар с однородным распределением плотности, то, зная его массу, можно просто вычислить его потенциал как для внутренней, так и для внешней точки.

Однородный эллипсоид вращения, масса которого M , угловая скорость вращения ω , большая полуось a и полярное сжатие α , а ось вращения и центр совпадают с осью вращения и центром масс планетарного тела, назовем Нормальной планетой. Нормальная планета, определенная по соответствующим параметрам Земли, называется Нормальной или Стандартной Землей.

Потенциал силы тяжести (притяжения) Нормальной планеты $U(V_0)$ примем за нормальный потенциал силы тяжести. Отличие потенциала силы тяжести планетарного тела $W(V)$ от потенциала силы тяжести Нормальной планеты назовем возмущающим потенциалом силы тяжести (притяжения), т. е. соответственно

$$T = W - U; \quad R = V - V_0. \quad (106)$$

Нормальный потенциал U следует установить так, чтобы возмущающий потенциал T был гармонической функцией с высокой точностью приближения, т. е. разность потенциалов центробежной силы реальной и Нормальной планет должна быть пренебрегаемо малой величиной. Если поверхность Нормальной планеты отступает от поверхности реальной планеты на ΔR , то относительная ошибка из-за расхождения потенциалов центробежных моментов будет $\epsilon = \omega^2 R \Delta R / W$. Для Земли, полагая $\omega = 0,729 \cdot 10^{-4}$ рад/с, $W = 62,6368$ км²/с², $\Delta R = 10$ м, находим $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-8}$.

Таким образом, планетарный эллипсоид с угловой скоростью вращения, точно соответствующей угловой скорости вращения планеты, определяет возмущающий потенциал T , который является гармонической функцией. Это обстоятельство облегчает решение краевых задач теории потенциала, поэтому возмущающий потенциал силы тяжести занимает центральное место в изучении физической фигуры планетарного тела или свойств пространства, занятого массами, вращающимися совместно с планетарным телом. Для Земли такой массой будет земная атмосфера.

При изучении свойств околопланетарного пространства, не занятого вращающимися совместно с планетарным телом массами, и для которого не надо учитывать потенциал центробежной силы, основным является возмущающий потенциал притяжения. При этом, когда изучают движение естественных или искусственных небесных объектов в околопланетарном пространстве, за Нормальную планету принимают однородный шар, тогда возмущающий потенциал притяжения будет

$$R = V - \frac{fM}{r}.$$

Как видно, в планетарной геодезии используются математические модели различного уровня, с той или иной подробностью и полнотой отображающие метрику планетарного тела и его пространства.

Потенциал притяжения можно представить через геоцентрические координаты разложением по сферическим функциям полинома Лежандра в гармонический ряд

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left(I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda \right) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (107)$$

где r , φ , λ — полярные геоцентрические радиус, широта и долгота точки, для которой вычисляется потенциал притяжения; fM , a_e — геоцентрическая гравитационная постоянная и экваториальный радиус Земли; I_{nm} , K_{nm} — гармонические коэффициенты гармоник потенциала притяжения; $P_{nm}(\sin \varphi)$ — сферическая функция Лежандра степени n и порядка m .

Члены нулевого порядка ($m=0$) называются зональными гармониками, остальные члены ($m \neq 0$) — незональными гармониками. Незональные гармоники подразделяются на секториальные, если $m=n$, и тессеральные гармоники, если $m \neq n$.

Безразмерные величины I_n называются зональными гармоническими коэффициентами, I_{nm} и K_{nm} ($m \neq 0$) — незональными гармоническими коэффициентами и являются постоянными параметрами, характеризующими внешнее гравитационное поле Земли.

2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА

2.1. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Потенциал притяжения планетарного тела массы M выразим формулой

$$V = f \int_M \frac{dm}{\rho}, \quad (108)$$

где ρ — топоцентрическое расстояние между элементарной массой dm и точкой S , для которой вычисляется потенциал притяжения; M показывает, что интегрирование выполняется по всему объему тела.

Заметим, что формула (108) справедлива для любого произвольного распределения плотности масс внутри тела.

Из рис. 11 следует, что

$$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi. \quad (109)$$

Пользуясь равенством $2 \cos \psi = e^{i\psi} + e^{-i\psi}$, формулу (109) приведем к виду

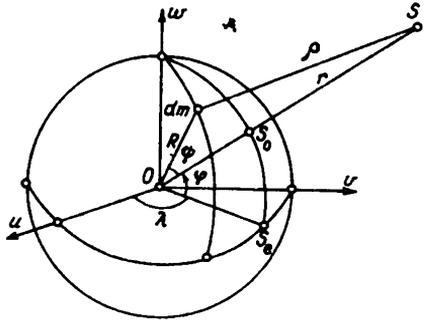


Рис. 11. Главные оси моментов инерции, элементарная масса и точка внешнего пространства

$$1/\rho = 1/\sqrt{(r - Re^{i\psi})(r - Re^{-i\psi})}, \quad (110)$$

удобному для применения по формуле (108).

Полагая $R < r$ и пользуясь известной формулой

$$1/\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n, \quad k_n = (2n)!/2^{2n}(n!)^2, \quad (111)$$

разложим правую часть формулы (110) в ряды. Сгруппировав члены по степеням R/r , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = & \frac{1}{r} \left\{ k_0^2 + \frac{R}{r} 2k_0 k_1 \cos \psi + \left(\frac{R}{r}\right)^2 (2k_0 k_2 \cos 2\psi + k_1^2) + \right. \\ & + \left(\frac{R}{r}\right)^3 (2k_0 k_3 \cos 3\psi + 2k_1 k_2 \cos \psi) + \left(\frac{R}{r}\right)^4 (2k_0 k_4 \cos 4\psi + \\ & + 2k_1 k_3 \cos 2\psi + k_2^2) + \dots + \left(\frac{R}{r}\right)^{2n-1} [2k_0 k_{2n-1} \cos(2n-1)\psi + \\ & + 2k_1 k_{2n-2} \cos(2n-3)\psi + \dots + 2k_{n-1} k_n \cos \psi + \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} [2k_0 k_{2n} \cos 2n\psi + \dots \\ & \left. \dots + 2k_{n-1} k_{n+1} \cos 2\psi + k_n^2] \right\}. \end{aligned}$$

Запишем этот ряд в форме

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n. \quad (112)$$

Функции

$$P_0 = k_0^2 = 1; \quad P_1 = 2k_0 k_1 \cos \psi = \cos \psi;$$

$$P_2 = 2k_0 k_2 \cos 2\psi + k_1^2 = \frac{1}{4}(3\cos 2\psi + 1)$$

.....

представим через степенные аргументы $\mu = \cos \psi$

$$P_0 = 1; \quad P_1 = \mu; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1); \quad P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu);$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3); \quad P_5 = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 - 15\mu)$$

.....

$$(113)$$

Функции P_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) называются многочленами Лежандра или сферическими функциями первого рода.

Три последовательных многочлена Лежандра связаны рекуррентной формулой

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) = (2n+1)\mu P_n(\mu) - nP_{n-1}(\mu). \quad (114)$$

В общем случае

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (115)$$

Подставляя значение $1/\rho$ (112) в исходную формулу (108) и введя обозначение

$$V_n = \frac{f}{r} \int_M \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\mu) dm, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad (116)$$

получим выражение для потенциала притяжения планетарного тела

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \quad (117)$$

в полярных координатах.

Потенциалы $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n$ в разложении (117) назовем соответственно потенциалами нулевого, первого, второго и n -го порядка.

Пользуясь указанными выше правилами, последовательности формул (113) и (117) можно продолжить до любого порядка.

2.2. ПОТЕНЦИАЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Пространственная экваториальная декартова система координат u, v, w (см. рис. 11) определяется следующим образом. Ось w совпадает с мгновенной осью вращения тела; ось u лежит на пересечении плоскостей экватора и меридиана с долготой λ_0 ; ось v дополняет правую систему координат. Точка S и элементарная масса dm в этой системе отсчета определяются соответственно декартовыми координатами u, v, w и $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

В формуле (116) исключим R и ψ , пользуясь известными соотношениями

$$R^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2; \quad (118)$$

$$\cos \psi = (u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w})/Rr,$$

получим

$$V_1 = \frac{fM}{r^3} (uu_0 + vv_0 + ww_0), \quad (119)$$

где $u_0 = \frac{1}{M} \int_M \bar{u} dm$; $v_0 = \frac{1}{M} \int_M \bar{v} dm$; $w_0 = \frac{1}{M} \int_M \bar{w} dm$ — координаты центра инерции тела.

Если начало декартовой системы координат совмещено с центром инерции планетарного тела, то $u_0 \equiv v_0 \equiv w_0 \equiv 0$. В этом случае потенциал первого порядка

$$V_1 = 0. \quad (120)$$

Теперь вычислим потенциал второго порядка. Подставляя значение $\cos \psi$ (118) в формулу (116), находим

$$V_2 = \frac{f}{2r^3} \left[u^2 \int_M (3\bar{u}^2 - R^2) dm + v^2 \int_M (3\bar{v}^2 - R^2) dm + w^2 \int_M (3\bar{w}^2 - R^2) dm + 6uv \int_M \bar{u}\bar{v} dm + 6uw \int_M \bar{u}\bar{w} dm + 6vw \int_M \bar{v}\bar{w} dm \right]. \quad (120)$$

Вычислим потенциал третьего порядка. Исключим в формуле (116) $\cos \psi$ (118) и получим

$$V_3 = \frac{f}{2r^7} \int_M [5(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w})^3 - 3(u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w})R^2 r^2] dm.$$

После несложных преобразований имеем

$$V_3 = \frac{f}{2r^7} \int_M [(5\bar{u}^3 - 3\bar{u}R^2)u^3 + (5\bar{v}^3 - 3\bar{v}R^2)v^3 + (5\bar{w}^3 - 3\bar{w}R^2)w^3 + (15\bar{v}\bar{u}^2 - 3\bar{v}R^2)u^2v + (15\bar{w}\bar{u}^2 - 3\bar{w}R^2)u^2w + (15\bar{u}\bar{v}^2 - 3\bar{u}R^2)uv^2 + (15\bar{u}\bar{w}^2 - 3\bar{u}R^2)uw^2 + (15\bar{v}\bar{w}^2 - 3\bar{v}R^2)v^2w + (15\bar{w}\bar{v}^2 - 3\bar{w}R^2)vw^2 + 30\bar{u}\bar{v}\bar{w}uvw] dm. \quad (121)$$

Пользуясь вышеуказанными правилами, можно вычислить потенциал притяжения любого порядка. В монографии [11] представлены потенциалы притяжения в декартовых координатах с 4-го по 8-й порядок включительно.

2.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА

Моменты первого, второго и более высоких порядков отражают распределение масс в планетарном теле. По их величинам и изменениям во времени можно судить о распределении и перемещении масс в теле. По известным значениям моментов инерции планетарного тела можно вычислить его потенциал притяжения для любой точки внешнего пространства, а также решить обратную задачу: по известным значениям потенциала притяжения во внешнем пространстве определить моменты инерции планетарного тела.

Для решения поставленной задачи воспользуемся ранее выведенными формулами (119)–(121) и определениями из механики. Обозначим через

$$I_{100} = \int_M \bar{u} dm; \quad I_{010} = \int_M \bar{v} dm; \quad I_{001} = \int_M \bar{w} dm \quad (122)$$

статические моменты планетарного тела.

С учетом (119) и (122) имеем выражение

$$V_1 = f(uI_{100} + vI_{010} + \omega I_{001})/r^3, \quad (123)$$

представляющее связь потенциала притяжения первого порядка и статических моментов. Исключая декартовы координаты при помощи формул (см. рис. 1)

$$u = r \cos \varphi \cos \lambda; \quad v = r \cos \varphi \sin \lambda; \quad \omega = r \sin \varphi, \quad (124)$$

получим выражение для потенциала притяжения в полярных координатах

$$V_1 = f(I_{100} \cos \varphi \cos \lambda + I_{010} \cos \varphi \sin \lambda + I_{001} \sin \varphi)/r^2. \quad (125)$$

По определению из механики $I_{100} = u_0 M$; $I_{010} = v_0 M$; $I_{001} = \omega_0 M$. Следовательно,

$$V_1 = fM(u_0 \cos \varphi \cos \lambda + v_0 \cos \varphi \sin \lambda + \omega_0 \sin \varphi)/r^2. \quad (126)$$

Если начало координат совмещено с центром инерции, т. е. $u_0 \equiv v_0 \equiv \omega_0 \equiv 0$, тогда $I_{100} \equiv I_{010} \equiv I_{001} \equiv 0$ и потенциал первого порядка $V_1 = 0$.

Моменты порядка $n \geq 2$ определим интегралом

$$I_{pqs} = \int_M \bar{u}^p \bar{v}^q \bar{\omega}^s dm, \quad (127)$$

где p, q, s — целые положительные числа, удовлетворяющие условию $p + q + s = n$.

Тогда в формуле (120) для потенциала V_2

$$\begin{aligned} 2U_{200} &= \int_M (3\bar{u}^2 - R^2) dm = 2I_{200} - I_{020} - I_{002}; \\ 2U_{020} &= \int_M (3\bar{v}^2 - R^2) dm = -I_{200} + 2I_{020} - I_{002}; \\ 2U_{002} &= \int_M (3\bar{\omega}^2 - R^2) dm = -I_{200} - I_{020} + 2I_{002}; \end{aligned} \quad (128)$$

$$U_{110} = \int_M \bar{u} \bar{v} dm = I_{110}; \quad U_{101} = \int_M \bar{u} \bar{\omega} dm = I_{101}; \quad U_{011} = \int_M \bar{v} \bar{\omega} dm = I_{011}.$$

Число независимых коэффициентов гармонического многочлена (120) $2n + 1 = 5$. Следовательно к 6 уравнениям (128) необходимо добавить условие

$$U_{200} + U_{020} + U_{002} = 0. \quad (129)$$

Таким образом, потенциал второго порядка V_2 (120) с учетом формул (128) и (129) имеет вид

$$V_2 = f[(u^2 - v^2)U_{200} + (v^2 - \omega^2)U_{020} + 3u\omega U_{110} + 3uv U_{101} + 3v\omega U_{011}]/r^5. \quad (130)$$

Заменив в последней формуле декартовы координаты полярными (124), после несложных преобразований получим

$$V_2 = \iint (U_{200} + U_{020})(1 - 3\sin^2\varphi) + 6(U_{101}\cos\lambda + U_{011}\sin\lambda)\cos\varphi\sin\varphi + (U_{200} - U_{020})\cos 2\lambda\cos^2\varphi + 3U_{110}\sin 2\lambda\cos^2\varphi / 2r^3. \quad (131)$$

В потенциал притяжения третьего порядка (121) введем гармонические коэффициенты как функции моментов инерции третьего порядка I_{pqs} ($p + q + s = 3$). Эти гармонические коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{111} &= 15 \int_M \bar{u}\bar{v}\bar{w} dm = 15I_{111}; \\ 2U_{300} &= \int_M (5\bar{u}^2 - 3R^2)\bar{u} dm = 2I_{300} - 3I_{120} - 3I_{102}; \\ 2U_{120} &= \int_M (15\bar{v}^2 - 3R^2)\bar{u} dm = -3I_{300} + 12I_{120} - 3I_{102}; \\ 2U_{102} &= \int_M (15\bar{w}^2 - 3R^2)\bar{u} dm = -3I_{300} - 3I_{120} + 12I_{102}; \\ 2U_{030} &= \int_M (5\bar{v}^2 - 3R^2)\bar{v} dm = 2I_{030} - 3I_{210} - 3I_{012}; \\ 2U_{210} &= \int_M (15\bar{u}^2 - 3R^2)\bar{v} dm = -3I_{030} + 12I_{210} - 3I_{012}; \\ 2U_{012} &= \int_M (15\bar{u}^2 - 3R^2)\bar{v} dm = -3I_{030} - 3I_{210} + 12I_{012}; \\ 2U_{003} &= \int_M (5\bar{w}^2 - 3R^2)\bar{w} dm = 2I_{003} - 3I_{201} - 3I_{021}; \\ 2U_{201} &= \int_M (15\bar{u}^2 - 3R^2)\bar{w} dm = -3I_{003} + 12I_{201} - 3I_{021}; \\ 2U_{021} &= \int_M (15\bar{v}^2 - 3R^2)\bar{w} dm = -3I_{003} - 3I_{201} + 12I_{021}. \end{aligned} \quad (132)$$

Число независимых коэффициентов (132) гармонического многочлена $2n + 1 = 7$. Следовательно к 10 уравнениям (132) необходимо добавить 3 условия. Исходя из формул (132), нетрудно записать следующие условия:

$$\begin{aligned} 3U_{300} + U_{120} + U_{102} &= 0; \\ U_{210} + 3U_{030} + U_{012} &= 0; \\ U_{201} + U_{021} + 3U_{003} &= 0. \end{aligned} \quad (133)$$

Таким образом, потенциал V_3 (121) с учетом формул (132) и (133) имеет вид

$$V_3 = \iint U_{120}(3uv^2 - u^3) + U_{102}(3u\omega^2 - u^3) + U_{210}(3u^2v - v^3) + U_{012}(3v\omega^2 - v^3) + U_{201}(3u^2\omega - \omega^3) + U_{021}(3v^2\omega - \omega^3) + 3U_{111}uv\omega / 3r^7. \quad (134)$$

Заменяв в последней формуле декартовы координаты полярными (124), после несложных преобразований получим

$$V_3 = f[30(U_{201} + U_{021})(3\sin\varphi - 5\sin^3\varphi) + 45(U_{102}\cos\lambda + U_{012}\sin\lambda) \times \\ \times (5\sin^2\varphi - 1)\cos\varphi + 90((U_{201} - U_{021})\cos 2\lambda + U_{111}\sin 2\lambda)\sin\varphi\cos^2\varphi - \\ - 15((4U_{120} + U_{102})\cos 3\lambda - (4U_{210} + U_{012})\sin 3\lambda)\cos^3\varphi]/180r^4. \quad (135)$$

В разложениях потенциалов V_2 (131) и V_3 (135) гармонические коэффициенты U_{pqs} представляют линейные комбинации моментов инерции I_{pqs} , вычисляемые по формулам (128) и (132). Изучая закономерность построения этих формул, замечаем, что их можно представить в матричной форме

$$U_n = A_n I_n, \quad (136)$$

где матрица A_n представляет симметричную клеточно-диагональную, состоящую из 4 симметричных матриц A_{n0} , $A_{n1} = A_{n2} = A_{n3}$, т. е.

$$A_n = \{A_{n0}, A_{ni} (i = 1, 2, 3)\}. \quad (137)$$

Из формул (128) с учетом (136) и (137) следует, что

$$A_{20} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_{2i} = 1, \quad (138)$$

если гармонические коэффициенты (моменты инерции) составлены в последовательности U_2/I_2 (200, 020, 002, 110, 101, 011), принятой в формулах (128).

Матрица A_2 имеет размеры 6×6 и ранг $r = 5$. Для потенциала (135), если гармонические коэффициенты (моменты инерции) составить в той последовательности, как это принято в формулах (132), то матрица A_3 (10×10) будет состоять из 4 клеточно-диагональных матриц

$$A_{30} = 15; \quad A_{3i} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{bmatrix}. \quad (139)$$

При этом ранг матрицы A_3 будет $r = 7$.

Выполнив необходимые расчеты с учетом формул (113), (116), (125), (131), (135), (138) и (139), получим выражения для потенциалов притяжения V_n ($n = 0, 1, 2, 3$) в виде

$$V_0 = fM/r; \quad V_1 = -\frac{fM}{r} \left(\frac{ae}{r} \right) [I_1 \sin\varphi + (I_{11} \cos\lambda + K_{11} \sin\lambda) \cos\varphi]; \\ V_2 = -\frac{fM}{r} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (3\sin^2\varphi - 1) I_2 + 3\sin\varphi \cos\varphi (I_{21} \cos\lambda + K_{21} \sin\lambda) + \right. \\ \left. + 3\cos^2\varphi (I_{22} \cos 2\lambda + K_{22} \sin 2\lambda) \right];$$

$$V_3 = -\frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right) \left[\frac{1}{2} (5\sin^3 \varphi - 3\sin \varphi) I_3 + \frac{3}{2} (5\sin^2 \varphi - 1) \cos \varphi \times \right. \\ \times (I_{31} \cos \lambda + K_{31} \sin \lambda) + 15\sin \varphi \cos^2 \varphi (I_{32} \cos 2\lambda + K_{32} \sin 2\lambda) + 5\cos^3 \varphi \times \\ \left. \times (I_{33} \cos 3\lambda + K_{33} \sin 3\lambda) \right], \quad (140)$$

где $I_{1e} a_e M = -I_{001}$; $I_{11} a_e M = -I_{100}$; $K_{11} a_e M = -I_{010}$;

$$I_{2e} a_e^2 M = -I_{002} + \frac{1}{2} I_{020} + \frac{1}{2} I_{200}; \quad I_{21} a_e^2 M = -I_{101}; \quad K_{21} a_e^2 M = -I_{011};$$

$$I_{22} a_e^2 M = \frac{1}{4} (I_{020} - I_{200}); \quad K_{22} a_e^2 M = -\frac{1}{2} I_{110};$$

$$I_{3e} a_e^3 M = -I_{003} + \frac{3}{2} I_{201} + \frac{3}{2} I_{021};$$

$$I_{31} a_e^3 M = -I_{102} + \frac{1}{4} (I_{300} + I_{120}); \quad K_{31} a_e^3 M = -I_{012} + \frac{1}{4} (I_{030} + I_{210});$$

$$I_{32} a_e^3 M = \frac{1}{4} (I_{021} - I_{201}); \quad K_{32} = -\frac{1}{2} I_{111}; \quad (141)$$

$$I_{33} a_e^3 M = \frac{1}{24} (3I_{120} - I_{300}); \quad K_{33} a_e^3 M = -\frac{1}{24} (3I_{210} - I_{030}).$$

Безразмерные гармонические коэффициенты I_{nm} и K_{nm} , помноженные на $a_e^n M$ (где a_e — экваториальный радиус; M — масса планетарного тела), называются стоксовыми постоянными.

В монографии [11] операции, подобные (123)–(141), выполнены для потенциалов более высоких порядков. В прил. 1 и 2 представлены коэффициенты α_{pqs} , β_{pqs} ($p+q+s=n$), с помощью которых можно вычислить гармонические коэффициенты I_{nm} , K_{nm} по формулам

$$I_{nm} a_e^n M = \sum \alpha_{pqs} I_{pqs}; \quad (142)$$

$$K_{nm} a_e^n M = \sum \beta_{pqs} I_{pqs},$$

подставляя известные значения моментов инерции I_{pqs} планетарного тела.

Формулы (141) и коэффициенты α_{pqs} , β_{pqs} (прил. 1, 2) получены путем преобразования декартовых координат u , v , w в полярные координаты r , φ , λ и замены гармонических коэффициентов U_n на моменты инерции I_n (136). Г. А. Мещеряков и М. М. Фыс предложили оригинальный способ раскрытия сумм (142). Однако приведенные ими формулы для вычисления коэффициентов α_{pqs} и β_{pqs} имеют погрешности, обусловленные неполным учетом связей в матрице преобразования A_n (136). Ошибки в вычислениях коэффициентов α_{pqs} и β_{pqs} появляются при $n > 5$ и число их растет по мере возрастания степени n разложения потенциала притяжения.

Формулы для вычисления α_{pqs} и β_{pqs} , строго учитывающие все элементы матрицы A_n в выражении (136), имеют вид

0, если $s > (n - m)$, или $(n - m - s)$ — нечетное, или $(p - m)$ — нечетное, или если $p \neq 2i - 2j + m$ для всех $0 \leq i \leq l$, $0 \leq j \leq E\left(\frac{m}{2}\right)$;

$$\alpha_{pqs} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \binom{m}{p} \left[\frac{(2n)!}{2^n(n+m)!n!} + \frac{(2n)!(n-m)!}{2^n(2n-1)!(n+m)!n!} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{\tilde{n}-\tilde{m}}{2}\right)} (-1)^k \times \right. \\ \left. \times \frac{(2n-2k-1)!!}{(2k)!(n-m-2k)!} \right], \text{ если } s = n - m, p < m, (p - m) \text{ — четное;} \\ \delta \frac{(2n)!(n-m)!}{(n+m)!2^n(2n-1)!n!} \sum_{k=l}^{E\left(\frac{\tilde{n}-\tilde{m}}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2\tilde{n}-2k-1)!!}{(2k)!(n-m-2k)!} \binom{k}{l} \times \\ \times \sum_{\substack{p=2i-2j+m \\ 0 \leq i \leq l \\ 0 \leq j \leq E\left(\frac{m}{2}\right)}} (-1)^j \binom{l}{i} \binom{m}{2j}, \text{ если } s < (n - m), (p - m) \text{ — четное,} \end{array} \right. \quad (143)$$

$$\beta_{pqs} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } s > (n - m), \text{ или } (n - m - s) \text{ — нечетное, или } (p - m) \text{ —} \\ \text{четное, или } p \neq 2i - 2j + m - 1 \text{ для всех } 0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq m - \\ - E\left(\frac{m}{2}\right); \\ \delta \binom{m}{p} \left[\frac{(2n)!}{2^n(n+m)!n!} + \frac{(2n)!(n-m)!}{2^n(2n-1)!(n+m)!n!} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)} (-1)^k \times \right. \\ \left. \times \frac{(2n-2k-1)!!}{(2k)!(n-m-2k)!} \right], \text{ если } s = n - m, (p - m) \text{ — нечетное;} \\ \delta \frac{(2n)!(n-m)!}{(n+m)!2^n(2n-1)!n!} \sum_{k=l}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2n-2k-1)!!}{(2k)!(n-m-2k)!} \binom{k}{l} \times \\ \times \sum_{\substack{p=2i-2j+m-1 \\ 0 \leq i \leq l \\ 0 \leq j \leq E\left(\frac{m}{2}\right)}} \binom{l}{i} \binom{m}{2j+1}, \text{ если } s < (n - m), (p - m) \text{ — нечет-} \\ \text{ное,} \end{array} \right. \quad (144)$$

где $l = E\left(\frac{n-m-s}{2}\right)$; $\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ 2 & \text{при } m \neq 0 \end{cases}$

Заметим, что коэффициент α_{pqs} при значениях степени первой координаты $p = 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23..$ меняет знак на противоположный. Кроме того, последняя сумма в формуле β_{pqs} (144) вычисляется следующим образом

$$p = 2i - 2j + m - 1 \sum_{l \leq i \leq 0} (-1)^j \binom{l}{i} \binom{m}{2j+1}, \text{ если } m > 2. \quad (145)$$

$$E\left(\frac{m}{2}\right) \leq j \leq 0$$

С помощью формул (142)—(145) для гармонических коэффициентов I_{nm} , K_{nm} можно получить разложения относительно моментов инерции I_{pqs} любой степени.

Полученные разложения потенциала притяжения и уравнения, связывающие гармонические коэффициенты потенциала и моменты инерции планетарного тела, можно использовать для изучения распределения масс в планетарном теле, моделирования его внутреннего строения, изучения гравитационной и динамической фигур Земли и других планет, перемещения центра масс и движения полюсов, ряда планетодинамических явлений.

Модель внутреннего строения Земли не только имеет геофизическое значение, но она необходима в геодезии для строгого решения редуцированных задач, построения уровенных поверхностей силы притяжения и тяжести, для представления массы планетарных тел точечными массами. Последняя нетрадиционная для геодезии задача все более выдвигается на передний план, во-первых, из-за потребностей повседневной практики прогнозирования движения космических объектов и необходимости для этой цели иметь различные референчные модели внешнего гравитационного поля планетарных тел; во-вторых, из-за актуальности проблемы создания общей теории Земли, которая может быть использована при изучении других планет Солнечной системы.

Если известно внутреннее строение планетарного тела, то по формуле (127) можно вычислить моменты инерции I_{pqs} и затем с помощью выражений (142)—(145) — гармонические коэффициенты I_{nm} и K_{nm} ($n = p + q + s$).

Имея список гармонических коэффициентов I_{nm} , K_{nm} , можно вычислить потенциалы притяжения планетарного тела V_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Если для множества точек пространства известны потенциалы притяжения планетарного тела, то по формулам типа (140) и (141) можно вычислить моменты инерции I_{pqs} ($p + q + s = n$). Например, для вычисления 10 моментов инерции третьего порядка необходимо знать значения V_3 для 10 точек пространства с координатами r_i , φ_i , λ_i ($i = 1, 2, \dots, 10$). На практике следует иметь число точек $N > 10$. В этом случае несовместная система линейных уравнений (140) решается методом наименьших квадратов и определяются 10 моментов инерции третьего порядка с соответствующими оценками их точности и тесноты корреляции.

Если известны первые гармонические коэффициенты, то известны и координаты центра инерции. В действительности

$$\begin{aligned} I_{001} &= \omega_0 M = -a_e M I_1; & \omega_0 &= -a_e I_1; \\ I_{010} &= v_0 M = -a_e M K_{11}; & v_0 &= -a_e K_{11}; \\ I_{100} &= u_0 M = -a_e M I_{11}; & u_0 &= -a_e I_{11}. \end{aligned}$$

Преобразуя формулы (141) для вторых моментов, получим

$$\begin{aligned} I_{200} - I_{020} &= -4I_{22}a_e^2 M; & I_{200} - I_{002} &= (I_2 - 2I_{22})a_e^2 M; \\ I_{020} - I_{020} &= (I_2 + 2I_{22})a_e^2 M; & I_{110} &= -2K_{22}a_e^2 M; \\ I_{101} &= -I_{21}a_e^2 M; & I_{011} &= -K_{21}a_e^2 M. \end{aligned} \quad (146)$$

Введем моменты инерции относительно осей координат

$$\begin{aligned}
 A &= \int_M (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) dm; \quad D = \int_M \bar{v} \bar{w} dm; \\
 B &= \int_M (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) dm; \quad E = \int_M \bar{u} \bar{w} dm; \\
 C &= \int_M (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) dm; \quad F = \int_M \bar{u} \bar{v} dm.
 \end{aligned} \tag{147}$$

Пользуясь выражениями (143) и (144), получим формулы для моментов инерции A, B, C, D, E, F , выраженные через безразмерные коэффициенты

$$\begin{aligned}
 C - A &= (I_2 - 2I_{22}) a_e^2 M; \quad C - B = (I_2 + 2I_{22}) a_e^2 M; \\
 D &= -K_{21} a_e^2 M; \quad E = -I_{21} a_e^2 M; \quad F = -2K_{22} a_e^2 M; \quad A - B = 4I_{22} a_e^2 M.
 \end{aligned} \tag{148}$$

Введя параметр динамического сжатия

$$H = \left(C - \frac{A+B}{2} \right) / C \tag{149}$$

для моментов инерции относительно осей u, v, w , получим

$$\begin{aligned}
 C &= a_e^2 M I_2 / H; \quad B = C(1 - H - 2HI_{22}/I_2); \\
 A &= C(1 - H + 2HI_{22}/I_2).
 \end{aligned} \tag{150}$$

Сравнивая формулы (140), (141), (143) и (145), получим выражение

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{f}{r^3} \left[\frac{2C - (A+B)}{4} (1 - 3\sin^2 \varphi) + 3(E \cos \lambda + D \sin \lambda) \sin \varphi \cos \varphi + \right. \\
 &\left. + \frac{3}{2} \left(\frac{B-A}{2} \cos 2\lambda + F \sin 2\lambda \right) \cos^2 \varphi \right]
 \end{aligned} \tag{151}$$

для потенциала второго порядка V_2 относительно моментов инерции A, B, C, D, E и F .

2.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА ЧЕРЕЗ ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ЛЕЖАНДРА

Введем функцию Лежандра $P_{nm}(\mu)$ — лежандриан степени n и порядка m , вычисляемую с помощью формулы

$$P_{nm}(\mu) = \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \cos^m \varphi; \quad \mu = \sin \varphi. \tag{152}$$

Для частного случая $m = 0$ лежандрианы нулевого порядка являются функциями синуса геоцентрической широты различных степеней n , вычисленные по формуле (115), в зависимости от степени n имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1; P_1 = \mu; P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1); P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu); \\
P_4 &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3); P_5 = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu); \\
P_6 &= \frac{1}{32}(462\mu^6 - 630\mu^4 + 210\mu^2 - 10); \\
P_7 &= \frac{1}{32}(858\mu^7 - 1386\mu^5 + 630\mu^3 - 70\mu); \\
P_8 &= \frac{1}{128}(6435\mu^8 - 12012\mu^6 + 6930\mu^4 - 1260\mu^2 + 35); \\
P_9 &= \frac{1}{128}(12155\mu^9 - 25740\mu^7 + 18018\mu^5 - 4620\mu^3 + 315\mu); \\
P_{10} &= \frac{1}{256}(46189\mu^{10} - 109395\mu^8 + 90090\mu^6 - 30030\mu^4 + 3465\mu^2 - 63).
\end{aligned} \tag{153}$$

Присоединенные функции Лежандра $P_{nm}(\mu)$ при $m \neq 0$ получим последовательным дифференцированием лежандрянов нулевого порядка (153) по формуле (152). Ниже приводятся значения присоединенных функций Лежандра до 10 порядка в функции косинуса и синуса геоцентрической широты:

$$\begin{aligned}
P_{1.1} &= \cos \varphi; P_{2.1} = 3\mu \cos \varphi; P_{2.2} = 3\cos^2 \varphi; \\
P_{3.1} &= \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1)\cos \varphi; P_{3.2} = 15\mu \cos^2 \varphi; P_{3.3} = 15\cos^3 \varphi; \\
P_{4.1} &= \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3)\cos \varphi; P_{4.2} = \frac{15}{2}(7\mu^2 - 1)\cos^2 \varphi; \\
P_{4.3} &= 105\mu \cos^3 \varphi; P_{4.4} = 105\cos^4 \varphi; \\
P_{5.1} &= \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1)\cos \varphi; \\
P_{5.2} &= \frac{105}{2}\mu(3\mu^2 - 1)\cos^2 \varphi; P_{5.3} = \frac{105}{2}(9\mu^2 - 1)\cos^3 \varphi; \\
P_{5.4} &= 945\mu \cos^4 \varphi; P_{5.5} = 945\cos^5 \varphi; \\
P_{6.1} &= \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5)\cos \varphi; P_{6.2} = \frac{105}{8}(33\mu^4 - 18\mu^2 + 1)\cos^2 \varphi; \\
P_{6.3} &= \frac{315}{2}\mu(11\mu^2 - 3)\cos^3 \varphi; P_{6.4} = \frac{945}{2}(11\mu^2 - 1)\cos^4 \varphi; \\
P_{6.5} &= 10395\mu \cos^5 \varphi; P_{6.6} = 10395\cos^6 \varphi; \\
P_{7.1} &= \frac{7}{16}(429\mu^6 - 495\mu^4 + 135\mu^2 - 5)\cos \varphi; \\
P_{7.2} &= \frac{63}{8}\mu(143\mu^4 - 110\mu^2 + 15)\cos^2 \varphi;
\end{aligned}$$

$$P_{7.3} = \frac{315}{8}(143\mu^4 - 66\mu^2 + 3)\cos^3 \varphi; \quad P_{7.4} = \frac{3465}{2}\mu(13\mu^2 - 3)\cos^4 \varphi;$$

$$P_{7.5} = \frac{10\,395}{2}(13\mu^2 - 1)\cos^5 \varphi;$$

$$P_{7.6} = 135\,135\mu\cos^6 \varphi; \quad P_{7.7} = 135\,135\cos^7 \varphi;$$

$$P_{8.1} = \frac{9}{16}\mu(715\mu^6 - 1001\mu^4 + 385\mu^2 - 35)\cos \varphi;$$

$$P_{8.2} = \frac{315}{16}(143\mu^6 - 143\mu^4 + 33\mu^2 - 1)\cos^2 \varphi;$$

$$P_{8.3} = \frac{3465}{8}\mu(39\mu^4 - 26\mu^2 + 3)\cos^3 \varphi;$$

$$P_{8.4} = \frac{10\,395}{8}(65\mu^4 - 26\mu^2 + 1)\cos^4 \varphi; \quad P_{8.5} = \frac{135\,135}{2}\mu(5\mu^2 - 1)\cos^5 \varphi;$$

$$P_{8.6} = \frac{135\,135}{2}(5\mu^2 - 1)\cos^6 \varphi;$$

$$P_{8.7} = 2\,027\,025\mu\cos^7 \varphi; \quad P_{8.8} = 2\,027\,025\cos^8 \varphi;$$

$$P_{9.1} = \frac{9}{128}(12\,155\mu^8 - 20\,020\mu^6 + 10\,010\mu^4 - 1540\mu^2 + 35)\cos \varphi;$$

$$P_{9.2} = \frac{45}{16}(2431\mu^7 - 3003\mu^5 + 1001\mu^3 - 77\mu)\cos^2 \varphi;$$

$$P_{9.3} = \frac{3465}{16}(221\mu^6 - 195\mu^4 + 39\mu^2 - 1)\cos^3 \varphi;$$

$$P_{9.4} = \frac{10\,395}{8}(221\mu^5 - 130\mu^3 + 13\mu)\cos^4 \varphi;$$

$$P_{9.5} = \frac{135\,135}{8}(85\mu^4 - 30\mu^2 + 1)\cos^5 \varphi;$$

$$P_{9.6} = \frac{675\,675}{2}(17\mu^3 - 3\mu)\cos^6 \varphi; \quad P_{9.7} = \frac{2\,027\,025}{2}(17\mu^2 - 1)\cos^7 \varphi;$$

$$P_{9.8} = 34\,459\,425\mu\cos^8 \varphi; \quad P_{9.9} = 34\,459\,425\cos^9 \varphi;$$

$$P_{10.1} = \frac{5}{128}(46\,189\mu^9 - 87\,516\mu^7 + 54\,054\mu^5 - 12\,012\mu^3 + 693\mu)\cos \varphi;$$

$$P_{10.2} = \frac{45}{128}(46\,189\mu^8 - 68\,068\mu^6 + 30\,030\mu^4 - 4004\mu^2 + 77)\cos^2 \varphi;$$

$$P_{10.3} = \frac{45}{16}(46\,189\mu^7 - 51\,051\mu^5 + 15\,015\mu^3 - 1001\mu)\cos^3 \varphi;$$

$$P_{10.4} = \frac{3465}{16}(4199\mu^6 - 3315\mu^4 + 585\mu^2 - 13)\cos^4 \varphi;$$

$$P_{10.5} = \frac{10\,395}{8}(4199\mu^5 - 2210\mu^3 + 195\mu)\cos^5 \varphi;$$

$$P_{10.6} = \frac{51\,975}{8}(4199\mu^4 - 1326\mu^2 + 39)\cos^6 \varphi;$$

$$P_{10.7} = \frac{51\,975}{8}(4199\mu^3 - 663\mu)\cos^7 \varphi; \quad P_{10.8} = \frac{155\,925}{2}(4199\mu^2 - 221)\cos^8 \varphi;$$

$$P_{10.9} = 654\,729\,075\mu\cos^9 \varphi; \quad P_{10.10} = 654\,729\,075\cos^{10} \varphi. \quad (154)$$

Сравнивая формулы (140), (141) и (154), находим, что потенциал планетарного тела можно представить через полярные координаты по сферическим функциям Лежандра в форме

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (I_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\mu) \right]. \quad (155)$$

Члены нулевого порядка $I_n P_n(\mu)$ ($m=0$) называются зональными гармониками; остальные члены, для которых $m \neq 0$, называются незональными гармониками. Незональные гармоники подразделяются на секториальные, если $m=n$, и тессеральные гармоники, если $m \neq n$. Безразмерные величины I_n называются зональными гармоническими коэффициентами, I_{nm} и K_{nm} ($m \neq 0$) — незональными гармоническими коэффициентами.

Таким образом, нами найдено обоснование разложения гармонической функции V по сферическим функциям. Гармонические коэффициенты зависят от принятой системы координат, распределения масс в планетарном теле и принятых масштабов — экваториального радиуса a_e и массы M планетарного тела.

В некоторых случаях пользуются безразмерными коэффициентами

$$I'_{nm} = \sqrt{I_{nm}^2 + K_{nm}^2}. \quad \text{Тогда}$$

$$I_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda = I'_{nm}\cos m(\lambda - \lambda_{nm}); \quad (156)$$

$$m\lambda_{nm} = \arctg K_{nm}/I_{nm}.$$

Коэффициент I'_{nm} имеет значение амплитуды, а λ_{nm} — фазы. Разложение (152) через новые параметры будет представлено таким образом, что

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n I'_{nm}\cos m(\lambda - \lambda_{nm}) P_{nm}(\mu) \right]. \quad (157)$$

С возрастанием порядка у сферических функций растут и числовые коэффициенты. Это создает трудности в вычислениях. Поэтому вводят множитель N_{nm} , нормирующий элементарную сферическую функцию таким образом, чтобы на поверхности сферы средняя величина ее квадрата была равна 1, т. е. нормирующий множитель должен удовлетворять условию

$$\left[N_{nm} P_{nm}(\mu) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda} \right]^2 = 1.$$

Указанное условие удовлетворяется только тогда, когда

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{\nu(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} \begin{cases} \nu = 1, & \text{если } m = 0, \\ \nu = 2, & \text{если } m \neq 0. \end{cases} \quad (158)$$

Функции Лежандра $P_{nm}(\mu)$, умноженные на норму N_{nm} , называются нормированными и помечаются чертой сверху $\bar{P}_{nm}(\mu) = N_{nm}P_{nm}(\mu)$.

Если применять нормированные функции $\bar{P}_{nm}(\mu)$, то гармонические коэффициенты разложения I_{nm} , K_{nm} необходимо разделить на ту норму N_{nm} , на которую были умножены функции Лежандра. Если их тоже пометить чертой сверху, то

$$\bar{I}_{nm} = N_{nm}^{-1}I_{nm}; \quad \bar{K}_{nm} = N_{nm}^{-1}K_{nm}. \quad (159)$$

Таким образом, формулу (155) напомним через нормированные величины

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (\bar{I}_{nm} \cos m\lambda + \bar{K}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\mu) \right]. \quad (160)$$

Значения коэффициентов $r_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}}$ и $N_n = \sqrt{2n+1}$ для нормирования функции Лежандра до десятого порядка приведены в табл. 1 и 2.

Нормированные функции Лежандра с помощью данных таблицы следует вычислять по формулам

$$\bar{P}_n(\mu) = N_n P_n(\mu); \quad \bar{P}_{nm}(\mu) = r_{nm}^{-1} N_n P_{nm}(\mu). \quad (161)$$

Нормированные гармонические коэффициенты разложения соответственно будут вычислены по формулам

$$\bar{I}_n = N_n^{-1} I_n; \quad \bar{I}_{nm} = r_{nm} N_n^{-1} I_{nm}; \quad \bar{K}_{nm} = r_{nm} N_n^{-1} K_{nm}. \quad (162)$$

Часто, введя обозначения $I_{nm} = -C_{nm}$, $K_{nm} = -S_{nm}$, разложение потенциала записывают в форме

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\mu) \right]. \quad (163)$$

Если сферические функции нормированы, то

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\mu) \right]. \quad (164)$$

Потенциал планетарного тела эллипсоидальной формы с массой M всегда меньше потенциала шара такой же массы, т. е. $V < fM/r$. Поэтому наибольший гармонический коэффициент $I_2 > 0$ (для Земли $I_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$). Естественно, исходя из физической сущности потенциала притяжения планетарного тела, следует пользоваться разложениями (155) и (160), выведенными из условия $I_2 > 0$.

Таблица 1

| n | $m = 1$ | $m = 2$ | $m = 3$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 1,000 000 000 | | |
| 2 | 1,732 050 807 | 3,464 101 615 | |
| 3 | 2,449 489 742 | 7,745 966 692 | 18,973 665 96 |
| 4 | 3,162 277 660 | 13,416 407 66 | 50,199 601 59 |
| 5 | 3,872 983 346 | 20,493 901 53 | 100,399 203 1 |
| 6 | 4,582 575 694 | 28,982 753 49 | 173,896 520 9 |
| 7 | 5,291 502 622 | 38,884 444 19 | 274,954 541 6 |
| 8 | 6,000 000 000 | 50,199 601 59 | 407,823 491 2 |
| 9 | 6,708 203 932 | 62,928 530 89 | 576,749 512 3 |
| 10 | 7,416 198 487 | 77,071 395 47 | 785,977 098 9 |
| n | $m = 4$ | $m = 5$ | $m = 6$ |
| 4 | 141,985 914 7 | | |
| 5 | 425,957 744 3 | 1 346,996 659 | |
| 6 | 952,470 471 9 | 4 467,482 512 | 15 475,813 38 |
| 7 | 1823,842 098 | 10 943,052 59 | 55 798,838 69 |
| 8 | 3158,987 179 | 22 779,780 50 | 147 629,850 6 |
| 9 | 5093,713 772 | 42 617,067 00 | 330 110,381 5 |
| 10 | 7780,776 310 | 73 814,925 32 | 660 220,763 0 |
| n | $m = 7$ | $m = 8$ | $m = 9$ |
| 7 | 208 780,136 9 | | |
| 8 | 808 601,993 5 | 3 234 407,974 | |
| 9 | 2287 071,811 | 13 335 805,71 | 56 579 031,91 |
| 10 | 5444 319,884 | 40 007 417,14 | 246 622 282,4 |
| n | $m = 10$ | | |
| 10 | 1 102 928 376 | | |

Таблица 2

| n | N_n | n | N_n |
|-----|---------------|-----|---------------|
| 1 | 1,732 050 807 | 6 | 3,605 551 275 |
| 2 | 2,236 067 977 | 7 | 3,872 983 346 |
| 3 | 2,645 751 311 | 8 | 4,123 105 625 |
| 4 | 3,000 000 000 | 9 | 4,358 898 943 |
| 5 | 3,316 624 790 | 10 | 4,582 575 694 |

2.5. УСЛОВИЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ТОЧЕЧНЫХ МАСС

В предыдущих параграфах были рассмотрены способы представления планетарного гравитационного потенциала. Среди них одно из первых мест занимают два способа: разложение по сферическим гармоникам и представление с помощью моментов инерции. Разложение по сферическим гармоникам как наиболее традиционный способ находит широкое применение. Однако этот способ имеет недостатки, из-за которых его дальнейшее применение будет ограничиваться. Рассмотрим существенные несовершенства разложения гравитационного потенциала по сферическим гармоникам: 1) трудность оценки общего члена и необходимость удерживания большого числа гармоник из-за медленной сходимости ряда (для представления деталей в 1° на геоиде потребуется учитывать разложения 180-й степени и 180-го порядка); 2) при уточнении модели гравитационного потенциала приходится вычислять всю совокупность коэффициентов разложения, решая плохо обусловленные уравнения высокого порядка; 3) при вычислении орбит ИСЗ создаются резонансные эффекты; 4) с увеличением степени и порядка гармоник возникают трудности вычислений, обусловленные влиянием ошибок округления; 5) сложность представления потенциала, когда совместно используются наземные гравиметрические измерения, данные спутникового нивелирования и возмущения элементов орбиты ИСЗ.

Гравитационный потенциал используется часто на практике, поэтому представление его в разнообразных формах выдвигается на передний план в изысканиях геодезистов и геофизиков. В решении этой задачи мы будем придерживаться ранее принятой линии. Гравитационный потенциал эллипсоида вращения, обладающего фундаментальными свойствами планетарного тела, примем за нулевое приближение. Его будем уламывать, размещая точечные массы внутри эллипсоида так, чтобы суммарный потенциал эллипсоида и точечных масс с любой наперед заданной точностью совпадал бы с потенциалом планетарного тела. Теоретически всегда можно на поверхности и внутри сферы σ радиуса R_0 расположить конечное число материальных точек с массами dm_j ($j = 1, 2, \dots, N$) так, чтобы их внешний потенциал \bar{U} и внешний потенциал U планетарного тела в каждой точке на поверхности и вне планетарного тела удовлетворял неравенству $|U - \bar{U}| < \varepsilon$ (ε — любая наперед заданная малая величина). Сферическое распределение 126 точечных масс, соответствующее наибольшим аномалиям силы тяжести на поверхности Земли, получил Дж. Бальмино. Он расположил 109 точек на глубине 1300 км, 7 точек — на глубине 1100 км, 5 точек — на глубине 1000 км, три и две точки на глубинах 1500 и 2000 км, соответственно. Можно получить строгое решение задачи и в частном случае, располагая элементарные массы на поверхности одного шара радиуса R_0 . Однако шаровое представление исключает возможность геофизического применения потенциала точечных масс.

Способ разложения потенциала с помощью планетарных точечных масс должен удовлетворять четырем основным условиям: 1) суммарный

потенциал \bar{U} земного эллипсоида и планетарных точечных масс, размещенных в его теле, не должен отличаться от потенциала U планетарного тела не более, чем на любую наперед заданную малую величину ϵ , т. е. соблюдаться условие $|U - \bar{U}| < \epsilon$; 2) размещение планетарных точечных масс должно иметь геофизическую интерпретацию (по геофизическим данным аномальные массы расположены в эллипсоидальных слоях на различных глубинах и неравномерно); 3) моменты инерции планетарного тела, вычисленные по точечным массам и другим независимым путем (например, по стоковым постоянным), должны совпадать в пределах точности их определения; 4) математическая модель точечных масс должна обладать свойством автономности [11].

Поясним четвертое условие на примере гравитационного поля отдельного региона. В этом случае автономная модель без изменения своего планетарного ядра (земной эллипсоид и планетарные точечные массы) улучшается за счет прибавления элементарных масс, размещенных в окрестностях этого конкретного региона.

Исходя из этих условий, рассмотрим в дальнейшем вопросы, относящиеся к потенциалу точечных масс. Рассматриваемые при этом задачи имеют широкое применение в геодезии и геофизике, а также при построении математической модели потенциала точечных масс.

2.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЖАТИЯ СФЕРОИДОВ ВНУТРИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ПЛАНЕТЫ

Уравнение Клеро для гидростатического сфероида с полярным сжатием α и поверхностной плотностью δ

$$r^2 \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + 6r \frac{\delta}{\delta_0} \frac{d\alpha}{dr} - 6 \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0} \right) \alpha = 0 \quad (165)$$

в первом приближении можно заменить уравнением Радо

$$\frac{d}{dr} (\delta_0 r^5 \sqrt{1 + \eta}) - 5\delta_0 r^4 = 0; \quad (166)$$

$$\eta = \frac{d\alpha}{\alpha} / \frac{dr}{r}. \quad (167)$$

В формулах (165) и (166) δ_0 — средняя плотность сфероида. В формуле (167) dr/r заменим на $d\beta/\beta$ ($\beta = r/a_e$). Тогда $d\alpha/\alpha = \eta dr/r$ или $d \ln \alpha = \eta dr/r$. Следовательно

$$\alpha = \alpha_1 \exp \left(- \int_{\beta}^1 \eta \frac{d\beta}{\beta} \right), \quad (168)$$

где α_1 — полярное сжатие внешнего гидростатического сфероида ($\beta = 1$).

Продифференцируем соотношения (166) и преобразуем

$$\frac{d\sqrt{1+\eta}}{dr} + \left(\frac{5}{r} + \frac{1}{\delta_0} \frac{d\delta_0}{dr} \right) \sqrt{1+\eta} = \frac{5}{r}. \quad (169)$$

Определим нулевое приближение $d\delta_0/dr$ из соотношения $\delta_0 = 3M/4\pi r^3$. Изменение плотности будет

$$d\delta_0 = -3\delta_0 \frac{dr}{r}. \quad (170)$$

На основании формул (169) и (170) имеем

$$\frac{d\sqrt{1+\eta}}{dr} + \frac{2}{r} \sqrt{1+\eta} = \frac{5}{r}.$$

Введем параметр $\beta = r/a_e$ и запишем последнее уравнение

$$\frac{d\sqrt{1+\eta}}{d\beta} + \frac{2}{\beta} \sqrt{1+\eta} = \frac{5}{\beta}. \quad (171)$$

Дифференциальное уравнение (171) имеет решение

$$\sqrt{1+\eta} = 1 + (\sqrt{1+\eta_1} - 1)e^{-2 \ln \beta}. \quad (172)$$

Частным решением для внешнего гидростатического сфероида при $\beta = 1$ является $\eta = \eta_1$, которое можно найти из уравнения (166) таким образом, что

$$\delta_0 r^5 \sqrt{1+\eta} \approx 5 \int_0^r \delta(t) t^4 dt. \quad (173)$$

Приближенное решение выражения (173) в виде соотношения

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{C}{Ma_e^2} \right) \quad (174)$$

приводится в монографии по геофизике [13].

Введем динамическое сжатие H планетарного тела. Из выводов (149) и (150) следует, что

$$Ma_e^2 I_2 = C - \frac{A+B}{2},$$

а произведение динамического сжатия на полярный момент инерции равно постоянной величине

$$CH = Ma_e^2 I_2. \quad (175)$$

С учетом формул (174) и (175) получим

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{3}{2} I_2 H^{-1} \right). \quad (176)$$

Приняв для Земли $I_2 = 0,001\,082\,63$, $H = 0,003\,272\,60$, имеем $\eta_1 = 0,5862$. Подставим найденное значение η_1 в уравнение (172), получим формулу

$$\eta = 0,2594e^{-21n\beta}(2 + 0,2594e^{-21n\beta}) \quad (177)$$

для вычисления параметра η гидростатических сфероидов внутри Земли в первом приближении.

Таким образом, задача оценки распределения сжатия гидростатических сфероидов внутри Земли сводится к вычислениям по формулам (168) и (177).

Формула (175) представляет собой зависимость между пятью фундаментальными постоянными планетарного тела. Из этих постоянных в теоретических положениях и математических моделях независимо можно задавать только три, а остальные две — вычисляемые параметры. Если учесть, что пять постоянных формулы (175) и постоянная η_1 используются в астрометрии, геодезии и геофизике, то возникает задача их согласования во всех моделях, применяемых в науках о Земле. В настоящее время четыре параметра в формуле (175) определяются методами геодезии, а динамическое сжатие H — методами астрометрии.

Параметр Радо η_1 , используемый в геофизике (теперь и в геодезии), необходимо согласовать с постоянными I_2 и H по формуле (176).

Формула (172) с учетом соотношения (176) примет вид

$$\sqrt{1+\eta} = 1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{5}{2} I_2 H^{-1} \right) e^{-21n\beta}. \quad (178)$$

Формулу (178) можно использовать для согласования параметра Радо для внутренних гидростатических сфероидов планетарного тела с фундаментальными постоянными I_2 и H . Соотношение (178) между параметрами $\eta(\beta)$, I_2 и H планетарного тела нами получено при некоторых допущениях о распределении его внутренней плотности. Геосейсмические наблюдения могут дать обширный материал для независимых определений $\eta(\beta)$ и распределения сжатия гидростатических сфероидов внутри Земли. Геофизические определения $\eta(\beta)$ можно сравнить с вычисляемыми (178) и проверить адекватность математических моделей о внутреннем строении Земли. Уравнение (178) можно считать первым приближением при построении модели распределения сжатия гидростатических сфероидов и определении расположения аномальных масс в теле Земли.

Уравнения (168), (177) и (178) с учетом закона распределения плотностей можно использовать для вычисления распределения ускорения силы тяжести внутри Земли.

2.7. МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ

При построении модели будем полагать известным распределение плотности $\delta(\beta)$. Для этой цели воспользуемся данными, приведенными в [6]. Поставим задачу вычисления сжатий и масс сфероидических слоев. За внешний сфероид примем эллипсоид вращения с большой полуосью $a_e = 6378,14$ км и полярным сжатием $\alpha_1 = 1/298,257$. Будем полагать, что внутренние сфероида представляют собой эллипсоиды

вращения с полярными сжатиями $\alpha(\beta)$, вычисляемыми с помощью формул (168) и (177). Все оболочки расположены симметрично относительно оси вращения и экватора Земли. Кроме того, поставим условие, чтобы суммарная масса эллипсоидальных оболочек была равна массе Земли.

Результаты вычисления параметров модели внутреннего строения Земли $\alpha(\beta)$, $\eta(\beta)$ и $M(\beta)$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

$$\begin{aligned}
 fM &= 398\,600,15 \text{ км}^3/\text{с}^2 & a &= 6\,378\,140 \text{ м} \\
 f &= 6,673 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3/\text{кгс}^2 & \alpha &= 1/298,257 \\
 M &= 5,973\,327\,588 \cdot 10^{27} \text{ г} & v &= 10,832\,088\,45 \cdot 10^{20} \text{ м}^3 \\
 \delta_0 &= 5,514\,474\,529 \text{ г/см}^3
 \end{aligned}$$

| Номер оболочки | r , км | $1/\alpha$ | δ | 10η | $M \cdot 10^{-26}$, г |
|----------------|----------|------------|----------|-----------|------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 345 | 389,602 | 12,67 | 0,015 185 | 0,021 765 289 |
| 2 | 690 | 389,011 | 12,58 | 0,060 809 | 0,166 006 220 |
| 3 | 1035 | 387,830 | 12,45 | 0,137 080 | 0,406 356 773 |
| 4 | 1380 | 386,062 | 12,28 | 0,244 343 | 0,780 514 386 |
| 5 | 1726 | 383,710 | 12,05 | 0,383 530 | 1,267 180 224 |
| 6 | 2071 | 380,779 | 11,79 | 0,554 460 | 1,844 932 342 |
| 7 | 2416 | 377,277 | 11,46 | 0,758 252 | 2,502 276 831 |
| 8 | 2761 | 373,214 | 11,08 | 0,995 804 | 3,218 934 327 |
| 9 | 3106 | 367,345 | 10,63 | 1,268 152 | 3,982 967 856 |
| 10 | 3451 | 362,207 | 10,10 | 1,576 473 | 4,762 214 227 |
| 11 | 3486 | 361,627 | 5,57 | 1,609 812 | 0,297 626 624 |
| 12 | 3803 | 356,371 | 5,43 | 1,929 489 | 2,902 866 900 |
| 13 | 4120 | 350,686 | 5,27 | 2,281 896 | 3,328 363 720 |
| 14 | 4437 | 344,583 | 5,10 | 2,668 264 | 3,756 903 281 |
| 15 | 4753 | 338,103 | 4,94 | 3,088 536 | 4,183 639 691 |
| 16 | 5070 | 331,210 | 4,78 | 3,546 798 | 4,639 177 428 |
| 17 | 5197 | 328,282 | 4,68 | 3,741 032 | 1,987 258 574 |
| 18 | 5324 | 325,296 | 4,60 | 3,941 506 | 2,051 073 280 |
| 19 | 5450,7 | 322,254 | 4,54 | 4,147 828 | 2,118 047 238 |
| 20 | 5514,1 | 320,709 | 4,48 | 4,253 475 | 1,083 022 022 |
| 21 | 5577,4 | 319,135 | 4,40 | 4,360 572 | 1,086 671 165 |
| 22 | 5640,8 | 317,563 | 4,32 | 4,469 473 | 1,093 138 728 |
| 23 | 5704,2 | 315,979 | 4,22 | 4,580 023 | 1,092 094 462 |
| 24 | 5767,6 | 314,364 | 4,12 | 4,692 237 | 1,090 162 551 |
| 25 | 5831,0 | 312,753 | 3,99 | 4,806 128 | 1,079 218 221 |
| 26 | 5894,3 | 311,130 | 3,83 | 4,921 527 | 1,057 010 583 |
| 27 | 5957,7 | 309,478 | 3,66 | 5,038 815 | 1,033 652 387 |
| 28 | 6021,1 | 307,829 | 3,61 | 5,157 823 | 1,041 448 589 |
| 29 | 6084,5 | 306,152 | 3,56 | 5,278 568 | 1,048 861 417 |
| 30 | 6147,9 | 304,474 | 3,50 | 5,401 064 | 1,052 883 065 |
| 31 | 6211,2 | 302,807 | 3,45 | 5,525 129 | 1,113 640 450 |
| 32 | 6274,6 | 301,094 | 3,40 | 5,651 170 | 1,013 540 098 |
| 33 | 6338,0 | 299,352 | 3,35 | 5,779 009 | 1,068 313 951 |
| 34 | 6371,0 | 298,257 | 3,32 | 5,860 884 | 0,561 061 421 |

В действительности внутри Земли имеют место большие неоднородности масс. В табл. 4 приведены значения различных комбинаций моментов инерции Земли ($10^6 \Delta J / a_e^2 M$), иллюстрирующие неравномерное размещение аномальных масс внутри Земли. Эти данные получены по формулам, приведенным в разделе 2.3 и коэффициентам гармоник модели GEM10. Моменты инерции степени n масштабированы на величину $a_e^n M$ и помножены на 10^6 .

Т а б л и ц а 4

| ΔJ_{1-7} | ΔJ_{8-14} | ΔJ_{15-21} | ΔJ_{22-28} |
|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| -0,004 798 | -1,128 367 | +0,604 826 | -6,203 140 |
| +6,284 664 | -0,783 710 | -0,120 004 | +0,578 431 |
| -1,219 688 | -0,843 341 | +0,838 685 | -0,744 543 |
| +2,535 635 | +0,519 303 | -0,432 282 | -0,188 124 |
| -7,070 713 | -3,857 636 | -0,014 547 | +0,674 209 |
| -1,918 925 | -0,000 389 | -0,360 652 | -0,235 726 |
| +0,198 080 | -0,211 004 | -7,892 143 | -0,105 980 |

Ниже приведем список формул, использованных для вычисления табл. 4.

1. $I_{011} - I_{101} = J_{21} - K_{21}$; 2. $I_{200} - I_{020} = -4J_{22}$;
3. $I_{021} - I_{201} = 4J_{32}$; 4. $I_{003} - \frac{3}{2}(I_{201} + I_{021}) = -J_3$;
5. $I_{030} - I_{300} + 3(I_{120} - I_{210}) = 24(J_{33} + K_{33})$;
6. $I_{012} - I_{102} + \frac{1}{4}(I_{300} - I_{030}) + \frac{1}{4}(I_{120} - I_{210}) = J_{31} - K_{31}$;
7. $I_{130} - I_{310} = 48K_{44}$;
8. $3(I_{121} - I_{211}) + I_{031} - I_{301} = 24(J_{43} + K_{43})$;
9. $3(I_{121} - I_{211}) + I_{013} - I_{103} = J_{41} - K_{41} + 18(J_{43} + K_{43})$;
10. $I_{041} - I_{401} + 2(I_{203} - I_{023}) = -8J_{52}$;
11. $I_{410} - I_{140} + I_{014} - I_{104} + 6(I_{122} - I_{212}) = J_{51} - K_{51} + 36(J_{53} + K_{53}) + 120(J_{55} - K_{55})$;
12. $I_{050} - I_{500} + 5(I_{410} - I_{140}) + 10(I_{320} - I_{230}) = 1920(J_{55} - K_{55})$;
13. $I_{311} - I_{131} = 48K_{54}$;
14. $I_{005} + \frac{15}{8}(I_{401} + I_{041} + 2I_{221}) - 5(I_{203} + I_{023}) = J_5$;
15. $8(I_{015} - I_{105}) + 5(I_{051} - I_{501}) + 5(I_{411} - I_{141}) + 20(I_{303} - I_{033}) + 20(I_{123} - I_{213}) + 10(I_{231} - I_{321}) = 8(J_{61} - K_{61})$;
16. $\frac{3}{2}(I_{501} - I_{051}) + 4(I_{033} - I_{303}) + 3(I_{231} - I_{321}) + 12(I_{123} - I_{213}) +$

$$+ \frac{3}{2}(I_{411} - I_{141}) = 96(J_{63} + K_{63});$$

$$17. I_{510} - I_{150} + 10(I_{132} - I_{312}) = 480K_{64};$$

$$18. 10(I_{321} - I_{231}) + 5(I_{411} - I_{141}) + I_{051} - I_{501} = 1920(J_{65} - K_{65});$$

$$19. 15(I_{420} - I_{240}) + (I_{600} - I_{060}) = 23\,040J_{66};$$

$$20. I_{007} + \frac{105}{16}(2I_{403} + 2I_{043} - I_{421} - I_{241}) = J_7;$$

$$21. 64(I_{016} - I_{106}) + 240(I_{304} - I_{034} + I_{124} - I_{214} + I_{232} - I_{322}) + 120(I_{502} - I_{052} + I_{142} - I_{412}) + 15(I_{520} - I_{250} + I_{340} - I_{430}) + 5(I_{700} - I_{070} + I_{160} - I_{610}) = 64(J_{71} - K_{71});$$

$$22. 48(I_{025} - I_{205}) + 240(I_{403} - I_{043}) + 15(I_{061} - I_{601} + I_{241} - I_{421}) = 192J_{72};$$

$$23. 15(I_{421} - I_{241}) + (I_{061} - I_{601}) = 23\,040J_{76};$$

$$24. 80(I_{404} - I_{044}) + 32(I_{026} - I_{206}) + 30(I_{242} - I_{422}) + 30(I_{062} - I_{602}) + 2(I_{620} - I_{260}) + I_{800} - I_{080} = 128J_{82};$$

$$25. 40(I_{134} - I_{314}) + 24(I_{512} - I_{152}) + (I_{350} - I_{530} + I_{170} - I_{710}) = 1920K_{84};$$

$$26. 210(I_{422} - I_{242}) + 14(I_{062} - I_{602} + I_{260} - I_{620}) + I_{800} - I_{080} = 322\,560J_{86};$$

$$27. I_{071} - I_{701} + 7(I_{161} - I_{611}) + 21(I_{521} - I_{251}) + 35(I_{431} - I_{341}) = 322\,560(J_{87} + K_{87});$$

$$28. 7(I_{530} - I_{350}) + I_{170} - I_{710} = 645\,120K_{88}. \quad (179)$$

Как видно из данных табл. 4, внутри Земли имеются большие аномалии масс, расположенных неравномерно. Если бы не было асимметрии масс внутри Земли, то правые части формул (179) были равны нулю, т. е. соблюдалось условие $\Delta J_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 28$).

Пользуясь формулами связи гармонических коэффициентов и моментов инерции, можно составить условные уравнения типа (179) для оценки аномальных масс, расположенных в эллипсоидальных слоях планетарного тела на различных глубинах.

2.8. ПОТЕНЦИАЛ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Рассмотрим следующую осесимметричную потенциальную функцию планетоцентрических координат r и φ

$$\dot{U} = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) \right], \quad (180)$$

где коэффициент зональных гармоник

$$J_n = -\frac{1}{2} [(1 + i\sigma)(\sigma + i)^n + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^n] \varepsilon^n; \quad (181)$$

$\varepsilon = c/a_e$; fM , a_e , c и σ — постоянные параметры осесимметричного потенциального поля \dot{U} ; $i = \sqrt{-1}$.

Положим $n = 2, 3, \dots, 8$ и вычислим гармонические коэффициенты

$$\begin{aligned}
 J_2 &= (1 + \sigma^2)\epsilon^2; & J_3 &= 2\sigma(1 + \sigma^2)\epsilon^3; \\
 J_4 &= -(1 - 2\sigma^2 - 3\sigma^4)\epsilon^4; & J_5 &= -4\sigma(1 - \sigma^4)\epsilon^5; \\
 J_6 &= (1 - 9\sigma^2 - 5\sigma^4 + 5\sigma^6)\epsilon^6; & J_7 &= 6\sigma\left(1 - \frac{7}{3}\sigma^2 - \frac{7}{3}\sigma^4 + \sigma^6\right)\epsilon^7; \\
 J_8 &= -(1 - 20\sigma^2 + 14\sigma^4 + 28\sigma^6 - 7\sigma^8)\epsilon^8.
 \end{aligned}
 \tag{182}$$

Постоянные параметры c и σ представим через коэффициенты J_2 и J_3

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \beta(J_2 - \beta^2)^{-1/2}; & c &= a_e(J_2 - \beta^2)^{1/2}; \\
 \beta &= J_3/2J_2.
 \end{aligned}
 \tag{183}$$

Установив параметры fM , a_e , J_2 и J_3 , можно вычислить гармонические коэффициенты $J_n > 3$ (186) и потенциал \dot{U} (180).

В табл. 5 приведены параметры планетарной двухточечной модели потенциала Земли, Луны и Марса, вычисленные по фиксированным значениям a_e , J_2 и J_3 . Как видно из данных этой таблицы, члены разложения (181) с увеличением их номера быстро убывают.

Т а б л и ц а 5

| Параметр | Земля | Луна | Марс |
|------------------|----------------|---------------|-----------------|
| a_e , см | 6378,14 | 1738,0 | 3408,0 |
| $J_2 \cdot 10^6$ | 1082,627 | 210,0 | 1964,0 |
| $J_3 \cdot 10^6$ | -2,535 9 | 5,0 | 36,0 |
| $J_4 \cdot 10^6$ | -1,166 141 | 0,075 | -3,527 4 |
| $J_5 \cdot 10^9$ | 5,477 | 0,7 | -129,3 |
| $J_6 \cdot 10^9$ | 1,250 | 0,02 | 3,909 |
| $J_7 \cdot 10^9$ | -0,008 86 | -0,000 11 | 0,326 |
| $J_8 \cdot 10^9$ | -0,001 33 | -0,000 009 | -0,001 65 |
| s , км | 209,728 85 | 14,361 | 147,767 5 |
| σ | -0,035 617 148 | 1,440 736 739 | 0,211 374 070 9 |

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в силовом поле \dot{U} (180) интегрируется в конечных квадратурах, если потенциал \dot{U} рассматривается как силовая функция двух неподвижных точек с массами $M(1 + i\sigma)/2$ и $M(1 - i\sigma)/2$, удаленными друг от друга на расстояние, равное $2ic$.

Кроме того, разности реальных потенциалов Земли, Луны и Марса и потенциалов соответствующих двух точечных масс содержат члены порядка 10^{-6} . Потенциал \dot{U} учитывает основную часть асимметрии планетарного тела относительно его экватора. Если положим $\sigma = 0$, то получим потенциал, симметричный относительно экватора и содержа-

ший только четные зональные гармоники $|\dot{J}_{2i}| = \dot{J}_2$ ($i = 2, 3, 4, \dots$). Первый вариант, когда $\sigma \neq 0$, $J_2 = J_2$ и $J_3 \approx J_3$, более предпочтителен, ибо в нем учитывается экваториальная асимметрия планетарного тела.

Для оценки разности $\dot{U} - U$ потенциалов двух точечных масс и реальной Земли обратимся к данным табл. 6, вычисленным по модели GEM10 и формулам (180) — (183).

Т а б л и ц а 6

| r , км | U , км ² /с ² | \dot{U} , км ² /с ² | $\dot{U} - U$, км ² /с ² | $(\dot{U} - U)/U$ |
|-----------|---------------------------------------|---|---|---------------------|
| 6 378,14 | 62,477 5147 | 62,477 8148 | 0,000 3001 | $4,8 \cdot 10^{-6}$ |
| 6 878,14 | 57,937 9728 | 57,938 2465 | 0,000 2737 | $4,7 \cdot 10^{-6}$ |
| 7 378,14 | 54,013 5668 | 54,013 5668 | 0,000 2184 | $4,0 \cdot 10^{-6}$ |
| 11 378,14 | 35,029 1053 | 35,029 1480 | 0,000 0427 | $1,2 \cdot 10^{-6}$ |

Потенциал \dot{U} в формуле (180) отличается от земного на такую малую величину, что потенциал двух точечных масс можно использовать как сильное приближение при моделировании потенциала планетарного тела потенциалами n точечных масс, размещенных в теле планеты на различных глубинах.

Как и следовало ожидать, с удалением точки от поверхности Земли разность потенциалов U и \dot{U} быстро убывает. Так например, на высоте 5000 км разность потенциалов U и \dot{U} в семь раз меньше их разности на поверхности Земли и составляет 1/820 000 часть потенциала Земли на этой высоте. Во многих практических задачах, особенно в задачах негеодезического характера, потенциал двух точечных масс \dot{U} (180) можно использовать как модель, адекватно отображающую гравипотенциал планетарного тела, а в задачах о фигуре планетарного тела и движении искусственных спутников и в другой практике, требующей точных моделей, — как первое приближение для планетарного гравипотенциала.

2.9. ПОТЕНЦИАЛ ПЛАНЕТАРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Способ нахождения двух планетарных точек на оси вращения планеты описан в предыдущем параграфе. Следующим шагом является размещение в эллипсоидальных слоях на различных глубинах N планетарных точек с массами dm_j ($j = 3, 4, \dots, N$). При этом должны быть соблюдены все четыре условия (см. раздел 2.5). Из 4-го условия следует, что некоторая часть аномальных масс должна быть размещена в наружных слоях мантии и в литосфере. В этом случае детализация модели для отдельного региона затронет литосферу в окрестности. Такая модель, сохраняя автономность, будет обладать способностью кибернетической обучаемости по мере накопления данных о внешнем гравитационном поле, литосфере окрестности того или иного региона планеты.

Моменты инерции и сила тяжести на поверхности планеты чувствительны к аномалиям масс в теле планеты, в особенности в его верхних слоях. Если использовать планетарные моменты инерции до 10-й степени, определяемые наиболее надежно, то можно написать 117 условных уравнений. В монографии [11] приведены условные уравнения для всех моментов инерции до 8-й степени включительно, из которых можно выбрать 77 независимых уравнений. Каждое значение силы тяжести, измеренное на поверхности планеты или вычисленное по планетарной модели внешнего гравитационного поля планеты, даст одно уравнение.

Рассмотрим решение задачи о потенциале планетарных точечных масс, принимая за нулевое решение потенциал \dot{U} двух точечных масс (181). Тогда

$$U = \dot{U} + fM \sum_{j=3}^N M^{-1} \frac{dm_j}{\rho_j}, \quad (184)$$

откуда

$$\sum_{j=3}^N \left(\frac{\rho}{\rho_j} \right)_j = \frac{U - \dot{U}}{fM}, \quad (185)$$

где

$$\rho_j = \sqrt{(X - X_j)^2 + (Y - Y_j)^2 + (Z - Z_j)^2};$$

X, Y, Z — планетоцентрические координаты точки внешнего пространства Q с потенциалом U ; $\rho_j = M^{-1}dm_j$ и X_j, Y_j, Z_j — веса и планетоцентрические координаты точки M_j , принадлежащей планетарному телу.

Уравнение (185) целесообразно составлять для точки, расположенной вблизи или на поверхности планеты, по современным моделям внешнего гравитационного поля. Например, для Земли можно принять модель GEM10. Множество точек Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), для которых составляется система уравнений (185), должно быть мощным и равномерно заполняющим околопланетарную область, включая и его поверхность.

Задача заключается в определении координат X_j, Y_j, Z_j и весов ρ_j совокупности точек M_j ($j = 3, 4, \dots, N$), удовлетворяющих уравнениям (185), моментов инерций и сил тяжести на поверхности планеты. При этом все точки $M_j(\rho, X, Y, Z)$ принадлежат области V , занятой планетарным телом, и сумма их весов ρ_j равна нулю, т. е.

$$M_j \in V; \quad \sum_{j=3}^N \rho_j = 0. \quad (186)$$

Для решения задачи потребуется установить в нулевом приближении планетарное распределение $N - 2$ точек, используя геофизические данные о строении планеты. Зафиксировав значения X_j^0, Y_j^0, Z_j^0 , можно методом наименьших квадратов вычислить веса точек ρ_j^0 . Затем в первом приближении методом наименьших квадратов уточнить координаты

точек $M_j(r, \varphi, \lambda)$ с фиксированными весами ρ_j^0 , используя уравнения моментов инерции планетарного тела (см. раздел 2.6) и определения ускорения силы притяжения. При этом на основе физических данных и изучения экстремальных свойств исходного потенциала U можно сформулировать ограничительные условия для координат точечных масс. Таким образом, задача о потенциале N точечных масс может быть решена методом наименьших квадратов групповыми итерациями. В первой группе отыскиваются веса ρ_j , а во второй группе — планетоцентрические координаты точек M_j . Групповые итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность в решении линейных уравнений в каждой группе.

Вычисленные значения ускорения силы притяжения по гравитационной модели планетарного тела сильно сглажены и отражают усредненную характеристику окрестности некоторой точки, тогда как измеренное значение ускорения силы притяжения точки представляет дискретную характеристику. Для планетарной модели целесообразно использовать сглаженные значения ускорения силы притяжения, исправленные за рельеф окрестности точки.

После того как зафиксирована математическая модель планетарных точечных масс, удовлетворяющая четырем условиям (см. раздел 2.5), можно приступить к улучшению ее в деталях по данным каждого региона планеты и прецизионным наблюдениям наземных и околоземных космических объектов. Планетарное ядро точечных масс, установленное на эпоху, для планетарных задач должно быть стабильным.

2.10. УРАВНЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛ ПРИТЯЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Гравитационное ускорение потенциала \dot{U} в формуле (181) двух неподвижных точечных масс определим по координатным осям

$$\dot{g}_x = -\dot{g} \frac{X}{r}; \quad \dot{g}_y = -\dot{g} \frac{Y}{r}; \quad \dot{g}_z = -\dot{g} \frac{Z}{r},$$

где

$$\dot{g} = \frac{fM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_c}{r} \right)^n I_n P_n(\sin \varphi) \right]. \quad (188)$$

Составляющие ускорения потенциала притяжения точечной массы

$$\delta g_{x_i} = -\delta g_j \frac{X - X_j}{\rho_j}; \quad \delta g_{y_i} = -\delta g_j \frac{Y - Y_j}{\rho_j}; \quad \delta g_{z_i} = -\delta g_j \frac{Z - Z_j}{\rho_j}, \quad (189)$$

где

$$\delta g_j = \frac{fM}{\rho_j^2} \rho_j. \quad (190)$$

Результирующее планетоцентрическое гравитационное ускорение всего множества точечных масс

$$\dot{g} = \dot{g} + \sum_{j=3}^N \delta g_j \cos \psi_j, \quad (191)$$

$$\cos \psi_j = \frac{X(X - X_j) + Y(Y - Y_j) + Z(Z - Z_j)}{r \rho_j}$$

сопоставляется со значением ускорения g_r потенциала притяжения, измеренным или вычисленным по модели внешнего гравитационного поля планетарного тела.

В правой части уравнения (191) сумма элементарных ускорений по величине почти в 10^6 раз меньше, чем гравитационное ускорение \dot{g} . Поэтому уравнение для точечных масс выгодно составлять как дифференциальное соотношение

$$\sum_{j=3}^N \delta g_j \cos \psi_j = \bar{g}_r - \dot{g}, \quad (192)$$

где \bar{g}_r — планетоцентрическое гравитационное ускорение, вычисляемое по модели внешнего гравитационного поля или измеренным значениям ускорения потенциала притяжения планеты.

Имея разложения потенциала притяжения U планетарного тела по сферическим гармоникам, гравитационное ускорение вычислим по формуле

$$\bar{g}_r = \bar{g} \cos(B - \varphi) = -\partial U / \partial r, \quad (193)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} = & -\frac{fM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{I}_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ & \left. + \bar{K}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right]; \end{aligned} \quad (194)$$

\bar{g} и \bar{g}_r — ускорение силы притяжения и его проекция на планетоцентрический радиус.

Измеренное значение ускорения силы притяжения \bar{g} можно проецировать на планетоцентрический радиус по формуле (193). При совместном использовании измеренных и вычисленных значений ускорения силы притяжения нужно вводить соответствующие веса. Заметим, что значения ускорения, измеренные с точностью до $0,001 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, можно считать безошибочными, так как вычисленные ускорения по моделям потенциала пока не имеют такой точности.

3. ТЕОРИЯ ВРАЩЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

3.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ ВОКРУГ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ

3.1.1. Принципиальные установки

Элементарную теорию вращения Земли будем строить из предположения, что Земля — абсолютно твердое тело, т. е. расстояния между любыми ее точечными массами остаются постоянными и вся она полностью заполнена массами. Абсолютно твердое тело не деформируется под влиянием внешних и внутренних сил и служит идеальной механической моделью, тем более подходящей для Земли, чем меньше она деформируется (в действительности, Земля деформируется). Под действием внешних и внутренних сил в теле, на поверхности и в воздушной оболочке Земли массы перемещаются. Эти перемещения не удастся предсказать и точно оценить их влияние на вращение Земли. Поэтому целесообразно в идеальные данные, вычисленные по законам вращения абсолютно твердого тела, вводить поправки за перемещение масс. Определение этих поправок потребует привлечения геофизических гипотез внутреннего строения Земли и сравнения поведения идеальной модели абсолютно твердой Земли с астрономо-геодезическими и геофизическими наблюдениями. Из экспериментальных данных, определяемых как разности измеренных и идеальных параметров вращения Земли, известно, что эти расхождения незначительные, поэтому в первом приближении допустимо применение модели абсолютно твердой Земли.

Движение Земли представим как совокупность двух движений: поступательного движения ее центра масс вокруг Солнца и вращательного около неподвижной точки. Зависимость движения Земли как единого твердого тела от действующих на нее сил будем изучать, используя законы механики в приложении к точечным массам, в совокупности составляющим Землю. Считая Землю системой точечных масс m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), будем рассматривать все внешние F_i и внутренние F_i силы, действующие на каждую из них, суммировать отдельные дифференциальные уравнения движения. При суммировании эффект внутренних сил притяжения, попарно равных по величине и противоположных по направлению, будет исключен полностью. Внешние силы эквивалентно заменим результирующим вектором, приложенным к центру масс Земли, а сумму моментов всех внешних сил относительно центра масс — моментом одной пары сил. Результирующий вектор обуславливает орбитальное движение, а результирующий момент — вращение Земли вокруг ее центра масс. При этом будем учитывать моменты инерции Земли, представляющие ее фундаментальные параметры и характеризующие кинетический момент Земли, вращающейся с угловой скоростью ω около неподвижной точки.

Оба вида движения Земли в высшей степени сложны. Орбитальное движение постоянно возмущается притяжением других тел Солнечной системы. Вращение Земли около неподвижной точки возмущается притяжением Солнца, Луны и планет, несовпадением мгновенной оси вращения Земли с главными осями ее инерции, большими неоднородностями плотностей и перемещением масс в теле Земли, движением масс на поверхности и в ее атмосфере.

Орбитальное движение Земли не зависит от ее вращения около неподвижной точки, в то время как вращательное движение зависит от положения Земли относительно Солнца, Луны и планет. Поэтому вращение Земли будем отделять от ее поступательного движения, изучая его самостоятельно. Кроме того, для упрощения за неподвижную точку, около которой вращается Земля, примем центр ее масс, хотя он не занимает постоянного положения из-за перемещения масс Земли.

В абсолютно твердой Земле центр масс представляет собой точку, не имеющую движения, а все остальные точки вращаются вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс. Геометрическим местом последовательных положений мгновенной оси вращения в теле Земли является конус с вершиной в неподвижной точке.

Прежде чем приступить к изложению элементарной теории вращения Земли, перечислим основные положения механики твердого тела.

3.1.2. Главные векторы и момент внешних сил

Если F_i, \dot{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — внешние и внутренние силы, действующие на точки системы, то их главным вектором называется вектор, равный сумме векторов

$$F = \sum F_i + \sum \dot{F}_i. \quad (195)$$

Векторы F_i, \dot{F}_i попарно приложены к разным точкам. Вектор F — свободный, он может быть приложен к любой точке. Для этого надо к некоторой точке O приложить векторы, коллинеарные и равные векторам F_i, \dot{F}_i , и сложить их. По третьему закону механики силы взаимодействия двух материальных точек твердого тела всегда равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому главный вектор всех внутренних сил притяжения всегда равен нулю. Следовательно главный вектор системы равен главному вектору внешних сил, т. е.

$$F = \sum F_i. \quad (196)$$

Моментом силы F_i (\dot{F}_i) относительно полюса O называется вектор, определяемый векторным произведением

$$M_{iO} = r_i \times F_i; \quad M_{0i} = r_i \times \dot{F}_i, \quad (197)$$

где r — радиус-вектор, проведенный из полюса O к точке i приложения силы.

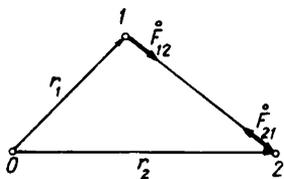


Рис. 12. Геометрия трех векторов

Главным моментом \mathbf{M}_0 сил относительно полюса O называется сумма векторов

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_{0i} + \sum \mathbf{M}_{0i}.$$

Внутренние силы входят только попарно. Поэтому сумма моментов внутренних сил $\sum \mathbf{M}_{0i}$ равна нулю. В действительности (рис. 12) имеем

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{21} = 0,$$

так как векторы \mathbf{r}_{12} и \mathbf{F}_{21} коллинеарны. Таким образом, главный момент всех сил системы равен сумме моментов внешних сил

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (198)$$

3.1.3. Количество движения системы

Количеством движения системы называется вектор

$$\mathbf{Q} = \sum \mathbf{Q}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i. \quad (199)$$

В соответствии со вторым законом механики

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum \mathbf{F}_i,$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}. \quad (200)$$

Уравнение (200) читается так: производная от количества движения по времени равна главному вектору всех действующих на систему внешних сил.

Если результирующий вектор внешних сил меняется во времени, то уравнение (200) вычисляется на каждую эпоху.

Если система замкнута, т. е. на систему не действуют внешние силы, то $\dot{\mathbf{Q}} = 0$. Следовательно

$$\mathbf{Q} = \text{const}. \quad (201)$$

При движении замкнутой системы количество движения системы остается постоянным. Это утверждение справедливо и для системы, на которую результирующее воздействие внешних сил равно нулю.

3.1.4. Центр инерции системы

Центром инерции системы называется точка пространства C , определяемая вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \quad (202)$$

Центром тяжести называется точка G пространства, определяемая другим вектором

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{g}_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i \mathbf{g}_i}. \quad (203)$$

В частном случае для тела, находящегося в однородном поле тяжести ($\mathbf{g} = \text{const}$), центр тяжести совпадает с центром инерции. Мы будем пользоваться центром инерции, часто называя его центром масс.

Дифференцируя правые и левые части уравнения (202) по времени, получим

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_C, \quad (204)$$

где $M = \sum m_i$ — масса всего тела. Это выражение читается так: количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра инерции.

С учетом (200) и (204) имеем

$$M \dot{\mathbf{v}}_C = \mathbf{F}. \quad (205)$$

Последнее уравнение представляет теорему о движении центра масс. Центр масс системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы и помещенная в центре масс, если бы к ней был приложен главный вектор \mathbf{F} всех внешних сил, действующих на систему. У замкнутой системы $\mathbf{F} = 0$. Поэтому центр ее масс движется с постоянной скоростью.

Если практически пренебречь притяжением звезд, то Солнечная система представляет замкнутую систему. Следовательно центр ее масс будет двигаться прямолинейно и равномерно относительно далеких звезд. Система координат с началом в центре масс Солнечной системы, оси которой ориентированы по далеким неподвижным звездам, является высокоточной инерциальной системой относительно таких звезд. Однако она не строго инерциальна, так как внешние силы действуют и поэтому Солнечная система, обращаясь вокруг центра Галактики, имеет неравномерное движение. Эта нестрогость пренебрегаемо мала по сравнению с точностями измерений в практике геодезии. В перспективе, когда в геодезии повысится точность измерений на один-два порядка, потребуются оценка неинерциальности гелиоцентрической системы координат.

Геоцентрическая система координат, оси которой ориентируются по неподвижным звездам, будет квазиинерциальной, так как начало ее име-

ет годовое вращение относительно Солнца. Однако во многих случаях можно пренебречь квазиинерциальностью геоцентрической системы. Ясно, когда мы стремимся получить предельно достижимые точности, тогда с учетом ее квазиинерциальности, следует вводить соответствующие поправки в результаты вычислений.

3.1.5. Кинетический момент системы

Кинетическим моментом системы относительно полюса O называется сумма моментов количества движения системы

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_{Oi} \times m_i \mathbf{v}_{Oi}. \quad (206)$$

Преобразуем это уравнение, введя центр масс C . Из рис. 13 следует

$$\mathbf{r}_{Oi} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i, \quad (207)$$

откуда

$$\mathbf{v}_{Oi} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i. \quad (208)$$

Подставив выражения (207) и (208) в формулу (206), получим

$$\mathbf{K}_O = \sum (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i) m_i.$$

Раскроем скобки

$$\mathbf{K}_O = \sum (\mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C) + \sum (\mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_C) + \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i).$$

Первый член правой части этого уравнения можно представить так

$$\sum (\mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C) = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C.$$

Второй и третий члены равны нулю, ибо по определению центра масс, $\mathbf{r}'_C = 0$, следовательно $\sum m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}'_C = 0$.

Кинетический момент системы

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i). \quad (209)$$

Уравнение (209) выражает теорему: кинетический момент системы относительно неподвижного полюса равен моменту количества движения центра масс относительно полюса в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенному с кинетическим моментом системы относительно центра масс.

Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения ξ есть сумма моментов количества движения всех точек тела относительно этой оси

$$\mathbf{K}_\xi = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

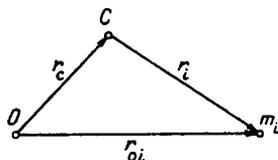


Рис. 13. Сумма трех векторов

Радиус-вектор и скорость — ортогональные векторы. По определению, круговая скорость по модулю равна $v_i = r_i \omega$. Следовательно, кинетический момент твердого тела относительно оси вращения по модулю равен

$$K_{\xi} = \omega \sum m_i r_i^2.$$

Величина $\sum m_i r_i^2$, равная сумме произведения массы каждой точки тела на квадрат расстояния до некоторой оси, есть момент инерции I_{ξ} относительно этой оси. Таким образом,

$$K_{\xi} = I_{\xi} \omega. \quad (210)$$

Запишем дифференциальные уравнения движения системы n материальных точек

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \times \dot{\mathbf{F}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где \mathbf{F}_i и $\dot{\mathbf{F}}_i$ — внешние и внутренние силы, действующие на систему.

Умножим обе части этого уравнения векторно слева на соответствующий радиус-вектор и сложим

$$\sum (\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{F}}_i).$$

Главный момент внутренних сил равен нулю. В правой части остается главный момент внешних сил, т. е.

$$\sum (\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i). \quad (211)$$

Каждый член левой части этого уравнения представим

$$\mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i).$$

В справедливости этой записи нетрудно убедиться, выполнив дифференцирование. Выражение, стоящее под знаком производной, есть кинетический момент точки с массой m_i относительно полюса. Обозначим его через \mathbf{K}_0 и получим уравнение (211) в виде

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{M}_0. \quad (212)$$

Уравнение (212) выражает теорему об изменении кинетического момента системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной точки равна главному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно той же неподвижной точки.

Для замкнутой системы $\mathbf{M}_0 = 0$. В этом случае $\mathbf{K}_0 = \text{const}$. Для замкнутой системы ее кинетический момент есть величина постоянная.

3.1.6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Условие чистого вращения Земли

Кинематика вращения тела представлена на рис. 14. Действие внешних сил обозначены векторами F_1, F_2, \dots, F_n , а силы реакции опоры на двух неподвижных точках O и P . Применим теорему об изменении количества движения

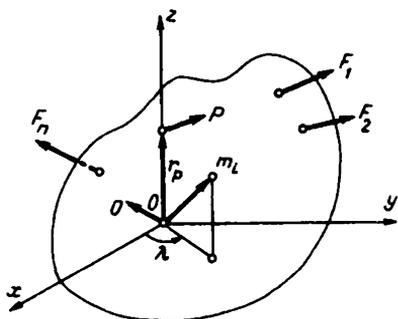


Рис. 14. Внешние силы и силы реакции на опорах

$$\sum m_i \dot{v}_i = \mathbf{O} + \mathbf{P} + \mathbf{F}. \quad (213)$$

Проектируя обе части равенства (213) на координатные оси, получим три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{x} &= O_x + P_x + F_x; \\ \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{y} &= O_y + P_y + F_y; \\ \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{z} &= O_z + P_z + F_z. \end{aligned} \quad (214)$$

Применяя теорему о кинетическом моменте и опуская индексы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_P \times \mathbf{P} + \mathbf{M}. \quad (215)$$

Имея в виду, что

$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & r_P \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix},$$

и проектируя обе части равенства (215) на координатные оси, получим еще три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_i (yz - zy)_i &= -r_P P_y + M_x; \\ \frac{d}{dt} \sum m_i (zx - xz)_i &= r_P P_x + M_y; \\ \frac{d}{dt} \sum m_i (xy - yx)_i &= \quad + M_z. \end{aligned} \quad (216)$$

Выразим в уравнениях (214) и (216) все производные от координат через угловую скорость ω и угловое ускорение $\dot{\omega}$. Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda; & \dot{x} &= -y\omega; & \ddot{x} &= -x\omega^2 - y\dot{\omega}; \\ y &= r \sin \lambda; & \dot{y} &= x\omega; & \ddot{y} &= -y\omega^2 + x\dot{\omega}; \\ z &= \text{const.} & \dot{z} &= 0; & \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (217)$$

Подставляя значения производных (217) в уравнения (214), (216) и замечая, что

$$\sum m_i x_i = Mx_C; \quad \sum m_i y_i = My_C; \quad \sum m_i y_i z_i = D;$$

$$\sum m_i z_i x_i = E; \quad \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = C,$$

получим

$$-\omega^2 Mx_C - \dot{\omega} My_C = O_x + P_x + F_x;$$

$$-\omega^2 My_C - \omega Mx_C = O_y + P_y + F_y;$$

$$0 = O_z + P_z + F_z;$$

$$\omega^2 D - \dot{\omega} E = -r_p P_y + M_x;$$

$$-\omega^2 E - \dot{\omega} D = r_p P_x + M_y;$$

$$\dot{\omega} C = M_z.$$

(218)

Последнее уравнение системы (218), не содержащее реакции опор, следует также из уравнений (210) и (212). В действительности момент $C = I_z$ — величина постоянная, а производная составляет

$$\dot{K}_z = \dot{\omega} C = M_z.$$

Проинтегрируем это уравнение и определим ω и угол λ как функции времени.

В левых частях уравнений, содержащих реакцию опор, примем $\omega = \dot{\omega} = 0$. Тогда они примут вид обычных уравнений статики и будут определять статические реакции.

Реакции при вращении твердого тела будем называть динамическими. Найдем условия, при которых они остаются равными статическим, т. е. когда вращение не вызывает добавочных давлений на ось. Для соблюдения этих условий необходимо и достаточно, чтобы левые части уравнений (218), содержащие реакции, равнялись нулю, т. е.

$$\omega^2 x_C + \dot{\omega} y_C = 0; \quad \omega^2 D - \dot{\omega} E = 0;$$

$$\dot{\omega} x_C - \omega^2 y_C = 0; \quad \dot{\omega} D + \omega^2 E = 0.$$

(219)

Однородные уравнения (219), определитель которых отличен от нуля, имеют тривиальное решение

$$x_C = y_C = 0; \quad D = E = 0.$$

(220)

Из этих результатов следует, что при вращении твердого тела не возникает добавочных давлений на ось вращения, если осью вращения является одна из главных центральных осей инерции.

Допустим, что на тело не действуют внешние силы и оно вращается свободно вокруг постоянной оси. Тогда все силы реакции и моменты внешних сил равны нулю. Из уравнений (218) следует, что чистое вращение твердого тела возможно только вокруг одной из своих главных центральных осей инерции. Твердое тело, вращающееся вокруг одной своей

главной центральной оси инерции, неопределенно долго будет находиться в состоянии равномерного вращения вокруг этой оси. Однако, если ось вращения твердого тела не совпадает с главной центральной осью инерции, то даже при свободном вращении тела его мгновенная ось будет менять свое положение в пространстве и относительно самого тела.

Реальная Земля не является абсолютно твердым телом. Центр ее масс не занимает постоянного положения из-за перемещения масс в теле и на поверхности. Мгновенная ось вращения не совпадает с главной центральной осью инерции. Поэтому при вращении Земли имеют место переменные добавочные реакции на ось вращения, заставляющие ее перемещаться в теле Земли и в пространстве.

3.1.7. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела, вращающегося около неподвижной точки

Если ω — угловая скорость вращения тела, то его кинетический момент относительно неподвижной точки O равен вектору

$$\mathbf{K}_0 = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i (\underline{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \underline{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i (\mathbf{r}_i \cdot \underline{\omega}).$$

Спроектируем обе части этого равенства на координатные оси. Проекция на ось x

$$\begin{aligned} K_x &= \omega_x \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) \\ &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i. \end{aligned}$$

Введем моменты инерции (см. раздел 2.3), циклически переставляя индексы x, y, z и соответствующие им проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, получим формулы

$$\begin{aligned} K_x &= A\omega_x - F\omega_y - F\omega_z; \\ K_y &= -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z; \\ K_z &= -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z, \end{aligned} \tag{221}$$

показывающие, что проекции кинетического момента \mathbf{K}_0 являются линейными функциями проекций угловой скорости $\underline{\omega}$; коэффициентами служат моменты инерции. Из формул (221) следует векторная запись

$$\mathbf{K}_0 = I \underline{\omega}, \tag{222}$$

которая означает, что кинетический момент \mathbf{K}_0 получается аффинным преобразованием угловой скорости $\underline{\omega}$ посредством матрицы

$$I = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}, \tag{223}$$

представленной вторыми моментами инерции твердого тела. Матрица I называется тензором инерции второго ранга.

По определению, кинетическая энергия вращающегося твердого тела

$$T = \frac{\omega^2}{2} I \omega.$$

Известно, что момент инерции относительно произвольной оси

$$I_{\omega} = l^2 A + m^2 B + n^2 C - 2(mnD + lnE + lmF), \quad (224)$$

l, m, n — направляющие косинусы $\underline{\omega}$.

Следовательно, кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2} \omega_x^2 A + \frac{1}{2} \omega_y^2 B + \frac{1}{2} \omega_z^2 C - D \omega_y \omega_z - E \omega_x \omega_z - F \omega_x \omega_y. \quad (225)$$

3.1.8. Регулярная прецессия

Ж. Даламбер показал, что вращение твердого тела вокруг его неподвижной точки можно рассматривать как последовательность бесконечно малых вращений вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через неподвижную точку. Последовательные положения мгновенной оси вращения описывают коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке. Геометрическое место мгновенных осей вращения относительно основной системы отсчета есть другой конус с вершиной в неподвижной точке, называемый конусом прецессии. Механически движение твердого тела около неподвижной точки интерпретируется как качение без скольжения подвижного собственного конуса прецессии.

Геометрия движения твердого тела около неподвижной точки (рис. 15) поясняет сущность регулярной прецессии, сложного движения, когда тело вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 вокруг оси z , связанной с телом, а эта ось вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси ζ . Между угловыми скоростями существуют следующие соотношения, вытекающие из параллелограмма скоростей:

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2;$$

$$\Omega / \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \omega_1 / \sin \alpha_2 = \omega_2 / \sin \alpha_1;$$

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2).$$

На рис. 15 показана обратная прецессия (собственный конус имеет внутреннее касание с конусом прецессии); Oz — ось собственного вращения; $O\zeta$ — ось прецессии; ω_1 — угловая скорость собственного вращения; ω_2 — угловая скорость вращения Oz вокруг неподвижной оси $O\zeta$. Прямая прецессия возникает, когда собственный конус касается внешней поверхности конуса прецессии. Земная ось имеет обратную прецессию. Она медленно прецессирует в пространстве, описывая конус за период, равный около 26 000 лет. Неподвижная ось прецессии перпендикулярна к плоскости эклиптики и составляет с земной осью угол $23,4^\circ$ на современную эпоху.

3.1.9. Кинематические уравнения Эйлера

На рис. 16 через $O\xi\eta\zeta$ обозначена основная неподвижная система координат, через $Oxyz$ — подвижная, связанная с твердым телом система. Начала обеих систем совпадают с неподвижной точкой O твердого тела.

Рис. 15. Геометрия движения твердого тела относительно неподвижной точки

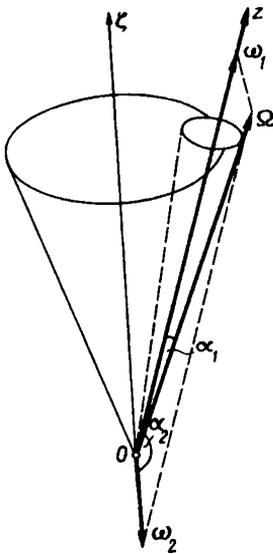
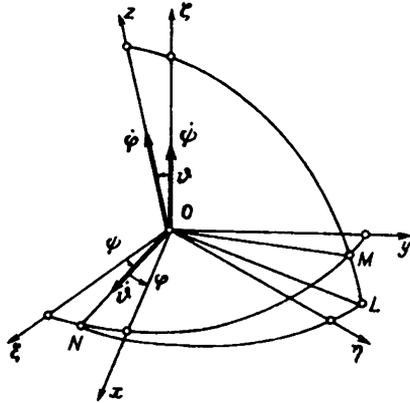


Рис. 16. Регулярная прецессия



Положение твердого тела на момент времени t определяется тремя углами Эйлера (ψ — угол между осью ξ и линией узлов ON ; θ — угол между осью прецессии ζ и осью собственного вращения z ; φ — угол между линией узлов ON и осью x). Угол φ и угловую скорость $\dot{\varphi}$ назовем углом и угловой скоростью собственного вращения; угол ψ и угловую скорость $\dot{\psi}$ — углом и угловой скоростью прецессии; угол θ и угловую скорость $\dot{\theta}$ — углом и угловой скоростью нутации, так как линию узлов ON принято называть осью нутации. Прямая OL перпендикулярна к плоскости $ON\zeta$, OM — перпендикулярна к плоскости ONz .

При изменении всех трех углов

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}k; \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}k^0; \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}n, \quad (226)$$

где k , k^0 , n — единичные орты осей собственного вращения, прецессии и нутации. Результирующая угловая скорость ω твердого тела равна сумме трех скоростей

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta}. \quad (227)$$

Переход от координат в неподвижной системе к координатам в подвижной системе выполняется тремя вращениями: на угол ψ вокруг оси ζ ; на угол θ вокруг линии узлов ON ; на угол φ вокруг оси z .

При этом координатные преобразования представим в матричной записи

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = P' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (228)$$

Элементы матрицы преобразования P имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta; \\
 p_{12} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta; \\
 p_{13} &= \sin \varphi \sin \theta; \\
 p_{21} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta; \\
 p_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta; \quad p_{23} = \cos \varphi \sin \theta; \\
 p_{31} &= \sin \psi \sin \theta; \quad p_{32} = -\cos \psi \sin \theta; \quad p_{33} = \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{229}$$

Выведем кинематические уравнения Эйлера, дающие проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ угловой скорости $\underline{\omega}$ на подвижные оси в функции эйлеровых углов и их производных.

Из рис. 16 следует, что

$$\mathbf{k}^0 = \mathbf{k} \cos \theta + \mathbf{m} \sin \theta, \tag{230}$$

где \mathbf{m} — единичный вектор линии OM .

Проектируем обе части равенства (227) на подвижные оси. Принимая во внимание соотношения (226) и (230) и замечая, что $\angle MOy = \varphi$, после упрощений получим три уравнения

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\
 \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\
 \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{231}$$

Для получения кинематических уравнений в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ выполним операции по аналогии с подвижной системой.

Единичные орты осей связаны так

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^0 \cos \theta - \mathbf{l} \sin \theta, \tag{232}$$

где \mathbf{l} — единичный вектор линии OL .

Теперь проектируем обе части равенства (227) на подвижные оси. Принимая во внимание соотношения (226) и (232) и, что $\angle \eta OL = \psi$, после упрощения получим

$$\begin{aligned}
 \omega_\xi &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\
 \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi; \\
 \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.
 \end{aligned} \tag{233}$$

Если закон движения известен, т. е. заданы зависимости $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$, то кинематические уравнения Эйлера позволяют вычислить угловую скорость $\underline{\omega}$ через ее проекции в подвижной системе координат.

Уравнения (231) содержат 6 неизвестных $\varphi, \psi, \theta, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ как функции времени. Динамические уравнения Эйлера содержат три уравнения, устанавливающие зависимость между $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и действующими силами. Присоединяя их к кинематическим уравнениям (231), будем иметь систему из шести дифференциальных уравнений первого порядка с шестью неизвестными. Из решения их можно определить все искомые величины.

3.1.10. Динамические уравнения Эйлера общего вида

Вспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{M}_0. \quad (234)$$

Производная $\dot{\mathbf{K}}_0$ есть абсолютная скорость точки K конца вектора \mathbf{K}_0 относительно неподвижной системы координат. Скорость точки K в подвижной системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , будет относительной. Если мы ее обозначим через $\dot{\mathbf{K}}\omega$, то

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \dot{\mathbf{K}}\omega + \underline{\omega} \times \mathbf{K}_0. \quad (235)$$

С учетом формул (234) и (235) имеем

$$\dot{\mathbf{K}}\omega + \underline{\omega} \times \mathbf{K}_0 = \mathbf{M}_0. \quad (236)$$

При этом

$$\underline{\omega} \times \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{bmatrix}. \quad (237)$$

Проектируем обе части уравнения (236) на оси подвижной системы. Принимая во внимание (221) и (237), после несложных преобразований получим обобщенные динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z - D(\omega_y^2 - \omega_z^2) - E(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) - \\ - F(\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z) = M_x; \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z - D(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) - E(\omega_z^2 - \omega_x^2) - \\ - F(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) = M_y; \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y - D(\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z) - E(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - \\ - F(\omega_x^2 - \omega_y^2) = M_z. \end{aligned} \quad (238)$$

При строгом решении задачи вращения планетарного тела вокруг центра инерции следует применять уравнения (238), выведенные с учетом того, что координатные оси в реальности не совпадают с главными осями инерции тела. Теория прецизионного гироскопа также должна быть построена на основе применения строгих уравнений (238), так как не удастся точно совместить координатные оси и главные оси инерции ротора гироскопа.

В частном случае, если предположим, что координатные оси совпадают с главными осями инерции тела, то $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0$, $D = E = F = 0$. Из системы (238) получим уравнения Эйлера в общепринятой формулировке задачи

$$\begin{aligned} A_0\dot{\omega}_x + (C_0 - B_0)\omega_y\omega_z = M_x; \\ B_0\dot{\omega}_y + (A_0 - C_0)\omega_x\omega_z = M_y; \\ C_0\dot{\omega}_z + (B_0 - A_0)\omega_x\omega_y = M_z. \end{aligned} \quad (239)$$

Система (239) представлена дифференциальными уравнениями движения твердого тела около неподвижной точки, выведенными Эйлером и называемыми динамическими уравнениями Эйлера. Присоединяя к этим трем уравнениям (239) три кинематических уравнения Эйлера (231), получим систему из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций времени φ , ψ , θ , ω_x , ω_y , ω_z . Общие интегралы должны содержать шесть произвольных постоянных, для определения которых нужно задавать начальное условие φ^0 , ψ^0 , θ^0 , ω_x^0 , ω_y^0 , ω_z^0 на начальную эпоху.

Составляющие главных моментов M_x , M_y , M_z , стоящих в правых частях формул (239), в общем случае являются функциями от эйлеровых углов, их производных и времени. Таким образом, динамические уравнения Эйлера не являются замкнутыми относительно введенных параметров ω_x , ω_y , ω_z . В этом смысле подразделение уравнений Эйлера на кинематические и динамические условно. Обе эти группы уравнений совместно описывают движение твердого тела около неподвижной точки.

Составляющие ω_x , ω_y , ω_z характеризуют положение тела относительно мгновенной оси вращения. Параметры $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ с помощью уравнений (233) представляют движение относительно неподвижной системы координат. Ось, фиксируемая относительно неподвижной системы отсчета эйлеровыми углами θ и ψ , определяет полюс инерции и экватор, в плоскости которого лежат две другие главные оси инерции тела.

Параметры $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ определяются из формул (231)

$$\begin{aligned}\dot{\psi} \sin \theta &= \omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi; \\ \dot{\theta} &= \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} &= \omega_z - (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta.\end{aligned}\tag{240}$$

Таким образом, каждая из систем компонентов вектора $\underline{\omega}$ может быть найдена с помощью уравнений (231) или (240), если только одна из них определена из динамических соотношений.

Астрономические определения широты, долготы и времени связаны с мгновенной осью вращения Земли. Эйлеровы углы служат параметрами для определения мгновенной оси вращения с помощью кинематических уравнений (231).

3.1.11. Реакция неподвижной точки

Реакция \mathbf{R} неподвижной точки не входит в уравнения Эйлера, так как ее момент относительно точки O равен нулю. Для определения реакции \mathbf{R} применим теорему о движении центра масс

$$M\dot{v}_C = \mathbf{R} + \mathbf{F}.\tag{241}$$

В частном случае, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой O , т. е. $r_C = 0$, тогда $v_C = 0$. Из формулы (241) следует, что $\mathbf{R} = -\mathbf{F}$.

При этом реакция неподвижной точки равна главному вектору внеш-

них сил по модулю и обратна по направлению. В общем случае ускорение центра масс $\dot{\mathbf{v}}_C$ может быть выражено по теореме Ривальса

$$\dot{\mathbf{v}}_C = \underline{\dot{\omega}} \times \mathbf{r}_C + \underline{\omega} (\underline{\omega} \times \mathbf{r}_C),$$

или

$$\dot{\mathbf{v}}_C = \dot{\omega} \times \mathbf{r}_C + \underline{\omega} (\underline{\omega} \times \mathbf{r}_C) - \omega^2 \mathbf{r}_C. \quad (242)$$

Составляющие по осям координат:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{C_x} &= \dot{\omega}_y z_C - \dot{\omega}_z y_C + \omega_x (\omega_x x_C + \omega_y y_C + \omega_z z_C) - \omega^2 x_C; \\ v_{C_y} &= \dot{\omega}_z x_C - \dot{\omega}_x z_C + \omega_y (\omega_x x_C + \omega_y y_C + \omega_z z_C) - \omega^2 y_C; \\ v_{C_z} &= \dot{\omega}_x y_C - \dot{\omega}_y x_C + \omega_z (\omega_x x_C + \omega_y y_C + \omega_z z_C) - \omega^2 z_C. \end{aligned} \quad (243)$$

Теперь запишем проекции обеих частей уравнения (241)

$$R_x = M \dot{v}_{C_x} - F_x; \quad R_y = M \dot{v}_{C_y} - F_y; \quad R_z = M \dot{v}_{C_z} - F_z. \quad (244)$$

Проинтегрировав уравнения Эйлера, найдем φ , ψ , θ , ω_x , ω_y , ω_z как функции времени. Подставив значения ω_x , ω_y , ω_z в уравнения (243), получим составляющие ускорения центра масс. Затем по формулам (244) вычислим составляющие реакции неподвижной точки.

3.2. ТЕНЗОР И ЭЛЛИпсоИД ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси зависит от распределения масс относительно этой оси. При изменении системы координат изменяются значения моментов A , B , C , D , E , F , характеризующие систему и распределение масс в пространстве.

Симметричную матрицу (223), представляющую полный спектр вторых моментов инерции Земли, назовем тензором инерции Земли — это важнейшая характеристика Земли в системе отсчета, относительно которой он определен. Тензор инерции Земли будем определять на эпоху, на которую установлена система координат и принят закон распределения масс в теле Земли. В действительности достаточно изменить ориентацию системы координат или закон распределения масс и соответственно изменятся все ее моменты инерции, включая вторые моменты A , B , C , D , E , F , составляющие тензор инерции Земли.

Для Земли гармонические коэффициенты геопотенциала определяются в геоцентрической системе координат $OXYZ$, установленной на среднюю эпоху 1900—1905 гг. Поэтому тензор инерции будет определен относительно этой системы. Однако распределение масс мы можем принять в соответствии с известными моделями Земли, допустим, на начало 1980 г. Тогда тензор инерции Земли будет определен на эпоху 1980 г. относительно системы координат $OXYZ$. Пусть момент инерции Земли относительно некоторой оси ξ определен формулой (224). Отложим от начала координат $OXYZ$ вдоль оси ξ отрезок $ON_\xi = I_\xi^{-1/2}$; при этом x , y , z — координаты точки N_ξ . Направляющие косинусы оси ξ в системе $OXYZ$ будут

$$\cos(X, \xi) = x \sqrt{I_\xi}; \quad \cos(Y, \xi) = y \sqrt{I_\xi}; \quad \cos(Z, \xi) = z \sqrt{I_\xi}. \quad (245)$$

Исключая в формуле (224) направляющие косинусы (245), имеем уравнение

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fxy - 2Exz - 2Dyz = 1, \quad (246)$$

отображающее геометрическое место точек N_ξ для всевозможных осей ξ .

Момент инерции для тела конечной массы имеет величину, конечную и отличную от нуля. Следовательно уравнение (246) если уравнение эллипсоида конечных размеров. Таким образом, тензор инерции второго ранга (223) однозначно определяет трехосный эллипсоид. Геометрический образ тензора инерции второго ранга называется эллипсоидом инерции твердого тела. В частном случае тензор инерции второго ранга (223), составляющими которого служат вторые моменты инерции Земли в геоцентрической системе отсчета, есть тензор инерции Земли и он же определяет эллипсоид инерции Земли.

3.3. ГЛАВНЫЕ ОСИ, ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ И ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ

Любой эллипсоид имеет главные оси. В частном случае трехмерный эллипсоид имеет главные оси u, v, w , относительно которых его уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1. \quad (247)$$

Если квадраты полуосей эллипсоида $a^2 = I_u^{-1}$, $b^2 = I_v^{-1}$, $c^2 = I_w^{-1}$, то

$$I_u u^2 + I_v v^2 + I_w w^2 = 1. \quad (248)$$

Сравним это уравнение с выражением (246). Центробежные моменты D, E, F относительно главных осей равны нулю.

Оси, относительно которых центробежные моменты равны нулю, назовем главными осями инерции, а моменты инерции относительно этих осей — главными моментами инерции тела. В геодезической задаче главные оси проходят через центр инерции Земли. Поэтому их назовем главными центральными осями инерции Земли. Моменты инерции относительно этих осей назовем главными центральными моментами инерции и обозначим A_0, B_0, C_0 .

В общей постановке для n -мерного эллипсоида поиск его главных осей сводится к определению корней векового уравнения. В нашей элементарной задаче, раскрыв определитель

$$|I - E\lambda| = \begin{vmatrix} A - \lambda & -F & -E \\ -F & B - \lambda & -D \\ -E & -D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (249)$$

получим вековое уравнение

$$\lambda^3 - (A + B + C)\lambda^2 + (AB + AC + BC - F^2 - E^2 - D^2)\lambda - (ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) = 0, \quad (250)$$

корнями которого и являются главные центральные моменты инерции A_0, B_0, C_0 .

Вековое уравнение (250) для Земли настолько чувствительно к ошибкам округления, что приходится оставлять до 20 и более значащих цифр, чтобы получить его корректное решение. Для планетарных тел оно плохо обусловлено, поэтому требуется математическая строгость при составлении его и в процессе решения относительно главных осей инерции A_0, B_0, C_0 . При вычислениях искоемых параметров A_0, B_0, C_0 применяют способ последовательных приближений.

Тензор инерции второго ранга в главных осях есть диагональная матрица, составленная из главных моментов инерции. Обозначим его через $I_0 = \{A_0, B_0, C_0\}$. Главный тензор инерции I_0 не зависит от принятой системы координат и является фундаментальным параметром планетарного тела. Он зависит только от распределения масс внутри тела. Определение главного тензора инерции, одного из фундаментальных параметров планетарного тела, является главной задачей планетарной геодезии.

3.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ФИГУРА ПЛАНЕТАРНОГО ТЕЛА. ПАРАМЕТРЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ЛУНЫ ПО СОВРЕМЕННЫМ ДАННЫМ

За динамическую фигуру планетарного тела примем трехосный эллипсоид инерции с полуосями $a_0 = A_0^{(-1/2)}$, $b_0 = B_0^{(-1/2)}$, $c_0 = C_0^{(-1/2)}$. Полярное и экваториальное сжатие динамической фигуры планетарного тела определим соответственно

$$\alpha_p = 1 - \frac{2c_0}{a_0 + b_0}; \quad \alpha_e = 1 - \frac{b_0}{a_0}. \quad (251)$$

Большая полуось a_0 совпадает с осью u , относительно которой главный момент инерции тела A_0 минимален; малая полуось c_0 совпадает с полярной осью w , относительно которой главный момент инерции C_0 максимален.

Таким образом, если известны моменты инерции планетарного тела относительно принятой системы отсчета координат $OXYZ$, то можно определить его динамическую фигуру в виде трехосного эллипсоида инерции и ориентацию главных осей. По вариациям главных моментов инерции и изменению ориентировки осей эллипсоида инерции во времени можно судить о планетарных изменениях фигуры и перемещениях масс внутри планетарного тела.

Как было показано ранее, если задан исходный тензор инерции I (223) в планетоцентрической системе координат, то главный тензор инерции I_0 , определяющий динамическую фигуру планетарного тела, есть решение векового уравнения (250). Теперь рассмотрим ориентировку главных осей динамической фигуры планетарного тела. Положим, что ее главные оси u, v, w ориентированы относительно планетоцентрической системы эйлеровыми углами φ, ψ, θ (см. рис. 16), $Oxyz \rightarrow OXYZ$ и $O\xi\eta\zeta \rightarrow Ouvw$. Хотя в этом случае обе системы отсчета вращаются относи-

тельно мгновенной оси вращения планетарного тела, однако углы Эйлера этих систем остаются стабильными во времени. Поэтому будем исходить из геометрических предпосылок.

Координатные преобразования выполним, используя формулы (228). Моменты инерции, составляющие тензоры I (233) и I_0 вычисляются с помощью уравнений (146), (147) и (250). Для этого достаточно установить масштабные параметры $a_2^2 M$ и H . При этом, особое значение придается решению кубического уравнения (250), которое чувствительно к ошибкам округления. Это решение должно выполняться самым тщательным образом, чтобы надежно оценить главный тензор инерции I_0 .

Задачу определения эйлеровых углов θ , φ , ψ отделим от задачи поиска главного тензора I_0 .

Формулы (228), полагая $\cos \theta = 1$ и $\lambda_0 = \varphi + \psi$, запишем в виде

$$\begin{aligned} u &= X \cos \lambda_0 - Y \sin \lambda_0 + Z(\xi \sin \lambda_0 - \eta \cos \lambda_0); \\ v &= X \sin \lambda_0 + Y \cos \lambda_0 - Z(\xi \cos \lambda_0 + \eta \sin \lambda_0); \\ \omega &= X\eta + Y\xi + Z, \end{aligned} \quad (252)$$

где $\xi = \sin \theta \cos \varphi$; $\eta = \sin \theta \sin \varphi$.

Для главных осей инерции центробежные моменты равны нулю, т. е. соблюдаются условия

$$\int_M u v d m = 0; \quad \int_M u \omega d m = 0; \quad \int_M v \omega d m = 0. \quad (253)$$

Ввиду малости угла θ и центральных моментов инерции, полагая $D \sin \theta = 0$, $E \sin \theta = 0$, $F \sin \theta = 0$, преобразуем формулы (252) под условием (253)

$$\begin{aligned} \sin 2\lambda_0 \int_M (X^2 - Y^2) d m + 2 \cos 2\lambda_0 \int_M X Y d m &= 0; \\ \xi \int_M (Y^2 - Z^2) d m + \int_M Y Z d m &= 0; \\ \eta \int_M (X^2 - Z^2) d m + \int_M X Z d m &= 0. \end{aligned} \quad (254)$$

С учетом соотношений (146) из уравнений (254) получим формулы для вычисления эйлеровых углов

$$\operatorname{tg} 2\lambda_0 = -\frac{K_{22}}{I_{22}}; \quad (255)$$

$$\xi = \frac{K_{21}}{I_2 + 2I_{22}}; \quad \eta = \frac{I_{21}}{I_2 - 2I_{22}}; \quad (256)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{21}(I_2 + 2I_{22})}{K_{21}(I_2 - 2I_{22})}; \quad \psi = \lambda_0 - \varphi, \quad (257)$$

выраженные через вторые гармонические коэффициенты разложения гравитационного потенциала планетарного тела. Формулу для долготы λ_0 , аналогичную формуле (255), получил М. Бурша.

Задаваясь тензором инерции Земли в фиксированной в теле Земли системе отсчета на определенную эпоху, можно вычислить главный тензор инерции Земли и ориентацию главных осей ее динамической фигуры. Наблюдая за этими фундаментальными параметрами, можно судить о планетарных изменениях фигуры Земли и геофизических процессах в ее теле.

Периодические планетарные изменения динамической фигуры Земли обусловлены деформациями от сил притяжения в системе Солнце — Земля — Луна. Эти изменения с необходимой точностью могут быть предвычислены и учтены в геодезических и астрометрических расчетах. До сих пор планетарные изменения, связанные с перемещением масс в теле, на поверхности и в воздушной оболочке Земли, геодезически не изучены. Эта задача примыкает к геодинамическим проблемам планетарной геодезии.

Теория определения параметров динамической фигуры Земли рассмотрена применительно к абсолютно твердому телу. В действительности перемещение масс в ее теле должно приводить к изменению тензора инерции и, следовательно, к изменению значений главных центральных моментов A_0 , B_0 , C_0 инерции Земли и ориентации главных центральных осей инерции u , v , w .

Важное значение для планетарной геодезии имеет оценка взаимного положения инерциальных, средних и мгновенных полюсов Земли. Под инерциальным полюсом мы понимаем пересечение с поверхностью Земли ее главной центральной оси инерции w , относительно которой Земля обладает максимальным главным центральным моментом инерции.

Устанавливая параметры уровенного эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего планетарный геоид и во многих задачах теории и практики применения геодезических данных представляющего фигуру Земли, необходимо ось вращения уровенного эллипсоида точно совмещать с главной центральной осью инерции Земли w , а ее центр — с центром инерции Земли.

Достижаемые точности и требования к исходным геодезическим параметрам таковы, что приходится изучать эллипсоид инерции Земли и его ориентировку относительно уровенного эллипсоида Земли. Если центры двух эллипсоидов не совмещены, то прибавляются еще параметры du_0 , dv_0 , dw_0 взаимного положения центров двух эллипсоидов. В общем случае для любой заданной точки в теле Земли можно построить эллипсоид инерции.

За динамическую фигуру Земли принимают центральный эллипсоид инерции Земли, оси которого совмещены с главными центральными осями инерции, а центр его совпадает с центром инерции Земли.

Известно, что динамическое сжатие H отличается от сжатия α уровенного эллипсоида. Равенство динамического сжатия H и гравитационного сжатия α невозможно, так как динамическая и гравитацион-

ная фигуры Земли друг от друга отличаются, и тем более они предназначены для решения разных задач. Однако есть одна фундаментальная проблема о вращении Земли вокруг своей мгновенной оси, при изучении которой нужно использовать различие обеих фигур в полном спектре. Близость инерциальных и средних полюсов упрощает изучение их движения. По существу, в этом случае движение полюсов будет отождествлено с движением мгновенного полюса относительно полюса инерции Земли. Уточнение коэффициентов первого и второго порядков неzonальных гармоник притяжения Земли облегчает решение этой задачи.

Если оси земной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции Земли, то из выведенных формул следует, что все неzonальные коэффициенты первого и второго порядков, кроме I_{22} , должны отсутствовать, т. е. должно соблюдаться условие $I_{21} = K_{21} = K_{22} = 0$. Во всех моделях Земли указанные коэффициенты неzonальных гармоник первого и второго порядков отличаются от нуля. Следовательно оси земной системы координат не совпадают с главными центральными осями инерции, а средний полюс не совпадает с полюсом инерции.

Однако коэффициенты I_{21} и K_{21} настолько малы, что по существу центробежные моменты D и E каждый по модулю в 10^8 раз меньше, чем главные моменты. Это признак близости средних и инерциальных полюсов, т. е. θ — малый угол. Следовательно во многих случаях можно пренебречь несовпадением полярных осей динамического и гравитационного эллипсоидов. Из-за малости угла θ долготу λ_0 главной центральной оси инерции, относительно которой Земля обладает наименьшим главным центральным моментом инерции, можно вычислять как сумму двух эйлеровых углов φ и ψ . Этот прием использовался при изучении взаимной ориентации двух систем координат.

3.5. МОМЕНТ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ЗЕМЛИ

В качестве координатных осей примем главные оси инерции. Тогда $D = E = F = 0$ и проекции кинетического момента (221) определяется формулами

$$K_x = A_0 \omega_x; \quad K_y = B_0 \omega_y; \quad K_z = C_0 \omega_z. \quad (258)$$

Покажем, что главные оси инерции будут единственными направлениями, для которых векторы $\underline{\omega}$ и \mathbf{K}_0 коллинеарны. В самом деле, если эти векторы коллинеарны, то векторное их произведение равно нулю

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ A_0 \omega_x & B_0 \omega_y & C_0 \omega_z \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеет соотношения

$$(B_0 - C_0) \omega_y \omega_z = 0; \quad (C_0 - A_0) \omega_z \omega_x = 0; \quad (A_0 - B_0) \omega_x \omega_y = 0. \quad (259)$$

Если моменты инерции не равны между собой, то уравнения (259) можно решить, приняв две из проекций угловой скорости равными нулю. Следовательно главные оси являются единственными направлениями, для которых векторы $\underline{\omega}$ и \mathbf{K}_0 коллинеарны.

Пусть два из моментов инерции равны между собой, например $A_0 = B_0$, т. е. эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения. В этом случае достаточно принять $\omega_z = 0$, тогда удовлетворяются все три уравнения. Оси, лежащие в плоскости экватора Oxy , являются главными. Если принять $\omega_x = \omega_y = 0$, то главной осью будет ось z , по которой $\underline{\omega} = \omega_z \mathbf{k} \neq 0$.

Если $A_0 = B_0 = C_0$, тогда эллипсоид инерции превращается в сферу. В этом случае уравнения (259) удовлетворяются при любых значениях $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, т. е. векторы $\underline{\omega}$ и \mathbf{K}_0 коллинеарны при вращении вокруг любой оси, проходящей через неподвижную точку.

Таким образом, кинетический момент \mathbf{K}_0 и угловая скорость $\underline{\omega}$ могут быть коллинеарны только по главным осям эллипсоида инерции. В этом заключается динамический смысл главных осей инерции.

У реальной Земли мгновенная ось вращения не совпадает с ее главной полярной осью инерции. Относительно правой системы координат $OXYZ$ (ось OZ совпадает с осью вращения Земли; ось OX направлена в точку Гринвича; вектор $\underline{\omega} = \omega \mathbf{K}$) центробежные моменты инерции не равны нулю. Поэтому момент добавочной реакции на ось свободно вращающейся Земли ($M_0 = 0, \omega = \omega_z = \text{const}$) отличен от нуля и согласно уравнениям (218) имеет составляющие по осям координат

$$R_x = D\omega^2; \quad R_y = -E\omega^2; \quad R_z = 0. \quad (260)$$

Иначе говоря, имеется кинетический момент центробежных сил

$$\mathbf{K}_R = -E\omega \mathbf{i} - D\omega \mathbf{j} + C\omega \mathbf{k}, \quad (261)$$

который при векторном умножении слева на вектор угловой скорости дает момент реакции на ось вращения Земли, т. е.

$$\mathbf{R} = \underline{\omega} \times \mathbf{K}_R. \quad (262)$$

В действительности вектор R момента реакции на мгновенную ось вращения Земли имеет составляющие, точно соответствующие выражениям (260).

В нашем частном случае, когда $M_0 = 0, \omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega = \omega_z = \text{const}$, согласно уравнениям (238) составляющие момента центробежной силы вычисляются по формулам (260), полученным из уравнений (218).

3.6. ПОЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ $\underline{\omega}$ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ \mathbf{K}_0 ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЯРНОЙ ОСИ ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ

Каждое мгновенное движение Земли относительно центра масс представляет собой элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения, расположенной под углом θ_1 к полярной оси инерции и проходящей

через ее центр масс. В разные моменты времени мгновенная ось вращения по-разному расположена внутри Земли. Это изменение положения мгновенной оси вращения зависит от ее расположения по отношению к вектору момента количества движения \mathbf{K}_0 . Как ранее было показано, если векторы $\underline{\omega}$ и \mathbf{K}_0 коллинеарны, то мгновенная ось вращения совпадает с полярной осью инерции тела и не изменяет свое положение внутри тела.

Направляющие косинусы вектора \mathbf{K}_0 относительно главных осей инерции с учетом формул (226) имеют значения:

$$\cos(K_0, x) = A_0 \omega_x K_0^{-1};$$

$$\cos(K_0, y) = B_0 \omega_y K_0^{-1};$$

$$\cos(K_0, z) = C_0 \omega_z K_0^{-1};$$

$$K_0^2 = A_0^2 \omega_x^2 + B_0^2 \omega_y^2 + C_0^2 \omega_z^2.$$

Если $A_0 = B_0$, то

$$K_0^2 = \omega^2 (A_0^2 \sin^2 \theta_1 + C_0^2 \cos^2 \theta_1),$$

ибо $\cos \theta_1 = \omega_z \omega^{-1}$, поэтому $\omega_z^2 = \omega^2 \cos^2 \theta_1$. Следовательно

$$\sin \theta_2 = \sin(K_0, z) = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{1 + \frac{C_0^2 - A_0^2}{A_0^2} \cos^2 \theta_1}} < \sin \theta_1.$$

Угол θ_1 вектора угловой скорости $\underline{\omega}$ настолько мал, что можно записать соотношение

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{C_0}{A_0}. \quad (263)$$

Сформулируем два положения:

1) полярный момент инерции относится к экваториальному моменту инерции Земли так же, как относятся синусы углов ее вектора угловой скорости и вектора момента количества движения;

2) вектор момента количества движения расположен между полярной осью инерции и мгновенной осью вращения Земли.

Как следует из исследований, для Земли отношение полярного момента инерции C_0 к экваториальному моменту инерции A_0 отличается от единицы, значит ощутимо и изменение положения мгновенной оси вращения Земли в ее теле.

Положим задан вектор \mathbf{N} , приложенный к неподвижной точке O , с составляющими $x_N = n \omega_x$, $y = n \omega_y$, $z = n \omega_z$. Если теперь подставим значения составляющих вектора $\underline{\omega}$, выраженные через составляющие вектора \mathbf{N} в формулу (225) и примем $T = \text{const}$, то получим формулу

$$2Tn^2 = Ax_N^2 + By_N^2 + Cz_N^2 - 2Dy_N z_N - 2Ex_N z_N - 2Fx_N y_N =$$

$$2\Phi(x_N, y_N, z_N) = \text{const},$$

представляющую собой уравнение эллипсоида. Подобрав коэффициент пропорциональности n , получим уравнение эллипсоида инерции.

Кроме того

$$\partial\Phi/\partial x_N = Ax_N - Fy_N - Ez_N;$$

$$\partial\Phi/\partial y_N = -Fx_N + By_N - Dz_N;$$

$$\partial\Phi/\partial z_N = -Ex_N - Dy_N + Cz_N.$$

Сравнивая эти выражения с формулами (221), определим, что

$$nK_0 = \nabla\Phi(x_N, y_N, z_N).$$

т. е. кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки O с точностью до постоянного множителя есть градиент скалярной функции $\Phi(x_N, y_N, z_N)$.

Как мы установили, скалярная функция Φ геометрически представляет поверхность эллипсоида инерции, если подобрать соответствующим образом нормирующий коэффициент n . Градиент скалярного поля Φ нормален к поверхности $\Phi(x_N, y_N, z_N) = \text{const}$.

Таким образом, доказана теорема: вектор кинетического момента K_0 , приложенный к неподвижной точке O , параллелен нормали n к эллипсоиду инерции в точке $N(x_N, y_N, z_N)$, в которой эллипсоид инерции пересекается с мгновенной осью вращения тела.

Углы $\theta_1 = (\omega, z)$, $\theta_2 = (K_0, z)$ и $\theta_3 = (\omega, K_0)$ можно вычислить для общего случая $A_0 \neq B_0 \neq C_0$. Так например, косинус угла между двумя векторами

$$\cos\theta_3 = \frac{\omega K_0}{\omega K_0},$$

откуда

$$\sin\theta_3 = \frac{\sqrt{(C_0 - A_0)^2 \omega_x^2 \omega_z^2 + (C_0 - B_0)^2 \omega_x \omega_y^2 + (B_0 - A_0)^2 \omega_y^2 \omega_x^2}}{K_0 \omega},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{A_0^2 \omega_x^2 + B_0^2 \omega_y^2}}{K_0}; \quad \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega}. \quad (264)$$

Из этих соотношений видно, что $\theta_3 < \theta_2 < \theta_1$. Как было установлено, мгновенная ось вращения и ось инерции тела располагаются по обе стороны от вектора K_0 . Причем они не лежат в одной плоскости, ибо из выражения синуса двугранного угла δ , составленного плоскостями OZK_0 и $OZ\omega$, т. е.

$$\sin\delta = \frac{(B_0 - A_0)\omega_x \omega_y}{\sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)(A_0^2 \omega_x^2 + B_0^2 \omega_y^2)}} \approx \frac{B_0 - A_0}{A_0} \frac{\omega_x \omega_y}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (265)$$

имеем $\delta = 0$, если только $A_0 = B_0$. У эллипсоида вращения полуоси, нормаль и радиус-вектор лежат в плоскости меридиана.

3.7. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Для облегчения интегрирования эйлеровых дифференциальных уравнений движения твердого тела приходится прибегать к упрощенным предположениям. Первое упрощение нами уже сделано, когда мы полагаем, что оси подвижной системы координат совпадают с главными осями инерции твердого тела. Это возможно только теоретически, а в действительности подвижную систему отсчета не удастся совместить с главными осями инерции Земли. Необходимо точно выполнить это условие. Косвенным признаком соблюдения этого условия служат значения центробежных моментов D , E , F . Как видно из исследований, изложенных в предыдущем разделе, они по величине существенно отличаются от нуля и ими можно пренебречь, оговорив точность решения задачи.

Второе упрощение, когда главный момент M_0 внешних сил относительно неподвижной точки принимается равным нулю — случай Эйлера. Система (239) становится автономной и может быть решена отдельно от системы (231), поскольку теперь динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= 0; \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= 0; \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= 0 \end{aligned} \quad (266)$$

связывают только моменты инерции тела и искомые параметры ω_x , ω_y , ω_z .

Здесь и в последующем главные моменты инерции будем писать без нижнего индекса.

Условие $M_0 = 0$ представляет частный случай вращательного движения планетарного тела вокруг своего центра масс, когда оно не зависит от орбитального движения планетарного тела. Для нешарового планетарного тела, имеющего несферическое распределение масс, закон вращательного движения существенно зависит от орбитального движения. Поэтому строгая теория вращения Земли основывается на учете главного момента M_0 действующих внешних сил. Таким образом, случай Эйлера (266) является первым приближением в теории вращения планетарного тела.

Следующим шагом является допущение, что моменты инерции относительно главных экваториальных осей инерции равны, т. е. $A = B$, иначе говоря тензор инерции представляет эллипсоид вращения.

Очевидно первое допущение необходимо для того, чтобы решение уравнений общего вида (238) заменить решением уравнений (239), имеющих более простой вид.

В настоящее время центробежные моменты D , E , F для Земли известны с такой точностью, что их можно использовать для вычисления необходимых членов уравнений (239). В этом случае, не прибегая к упрощениям, можно решить их численным методом.

Когда необходимо выполнить точные оценки, тем более в случае

применения ЭВМ, не оправдано допущение о равенстве экваториальных моментов инерции Земли. Все современные данные доказывают, что разность моментов инерций B и A значительна и ею нельзя пренебрегать в построении строгой теории вращения Земли.

Сначала рассмотрим замкнутую систему $M_0=0$, предположив, что $A \neq B \neq C$. В этом случае интегрирование дифференциальных уравнений Эйлера потребует специальных приемов вычисления.

Для нахождения первого интеграла умножим строки системы (266) соответственно на $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$. Сложив их почленно, получим уравнение

$$A^2\omega_x\dot{\omega}_x + B^2\omega_y\dot{\omega}_y + C^2\omega_z\dot{\omega}_z = 0,$$

интеграл которого

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C\omega_z^2 = K_0 \quad (267)$$

постоянная величина, равная квадрату кинетического момента. В самом деле, по условию $M_0=0$, $K_0=\text{const}$. Из соотношения (258) получаем равенство (267).

Теперь умножим строки системы (266) соответственно на ω_x , ω_y , ω_z и почленно сложим. Тогда получим выражение

$$A\omega_x\dot{\omega}_x + B\omega_y\dot{\omega}_y + C\omega_z\dot{\omega}_z = 0,$$

интеграл которого

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 2T_0 \quad (268)$$

тоже величина постоянная, равная удвоенной кинетической энергии. В действительности, приняв $D=E=F=0$ в уравнении (225) получим равенство (268). С другой стороны, из постоянства K_0^2 следует и постоянство T_0 .

Для поиска третьего интеграла полученные нами уравнения (267) и (268) запишем

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 = f_1; \quad A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 = f_2, \quad (269)$$

где $f_1 = 2T_0 - C\omega_z^2$; $f_2 = K_0^2 - C^2\omega_z^2$; определитель $\Delta = AB(B-A)$ отличен от нуля из-за условия $A \neq B$.

Решая уравнения (269) относительно параметров, получим

$$\omega_x = \sqrt{\frac{f_1 B - f_2}{A(B-A)}}; \quad \omega_y = \sqrt{\frac{f_2 - f_1 A}{B(B-A)}}; \quad (270)$$

$$\frac{B-A}{C} \omega_x \omega_y = \sqrt{\frac{(f_1 B - f_2)(f_2 - f_1 A)}{ABC^2}} = f, \quad (271)$$

т. е.

$$\frac{B-A}{C} \omega_x \omega_y = f(\omega_z, T_0, K_0). \quad (272)$$

С учетом третьей строки системы (266) имеем уравнение

$$d\omega_z/f + dt = 0,$$

интеграл которого

$$\int d\omega_z/f = -t + c, \quad (273)$$

где c — постоянная интегрирования.

После подстановки значения f (271) в левой части формулы (273) получится эллиптический интеграл. Произвольные постоянные определяются начальными условиями на момент t_0 .

Теперь рассмотрим случай $A=B$. С учетом этого условия и ранее выведенных формул (267) и (268) систему (266) запишем в виде

$$A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2 = 2T_0;$$

$$A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C^2\omega_z^2 = K_0^2;$$

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const}. \quad (274)$$

В этом случае $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const}$. Кинетический момент K_0 постоянен как по величине, так и по направлению относительно основной системы.

Для простоты вычислений ось ζ основной системы направим по направлению вектора \mathbf{K}_0 , тогда проекции кинетического момента на подвижные оси будут

$$K_x = A\omega_x = K_0 \sin \theta \sin \varphi;$$

$$K_y = A\omega_y = K_0 \sin \theta \cos \varphi;$$

$$K_z = C\omega_0 = K_0 \cos \theta. \quad (275)$$

Отсюда видно, что угол нутации $\theta = \text{const}$ вычисляется по формуле

$$\cos \theta = C\omega_0/K_0.$$

С учетом кинематических уравнений Эйлера (231) и первых двух строк системы (238), принимая $\dot{\theta} = 0$, получим соотношение

$$\dot{\psi} = K_0/A = n = \text{const}, \quad (276)$$

интеграл которого

$$\psi = nt + \psi_0$$

где n — постоянная прецессии оси вращения по долготе; ψ_0 — значение угла прецессии на начальную эпоху.

Подставляя $\omega_z = \omega_0$, $\theta = \theta_0$ и $\dot{\psi} = n$ в третье уравнение (231), получим

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - n \cos \theta_0 = n_1 = \text{const}. \quad (277)$$

Отсюда $\varphi = n_1 t + \varphi_0$, где φ_0 — значение угла собственного вращения на начальную эпоху.

Таким образом, углы Эйлера определяются следующими соотношениями

$$\vartheta = \vartheta_0; \quad \psi = nt + \psi_0; \quad \varphi = (\omega_0 - n \cos \vartheta_0)t + \varphi_0. \quad (278)$$

Все три интеграла табличные. Вычисление углов Эйлера сводится к линейной интерполяции.

Рассмотрим приемы интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера, исходя из более общих предпосылок и с учетом главного момента M_0 внешних сил. Силовую функцию U притяжения для Земли будем вычислять с учетом малых членов, содержащих третью степень обратного значения расстояний r_i от Земли до Солнца, Луны и планет. Такое допущение естественно, ибо эти расстояния так велики по сравнению с линейными размерами планет, а члены выше третьей степени обратного значения расстояний r_i настолько малы, что можно ими пренебречь без ущерба для точности вычислений. Тогда силовая функция U притяжения Земли с массой M другим небесным телом с массой M' , с учетом членов разложения r^{-3} , равна [4]

$$U = \int_M \int_{M'} \frac{dm \, dm'}{\rho} = f \left(\frac{MM'}{r} + M \frac{A' + B' + C' - 3I'_2}{2r^3} + M' \frac{A + B + C - 3I_2}{2r^3} \right), \quad (279)$$

где ρ — расстояние между элементарными массами dm и dm' ; r — расстояние между центрами масс внешнего тела и Земли; I_r, I'_r — моменты инерции Земли и внешнего тела относительно оси r ; A, B, C и A', B', C' — главные моменты инерции Земли и внешнего тела.

Положим, каждое небесное тело притягивает Землю как точечная масса, т. е. масса небесного тела сосредоточена в центре его инерции. Тогда второй член выражения (279) равен нулю, так как $A' = B' = C' = I'_r$. Кроме того, подставляя в уравнение (279) значение осевого момента (224)

$$I_r = A \left(\frac{x'}{r} \right)^2 + B \left(\frac{y'}{r} \right)^2 + C \left(\frac{z'}{r} \right)^2,$$

где x', y', z' — геоцентрические координаты небесного тела, имеем

$$U = -\frac{3}{2} f \frac{M'}{r^3} \left\{ \left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{z'}{r} \right)^2 + \frac{B-A}{2} \left[\left(\frac{y'}{r} \right)^2 - \left(\frac{x'}{r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (280)$$

Так как

$$M_x = z' \frac{\partial U}{\partial y'} - y' \frac{\partial U}{\partial z'};$$

$$M_y = x' \frac{\partial U}{\partial z'} - z' \frac{\partial U}{\partial x'};$$

$$M_z = y' \frac{\partial U}{\partial x'} - x' \frac{\partial U}{\partial y'},$$

с учетом (280), получим составляющие моменты внешних сил по осям координат

$$\begin{aligned}
 M_x &= 3fM'(C-B) \frac{y'z'}{r^5}; \\
 M_y &= 3fM'(A-C) \frac{x'z'}{r^5}; \\
 M_z &= 3fM'(B-A) \frac{x'y'}{r^5}.
 \end{aligned} \tag{281}$$

Если эллипсоид инерции симметричен относительно полярной оси, то

$$M_x = 3fM'(C-A) \frac{y'z'}{r^5}; \quad M_y = -3fM'(C-A) \frac{x'z'}{r^5}; \quad M_z = 0. \tag{282}$$

Силовая функция (280) имеет вид

$$U = -\frac{3}{2}fM'(C-A) \frac{z'^2}{r^5}. \tag{283}$$

Третья строка системы (239) будет

$$C\omega_z = 0. \tag{284}$$

Отсюда соответствующая строка системы (231)

$$\omega_z = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} = \text{const}. \tag{285}$$

Лагранжевая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат q (φ, ψ, ϑ) для потенциальных сил имеет вид [4]

$$\begin{aligned}
 M_x &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cos \varphi; \\
 M_y &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \sin \varphi; \\
 M_z &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{286}$$

Таким образом имеем следующие две системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \\
 \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi; \\
 \omega_z &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi},
 \end{aligned} \tag{287}$$

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cos \varphi; \\
 B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_x\omega_z &= \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \sin \varphi; \\
 C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{288}$$

Заметим, что система (287) эквивалентна системе (240).

Силовая функция U , вычисляемая по формуле (280), может быть

представлена через обобщенные координаты q (φ, ψ, θ) и геоцентрические координаты r, β, λ небесного тела относительно эклиптики и равноденствия начальной эпохи. В самом деле

$$\xi' = r \cos \beta \cos \lambda; \quad \eta' = r \cos \beta \sin \lambda; \quad \zeta' = r \sin \beta.$$

Переход от координат небесного тела в неподвижной системе к координатам в подвижной системе осуществляется с помощью формулы (228).

Уравнения (287) и (288) решаем приближениями, последовательно варьируя параметрами. Из условия $M_0=0, A=B$ находим нулевое приближение параметров θ, ψ, φ (282) и $\dot{\psi} \sin \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ (240). Затем, используя параметры нулевого приближения, приступаем к решению уравнений (287) и (288) в первом приближении с учетом притяжения Солнца и Луны. При этом целесообразно учесть периодические изменения главных моментов инерции Земли из-за приливных сил притяжения Луны и Солнца.

Второе приближение повторяет первое с учетом значений параметров, выведенных в первом приближении. Затем можно вычислить малые изменения параметров из-за притяжения каждой планеты Солнечной системы.

Описанный прием интегрирования позволяет вывести длиннопериодические и короткопериодические члены, обусловленные притяжением каждого небесного тела.

В 1953 г. Э. Вулард, полагая $A=B$ и представляя системы (287) и (288) в форме

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = \text{const},$$

$$A \dot{\omega}_x + (C-A) \omega_y \omega_x = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cos \varphi;$$

$$A \dot{\omega}_y - (C-A) \omega_x \omega_z = \left(\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \sin \varphi;$$

$$C \dot{\omega}_z = 0,$$

получил аналитическое решение с первого приближения для системы Солнце — Земля — Луна.

В первом приближении Э. Вулард нашел уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{C \omega_z \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{A}{C \omega_z \sin \theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} - \frac{A}{C \omega_z} \cos \theta \dot{\psi}^2;$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{C \omega_z \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{A}{C \omega_z} \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) - \frac{A}{C \omega_z} \cos \theta \dot{\psi} \dot{\theta}.$$

Затем, отбросив члены второго порядка, он интегрировал уравнения Пуассона

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{C \omega_z \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad \dot{\theta} = \frac{1}{C \omega_z \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

и получил разложения для лунно-солнечной прецессии и нутации. Прецессия и нутация оси вращения по долготе и наклонению, полученные Э. Вулардом и сведенные им в таблицы, были приняты в качестве стандарта Международным астрономическим союзом. При вычислении координат Луны Э. Вулардом использована теория Луны Брауна, при вычислении координат Солнца — теория Солнца Ньюкома.

Теория Вуларда, справедливая для Земли, динамически симметричной в смысле $A=B$, и приводящая к интегралу $\psi \cos \phi + \phi = \text{const}$, дает приближенные разложения для прецессии и нутации оси вращения Земли и не позволяет объяснить возможные вековые движения ее полюсов. На это обстоятельство обратил внимание Ж. С. Ержанов, разрабатывая теорию вращения абсолютно твердой Земли, обладающей трехосным эллипсоидом инерции [5].

Ж. С. Ержанов показал возможность вычисления постоянных прецессии и нутации оси вращения Земли, выявляя отдельный, групповой или общий вклад в эти постоянные Луны, Солнца и планет. Существование короткопериодической нутации не обязательно объясняется существованием у Земли жидкого ядра, абсолютно твердое тело допускает любые короткопериодические волны нутации.

3.8. ПАРАМЕТРЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ И ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ

Приложение теории динамики Земли проиллюстрируем на примере вычисления параметров динамической фигуры Земли, используя формулы (229)–(249) — (257) и модели внешнего гравитационного поля Земли GEM6, GEM9, GEM10. Результаты вычислений помещены в табл. 7, где A_0 , B_0 , C_0 — главные моменты инерции Земли; Θ , ϕ и ψ — эйлеровы углы, которые составляют главные оси u , v , w инерции Земли с осями X , Y , Z земной системы геодезических координат; λ_0 — долгота плоскости меридиана оси u , относительно которой Земля обладает наименьшим главным моментом инерции A_0 ; λ_ω — долгота полюса инерции Земли относительно начального меридиана и среднего полюса; α_e и α_p — экваториальное и полярное сжатие эллипсоида инерции Земли.

Вычисления показывают, что основные параметры динамической фигуры Земли достаточно надежно определяются по моделям ее внешнего гравитационного поля. Расхождение абсолютных значений главных моментов инерций в моделях GEM6, GEM9, GEM10 получают из-за отличия масштабов, принятых в этих моделях ($\alpha_e = 6\,378\,155$ м — GEM6, $\alpha_e = 6\,378\,140$ м — GEM9, GEM10). При равном масштабе относительные ошибки определения главных моментов инерции для моделей составляют: GEM6 и GEM9 — $1/1\,000\,000$; GEM9 и GEM10 — $1/4\,000\,000$.

Обнаружено систематическое изменение основных параметров, которое, видимо, объясняется планетарной эволюцией Земли. Во всяком случае, геодезические определения параметров динамической фигуры Земли имеют достаточно надежную оценку и можно следить за временными

$$M = 5,973327588 \cdot 10^{27} \text{ г}; H = 3272,6 \cdot 10^{-6}$$

| Параметр | GEM6 | GEM9 | GEM10 |
|--|-----------------|-----------------|-----------------|
| $I_2 \cdot 10^6$ | 1082,6283 | 1082,62708 | 1082,62684 |
| $I_{22} \cdot 10^6$ | -1,5654 | -1,57114 | -1,5711 |
| $K_{22} \cdot 10^6$ | 0,8961 | 0,90231 | 0,90310 |
| $I_{21} \cdot 10^6$ | 0,0012 | 0,00027 | -0,00134 |
| $K_{21} \cdot 10^6$ | 0,0041 | 0,00524 | +0,00314 |
| $a, \text{ м}$ | 6 378 155 | 6 378 140 | 6 378 140 |
| $A_0/a^2 M$ | 0,329 729 721 | 0,329 729 334 | 0,329 729 258 |
| $B_0/a^2 M$ | 0,329 736 936 | 0,329 736 581 | 0,329 736 507 |
| $C_0/a^2 M$ | 0,330 815 957 | 0,330 815 585 | 0,330 815 509 |
| α_c | 0,000 010 940 7 | 0,000 010 989 4 | 0,000 010 991 9 |
| α_p | 0,001 637 632 0 | 0,001 636 282 1 | 0,001 636 282 1 |
| λ_0 | -14°53,7' | -14°56,1' | -14°56,7' |
| ξ | 0,783" | 1,001" | 0,600" |
| η | 0,228" | 0,051" | -0,255" |
| θ | 0,82" | 1,00" | 0,64" |
| φ | 16°14,1' | 2°56,0' | -22°59,4' |
| ψ | -31°07,8' | -17°52,1' | 8°02,7' |
| λ_{cp} | -73°45,9' | -87°04,0' | -112°59,4' |
| $A_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г} \cdot \text{см}^2$ | 8,012 435 863 | 8,012 388 772 | 8,012 386 925 |
| $B_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г} \cdot \text{см}^2$ | 8,012 611 188 | 8,012 564 873 | 8,012 563 075 |
| $C_0 \cdot 10^{-44}, \text{ г} \cdot \text{см}^2$ | 8,038 831 410 | 8,038 784 559 | 8,038 782 712 |
| $B_0 - A_0$ | | | |
| $\frac{2C_0 - (A_0 + B_0)}{\theta_3(\omega, K_0)}$ | 0,003 332 17 | 0,003 332 17 | 0,003 346 95 |
| | 0,0026" | 0,0026" | 0,0026" |

вариациями этих параметров. Если внутри Земли всплывает легкий материал, то это должно проявиться в вековом уменьшении моментов инерции Земли. Вековое уменьшение моментов инерции может быть обусловлено и общим уменьшением объема Земли.

На эпоху 1975 г. за тензор инерции Земли можно принять тензор второго ранга I (223), элементами которого являются вторые моменты инерции Земли $A = 0,329 729 778$, $D = -0,418 \cdot 10^{-8}$, $B = 0,329 736 063$, $E = -0,043 \cdot 10^{-8}$, $C = 0,330 815 546$, $F = -90,270 \cdot 10^{-8}$, масштабированные на $a_c^2 M$. За главные моменты инерции Земли на эту эпоху можно рекомендовать их средние значения, определяемые по моделям GEM9 и GEM10, т. е. $A_0 = 0,329 729 296$, $B_0 = 0,329 736 544$, $C = 0,330 815 547$.

Повышение точности математических моделей Земли неизбежно требует стандартизации параметров динамической фигуры и тензора инерции Земли, устанавливаемых на определенную эпоху. Вывод таких фундаментальных параметров на каждую эпоху и определение их изменений во времени становится одной из главных задач геодезии.

Как видно из данных таблиц, эллипсоид инерции Земли имеет меньшее сжатие, чем ее гравитационный эллипсоид.

Вычисленные параметры динамической фигуры Земли, хотя и нуждаются в уточнении ориентации ее осей из-за ошибок определения гармо-

нических коэффициентов I_{21} и K_{21} , но их можно использовать для интерпретации данных астрономии, геодезии, геофизики и других наук. Они будут полезны в изучении движения полюсов Земли, теории прецессии и нутации. Заметим, что модель с параметрами $K_{21} \approx 3I_{21} > 0$ дает наилучшее согласование наземных и спутниковых определений. Существенно улучшая оценку параметров $I_2, I_{21}, K_{21}, I_{22}, K_{22}$ и их вариаций во времени, можно надежно определять ориентацию главных осей инерции и фиксировать эффект перемещения масс в теле Земли на каждую эпоху.

Обратим внимание читателя на задачу, связанную с определением фундаментальных параметров Земли — главного тензора инерций I_0 и эйлеровых углов главных осей динамической фигуры Земли. Как следует из наших выводов, эти параметры нужно устанавливать на эпоху, на которую определены вторые гармонические коэффициенты геогравитационного потенциала. Они должны быть согласованы с масштабом, в смысле H и a^2M , принятым в смежных науках о Земле и космическом пространстве. Только в этом случае фундаментальные параметры можно использовать в общем комплексе с другими постоянными Земли, планет и тел космического пространства, изучать изменения указанных параметров во времени.

3.9. ПАРАМЕТРЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ЛУНЫ И МАРСА

Модели внешнего гравитационного поля Луны и Марса, усредненные по определениям последних лет, позволяют параметры динамической фигуры этих небесных тел оценить в первом приближении. Конечно, из-за малого объема лунных и марсианских наблюдений, такие оценки будут менее представительными и точными в сравнении с оценками динамической фигуры Земли.

Параметры динамической фигуры Луны и Марса, вычисленные по формулам (229), (249)—(257) и по гравитационным моделям Луны и Марса, представлены в табл. 8.

Сравнивая последние строки табл. 7 и 8, отметим, что Марс обладает большей неоднородностью недр, чем Земля, а недра Луны более однородны, чем у Марса. У Луны полюс инерции удален от полюса вращения на 59 км, тогда как у Земли полюс инерции удален на 25 м. Все эти данные говорят об исключительных свойствах Луны, определяющих ее динамику.

Возможно, Марс по своим планетарным свойствам аналогичен Луне. О достоверности такого положения можно судить после того, как нам будут известны детали внешнего гравитационного поля Луны и Марса.

Принимая для Луны $\gamma = (B - A)/C = 0,000\ 2310$, можно в первом приближении определить абсолютные значения ее главных моментов инерции $A = 8,830\ 805\ 95 \cdot 10^{41}$ г·см², $B = 8,832\ 847\ 15 \cdot 10^{41}$ г·см², $C = 8,836\ 334\ 86 \cdot 10^{41}$ г·см². Масштабированные их значения соответственно равны: $A/a^2M = 0,397\ 9109$, $B/a^2M = 0,398\ 0028$, $C/a^2M = 0,398\ 1600$.

| Параметр | Луна | Марс |
|--|--------------|--------------|
| $I_2 \cdot 10^{-6}$ | 210,00 | 1964,0 |
| $I_{22} \cdot 10^{-6}$ | -23,77 | -55,0 |
| $K_{22} \cdot 10^{-6}$ | 3,17 | 31,0 |
| $I_{21} \cdot 10^{-6}$ | 7,81 | - |
| $K_{21} \cdot 10^{-6}$ | -2,52 | - |
| a , км | 1738,0 | 3408,0 |
| $M \cdot 10^{-26}$, г | 0,734 708 38 | 6,418 4 |
| $(C-A) \cdot 10^{-38}$, г·см ² | 5,528 81 | 1546,089 758 |
| $(C-B) \cdot 10^{-38}$, г·см ² | 3,487 71 | 1382,087 952 |
| $(B-A) \cdot 10^{-38}$, г·см ² | 2,041 20 | 164,001 806 |
| α_0 | +3,798° | +14,704° |
| ξ | -0,8887° | - |
| η | +1,7375° | - |
| θ | -1,9516° | - |
| φ | -62,910° | - |
| ψ | 66,708° | - |
| λ_w | 33,292° | - |
| $\frac{B-A}{2C-(A+B)}$ | 0,226 380 96 | 0,056 008 15 |

Сжатие эллипсоида инерции и относительная эллиптичность Луны имеют значения $\alpha = (C-B)/A = 0,000\ 3949$, $\beta = (C-A)/B = 0,000\ 6259$, $f = \alpha/\beta = 0,6309$, согласующиеся с наблюдательным материалом.

Геометрические определения диска Луны и предположения о распределении плотности в теле Луны, близком к распределению плотности внутри Земли, дают значения

$$\alpha_1 = (a_1 - b)/b = 9,4 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_2 = (a_2 - b)/b = 37,5 \cdot 10^{-6},$$

где a_1 , a_2 — экваториальные и b — полярный радиусы трехосной фигуры Луны. Величины α , β и α_1 , β_1 существенно отличаются друг от друга из-за значительно большей, чем на Земле, неоднородности лунных недр. Возможно лунная кора имеет большую толщину и очень неоднородна по плотности.

Параметры динамической фигуры Луны и Марса отражают уровень наших знаний об этих небесных телах и могут быть использованы для решения планетодинамических и планетофизических задач.

3.10. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОЛЮСА

3.10.1. Период Эйлера

Исключив действие внешних сил, получим из основных уравнений (249) формулы

$$\dot{\omega}_x + \left(\frac{C-A}{A} - \frac{B-A}{A} \right) \omega_y \omega_z = 0;$$

$$\dot{\omega}_y - \left[\frac{C-A}{A} \left(1 - \frac{B-A}{B} \right) \right] \omega_x \omega_z = 0;$$

$$\dot{\omega}_z + \frac{B-A}{C} \omega_x \omega_y = 0. \quad (289)$$

В формуле (289) введем обозначение $(C-A)/A = H_0$ и примем $A=B$. Тогда

$$\dot{\omega}_x + H_0 \omega_0 \omega_y = 0; \quad \dot{\omega}_y - H_0 \omega_0 \omega_x = 0; \quad \omega_z = \omega_0 = \text{const}. \quad (290)$$

Перейдем к отвлеченным величинам $x = \omega_x / \omega_0$, $y = -\omega_y / \omega_0$ и запишем последние уравнения так

$$\dot{x} = H_0 \omega_0 y; \quad \dot{y} = -H_0 \omega_0 x.$$

Это — уравнения кругового движения

$$x = \sigma \cos(H_0 \omega_0 t + c_0); \quad y = \sigma \sin(H_0 \omega_0 t + c_0), \quad (291)$$

период которого равен $\tau_0 = 2\pi / \omega_0 H_0$.

Если за единицу времени примем звездные сутки, то период $\tau_0 = H_0^{-1}$. По данным табл. 7 для Земли имеем $H_0 = (2C - A - B) / (A + B) = 0,003\,283\,34$. Следовательно период свободного кругового движения полюса осесимметричной абсолютно твердой Земли составляет 304,6 звездных суток.

Движение Земли, описываемое уравнениями (290), называется эйлеровским, а период свободного кругового движения полюса Земли — периодом Эйлера. Обычно период свободного кругового движения Эйлера представляют как $\tau_0 = A / (C - A) = A / CH$, где $H = (C - A) / C$ — параметр, называемый динамическим сжатием Земли.

3.10.2. Период Чандлера

Реальная Земля обладает упругостью, которая увеличивает период движения полюса. Это явление можно объяснить, вводя понятие собственного динамического сжатия, под которым будем иметь в виду сжатие для Земли в случае, если бы ее вращение прекратилось. Поскольку Земля — упругое тело, то собственное динамическое сжатие H' будет отличаться от H , при этом H' по величине меньше, чем H , ибо при вращении упругое тело сжимается, и в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, образуется избыток масс. Момент центробежных сил, действующих на этот избыток масс, будет равен нулю, так как этот избыток масс всегда располагается в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Движение оси вращения Земли обусловлено действием избытка масс, который определяется фигурой невращающейся Земли и собственным динамическим сжатием. Следовательно период вращения τ_0' упругой Земли относится к периоду движения абсолютно твердого тела τ_0 как относится собственное динамическое сжатие к динамическому сжатию H реальной Земли.

С. Чандлер, обработав несколько десятков тысяч широтных наблю-

дений, в 1891 г. вывел эмпирическую формулу движения полюса упругой Земли с периодом около 14 мес. В честь его четырнадцатимесячный период движения полюса Земли называется периодом Чандлера.

По современным данным период Чандлера составляет около 437 звездных суток.

3.10.3. Суточное движение полюсов

Для вычисления суточного движения полюсов воспользуемся уравнениями (229) и (240). Подставим найденные значения ω_x и ω_y (291) в уравнение (240), получим

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \sigma\omega_0 \cos(\varphi - H_0\omega_0 t - c_0); \\ \dot{\psi} \sin \theta &= \sigma\omega_0 \sin(\varphi - H_0\omega_0 t - c_0).\end{aligned}\quad (292)$$

Из третьей строки уравнений (231) следует, что $\varphi = \omega_0 t - \psi \cos \theta + c_1$. Подставив это значение φ в формулу (292), получим

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \sigma\omega_0 \cos\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right); \\ \dot{\psi} \sin \theta &= -\sigma\omega_0 \sin\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right),\end{aligned}\quad (293)$$

где $\beta = c_0 + c_1 - \psi \cos \theta$.

Отсюда получаем формулу

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \sigma\frac{A}{C} \sin\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right); \\ \Delta\psi \sin \theta &= \sigma\frac{A}{C} \cos\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right)\end{aligned}\quad (294)$$

для вычисления координат полюса инерции относительно фиксированной точки P_0 , зависящей от постоянной интегрирования. В формуле (294) постоянная интегрирования принята равной нулю.

Очевидно полюс инерции вращается относительно мгновенного полюса с почти суточным периодом с амплитудой, близкой по величине к $\sigma A/C$. По данным табл. 7 и современному положению среднего полюса эта амплитуда для Земли составляет около 15 м. Угловые скорости вращения оси соответственно равны $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi} \cos(90 + \theta) = -\dot{\psi} \sin \theta$. На правяющие косинусы этой оси $\dot{\theta}/\omega_0$ и $\dot{\psi} \sin \theta/\omega_0$ можно отождествить с координатами полюса инерции, взятыми с обратными знаками.

Координаты полюса вращения относительно фиксированной точки P_0 :

$$\begin{aligned}\Delta\theta + \dot{\psi} \sin \theta/\omega_0 &= -\sigma\frac{C-A}{C} \sin\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right); \\ \Delta\psi \sin \theta - \dot{\theta}/\omega_0 &= -\sigma\frac{C-A}{C} \cos\left(\frac{C}{A}\omega_0 t + \beta\right).\end{aligned}\quad (295)$$

Подставим значения $\sigma = 15$ м и $(C-A)/C = 0,0033$ в формулу (295) и найдем амплитуду суточной оси вращения Земли, равную 0,05 м. По

скольку при современных точностях геодезии этой величиной нельзя пренебрегать, возникает задача ежедневного, и возможно ежечасного слежения за земным полюсом. Такую задачу можно решить только с помощью геодезических и астрономических наблюдений.

3.11. УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЗЕМЛИ

3.11.1. Числа Лява

Упругая Земля деформируется под действием центробежных и приливных сил, под давлением массы атмосферы и ветров. Для описания механических свойств и деформации упругой Земли А. Ляв (1909 г.) ввел два безразмерных параметра k и h , называемых числами Лява. Позднее было доказано, что для точного описания указанных явлений необходимо ввести еще один безразмерный параметр l , который называется числом Шиды.

Рассмотрим шар радиуса R_0 , покрытый тонким слоем жидкости бесконечно малой массы. Уровенная поверхность жидкости изображена на рис. 17 в виде сферы радиуса R . Предположим, что под действием приливных сил поверхность жидкости приняла форму эллипсоида a , вытянутого в направлении OA . Положим шар R_0 — абсолютно твердое тело. Тогда приливная сила не изменит форму шара R_0 и он будет притягивать жидкость с одной и той же силой, направленной к центру. Следовательно изменение кривизны уровенной поверхности жидкой оболочки будет обусловлено только внешней приливной потенциальной силой U . Потенциал на уровенной поверхности жидкости постоянен и равен

$$W = \frac{fM}{R + x_0} + U = \text{const},$$

где M — масса шара.

Из-за малости x_0 — высоты прилива жидкой оболочки — можно записать

$$W = \frac{fM}{R} - \frac{fM}{R} \frac{x_0}{R} + U = \text{const}.$$

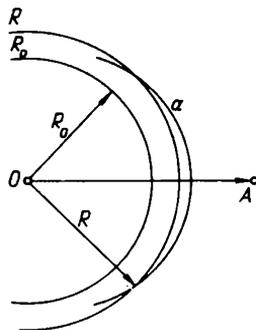


Рис. 17. Деформация шарового слоя под действием приливообразующей силы

Здесь имеет место соотношение $x_0 = U/\gamma$. Если шар R_0 деформируется, то это приведет к изменению его потенциала. Теперь поднятие жидкости на $x = (1+k)x_0$ будет происходить под действием силы с потенциалом $(1+k)U$. Здесь k — безразмерный параметр, характеризующий механическое свойство шара R_0 . Пусть смещение точек поверхности упругого шара пропорционально значению приливообразующей силы в этой точке и представляется как $\Delta R = hx_0$, где h , так же как и параметр k — безразмерная величина, зависящая от механических свойств упругого шара. Таким образом, в случае абсолютно твердого шара высота статического прилива равна x_0 , а в случае упругого шара $x'_0 = x - \Delta R$. Отсюда

$$\frac{x'_0}{x_0} = \gamma = 1 + k - h. \quad (295)$$

Параметры k и h называются числами Лява и имеют следующий геофизический смысл: k — отношение добавочного потенциала, вызванного упругой деформацией Земли, к деформирующему потенциалу; h — отношение высоты прилива земной коры к высоте соответствующего статического прилива океана.

Горизонтальные перемещения земной коры имеют компоненты:

$$\frac{l}{g} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \text{ — в плоскости меридиана;}$$

$$\frac{l}{g} \frac{\partial U}{\cos \varphi \partial \lambda} \text{ — в плоскости первого вертикала,}$$

где l — число Шиды.

Приливное изменение силы тяжести имеет коэффициент

$$\delta_g = 1 + h - \frac{3}{2}k, \quad (296)$$

а приливное колебание отвесной линии —

$$\delta_\theta = 1 + k - l. \quad (297)$$

Все указанные выше соотношения определяют способы вычисления чисел Лява.

Число Лява k связано с чандлеровым τ'_0 и эйлеровым τ_0 периодами свободного движения полюса Земли следующим соотношением:

$$k = \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau'_0}\right) \left(\frac{2\alpha}{q} - 1\right), \quad (298)$$

где α — полярное сжатие Земли.

Для Земли, приняв $\tau_0 = 304,6$ сут., $\tau'_0 = 438$ сут., $\alpha = 0,003\,352\,81$, $q = 0,003\,461\,40$, найдем число Лява, равное $k = 0,302$.

Кроме того, числа Лява k и h связаны с параметром Радо η следующим соотношением:

$$\frac{k}{h} = 1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \eta}. \quad (299)$$

Приняв значения $k=0,302$ и $\eta=0,586$ (см. раздел 2.7), по формуле (299) находим $h=0,610$. Третье число для упругой Земли имеет значение $l=0,08$.

3.11.2. Приливные деформации

Для потенциала приливообразующей силы по малости учтем только вторую гармонику

$$U = \frac{fM\mu}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2 z - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \frac{fM\mu}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{1}{3} + \cos 2z\right), \quad (300)$$

где μ — масса приливообразующего тела в единицах M массы Земли; a — геоцентрическое расстояние наблюдаемой точки; r и z — геоцентрическое и зенитное расстояния приливообразующего тела.

Тогда высота прилива будет

$$x_0 = \frac{U}{g} = \frac{3}{4} \frac{\mu}{rg} \left(\frac{a}{r}\right)^2 a_z^2 \left(\frac{1}{3} + \cos 2z\right). \quad (301)$$

Вводят постоянную Дудсона

$$G(a) = \frac{3}{4} \frac{\mu g_e}{r^3} a^2 a_z^2, \quad (302)$$

характеризующую приливы. Постоянная Дудсона для Луны

$$G_{\zeta} = 26\,277 \text{ см}^2/\text{с}^2, \quad (303)$$

для Солнца

$$G_{\odot} = 12\,100 \text{ см}^2/\text{с}^2 \quad (304)$$

В случае Луны с учетом формул (301)–(304) имеем

$$x_{\zeta} = 26,7 \left(\cos 2z + \frac{1}{3} \right) \text{ см}; \quad -17,8 \leq x_{\zeta} \leq 35,6 \text{ см.}$$

Аналогично для Солнца

$$x_{\odot} = 12,3 \left(\cos 2z + \frac{1}{3} \right) \text{ см}; \quad -8,2 \leq x_{\odot} \leq 16,4 \text{ см.}$$

Таким образом, суммарное воздействие Луны и Солнца приводит к колебаниям уровенной поверхности Земли с амплитудой 0,8 м.

Искривление уровенной поверхности, обусловленное приливными силами U (300), приводит к изменению отвесной линии

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_{\theta}}{a_e g} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad \Delta\lambda = \frac{\delta_{\theta}}{a_e g \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda}. \quad (305)$$

Так например, полусуточная приливная волна от Луны может изменять широту точки Q (φ, λ) на величину $\Delta\varphi = 0,01'' \sin 2\varphi$.

При современной точности в геодезии требуется учитывать эффекты упругой деформации, согласуя ее параметры с фундаментальными геодезическими постоянными Земли. Редукция лазерной локации ИСЗ и

данных прецизионной астрометрии на единую эпоху требует учета эффекта приливных деформаций Земли и фильтрации их от деформаций неприливногo характера. В то же время точность геодезических наблюдений настолько возросла, что их можно использовать для изучения упругих свойств Земли и движения ее оси вращения, аномалий плотностей в земной коре и астеносфере.

4. УРАВНЕНИЯ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

4.1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ГОРИЗОНТНОЙ И ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Положим измеренная величина L и топоцентрические горизонтные координаты X' , Y' , Z' связаны в общем случае нелинейной функцией $\Phi(X', Y', Z', L) = 0$. (306)

При этом известно, что измеренная величина $L = L' + \delta L + \Delta L + v$, где L' — результаты измерения; δL , ΔL , v — поправки за редукцию, систематическую и случайную ошибки измерений.

Поправки к счислимым значениям топоцентрических горизонтных координат X'^0 , Y'^0 , Z'^0 состоят из разностей поправок координат точек Q_1 и Q_2 (см. рис. 4)

$$\delta X' = (\Delta X_2)_1 - \delta X_1'; \quad \delta Y' = (\delta Y_2)_1 - \delta Y_1'; \quad \delta Z' = (\delta Z_2)_1 - \delta Z_1' \quad (307)$$

Поправки к координатам точки Q_2 вычисляются по формулам (54)

Представим функцию Φ (306) в линейной форме

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial L}\right)_0 (\delta L_{12} + \Delta L_{12} + v_{12}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right)_0 \delta X' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'}\right)_0 \delta Y' + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'}\right)_0 \delta Z' + \Phi^0(X'^0, Y'^0, Z'^0, L') + \dots = 0 \quad (308)$$

относительно малых параметров $\delta X'$, $\delta Y'$, $\delta Z'$, δL , ΔL , и v . Подставим значение поправок координат с учетом формул (307) и (54) в разложение (308) и получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial L}\right)_0 (\delta L_{12} + \Delta L_{12} + v_{12}) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right)_0 \delta X_1' - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'}\right)_0 \delta Y_1' - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'}\right)_0 \delta Z_1' + \\ & + \left[b_{11} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right)_0 + b_{21} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'}\right)_0 + b_{31} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'}\right)_0 \right] \delta X_2' + \left[b_{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right)_0 + \right. \\ & + b_{22} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'}\right)_0 + b_{32} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'}\right)_0 \left. \right] \delta Y_2' + \left[b_{13} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right)_0 + b_{23} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'}\right)_0 + \right. \\ & + b_{33} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'}\right)_0 \left. \right] \delta Z_2' + \Phi^0(X'^0, Y'^0, Z'^0, L') + \dots = 0. \end{aligned} \quad (309)$$

Уравнения (309) представлены относительно поправок координат в топоцентрической горизонтной системе.

Разложение (308), пользуясь формулами (50), можно представить относительно поправок координат в экваториальной системе

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial L} \right)_0 (\delta L_{12} + \Delta L_{12} + v_{12}) + \left[-\sin B_1 \cos L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'} \right)_0 - \sin L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'} \right)_0 + \right. \\ & \left. + \cos B_1 \cos L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)_0 \right] (\delta X_2 - \delta X_1) + \left[-\sin B_1 \sin L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'} \right)_0 + \right. \\ & \left. + \cos L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y'} \right)_0 + \cos B_1 \sin L_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \right)_0 \right] (\delta Y_2 - \delta Y_1) + \left[\cos B_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'} \right)_0 + \right. \\ & \left. + \sin B_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \right)_0 \right] (\delta Z_2 - \delta Z_1) + \Phi^0(X'^0, Y'^0, Z'^0, L') = 0. \end{aligned} \quad (310)$$

Если измеренная величина L связана с экваториальными координатами точек Q_1 и Q_2 нелинейной функцией

$$\Phi(X, Y, Z, L) = 0, \quad (311)$$

где $X = X_2 - X_1$; $Y = Y_2 - Y_1$; $Z = Z_2 - Z_1$, то по аналогии (308) получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial L} \right)_0 (\delta L_{12} + \Delta L_{12} + v_{12}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_0 (\delta X_2 - \delta X_1) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_0 (\delta Y_2 - \delta Y_1) + \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)_0 (\delta Z_2 - \delta Z_1) + \Phi^0(X^0, Y^0, Z^0, L') + \dots = 0. \end{aligned} \quad (312)$$

В формуле (312) поправки δL_{12} , ΔL_{12} , v_{12} , δX , δY , δZ представлены в экваториальной системе координат.

Уравнения (308) — (310) и (312) являются строгими с учетом членов первого порядка малости. Если аргументы в формулах (306) или (311) известны весьма приблизительно, то формулы (308) — (310) и (312) необходимо применять последовательными приближениями.

4.2. УРАВНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Для измеренного зенитного расстояния (см. рис. 4) имеем формулу

$$\Phi = \operatorname{arccotg} \frac{Z'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}} - z_{12} = 0. \quad (313)$$

Частные производные функции (313) равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X'} &= \frac{1}{s} \cos A_{12} \cos z_{12}; & \frac{\partial \Phi}{\partial Y'} &= \frac{1}{s} \sin A_{12} \cos z_{12}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} &= -\frac{1}{s} \sin z_{12}; & \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -1. \end{aligned} \quad (314)$$

Редукционную поправку δz_{12} представим через составляющие уклонения отвеса

$$\delta z_{12} = \xi_1 \cos A_{12} + \eta_1 \sin A_{12}. \quad (315)$$

Пользуясь формулами (309) и (313) — (315) и учитывая, что $\delta Z' = \delta H$, получаем уравнения тригонометрического нивелирования

$$\begin{aligned} v_{12} = & -\Delta z_{12} - \xi_1 \cos A_{12} - \eta_1 \sin A_{12} - \frac{1}{s} \cos A_{12} \cos z_{12} \delta X_1 - \\ & - \frac{1}{s} \sin A_{12} \cos z_{12} \delta Y_1 + \frac{1}{s} \sin z_{12} \delta H_1 + \frac{1}{s} (b_{11} \cos A_{12} \cos z_{12} + \\ & + b_{21} \sin A_{12} \cos z_{12} - b_{31} \sin z_{12}) \delta X_2 + \frac{1}{s} (b_{12} \cos A_{12} \cos z_{12} + \\ & + b_{22} \sin A_{12} \cos z_{12} - b_{32} \sin z_{12}) \delta Y_2 + \frac{1}{s} (b_{13} \cos A_{12} \cos z_{12} + \\ & + b_{23} \sin A_{12} \cos z_{12} - b_{33} \sin z_{12}) \delta H_2 + W_{12}, \end{aligned} \quad (316)$$

где свободный член

$$W_{12} = \operatorname{arctg} \frac{Z_0^0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} - z_{12}^0. \quad (317)$$

Если результат измерения z_{12}^0 исправлен за главную часть вертикальной рефракции, то в уравнении (316) член Δz_{12} — поправка за систематическую ошибку измерения зенитного расстояния.

Подставив в выражение (310) значения частных производных (314), получим в линейной форме относительно малых поправок в зенитное расстояние и экваториальные координаты точек Q_1 и Q_2

$$\begin{aligned} v_{12} = & -\delta z_{12} - \xi_1 \cos A_{12} - \eta_1 \sin A_{12} - \frac{1}{s} (\sin B_1 \cos L_1 \cos A_{12} \cos z_{12} + \\ & + \sin L_1 \sin A_{12} \cos z_{12} + \cos B_1 \cos L_1 \sin z_{12}) (\delta X_2 - \delta X_1) - \\ & - \frac{1}{s} (\sin B_1 \sin L_1 \cos A_{12} \cos z_{12} - \cos L_1 \sin A_{12} \cos z_{12} + \\ & + \cos B_1 \sin L_1 \sin z_{12}) (\delta Y_2 - \delta Y_1) - \frac{1}{s} (\sin B_1 \sin z_{12} - \\ & - \cos B_1 \cos A_{12} \cos z_{12}) (\delta Z_2 - \delta Z_1) + W_{12}. \end{aligned} \quad (318)$$

Уравнения (316) — (318) не ограничены расстоянием и поэтому они применимы для обработки наблюдений небесных, околоземных и наземных объектов. Если зенитные расстояния $z < 75^\circ$, то уравнения (316) — (318) можно применять для пространственного триангулирования.

Особый случай в наземной триангуляции, когда зенитные расстояния близки к 90° , а координаты B, L надежно оцениваются по наблюдениям горизонтальных углов. Поэтому, пренебрегая членами второго и высокого порядка малости, а также, учитывая формулы (55), получаем уравнения тригонометрического нивелирования для наземной триангуляции

$$v_{12} = -\Delta z_{12} - \xi_1 \cos A_{12} - \eta_1 \sin A_{12} + \frac{1}{s} \sin z_{12} \delta H_1 - \frac{1}{s} \sin(z_{12} - \sigma) \delta H_2 + l_{12}. \quad (319)$$

Если в сплошной сети известны высоты отдельных пунктов и некоторые геодезические пункты являются астрономическими, то, пользуясь уравнениями (319), можно решить задачу определения высот физической поверхности над земным эллипсоидом и составляющих уклонения отвесных линий из обработки результатов тригонометрического нивелирования. При этом могут быть испытаны гипотезы о вертикальной составляющей рефракции и оценена ее величина на каждом пункте. В ближайшее время возможно применение дисперсионных методов оценки угла вертикальной рефракции с точностью 0,5", что существенно улучшит точность редукции измеренных зенитных расстояний.

При надлежащей постановке тригонометрического нивелирования, принимая в первом приближении линейное изменение слагающих уклонений отвесных линий между двумя соседними пунктами $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)\Delta s/s$ можно вычислить разность высот геоида над земным эллипсоидом

$$s_2 - s_1 = -\frac{s}{\rho} \left(\frac{\xi_2 + \xi_1}{2} \cos A_{12} + \frac{\eta_2 + \eta_1}{2} \sin A_{12} \right).$$

Таким образом, при строгой математической обработке данных тригонометрического нивелирования с учетом астрономических определений широт и долгот на некоторых пунктах наземной триангуляции, можно получить обширный материал для изучения фигуры Земли и решения редукционной задачи. Для надежной оценки искомого элемента из наблюдений зенитных расстояний необходимо существенно улучшить современную методику тригонометрического нивелирования. Тем более в этой области выполнены обширные исследования и практические работы. К сожалению, у геодезистов существует мнение, что можно предъявить пониженные требования к измерениям зенитных расстояний. При конструировании и изготовлении теодолитов вертикальные круги делаются менее точными, чем горизонтальные. Понижены требования к изготовлению уровня при алиладе вертикального круга. Зенитные расстояния в наземной триангуляции измеряются в одной и той же части вертикального круга. Методика исследований триангуляционных теодолитов и программы полевых наблюдений не предполагают измерение зенитных расстояний с высокой точностью.

Современная практика требует уточнения основных положений о тригонометрическом нивелировании в сторону резкого повышения точности измерений вертикального угла, высот наружных знаков и приборов, повышения требований к основным узлам при конструировании и изготовлении новых угломерных приборов.

4.3. УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ И АСТРОНОМИЧЕСКОГО АЗИМУТА

Ориентированное направление связано с топоцентрическими горизонтными координатами уравнением (см. рис. 4)

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{Y'}{X'} - A_{12} = 0. \quad (320)$$

Частные производные функции (320) соответственно равны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X'} = -\frac{\sin A_{12}}{D}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y'} = \frac{\cos A_{12}}{D}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial A} = -1. \quad (321)$$

Редукционную поправку δA_{12} представим через составляющие уклонения отвеса

$$\delta A_{12} = (\eta_1 \cos A_{12} - \xi_1 \sin A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} - \eta_1 \operatorname{tg} B_1. \quad (322)$$

Пользуясь формулами (310) и (320) — (322), получим

$$v_{12} = -\Delta A_{12} + (\xi_1 \sin A_{12} - \eta_1 \cos A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} + \eta_1 \operatorname{tg} B_1 + \\ + \frac{\sin A_{12}}{D} \delta X'_1 - \frac{\cos A_{12}}{D} \delta Y'_1 - \frac{1}{D} (b_{11} \sin A_{12} - b_{21} \cos A_{12}) \delta X'_2 - \\ - \frac{1}{D} (b_{12} \sin A_{12} - b_{22} \cos A_{12}) \delta Y'_2 - \frac{1}{D} (b_{13} \sin A_{12} - b_{23} \cos A_{12}) \delta H_2 + l_{12}. \quad (323)$$

где ΔA_{12} — поправка за систематическую ошибку ориентирования и измерения направления; $D = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$; $l_{12} = \operatorname{arctg} \frac{Y_0}{X_0} - A_{12}^0$ — свободный член.

Подставив в уравнение (311) найденные значения частных производных (321), получим уравнение в линейной форме

$$v_{12} = -\Delta A_{12} + (\xi_1 \sin A_{12} - \eta_1 \cos A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} + \eta_1 \operatorname{tg} B_1 + \\ + \frac{1}{D} (\sin B_1 \cos L_1 \sin A_{12} - \sin L_1 \cos A_{12}) (\delta X_2 - \delta X_1) + \\ + \frac{1}{D} (\cos L_1 \cos A_{12} - \sin L_1 \sin A_{12}) (\delta Y_2 - \delta Y_1) - \\ - \frac{1}{D} \cos B_1 \sin A_{12} (\delta Z_2 - \delta Z_1) + l_{12} \quad (324)$$

относительно малых поправок на экваториальные координаты. Уравнения (322) — (324) не ограничены расстоянием и поэтому их можно использовать для обработки наблюдений небесных, околоземных и наземных объектов. Если зенитные расстояния $|z| < 75^\circ$, то возможна оценка составляющих уклонения отвесных линий. Заметим, что коэффициент перед поправкой δH_2 мал, а в сферическом приближении (55) он исчезает. Следовательно уравнения (322) — (324) не позволяют оценивать геодезические высоты.

Для наземной триангуляции, учитывая формулы (309), получим

$$v_{12} = -\Delta A_{12} + (\xi_1 \sin A_{12} - \eta_1 \cos A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} + \eta_1 \operatorname{tg} B_1 + \frac{1}{D} [\sin A_{12} \delta X'_1 - \\ - \cos A_{12} \delta Y'_1 - (b_{11} \sin A_{12} - b_{21} \cos A_{12}) \delta X'_2 - (b_{12} \sin A_{12} - b_{22} \cos A_{12}) \delta Y'_2] + \\ + l_{12}. \quad (325)$$

Допустим $b_{11} = b_{22} = 1$ и $b_{21} = b_{12} = 0$. В этом случае уравнение (325) упрощается

$$v_{12} = -\Delta A_{12} + (\xi_1 \sin A_{12} - \eta_1 \cos A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} + \eta_1 \operatorname{tg} B_1 - \\ - \frac{1}{D} [\sin A_{12} (\delta X'_2 - \delta X'_1) - \cos A_{12} (\delta Y'_2 - \delta Y'_1)] + l_{12}. \quad (326)$$

По аналогии для азимута α_{12} , определенного астрономически или гироскопически, имеем следующее уравнение:

$$v_{12} = -\Delta\alpha_{12} + (\xi_1 \sin \alpha_{12} - \eta_1 \cos \alpha_{12}) \operatorname{ctg} z_{12} + \eta_1 \operatorname{tg} B_1 + \\ + \left[\frac{1}{D} \sin \alpha_{12} \delta X'_1 - \cos \alpha_{12} \delta Y'_1 - (b_{11} \sin \alpha_{12} - b_{21} \cos \alpha_{12}) \delta X'_2 - \right. \\ \left. - (b_{12} \sin \alpha_{12} - b_{22} \cos \alpha_{12}) \delta Y'_2 \right] + l_{12}, \quad (327)$$

где свободный член

$$l_{12} = \operatorname{arctg} \frac{Y'_0}{X'_0} - \alpha_{12}^0. \quad (328)$$

Допустимо упрощение уравнения (327) в форме (326).

4.4. УРАВНЕНИЕ ИЗМЕРЕННОЙ ЛИНИИ

Из рис. 4 следует, что

$$\Phi = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} - s = 0. \quad (329)$$

Частные производные функции (329) соответственно равны:

$$\partial\Phi/\partial X' = \cos A_{12} \sin z_{12}; \quad \partial\Phi/\partial Y' = \sin A_{12} \sin z_{12} \\ \partial\Phi/\partial Z' = \cos z_{12}; \quad \partial\Phi/\partial s = -1. \quad (330)$$

Пользуясь формулами (309), (329) и (330) и учитывая, что $\delta s = 0$, получаем

$$v_{12} = -\Delta s_{12} - \cos A_{12} \sin z_{12} \delta X'_1 - \sin A_{12} \sin z_{12} \delta Y'_1 - \cos z_{12} \delta H_1 + \\ + (b_{11} \cos A_{12} \sin z_{12} + b_{21} \sin A_{12} \sin z_{12} + b_{31} \cos z_{12}) \delta X'_2 + \\ + (b_{12} \cos A_{12} \sin z_{12} + b_{22} \sin A_{12} \sin z_{12} + b_{32} \cos z_{12}) \delta Y'_2 + \\ + (b_{13} \cos A_{12} \sin z_{12} + b_{23} \sin A_{12} \sin z_{12} + b_{33} \cos z_{12}) \delta H_2 + l_{12} \quad (331)$$

где свободный член

$$l_{12} = \sqrt{X_0'^2 + Y_0'^2 + Z_0'^2} - s_{12}^0. \quad (332)$$

Поскольку расстояние инвариантно относительно систем координат, то формулу (331) можно представить в более простом виде

$$v_{12} = -\Delta s_{12} - \cos A_{12} \sin z_{12} \delta X'_1 - \sin A_{12} \sin z_{12} \delta Y'_1 - \cos z_{12} \delta H_1 - \\ - \cos A_{21} \sin z_{21} \delta X'_2 - \sin A_{21} \sin z_{21} \delta Y'_2 - \cos z_{21} \delta H_2 + l_{12}. \quad (333)$$

Уравнение измеренной линии в экваториальной системе координат получим, подставив в уравнение (310) значения частных производных (330),

$$v_{12} = -\Delta s_{12} - (\sin B_1 \cos L_1 \cos A_{12} \sin z_{12} + \sin L_1 \sin A_{12} \sin z_{12} - \\ - \cos B_1 \cos L_1 \cos z_{12}) (\delta X_2 - \delta X_1) + (\cos L_1 \sin A_{12} \sin z_{12} - \\ - \sin B_1 \sin L_1 \cos A_{12} \sin z_{12} + \cos B_1 \sin L_1 \cos z_{12}) (\delta Y_2 - \delta Y_1) + \\ + (\cos B_1 \cos A_{12} \sin z_{12} + \sin B_1 \cos z_{12}) (\delta Z_2 - \delta Z_1) + l_{12}. \quad (334)$$

Для небесных и околоземных объектов уравнение измеренной линии выгодно представлять в геоцентрических координатах

$$\Phi = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} - s_{12} = 0.$$

$$v_{12} = -\Delta s_{12} + \frac{X_2 - X_1}{s_{12}}(\delta X_2 - \delta X_1) + \frac{Y_2 - Y_1}{s_{12}}(\delta Y_2 - \delta Y_1) + \frac{Z_2 - Z_1}{s_{12}}(\delta Z_2 - \delta Z_1) + l_{12};$$

$$l_{12} = \sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2 + (Z_2^0 - Z_1^0)^2} - s_{12}^0. \quad (335)$$

Как видно из уравнений (308) — (335), отпадает проблема редукции измерений на поверхность эллипсоида, на уровенную поверхность или на плоскость.

4.5. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НЕБЕСНОГО ОБЪЕКТА

Пользуясь топоцентрическими экваториальными координатами, сначала установим связь геоцентрических и топоцентрических экваториальных координат небесного объекта и геоцентрических координат наземного пункта. Как видно из рис. 18, топоцентрические экваториальные координаты — прямоехождение α , склонение δ и расстояние ρ небесного объекта связаны следующим образом:

$$X = \rho \cos \delta \cos(\alpha - S) = X_S - X_Q;$$

$$Y = \rho \cos \delta \sin(\alpha - S) = Y_S - Y_Q;$$

$$Z = \rho \sin \delta = Z_S - Z_Q. \quad (336)$$

где S — гринвичское звездное время момента наблюдения топоцентрических координат α , δ и ρ небесного объекта. Уравнения (336) можно записать в векторной форме

$$\underline{\rho} = \underline{r} - \underline{R}, \quad (337)$$

где топоцентрический радиус-вектор небесного объекта

$$\underline{\rho} = \rho \cos \delta \cos(\alpha - S) \mathbf{i} + \rho \cos \delta \sin(\alpha - S) \mathbf{j} + \rho \sin \delta \mathbf{k},$$

геоцентрический радиус-вектор наземного пункта

$$\underline{R} = X_Q \mathbf{i} + Y_Q \mathbf{j} + Z_Q \mathbf{k},$$

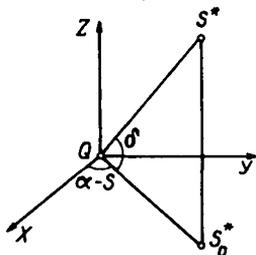


Рис. 18. Топоцентрические экваториальные координаты небесного объекта

геоцентрический радиус-вектор небесного объекта

$$\mathbf{r} = X_S \mathbf{i} + Y_S \mathbf{j} + Z_S \mathbf{k}.$$

Если известны векторы \mathbf{r} и ρ , то пользуясь уравнением (337), можно найти вектор \mathbf{R} , иначе говоря, можно определить геоцентрическое положение наземного пункта. Если же известны вектор \mathbf{R} и ρ , то с помощью того же уравнения можно найти вектор \mathbf{r} — геоцентрическое положение небесного объекта. Очевидно, зная векторы \mathbf{R} и \mathbf{r} , можно определить вектор ρ — топоцентрические координаты небесного объекта.

Измеренные величины $\vartheta = \alpha - S$, δ и ρ (см. рис. 18) связаны с топоцентрическими экваториальными координатами

$$X = X_S - X_Q; \quad Y = Y_S - Y_Q; \quad Z = Z_S - Z_Q$$

небесного объекта уравнениями

$$\Phi_\delta = \arctg \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \delta = 0;$$

$$\Phi_\theta = \arctg \frac{Y}{X} - \theta = 0; \quad \Phi_\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - \rho = 0. \quad (338)$$

Пользуясь общим уравнением (310), напомним уравнения (338) в линейной форме

$$v_\delta = -\Delta\delta - \frac{1}{\rho} [\sin \delta \cos \theta (\delta X_S - \delta X_Q) + \sin \delta \sin \theta (\delta Y_S - \delta Y_Q) - \cos \delta (\delta Z_S - \delta Z_Q)] + l_\delta;$$

$$v_\theta = -\Delta\theta - \frac{1}{D} [\sin \theta (\delta X_S - \delta X_Q) - \cos \theta (\delta Y_S - \delta Y_Q)] + l_\theta;$$

$$v_\rho = -\Delta\rho + \cos \delta \cos \theta (\delta X_S - \delta X_Q) + \cos \delta \sin \theta (\delta Y_S - \delta Y_Q) + \sin \delta (\delta Z_S - \delta Z_Q) + l_\rho;$$

$$l_\delta = \arctg \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} - \delta^0; \quad l_\theta = \arctg \frac{Y_0}{X_0} - \theta^0;$$

$$l_\rho = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \rho^0. \quad (339)$$

Формулы (339) являются уравнениями космической линейно-угловой триангуляции в геоцентрической системе координат. Заменяя B и L на δ и θ , заметим, что матрица A^* перед $\delta R = \delta R_2 - \delta R_1$ в формулах (339) имеет такие же элементы, как и матрица A' (48). Кроме того, согласно формуле (50) геоцентрические координаты связаны с топоцентрическими

$$\delta R_2 - \delta R_1 = A_2 \delta R'_2 - A_1 \delta R'_1.$$

При этом индексы 1 и 2 относятся соответственно к наземному пункту и небесному объекту.

Таким образом, в уравнениях (339)

$$A^*(\delta R_2 - \delta R_1) = A^* A_2 \delta R'_2 - A^* A_1 \delta R'_1. \quad (340)$$

Пользуясь выражениями (52), (339), (340), получим уравнения линейно-угловой космической триангуляции в топоцентрических горизонтных координатах

$$\begin{aligned}
 v_{\delta} &= -\Delta\delta - \frac{1}{\rho} (b_{11}^1 \delta X_Q' + b_{12}^1 \gamma Y_Q' + b_{13}^1 \delta H_Q) + \frac{1}{\rho} (b_{11}^2 \delta X_S' + b_{12}^2 \delta Y_S' + \\
 &+ b_{13}^2 \delta H_S) + l_{\delta}; \\
 v_{\theta} &= -\Delta\theta - \frac{1}{D} (b_{21}^1 \delta X_Q' + b_{22}^1 \delta Y_Q' + b_{23}^1 \delta H_Q) + \frac{1}{D} (b_{21}^2 \delta X_S' + b_{22}^2 \delta Y_S' + b_{23}^2 \delta H_S) + \\
 &+ l_{\theta}; \\
 v_{\rho} &= -\Delta\rho - (b_{31}^1 \delta X_Q' + b_{32}^1 \delta Y_Q' + b_{33}^1 \delta H_Q) + (b_{31}^2 \delta X_S' + b_{32}^2 \delta Y_S' + b_{33}^2 \delta H_S) + l_{\rho}.
 \end{aligned} \tag{341}$$

Элементы матрицы $B = A^* A_i$ ($i = 1, 2$), вычисленные по формулам (52), имеют вид

$$\begin{aligned}
 b_{11}^i &= \cos \delta \cos B_i + \sin \delta \sin B_i \cos (L_i - \theta); \\
 b_{12}^i &= \sin \delta \sin (L_i - \theta); \quad b_{13}^i = \cos \delta \sin B_i - \sin \delta \cos B_i \cos (L_i - \theta); \\
 b_{21}^i &= -\sin B_i \sin (L_i - \theta); \quad b_{22}^i = \cos (L_i - \theta); \\
 b_{23}^i &= \cos B_i \sin (L_i - \theta); \\
 b_{31}^i &= \sin \delta \cos B_i - \cos \delta \sin B_i \cos (L_i - \theta); \quad b_{32}^i = -\cos \delta \sin (L_i - \theta); \\
 b_{33}^i &= \sin \delta \sin B_i + \cos \delta \cos B_i \cos (L_i - \theta).
 \end{aligned} \tag{342}$$

Уравнения (342) полезны как для уравнивательных вычислений, так и для оценки вклада каждого вида измерений. Так например, для небесного объекта $B \approx \delta$ и $L \approx \theta$, поэтому коэффициенты b_{13}^i и b_{23}^i малы по величине, а коэффициент b_{33}^i близок к единице. Это означает, что для надежной оценки высот необходимо иметь линейные измерения.

4.6. УРАВНЕНИЯ НОРМАЛЬ-ВЕКТОРА СИНХРОННОЙ ПЛОСКОСТИ И ХОРДЫ

Синхронная плоскость задается двумя топоцентрическими направлениями на небесный объект, измеренными одновременно с двух наземных пунктов Q_1 и Q_2 .

Уравнение плоскости в координатной форме

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{343}$$

Измеренные топоцентрические направления представим двумя единичными векторами ($i = 1, 2$)

$$\rho_i^0 = l_i i + m_i j + n_i k, \tag{344}$$

где составляющие единичного вектора по осям координат:

$$l_i = \cos \delta_i \cos \theta_i; \quad m_i = \cos \delta_i \sin \theta_i; \quad n_i = \sin \delta_i. \tag{345}$$

Уравнение нормаль-вектора плоскости (343) имеет вид

$$\mathbf{n}^0 = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}. \quad (346)$$

Нормаль-вектор можно определить как векторное произведение двух векторов

$$\mathbf{n}^0 = \underline{\rho}_1^0 \times \underline{\rho}_2^0,$$

или в явном виде

$$\mathbf{n}^0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = (m_1n_2 - m_2n_1)\mathbf{i} + (l_2n_1 - l_1n_2)\mathbf{j} + (l_1m_2 - l_2m_1)\mathbf{k}. \quad (347)$$

Сравнивая выражения (346) и (347), получаем уравнения для вычисления коэффициентов

$$A = m_1n_2 - m_2n_1; \quad B = l_2n_1 - l_1n_2; \quad C = l_1m_2 - l_2m_1, \quad (348)$$

дифференциальные изменения которых соответственно:

$$\begin{aligned} dA &= \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 - (\sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin \vartheta_1 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \vartheta_2) d\delta_1 - \\ &- \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \vartheta_2 d\vartheta_2 + (\sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin \vartheta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \vartheta_1) d\delta_2; \\ dB &= \cos \delta_1 \sin \delta_2 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 + (\sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \vartheta_1 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \vartheta_2) d\delta_1 - \\ &- \sin \delta_1 \cos \delta_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 - (\sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \vartheta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \vartheta_1) d\delta_2; \\ dC &= -\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) d\vartheta_1 - \sin \delta_1 \cos \delta_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) d\vartheta_1 + \\ &+ \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) d\vartheta_2 - \sin \delta_2 \cos \delta_1 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) d\delta_2. \end{aligned} \quad (349)$$

Хорда-вектор, совпадающий с линией пересечения двух плоскостей, определяется как векторное произведение нормаль-векторов этих плоскостей

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{n}_1^0 \times \mathbf{n}_2^0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

или

$$\mathbf{d}^0 = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}, \quad (350)$$

где составляющие хорды по осям координат:

$$L = B_1C_2 - B_2C_1; \quad M = A_2C_1 - A_1C_2; \quad N = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (351)$$

Составляющие хорды можно выразить через ее сферические координаты

$$L = \cos \Phi \cos \Lambda; \quad M = \cos \Phi \sin \Lambda; \quad N = \sin \Phi. \quad (352)$$

Таким образом, отнаблюдая синхронно топоцентрические экваториальные координаты небесного объекта S_i из двух наземных пунктов Q_1 и Q_2 , можно построить синхронную плоскость, коэффициенты которой A_i , B_i , C_i вычисляются по формулам (345) и (348). Две такие плоскости ($i = 1, 2$) однозначно задают пространственное положение хорды Q_1Q_2 . Вычислив

составляющие хорды L, M, N по осям координат (351), можно перейти к сферическим координатам Φ, Λ хорды. При этом

$$\Lambda = \operatorname{arctg} M/N; \quad \Phi = \operatorname{arctg} N/\sqrt{L^2 + M^2}. \quad (353)$$

Решая сферический треугольник (см. рис. 3), заменив φ, λ на Φ, Λ , получаем формулы

$$\sin A \sin z = \cos \Phi \sin (\Lambda - L_1);$$

$$\cos A \sin z = \cos B_1 \sin \Phi - \sin B_1 \cos \Phi \cos (\Lambda - L_1);$$

$$\cos z = \sin B_1 \sin \Phi + \cos B_1 \cos \Phi \cos (\Lambda - L_1);$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin (\Lambda - L_1)}{\cos B_1 \operatorname{tg} \Phi - \sin B_1 \cos (\Lambda - L_1)} \quad (354)$$

для перехода от сферических координат Φ, Λ к геодезическим азимуту A и зенитному расстоянию z хорды $Q_1 Q_2^0$.

4.7. УСЛОВИЕ ПУЧКА ПЛОСКОСТЕЙ. УСЛОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОПРАВК ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ

Два наземных пункта Q_1 и Q_2 образуют пучок синхронных плоскостей. Две синхронные плоскости однозначно фиксируют хорду. Третья плоскость будет избыточной и даст одно условие.

Пусть каждая синхронная плоскость задана нормаль-вектором

$$\mathbf{n}_i^0 = A_i \mathbf{i} + B_i \mathbf{j} + C_i \mathbf{k}.$$

Смешанное произведение трех векторов

$$[\mathbf{n}_1^0 \mathbf{n}_2^0 \mathbf{n}_3^0] = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

равно объему параллелепипеда. Поскольку все три плоскости принадлежат одному пучку, параллелепипед вырождается в хорду $Q_1 Q_2$. Следовательно

$$\Phi = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (355)$$

Уравнение (355), записанное в обычной форме

$$\Phi = (B_2 C_3 - B_3 C_2) A_1 + (A_3 C_2 - A_2 C_3) B_1 + (A_2 B_3 - A_3 B_2) C_1 = 0, \quad (356)$$

представляет условное уравнение пучка плоскостей, образующих хорду $Q_1 Q_2$.

Запишем уравнение (356) в линейной форме

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_i} dA_i + \frac{\partial \Phi}{\partial B_i} dB_i + \frac{\partial \Phi}{\partial C_i} dC_i \right) + \Phi^0 = 0, \quad (357)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial A_1} &= B_2 C_3 - B_3 C_2; & \frac{\partial \Phi}{\partial B_1} &= A_3 C_2 - A_2 C_3; & \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} &= A_2 B_3 - A_3 B_2; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} &= B_3 C_1 - B_1 C_3; & \frac{\partial \Phi}{\partial B_2} &= A_1 C_3 - A_3 C_1; & \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} &= A_3 B_1 - A_1 B_3; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial A_3} &= B_1 C_2 - B_2 C_1; & \frac{\partial \Phi}{\partial B_3} &= A_2 C_1 - A_1 C_2; & \frac{\partial \Phi}{\partial C_3} &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

Дифференциалы dA_i , dB_i , dC_i вычисляются по формулам (349), а свободный член Φ^0 (357) — с помощью формул (345) и (356) по измеренным значениям топоцентрических координат θ_{1i} , δ_{1i} , θ_{2i} , δ_{2i} трех небесных объектов S_i ($i = 1, 2, 3$).

Формула (357) представляет условное уравнение поправок $d\theta_{1i}$, $d\delta_{1i}$, $d\theta_{2i}$, $d\delta_{2i}$ ($i = 1, 2, 3$) топоцентрических экваториальных координат. По величине свободного члена Φ^0 можно судить о качестве определений топоцентрических экваториальных координат небесных объектов.

4.8. УРАВНЕНИЕ СИНХРОННОЙ ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Нормаль-вектор синхронной плоскости $\mathbf{n}^0 = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, составляющие которого представляют известные функции (345) и (348) топоцентрических направлений небесного объекта, синхронно измеренных с наземных пунктов Q_1 и Q_2 .

Хорду-вектор Q_1 и Q_2 , принадлежащий синхронной плоскости, представим в координатной форме

$$\mathbf{d} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Из условия ортогональности векторов \mathbf{d} и \mathbf{n}^0 следует, что их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\Phi = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \quad (358)$$

Формула (358) — уравнение синхронной плоскости в координатной форме. Уравнение (358) в дифференциальной форме имеет вид

$$(x_2^0 - x_1^0)dA + (y_2^0 - y_1^0)dB + (z_2^0 - z_1^0)dC + A^0(dx_2 - dx_1) + B^0(dy_2 - dy_1) + C^0(dz_2 - dz_1) + \Phi^0 = 0. \quad (359)$$

Дифференциалы dA , dB , dC с помощью формул (359) выражаются через поправки в топоцентрические направления небесного объекта. Свободный член Φ^0 вычисляются по формуле (358), (345) и (348), подставляя измеренные значения топоцентрических направлений и численные координаты наземных пунктов Q_1 и Q_2 .

Формула (359) — условное уравнение поправок с дополнительными параметрами. За дополнительные параметры приняты поправки в численные координаты наземных пунктов. Составив для каждой синхронной

плоскости уравнение (359), получаем систему условных уравнений с дополнительными параметрами, которую запишем в матричной форме

$$AV + B\delta X + W = 0. \quad (360)$$

Решив это уравнение при условии $V'pV = \min$, получим нормальные уравнения

$$B'PB\delta X + B'PW = 0,$$

где $P = (AqA')^{-1}$ — диагональная матрица, число диагональных элементов которой равно числу групп синхронных наблюдений. Отсюда найдем искомые поправки к счислимым координатам наземных пунктов и измеренным топоцентрическим направлениям θ и δ :

$$\delta X = -(B'PB)^{-1}B'PW;$$

$$V = -qA'P(B\delta X + W).$$

4.9. НЕСИНХРОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ

Положим, наземные пункты представляют совокупность несинхронных наблюдений, представленных системой уравнений (337), в которой, кроме постоянных векторов R наземных пунктов и измеренных топоцентрических векторов ρ , имеются непрерывно изменяющиеся векторы r . Представив векторы r_i на момент S_i как функцию элементов орбиты θ , можно число неизвестных в системе (337) сократить до минимума. Если при этом известны элементы кеплеровой орбиты, то известен вектор r . В действительности элементы околоземного спутника непрерывно изменяются из-за возмущений в его движении, вызванных главным образом нецентральностью гравитационного поля Земли.

Рассмотрим главную часть возмущающих ускорений, вызванную аномалией геопотенциала. Возмущающую функцию R_e определим как разность между потенциалом V (155) Земли и потенциалом $V_0 = fM/r$ шара, имеющего такую же массу, что и Земля, т. е.

$$R_e = -\frac{fM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[I_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\mu) \right] \quad (361)$$

Составляющие K_1, K_2, K_3 возмущающего ускорения выразим через элементы орбиты θ и возмущающую функцию R_e .

Для пояснения рассмотрим рис. 19, на котором изображены геоцентрическая сфера радиуса r небесного объекта S и след его оскулирующей орбиты с наклоном i и долготой восходящего узла Ω .

Угол между осями \bar{X}' и η равен сферическому азимуту ν следа орбиты, так как ось \bar{X}' — касательная к линии меридиана PSS_e , а ось η — касательная к следу орбиты небесного объекта. Отсюда следует

Пользуясь уравнениями (41) и (364), получаем формулы для составляющих возмущающего ускорения по осям координат геоцентрической звездной системы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_c}{\partial x} \\ \frac{\partial R_c}{\partial y} \\ \frac{\partial R_c}{\partial z} \end{bmatrix} = AA_v \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial R_c}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial R_c}{\partial \lambda} \sec \varphi \\ \frac{\partial R_c}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (365)$$

Элементы матрицы A , представляющие функции элементов орбиты, вычисляются по формулам (42).

В правых частях формул (364) и (365) в качестве аргументов участвуют геоцентрические широта и долгота небесного объекта и сферический азимут следа его орбиты. Аргументы φ и v исключим, пользуясь равенствами

$$\sin \varphi = \sin u \sin i; \quad \sin v = \cos i \sec \varphi; \quad \cos v = \cos u \sin i \sec \varphi, \quad (366)$$

вытекающими из решения сферического прямоугольного треугольника $\Omega S_e S$ (см. рис. 19).

Затем с помощью формулы $\lambda = \alpha - S$, связывающей долготу λ , прямое восхождение и гринвичское звездное время S , аргумент $m\lambda$ выразим через $m[(\alpha - \Omega) + (\Omega - S)]$. Тогда

$$\cos m\lambda = \cos m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - S) - \sin m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - S);$$

$$\sin m\lambda = \sin m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - S) + \cos m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - S).$$

Прямое восхождение α можно исключить, используя равенства

$$\cos(\alpha - \Omega) = \cos u \sec \varphi;$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = \sin u \cos i \sec \varphi,$$

получаемые из решения того же сферического треугольника $\Omega S_e S$. При этом предварительно косинусы (синусы) кратных дуг заменяются полиномами по степеням косинусов (синусов) этих же дуг.

Можно исключить геоцентрический радиус, используя формулу

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(u - \omega)}. \quad (367)$$

Таким образом, орбитальные составляющие K_1, K_2, K_3 возмущающего ускорения выражаются через гармонические коэффициенты разложения I_n, I_{nm}, K_{nm} геопотенциала, элементы орбиты небесного объекта и гринвичское звездное время.

Интегрируя дифференциальные уравнения движения ИСЗ по времени $(t - t_0)$, можно получать возмущения в элементах орбиты $\Delta\theta$ ($da, de, d\Omega, d\omega, d\tau, di$) в функции параметров $I_n = I_{nm}, K_{nm}$ геопотенциала в виде

$$\Delta\Theta = U_V \begin{bmatrix} I_n \\ I_{nm} \\ K_{nm} \end{bmatrix}. \quad (368)$$

Описание процедуры вычисления матрицы U_V выходит за рамки настоящей книги и, поэтому, ограничимся ссылкой на специальные труды [8].

4.10. ТОПОЦЕНТРИЧЕСКАЯ РАДИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ

Топоцентрическое расстояние представим в звездной системе отсчета $\rho = \sqrt{(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2}$.

Тогда топоцентрическая радиальная скорость будет

$$\dot{\rho} = \frac{x-x_Q}{\rho} (\dot{x} - \dot{x}_Q) + \frac{y-y_Q}{\rho} (\dot{y} - \dot{y}_Q) + \frac{z-z_Q}{\rho} (\dot{z} - \dot{z}_Q). \quad (369)$$

Пользуясь формулой (13), определяем

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_Q \\ \dot{y}_Q \\ \dot{z}_Q \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -\sin S & -\cos S & 0 \\ \cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{bmatrix}, \quad (370)$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

Затем переходя от звездной к земной системе отсчета (12) и подставляя найденные значения \dot{x}_Q , \dot{y}_Q , \dot{z}_Q (370) в формулу (369), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{X-X_Q}{\rho} (\dot{x}\cos S + \dot{y}\sin S + \omega Y_Q) + \frac{Y-Y_Q}{\rho} (-\dot{x}\sin S + \dot{y}\cos S - \omega X_Q) + \\ & + \frac{Z-Z_Q}{\rho} \dot{z}. \end{aligned} \quad (371)$$

В свою очередь, разложив скорость небесного объекта на две составляющие: V_r — геоцентрическую радиальную и V_u — трансверсальную, определим ее проекцию на любое направление s по формуле

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial r} V_r + \frac{\partial s}{\partial u} V_u.$$

{Применительно к осям геоцентрической звездной системы координат, с учетом выражения (42)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_u; \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_u; \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_u. \end{aligned} \quad (372)$$

Умножив угловую скорость \dot{v} (367) на геоцентрический радиус r и исключив r (367), получим трансверсальную скорость

$$V_u = \sqrt{\frac{fM}{p}} (1 + e \cos u). \quad (373)$$

Геоцентрическая радиальная скорость будет

$$V_r = \frac{\partial r}{\partial v} \dot{v} = \frac{p \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \dot{v}.$$

Исключив \dot{v} (367), получим

$$V_r = \sqrt{\frac{fM}{p}} e \sin v. \quad (374)$$

Наконец, подставив значения V_u (373) и V_r (374) в уравнения (372), представим правую часть формулы (371) через элементы орбиты небесного объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{\frac{fM}{p}} [e \sin v (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - (1 + e \cos v) \times \\ &\times (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i)]; \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{fM}{p}} [e \sin v (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + (1 + e \cos v) \times \\ &\times (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)], \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{fM}{p}} [e \sin v \sin u \sin i + (1 + e \cos v) \cos u \sin i]. \end{aligned} \quad (375)$$

Таким образом, с помощью формул (371) и (375) измеренные значения радиальной скорости можно представить функциями, аргументами которых являются элементы орбиты небесного объекта и координаты наблюдательной станции. Решив эти уравнения совместно с уравнениями линейно-угловых измерений по методу наименьших квадратов, можно вычислить координаты пункта геодезической сети со всеми необходимыми оценками. При этом численные методы геодезии позволяют оптимизировать наблюдения так, что можно определить положение пунктов с ошибками в заданных пределах.

4.11. ИДЕЯ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА

Если в наблюдениях ИСЗ учесть притяжения Луны, Солнца и все негравитационные силы, то пертурбационную функцию в уравнении движения представит возмущающий потенциал Земли

$$R_e = -\frac{fM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (I_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\mu), \quad (376)$$

определяемый как разность между потенциалом притяжения Земли и потенциалом шара, имеющего такую же массу, какую имеет Земля.

Задача заключается в исключении составляющих возмущающего ускорения через возмущающую функцию R_e и элементы орбиты ИСЗ.

Затем, проинтегрировав уравнения движения ИСЗ за время $t - t_0$, получают возмущения в элементах орбиты $\Delta\theta$ как функции параметров I_n , I_{nm} , K_{nm} гравитационного поля Земли.

Согласно формулам (364) и (366) составляющие возмущающего ускорения будут

$$K_1 = \frac{\partial R_e}{\partial r}; \quad K_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial R_e}{\partial \varphi} \cos u \sin i + \frac{\partial R_e}{\partial \lambda} \cos i \sec \varphi \right) \sec \varphi; \quad (377)$$

$$K_3 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial R_e}{\partial \varphi} \cos i - \frac{\partial R_e}{\partial \lambda} \cos u \sin i \sec \varphi \right) \sec \varphi.$$

При этом, как показано в предыдущем параграфе, геоцентрические радиус, широта и долгота могут быть представлены соответствующими функциями элементов орбиты ИСЗ.

Методически задачу отыскания коэффициентов гармоник геопотенциала удобно решать методом последовательных приближений. В первую очередь необходимо определить зональные гармоники. Это оправдано, так как основная часть возмущения ИСЗ вызвана полярным сжатием, характеризующимся четными зональными гармониками и прежде всего — второй зональной гармоникой с коэффициентом I_2 . Затем, принимая зональные гармоники с коэффициентами I_n за известные параметры, приступают к вычислению незональных коэффициентов I_{nm} и K_{nm} . В последующем приближении зональных коэффициентов учитывают незональные гармоники, вычисляя их по известным из первого приближения значениям незональных гармонических коэффициентов. При вычислении незональных гармонических коэффициентов целесообразно учитывать данные наземной гравиметрической съемки, представляющие более полно потенциал по элементарным площадкам.

Такой дифференциальный метод изучения фигуры Земли позволяет оптимизировать задачу отыскания той или иной группы коэффициентов гармоник геопотенциала надлежащим выбором орбиты ИСЗ, комбинацией наблюдений и целесообразной методикой обработки данных.

Возмущающее влияние на элементы орбиты двух четных зональных гармоник геопотенциала

$$R_e = -\frac{fM}{a_e} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 (3 \sin^2 \varphi - 1) I_2 + \frac{1}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 (35 \sin^4 \varphi - 30 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + 3) I_4 \right], \quad (378)$$

в основном характеризующих полярное сжатие Земли, рассмотрим отдельно.

Ортогональные составляющие K_1 , K_2 , K_3 возмущающего ускорения от R_e представим формулами

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{jM}{r^2} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 \left[\frac{3}{2} (3\sin^2 \varphi - 1) I_2 + \frac{1}{8} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (35\sin^4 \varphi - 30\sin^2 \varphi + 3) I_4 \right], \\
K_2 &= -\frac{jM}{r^2} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 \left[3\sin \varphi I_2 + \frac{1}{8} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (140\sin^3 \varphi - 60\sin \varphi) I_4 \cos u \sin i \right], \\
K_3 &= -\frac{jM}{r^2} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 \left[3\sin \varphi I_2 + \frac{1}{8} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (140\sin^3 \varphi - 60\sin \varphi) I_4 \right] \cos i.
\end{aligned} \tag{379}$$

Исключив в этих формулах $\sin \varphi = \sin u \sin i$ и приведя к соответствующему масштабу, получим

$$\begin{aligned}
K_1^0 &= k_2 \left[(3\sin^2 u \sin^2 i - 1) I_2 + \frac{1}{12} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (35\sin^4 \sin^4 i - \right. \\
&\quad \left. - 30\sin^2 u \sin^2 i + 3) I_4 \right]; \\
K_2^0 &= -k_2 \left[\sin 2u \sin^2 i I_2 + \frac{1}{12} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (70\sin 2u \sin^2 u \sin^4 i - \right. \\
&\quad \left. - 30\sin 2u \sin^2 i) I_4 \right]; \\
K_3^0 &= -k_2 \left[\sin 2i \sin u I_2 + \frac{1}{12} \left(\frac{ae}{r} \right)^2 (70\sin 2i \sin^2 i \sin^3 u - \right. \\
&\quad \left. - 30\sin 2i \sin u) I_4 \right]; \\
k_2 &= \frac{3}{2} \sqrt{1 - e^2} \sqrt{\frac{jM}{a^3}} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{ae}{r} \right)^2.
\end{aligned} \tag{380}$$

С помощью этой методики можно определить значения K_1^0 , K_2^0 , K_3^0 для возмущающего потенциала Земли, представленного всеми гармониками геопотенциала. Численное интегрирование уравнения движения ИСЗ показывает, что четные зональные гармоники вызывают вековые и долгопериодические возмущения элементов орбиты Ω , ω , M и долгопериодические возмущения элементов орбиты e и i ; нечетные зональные гармоники — долгопериодические возмущения ω , M , e и i . Основную часть вековых возмущений, надежно определяемых из наблюдений ИСЗ, дает вторая зональная гармоника, а доля любой другой четной зональной гармоники на три порядка меньше, чем доля второй зональной гармоники. Из обработки наблюдений большого числа ИСЗ с различными параметрами орбит надежно оценено значение коэффициента $I_2 = 1082,627 \cdot 10^{-6}$. Коэффициент I_2 определяется столь надежно, что В. Козии, обработав наблюдения ИСЗ на большом промежутке, обнаружил его изменение с годовым периодом $\Delta I_2 = 1,3 \cdot 10^{-9} \cos(2\pi t + 160^\circ \pm 10^\circ)$ (t — время в долях года). Незональные гармоники, за исключением гармоники с коэффициентами I_{22} , K_{22} , представляющей эллиптичность экватора, вызывают короткопериодические вариации всех элементов орбиты ИСЗ. Сжатие экватора вызывает долгопериодические изменения с малой амплитудой элементов Ω , ω , M , i .

В общем случае, решив уравнения движения ИСЗ, наблюдаемые

вековые и долгопериодические возмущения элементов орбиты ИСЗ можно представить уравнениями вида

$$d\theta_V = UI; I = I(I_2, I_3, \dots, I_n). \quad (381)$$

Прежде чем использовать уравнения (381), в значения $d\theta_V$ вводят поправки за гравитационные короткопериодические и любые другие вариации. При этом используют такие ИСЗ, в движении которых надежно учитываются влияния атмосферы, давления света и лунно-солнечного притяжения. Оптимизируя уравнения (381) по методу наименьших квадратов, можно определить все зональные коэффициенты $I = I^0 + \Delta I$ из нормальных уравнений

$$\Delta I = (U'U)^{-1}U'(d\theta_V - UI^0).$$

Для улучшения обусловленности матрицы нормальных уравнений $U'U$ используют спутники, равномерно распределенные по наклонению орбит $0-90^\circ$, наблюдения каждого ИСЗ выполняют равномерно по всей орбите. Если группа ИСЗ имеет узкий диапазон наклонений, наблюдают как низкие, так и высокие спутники. Уравнение (381) удобно решать отдельно для четных и нечетных гармоник, так как нечетные гармоники не вызывают вековых изменений в элементах орбит. Для вычисления коэффициентов нечетных зональных гармоник составляют уравнения долгопериодических возмущений $d\theta_V$.

Определение коэффициентов I_{nm} и K_{nm} незональных гармоник представляет собой трудную задачу. Это объясняется, во-первых, тем, что амплитуда и периоды возмущений от незональных гармоник малы и поэтому могут быть надежно определены по точным и равномерно распределенным наблюдениям, выполненным за каждый период таких возмущений. Для этого необходимо наземные пункты располагать равномерно по всему земному шару. Во-вторых, возмущения от незональных гармоник по амплитуде сравнимы с амплитудой рассогласования координат пунктов геодезической сети и они коррелированы. Поэтому задача уточнения незональных коэффициентов и координат пунктов геодезической сети решается последовательными приближениями. В-третьих, незональные гармоники надежно определяются по наблюдениям низких спутников, в движении которых сильно сказывается влияние атмосферы и ионосферы. Следовательно, рассматриваемая задача тесно связана с задачей моделирования атмосферы и ионосферы. Для уменьшения возмущения от сопротивления атмосферы и светового давления Солнца используют спутник, имеющий большую массу и сравнительно малую поверхность.

Совместное уточнение параметров геопотенциала и координат пунктов геодезической сети составляет основное содержание динамического метода.

Напишем уравнения поправок в виде

$$V = AdX_S + BdX_Q + L, \quad (382)$$

где dX_S и dX_Q — соответственно векторы поправок координат спутника и наземных пунктов.

При этом

$$dX_S = \begin{bmatrix} \delta X_S \\ \delta Y_S \\ \delta Z_S \end{bmatrix} = A' p S \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (383)$$

Положим при составлении уравнений поправок (382) исключено влияние зональных гармоник геопотенциала и всех негравитационных сил за время $t - t_0$. Тогда dX_S представляет поправку за ошибку установления начальных элементов $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ и возмущающее влияние незональных гармоник геопотенциала.

Представим дифференциальные изменения прямоугольных координат dx, dy, dz через малые приращения элементов $da, de, di, d\Omega, d\omega, dM$ оскулирующей эллиптической орбиты ИСЗ. Пользуясь формулами

$$r = a(1 - e \cos E); \quad M = E - e \sin E; \quad dv = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} dE, \quad (384)$$

получаем дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} dE &= \frac{a}{r} dM; \quad dv = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2} dM; \\ du &= d\omega + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2} dM; \quad dr = \frac{r}{a} da - a \cos E de + \frac{ea^2}{r} \sin E dM; \\ ds &= \frac{\partial s}{\partial r} \frac{r}{a} da - \frac{\partial s}{\partial r} a \cos E de + \left(\frac{\partial s}{\partial r} \frac{ea^2}{r} \sin E + \frac{\partial s}{\partial u} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2}\right) dM + \\ &+ \frac{\partial s}{\partial i} di + \frac{\partial s}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial s}{\partial \omega} d\omega. \end{aligned} \quad (385)$$

Частные производные, следующие из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega; \quad \frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial y}{\partial i} = -z \cos \Omega; \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x; \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{z}{r}; \quad \frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos i; \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0; \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= -r(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i); \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= r(\cos u \cos \Omega \cos i - \sin u \sin \Omega); \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= r \cos u \sin i. \end{aligned} \quad (386)$$

Пользуясь формулами (385) и (386), получаем

$$ds = \Theta d\Theta, \quad (387)$$

где

$$ds' = [dx dy dz]; \quad d\theta' = [da de di d\Omega dw dM],$$

а матрица Θ имеет элементы:

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= x/a; & \theta_{21} &= y/a; & \theta_{31} &= z/a; \\ \theta_{12} &= -\frac{a}{r} x \cos E; & \theta_{22} &= -\frac{a}{r} y \cos E; & \theta_{32} &= -\frac{a}{r} z \cos E; \\ \theta_{13} &= z \sin \Omega; & \theta_{23} &= -z \cos \Omega; & \theta_{33} &= r \sin u \cos i; \\ \theta_{14} &= -y; & \theta_{24} &= x; & \theta_{34} &= 0; \\ \theta_{15} &= \frac{\partial x}{\partial u}; & \theta_{25} &= \frac{\partial y}{\partial u}; & \theta_{35} &= \frac{\partial z}{\partial u}; \\ \theta_{16} &= \frac{a^2}{r^2} \left(ex \sin E + \frac{\partial x}{\partial u} \sqrt{1-e^2} \right); \\ \theta_{26} &= \frac{a^2}{r^2} \left(ey \sin E + \frac{\partial y}{\partial u} \sqrt{1-e^2} \right); \\ \theta_{36} &= \frac{a^2}{r^2} \left(ez \sin E + \frac{\partial z}{\partial u} \sqrt{1-e^2} \right). \end{aligned} \quad (388)$$

Формулы (387) и (388) — матричная запись дифференциальных уравнений, связывающих малые приращения элементов оскулирующей орбиты $d\theta$ и прямоугольных координат спутника ds .

Таким образом, исходное уравнение (382), выраженное через элементы орбиты, имеет вид

$$V = A_{\theta} d\theta + B dX_Q + L; \quad A_{\theta} = AA'_p S\Theta. \quad (389)$$

Обозначив поправки в элементы оскулирующей эллиптической орбиты за начальное условие через $\Delta\theta_0$, за возмущающее влияние через $d\theta_V = U_i dX_V$, где dX_V — вектор неизвестных гармоник, напишем уравнение (389) для сеансов наблюдения спутников

$$V_i = A_{\theta} \Delta\theta_0 + B dX_Q + A_{\theta} U_i dX_V + L_i. \quad (390)$$

Уравнение (390) удобно решать групповым способом при условии $V' P_0 V = \text{min}$, описанным в работе [12], поэтому ограничимся перечислением формул

$$\begin{aligned} \Delta\theta_0 &= -(A'_{\theta} P_0 A_{\theta})^{-1} A'_{\theta} P_0 (B_i dX_Q + C_i dX_V + L_i); \\ B'_i P_1 B_i dX_Q + B'_i P_1 (C_i dX_V + L_i) &= 0; \\ C'_i P_1 B_i dX_Q + C'_i P_1 (C_i dX_V + L_i) &= 0; \\ P_{1i} &= P_0 - P_0 A_{\theta} (A'_{\theta} P_0 A_{\theta})^{-1} A'_{\theta} P_0. \end{aligned} \quad (391)$$

P_0 — весовая матрица уравнения (390), которая в частном случае может быть и диагональной.

Составим уравнения (390) для каждой серии наблюдений ИСЗ ($i = 1, 2, \dots, s$) и, просуммировав их, получим нормальные уравнения

$$N_{11}dX_Q + N_{12}dX_V + L_{11} = 0;$$

$$N'_{12}dX_Q + N_{22}dX_V + L_{22} = 0,$$

из решения которых находим искомые величины dX_Q и dX_V .

Анализ результатов позволяет косвенно изучать влияние неучтенной части гармоник геопотенциала, оценить качество наблюдений и планировать наблюдения новых ИСЗ.

В первом приближении после согласования координат пунктов геодезической сети и коэффициентов гармоник геопотенциала, можно вернуться к более точному определению новых значений коэффициентов зональных гармоник, поскольку короткопериодические возмущения от незональных гармоник будут учтены более полно. Затем вновь повторяется определение незональных гармоник с учетом новых значений зональных гармоник и более точных начальных условий, при этом включаются новые наблюдения ИСЗ и исключается часть старых, оцененных некачественно.

По изменениям значений координат пунктов геодезической сети от приближения к приближению можно судить о принятой модели геопотенциала (число зональных и незональных гармоник, точность коэффициентов зональных гармоник и др.) и о надежности учета возмущений негравитационного характера.

Таким образом, задача динамического метода, решаемая последовательными приближениями, связана с планированием новых наблюдений и уточнением теории учета возмущений от негравитационных сил.

Достоинством метода является совместное определение координат пунктов геодезической сети и параметров геопотенциала и то, что геодезическая сеть определяется в абсолютной системе; при этом пункты могут быть удалены друг от друга на несколько тысяч километров. Если на каком-то пункте было мало наблюдений, то это не влияет или очень слабо влияет на определение положения других пунктов.

4.12. СВЕТОЛОКАЦИЯ ЛУНЫ

4.12.1. Общие сведения о светолокации лунного отражателя

В этом параграфе рассмотрим решение геодезических задач по измерениям расстояний методом светолокации угловых отражателей, установленных на Луне.

Светолокация космических объектов стала возможной после создания оптических квантовых генераторов благодаря работам, выполненным в Физическом институте АН СССР под руководством лауреатов Ленинской и Нобелевской премий академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова. В том же институте под руководством профессора Ю. Л. Кокурина проводились работы по лазерной светолокации Луны. В Крымской астрофизической обсерватории АН СССР в 1963 г. впервые было полу-

чено отражение лазерного импульса от поверхности Луны, а в 1965 г. измерено расстояние до Луны с точностью около 200 м.

Лазерный пучок, проходя толщу земной атмосферы, расходится на 5—7" и образует на Луне пятно радиусом около 6 км. Рельеф этой освещенной площадки и сферичность Луны, обуславливая размытие отраженного лазерного сигнала во времени, ограничивают точность измерения расстояния до Луны. Повышение точности измерения расстояния можно достигнуть, локализуя точку наведения телескопа с помощью уголковых отражателей. К настоящему времени на Луне установлено 5 уголковых отражателей, доставленных туда советскими и американскими космическими летательными аппаратами. В табл. 9 приведены даты доставки лунных уголковых отражателей и их селенографические координаты.

Т а б л и ц а 9

| Носитель, дата доставки на Луну отражателя | Селенографические координаты | |
|--|------------------------------|---------|
| | широта | долгота |
| «Луноход-1», 17.11.1970 | 34°47' | +38°24' |
| «Луноход-2», 17.01.1973 | 30 24 | +26 07 |
| «Аполлон-11», 21.07.1969 | 23 27 | 0 41 |
| «Аполлон-14», 05.02.1971 | 17 25 | 3 36 |
| «Аполлон-15», 31.07.1971 | 3 40 | 2005 |

Луна, обращенная к Земле всегда одной и той же стороной, является удобным космическим объектом для лазерных наблюдений благодаря медленному изменению экваториальных координат точек ее поверхности. С помощью лазерного телескопа, непрерывно отслеживая отражатель, удастся интегрировать сигналы целой серии импульсов, в пределах которой с высокой точностью учитываются изменения расстояния от телескопа до лунного отражателя. Скорость изменения расстояния телескоп — лунный отражатель составляет 100 м/с. Если временная привязка измерений выполняется с точностью 0,1 мс, ошибка привязки составит 0,01 м. Однако, когда решается задача совместной обработки наблюдений, накопленных на протяжении нескольких лет, стабильность часов, задающих шкалу времени, должна быть не хуже 10 нс. Такую стабильность могут обеспечить атомные стандарты частоты.

Регулярные наблюдения лунных отражателей ведут Крымская астрофизическая обсерватория АН СССР, Макдональдская обсерватория в США и австралийская обсерватория Оррорал вблизи г. Канберра.

В настоящее время точность одного измерения расстояния до Луны составляет несколько дециметров. В перспективе ожидается, что применяя лазеры с очень узким пучком и продолжительностью импульса 0,1 нс, можно измерять расстояния до Луны с точностью 0,03 м.

4.12.2. Уравнения системы Земля — Луна

Для изучения принципа использования измеренных расстояний от наземной обсерватории до лунного отражателя обратимся к рис. 20 и 21 представляющим геометрию системы Земля — Луна. На этих рисунках приняты следующие обозначения: O и ϵ — центры масс Земли и Луны, P и P_ζ — северные полюсы Земли и Луны; γ и G_e — точки весеннего равноденствия и отсчета геоцентрической долготы; r , φ , λ — геоцентрические радиусы, широта и долгота обсерватории Q , лоцирующей лунный отражатель S^* на момент времени S начального геоцентрического меридиана PG_e ; $r(r_\zeta)$, $\alpha(\alpha_\zeta)$, $\delta(\delta_\zeta)$ — геоцентрические радиус, прямое восхождение и склонение лунного отражателя (центра масс Луны); R_0 , b_0 , l_0 — селеноцентрические радиусы, широта и долгота лунного отражателя; D и Z — расстояния обсерватории от оси вращения и экватора Земли; δ_0 и ζ_0 — расстояния отражателя от оси вращения и экватора Луны; b и l — селеноцентрические широта и долгота Земли или либра-

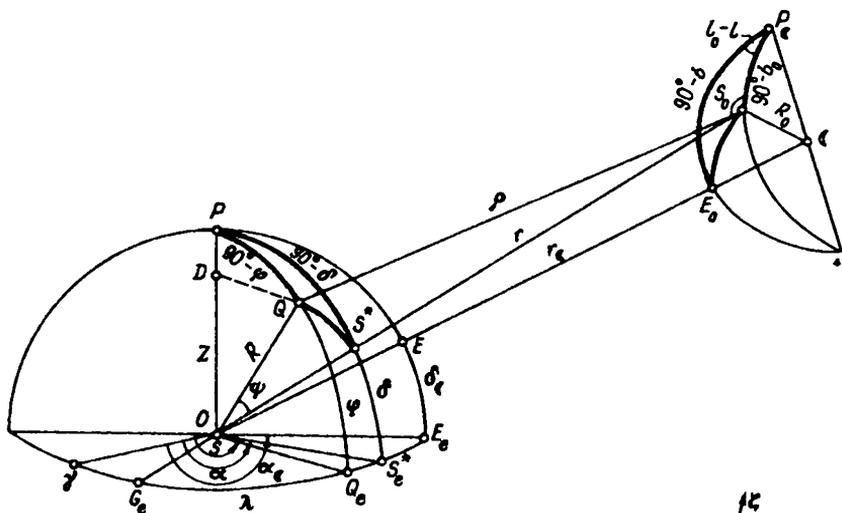


Рис. 20. Система Земля — Луна

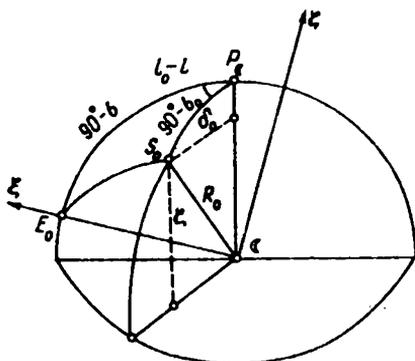


Рис. 21. Селеноцентрические координаты

ция Луны по широте и долготе; ρ — расстояние от обсерватории до лунного отражателя.

На основании рис. 20 и принятых обозначений имеем

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi. \quad (392)$$

Для косинуса угла между двумя векторами

$$\mathbf{R} = D \cos(S + \lambda) \mathbf{i} + D \sin(S + \lambda) \mathbf{j} + Z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

где x, y, z — геоцентрические координаты лунного отражателя, $S + \lambda$ — время на меридиане наземной обсерватории, запишем формулу

$$\cos \psi = [Dx \cos(S + \lambda) + Dy \sin(S + \lambda) + Zz] / Rr.$$

Подставим значение $\cos \psi$ в формулу (392), получим

$$\rho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2(Dx \cos s + Dy \sin s + Zz)}, \quad (393)$$

где $R^2 = D^2 + Z^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $s = S + \lambda$.

Теперь геоцентрические координаты x, y, z лунного отражателя представим через параметры системы Земля — Луна и селеноцентрические координаты лунного отражателя.

Селеноцентрические прямоугольные прямолинейные ξ, η, ζ и цилиндрические δ_0, ζ_0, l_0 координаты отражателя связаны следующим образом:

$$\xi = \zeta_0 \sin b + \delta_0 \cos b \cos(l_0 - l),$$

$$\eta = \delta_0 \sin(l_0 - l), \quad (394)$$

$$\zeta = \zeta_0 \cos b - \delta_0 \sin b \cos(l_0 - l).$$

Исключив в формуле (394) $\delta_0 = R_0 \cos b_0$, $\zeta_0 = R_0 \sin b_0$, получим

$$\xi = R_0 [\sin b_0 \sin b + \cos b_0 \cos b \cos(l_0 - l)],$$

$$\eta = R_0 \cos b_0 \sin(l_0 - l), \quad (395)$$

$$\zeta = R_0 [\sin b_0 \cos b - \cos b_0 \sin b \cos(l_0 - l)].$$

Если начало координат перенести в центр масс Луны ζ ($x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta$) и повернуть оси координат на угол δ_ζ вокруг оси η и на угол α_ζ вокруг оси, параллельной оси z , то

$$\begin{bmatrix} x - x_\zeta \\ y - y_\zeta \\ z - z_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_\zeta \cos \alpha_\zeta & -\sin \alpha_\zeta \sin \delta_\zeta \cos \alpha_\zeta \\ \cos \delta_\zeta \sin \alpha_\zeta & \cos \alpha_\zeta \sin \delta_\zeta \sin \alpha_\zeta \\ -\sin \delta_\zeta & 0 & \cos \delta_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (396)$$

где

$$x_\zeta = r_\zeta \cos \delta_\zeta \cos \alpha_\zeta,$$

$$y_\zeta = r_\zeta \cos \delta_\zeta \sin \alpha_\zeta,$$

$$z_\zeta = r_\zeta \sin \delta_\zeta.$$

Таким образом, геоцентрические координаты x, y, z лунного отражателя в формуле (393) с помощью полученных нами соотношений (395) и (396) представлены через параметры $r_{\zeta}, \alpha_{\zeta}, \delta_{\zeta}, b, l$ системы Земля — Луна и селеноцентрические координаты R_0, b_0, l_0 лунного отражателя.

4.12.3. Принципы решения уравнений светолокации Луны

Обозначим правую часть формулы (393) через $\bar{\rho}(s, D, Z, r_{\zeta}, \alpha_{\zeta}, \delta_{\zeta}, b, l, R_0, b_0, l_0)$ как функцию времени $s = S + \lambda$, геоцентрических координат D, Z обсерватории, параметров $r_{\zeta}, \alpha_{\zeta}, \delta_{\zeta}, b, l$ системы Земля — Луна, селеноцентрических координат R_0, b_0, l_0 лунного отражателя, и запишем ее в виде нелинейной функции

$$\Phi = \bar{\rho} - \rho = 0. \quad (397)$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора. Пользуясь тем, что аргументы ее известны или могут быть вычислены с малыми ошибками, ограничимся линейным разложением и запишем формулу (397) в виде уравнения поправок.

$$\begin{aligned} v = & -\Delta\rho + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial\Phi}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial\Phi}{\partial Z} \Delta Z + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{\zeta}} \Delta r_{\zeta} + \frac{\partial\Phi}{\partial \alpha_{\zeta}} \Delta \alpha_{\zeta} + \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial \delta_{\zeta}} \Delta \delta_{\zeta} + \frac{\partial\Phi}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial\Phi}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial\Phi}{\partial R_0} \Delta R_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial b_0} \Delta b_0 + \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial l_0} \Delta l_0 + \bar{\rho}^0 - \rho', \end{aligned} \quad (398)$$

где $\rho', \Delta\rho, v$ — результат измерения топоцентрического расстояния и поправки за систематическую и случайную ошибки его измерения; $\bar{\rho}^0$ — вычисленное значение топоцентрического расстояния по счислимым значениям аргументов $s^0, D^0, Z^0, r_{\zeta}^0, \alpha_{\zeta}^0, \delta_{\zeta}^0, b_0^0, l_0^0, R_0^0, b^0, l^0$; $\Delta s, \Delta D, \Delta Z, \Delta r_{\zeta}, \Delta \alpha_{\zeta}, \Delta \delta_{\zeta}, \Delta b, \Delta l, \Delta R_0, \Delta b_0, \Delta l_0$ — поправки соответствующих аргументов. Заметим, что поправка времени Δs складывается из поправки гринвического времени и поправки долготы обсерватории. Как видно из формулы (393), поправка долготы обсерватории не разделяется, поэтому можно определить разность долгот двух обсерваторий, синхронно или квазисинхронно лоцирующих лунный отражатель.

Составляя уравнение поправок (398) для каждого измерения топоцентрического расстояния ρ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) получим неопределенную и несовместную систему n линейных уравнений, которую можно решить методом наименьших квадратов и найти поправки к результатам измерений и счислимым значениям аргументов. При этом, конечно, поправку за систематическую ошибку будем полагать пренебрегаемо малой величиной или постоянной для большой группы измерений.

В общей постановке можно совместно искать все параметры. Однако полезно их определить групповыми приближениями. На первом этапе, полагая известными геоцентрические координаты обсерватории, по наблюдениям отражателей, определенным образом размещенных на

Луне, уточняются геоцентрические координаты и либрация Луны, а также селеноцентрические координаты отражателей. На втором этапе уточняют геоцентрические координаты обсерваторий, используя дефференциальные и периодические изменения координат отражателей и сведя к минимуму влияние ошибок их определения.

В формуле (393), заменив прямоугольные координаты отражателя его сферическими координатами

$$x = r \cos \delta \cos \alpha; \quad y = r \cos \delta \sin \alpha; \quad z = r \sin \delta,$$

после несложных преобразований получим

$$\rho = \sqrt{r^2 + D^2 + Z^2 - 2r[Z \sin \delta + D \cos \delta \cos (\alpha - s)]}.$$

На малых интервалах времени в приращениях расстояния можно выделить периодическую составляющую

$$\Delta \rho_{\omega} = -\frac{r}{\rho} D \cos \delta \sin (\alpha - s) \Delta s,$$

обусловленную суточным вращением Земли, амплитуда и фаза которой соответствует радиусу суточной параллели и долготе обсерватории.

Требования к точности определения геоцентрического радиуса отражателя невелики, поскольку $(m_D)_r = D m_r / r$.

Ошибку прямого восхождения можно считать постоянной и, наблюдая отражатель симметрично относительно меридиана, ее влияние можно свести до минимума. Момент времени, когда изменение в расстоянии ρ , обусловленное суточным вращением Земли, равно нулю, соответствует кульминации отражателя.

Ошибку склонения также можно считать постоянной. Влияние ее на вывод радиуса суточной параллели обсерватории будет носить систематический характер с периодом, равным периоду обращения Луны. Оно может быть исключено методически по месячному ряду наблюдений.

Выяснено, что ошибка определения радиуса суточной параллели обсерватории приблизительно равна удвоенной ошибке измерения топоцентрического расстояния отражателя. Ожидается, что точность измерения топоцентрического расстояния составит 0,05 м. В этом случае точность определения радиуса суточной параллели обсерватории будет около 0,1 м.

При вычислении разности долгот $\Delta \lambda$ обсерватории по наблюдениям кульминации отражателей ошибки систематического характера исключаются и поэтому разность долгот обсерваторий можно определить с точностью 0,07 м.

Синхронно лоцируя Луну с двух обсерваторий, можно определить разность их расстояний от экватора $\Delta Z = Z_2 - Z_1$ с такой же точностью, с какой установлены радиусы их суточных параллелей.

4.13. СПУТНИКОВОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

4.13.1. Сущность спутникового нивелирования

Радиовысотомер, установленный на борту ИСЗ, измеряет разность высот двух поверхностей: средней уровенной поверхности морей и океанов и уровенной поверхности точки нахождения ИСЗ в момент измерения. Радиовысотомер с помощью параболической антенны передает вертикально вниз высокочастотные импульсы электромагнитных волн сантиметрового диапазона, продолжительностью 100 нс. Сферический фронт волны, распространяемый от радиовысотомера, достигает поверхности океана по кратчайшему расстоянию и в течение почти 100 нс подспутниковая точка поверхности океана покрывается освещенной площадкой. Отраженный сигнал в идеальных условиях прохождения тем же кратчайшим путем возвращается в приемник радиовысотомера. Специальное устройство детектирует и осредняет большое число сигналов. Пик сигнала нормируется до постоянного значения и за момент приема отраженного сигнала принимается момент, когда его мощность впервые оказывается больше нормированного ее значения. Бортовой компьютер выдает время прямого и обратного прохождения сигналов по кратчайшему расстоянию.

Геометрию спутникового нивелирования поясним с помощью рис. 22, в котором приняты следующие обозначения: r , φ — геоцентрические радиус и широта спутникового радиовысотомера Q ; r_0 , φ_0 — геоцентрический радиус и широта подспутниковой точки Q_0 на геоиде; B — геодезическая широта спутникового радиовысотомера; ξ — составляющая уклонения отвеса в плоскости меридиана точки Q ; отрезок $Q_0Q = h$ — высота спутникового радиовысотомера над геоидом; отрезок $Q_eQ = c$ — высота геоида над отсчетным эллипсоидом.

Сумма углов ν и ν_0 для фиксированной высоты равна разности гео-

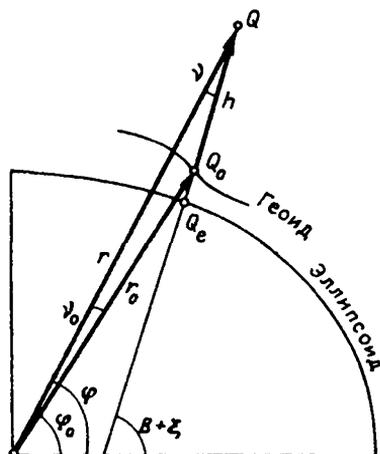


Рис. 22. Геометрия спутникового нивелирования

дезической B и геоцентрической φ широты точки Q_0 . На широте $B = 45^\circ$ при $h = 1000$ (1500) км эти малые углы имеют следующие значения: $\nu = 10,02'(9,34')$; $\nu_0 = 1,52'(2,20')$.

Пользуясь рис. 22, запишем векторное уравнение спутникового нивелирования

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}. \quad (399)$$

Из этого векторного уравнения следует: во-первых, если при известном значении геоцентрического радиуса-вектора \mathbf{r} спутникового радиовысотометра измерен вектор \mathbf{h} , то можно определить геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r}_0 подспутниковой точки геоида; во-вторых, если задан геоид и измерен вектор \mathbf{h} , то определяется геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r} спутникового радиовысотометра.

Особый практический интерес представляет вариант, когда известны геоцентрические радиусы-векторы геоида \mathbf{r}_0 и радиовысотометра \mathbf{r} . В этом частном случае можно будет предвычислить вектор \mathbf{h} и сравнить с измеренным значением \mathbf{h}' . Имея статистику генеральной совокупности разностей вычисленных и измеренных значений высот радиовысотометра над океаном, можно решать разнообразные геодезические и геофизические задачи: эталонирование радиовысотометра, исследование метеоусловий над океаном, определение амплитуды волн океана, оценку точности прогноза орбиты ИСЗ и др.

В спутниковом нивелировании измеряется высота ИСЗ над геоидом — вектор \mathbf{h} . Главными источниками ошибок измерения h являются: радиовысотометр, условия прохождения импульсов и топография поверхности океана.

Систематические приборные поправки радиовысотометра могут быть определены метрологически на эталонных полигонах океана. Случайная часть приборной погрешности радиовысотометра может быть снижена до 0,05 м.

Ошибки за условие прохождения импульса из-за неучета тропосферной рефракции фронта радиоволн могут достигать 5 м. Большую часть этих ошибок можно исключить, определяя температуру, давление и влажность воздуха над океаном вблизи района нивелирования. При тщательно отработанной методике учета метеофакторов ошибку определения прохождения импульса можно снизить до 0,08 м.

Для ослабления влияния топографии поверхности океана используют статистику высот волн на различных акваториях океана по временам года. Выявлено, что при эффективной высоте волн $l = 12$ м высота ИСЗ от среднего уровня океана уменьшается на 1,8 м. Статистика показывает, что эффективная высота волн $l = 8$ м зимой в северной Атлантике наблюдается один раз в неделю, а значение $l = 16$ м можно ожидать в течение 3—4 ч за 15 лет. Летом волны высотой $l = 2$ м наблюдаются 40 % времени, а высотой $l = 6$ м — 1 % времени. Таким образом, наиболее точные определения геоида могут быть выполнены по летним наблюдениям.

За сутки можно отнивелировать два профиля геоида, а за год Миро-

вой океан можно 20 раз покрыть нивелировкой. Поэтому планирование и выполнение планетарного спутникового нивелирования, периодическое эталонирование спутниковых радиовысотометров относятся к классу крупных научно-технических и производственных задач государственного масштаба.

В зарубежной и отчасти в советской литературе спутниковое нивелирование, которое представляет идеальный способ прямого определения высот геоида, называют спутниковой альтиметрией. Очевидно, термин «спутниковое нивелирование» правильно отражает сущность нового способа определения высот геоида, так же как традиционный способ определения высот геоида по наземным астрономо-геодезическим и гравиметрическим измерениям называется астрономо-гравиметрическим нивелированием.

4.13.2. Уравнения спутникового нивелирования

Рассмотрим уравнения, связывающие геоид, измеренную высоту ИСЗ над геоидом и его геоцентрическое положение. Пользуясь рис. 22, запишем известную формулу для сторон треугольника

$$h^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \nu_0. \quad (400)$$

Как было выяснено ранее, угол ν_0 мал по величине, так например, для ИСЗ, нивелирующих геоид, этот угол составляет около 2'. Ошибка его оценки 0,001" приводит в вычислении косинуса угла к ошибке $3 \cdot 10^{-12}$.

Для удобства в последующих действиях формулу (400) представим в виде следующего уравнения:

$$\Phi = (r^2 + r_0^2 - h^2)/2 - rr_0 \cos \nu_0 = 0. \quad (401)$$

Вычислим частные производные функции Φ (401) по r и r_0

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = r - r_0 \cos \nu_0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_0} = r_0 - r \cos \nu_0. \quad (402)$$

Пользуясь рис. 22 и формулами (401), находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = h \cos \nu; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_0} = -h \cos(\nu + \nu_0). \quad (403)$$

Частная производная функции Φ (401) по h равна

$$\partial \Phi / \partial h = -h. \quad (404)$$

Пусть измеренная величина есть

$$h = h' + \Delta h + v, \quad (405)$$

где h' — результат измерения; Δh и v — поправки за систематическую и случайную ошибки измерения.

Известное значение геоцентрического расстояния спутника r^0 необходимо уточнить поправкой

$$\Delta r = dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi \quad (406)$$

за несовпадение начала отсчета координат с центром масс Земли и поправкой

$$dr = \frac{\partial r}{\partial V} dV \quad (407)$$

за ошибку модели внешнего гравитационного поля Земли, принятой для вычисления r .

Таким образом, геоцентрический радиус спутникового радиовысотомера будет

$$r = r^0 + dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi + \frac{\partial r}{\partial V} dV. \quad (408)$$

Геоцентрический радиус геоида представим суммой счислимого значения r_0^0 и поправкой dr_0 за ошибку модели внешнего гравитационного поля Земли

$$r_0 = r_0^0 + dr_0; \quad dr_0 = \frac{\partial r_0}{\partial V} dV. \quad (409)$$

Полагая поправки Δh , v , dV , Δr , dr , dr_0 малыми по величине и учитывая формулы (400) — (409), функцию (401) запишем в виде уравнения поправок

$$v = -\Delta h + (dx_0 \cos \varphi \cos \lambda + dy_0 \cos \varphi \sin \lambda + dz_0 \sin \varphi) \cos v_0 + \left[\frac{\partial r}{\partial V} \cos v_0 - \frac{\partial r_0}{\partial V} \cos(v + v_0) \right] dV + l, \quad (410)$$

где свободный член

$$l = h^0 - h'; \quad h^0 = (r^{02} + r_0^{02} - 2r^0 r_0^0 \cos v_0)^{1/2}. \quad (411)$$

Высота h^0 вычисляется по счислимым значениям геоцентрических расстояний спутникового радиовысотомера и подспутниковой точки геоида. При этом счисляемые значения геоцентрических радиусов r^0 и r_0^0 соответствуют известному значению V^0 потенциала притяжения Земли. В формуле (410) исключена поправка за начальные условия движения ИСЗ, ибо в ее определении большой вес имеют угловые, лазерные и доплеровские наблюдения ИСЗ наземных обсерваторий.

4.13.3. Вклад спутникового нивелирования

Первая задача. Оперативное нивелирование высот поверхности Мирового океана позволяет изучать топографию океана и периодически уточнять параметры внешнего гравитационного поля Земли. Повторные нивелировки дают представительную статистику изменения геоида во времени, а также данные для установления на каждую эпоху планетарной геоцентрической системы геодезических координат и определения модели земного тяготения, ей соответствующей и адекватной внешнему гравитационному полю Земли. В этом заключается основной

вклад спутникового нивелирования в решение фундаментальных задач геодезии.

Вторая задача. В дифференциальной формуле спутникового нивелирования (410) искомыми параметрами являются координаты центра масс Земли или, иначе говоря, составляющие радиуса-вектора Δr начала отсчета координат относительно центра масс Земли. Равномерно располагая районы нивелирования по всему Мировому океану и наблюдая за вариациями силы тяжести на гравиметрических пунктах, равномерно размещенных на поверхности планеты, можно оценивать вектор Δr с сантиметровой точностью, и затем следить за вековым движением центра масс Земли в ее теле.

Третья задача. Ее можно рассматривать как следствие решения первых двух задач. Зная параметры планетарного геоида и планетарную систему геодезических координат, определяют уровенный эллипсоид, наилучшим образом аппроксимирующий планетарный геоид.

Указанная группа задач отчасти относится к задачам геодинамики.

Четвертая задача. Спутниковое нивелирование позволяет изучать геоид для отдельных районов и оперативно определять периодические и быстрые изменения кривизны и высот геоида, обусловленные перемещением масс в теле и на поверхности Земли.

В сочетании с данными наземных, морских и океанских гравиметрических съемок можно изучить местный геоид на акваториях детально по площадкам с оценкой высот в пределах нескольких сантиметров, фильтруя волны приливного и метеорологического характера.

Пятая задача. Из основного уравнения спутникового нивелирования (399) следует, что, сравнивая высоту ИСЗ, прогнозируемую по элементам его орбиты, и измеренное значение его высоты, получаем обширную статистику для оптимизации прогноза движения ИСЗ и для эталонирования их орбит над океанами, где практически отсутствуют станции слежения за космическими объектами. Решение этой задачи особенно важно для навигационных и других ИСЗ специального назначения (космические съемки, исследования и охрана природы, тематическое картографирование и др.).

Шестая задача. Технический прогресс в спутниковых наблюдениях в будущем позволит определять с высокой точностью высоты ИСЗ над континентами. Используя совместно данные спутникового нивелирования над сушей и наземные астрономо-геодезические и гравиметрические измерения можно будет определять геоид на континентах с ошибками порядка нескольких сантиметров с учетом приливных деформаций и неприливных земной коры.

Седьмая задача. Используя материалы спутникового нивелирования, можно надежно определить параметры фигуры Земли и их вековые изменения из-за переноса масс планетарного характера.

Решение указанных выше задач актуально как для планетарной геодезии, так и для геологии, геофизики, океанологии и других наук о Земле.

4.14. ДЛИННОБАЗИСНАЯ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

Принцип использования радиоинтерферометрических наблюдений квазаров в геодезических целях основан на том, что сигналы от квазаров на антенны радиотелескопов, находящихся друг от друга на большом расстоянии, поступают не одновременно, а с некоторым запаздыванием τ , обусловленным разностью расстояний от базисных пунктов радиоинтерферометрии (РИ) до квазара. Причем со временем эта разность будет меняться из-за изменения угла между базой РИ и направлением на квазар, вызванного суточным вращением Земли. Синхронизация во времени реализуется с помощью перевозимых часов или по сигналам Службы единого времени, шкала которой задается с помощью стандарта частоты.

Принцип длиннобазисной РИ рассмотрим на примере рис. 23. Положим $a = c\tau$ — разность расстояний от базисных пунктов РИ Q_1 и Q_2 до квазара σ ; c — скорость распространения электромагнитных волн; τ — относительное временное запаздывание радиосигнала, поступающего от квазара на пункты Q_1 и Q_2 . Углы δ и θ — склонение и гринвичский часовой угол квазара.

Пользуясь векторами

$$\mathbf{a} = a(\cos \delta \cos \theta \mathbf{i} + \cos \delta \sin \theta \mathbf{j} + \sin \delta \mathbf{k});$$

$$\mathbf{b} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

скалярное произведение которых

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a(X \cos \delta \cos \theta + Y \cos \delta \sin \theta + Z \sin \delta) = ab \cos \varphi = a^2,$$

получаем уравнение связи измеренной величины τ , топоцентрических экваториальных координат X , Y , Z обсерватории Q_2 , склонения δ и гринвичского часового угла θ квазара в виде

$$c\tau = X \cos \delta \cos \theta + Y \cos \delta \sin \theta + Z \sin \delta. \quad (412)$$

Часовой угол квазара θ равен разности прямого восхождения квазара α и гринвичского звездного времени S .

Производная τ по времени s

$$d\tau/ds = (X \cos \delta \sin \theta - Y \cos \delta \cos \theta)\omega/c,$$

обусловленная суточным вращением Земли с угловой скоростью ω даст второе уравнение базы.

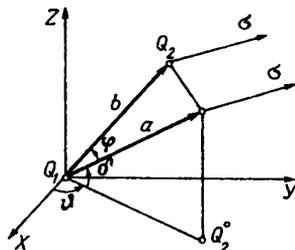


Рис. 23. Геометрия длиннобазисной радиоинтерферометрии

Поскольку экваториальные координаты α , δ квазара постоянны, а шкала атомных часов равномерна, то изучив в течение нескольких суток уклонение $d\tau/ds$ от периодической функции можно установить неравномерность вращения Земли. Выяснено, что продолжительность звездных суток и ее вариации могут быть определены с точностью порядка 0,2 мс.

Имеются и другие факторы. Результат измерения запаздывания во времени τ' будет искажен погрешностями измерений, несинхронностью часов и вариацией скорости распространения электромагнитных волн из-за неодинакового состояния атмосферы и ионосферы на концах базы.

Измеряемую величину τ представим суммой трех величин: τ' — результат измерения; $\Delta\tau$ — поправка за несинхронность часов и ошибку представления модели ионосферы и атмосферы на концах базы; v_τ — поправка за случайную ошибку измерения времени запаздывания.

Влияние погрешности модели атмосферы и ионосферы можно ослабить наблюдением квазаров на коротких волнах и на различных диапазонах частот, а также зондированием атмосферы в районах обсерваторий Q_1 и Q_2 . Выяснено, что влияние ионосферы и атмосферы на оценку можно учесть с точностью 0,1 м.

Постоянные наблюдения на нескольких обсерваториях за квазарами дадут обширную систему уравнений

$$v_\tau = -\Delta\tau + \frac{\cos\delta \cos\vartheta}{c}(\delta X_2 - \delta X_1) + \frac{\cos\delta \sin\vartheta}{c}(\delta Y_2 - \delta Y_1) + \frac{\sin\delta}{c}(\delta Z_2 - \delta Z_1) + l. \quad (413)$$

Свободный член

$$l = [(X_2^0 - X_1^0) \cos\delta \cos\vartheta + (Y_2^0 - Y_1^0) \cos\delta \sin\vartheta + (Z_2^0 - Z_1^0) \sin\delta] / C - \tau'. \quad (414)$$

Формулы (413) и (414) представляют уравнение квазарной радиointерферометрии в геоцентрических координатах.

Пользуясь формулами (341) и (413), получаем уравнение квазарной радиointерферометрии для горизонтальных координат в виде

$$v_\tau = -\Delta\tau - (b_{31}^1 \delta X_1' + b_{32}^1 \delta Y_1' + b_{33}^1 \delta H_1) / c + (b_{31}^2 \delta X_2' + b_{32}^2 \delta Y_2' + b_{33}^2 \delta H_2) / c + l. \quad (415)$$

Коэффициенты b_{31}^1 , b_{32}^1 , b_{33}^1 вычисляются по формуле (342).

Решив системы уравнений (413) и (415), можно определить ряд важных параметров Земли.

С помощью формулы (412) решают и обратную задачу о геоцентрических положениях далеких квазаров. Ожидается, что при длинах баз РИ в несколько тысяч километров и использовании стандарта частоты стабильности порядка 10^{-13} , можно составить каталог прямых восхождений и склонений квазаров, внутреннее согласие которых будет лежать в пределах тысячных долей угловых секунд. Такой каталог, к ко-

торому можно будет привязать все звездные каталоги, составит фундаментальную инерциальную систему координат и послужит основой для построения высокоточных геодезических сетей.

По вариациям топоцентрических координат баз РИ можно будет с точностью 0,1 м следить за движением полюсов Земли и определять взаимные перемещения крупных блоков земной коры. Система РИ, охватывающая земной шар, принесет неоценимую помощь при глобальных динамических исследованиях. По наблюдениям станций РИ, расположенных на различных литосферных плитах, можно установить их взаимное перемещение, а по наблюдениям нескольких РИ, размещенных на одной литосферной плите, — определить ее деформацию и вращение.

С точностью 0,1 м будут определены длины базисов, соединяющих пункты РИ, а часы на этих пунктах могут быть синхронизированы с точностью 1 нс.

Для обеспечения понимания сущности длиннобазисной радиоинтерферометрии мы пользовались упрощенной моделью явления. В действительности принимаемый в момент t обсерваторией Q_1 фронт волны радиоизлучения от квазара достигнет обсерватории Q_2 в момент t_1 , когда база Q_1 и Q_2 займет другое положение $Q'_1Q'_2$ в пространстве из-за суточного вращения и орбитального движения Земли. Координатная система XYZ за сеансы наблюдения тоже изменит свое положение из-за прецессии и нутации в пространстве и колебания оси вращения Земли в ее теле. Таким образом, возникает задача редукции измерений с учетом указанных выше геодинамических факторов. Так например, поправка за суточное вращение может составить около 30 нс, а за орбитальное движение — около 2000 нс.

Если радиоисточник поместить на спутник, то во-первых уменьшится длина базы Q_1Q_2 ; во-вторых, из-за близости к Земле радиомаяка σ направления $Q_1\sigma$ и $Q_2\sigma$ будут непараллельны между собой; в-третьих, спутниковый радиомаяк, обращающийся вокруг Земли, обладает переменным собственным движением. Поэтому в отличие от квазарной радиоинтерферометрии в спутниковой радиоинтерферометрии требуется выполнить редукционные вычисления и необходимо знать теорию движения ИСЗ.

Однако, если на короткой дуге накоплен большой объем измерительной информации по спутниковому радиомаяку, то можно достаточно полно исключить влияние ошибок определения элементов орбиты ИСЗ на оценку параметров базы наблюдения Q_1Q_2 .

Имея несколько баз радиоинтерферометрии, пространственные положения которых известны с высокой точностью, можно эталонировать орбиту ИСЗ, несущего радиомаяк. В то же время радиомаяк с известными элементами орбиты можно использовать как транслятор для определения пространственных положений и длин баз радиоинтерферометрии. Таким образом, строят сеть хорд, пространственные положения и длины которых будут определены в единой системе отсчета координат и времени.

Результаты квазарной радиоинтерферометрии с базой Q_1 (Земля)

и Q_2 (спутник Земли) дадут условные уравнения, дополняющие уравнения движения ИСЗ в поле тяготения Земли.

Особый интерес представляет случай, когда одна обсерватория является наземной, а другая — лунной. При этом возможно уточнение параметров системы Земля — Луна в инерциальной системе отсчета, закрепленной каталогами координат квазаров. Этот проект позволяет решить задачу определения положения центра масс системы Земля — Луна относительно центра масс Земли на каждый момент и ориентировку хорды, соединяющей эти два центра, в инерциальной системе отсчета, а также уточнить теорию движения Луны.

4.15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ В АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ГОРИЗОНТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Решая сферический треугольник, изображенный на рис. 24, где P, Z — точки полюса и астрономического зенита места наблюдения; φ, λ — астрономические широта и долгота места наблюдения; α, δ, q, a, z — прямое восхождение, склонение, параллактический угол, топоцентрический азимут и зенитное расстояние светила в момент наблюдения S по гринвичскому времени, получаем

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t; \\ -\sin z \sin a &= \cos \delta \sin t; \\ \sin z \cos a &= \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t; \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos a; \quad \cos \delta \sin t = -\sin z \sin a; \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \cos z - \sin \varphi \sin z \cos a; \\ \cos \delta \cos q &= \sin \varphi \sin z - \cos \varphi \cos z \cos a; \\ -\cos q &= \cos a \cos t + \sin t \sin a \sin \varphi. \end{aligned} \quad (416)$$

Теперь составим исходные уравнения (306) для астрономического топоцентрического азимута и зенитного расстояния светила

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \arctg \frac{\cos \delta \sin t}{\sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta} - a = 0; \\ \Phi_z &= \arccos(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) - z = 0. \end{aligned} \quad (417)$$

Частные производные функций (417) по широте, склонению и часовому углу с учетом формул (416) будут

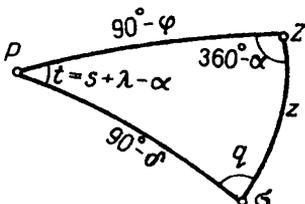


Рис. 24. Полярный сферический треугольник

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \varphi} = \sin a \operatorname{ctg} z; \quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial \delta} = \frac{1}{\sin z} [\sin a (\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos t) + \sin \delta \sin t \cos a]; \quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} = \sin \varphi - \cos \varphi \cos a \operatorname{ctg} z; \quad (418)$$

$$\frac{\partial \Phi_z}{\partial \varphi} = -\cos a; \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial \delta} = \sin z \cos q; \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} = -\cos \varphi \sin a.$$

Напишем дифференциальные формулы, приведя функции (417) к линейному виду.

Составим уравнения для азимута. Азимут местного предмета

$$a_Q = a + Q, \quad (419)$$

где Q — горизонтальный угол местный предмет — светило.

Дифференциальная формула для астрономического азимута местного предмета

$$a_Q^0 + \Delta a_Q = a^0 + (\partial \Phi_a / \partial \varphi)_0 \Delta \varphi + (\partial \Phi_a / \partial t)_0 (v_S + \Delta \lambda - v_a) + (\partial \Phi_a / \partial \delta)_0 v_\delta + Q^0 + v_Q = 0.$$

где a_Q^0 , Δa_Q — предварительное значение астрономического азимута местного предмета и поправка к нему; a^0 — астрономический азимут светила, вычисленный по формуле (417) по предварительным значениям ее аргументов; Q^0 — измеренный горизонтальный угол; $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$, $(v_S - v_a)$, v_δ , v_Q — поправки к широте, долготе, времени, склонению и горизонтальному углу, соответственно.

Напишем последнюю формулу, разделив переменные по группам, в виде условного уравнения поправок с дополнительными параметрами

$$v_Q + (\partial \Phi_a / \partial t)_0 (v_S - v_a) + (\partial \Phi_a / \partial \delta)_0 v_\delta - \Delta a_Q + (\partial \Phi_a / \partial \varphi)_0 \Delta \varphi + (\partial \Phi_a / \partial t)_0 \Delta \lambda + a^0 + Q^0 - a_Q^0 = 0. \quad (420)$$

В матричной форме

$$AV + BX + W = 0. \quad (421)$$

Для i -го светила ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$a_{i1} = 1; \quad a_{i2} = (\partial \Phi_a / \partial t)_{0i}; \quad a_{i3} = (\partial \Phi_a / \partial \delta)_{0i};$$

$$b_{i1} = -1; \quad b_{i2} = (\partial \Phi_a / \partial \varphi)_{0i}; \quad b_{i3} = (\partial \Phi_a / \partial t)_{0i};$$

$$W_i = a_i^0 + Q_i^0 - a_i^0 - \text{свободный член.}$$

Решая систему уравнений (420) при условии $V'pV = \min$, находим искомые величины по формулам

$$V = -qA'P(BX + W); \quad (422)$$

$$P = (AqA')^{-1}; \quad (423)$$

$$X = -(B'PB)^{-1}B'PW. \quad (424)$$

Весовая матрица P — диагональная, с элементами для каждого светила

$$P_i = [q_Q + q_t \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \right)_0^2 + q_\delta \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \delta} \right)_0^2]^{-1} \quad (425)$$

Определив по формулам (422) — (425) поправки X (Δa_Q , $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$), вычисляем астрономические азимут, широту и долготу

$$a_Q = a_Q^0 + \Delta a_Q; \quad \varphi = \varphi^0 + \Delta \varphi; \quad \lambda = \lambda^0 + \Delta \lambda. \quad (426)$$

Затем вычисляем поправки к уравниваемым величинам

$$v_{Q_i} = -q_{Q_i} W_i^0; \quad (v_S - v_a)_i = -q_{i_i} (\partial \Phi_a / \partial t)_{0i} W_i^0; \quad (427)$$

$$v_{\delta_i} = -q_{\delta_i} (\partial \Phi_a / \partial \delta)_{0i} W_i^0,$$

где

$$W_i^0 = P_i [\Delta a_Q + (\partial \Phi_a / \partial \varphi)_{0i} \Delta \varphi + (\partial \Phi_a / \partial t)_{0i} \Delta \lambda + W_i].$$

В вышеприведенных формулах q_Q , q_t и q_δ — обратные веса уравниваемых величин Q , t и δ .

Теперь составим дифференциальные соотношения для зенитного расстояния, пользуясь исходным уравнением (417). Дифференциальная формула с соответствующей группировкой аргументов

$$-v_z + (\partial \Phi_z / \partial t)_0 (v_S - v_a) + (\partial \Phi_z / \partial \delta)_0 v_\delta - \Delta z + (\partial \Phi_z / \partial \varphi)_0 \Delta \varphi + (\partial \Phi_z / \partial t) \Delta \lambda + \bar{z}^0 - z^0 = 0, \quad (428)$$

где z^0 — измеренное зенитное расстояние; v_z , Δz — поправка к z^0 за случайную и систематическую ошибку измерения; \bar{z}^0 — вычисленное значение зенитного расстояния (417) по предварительным значениям его аргументов; $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$, $(v_S - v_a)$, v_δ — поправки к широте, долготе, времени и склонению. Дифференциальная формула (428) представляет собой условное уравнение поправок с дополнительными параметрами. Запишем ее в матричной форме

$$\bar{A} \bar{V} + \bar{B} \bar{X} + \bar{W} = 0. \quad (429)$$

Для i -го светила ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\bar{a}_{i1} = -1; \quad \bar{a}_{i2} = (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i}; \quad \bar{a}_{i3} = (\partial \Phi_z / \partial \delta)_{0i};$$

$$\bar{b}_{i1} = -1; \quad \bar{b}_{i2} = (\partial \Phi_z / \partial \varphi)_{0i}; \quad \bar{b}_{i3} = (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i},$$

где $\bar{W}_i = z_i^0 - z_i^0$ — свободный член.

Решая систему уравнений (429) при условии $\bar{V}' \bar{P} \bar{V} = \min$, находим искомые величины по формулам (422) — (424). Весовая матрица \bar{P} — диагональная, с элементами для каждого светила

$$\bar{P}_i = [q_z + q_t (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i}^2 + q_\delta (\partial \Phi_z / \partial \delta)_{0i}^2]^{-1}. \quad (430)$$

Определив по формулам (422) — (424) и (430) поправки \bar{X} (Δz , $\Delta \varphi$, $\Delta \lambda$), вычисляем астрономические широту и долготу

$$\varphi = z^0 + \Delta \varphi; \quad \lambda = \lambda^0 + \Delta \lambda. \quad (431)$$

Затем вычисляем поправки к уравниваемым величинам

$$\begin{aligned} v_{z_i} &= q_{z_i} \bar{W}_i^y; \quad (v_S - v_a)_i = -q_i (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i} W_i^y; \\ v_{\delta_i} &= -q_{\delta_i} (\partial \Phi_z / \partial \delta)_{0i} \bar{W}_i^y. \end{aligned} \quad (432)$$

где

$$\bar{W}_i^y = \bar{P}_i [-\Delta z + (\partial \Phi_z / \partial \Phi)_{0i} \Delta \varphi + (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i} \Delta \lambda + \bar{W}_i];$$

q_z, q_i, q_δ — обратные веса уравниваемых величин z, t и δ .

Астрономическое зенитное расстояние будет

$$z_i = z_i^0 + \Delta z + v_{z_i}. \quad (433)$$

Если известны геодезические координаты места наблюдения, то, приняв $\varphi^0 = B, \lambda^0 = L$ из решения уравнений (421) и (429), получим астрономо-геодезические уклонения отвеса

$$\xi = \Delta \varphi = \varphi - B; \quad \eta = \Delta \lambda \cos \varphi = (\lambda - L) \cos \varphi. \quad (434)$$

Геодезический азимут местного предмета

$$A_Q = a_Q - \eta \operatorname{tg} \varphi + (\eta \cos a_Q - \xi \sin a_Q) \operatorname{ctg} z_Q. \quad (435)$$

В частном случае, если допустимо нестрогое решение задачи, т. е. предполагается безошибочное знание времени и склонения светила ($q_t = 0, q_\delta = 0$), то дифференциальные формулы (420) и (425) упрощаются и будут иметь следующий вид:

$$v_Q = \Delta a_Q - \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \varphi} \right)_0 \Delta \varphi - \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \lambda} \right)_0 \Delta \lambda + a_Q^0 - a^0 - Q^0; \quad (436)$$

$$v_z = -\Delta z + \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial \varphi} \right)_0 \Delta \varphi + \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial \lambda} \right)_0 \Delta \lambda + z^0 - z^0. \quad (437)$$

На практике применяются нестрогие формулы (436) и (437) даже в высокоточных работах, тогда как внедрение в геодезическую астрономию прецизионных приборов и последних достижений радиоэлектроники требуют все более совершенных методов обработки результатов наблюдений. Только применяя строгие теории, можно более надежно оценить эффективность фотоэлектрической техники визирования, новых средств измерения и хранения времени.

Если горизонтальное направление и зенитное расстояние светила измерены на один и тот же момент времени S , то системы уравнений (420) и (429) необходимо решать совместно под условием $V'pV + \bar{V}'p\bar{V} = \min$, так как имеются связующие поправки v_δ и $(v_S - v_a)$. Запишем рядом одноименные i -е строки уравнений (420) и (429) так

$$\begin{aligned} v_Q + (\partial \Phi_a / \partial t)_{0i} (v_S - v_a) + (\partial \Phi_a / \partial \delta)_{0i} v_\delta - \Delta a_Q + (\partial \Phi_a / \partial \varphi)_{0i} \Delta \varphi + \\ + (\partial \Phi_a / \partial \lambda)_{0i} \Delta \lambda + W = 0; \\ -v_z + (\partial \Phi_z / \partial t)_{0i} (v_S - v_a) + (\partial \Phi_z / \partial \delta)_{0i} v_\delta - \Delta z + (\partial \Phi_z / \partial \varphi)_{0i} \Delta \varphi + \\ + (\partial \Phi_z / \partial \lambda)_{0i} \Delta \lambda + \bar{W} = 0. \end{aligned} \quad (438)$$

Для наглядности представим эти формулы в формализованном виде (табл. 10)

| V_0 | | | | X_0 | | | | W_0 | |
|-------|-------|---|--|--------------|------------|---|---|--------|----------------|
| v_Q | v_z | $v_S - v_\alpha$ | v_δ | Δa_Q | Δz | $\Delta \varphi$ | $\Delta \lambda$ | Ψ | $\tilde{\Psi}$ |
| 1 | 0 | $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}$ | $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \delta}$ | -1 | 0 | $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \varphi}$ | $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}$ | 1 | 0 |
| 0 | -1 | $\frac{\partial \Phi_z}{\partial t}$ | $\frac{\partial \Phi_z}{\partial \delta}$ | 0 | -1 | $\frac{\partial \Phi_z}{\partial \varphi}$ | $\frac{\partial \Phi_z}{\partial t}$ | 0 | 1 |

Система уравнений поправок (438) и ее решение в матричных символах имеет вид

$$AV_0 + BX_0 + W_0 = 0; \quad V_0 = -qA'P_0(BX_0 + W_0);$$

$$P_0 = (AqA')^{-1}; \quad X_0 = -(B'P_0B)^{-1}B'P_0W_0. \quad (439)$$

Весовая матрица P_0 — квазидиагональная и состоит из квадратных матриц второго порядка для каждого светила. Заметим, что применение нестрогих формул (436) и (437) искусственно разделяет совместные измерения на две самостоятельные группы, которые могут быть обработаны отдельно при условии $V'\rho V = \min$ и $\tilde{V}'\tilde{\rho}\tilde{V} = \min$, поскольку обратные веса связующих поправок ($v_S - v_\alpha$) и v_δ приняты равными нулю. Конечно, применение нестрогих формул (436) и (437) несколько упрощает вычисления, однако такое упрощение допустимо только для обработки измерений невысокой точности.

4.16. УРАВНЕНИЕ РАДИУСА ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА

4.16.1. Уравнение радиуса трехосного эллипсоида

Рассмотрим трехосный эллипсоид с полуосями $a > a\sqrt{1-\varepsilon^2} > a\sqrt{1-e^2}$ (ε , e — соответственно эксцентриситеты экваториального и меридионального эллипсов). Уравнение такого эллипсоида

$$(x^2 + y^2)/(1 - \varepsilon^2) + z^2/(1 - e^2) = a^2. \quad (439)$$

Из этого уравнения получим планетоцентрический радиус

$$r = a^2(1 - e^2)(1 - \varepsilon^2) + e^2(x^2 + y^2) + \varepsilon^2(x^2 + z^2) - e^2\varepsilon^2x^2. \quad (440)$$

Если обозначить через λ_0 долготу меридиана большой полуоси a трехосного эллипсоида, то

$$x = r \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0); \quad y = r \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0); \quad z = r \sin \varphi. \quad (441)$$

Подставив значения декартовых координат (441) в выражение (440) и выполнив несложные преобразования, получим формулы

$$r = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 / \sqrt{1 + v^2 \sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \cos^2(\lambda - \lambda_0)}}, \quad (442)$$

$$v^2 = (e^2 - \epsilon^2)/(1 - e^2), \quad (443)$$

представляющие планетоцентрический радиус трехосного эллипсоида относительно его параметров a , e , ϵ , λ_0 и сферические координаты φ и λ .

Правую часть формулы (442) разложим в ряд по степеням малого параметра $v^2 \sin^2 \varphi - e^2 \cos^2 \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)$ и, пользуясь соотношениями

$$2\cos^2 \lambda = \cos 2\lambda + 1; \\ 8\cos^4 \lambda = \cos 4\lambda + 4\cos 2\lambda + 3; \quad (444)$$

$$32\cos^6 \lambda = \cos 6\lambda + 6\cos 4\lambda + 15\cos 2\lambda + 10,$$

запишем следующее выражение

$$r = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}v^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8}v^4 \sin^4 \varphi - \frac{15}{16}v^6 \sin^6 \varphi + \frac{35}{128}v^8 \sin^8 \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4}e^2 \cos^2 \varphi - \frac{3}{8}v^2 e^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{9}{64}e^4 \cos^4 \varphi + \frac{15}{32}v^4 e^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{45}{128}v^2 e^4 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \frac{25}{256}e^6 \cos^6 \varphi - \frac{35}{64}v^6 e^2 \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{315}{512}v^4 e^4 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right) + \left(\frac{1}{4}e^2 \cos^2 \varphi - \frac{3}{8}v^2 e^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{16}e^4 \cos^4 \varphi + \frac{15}{32}v^4 e^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{15}{32}v^2 e^4 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \frac{75}{112}e^6 \cos^6 \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{35}{64}v^6 e^2 \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{105}{128}v^4 e^4 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right) \cos 2(\lambda - \lambda_0) + \left(\frac{3}{64}e^4 \cos^4 \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{15}{128}v^2 e^4 \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \frac{15}{256}e^6 \cos^6 \varphi + \frac{105}{512}v^4 e^4 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right) \times \right. \\ \left. \times \cos 4(\lambda - \lambda_0) + \frac{5}{512}e^6 \cos^6 \varphi \cos 6(\lambda - \lambda_0) \right].$$

Тригонометрические функции можно заменить сферическими функциями

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(\mu); \quad \sin^4 \varphi = \frac{1}{5} + \frac{4}{7}P_2(\mu) + \frac{8}{35}P_4(\mu);$$

$$\sin^6 \varphi = \frac{1}{7} + \frac{10}{21}P_2(\mu) + \frac{24}{77}P_4(\mu) + \frac{16}{231}P_6(\mu);$$

$$\sin^8 \varphi = \frac{1}{9} + \frac{40}{99}P_2(\mu) + \frac{48}{143}P_4(\mu) + \frac{64}{495}P_6(\mu) + \frac{128}{6435}P_8(\mu);$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P_2(\mu); \quad \cos^4 \varphi = \frac{8}{15} - \frac{16}{21}P_2(\mu) + \frac{8}{35}P_4(\mu);$$

$$\cos^6 \varphi = \frac{16}{35} - \frac{16}{21}P_2(\mu) + \frac{144}{385}P_4(\mu) - \frac{16}{231}P_6(\mu);$$

$$\cos^8 \varphi = \frac{128}{315} - \frac{512}{693}P_2(\mu) + \frac{2304}{5005}P_4(\mu) - \frac{512}{3465}P_6(\mu) + \frac{128}{6435}P_8(\mu);$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \varphi &= 1 - \frac{1}{3} P_{2,2}(\mu); \quad \sin^4 \varphi = 1 - \frac{8}{21} P_{2,2}(\mu) - \frac{2}{105} P_{4,2}(\mu); \\
\sin^6 \varphi &= 1 - \frac{25}{63} P_{2,2}(\mu) - \frac{34}{1155} P_{4,2}(\mu) - \frac{8}{3465} P_{6,2}(\mu); \\
\sin^8 \varphi &= 1 - \frac{40}{99} P_{2,2}(\mu) - \frac{76}{2145} P_{4,2}(\mu) - \frac{16}{3465} P_{6,2}(\mu) - \frac{16}{45045} P_{8,2}(\mu); \\
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{3} P_{2,2}(\mu); \quad \cos^4 \varphi = \frac{2}{7} P_{2,2}(\mu) - \frac{2}{105} P_{4,2}(\mu); \\
\cos^6 \varphi &= \frac{16}{63} P_{2,2}(\mu) - \frac{32}{1155} P_{4,2}(\mu) + \frac{8}{3465} P_{6,2}(\mu); \\
\cos^8 \varphi &= \frac{160}{693} P_{2,2}(\mu) - \frac{32}{1001} P_{4,2}(\mu) + \frac{16}{3465} P_{6,2}(\mu) - \frac{16}{45045} P_{8,2}(\mu); \\
\sin^6 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{2}{63} + \frac{50}{693} P_{2,2}(\mu) - \frac{120}{5005} P_{4,2}(\mu) - \frac{208}{3465} P_{6,2}(\mu) - \frac{128}{6435} P_{8,2}(\mu); \\
\sin^4 \varphi \cos^4 \varphi &= \frac{8}{315} + \frac{16}{693} P_{2,2}(\mu) - \frac{296}{5005} P_{4,2}(\mu) - \frac{32}{3465} P_{6,2}(\mu) + \frac{128}{6435} P_{8,2}(\mu); \\
\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi &= \frac{1}{1155} \left(P_{4,4}(\mu) + \frac{2}{9} P_{6,4}(\mu) \right); \\
\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{1}{21} P_{2,2}(\mu) + \frac{2}{105} P_{4,2}(\mu); \\
\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi &= \frac{2}{63} P_{2,2}(\mu) + \frac{2}{231} P_{4,2}(\mu) - \frac{8}{3465} P_{6,2}(\mu); \\
\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{1}{63} P_{2,2}(\mu) + \frac{4}{385} (P_{4,2}(\mu) - \frac{8}{3465} P_{6,2}(\mu)); \\
\cos^4 \varphi &= \frac{1}{105} P_{4,4}(\mu); \quad \cos^6 \varphi = \frac{2}{231} P_{4,4}(\mu) - \frac{2}{10395} P_{6,4}(\mu); \\
\cos^8 \varphi &= \frac{8}{1001} P_{4,4}(\mu) - \frac{208}{675675} P_{6,4}(\mu) - \frac{8}{675675} P_{8,4}(\mu). \tag{445}
\end{aligned}$$

Тогда планетоцентрический радиус трехосного эллипсоида будет

$$\begin{aligned}
r &= a [c_0 + c_2 P_{2,2}(\mu) + (c_{2,2} \cos 2\lambda + s_{2,2} \sin 2\lambda) P_{2,2}(\mu) + c_4 P_{4,2}(\mu) + (c_{4,2} \cos 2\lambda + \\
&+ s_{4,2} \sin 2\lambda) P_{4,2}(\mu) + (c_{4,4} \cos 4\lambda + s_{4,4} \sin 4\lambda) P_{4,4}(\mu) + c_6 P_{6,2}(\mu) + (c_{6,2} \cos 2\lambda + \\
&+ s_{6,2} \sin 2\lambda) P_{6,2}(\mu) + (c_{6,4} \cos 4\lambda + s_{6,4} \sin 4\lambda) P_{6,4}(\mu) + (c_{6,0} \cos 6\lambda + \\
&+ s_{6,6} \sin 6\lambda) P_{6,6}(\mu) + c_8 P_{8,2}(\mu) + (c_{8,2} \cos 2\lambda + s_{8,2} \sin 2\lambda) P_{8,2}(\mu) + \\
&+ (c_{8,4} \cos 4\lambda + s_{8,4} \sin 4\lambda) P_{8,4}(\mu)]. \tag{446}
\end{aligned}$$

Коэффициенты c_n , c_{nm} , s_{nm} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 - \frac{1}{6} v^2 + \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{40} v^4 - \frac{1}{20} v^2 e^2 + \frac{3}{40} e^4 - \frac{5}{112} v^6 + \\
&+ \frac{3}{112} v^4 e^2 - \frac{1}{112} v^2 e^4 + \frac{5}{112} e^6 + \frac{35}{1152} v^8 - \frac{35}{8064} v^6 e^2 + \frac{1}{64} v^4 e^4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2\bar{2}} &= -\frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{6}\epsilon^2 + \frac{3}{14}v^4 - \frac{1}{28}v^2\epsilon^2 - \frac{3}{28}\epsilon^4 - \frac{25}{168}v^6 + \frac{5}{112}v^4\epsilon^2 - \\
&- \frac{25}{336}\epsilon^6 + \frac{175}{1584}v^8 - \frac{125}{3168}v^6\epsilon^2 + \frac{5}{352}v^4\epsilon^4; \\
b_4 &= \frac{3}{35}v^4 + \frac{3}{35}v^2\epsilon^2 + \frac{9}{280}\epsilon^4 - \frac{15}{154}v^6 - \frac{3}{77}v^4\epsilon^2 + \frac{3}{176}v^2\epsilon^4 + \\
&+ \frac{45}{1232}\epsilon^6 + \frac{105}{1144}v^8 + \frac{15}{1144}v^6\epsilon^2 - \frac{333}{9152}v^4\epsilon^4; \\
b_6 &= -\frac{5}{231}v^6 - \frac{5}{154}v^4\epsilon^2 - \frac{5}{616}v^2\epsilon^4 + \frac{7}{198}v^8 + \frac{13}{396}v^6\epsilon^2 - \\
&- \frac{1}{176}v^4\epsilon^4 + \frac{7}{1287}v^8 + \frac{2}{1287}v^6\epsilon^2 + \frac{7}{572}v^4\epsilon^4; \\
b_8 &= \frac{7}{1287}v^8 + \frac{14}{1287}v^6\epsilon^2 + \frac{7}{572}v^4\epsilon^4; \\
b_{2,2} &= \frac{1}{12}\epsilon^2 - \frac{1}{56}v^2\epsilon^2 + \frac{3}{56}\epsilon^4 + \frac{5}{672}v^4\epsilon^2 - \frac{5}{336}v^2\epsilon^4 + \\
&+ \frac{25}{672}\epsilon^6 - \frac{25}{6336}v^6\epsilon^2 + \frac{5}{704}v^4\epsilon^4; \\
b_{4,2} &= -\frac{1}{140}v^2\epsilon^2 - \frac{1}{280}\epsilon^4 + \frac{3}{616}v^4\epsilon^2 - \frac{5}{1232}v^2\epsilon^4 - \frac{5}{1232}\epsilon^6 - \\
&- \frac{15}{4576}v^6\epsilon^2 + \frac{3}{832}v^4\epsilon^4; \\
b_{6,2} &= -\frac{3}{704}v^4\epsilon^2 - \frac{5}{1408}v^2\epsilon^4 + \frac{5}{704}\epsilon^6 - \frac{1}{792}v^6\epsilon^2; \\
b_{8,2} &= -\frac{7}{36052}v^6\epsilon^2 - \frac{1}{3432}v^4\epsilon^4; \\
b_{4,4} &= \frac{1}{2240}\epsilon^4 - \frac{1}{9856}v^2\epsilon^4 + \frac{5}{9856}\epsilon^6 + \frac{3}{73216}v^4\epsilon^4; \\
b_{6,4} &= \frac{1}{43776}v^2\epsilon^4 - \frac{1}{88704}\epsilon^6 + \frac{13}{823680}v^4\epsilon^4; \\
b_{8,4} &= \frac{1}{411840}v^4\epsilon^4; \quad b_{6,6} = \frac{1}{1064448}v^6.
\end{aligned} \tag{447}$$

$$c_n = \sqrt{1 - \epsilon^2} b_n; \quad c_{nm} = \sqrt{1 - \epsilon^2} b_{nm} \cos m\lambda_0;$$

$$s_{nm} = \sqrt{1 - \epsilon^2} b_{nm} \sin m\lambda_0.$$

Заметим, что в разложении (446) для радиуса трехосного эллипсоида отсутствуют нечетные зональные гармоники и нечетные тесеральные гармоники. При этом для планетарного эллипсоида разложение (446) является знакопеременным и быстроубывающим рядом.

4.16.2. Уравнение радиуса двухосного эллипсоида вращения

Для эллипсоида вращения, положив $\epsilon = 0$, получим из формул (439), (442) и (443) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 / (1 - e^2) &= a^2; \\
 r &= a / \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}; \\
 e'^2 &= e^2 / (1 - e^2).
 \end{aligned}
 \tag{448}$$

В частном случае, имея в виду, что $\varepsilon = 0$ и $v^2 = e'^2$ из общих выражений (446) и (447) получим разложение в ряд для радиуса эллипсоида вращения

$$r = a [c_0 + c_2 P_2(\mu) + c_4 P_4(\mu) + c_6 P_6(\mu) + c_8 P_8(\mu)], \tag{449}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 - e'^2/6 + 3e'^4/40 - 5e'^6/112 + 35e'^8/1152; \\
 c_2 &= -e'^2/3 + 3e'^4/14 - 25e'^6/168 + 175e'^8/1584; \\
 c_4 &= 3e'^4/35 - 15e'^6/154 + 105e'^8/1144; \\
 c_6 &= -5e'^6/231 + 7e'^8/198; \quad c_8 = 7e'^8/1287.
 \end{aligned}$$

Как видно, разложение (449) для радиуса эллипсоида вращения представляют только четные зональные гармоники. Это разложение для планетарного эллипсоида представлено суммой быстроубывающих знаменитых членов. Для Земли ($e'^2 = 0,006738$, $a = 6378$ км) последний член $|c_8 P_8| \leq 7 \cdot 10^{-5}$ м, а предпоследний член $|c_6 P_6| \leq 42 \cdot 10^{-3}$ м. Следовательно, на практике в разложении (449) для радиуса земного эллипсоида можно пренебречь членами порядка e'^8 и меньшей величины. Во многих случаях можно исключить и члены порядка e'^6 .

4.17. ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ УРОВЕННОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

За основные параметры уровенного эллипсоида примем массу M , угловую скорость ω , коэффициент нулевого порядка J_2 второй гармоники потенциала и экваториальную большую полуось a_e . Положим, эти параметры равны соответствующим параметрам планетарного тела, фигура которого аппроксимируется данным уровенным эллипсоидом. Для уровенного эллипсоида члены с нечетными зональными гармониками будут отсутствовать, т. е.

$$W = \frac{fM}{a_e} \left[\frac{a_e}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+1} J_{2n} P_{2n}(\mu) + \frac{1}{2} q \left(\frac{r}{a_e} \right)^2 (1 - \mu^2) \right]. \tag{450}$$

Пользуясь формулами из геометрии планетарного эллипсоида

$$r = a_e / \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}; \quad e'^2 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots \tag{451}$$

и, представляя $(1 + e'^2 \sin^2 \varphi)^m$ рядами по степеням e'^2 , получим

$$\begin{aligned}
 \frac{a_e}{r} &= 1 + \frac{1}{2} e'^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} e'^4 \sin^4 \varphi + \frac{1}{16} e'^6 \sin^6 \varphi - \dots; \\
 \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 &= 1 + \frac{3}{2} e'^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} e'^4 \sin^4 \varphi + \dots;
 \end{aligned}
 \tag{452}$$

$$\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2n+1} = 1 + \frac{2n+1}{2} e'^2 \sin^2 \varphi + \dots, \quad (n \geq 2).$$

Затем подставляя $\left(\frac{a_2}{r}\right)^{2n+1}$ и полиномы Лажандра в формулу (450), группируя слагаемые по степеням синуса широты, получим разложение для потенциала в виде

$$W = \frac{jM}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} W'_n \sin^{2n} \varphi. \quad (453)$$

Если при этом ограничимся зональными гармониками шестого порядка, то коэффициенты W'_n в уравнении (453) с учетом выражений будут

$$W'_0 = 1 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}J_2 - \frac{3}{8}J_4 + \frac{5}{16}J_6; \quad (454)$$

$$W'_1 = \alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha^3 - \frac{1}{2}q - \alpha q - \frac{3}{2}\alpha^2 q - \frac{3}{2}J_2 + \frac{3}{2}\alpha J_2 + \frac{9}{4}\alpha^2 J_2 + \frac{30}{8}J_4 - \frac{15}{8}\alpha J_4 - \frac{210}{32}J_6 + \frac{70}{32}\alpha J_6; \quad (455)$$

$$W'_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^3 - \frac{9}{2}\alpha J_2 - 6\alpha^2 J_2 + \alpha q + \frac{7}{2}\alpha^2 q - \frac{35}{8}J_4 + \frac{150}{8}\alpha J_4 + \frac{630}{32}J_6 - \frac{1470}{32}\alpha J_6; \quad (456)$$

$$W'_3 = \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{9}{4}\alpha^2 J_2 - 2\alpha^2 q - \frac{175}{8}\alpha J_4 - \frac{462}{32}J_6 + \frac{4410}{32}\alpha J_6. \quad (457)$$

Решая уравнение (453) при условии $W = W_0 = \text{const}$ для любой точки на уровне эллипсоида, получим формулы для согласования параметров уровня эллипсоида

$$J_6 = \frac{8}{7}\alpha^3 - \frac{20}{21}\alpha^2 q;$$

$$J_4 = \frac{4}{7}\alpha q - \frac{4}{5}\alpha^2 + \frac{4}{5}\alpha^3 - \frac{50}{49}\alpha^2 q;$$

$$J_2 = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}q + \frac{3}{7}\alpha q - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{25}{147}\alpha^2 q;$$

$$W_0 = \frac{jM}{a_e} \left(1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}q + \frac{2}{15}\alpha^2 + \frac{2}{35}\alpha^3 \right);$$

$$\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}q + \frac{9}{8}J_2^2 - \frac{11}{56}q^2 - \frac{3}{14}J_2 q + \frac{9}{98}J_2^2 q +$$

$$+ \frac{27}{16}J_2^3 + \frac{9}{98}q^3 + \frac{93}{784}J_2 q^2;$$

$$\alpha^2 = \frac{9}{4}J_2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{3}{2}J_2 q + \frac{27}{8}J_2^2 + \frac{27}{56}J_2^2 q - \frac{11}{56}q^3 - \frac{45}{56}J_2 q^2;$$

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \frac{27}{8} J_2^3 + \frac{1}{8} q^3 + \frac{27}{8} J_2^2 q + \frac{9}{8} J_2 q^2; \\
J_6 &= \frac{27}{7} J_2^3 + \frac{12}{7} J_2^2 q - \frac{1}{7} J_2 q^2 - \frac{2}{21} q^3; \\
J_4 &= -\frac{9}{5} J_2^2 + \frac{3}{35} q^2 - \frac{12}{35} J_2 q - \frac{27}{245} q^3 + \frac{162}{245} J_2^2 q - \frac{27}{245} J_2 q^2; \\
W_0 &= \frac{fM}{a_e} \left(1 + \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} J_2 + \frac{27}{40} J_2^2 - \frac{9}{280} q^2 + \frac{9}{70} J_2 q + \right. \\
&\quad \left. + \frac{135}{112} J_2^3 + \frac{141}{490} J_2^2 q + \frac{17}{1470} q^3 - \frac{13}{3930} J_2 q^2 \right). \quad (458)
\end{aligned}$$

Анализируя результаты, замечаем, что для представления потенциала уровенного эллипсоида с учетом членов порядка α^n нужно учитывать в разложении (453) зональную гармонику степени $2n$ включительно. Уравнения (458), учитывающие члены порядка α^3 , удовлетворяют самым высоким требованиям практики. В нашем случае, когда за основные параметры принимаются M , J_2 , a_e , ω , такие параметры как потенциал W_0 , сжатие α , четные зональные гармоники J_{2n} ($n=2, 3, \dots$) являются производными. Изучая формулы, согласующие основные параметры уровенного эллипсоида с производными его параметрами, нетрудно убедиться, что за основные параметры можно, например, принять W_0 , α , a_e , ω и тогда параметры M и J_2 будут вычисляемыми. Приведенный выбор основных параметров уровенного эллипсоида объясняется двумя соображениями практического характера. Во-первых, геоцентрическая гравитационная постоянная надежно определяется по наблюдениям космических аппаратов; второй гармонический коэффициент в явном виде входит в разложение потенциала ускорения силы тяжести. Во-вторых, вывод согласующих формул выполняется без приближений, поскольку малый параметр q представляется через исходные величины.

Как будет видно из дальнейших исследований, значения силы тяжести на экваторе γ_e и на полюсе γ_p также являются производными параметрами.

4.18. НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ЕГО ИЗМЕНЕНИЕ ПО ВЫСОТЕ

Нормальное ускорение силы тяжести, или ускорение силы тяжести γ на уровенном эллипсоиде как градиент потенциала силы тяжести W равно

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \cos \Delta\varphi &= -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{fM}{a_e^2} \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n + \right. \\
&\quad \left. + 1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+2} J_{2n} P_{2n}(\mu) - \frac{r}{a_e} (1 - \mu^2) q \right], \quad (459)
\end{aligned}$$

где $\Delta\varphi$ — разность планетодезической B и планетоцентрической φ широт.

Подставим в это выражение полиномы Лежандра, исключим r и, сгруппировав члены по степеням $\sin \varphi$, получим

$$\gamma_0 \cos \Delta \varphi = \frac{fM}{a_e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \sin^2 n \varphi. \quad (460)$$

Если при этом ограничимся членами порядка α^3 , то с учетом формул (451) и (458), имеем

$$\begin{aligned} \frac{r}{a_e} q &= \left[1 - \left(\alpha + \frac{3}{2} \alpha^2 \right) \mu^2 + \frac{3}{2} \alpha^2 \mu^4 \right] q; \\ \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 &= 1 + (2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3) \mu^2; \\ \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 J_2 &= [1 + (4\alpha + 6\alpha^2) \mu^2 + 4\alpha^2 \mu^4] J_2; \\ \left(\frac{a_e}{r} \right)^6 J_4 &= (1 + 6\alpha \mu^4) J_4; \quad \left(\frac{a_e}{r} \right)^8 J_6 = J_6 \end{aligned}$$

Коэффициенты разложения (460) Γ_n ($n=0, 1, 2, 3$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 - q + \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{8} J_4 + \frac{35}{16} J_6; \\ \Gamma_1 &= 2\alpha + q - \frac{9}{2} J_2 + \alpha q + 3\alpha^2 + 6\alpha J_2 + \frac{75}{4} J_4 + \\ &+ 4\alpha^3 + 9\alpha^2 J_2 - \frac{45}{4} \alpha J_4 + \frac{3}{2} \alpha^2 q - \frac{735}{16} J_6; \\ \Gamma_2 &= -\alpha q - 18\alpha J_2 - \frac{175}{8} J_4 - 3\alpha^2 q - 21\alpha^2 J_2 + \frac{900}{8} \alpha J_4 + \frac{4410}{32} J_6; \\ \Gamma_3 &= \frac{3}{2} \alpha^2 q - 18\alpha^2 J_2 - \frac{525}{4} \alpha J_4 - \frac{1617}{16} J_6. \end{aligned} \quad (461)$$

Подставим значения J_2, J_4, J_6 , преобразуем выражения и получим коэффициенты разложения (460), выраженные через α и q ,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 1 - \frac{3}{2} q + \alpha - \frac{3}{7} \alpha q + \alpha^2 + \alpha^3 - \frac{125}{294} \alpha^2 q; \\ \Gamma_1 &= \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{109}{14} \alpha q - \frac{13}{2} \alpha^2 - \frac{41}{2} \alpha^3 + \frac{3925}{196} \alpha^2 q; \\ \Gamma_2 &= \frac{11}{2} \alpha^2 - \frac{15}{2} \alpha q + 42\alpha^3 - \frac{677}{14} \alpha^2 q; \\ \Gamma_3 &= \frac{115}{4} \alpha^2 q - \frac{45}{2} \alpha^3. \end{aligned} \quad (462)$$

Значения ускорения силы тяжести на экваторе и полюсе:

$$\gamma_e = \frac{fM}{a_e^2} \left(1 - \frac{3}{2} q + \alpha + \alpha^2 - \frac{3}{7} \alpha q + \alpha^3 - \frac{125}{294} \alpha^2 q \right); \quad (463)$$

$$\gamma_p = \frac{fM}{a_e^2} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{7} - \frac{\alpha^2}{147} \right) q \right], \quad (464)$$

поскольку $\cos \Delta \varphi = 1$.

Планетоцентрическая гравитационная постоянная будет

$$fM = a_e^2 \gamma_e \left(1 + \frac{3}{2} q - \alpha + \frac{9}{4} q^2 - \frac{18}{7} \alpha q + \frac{27}{8} q^3 - \frac{153}{28} \alpha q^2 + \frac{157}{147} \alpha^2 q \right). \quad (465)$$

Исключим α в (458) и получим их в другом виде

$$\gamma_e = \frac{fM}{a_e^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 - q + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{9}{56} q^2 + \frac{9}{14} J_2 q + \frac{135}{16} J_2^3 - \frac{1}{588} q^3 + \frac{123}{49} J_2^2 q - \frac{83}{784} J_2 q^2 \right); \quad (466)$$

$$fM = a_e^2 \gamma_e \left(1 - \frac{3}{2} J_2 + q - \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{65}{56} q^2 - \frac{51}{14} J_2 q - \frac{27}{16} J_2^3 + \frac{389}{294} q^3 - \frac{57}{98} J_2^2 q - \frac{4831}{784} J_2 q^2 \right). \quad (467)$$

Для планетарного эллипсоида:

$$\Delta\varphi = m \sin 2\varphi + m^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \dots;$$

$$\sec \Delta\varphi = 1 + (2m^2 + 4m^3) \sin^2 \varphi - (2m^2 + 12m^3) \sin^4 \varphi + 8m^3 \sin^6 \varphi + \dots; \quad (468)$$

$$m^2 = \alpha^2 + \alpha^3 + \dots; \quad m^3 = \alpha^3 + \dots$$

Подставив значения Γ_i ($i=0, 1, 2, 3$) в формулу (460) и учитывая выражения (463) и (468), получим формулу для ускорения силы тяжести на уровне эллипсоида

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta'_2 \sin^2 \varphi + \beta'_4 \sin^4 \varphi + \beta'_6 \sin^6 \varphi + \dots); \quad (469)$$

где

$$\beta'_2 = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{53}{14} \alpha q + \frac{15}{4} q^2 - \frac{7}{2} \alpha^2 - 8\alpha^3 + \frac{45}{8} q^3 + 3\alpha q^2 + \frac{248}{49} \alpha^2 q;$$

$$\beta'_4 = -\frac{15}{2} \alpha q + \frac{7}{2} \alpha^2 + \frac{41}{2} \alpha^3 - \frac{45}{4} \alpha q^2 - \frac{773}{28} \alpha^2 q;$$

$$\beta'_6 = \frac{95}{4} \alpha^2 q - \frac{25}{2} \alpha^3,$$

Правая часть этого выражения представлена через четные степени синуса планетоцентрической широты. Ее также можно представить через четные степени синуса планетодезической широты B , пользуясь разложениями

$$\sin^2 \varphi = (1 - \alpha)^4 (\sin^2 B + \epsilon \sin^4 B + \epsilon^2 \sin^6 B + \dots);$$

$$\sin^4 \varphi = (1 - \alpha)^8 (\sin^4 B + 2\epsilon \sin^6 B + \dots); \quad (470)$$

$$\sin^6 \varphi = \sin^6 B + \dots; \quad \epsilon = 4\alpha - 6\alpha + 4\alpha^3.$$

Исключив $\sin \varphi$ в уравнении (469) и преобразуя его, получим

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta_2 \sin^2 B + \beta_4 \sin^4 B + \beta_6 \sin^6 B + \dots);$$

$$\beta_2 = \frac{5}{2} q - \alpha - \frac{87}{14} \alpha q + \frac{15}{4} q^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{45}{8} q^3 - 12\alpha q^2 + \frac{241}{49} \alpha^2 q;$$

$$\beta_4 = \frac{5}{2}\alpha q - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{209}{28}\alpha^2 q + \frac{15}{4}\alpha q^2;$$

$$\beta_6 = \frac{15}{4}\alpha^2 q - \frac{1}{2}\alpha^3. \quad (471)$$

Правая часть этих уравнений представлена через четные степени синуса планетодезической широты.

Гравиметрическое сжатие составляет

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \dots = \beta'_2 + \beta'_4 + \beta'_6 + \dots,$$

или

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha + \frac{15}{4}q^2 - \frac{26}{7}\alpha q + \frac{45}{8}q^3 - \frac{33}{4}\alpha q^2 + \frac{59}{49}\alpha^2 q. \quad (472)$$

Рассмотрим изменение нормального ускорения силы тяжести

$$\gamma = \left\{ \frac{fM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right) J_{2n} P_{2n}(\mu) \right] - \frac{fM}{a_e^2} q r \cos^2 \varphi \right\} \sec \Delta \varphi \quad (473)$$

по высоте. Принимая высоту точки над уровнем эллипсоидом за малую величину по сравнению с геоцентрическим радиусом r , воспользуемся разложением в ряд по малому аргументу

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{fM}{r^2} \left\{ \sum_{k=1}^k (-\sec \Delta \varphi)^{k+1} \left[(k+1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+k+1)!}{2n!k!} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\mu) \right] \left(\frac{H}{r} \right)^k + \left(\frac{r}{a_e} \right)^3 q (\cos \varphi \sec \Delta \varphi)^2 \frac{H}{r} \right\}, \quad (474)$$

где γ_0 — значение нормального ускорения силы тяжести на уровне эллипсоиде.

Как видно из (474) и данных табл. 11, градиент силы тяжести зависит от высоты. Кроме того с увеличением высоты сходимость разложения (474) замедляется. Поэтому им можно пользоваться только для малых высот или когда не требуется высокая точность в вычислениях. В приближенных расчетах градиент силы тяжести вычисляют по формуле

$$\partial \gamma / \partial H = -(0,308\ 827\ 30 - 0,0001446 H \text{ км}) 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} / \text{м}. \quad (475)$$

Если в вычислениях необходима высокая точность, то следует пользоваться формулой (473). Третий член ряда ($n=3$) по величине не превышает $0,013 \cdot 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, поэтому достаточно ограничиться учетом малого члена с коэффициентом $J_4 \approx 2J_2^2$.

Заметим, что с увеличением высоты точки медленно уменьшается угол между геоцентрическим радиусом и нормалью к эллипсоиду. Так например, на высоте 100 км угол равен $11,4'$, а на высоте 33 тыс. км — $1,9'$.

$$\begin{aligned} fM &= 398\,600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2; \\ J_2 &= 1082,63 \cdot 10^{-6}; \\ q &= 0,003\,461\,396\,277; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_e &= 6\,378\,140 \text{ м}; \\ J_4 &= -2,370\,97 \cdot 10^{-6}; \\ B &= 45^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= 0,006\,694\,384\,872; \\ J_6 &= 0,006\,02 \cdot 10^{-6}; \\ N &= a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(1 - e^2 \frac{N}{N+H} \right) \operatorname{tg} B; \quad r \cos \varphi = (N+H) \cos B.$$

| Обозначения | $H = 0 \text{ м}$ | $H = 2500 \text{ м}$ | $H = 5000 \text{ м}$ |
|--|-------------------|----------------------|----------------------|
| $N+H, \text{ м}$ | 6 388 641,303 | 6 391 341,303 | 6 393 841,303 |
| φ | 44°48'27,2759" | 44°48'27,5478" | 44°48'27,8194" |
| $r, \text{ м}$ | 6 367 492,531 | 6 369 992,517 | 6 372 492,503 |
| $fM/r, \text{ м}^2/\text{с}^2$ | 62 599 288,1894 | 62 574 720,2899 | 62 550 171,6659 |
| $\frac{1}{2} q \frac{fM}{a^3} r^2 \cos^2 \varphi$ | 54 261,4291 | 54 303,9092 | 54 346,3939 |
| U | 62 636 831,5383 | 62 612 325,7098 | 62 587 839,1281 |
| $\gamma = \frac{\partial U}{\partial H}, 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ | 980 618,9109 | 979 847,9673 | 979 077,9985 |
| $\frac{\partial^2 U}{\partial H^2} = -\frac{\partial \gamma}{\partial H}, 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}/\text{м}$ | 0,308 827 30 | 0,308 464 85 | 0,308 106 43 |

4.19. КРИВИЗНА СИЛОВОЙ ЛИНИИ. КООРДИНАТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ

Определим кривизну силовой линии. Вектором кривизны линии называется предел отношения приращения единичного вектора касательной $\underline{\tau}$ к приращению dh длины линии, когда dh стремится к нулю, т. е.

$$\underline{\epsilon}/\rho = d\underline{\tau}/dh, \quad (476)$$

где $\underline{\epsilon}$ — единичный вектор главной нормали линии; ρ — радиус кривизны линии.

Единичный вектор касательной к силовой линии $\underline{\tau} = \underline{g}/g$, откуда

$$\frac{d\underline{\tau}}{dh} = \frac{1}{g} \frac{d\underline{g}}{dh} - \frac{\underline{g}}{g^2} \frac{dg}{dh}.$$

Поскольку

$$g = -dW/dh,$$

$$\underline{g} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \underline{k} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\tau}}{dh} &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial h} \underline{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial h} \underline{j} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial h} \underline{k} \right) - \\ &- \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \underline{k} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial h^2}. \end{aligned} \quad (477)$$

Совместим ось z с направлением, противоположным направлению силы тяжести, и вычислим производные

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -g; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial h} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial h} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial h} = \frac{\partial^2 W}{\partial h^2}.$$
(478)

Подставляя найденные значения производных в уравнение (477), с учетом (476), получим

$$\frac{\mathbf{e}}{\rho} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \mathbf{j} \right).$$
(478)

Отсюда заключаем, что отвесная линия имеет двойную кривизну.

Если ось x направим на север, а ось y — на восток, то на поверхности эллипсоида

$$dx = M dB; \quad dy = N \cos B dL;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial \gamma_0}{\partial x} = -\frac{\partial \gamma_0}{M \partial B}; \quad \frac{\partial U}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial \gamma_0}{\partial y} = -\frac{\partial \gamma_0}{N \cos B dL}.$$

С учетом выражения (471)

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial B} = \gamma_e \beta_2 \sin 2B; \quad \frac{\partial \gamma_0}{\partial L} = 0.$$

Подставив значения производных в уравнение (478), получим

$$\frac{\mathbf{e}}{\rho} = \frac{\gamma_e}{\gamma_0 M} \beta_2 \sin 2B \mathbf{i},$$
(479)

или

$$1/\rho = \beta_2 \sin 2B/M.$$
(480)

Отсюда следует, что силовая линия нормального поля — кривая, лежащая в плоскости меридиана, кривизна которой изменяется с изменением широты. Приняв $M = 6371$ км, $\beta_2 = 0,005279$, $B = 45^\circ$, находим, что радиус кривизны силовой линии нормального поля $\rho = 1206857$ км. Отрезок силовой линии практически не отличается от отрезка нормали к уровенному эллипсоиду вращения.

Семейство уровенных поверхностей и силовых линий нормального потенциала можно использовать в качестве координатных поверхностей и линий, определяющих положение точки планетарной поверхности или пространства.

Уравнение семейства уровенных поверхностей нормального потенциала имеет вид $U = \text{const}$. Поскольку на поверхности уровенного эллипсоида нормальный потенциал равен U_0 , для определения уровенной поверхности точки Q , находящейся на высоте H от поверхности эллипсоида (рис. 25), достаточно определить разность нормальных потенциалов $U_Q - U_0$. Долготой точки L определяется меридианное сече-

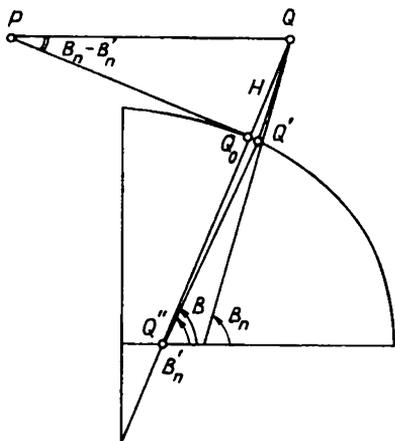


Рис. 25. Связь геодезической и нормальной широт

ние поверхности $U = U_Q = \text{const}$, а точка Q' определяется как точка пересечения меридиана и силовой линии. Угол, образованный касательной к силовой с экватором, назовем нормальной широтой и обозначим через B_n . Отрезок линии $Q'Q = (U_0 - U_Q)/\gamma_m$, где γ_m — значение нормального ускорения силы тяжести в точке, находящейся в середине отрезка линии $Q'Q = H_n$. При этом

$$\gamma_m = \gamma_e(1 + \beta_2 \sin^2 B + \beta_4 \sin^4 B) + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{H_n}{2}.$$

Докажем, что отрезок силовой линии H_n можно заменить геодезической высотой $H = Q_n Q$. Из рис. 25 следует, что умножив разность нормальных широт $B_n - B'_n$ точек Q и Q' на радиус кривизны силовой линии ρ , получим нормальную высоту

$$H_n = \rho(B_n - B'_n). \quad (481)$$

Из треугольника PQQ_0 находим

$$H = \rho \sin(B_n - B'_n) = \rho(B_n - B'_n) - \rho \frac{(B_n - B'_n)^3}{6},$$

откуда

$$H_n - H = \rho(B_n - B'_n)^3/6.$$

Подставляя значения ρ (480) и $B_n - B'_n$ (481), получим

$$H_n - H = \beta_2^2 H_n^3 \sin^2 2B / 6R^2. \quad (482)$$

Положим для Земли $H_n = 10$ км, $B = 45^\circ$. Известно, что $R/\beta \sin 2B = 1,2 \cdot 10^6$ км, следовательно, $H_n - H = 10^3/6 \cdot 1,44 \cdot 10^{12} \approx 0,12 \cdot 10^{-9}$ м. Поэтому не будем различать геодезическую высоту и соответствующий отрезок силовой линии H_n . Таким образом, геодезическая высота

$$H = (U_0 - U_Q)/\gamma_m \quad (483)$$

может служить координатой точки Q , заменяя разность потенциалов $U_0 - U_Q$.

Выведем формулу для перехода от нормальной широты B_n к геодезической широте B точки Q .

Представив искомую разность в виде

$$B - B_n = (B - B'_n) - (B_n - B'_n),$$

подставим значение

$$B_n - B'_n = \beta_2 H \sin 2B / R, \quad (484)$$

тогда

$$B - B_n = (B - B'_n) - \beta_2 H \sin 2B / R.$$

Теперь остается определить малый угол $B - B'_n$. Из треугольника $Q''Q_0Q'$ отрезок $Q_0Q' = R(B - B'_n)$. Кроме того,

$$Q_0Q' = \rho - \rho \cos(B_n - B'_n) = \rho(B_n - B'_n)^2 / 2.$$

Следовательно искомая разность углов будет

$$B - B'_n = \frac{\rho}{2R}(B_n - B'_n)^2 = \frac{1}{2\beta_2 \sin 2B}(B_n - B'_n)^2,$$

или с учетом (484)

$$B - B'_n = \frac{\beta_2 H^2}{2R^2} \sin 2B.$$

Окончательно

$$B - B_n = -\frac{\beta_2 H}{R} \sin 2B \left(1 - \frac{H}{2R} \right). \quad (485)$$

Оценим правую часть формулы (485). Положим $H = 10$ км, $B = 45^\circ$, $R = 6371$ км, $\beta_2 = 0,005\ 279$. Первый член $-(\beta_2 H / R) \rho \sin 2B = -1,7091''$ ($\rho = 206\ 265$), второй член $\beta_2 H^2 \sin 2B / 2R^2 = 0,0013''$, следовательно для Земли можно пользоваться формулой

$$B = B_n - (0,170\ 91 - 0,000\ 013H) H \sin 2B, \quad (486)$$

где H — высота точки в километрах.

Во многих случаях практики второй поправкой можно пренебречь.

4.2.; ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИпсоИДА

Сложив правые части уравнений (97), (155) и учитывая свойства трехосного эллипсоида, потенциал силы тяжести на его поверхности запишем

$$\begin{aligned}
W = \frac{fM}{a} \left\{ \frac{a}{r_e} - \left(\frac{a}{r_e} \right)^3 [J_2 P_2(\mu) + (J_{2,2} \cos 2\lambda + K_{2,2} \sin 2\lambda) P_{2,2}(\mu)] - \right. \\
- \left(\frac{a}{r_e} \right)^5 [J_4 P_4(\mu) + (J_{4,2} \cos 2\lambda + K_{4,2} \sin 2\lambda) P_{4,2}(\mu) + (J_{4,4} \cos 4\lambda + \\
+ K_{4,4} \sin 4\lambda) P_{4,4}(\mu)] - \left(\frac{a}{r_e} \right)^7 [J_6 P_6(\mu) + (J_{6,2} \cos 2\lambda + K_{6,2} \sin 2\lambda) P_{6,2}(\mu) + \\
+ (J_{6,4} \cos 4\lambda + K_{6,4} \sin 4\lambda) P_{6,4}(\mu)] + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_e}{a} \right) (1 - \mu^2) \left. \right\}. \quad (487)
\end{aligned}$$

Представив выражение (441) в виде

$$\frac{a}{r} = v_0^{-1} \sqrt{1+x}; \quad v_0 = \sqrt{1-\varepsilon^2}; \quad x = u^2 \sin^2 \varphi - v^2; \quad (488)$$

$$u^2 = \frac{e^2 - \varepsilon^2}{1 - e^2} + \varepsilon^2 \cos^2(\lambda - \lambda_0); \quad v^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\lambda - \lambda_0),$$

запишем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{r} &= v_0^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 \right); \\
\left(\frac{a}{r} \right)^3 &= v_0^{-3} \left(1 + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 \right); \\
\left(\frac{a}{r} \right)^5 &= v_0^{-5} \left(1 + \frac{5}{2} x + \frac{15}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 \right); \\
\left(\frac{a}{r} \right)^7 &= v_0^{-7} \left(1 + \frac{7}{2} x + \frac{35}{8} x^2 + \frac{35}{16} x^3 \right); \\
\left(\frac{r}{a} \right)^2 &= v_0^2 (1 - x + x^2 - x^3).
\end{aligned} \quad (489)$$

Подставим выражения (489) в правую часть формулы (487) и исключим сферические функции $P_{nm}(\mu)$, подставляя их значения (466). Выполняя преобразования и группируя члены по степеням синуса широты, получим разложение потенциала

$$W = \frac{fM}{a_e} \sum_{n=0}^4 W'_n \sin^{2n} \varphi. \quad (490)$$

Коэффициенты разложения W'_n ($n = 0, 1, \dots, 4$) имеют значения:

$$\begin{aligned}
W'_0 &= v_0^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{8} v^4 \right) + v_0^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) \times \\
&\times \left(\frac{1}{2} J_2 - 3L_{2,2} \right) - v_0^5 \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4 \right) \left(\frac{3}{8} J_4 - \frac{15}{2} L_{4,2} + 105L_{4,4} \right) + \\
&+ v_0^{-7} \left(1 - \frac{7}{2} v^2 + \frac{35}{8} v^4 \right) \left(\frac{5}{16} J_6 - \frac{105}{8} L_{6,2} + \frac{945}{2} L_{6,4} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} v_0^2 q (1 + v^2 + v^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'_1 = & \frac{1}{2} v_0^{-1} u^2 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) + \frac{3}{2} v_0^{-3} u^2 \left(1 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{8} v^4 \right) \times \\
& \times \left(\frac{1}{2} J_2 - 3L_{2,2} \right) - \frac{3}{2} v_0^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) (J_2 - 2L_{2,2}) - \frac{15}{16} v_0^{-5} u^2 \times \\
& \times \left(1 - \frac{3}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) (J_4 - 20L_{4,2} + 280L_{4,4}) + \frac{15}{4} v_0^{-5} \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \right. \\
& \left. + \frac{15}{8} v^4 \right) (J_4 - 16L_{4,2} + 56L_{4,4}) + \frac{35}{32} v_0^{-7} u^2 \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4 \right) \times \\
& \times (J_6 - 42L_{6,2} + 1512L_{6,4}) - \frac{105}{16} v_0^{-7} \left(1 - \frac{7}{2} v^2 + \frac{35}{8} v^4 \right) (J_6 - 38L_{6,2} + \\
& + 936L_{6,4}) - \frac{1}{2} q v_0^2 (1 + u^2 + 2u^2 v^2 + 3u^2 v^4 + v^2 + v^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'_2 = & -\frac{1}{8} v_0^{-1} u^4 \left(1 + \frac{3}{2} v^2 \right) + \frac{3}{8} v_0^{-3} u^4 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) \left(\frac{1}{2} J_2 - 3L_{2,2} \right) - \\
& - \frac{9}{4} v_0^{-3} u^2 \left(1 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{8} v^4 \right) (J_2 - 2L_{2,2}) - \frac{45}{64} v_0^{-5} u^4 \left(1 - \frac{1}{2} v^2 \right) \times \\
& \times (J_4 - 20L_{4,2} + 280L_{4,4}) + \frac{35}{8} v_0^{-5} u^2 \left(1 - \frac{3}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) \times \\
& \times (J_4 - 16L_{4,2} + 56L_{4,4}) - \frac{75}{8} v_0^{-5} \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4 \right) (J_4 - 12L_{4,2} + 24L_{4,4}) + \\
& + \frac{175}{128} v_0^{-7} u^4 \left(1 - \frac{3}{2} v^2 \right) (J_6 - 42L_{6,2} + 1512L_{6,4}) - \frac{735}{32} v_0^{-7} u^2 \left(1 - \right. \\
& \left. - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4 \right) (J_6 - 38L_{6,2} + 936L_{6,4}) + \frac{315}{16} v_0^{-7} \left(1 - \frac{7}{2} v^2 + \frac{35}{8} v^4 \right) \times \\
& \times (J_6 - 34L_{6,2} + 552L_{6,4}) + \frac{1}{2} q v_0^2 (u^2 + u^4 + 2u^2 v^2 + 3u^4 v^2 + 3u^2 v^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'_3 = & \frac{1}{16} v_0^{-1} u^6 - \frac{1}{16} v_0^{-3} u^6 \left(\frac{1}{2} J_2 - 3L_{2,2} \right) - \frac{9}{16} v_0^{-3} u^4 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) \times \\
& \times (J_2 - 2L_{2,2}) - \frac{15}{128} v_0^{-5} u^6 (J_4 - 20L_{4,2} + 280L_{4,4}) + \frac{225}{32} v_0^{-5} u^4 \times \\
& \times \left(1 - \frac{1}{2} v^2 \right) (J_4 - 16L_{4,2} + 56L_{4,4}) - \frac{175}{16} v_0^{-5} u^2 \left(1 - \frac{3}{2} v^2 + \frac{3}{8} v^4 \right) \times \\
& \times (J_4 - 12L_{4,2} + 24L_{4,4}) + \frac{175}{256} v_0^{-7} u^6 (J_6 - 42L_{6,2} + 1512L_{6,4}) - \\
& - \frac{3675}{128} v_0^{-7} u^4 \left(1 - \frac{3}{2} v^2 \right) (J_6 - 38L_{6,2} + 936L_{6,4}) + \frac{2205}{32} v_0^{-7} u^2 \times \\
& \times \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4 \right) (J_6 - 34L_{6,2} + 552L_{6,4}) - \frac{231}{16} v_0^{-7} \left(1 - \frac{7}{2} v^2 + \right. \\
& \left. + \frac{35}{8} v^4 \right) (J_6 - 30L_{6,2} + 360L_{6,4}) - \frac{1}{2} q v_0^2 (u^4 + u^6 + 3u^4 v^2);
\end{aligned}$$

$$W'_4 = \frac{3}{32} v_0^{-3} u^6 (J_2 - 2L_{2,2}) + \frac{75}{64} v_0^{-5} u^6 (J_4 - 16L_{4,2} + 56L_{4,4}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{525}{64} v_0^{-5} u^4 \left(1 - \frac{1}{2} v^2\right) (J_4 - 12L_{4,2} + 24L_{4,4}) - \frac{3675}{256} v_0^{-7} u^6 \left(1 - \frac{1}{2} v^2\right) \times \\
& \times (J_6 - 38L_{6,2} + 936L_{6,4}) + \frac{11025}{128} v_0^{-7} u^4 \left(1 - \frac{3}{2} v^2\right) (J_6 - 34L_{6,2} + 552L_{6,4}) - \\
& - \frac{1617}{32} v_0^{-7} u^2 \left(1 - \frac{5}{2} v^2 + \frac{15}{8} v^4\right) (J_6 - 30L_{6,2} + 360L_{6,4}) + \frac{1}{2} q v_0^3 u^6; \\
L_{nm} &= J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda. \tag{491}
\end{aligned}$$

Коэффициент нулевого порядка W'_0 можно вычислить, положив $\varphi = 0$ в исходном уравнении (487) и разложив его правую часть по малому параметру $v^2 = \varepsilon^2 \cos^2(\lambda - \lambda_0)$. Потенциал уровня трехосного эллипсоида

$$W = W_0 = fM W'_0 / a^2 = \text{const},$$

следовательно, его параметры должны удовлетворять условию

$$W'_i = 0, \quad i \neq 0. \tag{492}$$

Для двухосного эллипсоида параметры: $u = e'$, $\varepsilon = 0$, $v_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$, $J_{nm} = K_{nm} = 0$, а коэффициенты разложения потенциала имеют значения:

$$\begin{aligned}
W'_0 &= 1 + \frac{1}{2} J_2 - \frac{3}{8} J_4 + \frac{5}{16} J_6 + \frac{1}{2} q; \\
W'_1 &= \frac{1}{2} e'^2 + \frac{3}{4} e'^2 J_2 - \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{16} e'^2 J_4 + \frac{15}{4} J_4 + \frac{35}{32} e'^2 J_6 - \\
& - \frac{105}{16} J_6 - \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} q e'^2; \\
W'_2 &= -\frac{1}{8} e'^4 + \frac{3}{16} e'^4 J_2 - \frac{9}{4} e'^2 J_2 - \frac{45}{64} J_4 e'^4 + \frac{75}{8} J_4 e'^2 - \frac{35}{8} J_4 + \\
& + \frac{175}{128} e'^4 J_6 - \frac{735}{32} e'^2 J_6 + \frac{315}{16} J_6 + \frac{1}{2} e'^2 q + \frac{1}{2} e'^4 q; \\
W'_3 &= \frac{1}{16} e'^6 - \frac{1}{32} e'^2 J_2 - \frac{9}{16} e'^4 J_2 - \frac{15}{128} e'^6 J_4 + \frac{225}{32} e'^4 J_4 - \frac{175}{26} e'^2 J_4 + \\
& + \frac{175}{256} e'^6 J_6 - \frac{3675}{128} e'^4 J_6 + \frac{2205}{32} e'^2 J_6 - \frac{231}{16} J_6 - \frac{1}{2} e'^4 q - \frac{1}{2} e'^6 q; \\
W'_4 &= \frac{3}{32} e'^6 J_2 + \frac{75}{64} e'^6 J_4 - \frac{525}{64} e'^4 J_4 - \frac{3675}{256} e'^6 J_6 + \frac{11025}{128} e'^4 J_6 - \\
& - \frac{1617}{32} e'^2 J_6 + \frac{1}{2} q e'^6. \tag{492}
\end{aligned}$$

Заменив в формулах (492) второй эксцентриситет через $e'^2 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3$ и удержав члены порядка α^3 , можно получить формулы (454) — (457).

4.21. УРАВНЕНИЕ ПЛАНЕТАРНОГО ГЕОИДА И ВЫСОТА ГЕОИДА НАД УРОВЕННЫМ ЭЛЛИПСОИДОМ

Положим известны стоксовые постоянные J_{nm} , K_{nm} , параметры fM , a_e , ω , геоцентрические координаты r_i , φ_i , λ_i пространственных точек Q_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и их высота h_i над уровнем моря. Требуется определить потенциал W_0 на поверхности геоида, уравнение геоида и его высоту над уровнем эллипсоида. Потенциал ускорения силы тяжести на поверхности геоида определяется из выражения

$$W_0 = \frac{fM}{r_g} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right], \quad q = \frac{a_e^3 \omega^2}{fM}. \quad (493)$$

Геоцентрический радиус проекции точки Q на геоид по радиусу-вектору будет

$$r_g = r - h \sec(r, h). \quad (494)$$

Для каждой точки, вычислив геоцентрический радиус r_{gi} и значение потенциала W_{0i} ($i = 1, 2, \dots$), определим средневесовое значение W_0 . Затем вычислим масштабный множитель

$$R_g = fM / W_0 \quad (495)$$

и радиус-вектор произвольной точки геоида по формуле

$$r_g = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi \right]. \quad (496)$$

Таким образом, геоид представляется семейством точек с геоцентрическими координатами r_g , φ , λ . При этом геоцентрический радиус каждой точки геоида вычисляется по формуле (496) по исходным параметрам fM , a_e , ω , J_{nm} , K_{nm} .

В правой части этой формулы стоит определяемая величина r_g . Исключим r_g , подставляя $r_g = r_0 + \zeta$, где r_0 — геоцентрический радиус точки на поверхности уровня эллипсоида; ζ — высота геоида, по величине не превышающая 100—120 м. Оценим второй член в разложении формулы (496)

$$\delta r = \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_g}{a_e} \right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_g} \right)^2 J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \right],$$

подставив $r_g = r_0 + \zeta$. Остальные члены настолько малы по отношению ко второму члену, что для них можно принять $r_g = r_0$.

Заметим, что $R_g \approx a_e \approx r_0$

$$\left(\frac{a_e}{r_g}\right)^2 = \left[\frac{a_e}{r_0 + \zeta}\right]^2 \approx \left(\frac{a_e}{r_0}\right)^2 - 2\frac{\zeta}{r_0};$$

$$\left(\frac{r_g}{a_e}\right)^3 = \left(\frac{r_0 + \zeta}{a_e}\right)^3 = \left(\frac{r_0}{a_e}\right)^3 + 3\frac{\zeta}{r_0}.$$

Тогда второй член примет вид

$$\delta r = \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_0}{a_e}\right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_0}\right)^2 J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \right] + \frac{3}{2} \zeta q \cos^2 \varphi +$$

$$+ \zeta J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) = \frac{1}{2} R_g \left[q \left(\frac{r_0}{a_e}\right)^3 \cos^2 \varphi - \left(\frac{a_e}{r_0}\right)^2 J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \right] +$$

$$+ (r_g - r_0) \left[\frac{3}{2} q \cos^2 \varphi + J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \right].$$

Обозначим

$$r_g^0 = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_0}\right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_0}{a_e}\right)^3 \cos^2 \varphi \right]; \quad (497)$$

$$v = \frac{3}{2} q \cos^2 \varphi + J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \quad (498)$$

и подставим значение δr в формулу (496). Получим выражение

$$r_g = R_g \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_0}\right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} q \left(\frac{r_0}{a_e}\right)^3 \cos^2 \varphi \right] + (r_g^0 - r_0) v \quad (499)$$

для вычисления геоцентрического радиуса точки геоида.

Положим $J_2 = 0,00108$, $q = 0,00346$, $r_g^0 - r_0 = 100$ м. Тогда поправочный член $(r_g^0 - r_0)v_{\max} = 0,4$ м. В точных работах поправочный член необходимо учитывать.

Высоту геоида вычислим по формуле $\zeta = (r_g - r_0) \cos(r_0, n)$. Поскольку $(r_g)r \approx 100$ м, $|1 - \cos(r_0, n)| = 0,000005$, можно принять

$$\zeta = r_g - r_0. \quad (500)$$

Значения геоцентрических радиусов вычисляются по формулам (451) и (499).

Рассмотренным способом можно наиболее просто и строго вычислять геоцентрический радиус и высоту геоида. Самая обширная и полная информация о профилях геоида получается при спутниковом нивелировании и поэтому оно на современном этапе самое мощное средство определения потенциала планетарного геоида. Кроме того, спутниковое нивелирование позволяет уточнять коэффициенты J_{nm} , K_{nm} , из решения обратной задачи, и таким образом устанавливать значение потенциала W_0 на каждую эпоху, а следовательно, все параметры планетарного геоида.

4.22. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ НОРМАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА. ФОРМУЛА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ВЫСОТЫ

Нормальный потенциал U уровенного общего земного эллипсоида разложим по степеням геодезической высоты H в ряд с учетом членов третьего порядка

$$U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial H} H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial H^2} H^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial H^3} H^3, \quad (501)$$

где U_0 — нормальный потенциал на поверхности эллипсоида.

Приняв $U \approx fM/r$ и $\gamma \approx fM/r^2$, оценим кубический член

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial H^3} H^3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial H^3} \left(\frac{fM}{r} \right) H^3 = -\gamma \left(\frac{H}{r} \right)^2 H$$

Если положить $H = 6$ км, $r = 6000$ км, $\gamma = 1000$ см/с², то кубический член (501), поделенный на r , по абсолютной величине не превышает 0,000 001 см/с². Поэтому его можно отбросить.

Объединим второй и третий члены разложения (501) и получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H} + \frac{\partial^2 U}{\partial H^2} \frac{H}{2} \right) H = -\gamma_m H, \quad (502)$$

где γ_m — нормальная сила тяжести в точке с высотой $H/2$.

С учетом (502) разложение (501) напомним в дифференциальной форме

$$U_0 - U = \gamma_m H. \quad (503)$$

Отсюда получаем формулу геодезической высоты относительно общего земного эллипсоида

$$H = (U_0 - U)/\gamma_m. \quad (504)$$

Если центр уровенного эллипсоида смещен от центра инерции Земли на $\Delta r(dx_0, dy_0, dz_0)$, то необходимо учитывать приращения потенциала притяжения

$$\Delta U_r = -fM(Xdx_0 + Ydy_0 + Zdz_0)/r^3 \quad (505)$$

и потенциала центробежной силы

$$\Delta U_\omega = \omega^2(Xdx_0 + Ydy_0). \quad (506)$$

Если $\Delta r = 0,3$ км, $r = 6000$ км, $\gamma = 1000$ см/с², $\omega^2 = 0,5 \cdot 10^{-8}$ с⁻², то $\Delta U_r/r = 0,05$ см/с² и $\Delta U_\omega/r = 0,00015$ см/с². При современных точностях измерений необходимо учитывать обе эти поправки.

Имея в виду, что $X = r \cos B \cos L$, $Y = r \cos B \sin L$, $Z = r \sin B$ и $\gamma \approx fM/r^2$, формулы (505) и (506) запишем так

$$\Delta U_r = -\gamma(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L + dz_0 \sin B), \quad (507)$$

$$\Delta U_\omega = r\omega^2(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L). \quad (508)$$

Для внецентренного уровенного эллипсоида с учетом (503), (507) и (508) имеем следующее разложение нормального потенциала:

$$U = \bar{U}_0 - \gamma_m H - (\gamma - r\omega^2)(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L) - \gamma dz_0 \sin B, \quad (509)$$

где \bar{U}_0 — потенциал на поверхности внецентренного уровенного эллипсоида.

Формула (509) выведена из предположения, что полярные оси внецентренного и общего земного эллипсоидов параллельны, а их размеры и формы соответственно равны. Если это условие не соблюдается, то можно ввести поправки по формулам, выведенным в первом разделе книги.

4.23. ВОЗМУЩАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ И АНОМАЛИЯ ВЫСОТЫ. НОРМАЛЬНАЯ ВЫСОТА

Возмущающий потенциал T , равный разности реального W и нормального U потенциалов, запишем там

$$T = W - U = (W_0 - \int g dh_w) - U. \quad (510)$$

где W_0 — потенциал в начальной точке отсчета высот; дифференциал dh_w под интегралом есть элементарное превышение, измеренное в реальном геогравитационном поле.

С учетом (503) и (510) имеем

$$T = (W_0 - U_0) - \int g dh_w + \gamma_m H. \quad (511)$$

Представим геодезическую высоту H в виде суммы гипсометрической высоты H^y и аномалии высоты

$$H = H^y + \zeta. \quad (512)$$

Чтобы гипсометрическая высота H^y не зависела от пути интегрирования, ее будем определять так

$$H^y = \frac{1}{\gamma_m} \int g dh_w. \quad (513)$$

Тогда выражение для возмущающего потенциала (511) с учетом (512) и (513) примет дифференциальную форму относительно аномалии высоты ζ

$$T = (W_0 - U_0) + \gamma_m \zeta. \quad (514)$$

Отсюда получим формулу аномалии высоты

$$\zeta = (T + U_0 - W_0) / \gamma_m. \quad (515)$$

В частном случае, когда за нормальный потенциал поверхности уровенного эллипсоида U_0 принят потенциал Земли W_0 в точке отсчета высот, тогда из формулы (515) следует

$$\zeta = T/\gamma_m. \quad (516)$$

Если центр уровня эллипсоида смещен на $\Delta r(dx_0, dy_0, dz_0)$ от центра инерции Земли, то с учетом (514) и (509) получим выражение

$$T = (W_0 - \bar{U}_0) + \gamma_m \zeta + (\gamma - r\omega^2)(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L) + \gamma dz_0 \sin B \quad (517)$$

для возмущающего потенциала относительно малых параметров.

По предложению М. С. Молоденского гипсометрическую высоту H^y , определяемую по формуле (513), называют нормальной высотой. При этом аномалия высоты ζ представляет высоту квазигеоида над отсчетным эллипсоидом.

Формулу (513) представим таким образом

$$H^y = \int dh_w + \frac{1}{\gamma_m} \int (g - \gamma_m) dh_w, \quad (518)$$

чтобы выделить сумму элементарных превышений dh_w , полученных из нивелирования. Очевидно, второй член в формуле (518) представляет собой поправку к сумме элементарных превышений dh_w для перехода к нормальной высоте.

Примечателен тот факт, что замкнутый нивелирный полигон будет иметь теоретическую невязку

$$f^y = -\frac{1}{\gamma_m} \int (g - \gamma_m) dh_w. \quad (519)$$

Из определения нормальной высоты H^y (513) следует, что она вычисляется строго без знания строения земной коры. Нормальные высоты можно рассматривать как отрезки нормалей к эллипсоиду, отложенные от поверхности квазигеоида до земной поверхности.

Система нормальных высот имеет один недостаток, а именно, уровенная поверхность $W = \int g dh_w = \text{const}$ в общем случае будет иметь разные высоты, так как нормальная сила тяжести γ_m зависит от широты места.

4.24. ОРТОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЫСОТА

Ортометрическая высота H^g определяется как отрезок силовой линии между геоидом и точкой на земной поверхности. Однако отрезок силовой линии от соответствующего ему отрезка нормали к земному эллипсоиду так мало отличается по длине, что H^g можно отсчитывать по нормали к земному эллипсоиду.

Для вывода формулы ортометрической высоты запишем основное уравнение потенциала

$$W_0 - W = \int g dh_w \quad (520)$$

и разложим потенциал силы тяжести W по параметру H^g в ряд. При этом будем удерживать только три первых члена, ибо член $\frac{1}{6}(\partial^3 W / \partial H^3)H^3$ пренебрегаемо мал по величине (см. раздел 4.22). Таким образом,

$$W = W_0 + \frac{\partial W}{\partial H} H^g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial H^2} (H^g)^2. \quad (521)$$

Известно, что сила тяжести на средней высоте $H^g/2$ между точкой земной поверхности Q и ее проекцией на геоиде будет

$$g_m = -\left(\frac{\partial W}{\partial H} + \frac{\partial^2 W}{\partial H^2} \frac{H^g}{2} \right). \quad (522)$$

Тогда с учетом (522) разложение (521) запишем так

$$W = W_0 - g_m H^g. \quad (523)$$

Отсюда получим формулу ортометрической высоты

$$H^g = (W_0 - W) / g_m, \quad (524)$$

аналогичную формуле (504) для геодезической высоты.

Заменим разность потенциалов $W_0 - W$ в выражении (524) через интеграл элементарных превышений $\int g dh_w$ и получим формулу ортометрической высоты

$$H^g = \frac{1}{g_m} \int g dh_w. \quad (525)$$

Ее можно преобразовать так

$$H^g = \int dh_w + \frac{1}{g_m} \int (g - g_m) dh_w. \quad (526)$$

Второй член в этой формуле есть поправка в сумму элементарных превышений dh_w полученных из нивелирования, для перехода к ортометрической высоте.

Если нивелирный ход представляет замкнутый полигон, то согласно формуле (526) будем иметь теоретическую невязку

$$f^g = -\frac{1}{g_m} \int (g - g_m) dh_w. \quad (527)$$

Как видно из формулы (525), точность вычисления ортометрической высоты H^g зависит от знания строения земной коры, т. е. она зависит от точности вычисления g_m в соответствии с принятой моделью строения земной коры.

По определению

$$H = H^g + \zeta^g,$$

т. е. высота геоида ζ^g над земным эллипсоидом и ортометрическая высота H^g в сумме составляют геодезическую высоту H точки земной поверхности.

Записав очевидное равенство $\int g dh_w = g_m H^g = \gamma_m H^g - (\gamma_m - g_m) H^g$ и разделив обе части на γ_m , получим формулу для вычисления разности орметрической и нормальной высот

$$H^g - H^v = (\gamma_m - g_m) H^g / \gamma_m. \quad (528)$$

Полученная разность соответствует отклонению квазигеоида от геоида. Если положим $\gamma_m - g_m = 0,3 \text{ см/с}^2$ и $H^g = 8 \text{ км}$, то $H^g - H^v = 2,4 \text{ м}$; при $\gamma_m - g_m = 0,05 \text{ см/с}^2$ и $H^g = 1 \text{ км}$ разность $H^g - H^v = 0,05 \text{ м}$. Отмечаем, что отклонение в 2—3 м квазигеоида от геоида возможно в высокогорных районах, а в большинстве случаев оно характеризуется величиной порядка нескольких сантиметров. На морях и океанах квазигеоид совпадает с геоидом и превращается в урвенную поверхность.

4.25. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА НА ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Выразим силу тяжести g через потенциал W на физической поверхности Земли

$$g = -\partial W / \partial n = -\partial(U + T) / \partial n. \quad (529)$$

Поскольку угол между касательной к силовой линии в точке Q и направлением нормали той же точки к урвенному эллипсоиду очень мал, можно принять

$$(g - \gamma) = -\partial T / \partial H, \quad (530)$$

так как $\partial U / \partial n = -\gamma$.

В левой части этой формулы стоит чистая аномалия силы тяжести в точке Q на земной поверхности.

Нормальное ускорение γ разложим относительно аномалии высоты

$$\gamma = \gamma^0(H^v) + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial H^2} \zeta^2 + \dots, \quad (531)$$

$\gamma^0(H^v)$ — нормальное ускорение на высоте H^v .

Заметим, что $\gamma \approx fM/r^2$, $\partial \gamma / \partial H \approx \partial \gamma / \partial r = -2\gamma/r$ и $\partial^2 \gamma / \partial H^2 = 6\gamma/r^2$.

Следовательно разложение (531) примет вид

$$\gamma = \gamma^0(H^v) - 2\gamma \frac{\zeta}{r} + 3\gamma \left(\frac{\zeta}{r} \right)^2. \quad (532)$$

При $\zeta = 0,2 \text{ км}$, $r = 6000 \text{ км}$ и $\gamma = 1000 \text{ см/с}^2$ третий член в разложении (532) $3\gamma \zeta^2 / r^2 = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2$ и его можно отбросить. Таким образом,

$$\gamma = \gamma^0(H^v) - 2\gamma \zeta / r. \quad (533)$$

Подставив γ (533) в формулу (530), запишем уравнение

$$\partial T / \partial H + (g - \gamma^0) + 2\gamma \zeta / r = 0. \quad (534)$$

Второй член в скобках представляет собой смешанную аномалию силы тяжести.

Исключим ζ (515) в выражении (534) и получим уравнение

$$\partial T / \partial H + (g - \gamma^0) + 2\gamma(T + U_0 - W_0) / r\gamma_m = 0, \quad (535)$$

выражающее граничное условие для возмущающего потенциала на земной поверхности.

Полагая известным счислимое значение аномалии высоты ζ^0 , можно определить счислимое значение возмущающего потенциала $T^0 = \gamma\zeta^0$ и отыскать малую поправку δT возмущающего потенциала из уравнения граничного условия

$$\partial T / \partial H + (g - \gamma^0) + 2\gamma(\delta T + U_0 - W_0) / r\gamma_m, \quad (536)$$

где γ^0 — нормальная сила тяжести, вычисленная для геодезической высоты $H^0 = H^v + \zeta^0$.

Уравнение (536) выведено для общего земного эллипсоида, центр которого совмещен с центром инерции.

Если центр уровенного эллипсоида смещен на $\Delta r(dx_0, dy_0, dz_0)$, то пользуясь выражениями для поправок ΔU_r (507), ΔU_w (508) и формулой (536), запишем граничное условие так

$$\partial T / \partial H + (g - \gamma^0) + \frac{2\gamma}{r\gamma_m} [\delta T + \bar{U}_0 - W_0 - (\gamma - r\omega^2)(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L) - \gamma dz_0 \sin B] = 0, \quad (537)$$

где \bar{U}_0 — нормальный потенциал на поверхности внецентренного уровенного эллипсоида.

Современные модели Земли аномалию высот оценивают с точностью 1—2 м, с такой же точностью определяется центр земного эллипсоида относительно центра инерции Земли. Таким образом, все параметры в уравнении граничного условия будут величинами одного порядка малости.

Для определения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли кроме уровенного эллипсоида должны быть известны потенциал силы тяжести W_0 в точке отсчета высот и три линейных параметра dx_0, dy_0, dz_0 — координаты центра уровенного эллипсоида относительно центра инерции Земли. Указанные четыре параметра могут быть определены из совместной обработки наземных и спутниковых астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

4.26. ИЗМЕНЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ИЗ-ЗА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ В ЕЕ ТЕЛЕ

На основании (507) и (508) напомним дифференциальную формулу

$$dg = -g(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L + dz_0 \sin B) / r + \omega^2(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L).$$

Второй член по величине исчезающе мал по сравнению с первым. Поэтому отбросим его и получим

$$dg = -g(dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L + dz_0 \sin B)/r. \quad (538)$$

Положим в формуле (538) линейная величина (в скобках) равна 3 м . Тогда дифференциальное изменение силы тяжести равно $0,0005\text{ см/с}^2$. Из формулы (538) следует, что

$$dx_0 \cos B \cos L + dy_0 \cos B \sin L + dz_0 \sin B = -rdg/g. \quad (539)$$

Если вариации силы тяжести за эпоху $t - t_0$ в различных точках земной поверхности определяются достаточно надежно, то можно выделить систематическую часть в этих изменениях и по методу наименьших квадратов оценить смещение центра инерции Земли на это время. Таким образом изучение временных вариаций силы тяжести на гравиметрических пунктах, размещенных равномерно по всему земному шару, может дать неоценимый материал для слежения за центром масс Земли на каждую эпоху.

4.27. УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА АНОМАЛИИ ВЫСОТЫ

Угол между нормалью к уровенному эллипсоиду и отвесной линией на земной поверхности будем представлять его составляющими в плоскостях меридиана и первого вертикала

$$\xi = \delta g_{X'}/g; \quad \eta = \delta g_{Y'}/g. \quad (540)$$

По определению $\delta g_{X'} = -\partial T/\partial X'$; $\delta g_{Y'} = -\partial T/\partial Y'$; $dX' = (M+H)dB$; $dY' = (N+H)\cos B dL$. С учетом этого формулы (540) примут вид

$$\xi = -\frac{1}{g(M+H)} \frac{\partial T}{\partial B}; \quad \eta = -\frac{1}{g(N+H)\cos B} \frac{\partial T}{\partial L}. \quad (541)$$

Согласно (514) возмущающий потенциал $T = (W_0 - U_0) + \zeta\gamma_m$, поэтому частые производные возмущающего потенциала будут

$$\partial T/\partial B = \gamma_m \partial \zeta/\partial B \quad \text{и} \quad \partial T/\partial L = \gamma_m \partial \zeta/\partial L.$$

Подставим найденные значения частных производных в формулу (541) и получим новые соотношения для составляющих отклонения отвесной линии

$$\xi = -\frac{\gamma_m}{g(M+H)} \frac{\partial \zeta}{\partial B}; \quad \eta = -\frac{\gamma_m}{n(N+H)\cos B} \frac{\partial \zeta}{\partial L}. \quad (542)$$

Используя топоцентрическую горизонтную систему координат X' , Y' , H , вычислим дифференциальное изменение аномалии высоты. Положим, аномалия высоты есть функция этих координат, т. е. $\zeta = \zeta(X', Y', H)$. Запишем полный дифференциал аномалии высоты

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial X'} dX' + \frac{\partial \zeta}{\partial Y'} dY' + \frac{\partial \zeta}{\partial H} dH. \quad (543)$$

Согласно формуле (542) частные производные аномалии высоты по горизонтным координатам X' и Y' , помноженные на γ_m/g , равны составляющим ξ и η уклонения отвесной линии, взятым с обратным знаком. Остается вычислить частную производную по высоте. Используя формулы (515) и (531), получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} [(T + U_0 - W_0)/\gamma_m] = -(g - \gamma)/\gamma_m. \quad (544)$$

Таким образом формулы (542)—(544) приводят к новому дифференциальному соотношению относительно составляющих уклонения отвесной линии

$$d\zeta = -\frac{g}{\gamma_m}(\xi dX' + \eta dY') - \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dH.$$

Так как $dX' = ds \cos A$ и $dY' = ds \sin A$, то

$$-d\zeta = \frac{g}{\gamma_m}(\xi \cos A + \eta \sin A) ds + \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dH. \quad (545)$$

Последнее выражение представляет дифференциальную формулу аномалии высот.

В формуле (545) выражение в скобках есть составляющая уклонения отвесной линии θ в вертикале заданного азимута. Следовательно дифференциальную формулу (545) можно записать так

$$-d\zeta = \frac{g}{\gamma_m} \theta ds + \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dH. \quad (546)$$

Проинтегрировав это выражение по ходовой линии между точками Q_1 и Q_2 на земной поверхности, получим превышение квазигеоида между этими точками

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{g}{\gamma_m} \theta ds + \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{g - \gamma}{\gamma_m} dH. \quad (547)$$

В формуле (547) первый интеграл является главным, а второй — малой поправкой за относительный избыток силы тяжести. Если примем в среднем $(g - \gamma)/\gamma_m = 0,000\ 05$ и $H_2 - H_1 = 2000$ м, то второй интеграл будет порядка 0,1 м.

Если астрономо-геодезические пункты Q_1 и Q_2 удалены друг от друга на большое расстояние, то уклонение отвесной линии ξ , η между этими пунктами могут быть интерполированы по материалам гравиметрической съемки и астрономо-геодезическим данным. Интерполяция уклонения отвесной линии между удаленными друг от друга астрономо-геодезическими пунктами Q_1 и Q_2 составляет основную задачу астрономо-гравиметрического нивелирования, предложенного Ф. Н. Красовским в 1935 г. и разработанного М. С. Молоденским.

Составляющие уклонения отвеса можно с необходимой точностью определять от тригонометрического нивелирования при правильной его постановке.

4.28. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕОИДА И ИДЕЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА

Высоты геоида ζ на морях и океанах определяются методом спутникового нивелирования с высокой точностью. Увеличивается площадь акваторий, покрытых морской гравиметрической съемкой.

Рассмотрим граничное условие, представляющее дифференциальную связь аномалии силы тяжести и высот точек на поверхности геоида.

Пользуясь известными соотношениями $g - \gamma = -\partial T / \partial H$ и $T = \gamma \zeta$, запишем

$$g - \gamma = - \left(\frac{\partial g}{\partial H} \zeta + \gamma_m \frac{\partial \zeta}{\partial H} \right). \quad (548)$$

Примем $g \approx fM/r^2$, тогда $\partial g / \partial H = 2\gamma_m/r$. Подставим найденное значение частной производной $\partial g / \partial H$ в формулу (548) и получим уравнение

$$g - \gamma = \left(-\frac{2\zeta}{r} - \frac{\partial \zeta}{\partial H} \right) \gamma_m, \quad (549)$$

связывающее аномалии силы тяжести $g - \gamma$ и высоты ζ на поверхности геоида.

Формула (549) позволяет вычислить аномалии силы тяжести в акваториях, на которых выполнены спутниковые измерения геоида.

При вычислении $\partial \zeta / \partial H$ достаточно иметь разложение геогравитационного потенциала притяжения с учетом членов с коэффициентами $J_{nm}, K_{nm}, \Delta I_4 = I_4 + 0,8\alpha^2 - 0,6\alpha q$ (α, q — параметры урванного эллипсоида; $n, m = 1, 2, \dots, 36$).

Пользуясь формулами Венинг — Мейнеса

$$\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \cos A dA d\psi, \quad (550)$$

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \sin A dA d\psi,$$

где ψ — сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей точки; A — азимут текущей точки; $Q(\psi)$ — функция от сферического расстояния ψ , определяемая выражением

$$Q(\psi) = \frac{\rho}{2\gamma} \cos^2 \Theta \left[\operatorname{cosec} \Theta + 12 \sin \Theta - 32 \sin^2 \Theta + \frac{3}{1 + \sin \Theta} - 12 \sin^2 \Theta \ln (\sin \Theta + \sin^2 \Theta) \right], \quad \Theta = \psi/2,$$

и уравнением (549), можно решить обратную задачу вычисления составляющих уклонений отвеса $\vartheta(\xi, \eta)$ по измерениям высот геоида на акваториях морей и Мирового океана.

Аномалии силы тяжести на акваториях, определенные по данным морской гравиметрической съемки и вычисленные по формуле (549), можно использовать как двойные измерения.

При учете влияния дальних зон, покрывающих сушу, аномалии силы тяжести $g - \gamma$ определяются по наземным гравиметрическим измерениям, а где отсутствует гравиметрическая съемка — вычисляются по планетарной гравитационной модели Земли, принятой за стандартную в геодезических работах. В акваториях, где имеется плотная сеть спутниковых измерений высот геоида, можно использовать уравнение

$$2(\zeta_i - \zeta_{li})/s_{li} = (\xi_i + \xi_{li})\cos A_{li} + (\eta_i + \eta_{li})\sin A_{li}, \quad (551)$$

связывающее высоты геоида и отклонения отвеса в исследуемой Q_1 и текущей Q_i точках в ближней зоне с радиусом $s_{li} = 10 \dots 15$ км.

4.29. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ В ГЕОДЕЗИИ И ГЕОФИЗИКЕ

Потенциал силы тяжести W имеет шесть вторых производных, которые в целях сокращения записи обозначим так

$$\begin{aligned} \partial^2 W / \partial x^2 &= W_{xx}; & \partial^2 W / \partial y^2 &= W_{yy}; & \partial^2 W / \partial z^2 &= W_{zz}; \\ \partial^2 W / \partial x \partial y &= W_{xy}; & \partial^2 W / \partial x \partial z &= W_{xz}; & \partial W / \partial y \partial z &= W_{yz}. \end{aligned} \quad (552)$$

Зададим топоцентрическую горизонтальную систему координат: ось z направлена по вектору силы тяжести g , а ось x — на север в плоскости меридиана исследуемой точки.

Вторые производные имеют размерность $1/c^2$. Единицей измерения является этвеш, равный $1/10^9 c^2$ ($0,1$ мгал/м).

Для механико-математических исследований таблиц вторых производных (552) представим в матричной форме

$$G_W = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{xz} & W_{yz} & W_{zz} \end{bmatrix}. \quad (553)$$

Диагональные элементы матрицы G_W связаны уравнениями Лапласа и Пуассона

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = \begin{cases} 2\omega^2 & \text{для внешней точки,} \\ 2\omega^2 - 4\pi f \delta & \text{для внутренней точки.} \end{cases} \quad (554)$$

Таким образом независимых элементов только пять и поэтому выделим от матрицы G_W первый блок

$$G_1 = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{xy} & W_{yy} \end{bmatrix}. \quad (555)$$

Испытаем G_1 , применяя механико-математический анализ. С этой целью приведем ее к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований

$$\Lambda = R'G_1R, \quad (556)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad R' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix};$$

$\alpha(\alpha + \pi/2)$ — азимуты главных нормальных сечений поверхности с главными радиусами кривизны R_1 и R_2 .

Выполнив умножение матриц согласно (555) и (556), получим выражения для элементов матрицы Λ

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= W_{xx}\cos^2 \alpha + W_{xy}\sin 2\alpha + W_{yy}\sin^2 \alpha; \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = \frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx})\sin 2\alpha + W_{xy}\cos 2\alpha; \\ \lambda_{22} &= W_{xx}\sin^2 \alpha - W_{xy}\sin 2\alpha + W_{yy}\cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (557)$$

Как следует из свойства квадратичной формы (556), матрица Λ является симметричной, т. е. $\lambda_{12} = \lambda_{21}$. Соблюдается необходимое условие для собственных чисел λ_{11} и λ_{22} матрицы G_1

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = W_{xx} + W_{yy}. \quad (558)$$

Положив в формулах (557) $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$, получим выражение для азимута главных нормальных сечений

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2W_{xy}/W_{\Delta}, \quad (559)$$

где

$$W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}.$$

Если уравнение поверхности задано в виде $z = f(x, y)$, то главные радиусы кривизны нормальных сечений R_1 и R_2 в данной точке поверхности выражаются таким образом, что

$$R_{1,2} = \frac{r + t \mp \sqrt{(r-t)^2 + 4s}}{2(rt - s^2)}, \quad (560)$$

где согласно обозначениям Монжа

$$r = \partial^2 z / \partial x^2; \quad s = \partial^2 z / \partial x \partial y; \quad t = \partial^2 z / \partial y^2. \quad (561)$$

Образует производные для уровенной поверхности $W(x, y, z) = \text{const}$, имея в виду, что z есть неявная функция от x и y . Для первых двух производных имеем

$$\partial W / \partial x + \partial W / \partial z \cdot \partial z / \partial x = 0;$$

$$\partial W / \partial y + \partial W / \partial z \cdot \partial z / \partial y = 0.$$

Дифференцируем еще раз и получаем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (562)$$

Поскольку ось z совпадает с вектором силы тяжести g , то $\partial W / \partial z = g$, $\partial W / \partial x = 0$, $\partial W / \partial y = 0$. Поэтому уравнения (562) упрощаются, принимая вид

$$W_{xx} = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad W_{xy} = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad W_{yy} = -g \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

откуда на основании (561) имеем

$$r = -W_{xx}/g; \quad s = -W_{xy}/g; \quad t = W_{yy}/g. \quad (563)$$

Подставим значения r , s , t (563) в формулы (560), образуем разность $R_1^{-1} - R_2^{-1}$ и после соответствующих преобразований получим разность главных кривизн поверхности

$$1/R_1 - 1/R_2 = \sqrt{W_{\Delta}^2 + 4W_{xy}}/g, \quad (564)$$

при этом $R_1 < R_2$.

Эта разность показывает отличие исследуемой поверхности от сферы. Чем резче отклоняется исследуемая поверхность от сферы, тем большую величину имеет разность кривизн.

Из дифференциальной геометрии известно, что если начало координат совмещено с исследуемой точкой поверхности и плоскость xy есть касательная к поверхности в этой точке, то кривизна нормального сечения, образующего с осью x угол α , выражается так

$$1/R = r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha. \quad (565)$$

Представим значения α ($\alpha + \pi/2$) для R_1 (R_2) и, учитывая выражения (557), (558) и (563), получим выражение для суммы главных кривизн

$$1/R_1 + 1/R_2 = -(W_{xx} + W_{yy})/g. \quad (566)$$

Решая совместно (564) и (566), имеем

$$1/R_1 = [\sqrt{W_{\Delta}^2 + 4W_{xy}} - (W_{xx} + W_{yy})]/2g;$$

$$1/R_2 = -[\sqrt{W_{\Delta}^2 + 4W_{xy}} + (W_{xx} + W_{yy})]/2g. \quad (567)$$

В частном случае для радиусов кривизн нормальных сечений уровня поверхности в плоскостях меридиана ($\alpha = 0$) и первого вертикала ($\alpha = \pi/2$) из формул (565) и (563) имеем

$$1/R_x = -W_{xx}/g, \quad 1/R_y = -W_{yy}/g. \quad (568)$$

Соблюдается постоянство суммы нормальных кривизн поверхности по ортогональным плоскостям

$$1/R_1 + 1/R_2 = 1/R_x + 1/R_y = -(W_{xx} + W_{yy})/g.$$

Сложим левые и правые части выражения (560) и, учитывая (563), получим

$$R_1 + R_2 = -g(W_{xx} + W_{yy}) / (W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2). \quad (569)$$

Отметим, что в правой части (569) числитель согласно (558) представляет сумму собственных чисел λ_{11} и λ_{22} матрицы G_1 , а знаменатель — ее определитель, так как R_1 и R_2 являются главными радиусами кривизны поверхности $W(x, y, z)$ в исследуемой точке.

Из анализа следует, что вторые производные W_{xx} , W_{xy} , W_{yy} характеризуют кривизны урovenной поверхности в исследуемой точке. Вторые производные W_{zz} , W_{xz} и W_{yz} показывают, как изменяется сила тяжести по ортогональным осям z , x и y , поэтому W_{zz} называется вертикальным градиентом силы тяжести, W_{xz} и W_{yz} — горизонтальными градиентами силы тяжести.

В плоскости горизонта наибольший градиент $W_{sz} = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}$ имеет направление $\alpha_s = \arctg(W_{yz}/W_{xz})$. Полный градиент силы тяжести $G_\Phi = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2 + W_{zz}^2}$ располагается в вертикальной плоскости по азимуту α_s и отклоняется от оси z на угол $\Phi = \arctg(W_{sz}/W_{zz})$. Можно прогнозировать, что наибольшая масса, определяющая особенность поля притяжения в окрестности точки, расположена в плоскости вертикала по азимуту α_s и имеет зенитное расстояние $2\pi - \Phi$. Как правило Φ — малый угол, так как для точки на поверхности Земли $W_{sz}/W_{zz} < 0,003$.

Гравивариометрические съемки на каждой точке дают четыре независимых результата, а именно W_Δ , W_{xy} , W_{xz} , W_{yz} . Вертикальный градиент W_{zz} силы тяжести обычным вариометром не измеряется. Его не хватает для вычисления всех шести производных. Если с помощью узкодиапазонного гравиметра измерен вертикальный градиент W_{zz} для внешней точки, то пользуясь вариометрическими данными $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$ и формулой (554), получим

$$W_{xx} = \omega^2 - (W_{zz} + W_\Delta)/2; \quad (570)$$

$$W_{yy} = \omega^2 - (W_{zz} - W_\Delta)/2.$$

По формулам (560) можно вычислить радиусы кривизны R_x , R_y нормальных сечений урovenной поверхности в плоскостях меридиана и первого вертикала, главные радиусы кривизны R_1 и R_2 — по формуле (567).

Знание вертикального градиента силы тяжести важно для геофизической разведки, так как близкие притягивающие массы в земной коре сильно влияют на его величину и благодаря этому удается достоверно прогнозировать глубину залегания аномальных масс в земной коре.

Для внешней точки, подставив значения W_{xx} и W_{yy} (568) в уравнение (554), получим

$$W_{zz} = 2\omega^2 + g(R_x^{-1} + R_y^{-1}). \quad (571)$$

Аналогично получим для внутренней точки

$$W_{zz} = 2\omega^2 + g(R_x^{-1} + R_y^{-1}) - 4\pi f\delta. \quad (572)$$

Формула (572) показывает зависимость W_{zz} от плотности притягивающих масс. Напротив, градиент силы тяжести W_{zz} во внешней точке можно вычислять, не привлекая данные о строении земной коры.

4.30. НОРМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. АНОМАЛЬНАЯ ЧАСТЬ ГРАДИЕНТОВ

Отметим два примечательных свойства уровенного эллипсоида: 1) потенциал силы тяжести $U(x, y, z)$ не зависит от долготы; 2) радиусы кривизны нормальных сечений M и N в плоскостях меридиана и первого вертикала являются главными радиусами кривизны R_1 и R_2 . В таком случае, поскольку $\alpha_1 = 0$ ($\alpha_2 = \pi/2$), из (559), (565) и (569) для вторых производных, характеризующих кривизну уровенного эллипсоида, получим следующие выражения:

$$U_{xy} = 0; U_{\Delta} = \gamma_0(M^{-1} - N^{-1}); U_{xx} = -\gamma_0/M; U_{yy} = -\gamma_0/N. \quad (573)$$

Подставляем значения $\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta_2 \sin^2 B)$; $M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}$; $N = a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ в формулу (573) и имеем

$$U_{\Delta} = \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{\gamma_e}{a} (1 + \beta_2 \sin B) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \cos^2 B. \quad (574)$$

По современным данным $a = 6\,378\,137$ м, $\gamma_e = 9,780\,32$ м/с², $e^2 = 6694,383\,051 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = 5279,0475 \cdot 10^{-6}$, $\beta_4 = 23,2719 \cdot 10^{-6}$. С учетом этих данных (в этвешах)

$$U_{\Delta} = 10,33(1 + 0,0019 \sin^2 B) \cos^2 B \quad (575)$$

На поверхности эллипсоида $dx = M dB$, $dy = N \cos B dL$, $\gamma_0 = \partial U / \partial z$, $U_{xz} = \partial \gamma_0 / \partial x = \frac{1}{M} \partial \gamma_0 / \partial B$ и $U_{yz} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\partial \gamma_0}{\partial L}$. Так как сила тяжести уровенного эллипсоида не зависит от долготы, то $U_{yz} = 0$. Производная силы тяжести по широте $\partial \gamma_0 / \partial B = \frac{\partial}{\partial B} (1 + \beta_2 \sin^2 B) \gamma_e = \gamma_e \beta_2 \sin 2B$. Следовательно горизонтальный градиент по оси x

$$U_{xz} = \gamma_e \beta_2 \sin 2B / M = \frac{\gamma_e \beta_2}{a(1 - e^2)} (1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B) \sin 2B. \quad (576)$$

Подставим вышеприведенные значения a , γ_e , e^2 , β_2 и получим

$$U_{xz} = 7,56(1 - 0,0100 \sin^2 B) \sin 2B. \quad (577)$$

Рассмотрим вертикальный градиент силы тяжести уровенного эллипсоида. На основании (571)

$$U_{zz} = \partial \gamma / \partial z = 2\omega^2 + \gamma_0(M^{-1} + N^{-1}).$$

Исключим в этой формуле γ_0 , M , N и после соответствующих преобразований с учетом членов порядка e^4 получим

$$U_{zz} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{2\gamma_e}{a} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \right) - \left(e^2 - \beta_2 + \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{2}e^2\beta_2 \right) \sin^2 B - \left(e^2\beta_2 - \beta_4 - \frac{1}{8}e^4 \right) \sin^4 B \right] + 2\omega^2. \quad (578)$$

Подставив вышеприведенные значения a , γ_e , e^2 , β_2 , β_4 и $\omega = 0,729\,211\,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/c}^2$ в выражение (578), получим расчетную формулу (в этвешах)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 3087,7955 - 4,3895 \sin^2 B - 0,0198 \sin^4 B. \quad (579)$$

Как видно из разложения (579), вертикальный градиент силы тяжести уменьшается от экватора к полюсу в зависимости от широты. Разность между максимальным (на экваторе) и минимальным (на полюсе) значениями вертикального градиента силы тяжести составляет 4,41 этвеша.

Из разложений (575), (577) и (579) следует, что горизонтальный градиент силы тяжести U_{xz} и вариометрическая разность U_Δ соответственно в 400 и 300 раз меньше, чем вертикальный градиент силы тяжести U_{zz} .

При интерпретации и редукции данных прецизионной гравиметрии, определяемых с точностью 1 мгал и выше, надо иметь в виду зависимость вертикального градиента силы тяжести от высоты станции. Рассмотрим эту зависимость, положив $\gamma = fM/r^2$. Тогда вторая производная

$$\partial^2 \gamma / \partial H^2 = 6\gamma / r^2. \quad (580)$$

Геоцентрический радиус уровенного эллипсоида $r_0(B, N=0) \approx a/\sqrt{1+e^2\sin^2 B}$. Геоцентрический радиус станции $Q(B, H)$ равен $r = r_0 + H$, или $r = a \left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 B + H/a \right)$. Отсюда $r^{-2} = (1 + e^2\sin^2 B - 2H/a)/a^2$. Исключим r^{-2} из (580) и запишем

$$\partial^2 \gamma / \partial H^2 = 6\gamma (1 + e^2\sin^2 B - 2H/a)/a^2.$$

Заменим $\gamma = \gamma_e(1 + \beta_2\sin^2 B)$ и получим формулу

$$\partial^2 \gamma / \partial H^2 = 6\gamma_e [1 + (e^2 + \beta_2)\sin^2 B - 2H/a]/a^2, \quad (581)$$

выражающую зависимость вертикального градиента силы тяжести от высоты.

Подставив численные значения a , γ_e , e^2 , β_2 в формулу (581) и отбросив малый член $12\gamma_e H/a^3$, получим расчетную формулу (в мгал/м²)

$$\partial^2 \gamma / \partial H^2 = (0,144\,2503 + 0,000\,1727\sin^2 B) \cdot 10^{-6}. \quad (582)$$

Полную формулу градиента нормальной силы тяжести составим, объединяя выражения (578) — (582)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\omega^2 - \frac{2\gamma_e}{a} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \right) - \left(e^2 - \beta_2 + \frac{3}{4} e^4 - \frac{1}{2} e^2 \beta_2 \right) \sin^2 B - \right. \\ \left. - \left(e^2 \beta_2 - \beta_4 - \frac{1}{8} e^4 \right) \sin^4 B \right] + \frac{6\gamma_e}{a^2} \left[1 + (e^2 + \beta_2) \sin^2 B - \frac{H}{a} \right] H, \quad (583)$$

или с учетом числовых значений параметров Земли (в мгал/м)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = [-0,308\ 779\ 55 + 0,000\ 438\ 95 \sin^2 B + 0,198 \cdot 10^{-6} \sin^4 B + \\ + (0,144\ 2503 + 0,000\ 1727 \sin^2 B) \cdot 10^{-6} H]. \quad (584)$$

Заметим, что приращение силы тяжести из-за высотной вариации градиента $\partial\gamma/\partial H$ (582) на высоте $H = 2650$ м составляет 1 мгал. Поэтому, как правило, во всех высокоточных редукциях силы тяжести необходимо учитывать зависимость вертикального градиента $\partial\gamma/\partial H$ от высоты точки.

Список вторых производных потенциала U нормального поля представим матрицей

$$G_U = \begin{bmatrix} U_{xx} & 0 & U_{xz} \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ U_{xz} & 0 & U_{zz} \end{bmatrix}, \quad (585)$$

элементы которой однозначно вычисляются по формулам (587), (576) и (578).

Матрицы аномалий вторых производных потенциала $G_T = G_W - G_U$ имеет следующие элементы:

$$T_{xx} = W_{xx} - U_{xx}; \quad T_{yy} = W_{yy} - U_{yy}; \quad T_{zz} = W_{zz} - U_{zz}; \\ T_{xy} = W_{xy}; \quad T_{xz} = W_{xz} - U_{xz}; \quad T_{yz} = W_{yz}. \quad (586)$$

Аномалии вторых производных (586) характеризуют наличие возмущающих масс в верхних слоях литосферы и рельефа вокруг исследуемой точки. На возмущение вертикального градиента силы тяжести оказывают влияние также аномальные плотности на больших глубинах в литосфере. На горизонтальные градиенты наибольшее влияние оказывают топография и аномальные плотности в верхних слоях земной коры. Поэтому для геофизической интерпретации гравиметрических данных и изучения кривизны уровенных поверхностей необходимо иметь аномалии вторых производных, фиксированные на регулярной сетке по всему исследуемому району. Путем сглаживания регулярной сетки аномалий вторых производных потенциала силы тяжести G_T можно получить аналитическую зависимость аномалий $F(T)$ с ковариационной матрицей K_T . Аналитическая функция $F(T)$ с ковариационной матрицей K_T наиболее полно будет характеризовать строение Земли и кривизны уровенных поверхностей в исследуемом районе.

В этом заключается как геодезическое, так и геофизическое назначение аномалий вторых производных потенциала силы тяжести.

Из обычных вариометрических наблюдений определяются все ано-

малии, за исключением аномалии вертикального градиента T_{zz} , для вычисления которой потребуются дополнительные усилия. Рассмотрим определения T_{zz} из комбинации астрономо-геодезических и вариометрических наблюдений. Пусть известны астрономо-геодезические отклонения отвеса в двух точках Q_1 и Q_2 , близко расположенных друг другу, между которыми отклонение отвеса и силы тяжести изменяются по линейному закону. Тогда на основании (540) имеем

$$-g_m(\xi_2 - \xi_1)/dx = [(\delta g_x)_2 - (\delta g_x)_1]/dx,$$

$$-g_m(\eta_2 - \eta_1)/dy = [(\delta g_y)_2 - (\delta g_y)_1]/dy.$$

Левые части этих выражений известны. Что касается правых частей, то при малых $dx = x_2 - x_1$, $dy = y_2 - y_1$ можно предположить, что они соответственно равны T_{xx} и T_{yy} , т. е. имеют место соотношения

$$T_{zz} = g_m(\xi_2 - \xi_1)/dx; \quad T_{yy} = -g_m(\eta_2 - \eta_1)/dy. \quad (587)$$

Тогда, пользуясь уравнением Лапласа (554) для внешней точки и выражениями (587), получим формулу

$$T_{zz} = g_m[(\xi_2 - \xi_1)/(x_2 - x_1) + (\eta_2 - \eta_1)/(y_2 - y_1)], \quad (588)$$

позволяющую вычислить аномалию вертикального градиента силы тяжести для средней точки с координатами $x_m = (x_1 + x_2)/2$, $y_m = (y_1 + y_2)/2$, $z_m = (z_1 + z_2)/2$.

Если гравитационным градиентометром непосредственно измеряются вертикальные градиенты W_{zz} , то из него исключается нормальный градиент U_{zz} и получается левая часть выражения (588).

В этом случае уравнение (588) можно использовать для вычисления разности отклонений отвеса точек Q_1 и Q_2 на физической поверхности Земли.

4.31. АНОМАЛИИ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА. РОЛЬ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ВЫВОДЕ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА ПО ВАРИОМЕТРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Рассмотрим связь аномалии вторых производных силы тяжести T_{zz} , T_{Δ} , T_{xy} и составляющих отклонений отвеса. Пусть две точки Q_1 и Q_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) выбраны таким образом, что аномалии T_{zz} , T_{Δ} , T_{xy} на расстоянии s_i изменяются по линейному закону.

Когда вариометрические данные характеризуются с точностью порядка 1 этвша и выше, тогда необходимо учитывать разносистемность отсчета координат точек Q_1 и Q_i из-за непараллельности их собственных нормалей и плоскостей меридианов. Результаты измерений аномалий вторых производных потенциала силы тяжести на точке Q_i

$$(G_T)_i = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (589)$$

будем редуцировать в систему отсчета координат центральной точки Q_1 . Эта задача рассмотрена ранее в виде дифференциальных преобразований $(\delta R')_{i1} = B_{i1}(\delta R')$. Штрих означает, что операторное преобразование относится к топоцентрической горизонтной системе координат с началом отсчета в центральной точке Q_1 . Элементы квадратной симметричной матрицы B_{i1} третьего порядка являются функциями широт B_1 , B_i и долгот L_1 , L_i центральной Q_1 и периферийной Q_i точек. Эти элементы вычисляются строго по формулам (53). В нашем случае редукция заключается в матричной операции

$$(G_T)_{i1} = B_{i1}(G_T)B'_{i1}. \quad (590)$$

Отредуцированные таким образом аномалии $(G_T)_{i1}$ точки Q_i в систему отсчета координат точки Q_1 будут в единой системе отсчета координат с аномалиями $(G_T)_1$ в начальной точке Q_1 . Теперь можно строго применять дифференциальные соотношения (587) и (588) в форме

$$(T_{zz})_{i1} + (T_{zz})_1 = (g_i + g_1)[(\xi_i - \xi_1)X'_i + (\eta_i - \eta_1)Y'_i]; \quad (591)$$

$$(T_{\Delta})_{i1} + (T_{\Delta})_1 = (g_i + g_1)[(\xi_i - \xi_1)X'_i - (\eta_i - \eta_1)Y'_i]. \quad (592)$$

Совместно решая (591) и (592), получим выражения для разностей составляющих уклонений отвеса точек Q_1 и Q_2 относительно аномалий T_{zz} и T_{Δ} в этих точках в виде

$$2(\xi_i - \xi_1) = [(T_{zz} + T_{\Delta})_{i1} + (T_{zz} + T_{\Delta})_1]X'_i / (g_i + g_1); \quad (593)$$

$$2(\eta_i - \eta_1) = [(T_{zz} - T_{\Delta})_{i1} + (T_{zz} - T_{\Delta})_1]Y'_i / (g_i + g_1),$$

где X'_i , Y'_i — топоцентрические горизонтные координаты точки относительно центральной точки Q_1 , вычисляемые по формулам (32).

Вывод формул для аномалии T_{xy} будет аналогичным, с той лишь разностью, что

$$[(T_{xy})_{ij} + (T_{xy})_i]X'_i = 2g_m(\eta_i - \eta_1), \quad (594)$$

$$[(T_{xy})_{i1} + (T_{xy})_1]Y'_i = 2g_m(\xi_i - \xi_1).$$

Поскольку $g_m = (g_i + g_1)/2$, из (594) следует, что

$$\xi_i - \xi_1 = [(T_{xy})_{i1} + (T_{xy})_1]Y'_i / (g_i + g_1), \quad (595)$$

$$\eta_i - \eta_1 = [(T_{xy})_{i1} + (T_{xy})_1]X'_i / (g_i + g_1).$$

Так как в дифференциальных формулах (593) и (595) речь идет об относительных уклонениях отвеса, то для какой либо одной точки необходимо задавать составляющие уклонения отвеса ξ , η . Решая систему линейных уравнений (593) и (595) по методу наименьших квадратов по заданным аномалиям G_T вторых производных силы тяжести и составляющих уклонений отвеса в некоторой точке Q , оценим составляющие уклонения отвеса всех точек Q_i в районе гравивариометрической съемки.

Ошибки вариометрических наблюдений и интегрирования, постепенно накапливаются на больших расстояниях, могут исказить конечные результаты. Поэтому астропункты не должны отстоять слишком далеко

друг от друга. Расстояния между пунктами, имеющими астрономо-геодезические отклонения отвеса, в районе сплошной гравивариометрической съемки зависят от характера местности, чем правильнее изменяются аномалии G_T , тем меньше может быть плотность астрономо-геодезических пунктов. В первом приближении для районов средней аномальности расстояние между астрономо-геодезическими пунктами может быть около 50 км, для более аномальных районов оно должно быть уменьшено до 20—30 км, а плотность точек вариометрии увеличена соответствующим образом. Это требует экспериментальных исследований, которые выходят за границы вопросов, рассматриваемых в данной книге. Что касается данных, получаемых средствами наземной (воздушной) инерциальной навигации, то в этом случае астрономо-геодезические отклонения отвеса являются эталонами как для метрологии инерциальных систем, так и для исключения накапливающихся ошибок, обусловленных ошибками акселерометров и интегрирования по маршрутам гравиинерциальных съемок.

Однако, при выводе отклонений отвеса по аномалии G_T основной помехой являются неучтенные ошибки интегрирования из-за нелинейности изменения G_T , обусловленной аномальными плотностями в земной коре. Погрешность принятой модели земной коры является основной преградой для повышения точности вывода отклонений отвеса по данным гравивариометрии и гравиинерциальной навигации. Это суждение еще раз подтверждает утверждение о том, что дальнейший прогресс в геодезии зависит во многом от уровня наших знаний о внутреннем строении Земли. Таким образом, возрастает потребность в строгом решении задачи геофизической интерпретации астрономо-геодезических и гравиметрических данных и их вариаций в пространстве и во времени. При этом счислимые параметры трехмерной модели внутреннего строения Земли и их динамика во времени, устанавливаемые в геофизике и океанологии, могут быть использованы как априорные данные, уточняемые с помощью геофизической и геодезической интерпретации результатов наземных и спутниковых астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и анализа корреляции геофизических полей [11].

Математический анализ аномалий вторых производных потенциала силы тяжести показывает возрастающую роль астрономии и геофизики в решении практических задач современной геодезии.

В заключение рассмотрим идею одного из способов решения обратной задачи вычисления отклонения отвеса по данным спутникового нивелирования. В ее решении узловым вопросом является численное интегрирование G_T (589) по результатам измерения геоида и морской гравиметрии с учетом динамики топографии океана и строения подводной части литосферы. После того как численным интегрированием получена матрица G_T (589) для всех точек, равномерно покрывающих акваторию, задача сводится к оптимизации решения систем линейных уравнений (551), (593) и (595) по методу наименьших квадратов.

Эталонные значения ξ , η могут быть получены астрономо-геодезическим или гравиметрическим способами. Назначение исходных ξ , η

такое же, что и при обработке данных гравивариометрии и гравиионерциальной навигации. Очевидно в акватории Мирового океана практически трудно обеспечить необходимую плотность точек с исходными ξ , η , поэтому точность вывода уклонений отвеса по высотам геоида будет всегда ограничена, если в полной мере не учитывать динамику океанической поверхности и внутреннее строение подводной литосферы, а также корреляцию геофизических полей Мирового океана.

4.32. ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ИХ НАЗНАЧЕНИЕ

По аналогии с потенциалом силы тяжести запишем матрицу вторых производных силы тяжести

$$\Delta G_g = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & | & g_{xz} \\ g_{xy} & g_{yy} & | & g_{yz} \\ \hline g_{xz} & g_{yz} & | & g_{zz} \end{bmatrix}. \quad (596)$$

Поверхность $g(x, y, z)$ можно исследовать с помощью формул (555) — (569), заменяя силу тяжести g вертикальным градиентом W_{zz} . При анализе изменения вертикального градиента силы тяжести в зависимости от высоты мы уже пользовались понятием вертикального градиента $\partial^2\gamma/\partial H^2$.

Очевидно, исследуя матрицу

$$\Delta G_1 = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{bmatrix}, \quad (597)$$

можно оценивать радиусы кривизны главных нормальных сечений и их азимут по формулам (559) — (569).

Особый интерес представляют изменения вертикального градиента силы тяжести по высоте и по направлению топоцентрических горизонтных координат, которые можно обнаружить с помощью прецизионных градиентометров.

Для нормального поля $\partial^2\gamma/\partial H^2 = (0,144\ 2503 + 0,000\ 1727 \sin^2 B) \times 10^{-6}$ мгал/м². Градиент по оси x на основании (584) $\partial^2\gamma/\partial H \partial x = 0,7 \cdot 10^{-10} \sin 2B$ мгал/м². Этой величиной можно пренебречь. Очевидно $\partial^2\gamma/\partial H \partial y = 0$.

Таким образом, аномалии градиентов вертикального градиента силы тяжести соответственно по вертикали и по горизонту определяют так

$$\Delta T_{zz} = g_{zz} - \gamma_{zz}; \quad \Delta T_{xz} = g_{xz}; \quad \Delta T_{yz} = g_{yz}. \quad (598)$$

Детально изучение аномалий ΔT_{zz} , ΔT_{xz} и ΔT_{yz} градиентов вертикального градиента силы тяжести — это необходимое условие оптимизации решения задачи определения аномальных масс в литосфере по распределению аномалии силы тяжести и ее градиентов.

Использование ΔT_{xz} и ΔT_{yz} особенно эффективно для интерпретации горизонтальных неоднородностей в литосфере и корреляций геофизических полей.

При наличии аномалий вторых производных силы тяжести можно получить ценную информацию для учета нелинейности изменения аномалий вторых производных потенциала силы тяжести и тем самым существенно уменьшить ошибки интегрирования при оценивании уклонений отвеса по гравивариометрическим и гравиинерциальным наблюдениям.

Использование моментов инерции Земли высоких степеней, вычисляемых по планетарной и региональным моделям геогравитации, и полного списка аномалий G_T , ΔG_T позволяет корректно построить модель системы аномальных точечных масс, имеющую как гравиметрическое, так и геофизическое назначения при интерпретации астрономо-геодезических и гравиметрических данных и их пространств-временных изменений.

4.33. УРАВНЕНИЯ ГРАВИИНЕРЦИАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

При наличии на подвижном объекте измерителей ускорения (ньютонетров) и угловых скоростей (гиротахометров), а также бортовых компьютеров, зная координаты и ориентацию объекта на начальный момент движения в поле тяготения Земли, не прибегая к наблюдениям других объектов, можно определять местоположение и ориентацию объекта на каждый момент времени путем непрерывного интегрирования совокупности дифференциальных уравнений его движения. Показания акселерометров (ньютонетров) и гиротахометров как инерциальные измерения входят в дифференциальные уравнения движения объекта в поле тяготения Земли. Применение гравиинерциальных измерений для определения геодезических координат и ориентации подвижного объекта и параметров геогравитационного поля составляет основное содержание геодезической инерциальной навигации.

Системами отсчета служат пространственные геоцентрическая экваториальная XYZ и топоцентрическая горизонтная $X'Y'Z'$ геодезические системы координат, а также инерциальная звездная система координат xuz , относительно которой определяются параметры вращения Земли. Введем координатную систему измерительной платформы объекта: ось ζ' совпадает с осью Z' , ось ξ' ориентирована относительно оси X' по азимуту γ , ось η' дополняет систему до правой. Пусть плоскости горизонта и меридиана подвижного объекта Q определяются соответственно геоцентрической широтой Φ и геоцентрической долготой λ относительно системы отсчета XYZ . По определению вектор угловой скорости $\underline{\omega}$ имеет направление оси Z' и потому его составляющие по осям пространственных топоцентрических горизонтных координат $\omega_{X'} = \omega \cos \Phi$, $\omega_{Y'} = 0$, $\omega_{Z'} = \omega \sin \Phi$.

Если объект движется по суточной параллели с относительной угловой скоростью, то

$$\omega_{1\lambda} = \omega_{\lambda'1} = (\omega + \dot{\lambda}) \cos \Phi; \quad \omega_{2\lambda} = \omega_{\lambda'2} = 0; \quad \omega_{3\lambda} = \omega_{\lambda'3} = (\omega + \dot{\lambda}) \sin \Phi.$$

В свою очередь, если при неизменной долготе λ изменяется широта Φ , то вектор соответствующей угловой скорости направлен параллельно оси Y' на запад и равен по модулю производной $\dot{\Phi} = d\Phi/dt$.

Таким образом, вектор угловой скорости U объекта Q ($\Phi + \Delta\Phi$, $\lambda + \Delta\lambda$) относительно инерциальной системы отсчета имеет составляющие

$$u_1 = (\omega + \dot{\lambda}) \cos \Phi; \quad u_2 = -\dot{\Phi}; \quad u_3 = (\omega + \dot{\lambda}) \sin \Phi \quad (599)$$

по трем осям топоцентрических горизонтных координат.

Система координат платформы $\xi'\eta'\zeta'$ относительно системы отсчета XYZ (по определению оси ζ' и Z' совпадают) вращается с угловой скоростью $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$, причем вектор этой угловой скорости (при $\dot{\gamma} > 0$) направлен антипараллельно оси ζ' . Поэтому для проекций $a_{\xi}(t)$, $a_{\eta}(t)$, $a_{\zeta}(t)$ угловой скорости измерительной платформы Q (рис. 26) и уравнениям (599) с учетом $\Delta a_{\zeta} = -\dot{\gamma}$, получаем следующие формулы

$$\begin{aligned} a_{\xi}(t) &= (\omega + \dot{\lambda}) \cos \Phi \cos \gamma - \dot{\Phi} \sin \gamma \\ a_{\eta}(t) &= -(\omega + \dot{\lambda}) \cos \Phi \sin \gamma - \dot{\Phi} \cos \gamma \\ a_{\zeta}(t) &= (\omega + \dot{\lambda}) \sin \Phi - \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (600)$$

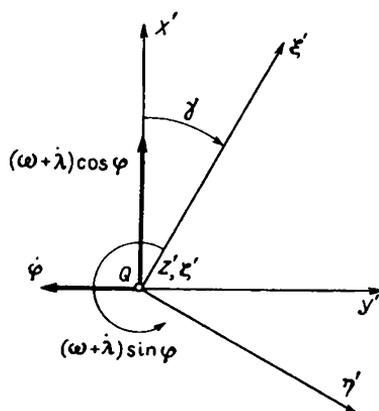
При наличии на движущейся платформе измерителей негравитационных ускорений a_{ξ} , a_{η} , a_{ζ} равенства (600) следует рассматривать как совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций времени $\Phi = \Phi(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ при заданных значениях $a_{\xi}(t)$, $a_{\eta}(t)$, $a_{\zeta}(t)$.

Если заданы местоположение и ориентация измерительной платформы в начальный момент времени t_0 , т. е. заданы начальные условия $\Phi_0 = \Phi(t_0)$, $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$, то на движущемся объекте путем непрерывного интегрирования дифференциальных уравнений на бортовом компьютере можно определять счислимые значения Φ , λ , γ , характеризующие местоположение его измерительной платформы в данный момент времени.

Уравнения (600) представляют собой исходные дифференциальные уравнения гравеоинерциальных измерений для частного случая движения на поверхности шара.

Таким образом, инерциальный метод определения параметров движения объекта состоит в определении первичных параметров движения объекта, построении уравнения движения, связывающего определяемые величины с измеряемыми, и в непрерывном интегрировании уравнений движения на бортовом компьютере в реальном масштабе времени. Дифференциальные уравнения (600) выражают движение центра масс объекта относительно исходной инерциальной отсчетной системы координат. Инерциальная навигация получила такое название по той при-

Рис. 26. Кинематическая схема гравиинерциальных измерений



чине, что исходной отсчетной системой является инерциальная система координат.

Здесь дана упрощенная модель гравиинерциальных измерений на движущемся объекте по шаровой поверхности. Геодезическая топоцентрическая горизонтная система координат ориентируется геодезической широтой B и геодезической долготой L , а измерительная система координат $\xi'\zeta'\eta'$ — широтой Φ , долготой λ и азимутом γ физической системы отсчета. Геодезические и астрономические координаты и азимуты связаны составляющими уклонения отвеса

$$\varphi - B = \xi, \quad \lambda - L = \eta \sec \varphi, \quad \gamma - A = \eta \operatorname{tg} \varphi.$$

Таким образом, в уравнения движения в общем случае входят составляющие уклонения отвеса, представляющие нецентральность гравитационного поля Земли.

Геоцентрическая Φ и геодезическая B широты различаются на малую величину, но этой разницей в уравнениях (600) нельзя пренебрегать. Разность $B - \Phi = \Delta\Phi$ является функцией B , геодезической высоты H и параметров a, α отсчетного эллипсоида. Однако при вычислении $\Delta\Phi$ высоту H необходимо знать приближенно. Кроме этого, ось ζ' измерительной системы координат не удастся точно совместить с отвесной линией и она прецессирует относительно отвесной линии, на углы α, β в плоскостях, проходящих через центр масс измерительной платформы.

Для редукции гравиинерциальных измерений потребуется знать распределение нормального ускорения силы тяжести $\gamma(a, \alpha, \gamma_e, B, H)$, а для ослабления накапливающегося влияния погрешностей интегрирования необходимо иметь аномалии силы тяжести и ее градиенты. Поэтому в состав измеряемых величин включаются сила тяжести и ее градиенты.

Для определения пространственных координат измерительной платформы на каждый момент движения необходимо определять ее высоту над уровенной поверхностью. Для перехода к геодезической высоте по-

требуется знать аномалию высот, которая характеризуется гравитационным полем Земли.

В целях сохранения общности, пользуясь теориями, изложенными выше, рассмотрим уравнения движения измерительной платформы в произвольном пространстве. С этой целью исследуем кинематику трех векторов \mathbf{R}_Q , \mathbf{R}_\oplus , \mathbf{R} (рис. 27), соединяющих начало отсчета O инерциальной системы координат, центру масс \oplus , Q Земли и измерительной платформы. Имеем

$$\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}_\oplus + \mathbf{R}. \quad (601)$$

Если приложена внешняя сила к платформе Q , придающая ей негравитационное ускорение \mathbf{a} , то на основании (601) имеем

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} + \ddot{\mathbf{R}}_Q - \ddot{\mathbf{R}}_\oplus. \quad (602)$$

Из-за большой удаленности начала отсчета O от центра масс Земли разность $\ddot{\mathbf{R}}_Q - \ddot{\mathbf{R}}_\oplus$ с высокой точностью можно заменить вектором силы тяжести \mathbf{g} . При этом допускаемая погрешность для точек земной поверхности может приводить к погрешности оценки уклонения отвеса менее $0,008''$, а для точки на борту околоземного ИСЗ — соответственно $0,01''$. Поэтому вместо (602) будем пользоваться векторным уравнением

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} + \mathbf{g}, \quad (603)$$

выражающим связь ускорений $\ddot{\mathbf{R}}$, \mathbf{a} и \mathbf{g} в геоцентрической звездной системе координат, которая практически реализует инерциальную систему отсчета.

Для перехода в неинерциальную геоцентрическую экваториальную геодезическую систему координат XYZ , которая вращается с угловой скоростью $\underline{\omega}$ относительно инерциальной звездной системы координат, воспользуемся леммой о производной вектора в двух системах отсчета:

$$\dot{\mathbf{V}}_* = \dot{\mathbf{V}} + 2(\underline{\omega} \times \mathbf{V}_*), \quad (604)$$

где \mathbf{V}_* — вектор абсолютной скорости; $\underline{\omega}$ — вектор угловой скорости; $\dot{\mathbf{V}}$ — производная вектора \mathbf{V} в неинерциальной вращающейся системе отсчета координат

С учетом (603) и (604) имеем

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{a} - 2(\underline{\omega} \times \mathbf{V}_*) + \mathbf{g}. \quad (605)$$

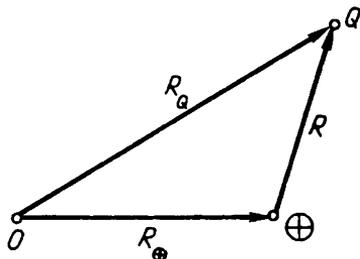


Рис. 27. Геометрия трех векторов в инерциальной системе отсчета

Дважды проинтегрируем (605) и получим

$$\mathbf{V} - \mathbf{V}_0 = \int_{t_0}^t [\mathbf{a} - 2(\underline{\omega} \times \mathbf{V}_*) + \mathbf{g}] dt, \quad (606)$$

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{V} dt,$$

где \mathbf{R}_0 , \mathbf{V}_0 — векторы \mathbf{R} и \mathbf{V} в начальный момент t_0 ; $\underline{\omega}$, \mathbf{a} — абсолютная угловая скорость и акселерометрический вектор измерительной платформы; \mathbf{g} — вектор силы тяжести.

Вектор силы тяжести \mathbf{g} направлен по отвесной линии в отрицательном направлении оси Z' . Его составляющие на оси топоцентрической горизонтальной геодезической системы координат:

$$g_{X'} = -\xi g; \quad g_{Y'} = -\eta g; \quad g_{Z'} = -g \cos \vartheta; \quad (607)$$

$$\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

В топоцентрическую экваториальную геодезическую систему составляющие вектора \mathbf{g} (607) будут преобразованы так

$$\begin{bmatrix} g_X \\ g_Y \\ g_Z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} g_{X'} \\ g_{Y'} \\ g_{Z'} \end{bmatrix}, \quad (608)$$

где матрица A есть функция геодезической широты B_Q и геодезической долготы L_Q центра масс измерительной платформы, а ее элементы вычисляются по формулам (33).

Составляющие векторы \mathbf{a} и $\underline{\omega}$ задаются в измерительной топоцентрической системе координат, оси ξ' , η' , ζ' которой относительно соответствующих им осей X' , Y' , Z' топоцентрической горизонтальной системы задаются углами прецессии α , β и чистого вращения γ (рис. 28). Переход от осей ξ' , η' , ζ' к осям X' , Y' , Z' выполняется с помощью матрицы $P'(\beta, \alpha, \gamma)$, которая получается в результате умножения трех матриц

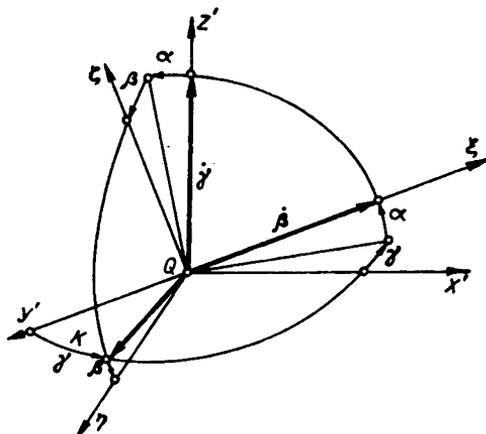


Рис. 28. Углы прецессии и чистого вращения

вращения R_β , P_α , P_γ и транспонирования результирующей матрицы $P = P_\beta P_\alpha P_\gamma$. Элементы матрицы $P(\beta, \alpha, \gamma)$:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \cos \gamma \cos \alpha; & p_{12} &= -\sin \gamma \cos \alpha; & p_{13} &= \sin \alpha; \\ p_{21} &= \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \sin \alpha; & p_{22} &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha; \\ p_{23} &= -\sin \beta \cos \alpha; \\ p_{31} &= \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha; & p_{32} &= \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma \sin \alpha; \\ p_{33} &= \cos \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Составляющие векторов \mathbf{a} и $\boldsymbol{\omega}$ по осям ξ', η', ζ' проектируем на оси X', Y', Z'

$$\begin{bmatrix} a_{X'} \\ a_{Y'} \\ a_{Z'} \end{bmatrix} = P' \begin{bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \omega_{X'} \\ \omega_{Y'} \\ \omega_{Z'} \end{bmatrix} = P' \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}. \quad (610)$$

Затем с помощью упомянутой ранее матрицы A редуцируем в экваториальную систему координат

$$\begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} = AP' \begin{bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = AP' \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}. \quad (611)$$

Угловые скорости $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ введенных ранее углов, как это показано на рис. 28, направлены соответственно по оси Z' , линии QK к оси ξ' . Найдем составляющие угловой скорости по осям измерительной системы координат

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\beta} + \dot{\gamma} \sin \alpha; \\ \omega_\eta &= \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta; \\ \omega_\zeta &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (612)$$

Выражения (609) и (612) являются аналогами формул (229) и (233), выведенных ранее при исследованиях собственного движения земных полюсов.

Левые части уравнений (612) являются известными функциями времени, измеряемыми гиротаксметрами. Поэтому систему (612) можно рассматривать как совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно трех переменных углов γ , α , β . Определение этих углов сводится к интегрированию уравнений Риккати с помощью квадратур (*Лурье А. И.* Аналитическая механика — М.: Физматгиз, 1961, с. 130). При интегрировании дифференциальных уравнений (612) необходимо задавать значения углов $\gamma = \gamma_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ на начальный момент $t = t_0$. С помощью бортового компьютера, подбирая допустимую дискретность Δt , можно выполнить численное интегрирование дифференциальных уравнений (612) в темпе движения объекта.

Таким образом, интегрируя 9 дифференциальных уравнений (606) и (612) определяем текущие координаты, составляющие скорости подвижного объекта в пространственной геоцентрической экваториальной системе координат XYZ и ориентацию измерительной системы координат

относительно подвижной топоцентрической горизонтной геодезической системы координат.

Отметим, что инерциальное определение высоты является некорректной задачей и дифференциальные уравнения (606) имеют устойчивое решение только тогда, когда высота измерительной платформы над уровнем моря не изменяется или она измеряется неинерциальным методом. Следовательно высота подвижного объекта, как правило, относится к измеряемым параметрам.

Внешними параметрами являются также сила тяжести и составляющие уклонения отвеса ξ , η в каждый дискретный момент численного интегрирования уравнений (606) бортовым компьютером. Внешние параметры $g_X = -\xi g$, $g_Y = -\eta g$, $g_Z = -g \cos \theta$, как функции g , ξ , η , можно определить из вариометрических наблюдений путем их обработки на бортовом компьютере на основе теорий, рассмотренных выше.

Когда не требуется высокая точность интегрирования уравнений движения объекта (606), тогда составляющие вектора ускорения силы тяжести могут быть вычислены по региональной модели гравитационного поля Земли или по нормальным значениям силы тяжести.

В районах аномального гравитационного поля требуется плотная сеть исходных астрономо-геодезических пунктов и точек вариометрии для уменьшения ошибок интегрирования (606), обусловленных нелинейными изменениями силы тяжести и ее градиентов, а также методическими погрешностями численного метода интегрирования. В прецизионной инерциальной навигации потребуется знание строения литосферы для предвычисления вторых производных гравитационного потенциала с целью точной аппроксимации составляющих вектора силы тяжести по трем осям топоцентрической горизонтной геодезической системы координат.

Приборные и методические ошибки измерений акселерометром и гиротахометром существенно влияют на точность вывода навигационных параметров R , V , γ , α , β подвижного объекта из интегрирования уравнений (606) и (612). Для уяснения порядка величины влияния ошибок инерциальных измерений возьмем выражение (603) и найдем ошибки функций

$$m_{\dot{k}}^2 = m_a^2 + m_g^2. \quad (613)$$

Для приближенных расчетов примем $g = fM/R$, $m_g = 2gm_R/R$. При значениях $R = 6,4 \cdot 10^3$ км, $g = 10^3$ гал, $m_R = 0,001$ км имеем $m_g = 3 \cdot 10^{-4}$ гал, которую можно отбросить. Таким образом, основную погрешность, влияющую на точность оценки навигационных параметров, вносит акселерометр.

Влияние погрешности измерений m_ω гиротахометром на точность вывода навигационных параметров имеет такой же порядок, что и влияние погрешности измерения m_a акселерометром.

Рассматривая уравнения (606) — (612), видим, что методические ошибки m_a также зависят от ошибок m_ω . Следовательно полная ошибки без учета погрешности силы тяжести будет

$$m_{\mathbf{k}}^2 = m_{\mathbf{a}}^2 + (K_{\omega\omega} + E)m_{\omega}^2, \quad (614)$$

где $K_{\omega\omega}$ — корреляционная матрица, E — единичная матрица.

Ошибки оценивания навигационных параметров \mathbf{R} , \mathbf{V} , γ , α , β , обусловленные влиянием ошибок инерциальных измерений, растут быстро и поэтому требуется частое эталонирование инерциальной навигационной системы на пунктах, имеющих полный набор исходных астрономо-геодезических и гравиметрических данных.

В районе эталонирования прецизионной геодезической инерциальной навигационной системы кроме дискретно заданных исходных астрономо-геодезических и гравиметрических данных на астрономо-геодезических пунктах необходимо иметь плотную сеть гравивариометрических точек, цифровой банк рельефа и модели внутреннего строения верхней литосферы с целью пространственной аппроксимации составляющих силы тяжести и вторых производных гравитационного потенциала с ошибками, пренебрегаемо малыми по сравнению с ошибками ньютонометров и гиротаксометров.

При редукции астрономо-геодезических, гравиметрических, вариометрических и гравиинерциальных данных на эпоху эталонирования прецизионной навигационной системы требуется строгий учет приливных и неприливных деформаций земной коры и геоида, неравномерности вращения Земли, движения земных полюсов, вековых и периодических изменений гравитационного поля Земли. При этом необходимо использовать согласованные значения астрономических, геодезических и геофизических постоянных Земли, установленных на эпоху. Таким образом гравиинерциальная навигация как метод новой геонинерциальной технологии в астрономо-геодезии требует комплексного решения геодинамических задач на стыке астрономии, геодезии и геофизики.

5. ПЛАНЕТАРНЫЕ И РЕГИОНАЛЬНЫЕ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

5.1. ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ СОВРЕМЕННОЙ ГЕОДЕЗИИ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ НАУКАМИ О ЗЕМЛЕ

В эру новых технологий все более возрастает интерес к планетарным научным и научно-прикладным задачам геодезии. Впервые возникает возможность ставить эксперименты и выполнять высокоточные работы в планетарном масштабе, проводить обширные астрономо-геодезические и гравиметрические измерения, надежно определять фигуру и внешнее гравитационное поле Земли на каждую эпоху. Появилась практическая необходимость в создании планетарной геоцентрической геодезической системы координат, распространяемой на всю поверхность Земли, в построении математической модели земного притяжения, адекватной внешнему гравитационному полю Земли, в определении пространственного положению естественных и искусственных космиче-

ских объектов на любой момент времени и с высокой точностью. Резко возросли требования практики к системе геодезических координат, фиксируемой пунктами астрономо-геодезической сети (АГС), к параметрам фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Объектом изучения в будущем должны стать собственные движения каждого пункта АГС, изменения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли во времени. Необходимо создать систему геодезических координат на каждую эпоху, что требуется для решения повседневных практических задач не только самой геодезии, но и других наук, основных отраслей техники и новых технологий.

Темпы научно-технического прогресса и развития новых технологий в большой степени зависят от уровня знаний о континентах, Мировом океане и космосе. Поэтому геодезия стала планетарной и физической во всех областях своего приложения. При этом она представляет твердую, водную и воздушную оболочки Земли и космос как единую динамическую систему, параметры которой непрерывно изменяются. В настоящее время объектом изучения геодезии стала вся твердая оболочка Земли — поверхность суши, дна морей и Мирового океана. В интересах геофизики, геологии, океанологии и навигации (наземной, морской, воздушной и космической) детально изучается геод в планетарном и региональном масштабах на каждую эпоху. Геодезия исследует и местные геоиды, например Скандинавии, Балтики, Каспийской низменности, Северного моря, Средиземноморья, Тихого океана и др.

Геодезия изучает геодинамические явления, связанные с планетарной эволюцией Земли. Движение литосферных плит и земной коры, перемещения центра масс и оси вращения в теле Земли, изменение береговых линий и уровней морей и океанов, неравномерность вращения, изменения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли во времени изучаются как сложные взаимосвязанные явления, обусловленные изменением внутреннего строения Земли, лунно-солнечными приливными деформациями и собственным вращением Земли относительно своего центра масс.

Рассмотрим основные черты современной геодезии и направления ее развития.

Главные предметы геодезии — системы отсчета координат, гравитации и времени, дневную поверхность Земли, рельеф дна морей и океанов, планетарный геод и параметры внешнего гравитационного поля Земли, параметры редукции наземных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений, наблюдений ИСЗ и других космических объектов в единую систему отсчета координат, гравитации и времени — необходимо определять на каждую эпоху с учетом сложной динамики макросистемы «твердая, водная и воздушная оболочки Земли и космос», привлекая данные астрономии, геодезии, геофизики, геологии, океанологии, геодинамики, структурной геоморфологии и геотектоники. Геодинамические аспекты в геодезии при разработке программ наземных и спутниковых астрономо-геодезических и гравиметрических работ становятся определяющим фактором. Проблема создания планетарной

геоцентрической геодезической системы координат (ПГГСК) и определения физической, гравитационной и динамической фигуры Земли на каждую эпоху становится главной научно-технической задачей геодезии. Возрастающие требования к исходным астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным ставят задачу учета неизотропности пространства Земли, Луны и других планет. Теоретическую задачу геодезии надо формулировать и решать таким образом, чтобы ПГГСК соответствовала бы планетарная геоцентрическая гравитационная модель (ПГГМ), адекватная реальному внешнему гравитационному полю Земли той эпохи, на которую установлена система отсчета ПГГСК. Проблема построения единой системы отсчета ПГГСК и ПГГМ выдвигается на передний план как фундаментальная теоретическая и практическая задача геодезии.

Динамика Земли, изменения ее фигуры и гравитационного поля во времени являются основным предметом, изучаемым в современной геодезии. Методология этого предмета определяется глобальной динамикой Земли и своеобразным распределением масс на ее поверхности, в земной коре и астеносфере.

Самая характерная черта образа Земли — это планетарная асимметрия материков и океанов. На Южном полюсе расположен самый высокий континент — Антарктида, тогда как на Северном полюсе простирается Северный Ледовитый Океан; при этом площадь Антарктиды почти равна площади Северного Ледовитого океана. Впадине Тихого океана отвечает материковый рельеф Африки. Южным океанам, омывающим берега Антарктиды, асимметрию создают материки северного полушария, опоясывающие Арктику. Меридианную асимметрию Земли порождает Тихий океан, водами которого покрыто 35 % поверхности Земли в северном и южном полушариях. Имеется статистика распределения суши и океана, по которой в 95 случаях из 100 поверхности суши диаметрально противоположно соответствует океан. В целом материковому северному полушарию противопоставлено океаническое южное, океаническому западному — материковое восточное. Рельеф Земли асимметричен как по отношению к плоскости экватора, так и к плоскости меридиана 105° восточной долготы. В плоскости этого же меридиана определено направление векового движения земных полюсов.

Однако облик Земли в главных чертах определяет Мировой океан, покрывающий 70,8 % всей ее поверхности. На долю Мирового океана приходится около 97 % всей гидросферы. В целом планетарный рельеф определяется рельефом дна Мирового океана, который характеризуется глобальной системой срединных океанических хребтов, разломами, глубоководными желобами, котловинами. Срединные океанические хребты представляют собой единую цепь линейных поднятий общей протяженностью 60 тыс. км и покрывают 15,3 % площади дна Мирового океана. Это наиболее значительные горные сооружения не только океанического дна, но и планеты в целом. Их относительная высота на некоторых участках достигает 3—4 км, ширина — 1000—2000 км.

Планетарные асимметрии суши и океана, рельефа Земли, гидросфе-

ра и атмосфера, находящиеся в постоянном движении, обуславливают сложную динамику фигуры планеты под влиянием деформационных сил из-за собственного вращения Земли и переменного гравитационного поля в космической системе Солнца—Земля—Луна. На динамику фигуры Земли влияют и ледники, покрывающие площадь более 16 млн км². Площадь подземного оледенения в два раза больше.

Современные астрономо-геодезические измерения, выполняемые по специальным программам в планетарном и региональном масштабах и обрабатываемые строгими математическими методами, дают надежные оценки движения земной коры и литосферных плит. Геодезическими измерениями вдоль систем разломов, главный из которых Сан-Андреас в Калифорнии, установлено, что скорость смещения Американской литосферной плиты относительно Тихоокеанской близка к 4 см/год. Из обработки лазерных и радиоинтерферометрических наблюдений небесных объектов установлено, что скорость сближения Тихоокеанской литосферной плиты с Евразией составляет 7 см/год, а скорость раздвижения Североамериканской и Евразийской плит близка к 10 см/год. На Гармском полигоне в Таджикистане выявлен надвиг Памира на Тянь-Шань со скоростью 1,7 см/год. В пределах Альпийско-Гималайского горного пояса скорость сжатия увеличивается с запада на восток: в районе Гибралтара от 1,5 до 2 см/год и в районе Гималаев до 5,6—6 см/год. Имеются данные, что озеро Байкал разрастается в ширину со скоростью 1 см/год, острова Японии приближаются к матерiku со скоростью 1 см/год.

Периодически возобновляемые точные нивелировки обнаруживают вертикальные движения земной коры. По трассе городов Ачинск—Владивосток в период с 1901 по 1971 г. по данным трех циклов точного нивелирования открыто следующее явление: в 1901—1943 гг. преобладали нисходящие вертикальные движения со скоростью — 50 мм/год и амплитудой — 90 см; в 1943—1971 гг. они составляли +13 мм/год и +35 см, соответственно.

Участок берега Байкала от станции Маритуй до реки Выдрина за два года поднялся на 20 см, а за то же время участок береговой полосы от Выдриной до Мысовой опустился от 0,5 до 19 см.

Установлено, что эти колебательные движения земной коры тесно коррелированы с динамикой Байкальской рифтовой зоны.

Скорость погружения Тихоокеанской литосферы вдоль Курило-Камчатского желоба изменяется от 7,5 см/год на севере до 8,5 см/год на юге. Побережья арктических морей в Якутии испытывают колебательные движения с амплитудой 10—12 см и периодом около 20 лет.

Зарегистрированы максимальные вертикальные движения земной коры 10 см/год в районе Алма-Аты. Повторным нивелированием на Алма-Атинском геодинамическом полигоне обнаружены поднятия 2—5 см/год тектонического блока в зоне Предгорного разлома. В центральной части Кызылкумов выявлены участки, имеющие вертикальные движения 1,5—2,0 см/год и более. В Речицком районе Белоруссии поднятие земной поверхности составляет 0,6—0,8 см/год.

По интенсивности на Земле происходит 400—1000 семи- и восьмибалльных и 10—15 девятибалльных землетрясений, которые сопровождаются горизонтальными и вертикальными движениями земной коры. Так например, Чилийское землетрясение 1907 г. вызвало поднятие почти на 1 м чилийского побережья на участке протяженностью 300 км. В эпицентральной зоне Ашхабадского землетрясения 1948 г. горизонтальные смещения достигли 2 м. В районе Газли в Средней Азии в эпицентральной зоне землетрясения 1976 г. относительное поднятие земной коры составило 0,8 м.

Исследования современных движения земной коры показали, что техногенные процессы создают своеобразные движения, изменяющие направления и интенсивность естественных движений земной коры. Для изучения вертикальных движений земной коры на Апшеронском полуострове в 1910—1912 гг. была создана нивелирная сеть. В настоящее время на Апшероне длина линии нивелирования I и II классов превышает 500 км. Многолетние наблюдения на Апшеронских нефтепромыслах показали, что наибольшие скорости опускания земной коры достигают 3—5 см/год. За 1912—1972 гг. общее опускание земной поверхности составило 2,4 м.

Земная поверхность оседает при откачке подземных вод. Отдельные районы Токио за последние 50 лет осели на 4 м, Мехико за последние 90 лет — до 8,5 м. Оседание Ниагата в Японии в отдельные годы составляло 50 см/год. Лондонский Гайд-парк за 100 лет опустился на 2 м. Под Москвой увеличивает свои размеры чаша оседания земной коры по мере застройки города многоэтажными зданиями и строительства метрополитена. В разных частях Калифорнии откачка подземных вод в течение 25—30 лет привела к оседанию земной коры на 2,7—4,5 м. В гавани Лонг-Бич, вблизи Лос-Анжелеса, опускание земной коры достигло 8 м, а горизонтальное смещение — 3,7 м. Земная кора прогибается под искусственными морями. Значительные движения земной поверхности отмечаются в районах добычи полезных ископаемых закрытым или открытым способами.

Динамика Земли проявляется в движениях земного полюса и неравномерностях ее вращения. Изменение положения оси вращения Земли в пространстве очень велико. Это изменение имеет вековую составляющую — прецессию, открытую Гиппархом во II в. до н. э. и получившую теоретическое толкование после открытия И. Ньютоном закона всемирного тяготения. И. Ньютон в своих «Математических принципах натуральной философии» (1687 г.) дал динамическое объяснение явлению прецессии и оценил составляющую прецессии, обусловленную лунно-солнечным притяжением эллипсоидальной Земли. Полагая полярное сжатие Земли равным $1/230$, И. Ньютон получил лунно-солнечную прецессию, равную $68''$ в год. Как позднее замечал П. С. Лаплас, для полярного сжатия на величину $1/300$ формулы Ньютона дают прецессию, равную $53,6''$, что в пределах точности расчетов совпадает с ее действительной величиной $50,3''$.

В 1727 г. Дж. Брайдлей, наблюдая звезду γ созвездия Дракона,

заметил дополнительные к абберационным изменения ее координат. Подобные же изменения координат он обнаружил и у других звезд. Дж. Брайль в 1748 г. правильно объяснил это явление как следствие нутационного движения земной оси с периодом 18,6 лет, который точно совпадает с периодом движения лунных узлов. Нутация земной оси обусловлена периодическим изменением взаимного положения лунной и земной орбит. Ж. Даламбер в 1749 г. разработал динамическую теорию нутации. Открытие явления нутации стимулировало развитие динамики твердого тела. В 1765 г. Л. Эйлер разработал теорию движения абсолютно твердого тела около неподвижной точки. Допуская отсутствие действия внешних сил, он показал, что мгновенная ось должна описывать конус около главной оси инерции, относительно которой Земля имеет максимальный момент инерции. Если принять за эллипсоид инерции эллипсоид вращения, то уравнения твердого тела будут иметь вид .

$$A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z = 0;$$

$$A\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_x\omega_z = 0;$$

$$C\dot{\omega}_z = 0.$$

Из третьего уравнения вытекает, что угловая скорость относительно полярной оси инерции постоянна, т. е. $\omega_z = \omega_0$. Введя обозначение $H_0 = (C - A)A^{-1}$, запишем первые две строки исходной системы в виде

$$\dot{\omega}_x + H_0\omega_0\omega_y = 0;$$

$$\dot{\omega}_y - H_0\omega_0\omega_x = 0.$$

Решая эти два уравнения, определяем интегралы

$$\omega_x = c_1 \cos(H_0\omega_0 t + c_2);$$

$$\omega_y = c_1 \sin(H_0\omega_0 t + c_2).$$

Поделив члены уравнений на ω_0 , получим координаты мгновенного полюса относительно полярной оси инерции в момент t

$$x = \omega_0^{-1} c_1 \cos(H_0\omega_0 t + c_2);$$

$$y = \omega_0^{-1} c_1 \sin(H_0\omega_0 t + c_2).$$

Из последних уравнений видно, что мгновенный полюс Земли движется по окружности около полюса инерции и описывает полную окружность за период $T = H_0^{-1}$. Этот период, равный 305 звездным суткам, получил название периода Эйлера.

Для экспериментального подтверждения теории Эйлера астроном Х. И. Петерс в 1842—1843 гг. выполнил наблюдения широт и определил угол между осью вращения и полярной осью инерции Земли, оцененный им в $0,08''$. Из наблюдений Х. И. Петерса и своих астроном М. О. Нюрен вычислил средние значения широты Пулкова для разных эпох: $\varphi_{1843 \text{ г.}} = 59^\circ 46' 18,727''$, $\varphi_{1866 \text{ г.}} = 59^\circ 46' 18,654''$, $\varphi_{1872-1875 \text{ гг.}} = 59^\circ 46' 18,501''$.

Реальность движения полюсов была доказана также наблюдениями в Берлине, начатыми в 1884 г. Незначительные расхождения в значе-

ниях широт были получены для Гринвича, Вашингтона, Парижа, Рима и Неаполя. Анализируя эти результаты, астрономы заметили вековое изменение и периодические колебания широты с периодом, близким к годовому.

Международная геодезическая ассоциация организовала специальные наблюдения в ряде обсерваторий. Эти наблюдения подтвердили реальность движения полюсов в теле Земли и показали, что это движение отличается от движения, предсказанного эйлеровской теорией вращения абсолютно твердого тела вокруг центра масс. В 1892 г. С. Чандлер, обработав длинные ряды наблюдений широт, получил эмпирическую формулу

$$\varphi - \varphi_0 = r_1 \cos[(t - T_1)\theta] - r_2 \cos(L_0 - L_2).$$

Первый член в правой части формулы Чандлера имеет период 430,7 сут., а второй член — годовой период; L_0 — долгота Солнца; L_2 — долгота Солнца на эпоху T_2 , когда второй член достигает отрицательного минимума. Чандлер установил, что амплитуда r_1 постоянная, а амплитуда r_2 изменяется с течением времени. Четырнадцатимесячный период движения полюса, открытый С. Чандлером, получил название периода Чандлера. Возникла необходимость пересмотра исходного допущения об абсолютной твердости Земли. Вместе с тем у ученых оказался хороший критерий для оценки правомерности других гипотез о механических свойствах Земли: теоретическое значение периода движения полюсов должно равняться 14 мес. С. Ньюком в 1895 г., рассмотрев влияние упругих деформаций Земли на ее вращение, доказал, что эти деформации действительно увеличивают период движения полюсов и объяснил четырнадцатимесячный период эффектами упругости Земли.

В 1893 г. вышла в свет монография С. К. Костинского «Об изменении астрономических широт», в которой обсуждались все работы, обещающие проблему изменения широт, изданные к этому времени. С. К. Костинский ввел понятие среднего полюса, фиксируемого средними значениями широт всех обсерваторий. Он показал возможность определения полюса на любую эпоху относительно среднего полюса по наблюдениям двух станций, расположенных на одной широте, и удаленных друг от друга на 90° по долготе.

Наблюдения широт на различных обсерваториях показали, что движение полюсов относится к тем планетарным явлениям, ход которых не удается предсказать с точностью, необходимой для теории и практики. Поэтому для детального изучения движения полюсов были организованы специальные широтные станции, ведущие наблюдения широты с осени 1889 г.

В 1895 г. на II Международной геодезической конференции в Берлине было высказано положение об организации Международной службы широт (МСШ) для систематического изучения движения полюсов.

Подразумевалось организовать несколько обсерваторий на одной параллели, равномерно распределенных по долготе и ведущих наблюдения звезд по одинаковой программе. При этом должна соблюдаться

однотипность приборов, павильонов, столбов и др. Такими наблюдениями можно исключить многие систематические ошибки и получить материал для изучения не только периодических, но и вековых движений полюсов. Однако эта идея не была реализована и возможности изучения векового движения полюсов оказались ограниченными.

В 1899 г. в северном полушарии были организованы шесть широтных станций на широте 39,8°:

| | | | |
|--------------------|----------------|------------------|----------------|
| Карлофорте, Италия | — 8,3° в. д. | Гейтерсберг, США | — 77,2° з. д. |
| Чарджоу, Россия | — 63,5° в. д. | Юкайя, США | — 123,4° з. д. |
| Мидзусава, Япония | — 141,2° в. д. | Цинциннати, США | — 84,4° з. д. |

С 1961 г. Международная служба широты называется Международной службой движения полюсов (МСДП). Она объединяет работу пяти широтных станций: Карлофорте, Китаб (СССР), Мидзусава, Гейтерсберг и Юкайя. Для вывода параметров движения полюсов кроме наблюдений международных широтных станций, используются наблюдения 70 других обсерваторий. Главная астрономическая обсерватория АН УССР по результатам всех систематических наблюдений широт издала «Каталог координат полюса Земли с 1890.0 по 1969.0».

Вопрос о вековом движении полюсов еще в конце XIX в. обсуждался астрономами, обратившими внимание на систематическое уменьшение с течением времени широты в Пулкове, Гринвиче, Париже, Милане, Риме, Неаполе и увеличение широт некоторых американских обсерваторий.

Значительные исследования выполнил А. Я. Орлов, внося определенную ясность в понятие о среднем полюсе. Основные положения А. Я. Орлова об учении движения полюсов сводятся к следующему:

мгновенный полюс есть пересечение мгновенной оси вращения Земли с ее поверхностью; все наблюдения дают широту относительно этого мгновенного полюса;

измеренная широта подвержена вековым и периодическим изменениям; средней широтой в данный момент называется широта, которая была бы в этот момент, если бы не было ее периодических изменений. Таким образом, средним полюсом эпохи называется такое положение полюса, каким оно было бы для этой эпохи, если бы не было в его движении периодической составляющей. Средним положениям полюсов в заданный момент соответствуют и средние широты в этот момент всех точек земной поверхности;

вычислять координаты полюсов нужно по отклонениям мгновенной широты от средней, приведенной на одну и ту же эпоху. Если предположить, что средний полюс неподвижен, то вычисленные таким образом координаты полюсов относятся всегда к одному и тому же среднему полюсу;

наблюдения широты на станциях МСШ не дают надежного материала для суждения о вековом движении полюсов. Для этого нужна специальная организация наблюдений. Если в будущем будет обнаружено

и надежно определено вековое движение полюсов, то все вычисления широт можно легко привести к одной эпохе.

Для изучения векового движения полюсов А. Я. Орлов обработал наблюдения широт за 51 год на станциях МСШ: Мидзусава, Карлофорте и Юкайя. Из всех наблюдений (Мидзусава — 79 590, Карлофорте — 94 200, Юкайя — 84 882) были вычислены средние широты. После многих поисков и испытаний разных вариантов обработки А. Я. Орлов нашел простое решение задачи, в результате вековое движение полюсов Земли составило $\sigma = 0,004''$ в год вдоль меридиана 69° з. д.

Вековое движение изучали японские астрономы Т. Хаттари и Н. Секигучи, используя материалы станций Мидзусава, Карлофорте и Юкайя за 1900—1947 гг. Н. Секигучи вычислил средние положения полюсов за каждые 6 лет и принял их за средние положения полюсов для шестилетнего интервала, содержащего шесть годовых и пять чандлеровских периодов. Т. Хаттари и Н. Секигучи, изучая положения средних полюсов, получили результирующее вековое движение полюсов. Их результаты подверг сомнению П. Мельхиор, полагая, что задача о вековом движении полюсов связана с проблемой точных звездных каталогов и в настоящее время неразрешима. По мнению П. Мельхиора, если вековое движение среднего полюса и существует, то оно затушено фиктивным смещением этого полюса, обусловленным частой сменной программ наблюдений на широтных станциях. П. Мельхиор обратил внимание и на то обстоятельство, что цепь средних широт Н. Секигучи имеет точки поворотов в 1906, 1912, 1922 и 1935 г., которые соответствуют эпохам смены программы наблюдений на указанных станциях МСШ. Тем не менее исследования векового движения, исключительно актуальные для современной теории и практики, продолжаютсЯ. А. А. Михайлов в 1971 г., обработав многолетние наблюдения широт, оценил вековое движение полюсов $0,102$ м в год вдоль меридиана 72° з. д. Л. Д. Костина и В. И. Сахаров в 1974 г. из обработки обширных широтных наблюдений определили вековое движение полюсов $0,100$ м в год вдоль меридиана 69° з. д. Ж. С. Ержанов в 1974 г. теоретически показал возможность векового движения земного полюса и получил формулу для вычисления его величины и направления.

Новые возможности в изучении движения полюсов открывают наблюдения с ИСЗ и других космических объектов. Во всех уравнениях движения ИСЗ участвует матрица полюса. Координаты полюса как систематическую составляющую можно отыскивать из лазерных, доплеровских и фотографических наблюдений ИСЗ. Наиболее оперативную и объемную информацию дают доплеровские наблюдения ИСЗ.

Задаваясь геоцентрическими координатами обсерваторий слежения на определенную эпоху и накапливая наблюдения лазерных отражателей Луны, космических летательных аппаратов и радионтерферометрии, можно фиксировать положение мгновенной оси вращения Земли на любую эпоху. Разместив обсерватории определенным образом в северном и южном полушариях и организовав на них наблюдения

по международной программе, можно задачу о полюсе решить наилучшим образом. Значительным будет вклад наблюдений с ИСЗ и других космических объектов в изучении движения полюсов. Совместное определение широт и долгот на станциях Международной службы движения полюсов, наблюдения с ИСЗ и других космических объектов, позволяют решить задачу о полюсе Земли настолько полно, что полученные при этом данные будут удовлетворять самым высоким требованиям фундаментальной астрометрии, геодезии, геофизики и прогнозирования ряда планетарных процессов.

В первую очередь необходимо учесть, что из-за приливообразующей силы Солнца и Луны, тензор инерции Земли меняется периодически. Регулярный процесс всплывания легких масс в теле Земли должен вызывать вековые и долгопериодические изменения тензора инерции.

Земля вращается неравномерно, вызывая изменение продолжительности суток. И хотя колебания продолжительности суток очень малы, но изучение их имеет большое научное и практическое значение. Наблюдаются три вида изменения в величине скорости вращения Земли: вековое замедление, периодические сезонные колебания и нерегулярные скачкообразные изменения. Вековое замедление вращения Земли обусловлено действием приливных сил притяжения Луны и Солнца. В настоящее время считают, что продолжительность суток увеличилась за последние 2000 лет в среднем на 0,0023 с в столетие. Вековое торможение вращения Земли подтверждается данными палеонтологии. Изучение кораллов обнаружило в их строении кольца нарастания — грубые годовые и тонкие (около 50 мкм) суточные. Подсчет этих колец показал, что в девоне 400 млн лет назад в году было 400 дней, т. е. длительность суток была 22 ч. Можно полагать, что замедление вращения Земли происходило приблизительно на 18 с в 1 млн лет, что согласуется с теоретическими данными. Астрометрические данные за 250 лет показывают, что скорость векового замедления составляет 0,0014 с в столетие, которая не согласуется с величиной 0,0023 с, вычисленной по всем наблюдательным данным за последние 2000 лет. По подсчетам Н. Н. Партийского, кроме приливного замедления, имеет место увеличение скорости вращения на 0,001 с в столетие из-за изменения момента инерции Земли.

Периодические годовые и полугодовые колебания скорости вращения Земли объясняются периодическими изменениями момента инерции Земли из-за сезонной динамики атмосферы и планетарного распределения атмосферных осадков. По современным данным продолжительность суток в течение года меняется на $\pm 0,001$ с. Вращение Земли быстрее всего в июле — августе, медленнее в марте. Обычно периодические колебания суток представляют в виде суммы годовой и полугодовой составляющих

$$\Delta T = a \sin(t + \mu_1) + b \sin(2t + \mu_2),$$

параметры которых a , b , μ_1 , μ_2 вычисляют из длительного ряда наблюдений. Амплитуды примерно равны: $a = 0,0005$ с; $b = 0,0003$ с.

Через неравномерные промежутки времени, почти кратные одиннадцати годам, происходят случайные изменения скорости вращения Земли. Абсолютная величина относительного изменения угловой скорости достигала в 1898 г. $3,9 \cdot 10^{-8}$, а в 1920 г. — $4,5 \cdot 10^{-8}$. Характер и периоды случайных колебаний скорости вращения Земли мало изучены. Можно дать только механическое объяснение флуктуациям скорости вращения Земли, по амплитуде превышающей ее столетние приливные изменения. Столь большие и быстро протекающие колебания можно объяснить взаимодействием мантия — ядро и возникновением импульсных моментов, равных примерно $2 \cdot 10^{-7}$ от общего момента движения Земли. Период флуктуации скорости вращения Земли, почти кратный одиннадцати годам, возможно указывает на их связь с солнечной активностью. Объяснение причинной связи этих явлений можно искать, если флуктуации скорости вращения Земли в действительности связаны с солнечной активностью.

Геодинамические явления многообразны и сложны для изучения, они объясняют планетарную эволюцию Земли и связь ее с космическими явлениями. Геодинамика является объектом изучения всех наук о Земле. Для правильного объяснения и прогноза геодинамических явлений необходимо иметь строгую теорию геодинамики и выполнять геодезические и геофизические работы в планетарном, континентальном и региональном масштабах. Развитие учения о геодинамике также обусловлено научным уровнем теории эволюции Земли.

Теория геологической эволюции обогащается новыми идеями о роли подземной гидросферы в образовании и динамике земной коры. С. М. Григорьев в 1971 г. выдвинул гипотезу существования дренажной оболочки в земной коре. По теории С. М. Григорьева водяной раствор, проникая в недра Земли, поступает в слой, температура которого превышает температурный предел существования его в жидком состоянии, и превращается в пар. Последний, поднимаясь, постепенно охлаждается и в верхних слоях земной коры конденсируется. Вода образует растворы и начинает просачиваться вниз, чтобы в недрах земной коры превратиться в пар и вновь начать восходящее движение. Две границы, на которых вода претерпевает превращения, заключают внутри себя дренажную оболочку нашей планеты. Вода в дренажной оболочке присутствует всюду и перемещается не только по вертикали, но и по горизонтали. При этом подземная гидросфера совершает огромную работу. Вниз она несет хорошо растворимые в воде вещества, вверх — летучие вещества.

В 1977 г. С. М. Григорьев и М. Т. Емцев, развивая гипотезу о роли подземной гидросферы в формировании земной коры и рельефа, по-новому объяснили процессы образования материков и Мирового океана, динамику их рельефа, генезис поверхности Мохоровича, дрейф континентов, образование и эволюция срединно-океанических хребтов, местные аномалии и периодическую смену северного и южного геомагнитных полюсов, механизм превращения смываемого с континентов вещества, извержения вулканов и другие вопросы планетарной эволюции

Земли. Планетарный кругооборот подземной гидросферы должен проявиться в долгопериодических и вековых изменениях поля силы тяжести Земли. Изучение вариаций силы тяжести Земли и объяснение их на основе геодинимических теорий являются актуальными задачами наук о Земле.

Гравитационная дифференциация вещества и вековое замедление вращения Земли могут приводить к постепенному уменьшению ее объема и полярного сжатия. Если вековое изменение объема и полярного сжатия имеет место, то они будут открыты с помощью фундаментальных геодезических определений длин и пространственных положений хорд, охватывающих всю планету, и тогда появятся новые возможности в развитии теории эволюции Земли и других планет.

Внутренняя динамика Земли и перемещение масс в ее теле существенным образом отражаются в изменении параметров ПГГСК, фигуры и внешнего гравитационного поля Земли во времени. Из-за временных изменений фигуры Земли и ее гравитационного поля, перемещений центра инерции и оси вращения Земли в ее теле система отсчета ПГГСК, ПГГМ (EG)₁ эпохи T_1 и соответствующие ей фундаментальные геодезические параметры: геоцентрическая гравитационная постоянная, экваториальный радиус, второй зональный гармонический коэффициент потенциала и угловая скорость вращения Земли (E_1) становятся референсными относительно системы отсчета (EFG)₂ новой эпохи T_2 . Определение изменений системы отсчета EFG на каждую эпоху является одной из фундаментальных задач астрономо-геодезии. Эта задача наиболее точно решается путем совместного использования методов наземной и космической геодезии, среди которых самыми эффективными являются: измерения силы тяжести, высот геоида и уклонений отвеса, спутниковая и квазарная радиоинтерферометрия, спутниковая лазерная трилатерация и др.

Земное строение и аномалии масс в земной коре и астеносфере проявляются в закономерностях распределения моментов инерции Земли всех степеней. Всплытие легких масс из-за постоянной гравитационной дифференциации земного вещества должно приводить к постоянному уменьшению всех четных центральных моментов инерции Земли. При этом пространственная неоднородность гравитационной дифференциации будет проявляться в виде изменений во времени и пространстве ориентировки главных осей u_0 , v_0 , w_0 инерции Земли. Так например, вековое движение земных полюсов можно интерпретировать как вековое движение полярной оси w_0 инерции Земли из-за пространственной неоднородности гравитационной дифференциации земного вещества и движения литосферных плит. Изучая полный спектр моментов инерции Земли, можно получить необходимые данные для корректного решения задачи об аномальных плотностях в земной коре и астеносфере. Таким образом, изучение моментов инерции Земли на каждую эпоху установления системы отсчета ПГГСК и ПГГМ (в первую очередь четных моментов инерции, среди которых особо важны для астрономо-геодезии вторые степени моментов инерции, представляющие дан-

ные о параметрах динамической фигуры Земли и закономерностях ее вращения относительно своего центра инерции) является фундаментальной задачей, определяющей одно из перспективных направлений развития астрономо-геодезии.

Переход от измерений метрики Земли и околоземного пространства и ее временного изменения к полной их статистике означает качественный скачок в изучении статики, кинематики и динамики всех потенциальных сил, формирующих и изменяющих во времени фигуру Земли и ее гравитационное поле. Знание строения земной коры, астеносферы, гидросферы, атмосферы, магнитосферы и ионосферы необходимо для точной редукции астрономо-геодезических и гравиметрических измерений в единую систему отсчета координат и гравитации. В свою очередь, высокоточные астрономо-геодезические и гравиметрические измерения, выполняемые в разное время в планетарном и региональном масштабах, позволяют решать геофизические задачи о строении геосфер и дают достоверные данные о геодинاميке земной поверхности и поле гравитации, изменениях потенциальных и непотенциальных сил во времени. Геодезические данные о вековых и долгопериодических изменениях геоида, экваториального и полярного радиусов, перемещения центра инерции и оси вращения, параметров динамической фигуры и моментов инерции Земли позволяют интерпретировать и обосновывать научные гипотезы об эволюции Земли и других планет.

Знания о всех геофизических (гравитационных, магнитных, термических, морфометрических, сейсмических) полях и закономерностях их связей будут расширяться и углубляться, так как потребность в них возрастает во всех областях приложения наук о Земле и других планетах. Наиболее употребительными системами отсчета являются упомянутая выше ПГГСК и пространственная топоцентрическая горизонтальная система координат (ПТГСК). Все измерения в поле силы тяжести Земли сводятся к автономной системе отсчета ПТГСК в точке наблюдения. Для перехода от пространственных координат точки Q_2 в ПГГСК к ее пространственным координатам в ПТГСК и обратно потребуется знание параметров отсчетного эллипсоида в ПГГСК и составляющих ξ_1 , η_1 уклонения отвеса в точке Q_1 , принятой за начало отсчета ПТГСК. Таким образом, определение уклонения отвеса $\theta(\xi, \eta)$ равномерно по всей дневной поверхности Земли и на Мировом океане — необходимый элемент решения проблемы создания и применения различных геодезических систем координат. Поэтому наземные, морские, воздушные и космические методы определения уклонения отвеса во всех геосферах получают самое широкое развитие в астрономо-геодезии конца XX и начала XXI в. На астрономо-геодезических обсерваториях, фиксирующих ПГГСК и участвующих в Международной программе изучения параметров вращения Земли, в районах выполнения прецизионных астрономо-геодезических и гравиметрических работ потребуется определить вековые, долгопериодические, сезонные и нерегулярные изменения уклонения отвеса $\theta(\xi, \eta)$ для изучения временных изменений кривизны геоида и редукции измерений на единую эпоху отсчета координат.

нат и гравитации. Высокоточные астрономические определения широт и долгот получают широкое применение на новом, более высоком витке развития астрономо-геодезии. Точность непосредственного определения уклонений отвеса астрономо-геодезическим методом будет в пределах $0,02—0,30''$. В связи с этим станут развиваться производство прецизионных высокопроизводительных приборов и разработка новых методов непосредственного определения широт и долгот в ПТГСК во всех сферах.

Данные непосредственного определения уклонения отвеса астрономо-геодезическим методом необходимы для развития средств и методов определения уклонений отвеса в наземной астрономо-гравиметрии, инерциальной и космической геодезии, а также для повышения точности этих средств и методов косвенного определения широт и долгот в ПТГСК. Производительность методов наземной астрономо-гравиметрии, инерциальной и космической геодезии выше, чем астрономического метода определения широт и долгот. Поэтому производство средств и разработка косвенных методов определения широт и долгот — одно из перспективных и приоритетных направлений развития новых технологий в астрономо-геодезии.

Система отсчета ПТГСК каждой эпохи должна иметь надежные связи с фундаментальной звездной (ФЗСК) и радиоинтерферометрической квазарной (РКСК) системами координат. Прогресс в использовании новых технологий связан с применением космической геоцентрической геодезической системы координат (КГГСК), которая фиксируется глобальной системой геостационарных и высоких ($h \approx 20$ тыс. км) ИСЗ и будет создаваться с помощью астрометрических, радиоинтерферометрических, лазерных и разностно-дальномерных наблюдений по линиям спутник — спутник — АГО — квазар. Система отсчета КГГСК, стабильная во времени и надежно связанная с системами отсчета ПТГСК, ПТГСК, ФЗСК и РКСК, будет наиболее употребительной для астрономо-геодезии и навигации во всех сферах.

Стирается грань между геодезией и цифровой физической географией. Цифровая физическая география (топография и картография) стала источником оперативной, высокоточной и глобальной геоинформации. Геофизические поля становятся предметом цифровой картографии. В ближайшем будущем информационные банки астрономо-геодезии и цифровой картографии будут создаваться в единой геодезической системе отсчета, и поэтому резко возрастает роль астрономо-геодезических работ по оперативному обеспечению наземных, морских, подводных, воздушных и космических съемок исходными геодезическими данными.

Возрастает роль геодезии в координатно-временном обеспечении работ по экологии, природопользованию, метеорологии, изучению ресурсов Земли, шельфа и Мирового океана, которые будут выполняться по международным и государственным программам.

Цифровой кадастр (наземный подводный и подземный), который будет интенсивно развиваться по мере внедрения новых технологий

в строительной и аграрной индустрии, потребует широкого применения методов наземной и морской геодезии.

Перспективы развития геодезии, как и других наук о Земле, зависят от уровня интеграции знаний в геодезии, астрономии, физической географии, геофизике, геологии, океанологии и геодинамике. Научно-технический прогресс в какой-либо науке о Земле будет способствовать ускоренному развитию других. Ускорение его в науках о Земле на основе их интеграции и гармоничного развития возможно на путях создания Мирового и Государственных центров геономической информации. Комплексные глобальные знания о Земле и околоземном пространстве и объективная их интеграция в эру новых технологий превращают науки о Земле в единую геономическую науку с Мировым центром геономической информации (МЦГИ), который будет создаваться объединенными усилиями всех стран. При этом Государственные центры геономической информации (ГЦГИ) будут развиваться как составные части МЦГИ по международным научно-техническим программам в области геономии. Создание МЦГИ будет способствовать ускоренному развитию новых технологий во всех сферах человеческой деятельности.

В начале нового тысячелетия науки о Земле поднимутся на новую ступень развития не потому, что будут открыты совершенно новые явления, а потому, что на базе МЦГИ и новых информационных технологий эти науки коренным образом изменят свои методы, понятия и способы объяснения фактов. Информационное обеспечение через МЦГИ и ГЦГИ станет основой технологии обучения кадров и воспроизводства новых знаний по астрономо-геодезии и другим наукам о Земле.

Астрономо-геодезия начала нового тысячелетия будет характеризоваться интенсивным развитием новых технологий на основе применения прецизионных, высокопроизводительных и оперативных астрономо-геодезических измерительных средств, новых теорий и эффективных методов систематизации и обработки информации, отражающей глобальные и региональные метрические свойства Земли.

Современные методы изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли с помощью ИСЗ — это начало применения новых технологий в астрономо-геодезии. Квазарная и спутниковая радиоинтерферометрия, автоматизированная астрометрия (наземная, морская, воздушная и космическая), автоматизированные угломерные, лазерные, радиодальномерные, разностно-дальномерные и доплеровские измерения, спутниковые градиентометрия и нивелирование, геодезическая (наземная, морская и воздушная) инерциальная навигация, глобальные спутниковые навигационные и измерительные системы — далеко не полный перечень новых технологий, которые будут интенсивно развиваться в астрономо-геодезии.

Измерительные средства будут разрабатываться по следующим основным направлениям: наземные астрономо-геодезические и гравиметрические автоматизированные приборы, сопряженные с компьютерами; средства инерциальной наземной (морской, воздушной) навигации, автономно и оперативно определяющие координаты, азимуты,

силу тяжести и уклонения отвеса; средства космической геодезии для определения координат и навигационных параметров, градиента силы земного притяжения, уклонения отвеса, параметров фигуры и внешнего гравитационного поля Земли из геодезических наблюдений по линиям обсерватория — космический объект (спутник, естественный космический радиосточник, Луна и другие космические тела), спутник — Земля, спутник — спутник. Прецизионные электронные тахометры, гироскопы и акселерометры, абсолютные измерители и градиентометры силы тяжести, автоматизированные астрометрические и электронные линейные (радиодальномерные, лазерные, доплеровские, разностно-дальномерные) измерительные средства, спутниковые радиовысотометры и радиоинтерферометры, квазарные радиоинтерферометры как измерительные средства, составляющие основную приборную базу новых технологий, получают приоритетное развитие.

В разработке вышеуказанных средств международная кооперация СССР с другими развитыми странами должна быть основной концепцией перспективных планов развития новой технической базы астрономо-геодезии. Новейшие технологии, имеющие планетарное и континентальное распространение и выполняемые в интересах всего мирового сообщества, должны быть малозатратными и природосберегающими для каждой страны. Поэтому международная кооперация в разработке и применении новых технологий будет характеризовать развитие астрономо-геодезии во всех развитых странах мира начала нового тысячелетия.

Астрономо-геодезическая обработка обширной разновременной и разнородной информации, охватывающей различные геосферы и околоземное пространство, требует ее редукции в единую систему отсчета координат, гравитации и времени. Актуальной является разработка теорий, устанавливающих строгие уравнения составляющих вектора измерений (угловых, линейных, силы тяжести и ее градиента, радиоинтерферометрических, орбитальных параметров ИСЗ, навигационных параметров инерциальных систем и др.) в той или иной системе отсчета координат, гравитации и времени, имеющей строгую связь с ПГГСК и ПГГМ заданной эпохи.

Будут развиваться теории и алгоритмы фильтрации систематических ошибок измерений и погрешностей исходных данных, оптимизирующие информативность систем измеренных величин и эффективность оценивания искомых параметров и уравниваемых величин по методу наименьших квадратов. При обработке обширной разнородной информации найдут применение теории градиентов, методы многофакторного дисперсионного и корреляционного анализа. Возрастающая взаимосвязь обширных систем измеренных величин при разнородности их видов и точности выдвигает задачу строгого оценивания их дисперсионных матриц методами вероятностно-статистического анализа.

Разработка теорий и математических моделей оптимизации астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и их математической обработки до вывода оптимизированных оценок искомых параметров

и уравниваемых величин по методу наименьших квадратов будет приоритетным направлением развития теории обработки измерений в астрономо-геодезии.

Дальнейшее повышение точности астрономо-геодезических определений зависит от уровня ослабления влияния внешней среды путем выбора выгодных условий, измерения параметров внешней среды и развития методов учета ее влияния на результаты.

Математические модели в астрономо-геодезии служат для теоретического обоснования, оптимизации проекта, сопровождения эксперимента и интерпретации ожидаемых опытных данных. Все возрастающие требования практики к исходным астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным обуславливают актуальность разработки и применения недетерминированных математических моделей. Путем вариации переменных выявляя статистику входных и выходных величин, можно вскрыть выборку элементов объекта, законы их распределения на заданном измеримом пространстве и дать вероятностно-статистическое описание объекта. Факторы (возмущающие), не поддающиеся точному математическому описанию, можно интерпретировать как случайные величины и найти законы их распределения. Накопив необходимую измерительную информацию, можно применить статистический анализ, оценить интересующие нас параметры объекта и проверить достоверность выдвинутой ранее гипотезы о законе распределения выборки элементов. Недетерминированные математические модели в новейших технологиях астрономо-геодезии будут применяться для обоснования малозатратных проектов в условиях неопределенности и случайных изменений, при неизбежных ошибках измерений и наличии других возмущений, не поддающихся математическому описанию. При этом применение методов спектрального анализа и псевдооперации над матрицами систем уравнений поправок измеренных величин позволяет изучить объект в реальном масштабе времени путем измерения существенных элементов выборки недетерминированной математической модели объекта.

Как правило, обширные системы измеренных величин планетарного, континентального и регионального масштабов будут представляться как свободные системы. Обработка таких систем связана с решением квазивырожденных или полностью вырожденных линейных уравнений. Точная оценка ранга и решение систем линейных уравнений по методу наименьших квадратов становятся одним из основных направлений в математической обработке обширных систем измерений в астрономо-геодезии. Обеспеченность теорией — это характерная черта новых технологий, применяемых в развитых странах мира. Новые теории форсируют развитие технологий.

В свою очередь, интенсивное применение новых технологий воздействует на их теоретическую базу, стимулируя ее ревизию и дальнейшее развитие.

Новые теории, математические модели и алгоритмы математической обработки измерений, реализуемые на ЭВМ пятого поколения, составят

интеллектуальную часть новых технологий астрономо-геодезии начала третьего тысячелетия.

Коренным образом меняется концепция построения государственных геодезических сетей (ГГС). Будущие ГГС предназначаются для решения таких научных и инженерно-технических задач, как закрепление ПГГСК, надежно связанной с КГГСК, ФЗСК и РКСК; изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли; определение движения полюсов и неравномерности вращения Земли на каждую эпоху; геодезическое обеспечение картографирования обширных территорий суши, шельфа, акватории и дна Мирового океана; изучение и освоение космического пространства; проведение крупномасштабных съемок, инженерно-технических работ и изысканий; координатно-временное обеспечение отраслей народного хозяйства и навигации; геодезическое обоснование динамики литосферы и водной оболочки Земли, прогноз геотехнических процессов глобального и регионального характера, изучение движения земной коры в пределах литосферных плит и отдельных регионов; эталонирование орбит спутниковых носителей координат и времени; создание наиболее точных систем наблюдений космических объектов, в том числе Луны и далеких радиосточников.

В определении исходных геодезических данных, обеспечивающих инженерные изыскания на земле, под землей и на шельфе, большое место займут быстродействующие роботизированные геодезические инерциальные системы оперативного определения координат, азимута и отклонения отвесной линии от нормали к земному эллипсоиду. Традиционные средства угловых и линейных измерений будут вытесняться электронными геодезическими приборами с микропроцессорами, сопряженными с роботизированными системами сбора, обработки, отображения и хранения геодезической информации. Применение таких систем и приборов изменит традиционные концепции геодезических сетей, обеспечивающих решение инженерных задач. Со временем необходимость в построении этих сетей отпадет. Астрономо-геодезия займется подготовкой исходных астрономо-геодезических и гравиметрических данных для обеспечения метрологии и функционирования быстродействующих роботизированных наземных и спутниковых геодезических систем определения местоположения, азимута и отклонения отвесной линии.

Фундаментальной задачей астрономо-геодезии является создание глобальной сети астрономо-геодезических обсерваторий (АГО), на которых будет выполняться весь комплекс высокоточных наземных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и наблюдений ИСЗ. Луны, естественных и искусственных радиосточников. Эти обсерватории будут фиксировать ПГГСК на эпоху. На территории СССР большая часть АГО должна быть совмещена с астрономическими обсерваториями ведущих университетов, АН СССР и союзных республик. Только в этом случае можно будет восстановить традиционную общегосударственную геодезическую направленность астрономических обсерваторий.

Редкую сеть АГО, равномерно покрывающую всю территорию страны, следует определять в ПГГСК с максимально возможной точностью. В перспективе пространственное положение АГО относительно начала отсчета ПГГСК должно быть определено с ошибкой $0,2 \cdot 10^{-8}$. На каждой АГО следует иметь измерения силы тяжести с точностью $3 \cdot 10^{-6}$ см/с² и уклонение отвеса с точностью порядка $0,02''$. Ориентировку хорд, соединяющих соседние АГО, необходимо выполнять радиоинтерферометрическим методом с точностью $0,005''$. При этом астрономическая задача связи фундаментальной звездной системы с квазарной радиоинтерферометрической системой координат с точностью $0,001''$ будет решаться крупными астрономическими обсерваториями по международным программам. Перспектива развития радиоинтерферометрического метода такова, что с его помощью можно будет ориентировать хорды, соединяющие соседние АГО с точностью $0,001''$.

Сеть АГО на территории СССР, определяемую с такими точностями, можно назвать ГГС I класса. Она должна иметь астрономо-геодезические связи с государственными сетями других стран, близкими по точности.

Размещение АГО на земной поверхности, включая обсерватории на территории СССР, должно учитывать потребности международных научно-технических программ по геодинамике, которые будут выполняться в начале нового тысячелетия по решениям Международного геодезического и геофизического союза.

Поэтому программа создания ГГС I класса должна быть составной частью Международного проекта создания глобальной сети АГО в единой системе отсчета ПГГСК и ПГГМ, который будет осуществлен объединенными усилиями развитых стран мира.

Проектирование, строительство и эксплуатация инженерных объектов, метрология прецизионных измерительных систем на всех этапах их конструирования, испытания и включения в технологический процесс и изучение локальной геодинамики потребуют применения новых технологий в астрономо-геодезических и гравиметрических измерениях и в обработке их результатов на ЭВМ. Для этих целей, как правило, будут создаваться специальные геодезические сети по различным проектам. Специальные геодезические сети высшей категории будут пространственными, а по точности некоторые из них превзойдут ГГС I класса. В таких сетях на станциях измерений будут определяться переменные гравитационные поля, создаваемые метеофакторами, антропогенными объектами, Луной и Солнцем.

В начале нового тысячелетия развитие астроинженерии потребует от астрономо-геодезии создания уникальных по построению и точности АГС в районах обсерваторий радиоинтерферометрии, светолокации и радиолокации объектов ближнего и дальнего космоса.

С повышением требований практики к точности ПГГСК, ПГГМ, ГГС I класса и специальных геодезических сетей необходимо будет учитывать метрику четырехмерного пространства — время и точно согласовывать все геодезические и геофизические параметры Земли.

5.2. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЗЕМЛИ

5.2.1. Параметры Нормальной Земли и согласующие формулы

За Нормальную Землю принимают двухосный эллипсоид, масса, центр инерции, ось и угловая скорость вращения которого совпадают с соответствующими параметрами реальной Земли, а по форме и размерам наилучшим образом аппроксимирует геоид в планетарном масштабе. Приняв за основные параметры экваториальный радиус планетарного геоида a , планетоцентрическую гравитационную постоянную fM , коэффициент нулевого порядка J_2 второй зональной гармоники гравитационного потенциала и угловую скорость ω вращения Земли, все другие параметры Нормальной Земли можно вычислить по согласующим формулам. По существу Нормальная Земля представляется двухосным эллипсоидом, все элементы которого точно согласуются с основными параметрами fM , a , J_2 , ω , называемыми фундаментальными геодезическими параметрами Земли.

Фундаментальные геодезические параметры Земли совместно с астрометрическими и геофизическими параметрами используются всеми науками о Земле.

Согласующие формулы параметров Нормальной Земли, подробный вывод которых был сделан в разделе 2, приведем в окончательном виде в следующей последовательности для счислимых параметров в функции заданных фундаментальных геодезических параметров Земли.

1. Динамический параметр

$$q = a^3 \omega^2 / fM. \quad (615)$$

2. Полярное сжатие

$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q + \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{11}{56} q^2 - \frac{3}{14} J_2 q + \frac{27}{16} J_2^3 + \frac{9}{98} (J_2^2 + q^2) q + \frac{93}{784} J_2 q^2. \quad (616)$$

3. Четные зональные гармонические коэффициенты

$$J_4 = -\frac{9}{5} J_2^2 + \frac{3}{35} q^2 - \frac{12}{35} J_2 q - \frac{27}{245} (J_2 + q) q^2 + \frac{162}{245} J_2^3 q = -\frac{4}{5} \alpha^2 + \frac{4}{7} \alpha q + \frac{4}{5} \alpha^3 - \frac{50}{49} \alpha^2 q; \quad (617)$$

$$J_6 = \frac{27}{7} J_2^3 - \frac{2}{21} q^3 + \frac{12}{7} J_2^2 q - \frac{1}{7} J_2 q^2 = \frac{8}{7} \alpha^3 - \frac{20}{21} \alpha^2 q. \quad (618)$$

4. Потенциал уровенной поверхности двухосного эллипсоида

$$W_0 = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{1}{2} q + \frac{27}{40} J_2^2 - \frac{9}{280} q^2 + \frac{9}{70} J_2 q + \frac{135}{112} J_2^3 + \right.$$

$$+ \frac{17}{1470} q^3 + \frac{141}{490} J_2^2 q - \frac{13}{3930} J_2 q^2) = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{1}{3} \alpha + \frac{1}{3} q + \frac{2}{15} \alpha^2 + \frac{2}{35} \alpha^3 \right). \quad (619)$$

5. Сила тяжести на уровенной поверхности двухосного эллипсоида на экваторе

$$\begin{aligned} \gamma_e = \frac{fM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 - q + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{9}{56} q^2 + \frac{9}{14} J_2 q + \frac{135}{16} J_2^3 - \frac{1}{588} q^3 + \right. \\ \left. + \frac{123}{49} J_2^2 q - \frac{83}{784} J_2 q^2 \right) = \frac{fM}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} q + \alpha + \alpha^2 - \frac{3}{7} \alpha q + \alpha^3 - \frac{125}{294} \alpha^2 q \right); \end{aligned} \quad (620)$$

на полюсе

$$\gamma_p = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{7} - \frac{\alpha^2}{147} \right) q \right];$$

на поверхности для точек $B \neq 0$

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta_2 \sin^2 B + \beta_4 \sin^4 B + \beta_6 \sin^6 B) = \gamma_e (1 + \beta_2' \sin^2 \varphi + \beta_4' \sin^4 \varphi + \beta_6' \sin^6 \varphi);$$

$$\beta_2 = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{15}{14} q^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{87}{14} \alpha q + \frac{45}{8} q^3 - 12 \alpha q^2 + \frac{241}{4} \alpha^2 q;$$

$$\beta_4 = \frac{5}{2} \alpha q - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^3 - \frac{209}{28} \alpha^2 q + \frac{15}{14} \alpha q^2;$$

$$\beta_6 = \frac{15}{14} \alpha^2 q - \frac{1}{2} \alpha^3;$$

$$\beta_2' = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{15}{4} q^2 - \frac{7}{2} \alpha^2 + \frac{53}{14} \alpha q - 8 \alpha^3 + \frac{45}{8} q^3 + 3 \alpha q^2 + \frac{248}{49} \alpha^2 q;$$

$$\beta_4' = -\frac{15}{2} \alpha q + \frac{7}{2} \alpha^2 + \frac{41}{2} \alpha^3 - \frac{773}{28} \alpha^2 q - \frac{45}{4} \alpha q^2;$$

$$\beta_6' = \frac{95}{4} \alpha^2 q - \frac{25}{2} \alpha^3. \quad (621)$$

При этом коэффициент $\beta = (\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e = \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 = \beta_2' + \beta_4' + \beta_6'$, т. е.

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha + \frac{15}{4} q^2 - \frac{26}{7} \alpha q + \frac{45}{8} q^3 + \frac{59}{49} \alpha^2 q - \frac{33}{4} \alpha q^2. \quad (622)$$

6. Геоцентрическая гравитационная постоянная fM в функции a , J_2 , q и γ_e

$$\begin{aligned} fM = a^2 \gamma_e \left(1 - \frac{3}{2} J_2 + q - \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{65}{56} q^2 - \frac{51}{14} J_2 q - \frac{27}{16} J_2^3 + \right. \\ \left. + \frac{389}{294} q^3 - \frac{57}{98} J_2^2 q - \frac{4831}{784} J_2 q^2 \right) = a^2 \gamma_e \left(1 - \alpha + \frac{3}{2} q - \frac{18}{7} \alpha q + \right. \\ \left. + \frac{9}{4} q^2 + \frac{27}{8} q^3 - \frac{153}{28} \alpha q^2 + \frac{157}{147} \alpha^2 q \right). \end{aligned} \quad (623)$$

Для современных моделей Земли без учета массы атмосферы $fM = 1,001836356 a^2 \gamma_e$, с учетом массы атмосферы $fM = 1,001837236 a^2 \gamma_e$.

7. Линейный масштабный коэффициент Нормальной Земли

$$R_0 = \frac{fM}{W_0} = a / \left(1 + \frac{1}{3} \alpha + \frac{1}{3} q + \frac{2}{15} \alpha^2 + \frac{2}{35} \alpha^3 \right). \quad (624)$$

8. Нормальное значение силы тяжести в точке с геоцентрическим радиусом $r(B, H \neq 0)$

$$\gamma(B, H) = \left\{ \frac{fM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=1}^3 (2n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right] - \omega^2 r \cos \varphi \right\} \sec \Delta \varphi;$$

$$\sec \Delta \varphi = \sec(B - \varphi) = 1 + 2m^2 \sin^2 \varphi [(1 + 2m) - (1 + 6m) \sin^2 \varphi + 4m \sin^4 \varphi];$$

$$m = \alpha(1 + \alpha/2); \quad m^2 = \alpha^2(1 + \alpha). \quad (625)$$

При $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ \sec \Delta \varphi = 1$; $\sec \Delta \varphi - 1 = m^2/2 \approx 0,1 \cdot 10^{-4}$ при $\varphi = 45^\circ$.

При обработке наземных измерений нормальное значение силы тяжести можно вычислить с высокой точностью, используя градиент силы тяжести и его изменения по высоте по формулам (583) и (584).

По согласующим формулам (615) — (625) можно вычислить стан-

Т а б л и ц а 12

| Параметр | Земля G1 | Земля G2 | Луна S1 |
|---|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a_e , м | 6 378 140 | 6 378 137 | 1 738 000 |
| fM , км ³ /с ² | 398 600,5* | 398 600,5* | 4 902,709 |
| fM_a , км ³ /с ² | 0,35 | 0,35 | 0 |
| $J_2 \cdot 10^9$ | 1 082,63 | 1 082,63 | 210,00 |
| ω , рад/с | $0,729 2115 \cdot 10^{-4}$ | $0,729 2115 \cdot 10^{-4}$ | $0,266 169 55 \cdot 10^{-5}$ |
| $J_4 \cdot 10^9$ | -2370,971 | -2370,972 | -79,92 |
| $J_6 \cdot 10^9$ | 6,017 | 6,017 | 0,04 |
| $\alpha \cdot 10^6$ | 3 352,814 639 | 3 352,812 199 | 318,842 436 |
| α^{-1} | 298,256 87 | 298,257 09 | 3 136,3454 |
| $q \cdot 10^6$ | 3 461,399 315 | 3 461,394 431 | 7,586 322 |
| $\gamma_e \cdot 10^{-3}$, см · с ⁻² | 978 030,890 4 | 978 031,815 3 | 162 356,666 1 |
| $\gamma_p \cdot 10^{-3}$, см · с ⁻² | 983 216,856 5 | 983 217,776 7 | 162 307,977 6 |
| W_0 , м ² /с ² | 62 636 776,636 2 | 62 636 805,945 1 | 2 821 198,213 0 |
| R_0 , м | 6 363 675,965 | 6 363 672,987 | 1 737 810,885 |
| $\beta_2 \cdot 10^6$ | 5 279,057 297 | 5 279,047 546 | -299,840 614 |
| $\beta_4 \cdot 10^6$ | 23,271 937 | 23,271 884 | -0,044 773 |
| $\beta_6 \cdot 10^6$ | 0,127 071 | 0,127 070 | -0,000 013 |
| $\beta \cdot 10^6$ | 5 302,456 305 | 5 302,446 500 | -299,885 400 |
| α^2 | $0,112 413 6600 \cdot 10^{-4}$ | $0,112 413 4964 \cdot 10^{-4}$ | $0,101 660 \cdot 10^{-6}$ |
| αq | $0,116 054 3029 \cdot 10^{-4}$ | $0,116 054 0547 \cdot 10^{-4}$ | $0,2419 \cdot 10^{-8}$ |
| q^2 | $0,119 828 521 \cdot 10^{-4}$ | $0,119 812 5140 \cdot 10^{-4}$ | $0,58 \cdot 10^{-10}$ |
| α^3 | $0,376 902 \cdot 10^{-7}$ | $0,376 901 \cdot 10^{-7}$ | $0,32 \cdot 10^{-10}$ |
| $\alpha^2 q$ | $0,389 109 \cdot 10^{-7}$ | $0,389 107 \cdot 10^{-7}$ | $1 \cdot 10^{-12}$ |
| αq^2 | $0,401 710 \cdot 10^{-7}$ | $0,401 709 \cdot 10^{-7}$ | $1 \cdot 10^{-12}$ |
| q^3 | $0,414 720 \cdot 10^{-7}$ | $0,414 718 \cdot 10^{-7}$ | $1 \cdot 10^{-12}$ |

* Включая атмосферу.

дартные параметры Луны и планет Солнечной системы, если зафиксированы фундаментальные параметры fM , a , J_2 , ω .

Параметры Нормальной Земли и Нормальной Луны, вычисленные по согласующим формулам (615) — (625), представлены в табл. 12.

При вычислениях относительная масса атмосферы Земли принята равной $\mu_a = 0,898\ 356 \cdot 10^{-6}$, а относительная масса Луны $\mu = 0,012\ 299\ 794$.

В табл. 12 приведены малые величины второго и третьего порядков полярного сжатия Земли и Луны, которые будут полезны для оценки согласия параметров Нормальной планеты, выводимых указанными выше формулами.

Модели G1, G2 и S1, аппроксимирующие гравитационные фигуры Земли и Луны, современным определениям соответствуют наилучшим образом, и их можно рекомендовать планетодезическим, планетофизическим и другим наукам, занимающимся изучением планет и их естественных спутников.

5.2.2. Определение геоцентрической гравитационной постоянной

Геоцентрическая гравитационная постоянная fM и скорость света в вакууме c относятся к фундаментальным постоянным, определяющим масштаб околоземного пространства. В настоящее время скорость света в вакууме достаточно точно определена и ее значение $c = (299\ 792\ 458 \pm \pm 1,2)$ м/с стандартизировано международными соглашениями.

Гравитационную постоянную fM можно надежно определить из обработки траекторных измерений КА, направляемых к другим планетам, на пассивном участке траекторий на значительном удалении от Земли, где удается достаточно точно учесть все гравитационные и негравитационные эффекты, а теорию движения КА свести к задаче двух тел.

В этом случае интеграл энергии

$$\bar{V}^2 = f(M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (626)$$

будет исходным уравнением. При этом отношение массы КА к массе Земли можно принять равным нулю. Рассмотрим способ определения геоцентрической гравитационной постоянной при принятом значении скорости света. Пусть известны скорость движения \bar{V} и геоцентрическое расстояние r космического аппарата. Тогда, пользуясь интегралом энергии, запишем систему уравнений

$$\Phi_i = fM - r_i h - \frac{1}{2} r_i \bar{V}_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (627)$$

где $h = fM/2a$. Систему (627) представим в линейной форме

$$\Phi_i = \Phi_i^0 + \delta fM - r_i^0 \delta h - \left(h^0 + \frac{1}{2} \bar{V}_i^{02} \right) \delta r_i - r_i^0 \bar{V}_i^0 \delta \bar{V}_i = 0, \quad (628)$$

где $W_i = \Phi_i^0 = fM^0 - r_i^0 h^0 - \frac{1}{2} r_i^0 \bar{V}_i^{02}$; δfM и δh — поправки к счисли-

мым значениям fM^0 и h^0 ; δr_i и $\delta \bar{V}_i$ — поправки к измеренным значениям r_i^0 и \bar{V}_i^0 .

Полагая известными веса измеренных величин P_i^r и P_i^V , уравнение (628) можно заменить эквивалентным уравнением

$$v_i = \delta fM - r_i^0 \delta h + W_i \quad (629)$$

с весом

$$p_i = \left[\sum_{i=1}^n \left(h^0 + \frac{1}{2} V_i^{02} \right)^2 / p_i^r + (r_i^0 \bar{V}_i^0)^2 / p_i^V \right]^{-1}, \quad (630)$$

$$\text{где } v_i = \left(h^0 + \frac{1}{2} \bar{V}_i^{02} \right) \delta r_i + r_i^0 \bar{V}_i^0 \delta \bar{V}_i.$$

Решая уравнение (629) методом наименьших квадратов, получим нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [p] \delta fM - [pr^0] \delta h + [pW] &= 0; \\ -[pr^0] \delta fM + [pr^0] \delta h + [pr^0 W] &= 0 \end{aligned} \quad (631)$$

относительно искомым параметров δfM и δh , записанные в символах Гаусса. Из решения уравнений (631) определяем искомые параметры с полной их оценкой. Отметим важные для практики частные случаи приложения теории.

Для параболической орбиты ($a = \infty$) решение (631) всегда имеется и поправка в геоцентрическую гравитационную постоянную будет

$$\delta fM = - \frac{[pW]}{[p]}; \quad p_i = \left[\sum_{i=1}^n \bar{V}_i^{04} / 4p_i^r + (r_i^0 \bar{V}_i^0)^2 p_i^V \right]^{-1};$$

$$W_i = fM^0 - \frac{1}{2} r_i^0 \bar{V}_i^{02}. \quad (632)$$

Для гиперболической и вытянутой эллиптической орбиты надежное решение возможно при больших разбросах r_i по величине.

Для круговой орбиты ($r_i = a$) коэффициент корреляции $K(fM, h)$ равен единице и решение возможно в форме (626).

При этом

$$\delta fM = [W]/n; \quad W_i = fM^0 - r_i^0 \bar{V}_i^{02}. \quad (633)$$

Для квазикруговой орбиты коэффициент корреляции в первом приближении $K(fM, h) = 1 - e^2$, или близок к единице. Поэтому при уточнении fM с начальными условиями и координатами станций наблюдений могут возникнуть непреодолимые трудности, связанные с плохой обусловленностью нормальных уравнений.

В случае квазикруговой орбиты можно использовать зависимость fM , среднего движения n и большой полуоси a орбиты небесного объекта. Так например, по результатам лазерной светолокации Луны можно определить fM , используя известное соотношение

$$fM = n_c^2 (1 + v_c)^3 a_c^3 / (1 + \mu) \quad (634)$$

вытекающее из третьего закона Кеплера. В этой формуле n_{ζ} — среднее движение Луны; μ — отношение массы Луны к массе Земли; a_{ζ} — большая полуось вариационной орбиты Луны; ν_{\odot} — параметр, учитывающий возмущения от Солнца.

По лазерной светолокации Луны, выполненной обсерваторией Макдональд (США), значение $fM = (398\,600,48 \pm 0,1) \text{ км}^3/\text{с}^2$ определено, исходя из заданного геоцентрического положения обсерватории. Это значение точно совпадает с урavnненным значением fM , полученным из обработки 11 определений fM последних лет. Точность fM все более возрастает и находится в пределах $0,005 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

Геоцентрическую гравитационную постоянную fM можно определить по наблюдениям ИСЗ, обращающихся на квазикруговых орбитах, используя формулу, подобную формуле (634) лунной светолокации. Однако при этом из-за близости ИСЗ к Земле необходимо более точно учитывать возмущающее влияние геогравитационного потенциала на движение ИСЗ, в первую очередь на среднее движение n и большую полуось a орбиты ИСЗ. Для априорной оценки примем

$$a = fM/V; \quad n^2 = \frac{fM}{a^3} = \left(\frac{V}{fM} \right)^2 V, \quad (635)$$

где V — геогравитационный потенциал. Из этих формул следуют оценки:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_V}{V}; \quad \frac{m_n}{n} = \frac{3}{2} \frac{m_V}{V}; \quad \frac{m_{fM}}{fM} = 3\sqrt{2} \frac{m_V}{V}. \quad (636)$$

Если например, $m_V/V = 10^{-6}$, то $m_{fM} \approx 1,6 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ($fM = 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$).

Таким образом, точность определения fM по наблюдениям на квазикруговых орбитах будет сравнима с точностью определения fM по наблюдениям КА и лазерной локации Луны в том случае, если относительная ошибка определения геогравитационного потенциала будет в пределах $0,3 \cdot 10^{-8}$.

5.2.3. Определение второго гармонического коэффициента геогравитационного потенциала по возмущениям элементов орбиты ИСЗ

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{1}{\sqrt{\rho fM} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}; \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{\sqrt{\rho fM} \operatorname{tg} i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e}{e'^2} \frac{1}{\sqrt{\rho fM}} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (637)$$

для долготы Ω узла и углового расстояния ω перигея орбиты ИСЗ, претерпевающих вековые и долгопериодические возмущения от второй зональной гармоники геогравитационного потенциала (главной пертурбационной функции)

$$R = -\frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) J_2, \quad (638)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Для вывода частных производных, содержащихся в дифференциальных уравнениях (637), используем следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ z &= r \sin u \sin i; \\ r &= a(1 - e \cos E). \end{aligned} \quad (639)$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial i}; \quad (640)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e};$$

$$\frac{\partial r}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos E; \quad \frac{\partial z}{\partial i} = r \sin u \cos i;$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial e} = \frac{z}{r} \frac{\partial r}{\partial e};$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) J_2;$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -3 \frac{1}{r} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \frac{z}{r} J_2. \quad (641)$$

Применяя формулы (641), находим искомые частные производные пертурбационной функции R (638) по наклонению i и эксцентриситету e орбиты

$$\frac{\partial R}{\partial i} = -3 \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 J_2 (1 - \cos^2 u) \sin i \cos i;$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{3}{2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E} \frac{fM}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 J_2 (1 - 3 \sin^2 u \sin^2 i) \quad (642)$$

Затем подставляем в (637) найденные значения частных производных (642) и получаем уравнения

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{r} \sqrt{\frac{fM}{p}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 J_2 (1 - \cos^2 u) \cos i; \quad (643)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{3}{r} \sqrt{\frac{fM}{p}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 J_2 \left[(1 - \cos^2 u) \cos^2 i + \right. \\ &\left. + \frac{e}{2e'^2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E} (1 - 3 \sin^2 u \cdot \sin^2 i) \right], \end{aligned}$$

правые части которых представлены через элементы орбиты и фундаментальные постоянные Земли fM , a_e и J_2 .

Рассматривая уравнения (643), заключаем, что вторая гармоника

(638) обуславливает вековые и периодические возмущения долготы Ω узла и углового расстояния ω перигея орбиты ИСЗ.

Имея наблюдательный материал и фиксируя значения фундаментальных параметров Земли fM и a_e , решаем систему уравнений (632) относительно искомого параметра J_2 . Длительный ряд наблюдений большого числа ИСЗ с различными элементами орбит дает оценку второго гармонического коэффициента J_2 геогравитационного потенциала с высокой точностью, что представляет возможным определение его изменений во времени.

Если известны второй гармонический коэффициент J_2 и параметр $q = \omega^2 a_e^3 / fM$, то по формуле (616) можно вычислить точно полярное сжатие земного эллипсоида.

5.2.4. Определение параметров земного эллипсоида вращения

Пусть для точек Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) земной поверхности и околоземного пространства с известными геоцентрическими координатами X_i, Y_i, Z_i заданы нормальные высоты H_i^0 . При этом, если за точку Q принят наземный пункт, то предполагается, что его нормальная высота определена методами наземной геодезии. Если же за точку Q принят ИСЗ, то предполагается, что его нормальная высота определена спутниковым нивелированием.

Искомые поправки к предварительным значениям большой полуоси a^0 и полярного сжатия α^0 земного эллипсоида вращения обозначим соответственно через δa и $\delta \alpha$. Геоцентрическую высоту точки Q_i над общим земным эллипсоидом вращения с параметрами $a = a^0 + \delta a$, $\alpha = \alpha^0 + \delta \alpha$ можно представить таким образом, что

$$H_i = H_i^0 - \frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha, \quad (644)$$

где H_i^0 — геодезическая высота; N_i^0 — радиус кривизны нормального сечения; B_i^0 — широта точки Q_i относительно земного эллипсоида с параметрами a^0 и α^0 . Теперь геодезическую высоту H представим как сумму нормальной высоты H_i^0 и высоты геоида ζ_i над общим эллипсоидом, т. е.

$$H_i = H_i^0 + \zeta_i. \quad (645)$$

Используя приведенные выше формулы (644) и (645), для высоты геоида ζ_i каждой точки Q_i получим формулу

$$\zeta_i = - \frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha + H_i^0 - H_i^0.$$

Заметим, что свободный член в этой формуле представляет собой высоту геоида $\zeta_i^0 = H_i^0 - H_i^0$ над земным эллипсоидом с параметрами a^0 и α^0 . Поэтому запишем ее в виде

$$\zeta_i = - \frac{a^0}{N_i^0} \delta a + N_i^0 \sin^2 B_i^0 \delta \alpha + \zeta_i^0. \quad (646)$$

Так как каждая точка Q_1 доставляет одно уравнение (646), то получим систему n уравнений. Решая их под условием $[p\zeta^2] = \min$, найдем величины ζ_i , δa , $\delta \alpha$ с полной оценкой. При этом если совокупность точек Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равномерно размещена на поверхности планеты, то будет выполнена наилучшая оценка искомых величин. В настоящее время наибольший вклад в решение этой задачи вносит спутниковое нивелирование, представляющее геоид на каждую эпоху в планетарном масштабе.

Сжатие земного эллипсоида практически выгодно определять как производную постоянную, используя формулу (616).

Следовательно в уравнении (646) можно исключить поправку δa , полагая известным полярное сжатие α земного эллипсоида. Тогда для обработки примем уравнение

$$\zeta_i = -A_{0i}\delta\alpha + \zeta_i^0, \quad (647)$$

где ζ_i^0 — высота геоида над земным эллипсоидом с параметрами a^0 и α ; $A_{0i} = a^0/N_i^0$.

Искомая поправка большой полуоси будет

$$\delta a = [pA_0\zeta^0]/[pA_0^2]. \quad (648)$$

Если геоид аппроксимируется земным эллипсоидом таким образом, чтобы сумма высот геоида была бы равна нулю, то с учетом весов уравнений (647) поправка большой полуоси такого земного эллипсоида будет

$$\delta a = [p\zeta^0]/[pA_0]. \quad (649)$$

Затем по уточненному значению большой полуоси земного эллипсоида по формулам (616) и (619) вычисляются согласованные значения полярного сжатия α и уровенного потенциала W_0 земного эллипсоида.

Зафиксировав фундаментальные параметры Земли на эпоху, можно приступить к новой обработке данных наземной геодезии и спутниковых наблюдений с целью вывода параметров планетарной геоцентрической системы геодезических координат и внешнего гравитационного поля Земли.

Имея уточненные значения параметров внешнего гравитационного поля Земли, можно вычислить геоцентрический радиус r_{gi} геоида для каждой элементарной площадки с координатами φ_i , λ_i и высоту геоида по формулам

$$\zeta_i^0 = r_{gi} - r_{0i}; \quad r_{0i} = a^0 A_i; \quad A_i = (1 + e'^2 \sin^2 \varphi_i)^{-\frac{1}{2}}. \quad (650)$$

Решая (650) под условием $[p\zeta^2] = \min$, находим уточненное значение большой полуоси земного эллипсоида

$$a = [pAr_g]/[pA^2], \quad (651)$$

или

$$a = [pr_g]/[pA], \quad (652)$$

если отыскивается эллипсоид под условием $[p\zeta] = 0$.

Затем по соответствующим формулам можно вычислить новые согласованные значения полярного сжатия α и уровня потенциала W_0 земного эллипсоида вращения. Таким образом, определение параметров земного эллипсоида основано на использовании данных наземной геодезии и спутниковых наблюдений с учетом формул, согласующих параметры земного эллипсоида с фундаментальными параметрами. Так как большая полуось земного эллипсоида представляется как среднее значение экваториального радиуса геоида a_e и входит в список фундаментальных постоянных Земли, процесс последовательных приближений в определении параметров земного эллипсоида неизбежен.

Если гравиметрические определения дают независимую оценку ускорения силы тяжести γ_e на экваторе, то при выводе большой полуоси можно использовать формулу (623). Например, можно применить формулу

$$fM = 1,001\ 836\ 36a_e^2\gamma_e \quad (653)$$

с учетом массы земной атмосферы для согласования независимых определений трех постоянных или вывода значения одной постоянной по известным значениям двух других постоянных.

5.2.5. Определение параметров трехосного земного эллипсоида

Определение параметров трехосного земного эллипсоида, наилучшим образом аппроксимирующего планетарные волны геоида, основано на изучении параметров динамической фигуры Земли и планетарного геоида. Большая ось трехосного эллипсоида является одной из главных осей инерции, относительно которой экваториальный момент инерции A_0 Земли имеет наименьшее значение. Относительно малой экваториальной оси эллипсоида Земля обладает наибольшим экваториальным моментом инерции B_0 . Очевидно полярная ось земного эллипсоида совпадает с осью вращения Земли, относительно которой Земля обладает наибольшим моментом инерции C_0 .

Меридиан большой оси экватора трехосного эллипсоида, совпадающий с меридианом главной оси инерции Земли u_0 , может быть определен по формуле (255) и для современной эпохи его долгота $= 14,9^\circ$ з. д. Таким образом, можно однозначно ориентировать экваториальный эллипс и полярную ось трехосного эллипсоида.

Фигуру и форму трехосного эллипсоида (экваториальные и полярный радиусы, полярное и экваториальное сжатия) можно определить, изучая соответствующие параметры планетарного геоида. При этом очевидно параметры трехосного эллипсоида, аппроксимирующего планетарные волны геоида, должны совпадать с соответствующими параметрами планетарного геоида. Отсюда ясно, что второй этап в определении параметров трехосного земного эллипсоида заключается в вычислении соответствующих параметров планетарного геоида.

Для полярного радиуса геоида, подставляя в формулу $\varphi = \pm 90^\circ$, имеем

$$\bar{r}_p = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n J_{2n} \mp \sum_{n=2}^{\infty} (1 + e'^2)^{\frac{2n-1}{2}} J_{2n-1} \right]. \quad (654)$$

Верхний (нижний) знак соответствует северному (южному) полюсу геоида.

Среднее значение полярного радиуса геоида

$$r_p = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n J'_{2n} \right]. \quad (655)$$

Полярная асимметрия геоида составляет

$$\bar{r}_{\text{сев}} - \bar{r}_{\text{южн}} = -2R_0 \sum_{n=2}^{\infty} (1 + e'^2)^{\frac{2n-1}{2}} J_{2n-1}. \quad (656)$$

На современную эпоху полярная асимметрия геоида составляет 42,7 м.

Экваториальные радиусы геоида вычисляют, подставляя в формулу $\varphi = 0^\circ$. При этом $P_{nm}(\sin \varphi) = 0$ для всех нечетных значений $n + m$. Тогда экваториальный радиус геоида будет

$$r_e = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (657)$$

когда $n + m$ — четное.

Для вычисления экстремальных значений экваториальных радиусов достаточно в формулу (657) подставить $\lambda = \lambda^0$ ($\lambda = 90^\circ + \lambda^0$). Получим значение максимального (минимального) экваториального радиуса геоида.

Как известно, планетоцентрический радиус трехосного эллипсоида можно представить в виде разложения по сферическим гармоникам. При этом в разложении отсутствуют все нечетные гармоники, а четные гармоники представлены только четными порядками. Поэтому полярный радиус трехосного эллипсоида b равен среднему значению полярного радиуса r_p геоида, т. е.

$$b = R_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e'^2)^n J_{2n} \right]. \quad (658)$$

Экваториальные радиусы трехосного эллипсоида вычислим, используя четные гармоники разложения (657). Заметив, что $\cos 2m(90^\circ + \lambda_0) = (-1)^m \cos 2m\lambda_0$; $\sin 2m(90^\circ + \lambda_0) = (-1)^m \sin 2m\lambda_0$, формулу (657) для трехосного эллипсоида запишем в таком виде

$$a_{\text{max}} = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} \right],$$

$$a_{\min} = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_{2m} \right], \quad (659)$$

$$\varepsilon_{2m} = - \sum_{n=1}^{\infty} (J_{2n \cdot 2m} \cos 2m \lambda_0 + K_{2n \cdot 2m} \sin 2m \lambda_0) P_{2n \cdot 2m}(\sin \varphi).$$

Разность максимального и минимального значений экваториальных радиусов эллипсоида составляет

$$a_{\max} - a_{\min} = 2R_0 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_{4m-2}. \quad (660)$$

Экваториальное сжатие эллипсоида

$$\alpha_e = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_{4m-2} / \left(1 + \frac{1}{2} q + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} \right). \quad (661)$$

Полярное сжатие эллипсоида

$$\alpha_p^{\max} = (a_{\max} - b) / a_{\max}, \quad \alpha_p^{\min} = (a_{\min} - b) / a_{\min}. \quad (662)$$

Для примера приведем значения ε_{2m} , вычисленные с учетом гармоник до 10-й степени:

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{2} J_2 + \frac{3}{8} J_4 - \frac{5}{16} J_6 + \frac{35}{128} J_8 - \frac{63}{256} J_{10};$$

$$\varepsilon_2 = \left(3J_{2.2} - \frac{15}{2} J_{4.2} + \frac{105}{8} J_{6.2} - \frac{315}{16} J_{8.2} + \frac{3465}{128} J_{10.2} \right) \cos 2\lambda_0 + \\ + \left(3K_{2.2} - \frac{15}{2} K_{4.2} + \frac{105}{8} K_{6.2} - \frac{315}{16} K_{8.2} + \frac{3465}{128} K_{10.2} \right) \sin 2\lambda_0;$$

$$\varepsilon_4 = \left(105J_{4.4} - \frac{945}{2} J_{6.4} + \frac{10 \cdot 395}{8} J_{8.4} - \frac{3465 \cdot 13}{16} J_{10.4} \right) \cos 4\lambda_0 + \\ + \left(105K_{4.4} - \frac{945}{2} K_{6.4} + \frac{10 \cdot 395}{8} K_{8.4} - \frac{3465 \cdot 13}{16} K_{10.4} \right) \sin 4\lambda_0;$$

$$\varepsilon_6 = \left(10 \cdot 395 J_{6.6} - \frac{135 \cdot 135}{2} J_{8.6} + \frac{51 \cdot 975 \cdot 39}{8} J_{10.6} \right) \cos 6\lambda_0 + \\ + \left(10 \cdot 395 K_{6.6} - \frac{135 \cdot 135}{2} K_{8.6} + \frac{51 \cdot 975 \cdot 39}{8} K_{10.6} \right) \sin 6\lambda_0;$$

$$\varepsilon_8 = \left(2 \cdot 027 \cdot 025 J_{8.8} - \frac{155 \cdot 925 \cdot 221}{2} J_{10.8} \right) \cos 8\lambda_0 + \left(2 \cdot 027 \cdot 025 K_{8.8} - \right. \\ \left. - \frac{155 \cdot 925 \cdot 221}{2} K_{10.8} \right) \sin 8\lambda_0; \quad \varepsilon_{10} = 654 \cdot 729 \cdot 075 (J_{10.10} \cos 10\lambda_0 + \\ + K_{10.10} \sin 10\lambda_0).$$

5.3. ГЛАВНАЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА И ВОПРОСЫ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ В ЕДИНУЮ СИСТЕМУ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ И ГРАВИТАЦИИ

Изучение вековых, периодических и нерегулярных изменений фигуры, гравитационного и магнитного полей, внутреннего строения, параметров вращения и движения полюсов Земли является главной геодинимической задачей, решаемой на стыке астрометрии, геодезии, геофизики, океанологии и геотектоники.

Актуальность решения этой задачи обусловлена следующими причинами. Во-первых, астрономо-геодезические и гравиметрические измерения необходимо редуцировать на единую эпоху с учетом динамики Земли и собственных движений АГО. При этом методы редукации измерений должны обеспечить определение геоцентрического радиуса АГО с относительной ошибкой порядка $0,2 \cdot 10^{-8}$.

Во-вторых, геофизика, геология, океанология и геотектоника нуждаются в представительной статистике вековых и долгопериодических изменений фигуры и гравитационного поля Земли и для обоснования учений об эволюции Земли и интерпретации геофизических, геологических и океанографических измерений. Так например, если астрономогеодезические и гравиметрические определения с высокой точностью покажут вековое уменьшение объема и полярного сжатия Земли, которое возможно имеет место в современной динамике Земли, тогда науки о Земле на новом уровне смогут исследовать такие явления, как вековое замедление вращения Земли, дрейф литосферных плит, движение земных полюсов, вековое уменьшение геомагнитного потенциала, образование планетарного и континентального рельефа.

В-третьих, комплексное изучение планетарных, региональных и местных геодинимических явлений является необходимым условием для прогноза эволюции геосферы и катастрофических землетрясений.

Системы отсчета координат и гравитации задаются параметрами планетарной геоцентрической геодезической системы координат (ПГГСК) и планетарной геоцентрической гравитационной модели (ПГГМ). Параметры Нормальной Земли и тензор инерции представляют планетарные характеристики Земли. Геодинамика планетарного масштаба проявляется в вариациях параметров ПГГСК, ПГГМ и тензора инерции Земли. Так например, вековое уменьшение объема и полярного сжатия, гравитационная дифференциация вещества в теле Земли вызовут вековые изменения моментов инерции и параметров вращения Земли.

Экваториальный радиус a , геоцентрическая гравитационная постоянная fM , коэффициенты второй гармоники гравитационного потенциала J_{nm} , K_{nm} , угловая скорость вращения ω , динамические параметры H и $q = a^3 \omega^2 / fM$, вторые моменты инерции Земли $I_0 = J_2/H - 3J_2/2$; $A = I_0 - J_2/3 + 2J_{22}$; $B = I_0 - J_2/3 - 2J_{22}$; $C = I_0 + 2J_2/3$; $I_{200} = (C + B - A)/2$; $I_{020} = (C + A - B)/2$; $I_{002} = (A + B - C)/2$ определяются с высокой точностью. Главные центральные моменты инерции A_0 , B_0 , C_0 Земли как собственные числа матрицы тензора инерции

$$I = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix},$$

где $D = -K_{21}$; $E = -J_{21}$; $F = -2K_{22}$, можно вычислить с точностью, удовлетворяющей требованиям практики.

В табл. 13 приведены моменты инерции второй степени, вычисленные при известных значениях гравитационных постоянных Земли: $J_2 = 1082,627 \cdot 10^{-6}$; $J_{21} = 0,134 \cdot 10^{-8}$; $K_{21} = 0,314 \cdot 10^{-8}$; $J_{22} = -1,5712 \times 10^{-6}$; $K_{22} = 0,9031 \cdot 10^{-6}$; $H = 3373,00 \cdot 10^{-6}$ (см. табл. 7).

Отметим, что действительные значения моментов инерции можно получить путем умножения на масштабный коэффициент Ma^2 данных табл. 13.

Т а б л и ц а 13

| Момент инерции | Числовое значение | Центральный момент инерции | Числовое значение |
|----------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------|
| A | 0,329 689 3119 | A_0 | 0,329 688 8298 |
| B | 0,329 695 5965 | B_0 | 0,329 696 0786 |
| C | 0,330 775 0810 | C_0 | 0,330 775 0870 |
| D | $-0,314 \cdot 10^{-8}$ | I_{200}^0 | 0,165 391 1649 |
| E | $0,134 \cdot 10^{-8}$ | I_{020}^0 | 0,165 383 9161 |
| F | $-1,8062 \cdot 10^{-8}$ | I_{002}^0 | 0,164 304 9137 |
| I_0 | 0,330 053 3300 | $I_{110}^0 = I_{101}^0 = I_{011}^0$ | 0 |

Центральным осям инерции соответствуют коэффициенты гармоник второй степени: $J_2^0 = (I_{200}^0 + I_{020}^0)/2 - I_{002}^0 = 1082,627 \cdot 10^{-6}$; $J_{21}^0 = I_{101}^0 = 0$; $K_{21}^0 = -I_{011}^0 = 0$; $J_{22}^0 = (I_{020}^0 - I_{200}^0)/4 = -1,8122 \cdot 10^{-6}$; $K_{22}^0 = -\frac{1}{2}I_{110}^0 = 0$.

Пользуясь формулами (174)–(178) и (615)–(619), получим

$$\sqrt{1 + \eta_\beta} = 1 + te^{-2 \ln \beta}; \quad t = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{3}{2} C_0 \right); \quad \alpha_1^0 = 3J_2/(2-t);$$

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 - (9t - 7)\alpha_1^0/14; \quad \alpha_\beta = \alpha_1 \exp \left(- \int_\beta^1 \eta \frac{d\beta}{\beta} \right);$$

$$q_1 = [7\alpha_1(2 - \alpha_1) - 21J_2^0]/(7 - 9\alpha_1), \quad (663)$$

где α_1 и $\omega_1 = a_1 \sqrt{fMq_1/a_1}$ — полярное сжатие и угловая скорость вращения внешнего гидростатического сфероида с экваториальным радиусом a_1 ; η_β и α_β — параметр Радо и полярное сжатие внутреннего гидростатического сфероида с экваториальным радиусом $\beta = r/a_1$ ($r \leq a_1$). Можно согласовать геофизические параметры a_1 , ω_1 , α_β и η_β гидростатической Земли с параметрами a_1 , fM , J_2^0 и C_0 реальной Земли.

Приняв для реальной Земли $a_1 = 6378137$ м, $fM = 398600$, $5 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $J_2^0 = 1082,627 \cdot 10^{-6}$, $C_0 = 0,3307750810$, с помощью формул (663) вычислим согласованные параметры гидростатической Земли

$$\alpha_1 = 0,003\ 362\ 521\ 71 = 1/297,396;$$

$$q_1 = 0,003\ 480\ 904\ 66 = 1/287,282; \quad \omega_1 = 7,312\ 637\ 21 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с};$$

$$\eta_1 = 0,5866 \quad (664)$$

Таким образом, по современным геодезическим определениям получается, что гидростатическая Земля более сплюснута у полюсов и быстрее вращается, чем реальная Земля. Это не противоречит гипотезе о вековом уменьшении полярного сжатия и скорости вращения Земли.

В табл. 14 приведены значения α_β и η_β для внутренних гидростатических сфероидов с экваториальными радиусами $r < a_1$, вычисленные по формулам (663)

Т а б л и ц а 14

| r , км | $1/\alpha_\beta$ | $10\eta_\beta$ | r , км | $1/\alpha_\beta$ | $10\eta_\beta$ |
|----------|------------------|----------------|----------|------------------|----------------|
| 345 | 389,60 | 0,0152 | 5450 | 322,25 | 4,1478 |
| 690 | 389,01 | 0,0608 | 5577 | 319,14 | 4,3606 |
| 1380 | 386,06 | 0,2443 | 5704 | 315,98 | 4,5800 |
| 2070 | 380,78 | 0,5545 | 5830 | 312,75 | 4,8061 |
| 3450 | 362,21 | 1,5765 | 5958 | 309,48 | 5,0388 |
| 3486 | 361,63 | 1,6098 | 6084 | 306,15 | 5,2786 |
| 4120 | 350,69 | 2,2819 | 6210 | 302,81 | 5,5251 |
| 4750 | 338,10 | 3,0885 | 6275 | 301,09 | 5,6512 |
| 5200 | 328,28 | 3,7410 | 6370 | 298,20 | 5,8609 |

Геосейсмические наблюдения могут дать обширный материал для независимых определений η_β и α_β гидростатических сфероидов внутри Земли. Геофизические определения η_β и α_β можно сравнить с геодезическими данными (см. табл. 14) и проверить адекватность математических моделей о внутреннем строении Земли.

Для учета приливных изменений силы тяжести, положения отвеса и высоты необходимо знать числа упругости Лява и Шиды $h = 0,610$; $k = 0,302$; $l = 0,075$.

Согласованные коэффициенты приливных изменений силы тяжести, положения отвесной линии и высоты имеют следующие значения:

$$\delta_g = 1 + h - 3k/2 = 1,157;$$

$$\delta_v = 1 + k - l = 1,227; \quad (665)$$

$$\delta_H = 1 + k - h = 0,708.$$

Коэффициенты δ_g , δ_v , δ_H можно определить по гравиметрическим, широтным и наклономерным наблюдениям, выполняемым на АГО. Точность определений δ_g и δ_H повышается, если изменения геоцентрического радиуса R обсерватории во времени будут известны с точностью 0,01 м из регулярных лазерных наблюдений ИСЗ. Прецизионные и регулярные астрономо-геодезические, гравиметрические и наклономерные наблюдения на АГО позволяют следить за изменениями чисел Лява и

Шиды во времени. Аномальные отклонения чисел Лява и Шиды на АГО от стандартных значений ($h = 0,610$; $k = 0,302$ и $l = 0,075$) и быстрое их изменение во времени говорят о возможности приближающегося землетрясения в этом районе.

Числа h и l можно определять по относительному изменению объема из-за влияния приливного или другого деформационного потенциала V_1 . Относительное изменение δ_V объема сосуда

$$\delta_V = 2V_1(2h - 3l)/Rg, \quad (666)$$

где R и g — геоцентрический радиус АГО и сила тяжести в точке наблюдения.

Для измерения относительных изменений δ_V объема подземного сосуда из-за воздействия приливного или другого деформационного потенциала V_1 глубоко под землю помещают большой сосуд с жидкостью (рис. 29), стенки которого плотно прилегают к окружающей породе. Измеряя изменения уровня жидкости в трубке, выходящей на земную поверхность, можно вычислить относительное изменение δ_V объема сосуда, а по формуле (666) — потенциальную энергию V_1 подземных сил и их изменение во времени.

Периоды Чандлера τ и Эйлера τ_0 свободного движения полюса, число Лява k , параметры α и q реальной Земли связаны следующим уравнением

$$\tau_0 = t_0\tau, \quad (667)$$

где $t_0 = 1 - k(2\alpha/q - 1)^{-1}$.

Период Эйлера $\tau_0 = 1/H - 1 = 1/0,003\,273 - 1 = 304,530$ сут. Для реальной Земли $k = 0,302$; $\alpha = 3352,8122 \cdot 10^{-6}$; $q = 3461,3944 \cdot 10^{-6}$. Подставим эти значения в формулу (667) и получим период Чандлера $\tau = 449,258$ сут. Для гидростатической Земли по формуле (667) при $\alpha_1 = 3362,521\,71 \cdot 10^{-6}$; $q_1 = 3480,904\,66$ имеем $\tau_1 = 423,817$ сут. Среднее значение $\tau_{cp} = (\tau + \tau_1)/2 = 436,538$ сут. представляет результат, согласованный с геодезическими и геофизическими постоянными.

Л. В. Рылова и Я. С. Яцкив обработали длинные ряды наблюдений T_1 и T_2 (соответственно 1846—1965 и 1846—1971 гг.) и определили период Чандлера $\tau_1 = 441,21$ и $\tau_2 = 433,54$ сут. Арифметическая средняя из этих результатов $\tau_{cp} = 437,375$ сут. Примечательно, что два значения

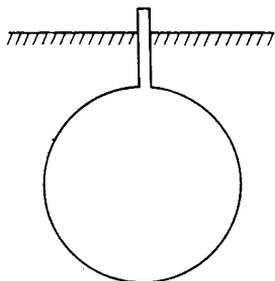


Рис. 29. Объемометр

периода Чандлера, полученные из астрономических наблюдений и косвенным путем по геодезическим и геофизическим данным, различаются на пренебрегаемую малую величину. Это обстоятельство также показывает на достаточную строгость принятой нами гипотезы равенства центральных моментов инерции I_0 и C_0 реальной и гидростатической Земли при согласовании геодезических и геофизических постоянных.

Статистика вековых изменений объема и полярного сжатия геоида, вторых производных потенциала силы тяжести геомагнитного потенциала и центральных моментов четных степеней, из них в первую очередь — моментов инерции второй степени, обуславливающих изменения параметров вращения и движения полюса Земли, является основным предметом планетарных геодинамических исследований. Одной из целей таких исследований будет определение планетарного геоида с точностью до 0,1 м, регионального геоида — с точностью до 0,02 м на каждую эпоху.

Аномалии плотностей масс в районе АГО проявляют аномалии градиентов силы тяжести и их изменений по высоте. Перенос масс в верхней мантии в районе АГО обуславливает нерегулярные изменения силы тяжести и вторых производных геогравитационного потенциала, геомагнитного и сейсмического полей, в вертикальных и горизонтальных деформациях земной коры.

Абсолютные изменения высоты, наклона и кривизны поверхности геоида можно определить методом светолокации ИСЗ, прецизионным нивелированием, астрономическими наблюдениями широты и долготы, гравивариометрической съемкой и наклономерными наблюдениями.

За горизонтальными деформациями земной коры и литосферных плит можно следить, применяя методы лазерной локации наземных и спутниковых отражателей, спутниковой и квазарной радиointерферометрии.

Изучение местных периодических и нерегулярных изменений фигуры, гравитационного, магнитного и сейсмического полей Земли, приливных параметров δ_g , δ_ω , δ_H , h , k , l и деформации земной коры имеет актуальное значение для редукции измерений в единую систему отсчета координат и гравитации. Для прогнозирования землетрясений необходимы условия являются наличие АГО в сейсмоопасных районах и выполнение на таких обсерваториях всего комплекса астрономо-геодезических, гравиметрических, сейсмометрических, магнитометрических, наклономерных и деформометрических наблюдений.

При редукции измерений в единую систему отсчета координат и гравитации необходимо использовать геодезические и геофизические постоянные, согласованные с фундаментальными параметрами, главными моментами и тензором инерции Земли.

Ценной геодинамической информацией обладают измерения вариаций силы тяжести и ее градиентов, так как они обусловлены влиянием приливных и неприливных сил, изменением геоцентрического радиуса обсерватории, перемещениями масс в теле Земли, движением полюсов и вариаций угловой скорости вращения Земли. Поэтому особая строгость

нужна при редукции силы тяжести, требующей учета приливных и неприливных сил, изменения силы притяжения из-за вариации геоцентрического радиуса r обсерватории и изменения центростремительного ускорения, обусловленного вариацией угловой скорости ω вращения Земли и изменением радиуса суточной параллели станции наблюдения. Как известно, радиус суточной параллели $D = r \cos \varphi$ имеет приращение $\Delta r \cos \varphi$ из-за изменения на Δr геоцентрического радиуса и колебания оси вращения Земли в ее теле. При этом изменения радиуса суточной параллели из-за движения полюсов на основании (11) и (81) будут

$$\Delta D_p = (x_p \cos \lambda + y_p \sin \lambda) Z, \quad (668)$$

где x_p, y_p — координаты полюса, рад; Z, λ — геоцентрические аппликата и долгота станции.

Геодезическим и геофизическим параметрам (см. табл. 13), выведенным из обработки современных геодезических и геофизических данных и согласованным на основе строгой теории, соответствуют следующие значения геодезических и геофизических постоянных:

коэффициенты приливных изменений силы тяжести, положения отвесной линии и высоты $\delta_g = 1,157$; $\delta_v = 1,227$; $\delta_H = 0,708$;

числа Лява и Шиды $h = 0,610$; $k = 0,302$; $l = 0,075$;

параметр Радо $\eta = 0,5866$;

полярное сжатие, угловая скорость вращения и динамический коэффициент гидростатической Земли $\alpha_1 = 3362,521 71 \cdot 10^{-6} = 1/297,396$;

$\omega_1 = 73,126 3721 \cdot 10^{-6}$ рад/с; $q_1 = 3480, 904 66 \cdot 10^{-6}$;

нормальные градиенты силы тяжести

$$\partial \gamma / \partial H = [-0,308 779 55 + 0,000 438 95 \sin^2 B + 0,198 \cdot 10^{-6} \sin^4 B + (144,2503 + 0,1727 \sin^2 B) \cdot 10^{-9} H] \text{ мгал/м};$$

$$\partial \gamma / \partial X' = 0,000 756(1 - 0,0100 \sin^2 B) \sin 2B \text{ мгал/м};$$

поправка за кривизну силовой линии нормального поля

$$\Delta B = -(0,170 91 - 0,000 013 H) H \sin 2B,$$

где H — высота точки, км.

Для точной редукции астрономо-геодезических и гравиметрических измерений большой интерес представляет знание закономерностей внутреннего строения Земли и их изменений во времени. Геофизическая интерпретация астрономо-геодезических и гравиметрических данных с выводом моделей внутреннего строения Земли является некорректной задачей, если не имеется числимых параметров внутреннего строения Земли, определенных геофизическим методом и не учитывается корреляция геогравитационного, геомагнитного, геосейсмического и геотермического полей. Корреляцию геомагнитного и геотермического полей с геогравитационным полем можно установить с высокой точностью и использовать все эти три поля совместно с геосейсмическими данными, введя образы магнитометрического G_m и термометрического G_t геоидов, подобные гравиметрическому геоиду.

Фигуру твердой оболочки Земли (рельеф дневной поверхности, дна океанов, морей и крупных озер) целесообразно аппроксимировать с по-

мощью потенциальной функции по сферическим координатам и построить морфометрический геоид G_h , подобный гравиметрическому G_g , магнитометрическому G_m и термометрическому G_t геоидам.

Используя совместно карты геоидов $G(g, m, t, h)$, данные фундаментальной астрометрии, астрономо-геодезии, гравиметрии и сейсмометрии, можно строго решить задачу о внутреннем строении Земли и геодинамики. Для этого необходимо редуцировать астрономо-геодезические, гравиметрические, магнитно-, термо-, морфо- и сейсмометрические определения в единую систему отсчета координат и времени.

5.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ НА ЭВМ НАЗЕМНЫХ И СПУТНИКОВЫХ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

5.4.1. Математическая модель и ее назначение

Методы анализа и обработки измерений реальных объектов на ЭВМ могут быть применены опосредованным путем через математические модели этих объектов.

Математическая модель дает специфическую картину объективного мира и описывает его сущность математическими символами (числами, буквами, векторами, тензорами и т. п.), отношениями, функциями и операциями. Математическая модель объекта (процесса) получается из обработки и осмысления материалов наблюдений объекта и его связей с другими объектами. Выборка элементов, отношений, функций и операций в математической модели оценивается на основе знаний об объекте и экспериментов. Опытные данные используются для уточнения теории и построения новой модели объекта, отражающей его существенные признаки более полно и с более высокой точностью. В рамках этой новой модели на ЭВМ можно выводить следствия надежным однозначным путем и сравнивать их с данными экспериментов.

В проявлениях реального объекта можно обнаружить случайные отклонения от закономерных данных, получаемых из математической модели, учитывающей главные факторы. Если эти случайные отклонения существенно меньше достигнутой точности эксперимента, то можно сказать, что главная закономерность (сущность), свойственная данному объекту и дающая научный прогноз его проявлений, описана на уровне требований опыта. Возможно потребуется построить более точную математическую модель. Отклонение модели от реальных проявлений объекта говорит о необходимости ее уточнения с учетом факторов, порождающих систематические отклонения.

Один и тот же объект можно описать на разных уровнях. Каждому уровню описания объекта будет соответствовать своя математическая модель. Математическая модель объекта возможно будет иметь трехкратную, семикратную и стократную подробности по сравнению с ранее известными моделями этого же объекта — все зависит от уровня наших знаний и возможностей, а также от требований практики. При этом

существенные признаки объекта могут служить в виде ограничителя задачи моделирования. Признаки объекта бывают постоянными и переменными. Постоянные признаки отражают неизменные свойства объекта. Простейшим примером служит статический объект, параметры которого фиксируются на снимке. Однако все зависит от детализации и точности описания признаков каждого элементарного участка снимка объекта. В зависимости от уровня подробности описания модели изменяется число точек снимка, координаты и определяющие признаки которых должны быть известны. Признаковая переменная наиболее характерна динамическим объектам с изменяющимися во времени параметрами. В математической модели динамического объекта прибегают к упрощениям и идеализации. Так например, при моделировании движения планет Солнечной системы Солнце и все планеты представляются точечными массами. Масса планеты M имеет постоянную величину, равную массе покоя M_0 . Если потребуется более высокий уровень описания, то нужно учесть поправку $M - M_0 = M_0 v^2 / 2c^2$, где v — орбитальная скорость планеты; c — скорость света. Так например, для Земли ($M_0 \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, $v = 30$ км/с) эта поправка равна $3 \cdot 10^{19}$ г.

Движение планет описывается законом всемирного тяготения. В первом приближении реальное движение планеты обусловлено притяжением Солнца. Во втором приближении учитываются силы притяжения других планет и спутников самой планеты. Такая модель с высокой точностью отображает движение планет. Солнце, Земля и другие планеты притягивают друг друга как точечные массы почти точно по закону Ньютона, так как, во-первых, расстояния между ними велики по сравнению с их размерами и, во-вторых, они имеют форму, близкую к шару с концентрическими слоями почти одинаковой плотности. Например, притяжение Земли Солнцем отличается от того, какое имело бы место по закону притяжения двух точечных масс на $1/150\,000\,000\,000$ его долю.

Каждая планета притягивается Солнцем вследствие его большой массы ($m_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г) гораздо сильнее, чем другими планетами. Например, притяжение Земли Меркурием не превосходит $1/300\,000$, Марсом $1/800\,000$, Венерой — $1/32\,000$, Юпитером $1/16\,000$ доли Солнечного притяжения. Таким образом, первое приближение, являясь сильным, обеспечивает большую точность во втором приближении модели к реальному движению планет.

При построении математической модели движения Луны из-за близости ее к Земле уже в первом приближении Земля представляется не точечной массой, а однородным эллипсоидом вращения с полярным сжатием $\alpha = 1/298,257$.

Модели движения планет и их спутников, хотя и динамичны, но имеют небольшое множество элементов, слабо коррелированных с явлениями некосмического масштаба. Такие модели относятся к классу автономных.

Взаимосвязь явлений в земных условиях порождает пересечение множеств и тесную корреляцию элементов, принадлежащих моделям таких явлений. Эти модели относятся к классу неавтономных. Типичным

примером неавтономных моделей являются математические модели фигуры и гравитационного поля Земли, ее водной оболочки и атмосферы, параметры которых тесно связаны и изменяются во времени. Модели указанных объектов имеют планетарное распространение, содержат мощное множество элементов, отношений и фундаментальных связей. Для моделей фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля характерны пересечение множеств элементов и тесная их корреляция. Математическим основанием этих моделей служат: теория потенциала и уровенных поверхностей, сферические и эллиптические функции, алгебра матриц и многомерная геометрия, теория ошибок измерений и метод наименьших квадратов.

Математическая модель, параметры которой однозначно определены, идеализирует объект, абстрагируясь от его второстепенных признаков и скрытых связей с другими объектами. Такая модель относится к классу детерминированных.

Астрономо-геодезия изучает объекты, проявление которых зависит от множества факторов, из которых удаётся строго описать только малую часть. Второстепенных, или так называемых малозначительных факторов, не поддающихся строгому описанию, бывает так много, а влияние их столь сложно и велико, что приходится строить модели, параметры которых носят случайный характер. Математическая модель, элементы которой и их связи обладают свойствами случайных величин, относится к классу недетерминированных.

Теоретически можно неограниченно повышать точность моделирования объекта и всех его проявлений, учитывая все новые группы его признаков — от существенных до малозначительных. Попытка учесть без отбора влияние всех факторов дала бы ценный материал в единичных случаях или вообще не увенчалась бы успехом. Это можно предпринять, если из единичных моделей предполагается индуцировать общие положения, а затем дедуктивным путем получить единичные или менее общие, но конкретные сведения.

Первое назначение математической модели — воспроизведение теоретических данных, сопоставимых с эмпирическими и необходимых для новых испытаний при дальнейшем углубленном изучении объекта (процесса). Если теоретические выводы, полученные при обработке математической модели, совпадают с данными наблюдений объекта, выполненных по новой усовершенствованной программе, в пределах точности измерений, то можно утверждать, что математическая модель не противоречит достигнутому уровню знаний. Только при этом условии теоретические выводы данной математической модели можно использовать для углубленного изучения объекта и его проявлений, для построения модели другого объекта, взаимосвязанного с ним. Если же параметры математически преобразованной модели уклоняются от соответствующих данных наблюдения объекта в недопустимых пределах, то необходимо совершенствовать программу эксперимента или описания сущности объекта. Нередки случаи, когда математический аппарат обработки модели оказывается нестрогим и не позволяет воспроизво-

дить данные модели с точностью, соответствующей точности эксперимента. Математический аппарат, позволяющий воспроизводить строгие преобразования математической модели, является одним из основных условий построений новой математической модели объекта. Кроме того, следует учитывать логические правила и те закономерности, которые известны, т. е. необходимо опираться на уже изученные закономерности и выявленные ранее содержание и форму взаимосвязи явлений. Однако могут быть применены абстракции, отражающие действительные процессы в развитии объекта и определенные его свойства.

Имеется много геодезических и геодинамических задач, решение которых невозможно, например, из-за отсутствия необходимой экспериментальной базы или дороговизны эксперимента. Встречаются также объекты, многие параметры которых вообще не могут быть измерены непосредственно.

Такие экспериментальные задачи выполняют с помощью математической модели, путем постановки на ЭВМ математических экспериментов. Постановка и выполнение на ЭВМ математических экспериментов — это второе назначение математической модели.

До появления ЭВМ и широкого применения математических моделей теория вероятностей и математическая статистика применялись главным образом для обработки опытных данных. Такие этапы исследования объекта, как формулировка задачи (описание и формализация исходных и измеряемых параметров на объекте, описание и список независимых переменных, диапазон их существования, выборка зависимых переменных и т. д.), объем и порядок проведения эксперимента, оптимизация средств и методов наблюдений, выполнение и контроль за ходом эксперимента, сбор, анализ и интерпретация результатов эксперимента в основном зависели от интуиции и накопленного опыта исследования.

В настоящее время первоначально ставится задача теоретического обоснования и планирования эксперимента путем построения его математической модели, оптимизирующей программу выполнения эксперимента, начиная от формулировки задачи вплоть до процедуры интерпретации ожидаемых опытных данных.

Если раньше математические методы применялись, как правило, на последнем этапе — при обработке результатов наблюдений объекта, то теперь они опосредованным путем с помощью математических моделей участвуют на всех этапах эксперимента. При этом в математической модели параметры эксперимента могут быть определены на любом этапе его выполнения.

Случайная выборка астрономо-геодезических измерений, которая распределена по нормальному закону или таким образом, что математическое ожидание случайных ошибок измерений равно нулю, эффективно оценивается по методу наименьших квадратов (МНК). По МНК оценивается эффективно любой параметр, представляющий функцию или функцию от функций измеренных величин [12].

Часто при обработке результатов астрономо-геодезических измерений их закон распределения известен из теоретических предпосылок,

например, как правило, предполагается закон нормального распределения. Экспериментальные исследования рядов измерений показывают, что гипотеза о нормальном распределении ошибок измерений оказывается идеализированной моделью. Реальный ряд ошибок часто отклоняется от нормального распределения, и возникает задача оценивания параметров распределения и оценивания их точности. Случайная выборка измерений не может явно выявить статистические закономерности из-за ограниченности ее объема. Как правило, трудно однозначно ответить на вопросы согласуются ли результаты измерений с гипотезой принадлежности их к тому или другому классу распределения случайных величин и имеются ли зависимости между результатами измерений. В связи с этим возникает задача выдвижения гипотез и статистической проверки измерений с помощью критериев различного рода.

Построение и оптимизация корреляционных моментов K_V как весовой матрицы квадратичной формы $F = V'K_V^{-1}V$ для вектора поправок V уравниваемых величин является первым этапом эффективного применения МНК для оценивания параметров случайной выборки результатов астрономо-геодезических измерений.

Построение, анализ и оптимизация корреляционных моментов K_Φ функции Φ случайной выборки измерений является вторым этапом в оптимизационной задаче, решаемой МНК при обработке результатов измерений.

Астрономо-геодезические работы охватывают обширные регионы, континенты, акватории Мирового океана и всю поверхность планеты; они выполняются в разное время в течение года, нескольких лет, десятилетий и столетий. Поэтому случайные выборки результатов измерений обрабатываются по мере поступления из-за потребности на любом этапе иметь исходные данные для астрономо-геодезического обеспечения развития производства, новых технологий, топографии, картографии и инженерных изысканий, изучения природы и экологии.

Различные случайные выборки результатов измерений, выполненных даже в течение одного года, невозможно совместно обработать не только из-за большего объема, но и по причине отсутствия связей между ними и различия систем отсчета координат и гравитации. Таким образом возникает задача поэтапной раздельной обработки множества случайных выборок результатов измерений методом последовательной групповой оптимизации.

Потребности новых технологий, основанных на автоматизированной обработке исходных геодезических данных в режиме «человек — ЭВМ» в реальном масштабе времени действия технических средств, ставят задачу оперативной автоматической обработки каждой случайной выборки измерений в течение минуты или за единицы и доли секунды времени с учетом данных, полученных из ранее выполненной операции над результатами измерений.

Перечисленные задачи составляют проблему теоретического и технического характера о способах обеспечения надежности и эффективности планирования и математической обработки результатов астрономо-гео-

дезических измерений в условиях неизбежных помех из-за накапливающегося влияния ошибок измерений, случайных или систематических сбоев в работе измерительных средств и ЭВМ.

Таким образом, теоретическое обоснование, планирование, оптимизация и сопровождение наземных и спутниковых астрономо-геодезических измерений есть третье назначение математической модели.

Математическая модель должна представить объект таким образом, чтобы облегчить его изучение и получение о нем новых знаний, составление прогнозов его проявлений, оптимизацию и управление его развитием. Н. Винер в своей работе «Кибернетика» (1948 г.) показал возможность управления объектом при неполном знании его механизма, когда не определены функции, описывающие его внутреннее построение. Путем вариации переменных, проявляя статистику входных и выходных величин, можно вскрыть выборку элементов объекта, законы их распределения на заданном измеримом пространстве и дать вероятностно-статистическое описание объекта в виде недетерминированной математической модели. Факторы-помехи, не поддающиеся точному описанию, можно интерпретировать как случайные величины и предположить законы их распределения. Накопив необходимую статистику, применяют статистический анализ, оценивают интересующие параметры объекта и проверяют достоверность выдвинутой ранее гипотезы о законе распределения элементов объекта.

Таким образом, математическая модель служит инструментом обоснования решений в условиях неопределенности и случайных изменений при неизбежных ошибках измерений и помех, не поддающихся точному описанию. Это — четвертое предназначение математической модели.

Пятое предназначение математической модели — это математическое обоснование физической модели объекта. В интересах практики часто достаточно знать самые существенные признаки изучаемого объекта. Поэтому строят физический аналог объекта и по нему изучают его существенные признаки и проявления, или из всего множества параметров объекта измеряют только те, по которым можно изучить интересующие свойства и проявления объекта. В первом случае математическая модель служит основанием для построения физической модели самых существенных элементов объекта в ином масштабе вне объекта. Во втором случае математическая модель обосновывает возможность изучения объекта в реальном масштабе и времени путем измерения существенных его элементов. При этом сам объект выступает в роли физической модели в реальном масштабе и времени.

Математические модели являются абстрактным отображением основных элементов, отношений и свойств реального объекта.

Математические модели постоянно проверяются путем сравнения с результатами эксперимента и выявления нового по сравнению с тем, что давали старые модели. В результате математические модели непрерывно обогащаются, отвечая каждый раз на все возрастающие потребности практики новыми приложениями и более совершенными приемами познания свойств и прогноза развития объекта. Математические модели

становятся более общими и универсальными и в доступной форме отражают свойства объекта, на что раньше требовались специальные средства, особые приемы и большие усилия.

5.4.2. Теория градиентов и применение принципа однородности пространства при уравнивании результатов измерений

Скалярную функцию $\Phi(x, y, z)$ характеризует градиент-вектор

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (669)$$

показывающий направление наискорейшего изменения функции, значение которой непрерывно меняется от одной точки пространства к другой. Градиент-вектор обладает следующими свойствами:

$$\nabla (\Phi_1 \pm \Phi_2) = \nabla \Phi_1 \pm \nabla \Phi_2; \quad \nabla (\Phi_1 \Phi_2) = \Phi_2 \nabla \Phi_1 + \Phi_1 \nabla \Phi_2; \quad (670)$$

$$\nabla (c\Phi) = c \nabla \Phi, \text{ если } c = \text{const.}$$

Модуль градиента-вектора, называемый градиентом, согласно определению (669), является скалярной величиной

$$g_\Phi = |\nabla \Phi| = \sqrt{(\partial \Phi / \partial x)^2 + (\partial \Phi / \partial y)^2 + (\partial \Phi / \partial z)^2}. \quad (671)$$

Характерным примером служит вектор-ускорение \mathbf{g} , который по определению есть градиент-вектор потенциала силы тяжести $W(x, y, z)$. На основании (669) и (671) вектор силы тяжести

$$\mathbf{g} = W_x \mathbf{i} + W_y \mathbf{j} + W_z \mathbf{k}, \quad (672)$$

а его модуль скалярная величина

$$g = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad (673)$$

является градиентом потенциала силы тяжести $W(x, y, z)$ и имеет размерность $\text{см}/\text{с}^2$.

Вектор-ускорение \mathbf{g} показывает направление наискорейшего изменения потенциала силы тяжести $W(x, y, z)$ в однородном трехмерном пространстве.

По определению (669) градиент силы тяжести

$$g_n = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \quad (674)$$

имеет размерность $1/\text{с}^2$.

Понятие градиента потенциала и силы тяжести нами было введено в разделах 5.28—5.31 и использовано в теоретических исследованиях свойств потенциальной поверхности.

Получим формулы для выражения градиентов других величин.

Градиент горизонтального направления A_0 и азимута A на основании формул (321) и (671) будет

$$g_{A_0} = g_A = 1/D. \quad (675)$$

Градиент зенитного расстояния z получим, пользуясь формулами (314) и (671),

$$g_z = 1/s. \quad (676)$$

Градиент линии, согласно равенствам (323), (330), (339), (671),

$$g_D = g_s = g_p = 1. \quad (677)$$

Градиент топоцентрического прямого выхождения α (часового ϕ угла) на основании формул (339) и (671)

$$g_\alpha = g_\phi = 1/(\rho \cos \delta). \quad (678)$$

По аналогии градиент астрономической λ и геодезической L долгот:

$$g_\lambda = 1/(r \cos \varphi) \quad (679)$$

Градиент топоцентрического склонения δ получим, пользуясь уравнениями (339) и (671),

$$g_\delta = 1/\rho. \quad (680)$$

По аналогии градиент астрономической φ и геодезической B широт:

$$g_\varphi = 1/r; \quad g_B = 1/(M + H). \quad (681)$$

Градиенты составляющих уклонения отвеса $\xi = \varphi - B$ и $\eta = (\lambda - L) \cos \varphi$ получим, пользуясь формулами (679), (681) и (670):

$$g_\xi = \frac{M + H - r}{r(M + H)}; \quad g_\eta = \frac{N + H - r}{r(N + H)} \quad (682)$$

Градиент пространственного угла β между двумя радиусами-векторами ρ_{i1} и ρ_{i2} получим с помощью формул (339), (670) и (671),

$$g_\beta = \frac{\sqrt{\rho_{i1}^{-2} + \rho_{i2}^{-2} - 2\rho_{i1}^{-1}\rho_{i2}^{-1}\cos\beta}}{\rho_{i1}\rho_{i2}}. \quad (683)$$

По аналогии градиент горизонтального β_0 между двумя радиусами-векторами D_{i1} и D_{i2} будет

$$g_{\beta_0} = \frac{D_{i2}}{D_{i1}D_{i2}}. \quad (684)$$

Градиент разности двух топоцентрических расстояний ρ_{i1} и ρ_{i2} можно получить с помощью формул (339), (670) и (671) так:

$$g_{\Delta\rho} = \sqrt{2 - 2\cos\beta} = 2\sin(\beta/2) \quad (685)$$

По аналогии градиент разности двух горизонтных расстояний D_{i1} и D_{i2}

$$g_{\Delta D} = 2\sin(\beta_0/2). \quad (686)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию градиента. Каждая измеренная величина $\Phi(x, y, z)$ как скалярная функция координат определяет поверхность. Например, потенциал силы тяжести $W(x, y, z)$

составляет уровенную поверхность, проходящую через точку $Q(x, y, z)$, а для измеренных линий D, s, ρ — поверхность шара соответствующего радиуса.

Градиент-вектор по определению есть нормаль-вектор к поверхности $\Phi(x, y, z)$ в точке Q с координатами x, y, z , модуль которого равен производной скалярной функции $\Phi(x, y, z)$ по нормали, т. е.

$$g_{\Phi} = d\Phi/dn. \quad (687)$$

Градиент-вектор $\nabla\Phi$ определяет плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, касательную к поверхности $\Phi(x, y, z)$ в точке $Q(x, y, z)$. Погрешность измерений $d\Phi$ приводит к смещению касательных плоскостей по нормали на величину $dn = d\Phi/g_{\Phi}$. Следовательно среднее квадратическое смещение касательной плоскости

$$m_d = m_{\Phi}/g_{\Phi}. \quad (688)$$

Методом полной аналогии можно получить выражения для градиентов вариометрических и гравеоинерциальных измерений в целях их совместной обработки по МНК как измерений однородного трехмерного пространства.

Примечательная закономерность состоит в том, что отношение любой скалярной функции координат $\Phi(x, y, z)$ к собственному градиенту g_{Φ} всегда имеет размерность однородного пространства координат.

Таким образом, чтобы уравниваемые по МНК ряды измеренных величин имели однородную размерность пространства, каждому результату измерений $\Phi(x, y, z)$ необходимо придавать соответствующий вес с учетом его градиента g_{Φ} и погрешности m_{Φ} .

Очевидно уравнения поправок $V_{\Phi} = B_{\Phi}X + W_{\Phi}$ для любого ряда измерений Φ при делении на их градиент g_{Φ} становятся однородными по размерности

$$V = BX + W, \quad (689)$$

где $V = V_{\Phi}/g_{\Phi}$; $W = W_{\Phi}/g_{\Phi}$; $B = B_{\Phi}/g_{\Phi}$.

При этом составляющие векторов V, W, X имеют одинаковую линейную размерность в масштабе, в котором выражены координаты x, y, z . Элементы матрицы преобразования координат B будут безразмерными величинами, и тем самым соблюдается принцип однородности пространства как необходимое условие выполняемых при обработке по МНК результатов измерений. Веса p уравнений поправок (689) будут отвлеченными числами как вероятностные их характеристики. Элементы корреляционных матриц как функции оператора преобразования координат B и весов p уравнений поправок (689) будут также отвлеченными числами, что и требуется для правильной оценки коэффициентов корреляции составляющих векторов V, X , оцениваемых по МНК.

Таким образом, применение градиентов измеренных величин и их функций позволяет строго уравнивать всевозможные ряды измерений и их функций, составленные из разнородных величин.

5.4.3. Систематическая ошибка измерений и взаимосвязь уравниваемых величин. Информативность функций рядов измерений

Систематическая ошибка в измерениях искажает свободный член уравнения поправок

$$V = BX + W \quad (690)$$

и дисперсию единицы веса.

Погрешность параметра оценивается так

$$\Delta X = -(B'pB)^{-1} B'p\Delta W = -Q_X B'p\Delta W, \quad (691)$$

где ΔW — погрешность свободного члена уравнения (690), обусловленная влиянием систематических ошибок измерений.

Погрешность дисперсии ΔD единицы веса определяется ошибкой оценивания поправок V , обусловленной погрешностями ΔX и свободного члена ΔW .

С учетом (690) и (691) получим выражение

$$\Delta V = P_B \Delta W, \quad (692)$$

где $P_B = E - BQ_X B'P$ есть оператор преобразования координат, обладающий свойством $P_B^2 = P$.

Квадратичную форму $V'pV$ с учетом погрешности ΔV выразим так

$$F = V'pV = (V_0 + P_B \Delta W)'p(V_0 + P_B \Delta W) = V_0'pV_0 + V_0'pP_B \Delta W + \Delta W'P_B pV_0 + \Delta W'P_B pP_B \Delta W. \quad (693)$$

Очевидно, 2-й и 3-й члены в силу компенсации случайных ошибок будут равны нулю. Тогда погрешность квадратичной формы будет

$$\Delta F = V_0'pV - V_0'pV_0 = \Delta W'P_B pP_B \Delta W.$$

Заметим, что с учетом (692) весовая матрица $P_B'pP_B = pP_B$, тогда погрешность квадратичной формы $\Delta F = \Delta W'pP_B \Delta W$. Погрешность дисперсии единицы веса оценим по формуле

$$\Delta D = \Delta W'pP_B \Delta W / (n - k). \quad (694)$$

Рассмотрим в другом аспекте влияние систематических ошибок на оценивание параметров по МНК. Пусть систематические ошибки измерений в качестве дополнительных параметров Y исключены в процессе уравнивания [12]. Очевидно в этом случае квадратичная форма $V_0'pV_0$ и дисперсия единицы веса не будут искажены, так как систематическая часть в оценке свободного члена компенсируется за счет введения дополнительных параметров Y , учитывающих систематические ошибки измерений. Тем не менее, поскольку часть измерительной информации затрачивается на определение дополнительных параметров, оценка дисперсии искомого параметра ухудшается из-за уменьшения степени свободы системы уравнений поправок.

Поставим задачу оценивания k необходимых X и l дополнительных

Y параметров по выборке n измерений с весом p . При этом $n > k + l$. Уравнения поправок запишем с помощью блочных матриц в форме

$$V_0 = [B|A] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + W, \quad (695)$$

где B — матрица из n строк и k столбцов; A — матрица из n строк и l столбцов.

Нормальные уравнения, соответствующие решению системы (695) под условием $V_0'pV = \min$, имеют следующие элементы:

$$RX + TY = -B'pW; \quad UX + SY = -A'pW, \quad (696)$$

где $R = B'pB$; $T = B'pA$; $U = A'pB$; $S = A'pA$.

Обратная матрица N^{-1} для нормальных уравнений на основании известных формул обращения блочных матриц [12] состоит из 4 блоков

$$R_0 = Q_X + Q_X T S_0 T' Q_X; \quad Q_X = (B'pB)^{-1}; \quad (697)$$

$$T_0 = -Q_X T S_0; \quad U_0 = T_0'; \quad (698)$$

$$S_0 = (A'pP_B A)^{-1}.$$

Рассмотрим блок R_0 . Первое слагаемое Q_X представляет собой корреляционную матрицу необходимого параметра X , определяемого без выявления систематических ошибок в измерениях. Наличие второго слагаемого в выражении (697) указывает на изменение оценок X за счет включения в число определяемых величин систематических ошибок измерений. Без их учета имеем оценку

$$X_1 = -Q_X B'pW, \quad (700)$$

а при учете искомого параметр будет

$$X_2 = -Q_X B'pW + Q_X T S_0 \bar{A}'pW, \quad (701)$$

где $\bar{A}' = A' - T'Q_X B'$.

Разность двух оценок

$$X_1 - X_2 = -Q_X T S_0 \bar{A}'pW \quad (702)$$

есть погрешность оценки искомого параметра, обусловленная влиянием систематических ошибок измерений. Оценка X_1 имеет систематическую ошибку

$$\Delta X_1 = -Q_X B'p\Delta W. \quad (703)$$

Погрешность свободного члена, выраженная относительно дополнительного параметра Y равна

$$\Delta W = -AY. \quad (704)$$

Дополнительный параметр на основании (696), (697) и (701) будет

$$Y = -S_0 \bar{A}'pW. \quad (705)$$

Подставим Y в равенство (703) и получим оценку погрешности свободного члена

$$\Delta_W = AS_0\bar{A}'pW.$$

Исключим Δ_W в выражении (703) и получим оценку погрешности первого решения $\Delta X_1 = -Q_X T S_0 \bar{A}' p W$, которая точно совпадает с разностью (702) результатов двух решений. Как и следует из постановки задачи, второе решение (701) не отягощено влиянием систематических ошибок измерений.

Замечаем обстоятельство, что след матрицы $\text{sp } R_0$ во втором решении будет больше, чем след матрицы $\text{sp } Q_X$ в первом решении из-за дополнительного члена $Q_X T S_0 \bar{A}' Q_X$. Однако в первом решении квадратичная форма $V'pV$ будет иметь погрешность ΔF , оцениваемую формулой (690). Поэтому вычисляем отношение оценок дисперсии необходимых параметров двух решений по формуле

$$F = \frac{[V_0 p V_0 / (n - k - l)] \text{sp } R_0}{[V' p V / (n - k)] \text{sp } Q_X}. \quad (706)$$

Если дисперсионное отношение $F_0 \leq 1$, то совместное определение искомых параметров и систематических ошибок измерений является корректной задачей. В результате имеем эффективную оценку в виде решений (701) и (705) с дисперсионной матрицей

$$K_{X,Y} = \frac{V_0 p V_0}{n - k - l} \begin{bmatrix} R_0 & T_0 \\ T_0' & S_0 \end{bmatrix}. \quad (707)$$

Если $F_0 > 1$, то требуется дополнительное обоснование с помощью числа F_q по критерию Фишера при заданном уровне вероятности q и по числам степеней свободы $r_1 = n - k$ и $r_2 = n - k - l$. Если $F < F_q$, то в качестве эмпирической оценки искомых параметров X и Y принимаем решения (701) и (705) с дисперсионной матрицей. Если $F > F_q$, то систематические ошибки разделяем на l_1 групп ($l_1 < l$) и повторяем решение задачи. Если при повторном решении соблюдается условие $F_1 < F_q$, то оно принимается за эффективное решение. Уменьшение числа групп соответственно ослабляет корреляцию уравниваемых величин и искомых параметров. Увеличение тесноты корреляции уравниваемых величин уменьшает информативность системы, т. е. тождественно понижению ее степени свободы [12]. Таким образом, возникает задача оценки информативности системы уравниваемых величин как составной части проблемы эффективного оценивания параметров по МНК. Информативность является одной из важных качественных и количественных показателей геоинформационных измерительных систем (ГИИС). В то же время в банках ГИИС по техническим и экономическим ограничениям не могут храниться ряды геономической (астрономо-геодезической, гравиметрической, геофизической, топографической, картографической и др.) измерительной информации. Ряд геономической измерительной информации (ГИИ) эквивалентно можно заменить соответ-

ствующими параметрами, которые оцениваются по МНК как компактные функции рядов ГИИ и требуют меньших затрат средств для их хранения и обработки на ЭВМ. Поэтому актуальной становится задача эффективного оценивания параметров по МНК как элемент новой геоинформационной технологии. Решение этой задачи требует научного обоснования на основе оценки информативности функций рядов ГИИ. Разработка способов повышения информативности функций рядов ГИИ является одной из новых задач в развитии геоинформационной технологии.

Редукция измерений в единую систему отсчета координат и гравитации эквивалентна учету систематических ошибок измерений. Когда измерения аппроксимируются с учетом изменения параметров системы координат и гравитационного поля априор заданной модели внутреннего строения Земли и вариометрических измерений вторых производных потенциала силы тяжести, то такие измерения становятся коррелированными величинами. При строгой обработке по МНК необходимо учитывать взаимосвязь уравниваемых величин, получаемых путем редукции и аппроксимации результатов измерений. Однако увеличение взаимосвязи уравниваемых величин возможно до некоторых допустимых пределов. Например, если поставили задачу оценивания всевозможных параметров измерений, включая и редукционные величины, то корреляция уравниваемых величин может оказаться настолько сильной, что уравнения поправок (690) приведут к системам нормальных уравнений с квазивырожденной матрицей.

5.4.4. Принцип многоэтапного уравнивания обширных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений

При обработке связанных измерений по МНК системы линейных уравнений по мере увеличения их порядка постепенно вырождаются в слабообусловленные системы. В предельном случае геодезическая сеть, составленная на основе обширных связанных измерений, становится свободной системой.

Следует заметить, что измерения в геодезических сетях, выполненные в разное время в течение нескольких десятков лет, как статистика не представляет единую генеральную выборку из-за невозможности их точной редукции в единую систему отсчета и гравитации. Кроме этого, пока нет технической возможности для точного решения систем нормальных уравнений порядка 600 тыс., возникающих при совместной обработке континентальной триангуляции, так как возникает непреодолимое противоречие между высоким требованием к точности вычислений и слабой обусловленностью обширных систем нормальных уравнений. Учет ошибок округлений на ЭВМ, влияние которых возрастает с увеличением порядка нормальных уравнений, становится одной из трудных технических задач в решении по МНК больших систем уравнений поправок. Очевидно, преодоление вышеуказанных трудностей следует искать на путях реализации компьютерных алгоритмов, основанных на идеях

группового многоэтапного метода уравнивания. Сущность метода заключается в разделении обширной системы астрономо-геодезических и гравиметрических измерений на группы и в оптимизации оценок по МНК параметров X , компактно представляющих соответствующую группу измерений L . При этом возникает задача оценивания ковариационных матриц K_X и K_L параметров X и измеренных величин L , которая выполняется с помощью псевдооператоров.

Для произвольной прямоугольной или вырожденной квадратной матрицы N символ обратной матрицы N^{-1} не имеет смысла. Однако существует псевдооператор N^+ , который обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и может быть применен в матричных операциях над линейными уравнениями.

Псевдооператор N^+ размера $n \times m$ называется псевдообратной матрицей для матрицы N размеров $m \times n$, если выполняется условие

$$NN^+N = N. \quad (708)$$

Из определения псевдообратной матрицы следует, что для квадратной матрицы ее псевдообратная матрица будет также квадратной и того же размера, что и исходная матрица. В частном случае для неособенной квадратной матрицы N псевдообратная N^+ совпадает с ее обратной матрицей N^{-1} .

Исходная матрица N для матрицы N^+ является псевдообратной, т. е. имеет место равенство $(N^+)^+ = N$.

По определению псевдообратной матрицы (708) квадрат каждой из матриц NN^+ и N^+N равен самой матрице, т. е.

$$(NN^+)(NN^+) = NN^+; (N^+N)(N^+N) = N^+N.$$

В практике уравнивательных вычислений, как правило, ранг прямоугольной матрицы $A(B)$ уравнений поправок в коррелятном (параметрическом) способе равен числу строк матрицы A (столбцов матрицы B). Поэтому необходимость в применении псевдообратной матрицы не возникает, так как квадратная матрица $N = AA'$ ($N = B'B$) нормальных уравнений в коррелятном (параметрическом) способе имеет порядок, равный ее рангу, и для нее существует обратная матрица N^{-1} .

По формальной логике и в этом случае можно пользоваться понятием псевдообратной матрицы, удовлетворяющей условию (708).

В действительности можно вычислять псевдообратные матрицы таким образом, что

$$\begin{aligned} A^+ &= A'(AA')^{-1}; \quad N^+ = (AA')^{-1}; \\ B^+ &= (B'B)^{-1}B'; \quad N^+ = (B'B)^{-1}. \end{aligned} \quad (709)$$

Заметим, что в этом частном случае произведение исходной и псевдообратной матриц дает единичную матрицу, т. е.

$$AA^+ = E; \quad B^+B = E; \quad NN^+ = N^+N = E.$$

Особый интерес представляет задача уравнивания свободных геодезических сетей без исходных пунктов, когда ранг прямоугольной матри-

цы уравнений поправок $A(B)$ в коррелятном (параметрическом) способе меньше числа строк матрицы A (столбцов матрицы B). В этом особом случае порядок матрицы нормальных уравнений $N = AA'(N = B'B)$ превышает ее ранг, она вырождается и возникает задача с псевдообратной матрицей. При этом определение псевдообратной матрицы N^+ под условием (709) соответствует задаче аппроксимации по методу наименьших квадратов. Таким образом, в свободной геодезической сети решение задачи можно записать следующими формулами [12]:

$$AV + W = 0; \quad K = -(AA')^+ W; \quad V = -A'(AA')^+ W \quad (710)$$

— в коррелятном способе;

$$V = BX + W; \quad X = -(B'B)^+ B' W; \quad V = (E - B(B'B)^+ B') W \quad (711)$$

— в параметрическом способе.

Псевдообратная матрица может быть вычислена по формуле

$$N^+ = M_1 N_1 M_2, \quad (712)$$

$$\text{где } M_1 = \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} (N_1 N'_1 + N_2 N'_2)^{-1}; \quad M_2 = (N'_3 N_3 + N'_4 N_4)^{-1} [N'_3 N'_4];$$

N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) составляющие блоки матрицы:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix}.$$

Для симметричной матрицы $N^+ = M_1 N_1 M'_1$, ибо $N_2 = N'_3$.

Матрица N с вещественными элементами разделяется на блоки таким образом, что N_1 — неособенная квадратная матрица, ранг которой равен рангу исходной матрицы N . В общем случае из правила вычисления псевдообратной матрицы по формулам (712) и (708) не следует, что произведение псевдообратной на исходную матрицу равно единичной матрице, как это имело место в частном случае при формальном подходе к построению псевдообратной матрицы по формулам (710) и (711).

Для вырожденной матрицы N имеет место матричное уравнение

$$\delta N_4 = N_4 - N_3 N_1^{-1} N_2 = 0. \quad (713)$$

Решение некорректно поставленной задачи связано с операциями над слабообусловленными (квазивырожденными) матрицами, для которых практически не удается вычислить обратные матрицы. Необходима фильтрация квазивырожденной матрицы N с целью выделения строк (столбцов), являющихся квазилинейной комбинацией других ее строк (столбцов). После фильтрации из таких строк (столбцов) можно образовать блоки N_3 и N_4 (N_2 и N_4) таким образом, что первый блок будет представлен неособенной матрицей N_1 , для которой существует обратная матрица N_1^{-1} . После разбиения квазивырожденной матрицы N на

такие 4 блока, применяя формулу (712), можно определить псевдообратную матрицу N^+ , которая эквивалентно заменяет обратную матрицу N^{-1} в задаче наилучшей аппроксимации по МНК.

Если квазивырожденную матрицу N удастся разложить на блоки N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) таким образом, что элементарная матрица $\delta N_4 = N_4 - N_3 N_1^{-1} N_2$ мало отличается от нулевой матрицы, то с помощью псевдооператора N^+ будет найдено эффективное решение некорректной задачи уравнивания по МНК. Заметим, что формула (712) слабо реагирует на малые изменения элементов исходной матрицы и дает устойчивую оценку ее псевдообратной матрицы. Таким образом применение псевдооператоров дает возможность ослабить влияние ошибок вычисления элементов исходной матрицы и округления на компьютере, как при уравнивании свободной геодезической сети, так и при решении некорректно поставленной задачи оптимизации оценивания параметров. Это следует из основного свойства псевдооператоров, позволяющего надежно аппроксимировать функции по МНК для некорректно поставленных задач. Применение псевдооператоров в уравнивательных вычислениях эквивалентно применению метода регуляризации А. Н. Тихонова [3, 12]. При уравнивании свободных геодезических сетей предпочтение следует отдать псевдооператорам, так как выделение на компьютере из блока N невырожденной части N_1 является простой алгоритмической задачей.

Для квазивырожденной матрицы, если на ЭВМ несложно реализуется алгоритм фильтрации невырожденной матрицы N_1 из общего блока N , то следует применять псевдообратную матрицу. В противном случае целесообразно искать регуляризованное решение по методу А. Н. Тихонова [12]. При этом следует уделить особое внимание на вычисление стабилизаторов регуляризации, чтобы получить несмещенную оценку искомым параметрам.

Применение псевдооператоров позволяет получить несмещенную оценку уравниваемых величин L , так как их границы определения представляют результаты измерений. Что касается параметров X , если не указаны границы их существования, они будут иметь смещенную оценку из-за неопределенности начала отсчета координат. Необходимым условием является задание числимых значений определяемых параметров X^0 и границы их существования K_x . Так например, при геофизической интерпретации астрономо-геодезических и гравиметрических измерений, включая вариометрические наблюдения вторых производных потенциала силы тяжести, должны быть априорно заданы в виде числимых значений X^0 с дисперсионной матрицей K_x аномалии плотностей масс и их пространственного распределения.

Применение принципа многоэтапного уравнивания рассмотрим на оценке по МНК параметров АГС. Сущность метода группового многоэтапного уравнивания АГС заключается в следующем. В обширной АГС выделяем сеть узловых пунктов. Соединив их по сторонам триангуляции граничными ходами, разделим АГС на s крупных блоков. Узловые пункты на вершинах таких блоков будем выбирать на удалении 600—800 км друг от друга таким образом, чтобы некоторые из них были

совмещены (соединены геодезически) с наземными астрономо-геодезическими обсерваториями, пространственные координаты X_T, Y_T, Z_T которых определены по наблюдениям небесных объектов.

На первом этапе выполняют предварительную обработку каждого блока, которая обеспечивает исключение систематических ошибок в определении азимутов Лапласа и базисах. Каждый блок ориентируется методом групповых итераций. В азимуты Лапласа вводятся поправки за систематические ошибки, пропорциональные секансу широты места. После предварительной обработки приступают к уравниванию блоков АГС. Каждый блок, расширенный двумя рядами треугольников из соседних блоков, уравнивают, как самостоятельную сеть. К азимутам Лапласа и базисам поправки не отыскиваются. Конечной целью первого этапа является вычисление приращений координат ΔG_i узловых пунктов. В каждом блоке АГС получаются восемь приращений координат четырех узловых пунктов и дисперсионная матрица 8-го порядка.

На втором этапе параметрическим способом с применением псевдооператоров совместно уравнивают s групп приращений ΔG_i ($i = 1, 2, \dots, s$) с учетом дисперсионных матриц K_i при условии $V'K^{-1}V = \min$. При этом за необходимые параметры принимают координаты G всех узловых пунктов АГС. В результате уравнивания получают координаты узловых пунктов G с дисперсионной матрицей K_G в системе отсчета координат, принятой для ГГС СССР 2 класса. Второй этап завершают перевычислением координат G и дисперсионной матрицы K_G узловых пунктов ГГС СССР 2 класса с учетом геодезических высот H в пространственные координаты X^0, Y^0, Z^0 с соответствующей им дисперсионной матрицей K^0 . Перевычисление делают в систему отсчета координат астрономо-геодезических обсерваторий с учетом счислимых значений элементов ориентирования двух систем отсчета координат.

На третьем этапе уравнивают пространственные координаты X^0, Y^0, Z^0 узловых пунктов совместно с координатами X_T, Y_T, Z_T астрономо-геодезических обсерваторий с учетом соответствующих дисперсионных матриц K^0 и K_T . При этом за необходимые параметры принимают пространственные координаты узловых пунктов ГГС СССР 2 класса и поправки к элементам взаимного ориентирования двух систем отсчета координат. Число избыточных измерений $r = 3p - e$ (p — число обсерваторий; $e \leq 7$ — число элементов взаимного ориентирования двух систем координат). На этом этапе также применяют параметрический способ с псевдообращением вырожденной матрицы нормальных уравнений. Так как $e \leq 7$, то для надежной оценки искоемых параметров достаточно иметь 20 обсерваторий, равномерно расположенных на территории страны. Конечной целью третьего этапа является получение пространственных координат X, Y, Z узловых пунктов ГГС СССР 2 класса с дисперсионной матрицей K на эпоху установления системы координат.

Со временем в новую эпоху в результате накопления высокоточных наблюдений небесных объектов на астрономо-геодезических обсерваториях и динамики Земли потребуются переход в новую систему отсчета координат и уточнение координат обсерваторий. В этом случае третий

этап уравнивания повторяется с целью получения новых значений координат узловых пунктов с соответствующей дисперсионной матрицей. Это означает, что координаты узловых пунктов каждый раз изменяются в связи с очередным уточнением координат АГО и переходом в новую систему отсчета. В перспективе с увеличением объема и точности наблюдений небесных объектов сеть АГО будет определена с дециметровой и даже сантиметровой точностью. Тогда она окончательно станет исходной сетью для трансформации пространственных координат узловых пунктов ГГС СССР 2 класса с пренебрегаемо малыми погрешностями, удовлетворяющими требованиям любой практики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии — М.: Недра, 1979.
2. *Бурша М.* Основы космической геодезии — М.: Недра, 1975.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц — М.: Наука, 1966.
4. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Методы теории движения небесных тел — М.: Наука, 1983.
5. *Ержанов Ж. С., Калыбаев А. А.* Общая теория вращения Земли — М.: Наука, 1984.
6. *Жарков В. Н.* Внутреннее строение Земли и планет — М.: Наука, 1983.
7. *Ишлинский Ю. А.* Классическая механика и сила инерции — М.: Наука, 1987.
8. *Космическая геодезия*/В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов и др. — М.: Недра, 1986.
9. *Кудрявцев Ю. И.* Теория поля и ее применение в геофизике — Л.: Недра, 1988.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика — М.: Наука, 1988.
11. *Машимов М. М.* Планетарные теории геодезии — М.: Недра, 1982.
12. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей — М.: Недра, 1989.
13. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет — М.: Мир, 1976.
14. *Океанология.* Геофизика океана — М.: Наука, 1979.
15. *Подобед В. В., Нестеров В. В.* Общая астрономия — М.: Наука, 1975.
16. *Цубои Т.* Гравитационное поле Земли — М.: Мир, 1982.
17. *Moritz H., Mueller I. I.* Earth rotation Theory and observation. N. Y. The Ungar Publ. Company, 1987.

Матрица $J_n = (\alpha l)_{pqs}$

| J_n | α_{pqs} | l_{pqs} | | | J_n | α_{pqs} | l_{pqs} | | |
|----------|----------------|-----------|-----|----------|----------|----------------|-----------|-----|-----|
| | | p | q | s | | | p | q | s |
| J_4 | -3/8 | 4 | 0 | 0 | J_5 | -1 | 0 | 0 | 5 |
| | -3/8 | 0 | 4 | 0 | | -15/8 | 4 | 0 | 1 |
| | -1 | 0 | 0 | 4 | | -15/8 | 0 | 4 | 1 |
| | -3/4 | 2 | 2 | 0 | | 5 | 2 | 0 | 3 |
| | 3 | 0 | 2 | 2 | | 5 | 0 | 2 | 3 |
| | 3 | 2 | 0 | 2 | | -15/4 | 2 | 2 | 1 |
| J_6 | -5/16 | 6 | 0 | 0 | J_7 | -1 | 0 | 0 | 7 |
| | -5/16 | 0 | 6 | 0 | | 105/16 | 4 | 2 | 1 |
| | -1 | 0 | 0 | 6 | | 105/16 | 2 | 4 | 1 |
| | -15/16 | 4 | 2 | 0 | | -105/8 | 4 | 0 | 3 |
| | 15/16 | 2 | 4 | 0 | | -105/8 | 0 | 4 | 3 |
| | -45/8 | 4 | 0 | 2 | | 35/16 | 6 | 0 | 1 |
| | -45/8 | 0 | 4 | 2 | | 35/16 | 0 | 6 | 1 |
| | 15/2 | 2 | 0 | 4 | | 21/2 | 2 | 0 | 5 |
| | 15/2 | 0 | 2 | 4 | | 21/2 | 0 | 2 | 5 |
| -45/4 | 2 | 2 | 2 | -105/4 | 2 | 2 | 3 | | |
| J_8 | -35/128 | 8 | 0 | 0 | J_9 | -1 | 0 | 0 | 9 |
| | 35/128 | 0 | 8 | 0 | | 18 | 0 | 2 | 7 |
| | -1 | 0 | 0 | 8 | | -189/4 | 0 | 4 | 5 |
| | 35/4 | 6 | 0 | 2 | | 105/4 | 0 | 6 | 3 |
| | 35/4 | 0 | 6 | 2 | | -315/128 | 0 | 8 | 1 |
| | -35/32 | 6 | 2 | 0 | | 18 | 2 | 0 | 7 |
| | -35/32 | 2 | 6 | 0 | | -189/2 | 2 | 2 | 5 |
| | -105/4 | 4 | 0 | 4 | | 315/4 | 2 | 4 | 3 |
| | -105/4 | 0 | 4 | 4 | | -315/32 | 2 | 6 | 1 |
| | 105/4 | 4 | 2 | 2 | | -189/4 | 4 | 0 | 5 |
| | 105/4 | 2 | 4 | 2 | | 315/4 | 4 | 2 | 3 |
| | -105/2 | 2 | 2 | 4 | | -945/64 | 4 | 4 | 1 |
| | -105/64 | 4 | 4 | 0 | | 105/4 | 6 | 0 | 3 |
| | | | | -315/32 | 6 | 2 | 1 | | |
| | | | | -315/128 | 8 | 0 | 1 | | |
| J_{10} | -1 | 0 | 0 | 10 | J_{10} | 515/256 | 2 | 8 | 0 |
| | -45/2 | 0 | 2 | 8 | | -315/4 | 4 | 0 | 6 |
| | -315/4 | 0 | 4 | 6 | | 1575/8 | 4 | 2 | 4 |
| | 525/8 | 0 | 6 | 4 | | -4725/64 | 4 | 4 | 2 |
| | -1575/128 | 0 | 8 | 2 | | 315/128 | 4 | 6 | 0 |
| | 63/256 | 0 | 10 | 0 | | 525/8 | 6 | 0 | 4 |
| | 45/2 | 2 | 0 | 8 | | -1575/32 | 6 | 2 | 2 |
| | -315/2 | 2 | 2 | 6 | | 315/128 | 6 | 4 | 0 |
| | 1575/8 | 2 | 4 | 4 | | -1575/128 | 8 | 0 | 2 |
| | -1575/32 | 2 | 6 | 2 | | 315/256 | 8 | 2 | 0 |
| | | | | | | 63/256 | 10 | 0 | 0 |

Матрицы $J_{nm} = (\alpha J)_{pqs}$ и $K_{nm} = (\beta J)_{pqs}$

| n.m | α_{pqs} | I_{pqs} | | | β_{pqs} | I_{pqs} | | |
|-----|----------------|-----------|---|---|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 4.1 | 3/4 | 3 | 0 | 1 | 3/4 | 0 | 3 | 1 |
| | 3/4 | 1 | 2 | 1 | 3/4 | 2 | 1 | 1 |
| | -1 | 1 | 0 | 3 | -1 | 0 | 1 | 3 |
| 4.2 | 1/24 | 4 | 0 | 0 | 1/12 | 3 | 1 | 0 |
| | -1/24 | 0 | 4 | 0 | 1/12 | 1 | 3 | 0 |
| | 1/4 | 0 | 2 | 2 | -1/2 | 1 | 1 | 2 |
| | -1/4 | 2 | 0 | 2 | | | | |
| 4.3 | 1/8 | 1 | 2 | 1 | -1/8 | 2 | 1 | 1 |
| | -1/24 | 3 | 0 | 1 | 1/24 | | | |
| 4.4 | -1/192 | 4 | 0 | 0 | 1/48 | 1 | 3 | 0 |
| | -1/192 | 0 | 4 | 0 | -1/48 | 3 | 1 | 0 |
| | 1/32 | 2 | 2 | 0 | | | | |
| 5.1 | -1/8 | 5 | 0 | 0 | -1/8 | 0 | 5 | 0 |
| | -1 | 1 | 0 | 4 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| | -1/8 | 1 | 4 | 0 | -1/8 | 4 | 1 | 0 |
| | -1/4 | 3 | 2 | 0 | -1/4 | 2 | 3 | 0 |
| | +3/2 | 3 | 0 | 2 | 3/2 | 3 | 2 | 0 |
| | 3/2 | 1 | 2 | 2 | 3/2 | 2 | 1 | 2 |
| 5.2 | 1/4 | 0 | 2 | 3 | 1/4 | 3 | 1 | 1 |
| | -1/4 | 2 | 0 | 3 | 1/4 | 1 | 3 | 1 |
| | 1/8 | 4 | 0 | 1 | -1/2 | 1 | 1 | 3 |
| | -1/8 | 0 | 4 | 1 | | | | |
| 5.3 | -1/24 | 3 | 0 | 2 | 1/24 | 0 | 3 | 2 |
| | -1/64 | 1 | 4 | 0 | 1/64 | 4 | 1 | 0 |
| | -1/96 | 3 | 2 | 0 | 1/96 | 2 | 3 | 0 |
| | +1/8 | 1 | 2 | 2 | -1/8 | 2 | 1 | 2 |
| | +1/192 | 5 | 0 | 0 | -1/192 | 0 | 5 | 0 |
| 5.4 | 1/32 | 2 | 2 | 1 | 1/48 | 1 | 3 | 1 |
| | -1/192 | 4 | 0 | 1 | | | | |
| | -1/192 | 0 | 4 | 1 | -1/48 | 3 | 1 | 1 |
| 5.5 | 1/192 | 3 | 2 | 0 | 1/192 | 2 | 3 | 0 |
| | -1/384 | 1 | 4 | 0 | -1/384 | 4 | 1 | 0 |
| | -1/1920 | 5 | 0 | 0 | -1/1920 | 0 | 5 | 0 |
| 6.1 | -1 | 1 | 0 | 5 | -1 | 0 | 1 | 5 |
| | -35/56 | 5 | 0 | 1 | -35/56 | 0 | 5 | 1 |
| | -35/56 | 1 | 4 | 1 | -35/56 | 4 | 1 | 1 |
| | 35/14 | 3 | 0 | 3 | 35/14 | 0 | 3 | 3 |
| | 35/14 | 1 | 2 | 3 | 35/14 | 2 | 1 | 3 |
| | -35/28 | 3 | 2 | 1 | -35/28 | 2 | 3 | 1 |
| 6.2 | -1/64 | 6 | 0 | 0 | -1/32 | 5 | 1 | 0 |
| | 1/64 | 0 | 6 | 0 | -1/32 | 1 | 5 | 0 |
| | 1/64 | 2 | 4 | 0 | -1/16 | 3 | 3 | 0 |
| | -1/64 | 4 | 2 | 0 | 1/2 | 3 | 1 | 2 |
| | 1/4 | 4 | 0 | 2 | -1/2 | 1 | 3 | 2 |
| | -1/4 | 0 | 4 | 2 | -1/2 | 1 | 1 | 4 |

| n.m | α_{pqs} | I_{pqs} | | | β_{pqs} | I_{pqs} | | |
|---------|----------------|-----------|---|-------|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 6.3 | 1/4 | 0 | 2 | 4 | | | | |
| | -1/4 | 2 | 0 | 4 | | | | |
| | 1/64 | 5 | 0 | 1 | -1/64 | 0 | 5 | 1 |
| | -1/24 | 3 | 0 | 3 | 1/24 | 0 | 3 | 3 |
| | -1/32 | 3 | 2 | 1 | 1/32 | 2 | 3 | 1 |
| | 1/8 | 1 | 2 | 3 | -1/8 | 2 | 1 | 3 |
| 6.4 | -3/64 | 1 | 4 | 1 | 3/64 | 4 | 1 | 1 |
| | 1/1920 | 6 | 0 | 0 | 1/480 | 5 | 1 | 0 |
| | 1/1920 | 0 | 6 | 0 | -1/480 | 1 | 5 | 0 |
| | -1/192 | 4 | 0 | 2 | 1/48 | 1 | 3 | 2 |
| | -1/192 | 0 | 4 | 2 | -1/48 | 3 | 1 | 2 |
| | -1/384 | 4 | 2 | 0 | | | | |
| 6.5 | -1/384 | 2 | 4 | 0 | | | | |
| | +1/32 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| | 1/192 | 3 | 2 | 1 | 1/192 | 2 | 3 | 1 |
| 6.6 | -1/384 | 1 | 4 | 1 | -1/384 | 4 | 1 | 1 |
| | -1/192 0 | 5 | 0 | 1 | -1/1920 | 0 | 5 | 1 |
| | 1/153 6 | 4 | 2 | 0 | 1/1152 | 3 | 3 | 0 |
| 7.1 | -1/153 6 | 2 | 4 | 0 | -1/3840 | 5 | 1 | 0 |
| | 1/230 40 | 0 | 6 | 0 | -1/3840 | 1 | 5 | 0 |
| | -1/230 40 | 6 | 0 | 0 | | | | |
| 7.2 | -1 | 1 | 0 | 6 | -1 | 0 | 1 | 6 |
| | 15/4 | 3 | 0 | 4 | 15/4 | 0 | 3 | 4 |
| | 15/4 | 1 | 2 | 4 | 15/4 | 2 | 1 | 4 |
| | -15/4 | 3 | 2 | 2 | -15/4 | 2 | 3 | 2 |
| | -15/8 | 5 | 0 | 2 | -15/8 | 0 | 5 | 2 |
| | -15/8 | 1 | 4 | 2 | -15/8 | 4 | 1 | 2 |
| | 15/64 | 5 | 2 | 0 | 15/64 | 2 | 5 | 0 |
| | 15/64 | 3 | 4 | 0 | 15/64 | 4 | 3 | 0 |
| | 5/64 | 7 | 0 | 0 | 5/64 | 0 | 7 | 0 |
| | 5/64 | 1 | 6 | 0 | 5/64 | 6 | 1 | 0 |
| | 1/4 | 0 | 2 | 5 | 5/6 | 3 | 1 | 3 |
| | -1/4 | 2 | 0 | 5 | 5/6 | 1 | 3 | 3 |
| 5/12 | 4 | 0 | 3 | -1/2 | 1 | 1 | 5 | |
| -5/12 | 0 | 4 | 3 | -5/16 | 3 | 3 | 1 | |
| 15/192 | 0 | 6 | 1 | -5/32 | 5 | 1 | 1 | |
| -15/192 | 6 | 0 | 1 | -5/32 | 1 | 5 | 1 | |
| 15/192 | 2 | 4 | 1 | | | | | |
| -15/192 | 4 | 2 | 1 | | | | | |
| 7.3 | 1/8 | 1 | 2 | 4 | -1/8 | 2 | 1 | 4 |
| | -1/16 | 3 | 2 | 2 | 1/16 | 2 | 3 | 2 |
| | -3/32 | 1 | 4 | 2 | 3/32 | 4 | 1 | 2 |
| | 1/32 | 5 | 0 | 2 | -1/32 | 0 | 5 | 2 |
| | 1/128 | 3 | 4 | 0 | -1/128 | 4 | 3 | 0 |
| | 1/640 | 5 | 2 | 0 | -1/640 | 2 | 5 | 0 |
| | -1/640 | 7 | 0 | 0 | 1/640 | 0 | 7 | 0 |
| | +3/640 | 1 | 6 | 0 | -3/640 | 6 | 1 | 0 |
| | -1/24 | 1 | 0 | 4 | 1/24 | 0 | 3 | 4 |

| п.п | α_{pqS} | I_{pqS} | | | β_{pqS} | I_{pqS} | | |
|--------|----------------|-----------|---|--------|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 7.4 | 1/32 | 2 | 2 | 3 | 1/48 | 1 | 3 | 3 |
| | -1/128 | 4 | 2 | 1 | -1/48 | 3 | 1 | 3 |
| | -1/128 | 2 | 4 | 1 | 1/160 | 5 | 1 | 1 |
| | -1/192 | 4 | 0 | 3 | -1/160 | 1 | 5 | 1 |
| | -1/192 | 0 | 4 | 3 | | | | |
| | 1/640 | 6 | 0 | 1 | | | | |
| | 1/640 | 0 | 6 | 1 | | | | |
| 7.5 | 1/192 | 3 | 2 | 2 | 1/192 | 2 | 3 | 2 |
| | -1/1920 | 5 | 0 | 2 | -1/1920 | 0 | 5 | 2 |
| | -1/384 | 1 | 4 | 2 | -1/384 | 4 | 1 | 2 |
| | 1/4608 | 1 | 6 | 0 | 1/4608 | 6 | 1 | 0 |
| | -1/4608 | 3 | 4 | 0 | -1/4608 | 4 | 3 | 0 |
| | -1/2560 | 5 | 2 | 0 | -1/2560 | 2 | 5 | 0 |
| | 1/23040 | 7 | 0 | 0 | 1/23040 | 0 | 7 | 0 |
| 7.6 | 1/1536 | 4 | 2 | 1 | 1/1152 | 3 | 3 | 1 |
| | -1/1536 | 2 | 4 | 1 | -1/3840 | 5 | 1 | 1 |
| | 1/23040 | 0 | 6 | 1 | -1/3840 | 1 | 5 | 1 |
| | -1/23040 | 6 | 0 | 1 | | | | |
| 7.7 | 1/15360 | 5 | 2 | 0 | 1/9216 | 4 | 3 | 0 |
| | 1/46080 | 1 | 6 | 0 | 1/322560 | 0 | 7 | 0 |
| | -1/9216 | 3 | 4 | 0 | -1/15360 | 2 | 5 | 0 |
| | -1/322560 | 7 | 0 | 0 | -1/46080 | 6 | 1 | 0 |
| 8.1 | -1 | 1 | 0 | 7 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| | -35/4 | 3 | 2 | 3 | -35/4 | 2 | 3 | 3 |
| | -35/8 | 1 | 4 | 3 | -35/8 | 4 | 1 | 3 |
| | -35/8 | 5 | 0 | 3 | -35/8 | 0 | 5 | 3 |
| | 21/4 | 1 | 2 | 5 | 21/4 | 2 | 1 | 5 |
| | 21/4 | 3 | 0 | 5 | 21/4 | 0 | 3 | 5 |
| | 105/64 | 5 | 2 | 1 | 105/64 | 2 | 5 | 1 |
| | 105/64 | 3 | 4 | 1 | 105/64 | 4 | 3 | 1 |
| | 35/64 | 1 | 6 | 1 | 35/64 | 6 | 1 | 1 |
| | 35/64 | 7 | 0 | 1 | 35/64 | 0 | 7 | 1 |
| | 5/8 | 4 | 0 | 4 | 5/4 | 3 | 1 | 4 |
| | -5/8 | 0 | 4 | 4 | 5/4 | 1 | 3 | 4 |
| | 1/4 | 0 | 2 | 6 | -1/2 | 1 | 1 | 6 |
| | -1/4 | 2 | 0 | 6 | 1/64 | 7 | 1 | 0 |
| | 15/64 | 2 | 4 | 2 | 1/64 | 1 | 7 | 0 |
| -15/64 | 4 | 2 | 2 | 15/32 | 3 | 5 | 0 | |
| 1/64 | 6 | 2 | 0 | 15/32 | 5 | 3 | 0 | |
| -1/64 | 2 | 6 | 0 | -15/32 | 5 | 1 | 2 | |
| 1/128 | 8 | 0 | 0 | -15/32 | 1 | 5 | 2 | |
| -1/128 | 0 | 8 | 0 | -15/16 | 3 | 3 | 2 | |
| 15/64 | 0 | 6 | 2 | | | | | |
| -15/64 | 6 | 0 | 2 | | | | | |
| 8.3 | -5/32 | 1 | 4 | 3 | +5/32 | 4 | 1 | 3 |
| | -5/48 | 3 | 2 | 3 | +5/48 | 2 | 3 | 3 |
| | +1/8 | 1 | 2 | 5 | -1/8 | 2 | 1 | 5 |
| | -1/24 | 3 | 0 | 5 | +1/24 | 0 | 3 | 5 |

| п.п. | α_{pqz} | I_{pqz} | | | β_{pqz} | I_{pqz} | | |
|----------|----------------|-----------|-----|---------|---------------|-----------|-----|-----|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 8.4 | +5/96 | 5 | 0 | 3 | -5/96 | 0 | 5 | 3 |
| | +1/128 | 5 | 2 | 1 | -1/128 | 2 | 5 | 1 |
| | +5/128 | 4 | 3 | 1 | -5/128 | 4 | 3 | 1 |
| | +3/128 | 1 | 6 | 1 | -3/128 | 6 | 1 | 1 |
| | -1/128 | 7 | 0 | 1 | +1/128 | 0 | 7 | 1 |
| | 1/32 | 2 | 2 | 4 | 1/48 | 1 | 3 | 4 |
| | -1/64 | 4 | 2 | 2 | -1/48 | 3 | 1 | 4 |
| | -1/64 | 2 | 4 | 2 | 1/80 | 5 | 1 | 2 |
| | 1/768 | 4 | 4 | 0 | -1/80 | 1 | 5 | 2 |
| | -1/192 | 4 | 0 | 4 | 1/192 0 | 3 | 5 | 0 |
| | -1/192 | 0 | 4 | 4 | -1/192 0 | 5 | 3 | 0 |
| | 1/320 | 6 | 0 | 2 | 1/192 0 | 1 | 7 | 0 |
| | 1/320 | 0 | 6 | 2 | -1/192 0 | 7 | 1 | 0 |
| | 1/192 0 | 6 | 2 | 0 | | | | |
| 1/192 0 | 2 | 6 | 0 | | | | | |
| -1/768 0 | 8 | 0 | 0 | | | | | |
| -1/768 0 | 0 | 8 | 0 | | | | | |
| 8.5 | 1/192 | 3 | 2 | 3 | 1/192 | 2 | 3 | 3 |
| | -1/384 | 1 | 4 | 3 | -1/384 | 4 | 1 | 3 |
| | 1/153 6 | 1 | 6 | 1 | 1/153 6 | 6 | 1 | 1 |
| | -1/153 6 | 3 | 4 | 1 | -1/153 6 | 4 | 3 | 1 |
| | -1/192 0 | 5 | 0 | 3 | -1/192 0 | 0 | 5 | 3 |
| | -3/256 0 | 5 | 2 | 1 | -3/256 0 | 2 | 5 | 1 |
| 1/768 0 | 7 | 0 | 1 | 1/768 0 | 0 | 7 | 1 | |
| 8.6 | 1/153 6 | 4 | 2 | 2 | 1/115 2 | 3 | 2 | 2 |
| | -1/153 6 | 2 | 4 | 2 | -1/384 0 | 5 | 1 | 2 |
| | 1/230 40 | 0 | 6 | 2 | -1/384 0 | 1 | 5 | 2 |
| | -1/230 40 | 6 | 0 | 2 | -1/230 40 | 5 | 3 | 0 |
| | 1/230 40 | 2 | 6 | 0 | -1/230 40 | 3 | 5 | 0 |
| | -1/230 40 | 6 | 2 | 0 | 1/537 60 | 7 | 1 | 0 |
| | 1/322 560 | 8 | 0 | 0 | 1/537 60 | 1 | 7 | 0 |
| | -1/322 560 | 0 | 8 | 0 | | | | |
| 8.7 | 1/153 60 | 5 | 2 | 1 | 1/921 6 | 4 | 3 | 1 |
| | 1/460 80 | 1 | 6 | 1 | 1/322 560 | 0 | 7 | 1 |
| | -1/921 6 | 3 | 4 | 1 | -1/153 60 | 2 | 5 | 1 |
| | -1/322 560 | 7 | 0 | 1 | -1/460 80 | 6 | 1 | 1 |
| 8.8 | -1/737 28 | 4 | 4 | 0 | 1/921 60 | 5 | 3 | 0 |
| | 1/184 320 | 6 | 2 | 0 | -1/921 60 | 3 | 5 | 0 |
| | 1/184 320 | 2 | 6 | 0 | 1/645 120 | 1 | 7 | 0 |
| | -1/516 096 0 | 8 | 0 | 0 | -1/645 120 | 7 | 1 | 0 |
| | -1/515 096 0 | 0 | 8 | 0 | | | | |
| 9.1 | -1 | 1 | 0 | 8 | -1 | 0 | 1 | 8 |
| | 7 | 1 | 2 | 6 | 7 | 2 | 1 | 6 |
| | -35/4 | 1 | 4 | 4 | -35/4 | 4 | 1 | 4 |
| | 35/16 | 1 | 6 | 2 | 35/16 | 6 | 1 | 2 |
| | -7/128 | 1 | 8 | 0 | -7/128 | 8 | 1 | 0 |
| | 7/ | 3 | 0 | 6 | 7 | 0 | 3 | 6 |
| | -35/2 | 3 | 2 | 4 | -35/2 | 2 | 3 | 4 |
| | 105/16 | 3 | 4 | 2 | 105/16 | 4 | 3 | 2 |

| n.m | α_{pqs} | I_{pqs} | | | β_{pqs} | I_{pqs} | | |
|---------|----------------|-----------|---|---|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 9.1 | -7/32 | 3 | 6 | 0 | -7/32 | 6 | 3 | 0 |
| | -35/4 | 5 | 0 | 4 | -35/4 | 0 | 5 | 4 |
| | 105/16 | 5 | 2 | 2 | 105/16 | 2 | 5 | 2 |
| | -21/64 | 5 | 4 | 0 | -21/64 | 4 | 5 | 0 |
| | 35/16 | 7 | 0 | 2 | 35/16 | 0 | 7 | 2 |
| | -7/32 | 7 | 2 | 0 | -7/32 | 2 | 7 | 0 |
| | -7/128 | 9 | 0 | 0 | -7/128 | 0 | 9 | 0 |
| 9.2 | 1/4 | 0 | 2 | 7 | | | | |
| | -7/8 | 0 | 4 | 5 | -1/2 | 1 | 1 | 7 |
| | 35/64 | 0 | 6 | 3 | 7/4 | 1 | 3 | 5 |
| | -7/128 | 0 | 8 | 1 | -35/32 | 1 | 5 | 3 |
| | -1/4 | 2 | 0 | 7 | 7/64 | 1 | 7 | 1 |
| | 35/64 | 2 | 4 | 3 | 7/4 | 3 | 1 | 5 |
| | -7/64 | 2 | 6 | 1 | -35/16 | 3 | 3 | 3 |
| | 7/8 | 4 | 0 | 5 | 21/64 | 3 | 5 | 1 |
| | -35/64 | 4 | 2 | 3 | -35/32 | 5 | 1 | 3 |
| | -35/64 | 6 | 0 | 3 | 21/64 | 5 | 3 | 1 |
| | 7/64 | 6 | 2 | 1 | 7/64 | 7 | 1 | 1 |
| | 7/128 | 8 | 0 | 1 | | | | |
| 9.3 | 1/8 | 1 | 2 | 6 | -1/8 | 2 | 1 | 6 |
| | -15/64 | 1 | 4 | 4 | 15/64 | 4 | 1 | 4 |
| | 9/128 | 1 | 6 | 2 | -9/128 | 6 | 1 | 2 |
| | -1/512 | 1 | 8 | 0 | 1/512 | 8 | 1 | 0 |
| | -1/24 | 3 | 0 | 6 | 1/24 | 0 | 3 | 6 |
| | -5/32 | 3 | 2 | 4 | 5/32 | 2 | 3 | 4 |
| | 15/128 | 3 | 4 | 2 | -15/128 | 4 | 3 | 2 |
| | -1/192 | 3 | 6 | 0 | 1/192 | 6 | 3 | 0 |
| | 5/64 | 5 | 0 | 4 | -5/64 | 0 | 5 | 4 |
| | 3/128 | 5 | 2 | 2 | -3/128 | 2 | 5 | 2 |
| | -1/256 | 5 | 4 | 0 | 1/256 | 4 | 5 | 0 |
| | -3/128 | 7 | 0 | 2 | 3/128 | 0 | 7 | 2 |
| | 1/1536 | 9 | 0 | 0 | -1/1536 | 0 | 9 | 0 |
| | 9.4 | -1/192 | 0 | 4 | 5 | 1/48 | 1 | 3 |
| 1/192 | | 0 | 6 | 3 | -1/48 | 1 | 5 | 3 |
| -1/1536 | | 0 | 8 | 1 | 1/384 | 1 | 7 | 1 |
| 1/32 | | 2 | 2 | 5 | -1/384 | 7 | 1 | 1 |
| -5/192 | | 2 | 4 | 3 | -1/48 | 3 | 1 | 5 |
| 1/384 | | 2 | 6 | 1 | 1/384 | 3 | 5 | 1 |
| -1/192 | | 4 | 0 | 5 | 1/48 | 5 | 1 | 3 |
| -5/192 | | 4 | 2 | 3 | -1/384 | 5 | 3 | 1 |
| 5/768 | | 4 | 4 | 1 | | | | |
| 1/192 | | 6 | 0 | 3 | | | | |
| 1/384 | | 6 | 2 | 1 | | | | |
| -1/1536 | | 8 | 0 | 1 | | | | |
| 9.5 | -1/384 | 1 | 4 | 4 | -1/384 | 4 | 1 | 4 |
| | 1/768 | 1 | 6 | 2 | 1/768 | 6 | 1 | 2 |
| | -1/21504 | 1 | 8 | 0 | -1/21504 | 8 | 1 | 0 |
| | 1/192 | 3 | 2 | 4 | 1/192 | 2 | 3 | 4 |
| | -1/768 | 3 | 4 | 2 | -1/768 | 4 | 3 | 2 |

| п.п. | α_{pqz} | I_{pqz} | | | β_{pqz} | I_{pqz} | | |
|---------|----------------|-----------|-----|---------|---------------|-----------|-----|-----|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 9.6 | 1/768 0 | 5 | 4 | 0 | 1/768 0 | 4 | 5 | 0 |
| | 1/384 0 | 7 | 0 | 2 | 1/384 0 | 0 | 7 | 2 |
| | 1/134 40 | 7 | 2 | 0 | 1/134 40 | 2 | 7 | 0 |
| | -1/107 520 | 9 | 0 | 0 | -1/107 520 | 0 | 9 | 0 |
| | -1/192 0 | 5 | 0 | 4 | -1/192 0 | 0 | 5 | 4 |
| | -3/128 0 | 5 | 2 | 2 | -3/128 0 | 2 | 5 | 2 |
| | 1/230 40 | 0 | 6 | 3 | -1/384 0 | 1 | 5 | 3 |
| | -1/230 40 | 6 | 0 | 3 | -1/384 0 | 5 | 1 | 3 |
| | -1/107 520 | 0 | 8 | 1 | 1/179 20 | 1 | 7 | 1 |
| | 1/107 520 | 8 | 0 | 1 | 1/179 20 | 7 | 1 | 1 |
| | -1/153 6 | 2 | 4 | 3 | 1/115 2 | 3 | 3 | 3 |
| | 1/153 6 | 4 | 2 | 3 | -1/768 0 | 3 | 5 | 1 |
| | 1/768 0 | 2 | 6 | 1 | -1/768 0 | 5 | 3 | 1 |
| | -1/768 0 | 6 | 2 | 1 | | | | |
| 9.7 | -1/322 560 | 7 | 0 | 2 | 1/322 560 | 0 | 7 | 2 |
| | 1/516 096 0 | 9 | 0 | 0 | -1/516 096 0 | 0 | 9 | 0 |
| | 1/460 80 | 1 | 6 | 2 | -1/460 80 | 6 | 1 | 2 |
| | -1/737 280 | 1 | 8 | 0 | 1/737 280 | 8 | 1 | 0 |
| | 1/153 60 | 5 | 2 | 2 | -1/153 60 | 2 | 5 | 2 |
| | -1/258 048 | 7 | 2 | 0 | 1/258 048 | 2 | 7 | 0 |
| 9.8 | -1/921 6 | 3 | 4 | 2 | 1/921 6 | 4 | 3 | 2 |
| | 1/184 320 | 3 | 6 | 0 | 1/184 320 | 6 | 3 | 0 |
| | 1/368 640 | 5 | 4 | 0 | -1/368 640 | 4 | 5 | 0 |
| | -1/516 096 0 | 0 | 8 | 1 | 1/645 120 | 1 | 7 | 1 |
| | -1/516 096 0 | 8 | 0 | 1 | -1/645 120 | 7 | 1 | 1 |
| | 1/184 320 | 2 | 6 | 1 | -1/921 60 | 3 | 5 | 1 |
| 9.9 | 1/184 320 | 6 | 2 | 1 | 1/921 60 | 5 | 3 | 1 |
| | -1/737 28 | 4 | 4 | 1 | | | | |
| | -1/928 972 80 | 9 | 0 | 0 | -1/928 972 80 | 0 | 9 | 0 |
| | -1/103 219 20 | 1 | 8 | 0 | -1/103 219 20 | 8 | 1 | 0 |
| | 1/258 048 0 | 7 | 2 | 0 | 1/258 048 0 | 2 | 7 | 0 |
| | 1/110 592 0 | 3 | 6 | 0 | 1/110 592 0 | 6 | 3 | 0 |
| 10.1 | -1/737 280 | 5 | 4 | 0 | -1/737 280 | 4 | 5 | 0 |
| | -1 | 1 | 0 | 9 | -1 | 0 | 1 | 9 |
| | 9 | 3 | 0 | 7 | 9 | 0 | 3 | 7 |
| | -63/4 | 5 | 0 | 5 | -63/4 | 0 | 5 | 5 |
| | 105/16 | 7 | 0 | 3 | 105/16 | 0 | 7 | 3 |
| | -63/128 | 9 | 0 | 1 | -63/128 | 0 | 9 | 1 |
| | 9 | 1 | 2 | 7 | 9 | 2 | 1 | 7 |
| | -63/4 | 1 | 4 | 5 | -63/4 | 4 | 1 | 5 |
| | 105/16 | 1 | 6 | 3 | 105/16 | 6 | 1 | 3 |
| | -63/128 | 1 | 8 | 1 | -63/128 | 8 | 1 | 1 |
| | -63/2 | 3 | 2 | 5 | -63/2 | 2 | 3 | 5 |
| | 315/16 | 5 | 2 | 3 | 315/16 | 2 | 5 | 3 |
| | -63/32 | 7 | 2 | 1 | -63/32 | 2 | 7 | 1 |
| | 315/16 | 3 | 4 | 3 | 315/16 | 4 | 3 | 3 |
| -63/32 | 3 | 6 | 1 | -63/32 | 6 | 3 | 1 | |
| -189/64 | 5 | 4 | 1 | -189/64 | 4 | 5 | 1 | |

Продолжение приложения 2

| n. m | α_{pqS} | I_{pqS} | | | β_{pqS} | I_{pqS} | | | |
|----------|----------------|-----------|----|---|---------------|-----------|---|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s | |
| 10.2 | 1/4 | 0 | 2 | 8 | -1/2 | 1 | 1 | 8 | |
| | -1/4 | 2 | 0 | 8 | 7/3 | 1 | 3 | 6 | |
| | -7/6 | 0 | 4 | 6 | 7/3 | 3 | 1 | 6 | |
| | 7/6 | 4 | 0 | 6 | -35/16 | 1 | 5 | 4 | |
| | 35/32 | 0 | 6 | 4 | -35/16 | 5 | 1 | 4 | |
| | -35/32 | 6 | 0 | 4 | 7/16 | 1 | 7 | 2 | |
| | -7/32 | 0 | 8 | 2 | 7/16 | 7 | 1 | 2 | |
| | 7/32 | 8 | 0 | 2 | -7/768 | 1 | 9 | 0 | |
| | 7/153 6 | 0 | 10 | 0 | -7/768 | 9 | 1 | 0 | |
| | -7/153 6 | 10 | 0 | 0 | -35/8 | 3 | 3 | 4 | |
| | 35/32 | 2 | 4 | 4 | 21/16 | 3 | 5 | 2 | |
| | -35/32 | 4 | 2 | 4 | 21/16 | 5 | 3 | 2 | |
| | -7/16 | 2 | 6 | 2 | -7/192 | 3 | 7 | 0 | |
| | 7/16 | 6 | 2 | 2 | -7/192 | 7 | 3 | 0 | |
| | 7/512 | 2 | 8 | 0 | -7/128 | 5 | 5 | 0 | |
| | -7/512 | 8 | 2 | 0 | | | | | |
| | 7/768 | 4 | 6 | 0 | | | | | |
| | -7/768 | 6 | 4 | 0 | | | | | |
| | 10.3 | -1/24 | 3 | 0 | 7 | 1/24 | 0 | 3 | 7 |
| | | 7/64 | 5 | 0 | 5 | -7/64 | 0 | 5 | 5 |
| -7/128 | | 7 | 0 | 3 | 7/128 | 0 | 7 | 3 | |
| 7/153 6 | | 9 | 0 | 1 | -7/153 6 | 0 | 9 | 1 | |
| 1/8 | | 1 | 2 | 7 | -1/8 | 2 | 1 | 7 | |
| -21/64 | | 1 | 4 | 5 | 21/64 | 4 | 1 | 5 | |
| 21/128 | | 1 | 6 | 3 | -21/128 | 6 | 1 | 3 | |
| -7/512 | | 1 | 8 | 1 | 7/512 | 8 | 1 | 1 | |
| -7/32 | | 3 | 2 | 5 | 7/32 | 2 | 3 | 5 | |
| 7/128 | | 5 | 2 | 3 | -7/128 | 2 | 5 | 3 | |
| 35/128 | | 3 | 4 | 3 | -35/128 | 4 | 3 | 3 | |
| -7/192 | | 3 | 6 | 1 | 7/192 | 6 | 3 | 1 | |
| -7/256 | | 5 | 4 | 1 | 7/256 | 4 | 5 | 1 | |
| 10.4 | | -1/192 | 0 | 4 | 6 | 1/48 | 1 | 3 | 6 |
| | | -1/192 | 4 | 0 | 6 | -1/48 | 3 | 1 | 6 |
| | | 1/128 | 0 | 6 | 4 | -1/32 | 1 | 5 | 4 |
| | | 1/128 | 6 | 0 | 4 | 1/32 | 5 | 1 | 4 |
| | -1/512 | 0 | 8 | 2 | 1/128 | 1 | 7 | 2 | |
| | -1/512 | 8 | 0 | 2 | -1/128 | 7 | 1 | 2 | |
| | 1/215 04 | 0 | 10 | 0 | -1/537 6 | 1 | 9 | 0 | |
| | 1/215 04 | 10 | 0 | 0 | 1/537 6 | 9 | 1 | 0 | |
| | 1/32 | 2 | 2 | 6 | 1/128 | 3 | 5 | 2 | |
| | -5/128 | 2 | 4 | 4 | -1/128 | 5 | 3 | 2 | |
| | -5/128 | 4 | 2 | 4 | -1/268 8 | 3 | 7 | 0 | |
| | 1/128 | 2 | 6 | 2 | 1/268 8 | 7 | 3 | 0 | |
| | 1/128 | 6 | 2 | 2 | | | | | |
| | -1/716 8 | 2 | 8 | 0 | | | | | |
| | -1/716 8 | 8 | 2 | 0 | | | | | |
| | 5/256 | 4 | 4 | 2 | | | | | |
| | -1/153 6 | 4 | 6 | 0 | | | | | |
| -1/153 6 | 6 | 4 | 0 | | | | | | |
| 10.5 | -1/192 0 | 5 | 0 | 5 | -1/192 0 | 0 | 5 | 5 | |
| | 1/230 4 | 7 | 0 | 3 | 1/230 4 | 0 | 7 | 3 | |

| п.т | α_{pqz} | I_{pqz} | | | β_{pqz} | I_{pqz} | | |
|---------------|----------------|-----------|----|-----------|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 10.6 | -1/215 04 | 9 | 0 | 1 | -1/215 04 | 0 | 9 | 1 |
| | -1/384 | 1 | 4 | 5 | -1/384 | 4 | 1 | 5 |
| | 5/230 4 | 1 | 6 | 3 | 5/230 4 | 6 | 1 | 3 |
| | -5/215 04 | 1 | 8 | 1 | -5/215 04 | 8 | 1 | 1 |
| | 1/192 | 3 | 2 | 5 | 1/192 | 2 | 3 | 5 |
| | -1/256 | 5 | 2 | 3 | -1/256 | 2 | 5 | 3 |
| | 1/268 8 | 7 | 2 | 1 | 1/268 8 | 2 | 7 | 1 |
| | -5/230 4 | 3 | 4 | 3 | -5/230 4 | 4 | 3 | 3 |
| | 1/153 6 | 5 | 4 | 1 | 1/153 6 | 4 | 5 | 1 |
| | 1/230 40 | 0 | 6 | 4 | -1/384 0 | 1 | 5 | 4 |
| | -1/230 40 | 6 | 0 | 4 | -1/384 0 | 5 | 1 | 4 |
| | -1/537 60 | 0 | 8 | 2 | 1/896 0 | 1 | 7 | 2 |
| | 1/537 60 | 8 | 0 | 2 | 1/896 0 | 7 | 1 | 2 |
| | 1/172 032 0 | 0 | 10 | 0 | -1/286 720 | 1 | 9 | 0 |
| | -1/172 032 0 | 10 | 0 | 0 | -1/286 720 | 9 | 1 | 0 |
| | -1/153 6 | 2 | 4 | 4 | 1/115 2 | 3 | 3 | 4 |
| | 1/153 6 | 4 | 2 | 4 | -1/384 0 | 3 | 5 | 2 |
| | 1/384 0 | 2 | 6 | 2 | -1/384 0 | 5 | 3 | 2 |
| | -1/384 0 | 6 | 2 | 2 | 1/215 040 | 3 | 7 | 0 |
| -13/172 032 0 | 2 | 8 | 0 | 1/614 40 | 5 | 5 | 0 | |
| 13/172 032 0 | 8 | 2 | 0 | 1/215 040 | 7 | 3 | 0 | |
| -1/122 880 | 4 | 6 | 0 | | | | | |
| 1/122 880 | 6 | 4 | 0 | | | | | |
| 10.7 | -1/322 560 | 7 | 0 | 3 | 1/322 560 | 0 | 7 | 3 |
| | 1/172 032 0 | 9 | 0 | 1 | -1/172 032 0 | 0 | 9 | 1 |
| | 1/460 80 | 1 | 6 | 3 | -1/460 80 | 6 | 1 | 3 |
| | -1/245 760 | 1 | 8 | 1 | 1/245 760 | 8 | 1 | 1 |
| | 1/156 0 | 5 | 2 | 3 | -1/153 60 | 2 | 5 | 3 |
| | -1/860 16 | 7 | 2 | 1 | 1/860 16 | 2 | 7 | 1 |
| | -1/921 6 | 3 | 4 | 3 | 1/921 6 | 4 | 3 | 3 |
| | 1/614 40 | 3 | 6 | 1 | -1/614 40 | 6 | 3 | 1 |
| | 1/122 880 | 5 | 4 | 1 | -1/122 880 | 4 | 5 | 1 |
| 10.8 | -1/516 096 0 | 0 | 8 | 2 | 1/645 120 | 1 | 7 | 2 |
| | -1/516 096 0 | 8 | 0 | 2 | -1/645 120 | 7 | 1 | 2 |
| | 1/928 972 80 | 0 | 10 | 0 | -1/116 121 60 | 1 | 9 | 0 |
| | 1/928 972 80 | 10 | 0 | 0 | 1/116 121 60 | 9 | 1 | 0 |
| | 1/184 320 | 2 | 6 | 2 | -1/921 60 | 3 | 5 | 2 |
| | 1/184 320 | 6 | 2 | 2 | 1/921 60 | 5 | 3 | 2 |
| | -1/344 064 0 | 2 | 8 | 0 | 1/193 536 0 | 3 | 7 | 0 |
| | -1/344 064 0 | 8 | 2 | 0 | -1/193 536 0 | 7 | 3 | 0 |
| | -1/737 28 | 4 | 4 | 2 | | | | |
| | 1/221 184 0 | 4 | 6 | 0 | | | | |
| | 1/221 184 0 | 6 | 4 | 0 | | | | |
| 10.9 | -1/928 972 80 | 9 | 0 | 1 | -1/928 972 80 | 0 | 9 | 1 |
| | -1/103 219 20 | 1 | 8 | 1 | -1/103 219 20 | 8 | 1 | 1 |
| | 1/258 048 0 | 7 | 2 | 1 | 1/258 048 0 | 2 | 7 | 1 |
| | 1/110 592 0 | 3 | 6 | 1 | 1/110 592 0 | 6 | 3 | 1 |
| | -1/737 280 | 5 | 4 | 1 | -1/737 280 | 4 | 5 | 1 |

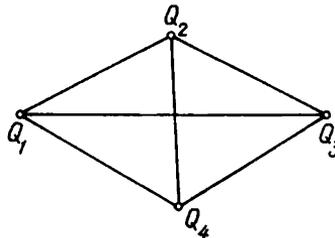
| п.т | α_{pqs} | I_{pqs} | | | β_{pqs} | I_{pqs} | | |
|-------|----------------|-----------|----|---|---------------|-----------|---|---|
| | | p | q | s | | p | q | s |
| 10.10 | -1/1857945600 | 10 | 0 | 0 | -1/185794560 | 1 | 9 | 0 |
| | 1/1857945600 | 0 | 10 | 0 | -1/185794560 | 9 | 1 | 0 |
| | -1/41287680 | 2 | 8 | 0 | 1/15482880 | 3 | 7 | 0 |
| | 1/1857945600 | 8 | 2 | 0 | 1/15482880 | 7 | 3 | 0 |
| | 1/8847360 | 4 | 6 | 0 | -1/7372800 | 5 | 5 | 0 |

Приложение 3

Решение прямых и обратных геодезических задач в пространственной геодезической системе координат

С пункта Q_1 ($B_1 = 50^\circ 20' 00''$, $L_1 = 45^\circ 20' 00''$, $H_1 = 1600$ м; $a = 6378245$ м, $\alpha = 1/298,3$) измерены полярные пространственные сферические координаты s , A , z на пункты Q_2 , Q_3 и Q_4

| стороны | s , м | A | z |
|---------|------------|---------------|---------------|
| 1-2 | 13 200,000 | 47°00'00,000" | 89°50'20,000" |
| 1-3 | 21 200,000 | 94 00 00,000 | 90 03 20,000 |
| 1-4 | 14 200,000 | 132 00 00,000 | 90 10 20,000 |



Требуется вычислить пространственные экваториальные X , Y , Z , эллипсоидальные B , L , H , топоцентрические горизонтные X' , Y' , Z' и полярные сферические s , A , z координаты на всех 4 пунктах.

Поставленную задачу решаем в следующей последовательности.

1. Вычисляем пространственные экваториальные координаты пункта Q_1 по формулам (15), (18) и получаем (в м) $X_1 = 2868500,9843$; $Y_1 = 2902073,2028$; $Z_1 = 4887865,8894$; $N_1 = 6390931,3516$.

2. По координатам B_1 , L_1 и по формулам (33) вычисляем матрицу преобразования координат

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,541\ 134\ 463\ 097 & -0,711\ 208\ 572\ 005 & 0,448\ 726\ 932\ 498 \\ -0,547\ 467\ 765\ 590 & 0,702\ 981\ 057\ 427 & 0,453\ 978\ 720\ 352 \\ 0,638\ 320\ 090\ 930 & 0 & 0,769\ 771\ 044\ 867 \end{bmatrix}$$

3. Используя измеренные значения s , A , z и формулы (34), вычисляем топоцентрические горизонтные координаты пунктов Q_2 , Q_3 и Q_4 относительно начального пункта Q_1

| | 2 | 3 | 4 |
|------|-----------|------------|------------|
| X' | 9002,3428 | -1478,8365 | -9501,6117 |
| Y' | 9653,8307 | 21148,3479 | 10552,6088 |
| Z' | 37,1173 | -20,5561 | -42,6829 |

4. Используя вычисленные значения X' , Y' , Z' , экваториальные координаты X_1 , Y_1 , Z_1 и матрицу A_1 , по формулам (31) вычисляем экваториальные координаты X , Y , Z пунктов Q_2 , Q_3 , Q_4 и имеем

| | 2 | 3 | 4 |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| X | 2 856 780,2748 | 2 854 251,1233 | 2 866 118,3750 |
| Y | 2 903 948,0209 | 2 917 740,3741 | 2 914 673,9359 |
| Z | 4 893 631,8375 | 4 886 897,0949 | 4 881 758,9637 |

5. Используя формулы (19—23), от экваториальных координат X , Y , Z переходим к эллипсоидальным координатам B , L , H . При этом получаем следующие результаты:

| | $e_k^2 \cdot 10^{14}$ | N | D |
|---|-----------------------|----------------|----------------|
| 1 | 669 174 631 245 | 6 390 931,3516 | 4 080 481,1936 |
| 2 | 669 169 318 201 | 6 390 961,1139 | 4 073 586,5826 |
| 3 | 669 173 102 996 | 6 390 926,3165 | 4 081 661,2262 |
| 4 | 669 177 445 517 | 6 390 899,8556 | 4 087 781,6346 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| B | 50°20'00,000" | 50°24'50,983" | 50°19'10,788" | 50°14'52,231" |
| L | 45 20 00,000 | 45 20 08,819 | 45 37 48,726 | 45 28 52,473 |
| H | 1600,0000 | 1650,7628 | 1614,5979 | 1573,1000 |

6. По формулам (32) и (33) вычисляем топоцентрические горизонтные координаты X' , Y' , Z' , последовательно принимая за начало отсчета координат пункты Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 .

Начальный пункт 1

Матрица преобразования $A'_1 \cdot 10^{12}$

| | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| -541 134 463 097 | -547 467 765 590 | 638 320 090 930 |
| -711 208 572 005 | 702 981 057 427 | 0 |
| 448 726 932 498 | 453 978 720 352 | 769 771 044 867 |

| | 2 | 3 | 4 |
|------|-----------|------------|------------|
| X' | 9002,3428 | -1478,8365 | -9501,6117 |
| Y' | 9653,8307 | 21148,3479 | 10552,6088 |
| Z' | 37,1173 | -20,5561 | -42,6829 |

Начальный пункт 2

Матрица преобразования $A_2 \cdot 10^{12}$

| | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| —540 466 494 034 | —549 390 031 699 | 637 233 522 261 |
| —712 872 541 673 | 701 293 618 488 | 0 |
| 446 887 802 648 | 454 266 280 653 | 770 670 771 538 |

| | | | |
|------|------------|-------------|-------------|
| | <i>1</i> | <i>3</i> | <i>4</i> |
| X' | —8984,6349 | —10502,0635 | —18505,4343 |
| Y' | —9670,1700 | 11475,4519 | 865,1405 |
| Z' | —64,4082 | —55,1152 | —104,5722 |

Начальный пункт 3

Матрица преобразования $A_3 \cdot 10^{12}$

| | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| —538 184 086 009 | —550 155 318 708 | 638 503 731 279 |
| —714 841 387 457 | 699 286 629 917 | 0 |
| 446 497 122 435 | 456 428 893 163 | 769 618 727 121 |

| | | | |
|------|-------------|-------------|-------------|
| | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>4</i> |
| X' | 1563,1616 | 10526,9457 | —7980,4646 |
| Y' | —21142,2338 | —11452,7503 | —10627,5219 |
| Z' | —49,7519 | 17,2144 | —55,3192 |

Начальный пункт 4

Матрица преобразования $A_4 \cdot 10^{12}$

| | | |
|------------------|------------------|-----------------|
| —539 050 975 017 | —548 183 159 739 | 639 467 958 316 |
| —713 020 947 897 | 701 142 730 022 | 0 |
| 448 358 310 055 | 455 954 049 788 | 768 817 748 421 |

| | | | |
|------|-------------|------------|------------|
| | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> |
| X' | 9522,5890 | 18505,8004 | 8001,7540 |
| Y' | —10533,7628 | —862,1363 | 10611,6099 |
| Z' | 11,1009 | 50,7369 | 27,6604 |

7. По формулам (35) вычисляем полярные сферические координаты s , A , z на пунктах Q_2 , Q_3 и Q_4 .

Начальный пункт 2

| | | | |
|-----|-------------|----------------|---------------|
| | <i>s</i> | <i>A</i> | <i>z</i> |
| 2—1 | 13 200,0000 | 227°06'16,501" | 90°16'46,454" |
| 2—3 | 15 555,7826 | 132 27 50,458 | 90 12 10,812 |
| 2—4 | 18 525,9413 | 177 19 24,009 | 90 19 24,296 |

Начальный пункт 3

| | | | |
|-----|-------------|----------------|---------------|
| | <i>s</i> | <i>A</i> | <i>z</i> |
| 3—1 | 21 200,0000 | 274°13'42,594" | 90°00'04,060" |
| 3—2 | 15 555,7826 | 312 35 17,073 | 89 56 11,743 |
| 3—4 | 13 290,4137 | 233 05 46,404 | 90 14 18,547 |

Начальный пункт 4

| | <i>s</i> | <i>A</i> | <i>z</i> |
|-----|-------------|----------------|---------------|
| 4—1 | 14 200,0000 | 312°06'49,630" | 89°57'18,752" |
| 4—2 | 18 525,9413 | 357 19 57,612 | 89 50 35,103 |
| 4—3 | 13 290,4137 | 52 58 53,906 | 89 52 50,715 |

Таким образом применение строгой теории преобразования пространственных координат позволяет решать поставленные задачи с любой заданной точностью. При этом алгоритмы решения прямых и обратных геодезических задач в пространстве упрощаются с помощью матричных операций. Достаточно задать пространственные прямолинейные экваториальные X_1, Y_1, Z_1 или эллипсоидальные B_1, L_1, H_1 координаты начальной точки Q_1 и результаты измерения s, A, z на окружающие пункты, чтобы предвычислить все необходимые геодезические параметры пространственного объекта.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 3 |
| 1. Системы отсчета координат и гравитации. Основные уравнения и редуционные формулы | 5 |
| 1.1. Определения основных систем отсчета координат | 5 |
| 1.2. Связь звездных геоцентрических экваториальных координат двух эпох | 10 |
| 1.3. Связь пространственных геоцентрических экваториальных прямоугольных и полярных сферических координат | 12 |
| 1.4. Формулы, выражающие связь пространственных прямоугольных и эллипсоидальных координат | 13 |
| 1.5. Пространственные объектоцентрические горизонтные прямоугольные координаты и их связь с пространственными геоцентрическими экваториальными координатами | 15 |
| 1.6. Связь пространственных геоцентрических экваториальных топоцентрических горизонтных прямоугольных и сферических координат | 16 |
| 1.7. Прямая геодезическая задача в пространственной системе координат | 17 |
| 1.8. Обратная геодезическая задача в пространственной системе координат | 18 |
| 1.9. Элементы эллиптической орбиты. Орбитальные координаты | 19 |
| 1.10. Дифференциальные формулы, связывающие эллипсоидальные, экваториальные и топоцентрические горизонтные декартовы координаты | 22 |
| 1.11. Дифференциальные изменения координат произвольной точки в системе координат начальной точки | 23 |
| 1.12. Линейный сдвиг и вращение | 25 |
| 1.13. Дифференциальные изменения эллипсоидальных координат | 26 |
| 1.14. Связь двух топоцентрических горизонтных координат | 28 |
| 1.15. Связь полярных топоцентрических сферических координат | 30 |
| 1.16. Учет движения полюсов Земли | 31 |
| 1.17. Учет непараллельности полярных осей Земли и референц-эллипсоида | 33 |
| 1.18. Потенциальная энергия и поле гравитационных ускорений | 34 |
| 1.19. Сила тяжести и ее потенциал | 36 |
| 1.20. Уровенные поверхности и силовые линии | 39 |
| 1.21. Нестационарное потенциальное поле Земли | 40 |
| 1.22. Геоид | 41 |
| 1.23. Планетоцентрическая гравитационная постоянная и Нормальная планета. Возмущающий потенциал | 42 |
| 2. Потенциал притяжения и моменты инерции планетарного тела | 44 |
| 2.1. Потенциал притяжения планетарного тела в полярных координатах | 44 |
| 2.2. Потенциал притяжения планетарного тела в декартовых координатах | 46 |
| 2.3. Представление потенциала притяжения через моменты инерции планетарного тела | 47 |
| 2.4. Представление потенциала притяжения планетарного тела через полярные координаты по сферическим функциям Лежандра | 54 |
| 2.5. Условия построения потенциала точечных масс | 60 |
| 2.6. Распределение сжатия сферондов внутри гидростатической планеты | 61 |
| 2.7. Модель внутреннего строения Земли | 63 |
| 2.8. Потенциал двух точечных масс | 66 |
| 2.9. Потенциал планетарных точечных масс | 68 |
| 2.10. Уравнение ускорения силы притяжения точечных масс | 70 |

| | |
|---|------------|
| 3. Теория вращения и динамической фигуры Земли | 72 |
| 3.1. Элементарная теория вращения Земли вокруг центра инерции | 72 |
| 3.1.1. Принципиальные установки | 72 |
| 3.1.2. Главные векторы и момент внешних сил | 73 |
| 3.1.3. Количество движения системы | 74 |
| 3.1.4. Центр инерции системы | 75 |
| 3.1.5. Кинетический момент системы | 76 |
| 3.1.6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Условие чистого вращения Земли | 77 |
| 3.1.7. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела, вращающегося около неподвижной точки | 80 |
| 3.1.8. Регулярная прецессия | 81 |
| 3.1.9. Кинематические уравнения Эйлера | 81 |
| 3.1.10. Динамические уравнения Эйлера общего вида | 84 |
| 3.1.11. Реакция неподвижной точки | 85 |
| 3.2. Тензор и эллипсоид инерции Земли | 86 |
| 3.3. Главные оси, главные моменты и тензор инерции Земли | 87 |
| 3.4. Динамическая фигура планетарного тела. Параметры динамической фигуры Земли и Луны по современным данным | 88 |
| 3.5. Момент центробежных сил Земли | 91 |
| 3.6. Положение векторов угловой скорости ω и момента количества движения K_0 относительно полярной оси инерции Земли | 92 |
| 3.7. Способы решения дифференциальных уравнений Эйлера | 95 |
| 3.8. Параметры динамической фигуры и тензор инерции Земли | 101 |
| 3.9. Параметры динамической фигуры Луны и Марса | 103 |
| 3.10. Свободное движение полюса | 104 |
| 3.10.1. Период Эйлера | 104 |
| 3.10.2. Период Чандлера | 105 |
| 3.10.3. Суточное движение полюсов | 106 |
| 3.11. Упругая деформация Земли | 107 |
| 3.11.1. Числа Лява | 107 |
| 3.11.2. Приливные деформации | 109 |
| 4. Уравнения астрономо-геодезических и гравиметрических измерений в пространственной системе координат | 110 |
| 4.1. Исходные уравнения в пространственной топоцентрической горизонтной и экваториальной системах координат | 110 |
| 4.2. Уравнения тригонометрического нивелирования | 111 |
| 4.3. Уравнения ориентированного направления и астрономического азимута | 113 |
| 4.4. Уравнение измеренной линии | 115 |
| 4.5. Уравнения линейно-угловых измерений небесного объекта | 116 |
| 4.6. Уравнения нормаль-вектора синхронной плоскости и хорды | 118 |
| 4.7. Условие пучка плоскостей. Условное уравнение поправок топоцентрических экваториальных координат небесных объектов | 120 |
| 4.8. Уравнение синхронной плоскости в координатной форме | 121 |
| 4.9. Несинхронные наблюдения небесных объектов | 122 |
| 4.10. Топоцентрическая радиальная скорость | 125 |
| 4.11. Идея динамического метода | 126 |
| 4.12. Светолокация Луны | 132 |
| 4.12.1. Общие сведения о светолокации лунного отражателя | 132 |
| 4.12.2. Уравнения системы Земля — Луна | 134 |
| 4.12.3. Принципы решения уравнений светолокации Луны | 136 |
| 4.13. Спутниковое нивелирование | 138 |
| 4.13.1. Сущность спутникового нивелирования | 138 |
| 4.13.2. Уравнения спутникового нивелирования | 140 |
| 4.13.3. Вклад спутникового нивелирования | 141 |
| 4.14. Длиннобазисная радиоинтерферометрия | 143 |
| 4.15. Дифференциальные формулы в астрономической топоцентриче- | |

| | |
|--|------------|
| ской горизонтной системе координат | 146 |
| 4.16. Уравнение радиуса земного эллипсоида | 150 |
| 4.16.1. Уравнение радиуса трехосного эллипсоида | 150 |
| 4.16.2. Уравнение радиуса двухосного эллипсоида вращения | 153 |
| 4.17. Потенциал силы тяжести уровня эллипсоида вращения | 154 |
| 4.18. Нормальное ускорение силы тяжести и его изменение по высоте | 156 |
| 4.19. Кривизна силовой линии. Координатные поверхности и линии | 160 |
| 4.20. Потенциал силы тяжести трехосного эллипсоида | 163 |
| 4.21. Уравнение планетарного геоида и высота геоида над уровнем эллипсоидом | 167 |
| 4.22. Дифференциальные составляющие нормального потенциала. Формула геодезической высоты | 169 |
| 4.23. Возмущающий потенциал и аномалия высоты. Нормальная высота | 170 |
| 4.24. Ортометрическая высота | 171 |
| 4.25. Граничное условие возмущающего потенциала на физической поверхности Земли | 173 |
| 4.26. Изменение силы тяжести из-за перемещения центра инерции Земли в ее теле | 174 |
| 4.27. Уклонение отвесной линии. Дифференциальная формула аномалии высоты | 175 |
| 4.28. Граничное условие на поверхности геоида и идея решения обратной задачи вычисления уклонения отвеса | 177 |
| 4.29. Вторые производные потенциала силы тяжести и их значение в геодезии и геофизике | 178 |
| 4.30. Нормальные значения вторых производных потенциала силы тяжести. Аномальная часть градиентов | 182 |
| 4.31. Аномалия вторых производных потенциала силы тяжести и уклонений отвеса. Роль геофизических данных при выводе уклонений отвеса по вариометрическим данным | 185 |
| 4.32. Вторые производные силы тяжести и их назначение | 188 |
| 4.33. Уравнения гравиинерциальных измерений и их геодезическая интерпретация | 189 |
| 5. Планетарные и региональные астрономо-геодезические и геодинамические задачи | 196 |
| 5.1. Основные черты современной геодезии и ее связь с другими науками о Земле | 196 |
| 5.2. Геодезические и геофизические параметры Земли | 215 |
| 5.2.1. Параметры Нормальной Земли и согласующие формулы | 215 |
| 5.2.2. Определение геоцентрической гравитационной постоянной | 218 |
| 5.2.3. Определение второго гармонического коэффициента геогравиационного потенциала по возмущениям элементов орбиты ИСЗ | 220 |
| 5.2.4. Определение параметров земного эллипсоида вращения | 222 |
| 5.2.5. Определение параметров трехосного земного эллипсоида | 224 |
| 5.3. Главная геодинамическая задача и вопросы редукции измерений на единицу системы отсчета координат и гравитации | 227 |
| 5.4. Математические принципы планирования и обработки на ЭВМ наземных и спутниковых астрономо-геодезических измерений | 233 |
| 5.4.1. Математическая модель и ее назначение | 233 |
| 5.4.2. Теория градиентов и применение принципа однородности пространства при уравнивании результатов измерений | 239 |
| 5.4.3. Систематическая ошибка измерений и взаимосвязь уравниваемых величин. Информативность функций рядов измерений | 242 |
| 5.4.4. Принцип многоэтапного уравнивания обширных астрономо-геодезических и вариометрических измерений | 245 |
| Список литературы | 251 |
| Приложения | 252 |

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Машимов Мухамбет Машимович

ГЕОДЕЗИЯ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Заведующий редакцией *Л. Г. Иванова*

Редактор издательства *Т. Б. Шибанова*

Технические редакторы *Л. А. Миронова, Н. В. Панфилова*

Корректор *М. В. Дроздова*

ИБ № 8029

Сдано в набор 09.02.90. Подписано в печать 28.01.91. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0. Усл. кр.-отт. 17,0. Уч.-изд. л. 15,98. Тираж 4170 экз. Заказ 172./1978—8. Цена 1 р. 40 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра».
125047 Москва, Тверская застава, 3.

Набрано в ярославском полиграфкомбинате Госкомпечати СССР.
150049 Ярославль, ул. Свободы, 97.

Отпечатано в московской типографии № 6 Госкомпечати СССР.
109088 Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.