

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ухтинский государственный технический университет»
(УГТУ)

А. И. Кобрунов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
В ПРИКЛАДНОЙ ГЕОФИЗИКЕ
(ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ)**

Часть 2

Системный анализ и моделирование в условиях неопределённости

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области прикладной геологии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специализациям:

«Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», «Геофизические информационные системы»
и «Геофизические методы исследования скважин»
специальности 130102 «Технология геологической разведки»
направления подготовки 130100 «Прикладная геология»

УДК 550.8: 519.86(075.8)

ББК 26.2 я7: 22.17. я7

К 55

Кобрунов, А. И.

К 55 **Математические методы моделирования в прикладной геофизике (избранные главы).**

В 2-х ч. Ч. 2. Системный анализ и моделирование в условиях неопределённости [Текст] : учеб. пособие / А. И. Кобрунов. – Ухта : УГТУ, 2014. – 155 с.

ISBN 978-5-88179-835-2

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов по основной образовательной программе специальности «Технология геологической разведки» специализаций: «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», «Геофизические информационные системы» и «Геофизические методы исследования скважин», а также при подготовке аспирантов и соискателей учёных степеней по специальностям «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», «Системный анализ, управление и обработка информации по направлениям в науках о Земле». Учебное пособие состоит из двух частей: части 1 «Функционально-аналитические основы», изданной в УГТУ в 2014 году и настоящей – части 2 «Системный анализ и моделирование в условиях неопределённости».

Вторая часть является существенной переработкой ранее изданной в издательстве LAMBERT Academic Publishing LAP 2013 г. книги автора «Математические модели системного анализа в прикладной геофизике».

Вторая часть учебного пособия, являясь продолжением первой, посвящена одному из важнейших вопросов современных математических методов анализа геолого-геофизической информации для сложных моделей сред – моделированию сложнопостроенных сред в условиях неопределённости. Это основной предмет рассмотрений при изучении и освоении современных технологий поисков и разведки месторождений полезных ископаемых. Изучаются формализованные и математически осмысленные методообразующие принципы системного анализа геолого-геофизических данных, включая системный анализ моделей, данных и связей между измеряемыми и искомыми параметрами моделей. Изучаются специфические для условий неопределённости методы моделирования сложнопостроенных сред, адекватные сформулированным методологическим принципам системного анализа, основу которых составляют методы системной инверсии многокомпонентных данных.

Рассматриваются методы прогнозирования параметров сложнопостроенных неоднородных сред в условиях неопределённости и принципы организации технологий многовариантного прогноза, основанных на правилах нечёткого вывода и физически содержательных аппроксимаций полей рассеяния данных. Изучаются методы конструирования технологий оценок достоверности компонент многовариантного прогноза моделей геологических сред.

Работа выполнена в рамках реализации проекта по подготовке высококвалифицированных кадров для предприятий и организаций регионов (**Программа «Кадры для регионов»**).

УДК 550.8: 519.86(075.8)

ББК 26.2 я7: 22.17. я7

Содержание издания согласовано с базовым предприятием филиала ООО «Газпром ВНИИГАЗ» в г. Ухте (зав. базовой кафедрой – Н. П. Вишератина, к.г.-м.н.).

Рецензенты: П. Н. Александров, главный научный сотрудник Центра геоэлектромагнитных исследований Института Физики Земли им. О. Ю. Шмидта Российской Академии наук, д.ф.-м.н.; Н. П. Вишератина, зав. базовой кафедрой, к.г.-м.н.

Научно-методический редактор: В. Е. Кулешов, проректор по научной работе и инновационной деятельности УГТУ, доцент, к.т.н.

© Ухтинский государственный технический университет, 2014

© Кобрунов А. И., 2014

ISBN 978-5-88179-835-2

Оглавление

Оглавление	3
Предисловие.....	6
Введение.....	7
Глава 1. Математические модели прикладной геофизики и их системная организация.....	18
1.1 Моделирование в задачах прикладной геофизики. Общие представления.....	18
1.2 Модели среды и их системная организация.....	21
1.2.1 Геологический объект	23
1.2.2 Физическая модель геологической среды.....	25
1.3 Модели геолого-геофизических связей и их системная организация.....	26
1.3.1 Уравнения математической физики.....	28
1.3.3 Эталонирующие преобразования.....	30
1.4 Параметризации моделей.....	31
1.5 Классификация моделей.....	32
1.5.1 Модели среды.....	32
1.5.2 Модели поля	35
1.5.3 Модель связей	36
Глава 2. Принципы системного анализа при моделировании геологических сред в прикладной геофизике.....	38
2.1 Первый принцип системного анализа.....	39
2.1.1 Идентификация моделей.....	39
2.1.2 Связи в физико-геологических моделях.....	41
2.2 Второй принцип системного анализа	43
2.3 Третий принцип системного анализа.....	45
2.4 Системная инверсия и декомпозиция	47

2.5 Синтез интегрированной ФГМ.....	50
Глава 3. Неопределённость в задачах моделирования.....	52
3.1 Природа неопределённости	52
3.2 Неопределённость исходных данных	53
3.3 Неопределённости в задании связей	55
3.3.1 Теоретическая эквивалентность.....	57
3.3.2 Практическая эквивалентность	60
3.3.3 Скрытая эквивалентность	61
Глава 4. Методы моделирования в условиях неопределённости.....	65
4.1 Квазирешения и аппроксимационный подход.....	65
4.2 Экстремальные классы и свойства квазирешений	69
4.3 Критериальные принципы доопределения задач инверсии	77
4.4 Классы критериев.....	89
4.4.1 Интегральные квадратичные критерии оптимальности	90
4.4.2 Корреляционные критерии оптимальности	92
4.4.3 Равномерные критерии оптимальности.....	96
Глава 5. Эволюционно-динамические принципы моделирования в условиях неопределённости.....	105
5.1 Эволюционно-динамические условия	105
5.2 Инверсия для распределённых параметров.....	108
5.3 Инверсия для структурных моделей	117
5.4 Параметр релаксации и смежные вопросы технологии.....	121
5.5 Абстрактная вычислительная схема	126
5.5.1 ЭТАП 1	126
5.5.2 ЭТАП 2.....	127
Глава 6. Прогнозирование параметров на основе недоопределённых связей	130
6.1 Уравнения связи между параметрами	130
6.2 Неоднородные данные и поля рассеяния	134
6.3 Цепные правила прогнозирования	140

6.4	Представление результатов в форме моделей параметров.....	142
6.5	Алгоритм и технология прогнозирования параметров.....	143
6.5.1	Построение и анализ графа прогноза.....	144
6.5.2	Продвижение по графу.....	146
	Заключение.....	149
	Литература	151
	Предметный указатель	152

Предисловие

Вторая часть, учебного пособия под общим названием «Математические методы моделирования в прикладной геофизике (избранные главы)» посвящена системному анализу и моделированию геологических сред по геофизическим данным в условиях неопределённости. Она первоначально была издана отдельной книгой в издательстве LapLAMBERTAcademicPublishing. 2013 г., под названием «Математические модели системного анализа в прикладной геофизике». Заказать её можно в книжном онлайн-магазине Ljubljuknigi! по следующей ссылке: http://www.ljubljuknigi.ru/store/bookprice_offer/show?token=e730288bda73294958e36c62dba10df8dd7e65a2&auth_token=8d5cd16f7535529653d1ebcbb78bfe7b&locale=ru. В настоящем издании, на основании опыта преподавания материала изложение существенно переработано. Это не только обычная стилистическая и редакционная переработка, но и переработка по существу. Во-первых, присутствовавшая ранее часть, связанная с рассмотрением процесса прохождения сигнала по информационному каналу и редукция измерений к идеальному прибору исключена. Этот вопрос отдельно рассматривается и достаточно подробно изложен в учебных пособиях [1, 2]. Во-вторых, введён новый раздел «Прогнозирование параметров на основе недоопределённых связей», который служит развитием изложенного в первой части подхода нечёткого моделирования. Существенной переработке подверглось изложение принципов системного анализа и связанные с ними вопросы. Кроме того, в процессе переработки исправлены замеченные неточности и опечатки.

Я благодарен своим ученикам: Е. А. Мотрюк, А. Г. Куделину и С. Г. Куделину, М. Н. Барабанову, С. Н. Шиловой, Р. Хозяинову, А. В. Григорьеву, А. Н. Художиловой, С. Симонову. Незаменимую помощь мне оказала профессор Бурмистрова О. Н., которая не только взяла на себя труд прочтения и редактирования фрагментов рукописи на разных этапах её подготовки, но и оказала мне неоценимую помощь своими советами в процессе подготовки и написания книги. Я пользовался неизменной поддержкой моих учеников декана ГРФ Демченко Н. П., зав. кафедрой О. М. Вельтистовой, и соратников – зав. кафедрой Ю. Г. Смирнова, В. А. Зыкова. Этот список очень большой. Он включает в себя и академика В. Н. Страхова, оказавшего на начальном этапе решающее влияние на моё становление, профессора А. А. Никитина, чьей поддержкой и добрым отношением я постоянно пользовался, моего коллеги Ю. И. Блоха, дискуссии с которым утвердили меня в моих убеждениях, и очень многих других. Я искренне им признателен.

Введение

Вторая часть учебного пособия содержит три основные темы, составляющие методологическую основу конструирования содержательных методов моделирования, специфичных для наук о Земле и, прежде всего, геофизики. Это:

- «Организация информации, включая связи между данными при изучении сложнопостроенных сред – системный анализ данных». Главы 1, 2.
- «Методы моделирования в условиях неопределённости, следующие из принципов системного анализа и их реализующие». Главы 3–5.
- «Прогнозирование параметров на основе технологий нечёткого вывода и многовариантное моделирование». Глава 6.

Системный подход в анализе многокомпонентной геолого-геофизической информации имеет две составляющие. Во-первых, системную организацию информации, итогом которой служит формирование непротиворечивой и достаточно полной математической модели компонент изучаемого объекта с определением их иерархической организации, взаимосвязи с другими моделями и параметрами, входящими в описание моделей. Во-вторых, это оперирование системно организованными данными с помощью методов, ориентированных на работу с системой данных. Эти методы следуют из методообразующих, конструктивных принципов системного анализа и включают в себя, во-первых, формулировку задачи системной инверсии как итога системного анализа данных, и, во-вторых, методы её решения. Последние состоят в декомпозиции этой интегрированной задачи на составляющие, решение каждой из которых реализовано в соответствующем алгоритме. Эти алгоритмы представляют собой комбинации методов, основанных на принципах: аппроксимационном; критериальном; согласованно-критериальном; эволюционно-динамическом. Далее итоговой процедурой системной инверсии служит синтез интегрированного результата решения подзадачи полученного после декомпозиции.

Сложнопостроенные среды – это, прежде всего, неоднородные среды, связи между параметрами которых характеризуются нечёткостью, размытостью. И причиной их нечёткости служит не присутствие ошибок, а отличие среды от однородной с выдержанными параметрами. В этой ситуации прогноз параметров физико-геологических моделей объективно также носит нечёткий характер. Следует предусмотреть многовариантное прогнозирование с оценкой достоверности вариантов прогноза компонент модели.

Системный подход в построении моделей. Основным свойством современных задач моделирования служит то, что моделируемые объекты, будь то сре-

ды, процессы, в них происходящие, или физические поля, характерные для сред, – это многокомпонентные, сложно построенные объекты. Они характеризуются не только большим числом входящих в них параметров, что само по себе оказывает специфическое влияние на задачи моделирования, но и существованием не вполне формализованных взаимозависимостей своих параметров, зачастую оказывающих решающую роль в характере конструируемых моделей. Системный подход прослеживается во всех задачах моделирования: моделировании полей; сред; зависимостях между моделями и наблюдаемыми геолого-геофизическими следствиями, и основан на фундаментальных принципах. Основополагающим служит представление о моделируемом объекте в его взаимосвязях с другими объектами. Этот принцип эквивалентен, собственно, принятию *системного подхода в задачах моделирования и, в частности, в науках о Земле как базового*. Принятие системного подхода выражается в формулировке методообразующих принципов системного анализа геолого-геофизических данных. Таких принципа три. Из принятия каждого из них следуют конструктивные выводы к процессу и методам анализа геолого-геофизических данных.

Первый системный принцип анализа комплекса геолого-геофизических данных состоит в том, что геологический объект рассматривается как система своих образов – содержательных физико-геологических моделей с присущими им наблюдаемыми функциями геофизических полей, параметрами, отображениями параметров в наблюдаемые, и связями с параметрами между собой, и параметрами других физико-геологических образов (ФГМ) изучаемого объекта. Отсюда, в частности, выводится конструктивный вывод о принципе подобия различных элементов ФГМ, что снижает эффект эквивалентности при реконструкции параметров модели.

Второй принцип системного анализа комплекса геолого-геофизических данных состоит в том, что моделирование наблюдаемых компонент геофизических данных выбранными отображениями, реализуемыми аналитически, либо алгоритмически определёнными зависимостями, адекватны природным законам. Этот принцип утверждает, что всякая итоговая содержательная физико-геологическая модель должна соответствовать требуемому уровню приближения своего поля – наблюдаемого и найденного в результате процедуры инверсии для этого поля. Конструктивный смысл этого принципа проявляется в постановке обратных задач для соответствующих компонент поля, как базовых элементов реконструкции параметров физико-геологических моделей.

Третий принцип системного анализа состоит в том, что все содержательные ФГМ имеют общую историю формирования, определённую историей формирования исходного объекта. Этот принцип, в своей конструктивной ипостаси означает, что должны существовать эволюционно-динамические законы и управляющие ими геодинамические параметры, которые контролируют развитие объекта от некоторого стартового состояния к современному, соответствующему всем имеющимся наблюдаемым.

Использование введённых принципов системного анализа позволяет формализовать задачу реконструкции интегрированной сложнопостроенной модели и разработать для её решения специализированную технологию системной инверсии.

Однако прежде чем приступить к оперированию всей совокупностью моделей связей и полей с помощью методов системного анализа, следует «разложить по полочкам» различные компоненты информации, выделив первичные, вторичные, и связи между ними. Для этого следует выполнить классификацию используемых моделей и их свойств. С этой целью рассматриваются: модели объектов и их системная организация; модели геолого-геофизических связей; классификация моделей. Это содержательные вопросы системного анализа данных. Следует отдельно рассматривать: модели сред (геологических, физических); модели связей различных параметров компонент моделей среды и поля; модели наблюдаемых и подлежащих анализу полей, и выполнить их классификацию. Последующая формулировка задач реконструкции параметров должна основываться на введённой классификации.

Системный анализ данных взаимосвязей, основанный на введённой классификации, позволяет сформулировать задачу системной инверсии.

Его итогом служит формулировка задачи реконструкции компонент ФГМ, в которую входят: компоненты разноплановых моделей геологического объекта; выявленные взаимозависимости между ними; установленные операторы прямой задачи; сформулированные критерии близости различных представлений компонент модели; эволюционно-динамические принципы формирования изучаемого объекта. Тем не менее, это всего лишь символическая запись, цель которой – определить структуру задачи, выделить в ней структурно-зависимые элементы и определить приёмы решения конкретных подзадач, образующих элементы этой структуры. Решать эту задачу можно только на основе её декомпозиции – сведению к системе более элементарных частных задач.

Однако далее следует позаботиться о синтезе интегрированного результата из полученных частных разноплановых решений задач – элементов декомпозиции.

Синтез основан на алгоритмически формализованных приёмах анализа сходимости результатов решения компонентов декомпозиций задачи системной инверсии и неформального группирования результатов инверсии отдельных методов. Этот этап суть реконструкция интегрированной физико-геологической модели на основе решения частных обратных задач для геофизического метода или, что то же самое, сводимых в единую интегрированную физико-геологическую модель среды.

Неопределённость в задачах моделирования

Характерной чертой изучения сложнопостроенных сред является неопределённость этой задачи. Собственно потому-то среда и сложнопостроена, что подходить к её изучению стандартными методами для простых сред – задача нерешаемая.

По определению, сложнопостроенные среды – это среды, модель которых включает большое количество параметров. Ожидать, что все они однозначно будут найдены по уравнениям связи с наблюдаемым, не следует. В таких задачах лучше всего сразу предположить неединственность (неопределённость) и подходить к этим задачам с учётом этого обстоятельства. Есть два способа описания неоднородных сред. Первый – традиционный – состоит в приписывании каждой точке геометрического пространства в модели среды своего, отличного от соседней точки, значения параметров, характеризующих свойство модели. Такой способ называется Римановым или покоординатным. Например, плотность меняется от точки к точке. Принятие такого способа, а он основной, предполагает, что изучение среды – это нахождение функции параметров от координат, и неопределённость решения этой задачи по реально имеющимся данным и предполагаемым связям – это и есть проблема моделирования в условиях неопределённости. Но есть и другой способ описания, и, как следствие, изучения неоднородности. Он восходит к идеям Лебега и основан на рассмотрении в элементе объёма доли каждой компоненты, совокупность которых образует объект. Такой способ описания неоднородностей называется лебеговым и является безкоординатным. Неоднородность – это конгломерат элементарных однородных объектов, и изучение неоднородности – это установление долей присутствия в объёме элемента каждого из образующих элементов. Такой способ описания ведёт к конструктивным результатам при прогнозировании параметров в методах нечёткого логического вывода о значениях параметра, но является и источником идей для создания новых аппаратных принципов изучения неоднородностей. Эти принципы состоят в изучении резонансных откликов элементов, слагающих неоднородность на специальным образом подобранное

возмущение. Такое изучение реализуется, в частности, по энергетическим линиям рассеяния в гамма-спектроскопии.

Природа неопределённости в задачах моделирования сложнопостроенных сред многообразна. Она состоит в неопределённости задания исходных данных – наблюдаемых, неопределённости в задании связей. Это хорошо иллюстрируется примером с нечёткими множествами и связями – отношениями между нечёткими параметрами. Данные размыты, а связи плохо определены. Но для задач моделирования сложнопостроенных сред, характеризующихся распределёнными параметрами, не менее значимо существование теоретической эквивалентности, а в вычислительном аспекте её приближённого аналога – практической эквивалентности. В процессе рассмотрения вопроса о методах решения недоопределённых задач даётся ответ на вопрос о том, как выявить эти эффекты и что им противопоставить.

Аппроксимационный подход, квазирешения и скрытая эквивалентность

Очевидным подходом к решению задачи реконструкции параметров сложнопостроенной среды служит аппроксимационный подход. Он состоит в подмене сложной модели среды, описываемой, например, пространственно-распределённым параметром, для которой имеет место эквивалентность её упрощённым аналогом – аппроксимационной конструкцией. Требования к ней очевидны. Она должна быть содержательной, т. е. хорошо подходить для аппроксимации конкретного экземпляра сложнопостроенной среды, изучение которого происходит. Это с одной стороны. С другой – параметры входящих в неё элементов однозначно должны находиться по наблюдаемым. Эти два свойства дают надежду на то, что найденный в результате конкретный экземпляр из аппроксимационной конструкции отразит основные изучаемые черты реального экземпляра сложнопостроенной среды. Так оно и происходит, если только аппроксимационная конструкция не слишком сложна. Построенное решение называется квазирешением, поскольку это не требуемое распределение параметра, а его аппроксимация выбранным классом моделей. Но естественные желания более и более углубиться в предмет, повысить детальность его изучения ведут к усложнению аппроксимационной конструкции – включению в неё всё больше и больше элементов в надежде, что они «выстроятся в нужном порядке» в силу единственности определения параметров, и позволят увидеть в деталях изучаемый экземпляр среды в силу того, что конструкция содержательна. Но на определённом этапе все ожидания рушатся, и происходит это задолго до того, как число параметров превзойдёт предельное, при котором задача ещё имеет единственное решение. Происходит удивительная вещь. Теоретически

задача нахождения квазирешения на аппроксимационном классе единственна, по смыслу и визуальной оценке конструкция содержательна, а получаемое решение совершенно не похоже на аппроксимацию истинного экземпляра распределения параметра. Она аппроксимирует нечто совершенно иное. Это и есть проявление эффекта скрытой эквивалентности. Таким образом, традиционные методы построения квазирешений для сложнопостроенных сред ведут к проявлениям эффектов скрытой эквивалентности, которые и ограничивают применимость этих методов для изучения сложнопостроенных сред. Причина возникновения этого эффекта достаточно понятна. Она состоит в том, что общая задача реконструкции распределённых параметров имеет много эквивалентных решений. Среди них есть и то, которое характеризует истинный экземпляр распределения параметра, но есть и многое другое. Поэтому, если аппроксимационная конструкция достаточно широка (но ещё не выходит за пределы единственного нахождения параметров), то на ней найдётся некоторый элемент, который аппроксимирует одно из эквивалентных распределений ещё лучше, чем желаемый аппроксимирует истинное распределение параметра, которое, с точки зрения задачи, всего лишь одно из эквивалентных и ничем не лучше чем другие. Он-то, а не желаемый, и будет получен в качестве квазирешения. И здесь возникает вопрос. Чем этот эквивалентный элемент лучше остальных других эквивалентных по наблюдаемой (включая и истинный)? Почему аппроксимационная конструкция оказывается нацеленной именно на его получение, хотя строили её для другого – желаемого? Если ответить на эти вопросы, то станет понятным, как управлять эффектом скрытой эквивалентности. Для этого будет достаточно построить вычисления таким образом, чтобы наделить требуемым свойством именно желаемый элемент.

Ответ на этот вопрос кроется в свойствах оптимальности того, либо иного распределения параметра из числа эквивалентных по заданной наблюдаемой относительно некоторого функционала. Оказывается, что если не принимать специальных мер, то наилучшим для аппроксимации обладает элемент из класса эквивалентных, менее всего уклоняющийся от нуля в смысле квадратичной (это самая распространённая) метрики. Это свойство является ключевым и определяющим для результата поиска квазирешения. Квазирешение даёт аппроксимацию того элемента из класса эквивалентных, который сам является наименее уклоняющимся от нуля (или нулевого приближения) в квадратичной норме (а не того, который мы надеялись получить, строя аппроксимационную конструкцию). В этом состоит ответ на вопрос, чем он лучше. Он оптимален относительно квадратичной метрики. Для разных наблюдаемых – это разные элемен-

ты, но в своём классе эквивалентности каждый из них имеет минимум квадратичной нормы и, как следствие, обладает соответствующими свойствами, проистекающими из его оптимальности. Совокупность таких элементов называется экстремальным классом, соответствующим квадратичной норме. Проблема состоит совсем не в том, что плоха квадратичная норма. Её можно заменить на другую. Тогда возникнет иной, экстремальный класс относительно иной нормы. Проблема в том, что в рамках аппроксимационного подхода и построения квазирешений всегда будет получаться аппроксимация элемента, соответствующего этой выделенной норме и принадлежащего фиксированному экстремальному классу. Если аппроксимационная конструкция достаточно узкая и класс проекций на неё экстремального класса совпадает с самой аппроксимационной конструкцией, то эффект скрытой эквивалентности проявляться не будет. Но сложные конструкции, направленные на подробное изучение объекта в его деталях, окажутся во власти этого эффекта и будут приводить к предопределённым по свойствам решениям, которые не закладывались в аппроксимационную конструкцию.

Свойства экстремальных классов или, иначе, свойства решений уравнений Эйлера для задачи минимизации нормы элемента на классе ему эквивалентных по наблюдаемой зависят от вида уравнения, относительно которого элементы образуют класс эквивалентности, и вида нормы, в которой минимизируется отклонение от нуля искомого решения, – критерия оптимальности. В конструкцию последнего входит, собственно, норма в соответствующем пространстве и линейный замкнутый оператор, называемый управляющим оператором, значение на котором искомого распределения минимизируется. Свойства экстремальных классов богаты. Во-первых, для большей части задач решение на них единственно и всегда существует. Во-вторых, легко конструктивно описываются подмножества в экстремальных классах, на которых требуемое уравнение плотно разрешимо, т. е. разрешимо с любой наперёд заданной точностью. В третьих, существуют зависимости между плотными подмножествами в экстремальных классах для различных видов критериев оптимальности, позволяющие формировать принципы оптимальности для одних критериев, а вычисления производить в других, более удобных для этой цели пространствах.

Критериальные принципы доопределения задач инверсии

Таким образом, для задач изучения сложнопостроенных сред – это обычный предмет для процедур системной инверсии – следует управлять процессами скрытой эквивалентности, обеспечивая получение тех решений, которые удовлетворяют требуемым, а не диктуемым свойствами задачи, принципами опти-

мальности решения или, иначе, принадлежат экстремальным классам с требуемым свойством оптимальности. Следует таким образом организовать вычисления, чтобы результат принадлежал либо элементу из аппроксимационной конструкции, служащему проекцией заранее заданного экстремального класса, или самому экстремальному классу в выбранном функциональном пространстве. Причём в первом случае не следует заботиться о единственности решения на аппроксимационной конструкции. Это произойдёт автоматически за счёт выполнения требования оптимальности, заложенного в конструкции экстремального класса. Такой подход эквивалентен введению в процесс построения решения недоопределённой задачи явно заданного, и потому управляемого критерия оптимальности. Как только требование принадлежности решения выделенному экстремальному классу выполнено, решение автоматически становится единственным (для широкого диапазона ситуаций) и оптимальным относительно явно заданного, и потому доступного для управления критерия оптимальности. Для примера рассматриваются некоторые задачи реконструкции плотностных распределений и распределений глубин для структурных элементов. Эти задачи служат классическим примером для задач с широкой областью эквивалентности, и поэтому могут служить основой для тестирования методов.

Классы критериев

Центральным по содержательности вопросом оказывается вопрос выбора «правильного» критерия оптимальности. Традиционные соображения о виде критериев оптимальности для искомого параметра, рассмотренные вне свойств оператора прямой задачи и вытекающих свойств экстремальных классов, приводит к получению неудовлетворительных результатов. Это хорошо иллюстрируется на примере задач гравиметрии. Выбор критерия оптимальности должен опираться на свойства экстремальных классов для разных типов норм и типов управляющих замкнутых операторов, входящих в конструкцию критерия через норму. В этой связи изучаются свойства экстремальных классов, порождённых критериями квадратичных норм, квадратичных форм, выражающих принцип корреляционной близости, норм в равномерной метрике. В результате этих рассмотрений установлены связи между критериями оптимальности, основанными на различных нормах. Это позволяет управлять свойствами квазирешений на экстремальных классах и тем самым обеспечить управление эффектами скрытой эквивалентности.

Эволюционно-динамические принципы

Тесно связанными с критериальными принципами доопределения исходно неопределённых задач реконструкции параметров сложнопостроенных сред служат эволюционно-динамические. Системный анализ физико-геологических моделей и попытка реконструкции распределённых параметров сложнопостроенных сред включают в себя анализ сценариев развития объекта исследования, итогом которого служит его современное состояние, характеризующее изучаемой физико-геологической моделью. Собственно сценарий включает в себя плавное (эволюционное) развитие и катаклизмы – катастрофические события. Моделирование катастрофических событий с непредсказуемым для компонент модели результатом выходит за рамки рассматриваемых методов. Мы ограничиваемся лишь плавными – эволюционными процессами, которые составляют фрагмент истинного развития – от катастрофы до катастрофы. В рамках эволюционирующих систем происходит многогранная эволюция различных компонент – эволюция химических составов, эволюция биоразнообразия, эволюция метаморфизма и, самое главное для наших дальнейших рассмотрений, эволюция движения – динамики физико-геологических моделей от некоторого условного прошлого к настоящему, характеризующемуся заданным набором наблюдаемых. Сценарии эволюции определяются начальными условиями – состоянием физико-геологической модели в условном прошлом, с которого началось движение, и геодинамическими параметрами, к числу которых относятся вектор скорости движения различных компонент модели (зависящий от пространственно-временных координат) и внешний приток или убыль изучаемого «вещества». Геодинамические параметры и начальное состояние входят в уравнение движения, отражающее законы сохранения, и если бы они были определены, приводили бы к истинному состоянию модели в условно настоящее время. Вместо этого задано конечное состояние наблюдаемых, которое должна приобрести развивающаяся модель в конце пути своего развития. Начальное состояние можно считать заданным, предусмотрев его изменение в рамках изменения гипотезы развития, сформированной по результатам системного анализа информации, относящейся к изучаемому объекту и территории в целом. Геодинамические параметры выражаются через компоненты невязки наблюдаемых, представляющих собой разницу между итоговой (заданной) наблюдаемой и рассчитанной на том либо ином этапе условного времени эволюции. Анализ задачи показывает расчленение движений на три независимые компоненты, последовательное применение которых в произвольном порядке обеспечивает собственно динамику. Это процессы сжатия – растяжения, или дилатационные

процессы, процессы сдвига и процессы притока и оттока вещества, называемые дивергентными. Будучи выражены через невязки наблюдаемых, они порождают итерационные процессы – аналоги эволюционно-динамических моделей развития. Тем не менее, сохраняется недоопределённость в выражениях геодинамических параметров через невязки наблюдаемых. Компенсировать эту недоопределённость следует в рамках критериальных принципов доопределения задач с неединственным решением, обеспечив принадлежность искомого распределения в конечной точке процесса экстремальному классу, параметры которого уточняются от шага к шагу процесса вместе с геодинамическими параметрами.

Порождаемые этим подходом вычислительные схемы конструктивны и содержат параметры, ответственные за сходимость процессов, – параметры релаксации. Они находятся на основании требования скорейшего убывания невязки и имеют представление в виде выражений, входящих в итерационный процесс.

Описанный подход на своём заключительном этапе использует принципы критериальности, заложенные в экстремальных классах для того, чтобы совместно с заданием невязки наблюдаемых и требованием её минимизации снизить недоопределённость в выборе распределения геодинамических параметров. В этой связи прилагаемые далее абстрактные вычислительные схемы, основываясь на принципах оптимальности, одновременно включают в себя и нахождение распределённых параметров. Следует отметить, что этап формирования геодинамических параметров представляет собой отдельный раздел конкретного системного анализа конкретных материалов и должен осуществляться на основе тщательного изучения особенностей процессов, происходящих в изучаемом регионе. Такое изучение позволяет выявить характерные особенности геодинамических параметров, которые, вкуче с принципом минимизации невязки наблюдаемых, позволяют одновременно получить сведения о развитии геодинамических процессов. Последнее представляется не менее важным, чем, собственно, реконструкция распределённых физических параметров. Но эти вопросы относятся уже к области предметного моделирования и методики формирования управляющих параметров.

Прогнозирование параметров на основе недоопределённых связей

В комплексе вопросов, связанных с моделированием геологических сред по геофизическим данным в условиях неопределённости, особое место занимает проблематика прогнозирования параметров по системе косвенных признаков. Эта задача рассматривается в главе 6. Прогнозирования геолого-геофизических

параметров реализуется на основе нечётких данных о доступных для измерения геофизических параметрах и рассеянной информации о связях между ними. Отличительной чертой рассмотрений служит предположение о том, что рассеяние исходных данных имеет причиной неоднородности изучаемого объекта и не может быть сведено к ошибкам. Отсюда следует неприемлемость для изучения неоднородностей аппарата регрессионного анализа, направленного на исключение всякого рассеяния, относимого исключительно к погрешностям. Такие неоднородности описываются с помощью нечётких величин, функции принадлежности которых рассматриваются как поля рассеяния. Последние допускают физическую интерпретацию и характеризуют долю элементарного объекта, с заданными параметрами в общем объёме изучаемого объекта. Функции принадлежности – это тот самый аппарат описания неоднородностей в лебеговом подходе описания неоднородностей. Методы прогнозирования параметров на основе принципов логического вывода с использованием построенных полей рассеяния как функций принадлежности нечётких величин и отношений между нечёткими величинами естественным образом обеспечивают многовариантное прогнозирование с оценкой достоверностей каждого из вариантов на основе аппарата α -сечений. Анализ распределения вариантов прогноза по параметру достоверности позволяет снизить риски принятия ошибочных решений и обеспечить оптимизацию последующего технологического графа доизучения объекта.

Глава 1. Математические модели прикладной геофизики и их системная организация

1.1 Моделирование в задачах прикладной геофизики. Общие представления

Особенность задач математического моделирования в науках о Земле состоит в многокомпонентности вводимых моделей, наличии сложных взаимосвязей между компонентами и параметрами, входящими в описание модели изучаемого объекта. Взаимосвязи между компонентами играют решающую роль в задачах изучения особенностей геологических объектов, и без этих взаимосвязей моделирование нереализуемо.

В науках о Земле задачи моделирования можно условно расчленить на три главных компоненты:

- Моделирование геологических сред.
- Моделирование геофизических полей.
- Моделирование физико-геологических процессов, происходящих в геологической среде под влиянием естественных или искусственных источников для этих процессов.

Это тесно связанные между собой задачи, однако всегда сохраняющие свою специфику.

Задачей моделирования геологической среды служит построение системы её физико-геологических моделей, с согласованными параметрами и соответствующими физическими полями. По сути, геологический объект рассматривается как система своих проекций-отражений в форме конкретных физико-геологических моделей.

Геологические объекты являются сложной иерархической системой, в связи с чем изучаться они должны с позиций системного анализа – анализа целого, составленного из частей.

Построенная система непротиворечивых моделей среды, взаимосвязанных по параметрам с различными своими компонентами и соответствующими физическими полями, называется обобщённой интегрированной моделью геологической среды, или просто обобщённой физико-геологической моделью (ОФГМ).

Параметры, входящие в описание конкретных содержательных физико-геологических моделей с помощью заданных отображений, проявляются в наблюдаемых геофизических полях и, кроме того, связаны некоторыми зависимостями с параметрами других содержательных физико-геологических моделей

одной той же обобщённой физико-геологической модели. Интегрированные физико-геологические модели геологической среды – это компоненты системы, состоящие из моделей распределения конкретного физического параметра, построенные на основе решения соответствующей задачи инверсии согласованно со всем комплексом имеющейся геолого-геофизической информации о рассматриваемой модели (например, плотностной или скоростной).

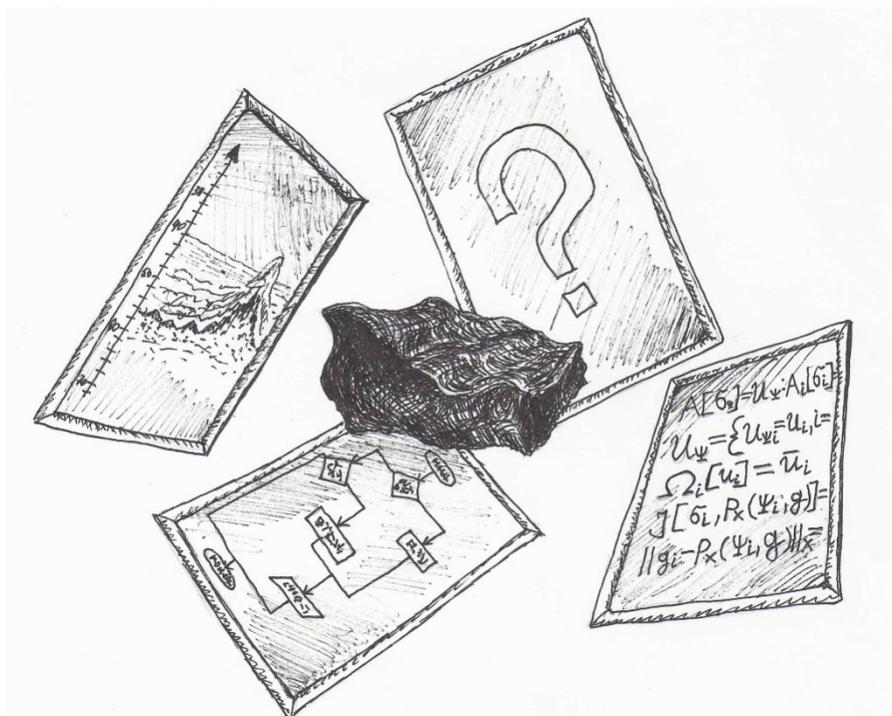


Рисунок 1.1 – Отражение геологического объекта в зеркале физико-математических моделей



Рисунок 1.2 – Организация обобщённой физико-геологической модели

Процесс такого моделирования включает в себя решение частных *обратных задач* или задача *инверсии*, состоящих в нахождении модели среды по извест-

ной ей соответствующей модели физического поля. Используя термин «обратная задача» или «инверсия» следует уточнить, для какого физического поля эта процедура реализуется. Употребляется термин «обратная задача» («задача инверсии») для соответствующего уравнения математической физики или соответствующего *оператора прямой задачи*. Это эквивалентные термины. Например, построения плотностной модели как компоненты физико-геологической модели, соответствующей заданному гравитационному полю – обратной задаче гравиметрии. Или задача инверсии для оператора прямой задачи гравиметрии.

Задачи моделирования геофизических полей, как правило, носят подчинённый характер и состоят в расчёте модели поля для конкретного содержательного элемента физико-геологической модели среды. Например, это задача расчёта компонент гравитационного поля по заданной предполагаемой плотностной модели. Такой тип задач носит также название «решение прямой задачи». Этот этап является промежуточным для решения задачи моделирования среды и, в частности, решения пометодных обратных задач или задач инверсии.

Задача моделирования физико-геологических процессов, происходящих в геологической среде под влиянием естественных или искусственных источников, для этих процессов служит, как правило, для изучения, уточнения, и предсказания результатов процессов, происходящих с элементами геологической и физико-геологической модели среды. Например, моделирование процессов образования соляных диапиров под влиянием силы тяжести вышележащих пород на основе решения уравнения вязких течений, служит, прежде всего, проверкой гипотезы о возможном механизме формирования подобных структур. Точно также моделирование процессов движения под действием прилагаемых сил используется для изучения и уточнения геодинамических факторов, приведших к современным наблюдаемым структурам. Моделирование процессов изменения дебита скважины под действием закачки теплоносителя служит решению задачи предсказания этого дебита при различных параметрах и выработки оптимальной стратегии разработки месторождений высоковязких нефтей.

Необходимость системного подхода в построении моделей геологических сред определена фундаментальными обстоятельствами, связанными со сложностью и многокомпонентностью изучаемых объектов. Главным служит понимание того, что целое – геологический объект – это не есть просто суперпозиция своих элементов, но объединение их внутренними взаимосвязями и взаимовлияниями, превращающих эти элементы в целое, наделённое новыми качествами. В этом новом качестве изменение одного компонента влечёт перестройку и реорганизацию всей системы. Например, изменение плотности как одного из эле-

ментов системы параметров, характеризующих геологический объект, тут же влечет за собой необходимость изменения скорости распространения упругих волн, пористости, проницаемости, других геомеханических характеристик, превращая тем самым исходный геологический объект в совершенно иное образование. Изменение плотности ведёт к изменению гравитационного поля, но через связи внутри объекта – и к изменению других наблюдаемых эффектов – поля времён в сейсморазведке, электрических параметров, измеряемых в скважинах. Варьировать один параметр при реконструкции модели среды вне взаимосвязи с другими неправомерно. Далее, многокомпонентность объекта изучения ведёт к многокомпонентности его проявления в наблюдаемых физико-геологических эффектах. Рассматривать их следует совместно с взаимозависимостями между ними, предопределёнными зависимостями между элементами, складывающимися объект. Наконец, сложность моделей сред влечёт за собой проблемы эквивалентности в решении соответствующих обратных задач, в связи с чем последние следует рассматривать только с доопределяющими условиями, следующими из факта существования взаимосвязей и взаимоопределённости элементов.

Системный анализ в прикладной геофизике включает в себя два крупных этапа. Во-первых, это собственно системный анализ физико-геологической модели, итогом которого служит формирование непротиворечивой и достаточно полной математической модели компонент изучаемого объекта с определением их иерархической организации, взаимосвязи и параметров, входящих в описание модели. Это этап системного анализа данных. Это систематизация данных. Другой крупный этап – это формулировка задачи реконструкции параметров объектов (среды или процесса) на основе построенной системной модели. Эта последняя задача называется задачей системной инверсии.

1.2 Модели среды и их системная организация

Приближённое описание объекта реализуется с помощью *модели* (или просто *модели среды*), представляющей собой приближенное формализованное описание объекта, допускающее его конструктивное использование как самостоятельного элемента системы взаимодействующих объектов. В конструкцию модели входит (рис. 3) идентификатор объекта. Это его название. Перечень параметров, используемых для его описания и связи, установленные между параметрами объекта и параметрами других объектов системы.

Моделей одного и того же объекта может быть много. Они сами образуют систему, допускающую упорядочение, и отличаются между собой как выделенны-

ми для описания параметрами, так и используемыми между параметрами и другими объектами связями. На множестве Σ всевозможных моделей одного и того же объекта может быть выделено подмножество \mathbb{R} , допускающее систематизацию относительно операции включения, и множество \mathbb{Z} -моделей, пересечение между элементами которых пусто. Многообразие \mathbb{R} называется системой уточняющих моделей. Если $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $r_1 \subset r_2$ то r_2 есть декомпозиция r_1 (разделения целого на части). Аналогично r_1 есть агрегирование r_2 . Класс \mathbb{Z} называется системой дополняющих моделей.



Рисунок 1.3 – Модель.
Общая структура

Уточняющие модели используются для более подробного описания частей агрегированной модели. Так, например, моделью для некоторого объекта может служить прямоугольная призма со значением некоторого параметра (например, плотности) σ . Задание этого параметра определяет физическую модель. При этом размеры призмы и её положение в пространстве считаются заданными. Уточняющей моделью может служить разбиение этой призмы на элементы, каждый из которых имеет своё значение параметра $\sigma(i, j, k)$, как

это изображено на рис. 1.4.

Описание модели состоит в задании для каждой ячейки (i, j, k) значения параметра $\sigma(i, j, k)$. Дополняющей моделью той же среды может служить система поверхностей с уравнениями $z = f_i(x, y)$, $i = 0 \div N$, разделяющими заданные значения параметров $\sigma_i = \sigma_i(x, y)$. Её формирование состоит в задании уравнений поверхностей $z = f_i(x, y)$, $i = 0 \div N$ и позволяет учитывать структурные особенности изучаемой среды. Обе эти модели относятся к одному и тому же объекту – модели с именем, например, «плотностная модель». Но характер параметризации и, как следствие, её связь с другими объектами – различны.

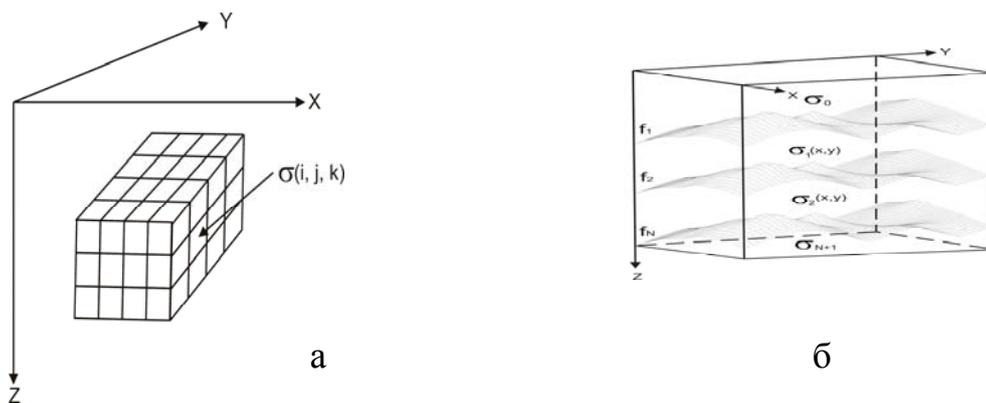


Рисунок 1.4 – Уточняющая (а) и дополняющая (б) модели

1.2.1 Геологический объект

Геологический объект – предмет изучения в геологии. Это исходное и наиболее общее понятие, которое основывается на совокупности предметных геологических и физических его компонентах. При изучении геологического объекта в целом необходимо охарактеризовать его компоненты – более узкие предметные области: тектонические, стратиграфические, литологические, геоморфологические, геодинамические и многие другие взаимосвязанные между собой свойства. Именно они, являясь самостоятельными объектами изучения, в целом со своими взаимосвязями образуют то большое и не вполне определённое понятие, которое называется «геологический объект». Строго говоря, компоненты геологического объекта должны называться его моделями – стратиграфической, динамической, литолого-фациальной и так далее. Но каждая из этих моделей весьма сложна, допускает множественность языков описания (т. е. моделей во введённом выше понимании), присущих этому языку параметров, характеризующих модель (в узком понимании) и связей между ними и параметрами других моделей. Именно поэтому эти укрупнённые, но конкретные характеристики геологического объекта, являясь его моделями, сами служат объектами для следующего, более низкого этажа системной организации модели геологического объекта.

В качестве такого этажа может выступать интегрированная *физико-геологическая модель* как проявление в виде системы (или подсистемы) взаимосвязанных физических моделей свойств геологической модели. Геологический объект, равно как и его компоненты (литологические, стратиграфические и другие), зачастую недоступен для прямого изучения. Связано это с глубиной и некоторой условностью, как следствие неизмеримостью самих геологических параметров. Информация о них поступает только в той мере, в которой эти параметры связаны с физической моделью геологической среды – физиче-

скими параметрами, а последние уже измеримы, хотя и косвенным образом, посредством регистрации соответствующих геофизических полей в виде характерных для них параметров. Следует понимать, что изменение литологической разновидности горных пород может отражаться в наблюдаемых физических полях – гравитационном, магнитном, волновом, лишь в той мере, в которой это изменение приводит к изменениям в физических свойствах пород, слагающих геологический объект – плотности, магнитной восприимчивости, скорости распространения упругих колебаний.

Интегрированная (обобщённая) модель геологического объекта или просто геологическая модель – это система связанных между собой компонентами содержательных геологических моделей – литологической, фациальной, стратиграфической и так далее (рис. 1.5). Если различные литологические разновидности обладают тождественными физическими свойствами (из диапазона рассматриваемых), то они не различимы геофизическими полями и тождественны с точки зрения принятого комплекса геофизических методов.

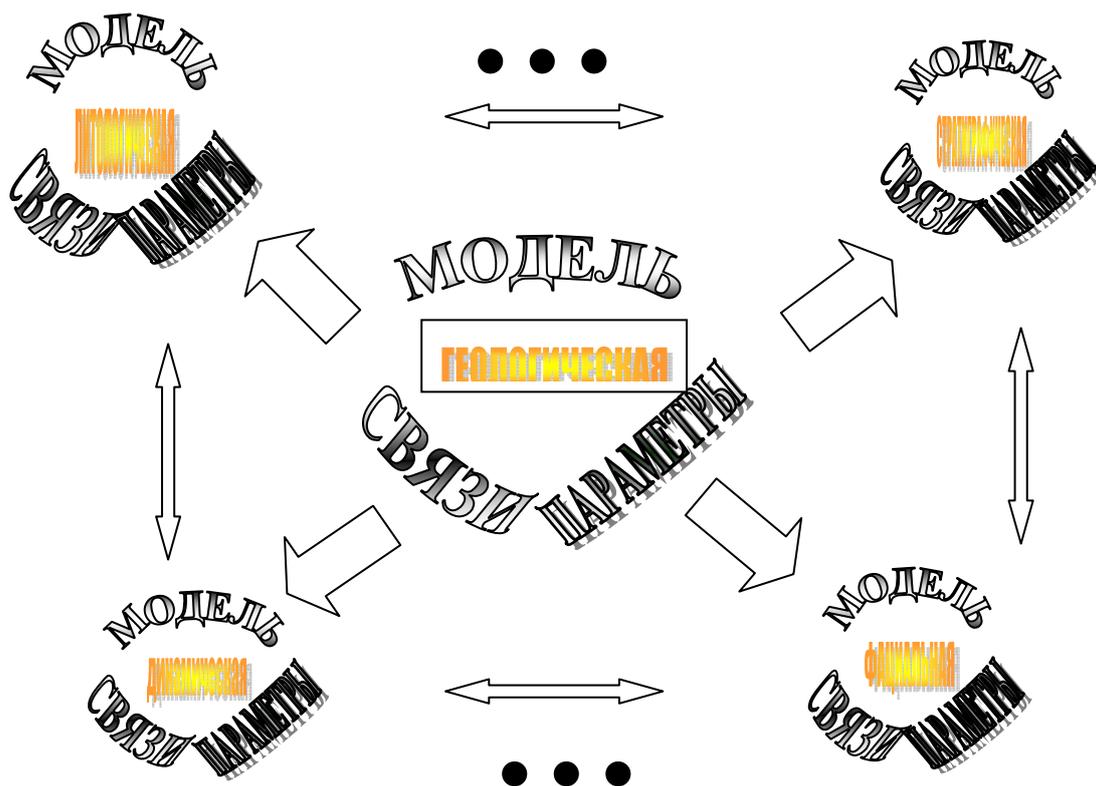


Рисунок 1.5 – Системная организация геологической модели

Функциональным отличием компонент геологической модели от физической состоит в том, что в наблюдаемых величинах её компоненты отображаются опосредованно, через элементы физической модели, с которой геологическая

связана физико-геологическими зависимостями. По сути, к элементам геологической модели следует отнести любой параметр, не имеющий явного проявления в регистрируемой наблюдаемой, но влияние которого проявляется опосредовано через измеряемые эффекты от других физических параметров.

1.2.2 Физическая модель геологической среды

Структура физико-геологической модели (рис. 1.6) в целом повторяет структуру геологической. Обобщённая или интегрированная физико-геологическая модель – это система взаимоувязанных физико-геологических содержательных моделей геологической среды. Содержательная физико-геологическая модель – это модель распределения конкретного физического параметра. Увязанного с другими геологическими данными. Если такой увязки специально не выполнялось и модель не согласована (не согласовывалась) с другими данными, то она называется физической моделью геологической среды. Физическая модель – это то, что соответствует наблюдаемому геофизическому полю. Если физическая модель согласована с другими данными, но остается моделью выделенного параметра, она называется физико-геологической. Взаимоувязанная система физико-геологических моделей для различных физических параметров называется обобщённой или интегрированной физико-геологической моделью. Также как для геологического объекта, определение которого осуществляется через предметные компоненты, так и для физической модели выделяются модели его содержательных свойств – плотностные, скоростные, геоэлектрические и так далее. Следует понимать, что физическое свойство, например, плотность, на этом этапе информационной модели – это физический объект, а взаимоувязанный способ его описания – язык; используемые для этой цели параметры и их взаимосвязь определяют плотностную модель. Плотностных моделей, как и прочих других, может быть много. Они отличаются по языку описания и, как следствие, используемым параметрам, связям с другими параметрами. Например, в качестве плотностной модели может выступать функция пространственных переменных, значение которой в каждой точке есть плотность, присущая изучаемой среде в этой же точке. Другой плотностной моделью может выступать структурная модель, в которой используются границы раздела заданных сред, а параметрами служат значения глубин залегания границ в данной точке. Иная плотностная модель возникает при рассмотрении распределения некоторого интегрированного параметра, для которого указана его связь с гравитационным полем. И хотя этот параметр не является плотностью в её обычном понимании, он характеризует именно плотностную модель.

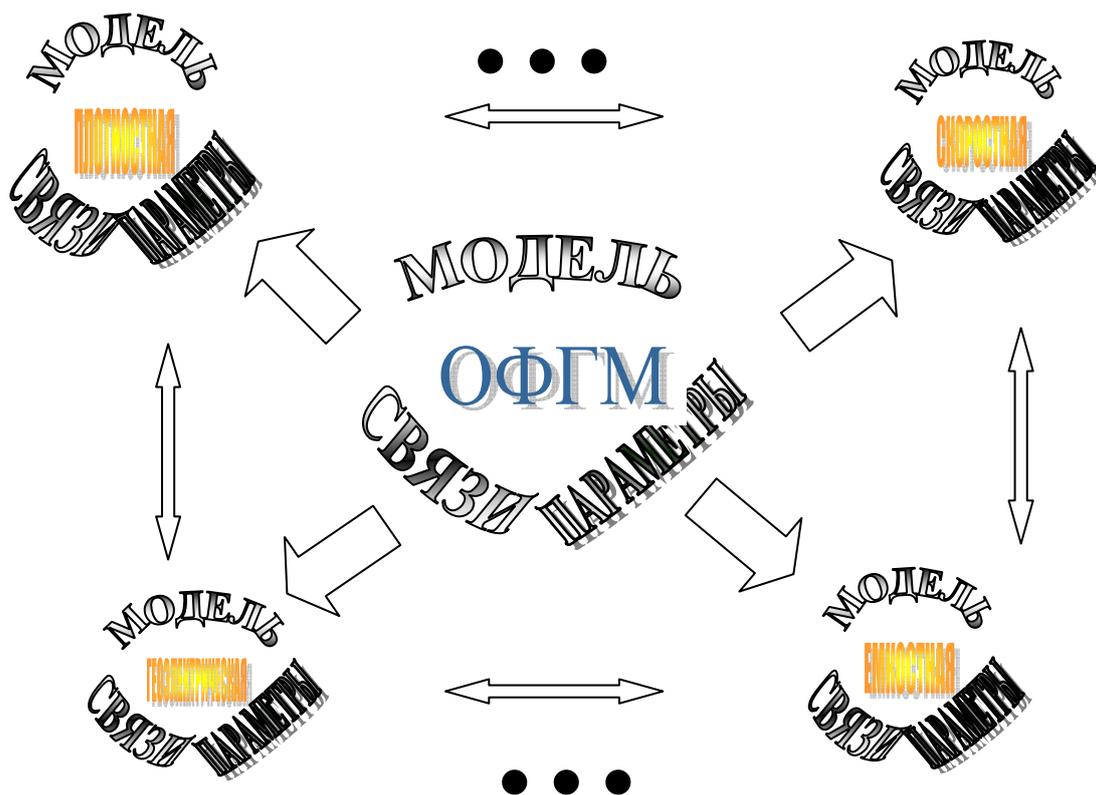


Рисунок 1.6 – Системная организация физико-геологической модели

Наличие связей между различными предметными компонентами физико-геологической модели, являющиеся следствием того, что все они суть проявления единой для всех геологической модели приводит к тому, что изменения, осуществляемые в одной из физических моделей, должны быть согласованы с изменениями во всех других, что существенно снижает допустимую область вариации параметров при подборе моделей с целью изучения свойств геологического объекта. В этом состоит проявление эффекта синергизма, когда наличие связей между элементами системы приводит к большей надёжности реконструкции всех элементов моделей в сравнении с пометодными – отдельными реконструкциями. Такое положение дел давно известно в задачах моделирования в науках о земле и состоит в постулате о большей информативности и надёжности комплексной интерпретации геолого-геофизической информации в сравнении с наложением совокупности моделей, полученных в результате интерпретации отдельно взятых методов.

1.3 Модели геолого-геофизических связей и их системная организация

Модели геолого-геофизических связей – это заданные отображения элементов геологических моделей в элементы физико-геологической модели. Собственно их присутствие делает возможным постановку вопроса о геологическом истол-

ковании геофизических данных. Системная организация моделей и связей схематически приведена на рис. 1.7.

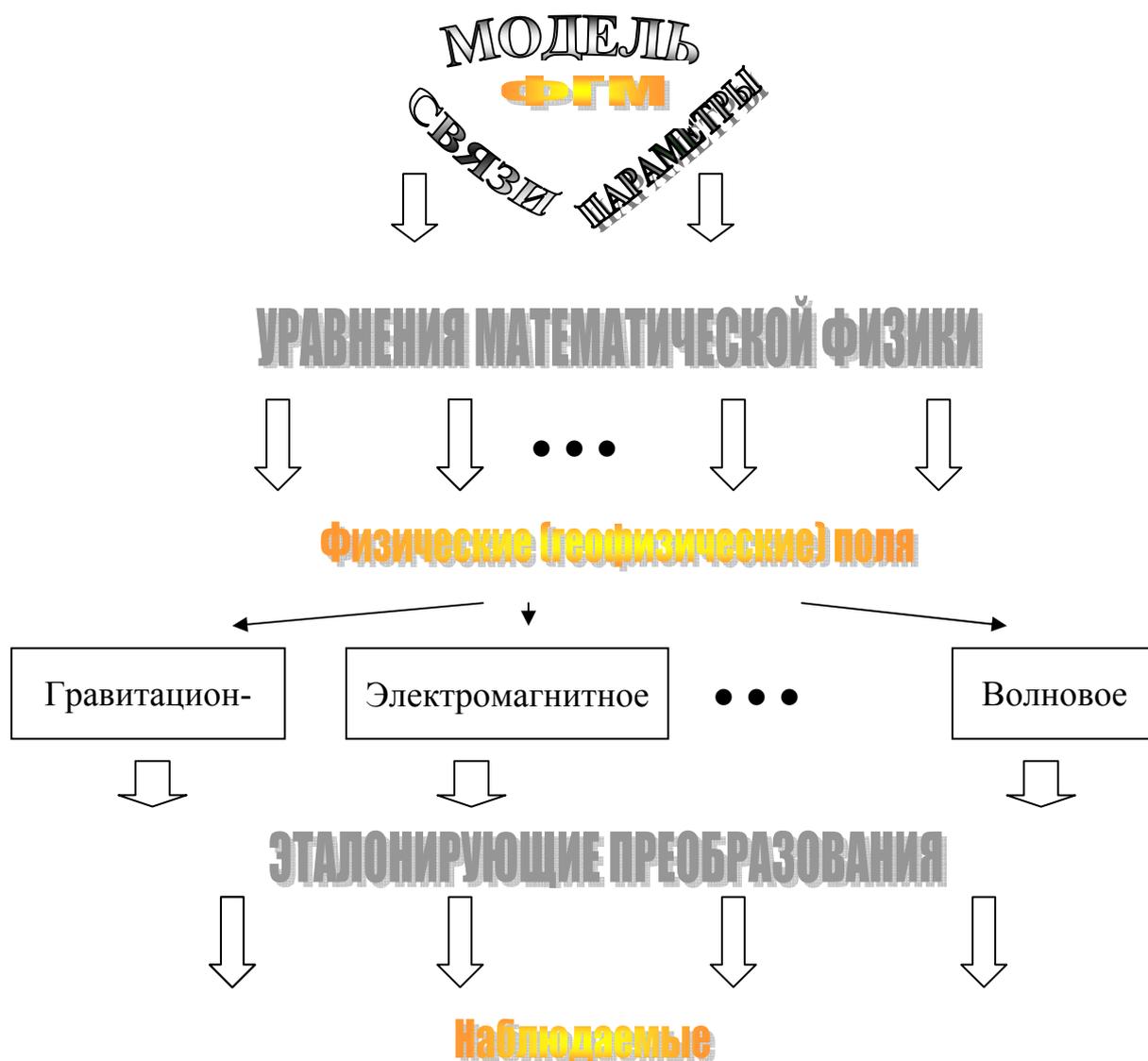


Рисунок 1.7 – Системная организация моделей объектов и моделей связей в прикладной геофизике

Связи носят между компонентами моделей весьма разнообразный характер. Чаще всего это петрофизические связи, установленные в лабораториях и характеризующиеся нечёткостью. Они представимы в форме корреляционно-регрессионных зависимостей между геологическими и геофизическими данными, или отношениями между параметрами как нечёткими величинами. Сюда относятся и экспертные заключения о принадлежности объекта, характеризующегося заданными свойствами, к определённому классу. Объективно дело должно выглядеть так, чтобы каждой геологической модели однозначно соответствовали конкретные элементы физико-геологической. Практически возникающая ситуация, когда одному и тому же набору геологических параметров

соответствуют различные значения физических параметров, приводит к неоднозначности в реконструкции элементов геологической модели по известной физико-геологической модели.

1.3.1 Уравнения математической физики

Уравнения математической физики – это условное название моделей тех связей, которые используются для расчёта физических полей по известным компонентам физико-геологической модели. Они установлены для всех практически используемых в науках о Земле рациональных физических полей и имеют вид дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. Эта связь может быть определена в виде отображения «физической модели среды в физическое поле» – распределения физических параметров в соответствующие им физические поля. Таковы, например, уравнения Максвелла, позволяющие рассчитать компоненты электромагнитного поля по заданным электромагнитным параметрам среды и краевым условиям. Таковы уравнения, следующие из закона всемирного тяготения, позволяющие рассчитать компоненты гравитационного поля по заданной плотностной модели среды. Также как и для моделей геолого-геофизических связей истинные, правильные уравнения в определённых случаях могут быть чрезмерно сложны (например, распространение волн в неоднородных средах) или даже неизвестны (уравнения переноса в мутных, рассеивающих средах). В этой связи используют упрощённые модели уравнений, и мера упрощения может оказаться неадекватной природе вещей. Например, используя в качестве упрощённой зависимости в гравиразведке корреляционную связь между глубиной залегания плотностной границы и величиной вертикальной производной гравитационного потенциала, мы, тем самым, выходим за границу природы вещей, поскольку такая связь неестественна, не отражает свойства гравитационного поля. Но может применяться локально – в узком круге ситуаций и для конкретного региона. Расчёт физического поля на основе решения уравнения математической физики исключительно важная и распространённая операция, имеющая специальное название – *моделирование физических полей*.

Модели физического поля, физические модели среды и уравнения математической физики образуют единый конгломерат – модель геофизического метода, и в совокупности своей позволяют однозначно рассчитать модель поля по известной модели среды. Эта операция называется решением прямой задачи. Модели физического поля – это те объекты, для которых в последующем строится процесс реконструкции модели физических параметров и, возможно, моделей геологических сред. Однако реально измеряемые – наблюдаемые величины мо-

гут отличаться, а иногда и весьма существенно, от теоретических, расчётных моделей физического поля. В этой связи их следует выделить в отдельный этаж системы моделей, относящихся к физико-геологической модели.

Совокупность геофизических полей, отражающих строение физико-геологической модели, следует рассматривать как физическое проявление содержательных элементов системы физико-геологической модели и взаимосвязи между ними не имеют самостоятельного значения. Они (взаимосвязи между физическими полями) являются проявлением и следствием существующих взаимосвязей между параметрами элементов физико-геологической модели, а также, возможным влиянием на их значение геофизических полей. Например, в качестве такого влияния может выступать пьезоэлектрический эффект, состоящий в изменении электрических параметров под действием акустических полей. Далее в свойствах геофизического поля отражаются зачастую не один элемент физико-геологической модели, а их набор. Например, сейсмическое поле определено набором физико-механических характеристик горных пород, в число которых входит плотность, параметры упругости, реологические свойства горных пород. Все эти различные компоненты ФГМ участвуют в формировании сейсмического поля. Таким образом, регистрируемые физические поля не имеют самостоятельной системной организации, но наследуют её как следствие системной организации элементов физико-геологических моделей и законов моделирования физических полей по компонентам ФГМ.

1.3.2. Наблюдаемые представляют собой объекты, характеризующиеся параметрами, которые реально измеряются геофизическим методом вместо соответствующих, желаемых теоретических моделей физического поля. Природа наблюдаемых и их взаимосвязь с моделями физических полей весьма разнообразны. Это влияние калибровки приборов, как это происходит в методах радиоактивного каротажа, аппаратурные влияния, связанные с передаточной функцией приборов, зоны малых скоростей, как это происходит в методах сейсморазведки, и, прежде всего, в модификациях с невзрывными источниками возбуждения, дискретность самих измерений и эффекты с этим связанные (появление зеркальных частот и т. д.). Это эффекты разновысотности и дискретности измерений на ограниченной базе наблюдений вместо непрерывно всюду заданного поля в гравиразведке и магниторазведке. Различия между моделями физического поля и наблюдаемыми могут включать в себя и более тонкие эффекты несовершенства теоретических представлений. Так, принимая, что измеряется аномальная компонента вертикальной производной гравитационного потенциала, и строя на этой основе методику расчёта аномалии, допускается погрешность

(пусть небольшая, но она есть), состоящая в том, что даже без учёта всего прочего реально на измерительный прибор – гравиметр – влияет не вертикальная, а отличающаяся от неё нормальная компонента поля – по направлению нормали к уровнённой поверхности силы тяжести, а не по вертикали, а отсюда следуют и поправки к способам вычислений аномалии. Перечень подобного рода отличий между наблюдаемой и моделью физического поля легко может быть продолжен за счёт того, что наблюдаемые данные осложнены погрешностями разной природы. Это погрешности аддитивные – зашумление данных ошибками различной природы и интенсивности, погрешности аппаратные – мультипликативные, искажающие исходные данные, порой до полной неузнаваемости способом известным либо неопределённым. Таким образом, понятие наблюдаемая – это собирательный образ того отличия между тем, что реально имеется в качестве исходных данных и тем, что бы мы хотели в их качестве иметь, – под какую информацию строятся процедуры реконструкции физико-геологических моделей.

В последнем примере, прежде чем строить интерпретационные процедуры следует разобраться с тем, каким искажающим фактором подверглось поле, как его по возможности очистить от этих искажений, выделив полезные, интерпретируемые компоненты. Совокупность тех преобразований, которым подверглось исходное теоретическое поле до того вида, который дан в наблюдаемых, называется эталонирующим преобразованием.

1.3.3 Эталонирующие преобразования

Эталонирующие преобразования – это те преобразования, которые следует произвести с моделью физического поля, для того чтобы оно стало адекватным результатам измерений. Также как и для моделей геолого-геофизических связей истинные, правильные уравнения для эталонирующих преобразований могут быть чрезмерно сложны или даже неизвестны. В этой связи используют упрощённые модели уравнений, следующие из представлений, положенных в основу модели регистрации сигналов. Если обозначить физическую модель поля $u(s)$, а наблюдаемую обозначить $\bar{u}(s_j)$, где s_j – точка, в которой производится измерение, то можно предложить, например, следующую модель эталонирующего преобразования. На первом этапе поле $u(s)$ подвергается мультипликативным, искажающим преобразованиям с помощью аппаратной функции $K(s)$: $u(s) \cdot K(s)$. После этого на результат накладывается аддитивная помеха $N(s)$: $u(s) \cdot K(s) + N(s)$ и далее от полученного результата вычисляется система функционалов $\Omega_j(u(s) \cdot K(s) + N(s))$, значения которых и принимаются в качестве величины наблюдаемых в точках s_j . Действие функционала может состоять, на-

пример, в расчёте среднего значения $\Omega_j(u(s) \cdot K(s) + N(s))$ в некоторой окрестности точки s_j с весами, зависящими от удаления усредняемых значений от точки усреднения. Однако сказанное – это только лишь поясняющий пример того, как может выглядеть модель эталонирующих преобразований. К эталонирующим преобразованиям может быть применён термин «редукция» в том понимании, что она учитывает реальные геолого-геофизические условия проведения работ и влияние на результат реального измерения большого числа искажающих геологических факторов, не входящих в уравнения математической физики. Эти искажающие факторы должны быть учтены при сопоставлении результатов моделирования с наблюдаемыми физическими полями.

1.4 Параметризации моделей

Выбор параметров модели объекта зависит от характера решаемой задачи, используемого метода её решения и вида тех связей между параметрами, которые ожидается использовать. Среди всего многообразия задач моделирования в науках о земле особо выделяется задача изучения объекта за счёт реконструкции, определения параметров, характеризующих модель на основе имеющихся связей между введёнными параметрами изучаемого объекта и соответствующих физических полей, которые называются *наблюдаемыми*. Её особое положение состоит в том, что большая часть задач моделирования либо сводится к этой последней задаче, либо представляет собой её некоторый фрагмент.

Параметры и связи, входящие во все компоненты моделей и, прежде всего, элементов физико-геологической модели, представляют собой главный элемент модели. Они устанавливают взаимозависимости между различными параметрами элементов физико-геологической модели и соответствующими физическими полями и их наблюдаемым компонентам. Построение и анализ этих связей с последующим их использованием при анализе результатов наблюдений – одна из основных задач системного анализа в науках о Земле.

В зависимости от описываемых классов объектов выделяют три типа моделей – модели, относящиеся к описанию среды как объекта моделирования, модели, относящиеся к описанию наблюдаемой, чаще всего представляющей собой поле, физической величины. Например, гравитационное поле, если моделируемая среда рассматривается в своём проявлении как плотностная. Модели связей между моделями среды и наблюдаемой, которую далее будем называть также полем. К первому типу относятся компоненты геологических и физико-геологических моделей. Ко второму – модели физического поля и наблюдаемой, к третьему – геолого-геофизические связи – зависимости между парамет-

рами элементов физико-геологической модели и параметрами компонент геологической модели; уравнения математической физики, устанавливающие связь между компонентами ФГМ и соответствующими геофизическими полями и эталонирующие преобразования, под которыми понимаются преобразования физических полей в наблюдаемые – исходные данные, доступные для измерения. Рассмотрим подробнее модели связей.

1.5 Классификация моделей

Для классификации моделей можно использовать различные принципы. В соответствии с решаемыми классами задач: реконструкция моделей, изучение взаимосвязей и моделирование полей рассмотрим классы моделей, характерные для решения именно этих задач. Это (рис. 1.8) классы моделей среды, классы моделей поля или наблюдаемых связей между ними, или более общих связей между параметрами разного класса моделей.

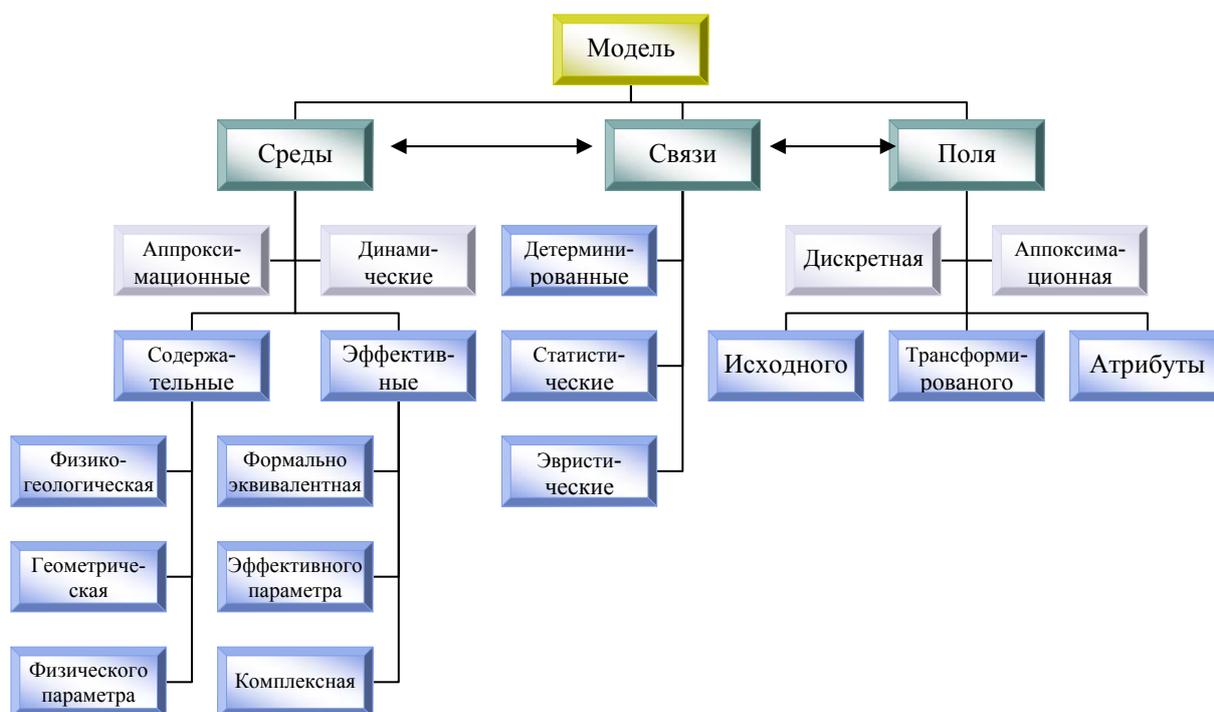


Рисунок 1.8 – Классификация типов моделей

1.5.1 Модели среды

По своему назначению подразделяются на аппроксимационные и динамические.

Аппроксимационные модели, как это следует из названия, предназначены для аппроксимации среды набором элементарных объектов из заданного класса. Этот класс обозначаем M . Чаще всего, в качестве аппроксимирующих элементов выступают элементарные геометрические объекты. Например, это система

призм, уступов, многоугольников, предназначенных для аппроксимации плотностной модели геологического объекта. Каждый элемент аппроксимирующей системы имеет свои параметры – размеры, глубину залегания, плотность, если речь идёт о плотностной модели. Перечень этих параметров составляет параметризацию модели, а ограничения, накладываемые на их значения в связи с дополнительной информацией, в том числе и в связи с другими моделями, требованиями согласованности с геофизическими полями, образуют систему связей. Важной характеристикой аппроксимационной модели служит погрешность аппроксимации множеством M элемента $\xi : \varepsilon(M, \xi) = \min_{m \in M} \|\xi - m\|$. Элемент ξ

принадлежит к некоторой более общей – уточняющей модели M_0 , например, распределению плотности как функции координат. Если заранее известно, что изучаемый объект принадлежит некоторому множеству Ξ , то $\max_{\eta \in \Xi} \varepsilon(M, \eta) = \varepsilon(M, \Xi)$ характеризует аппроксимационную способность M для описания Ξ .

Динамические модели предназначены для характеристики процессов, происходящих в изучаемой среде. Типичным примером такого рода моделей служат тектонофизические модели, системы палеореконструкций, следующих из рассмотрений обратных задач геодинамики, модели переноса вещества в термогравитационных и термохимических мантийных конвекциях. Динамические модели определяются заданием уравнений, которым подчиняется процесс, и системой параметров его характеризующих – например, распределениями напряжений, физико-механическими свойствами среды. Типичным примером динамической модели служит уравнение Навье-Стокса, характеризующего вязкое течение жидкости (например, Ньютоновой и несжимаемой) и его частные случаи – приближение Буссинеска и др. Параметрами служат система внешних сил, коэффициенты вязкости, плотность. Наряду с однофазными движениями, могут быть рассмотрены многофазные, подчиняющиеся более сложным уравнениям, следующих из законов фазовых превращений. Динамические модели имеют своей целью с той либо иной степенью точности описать эволюцию рассматриваемой геосистемы, прежде всего с позиций механики сплошных сред. Однако чаще всего удаётся с большей либо меньшей долей подобия описать лишь фрагменты этой эволюции и оправдать выдвижение гипотез о развитии и формировании современного вида системы.

Модели среды по характеру используемых параметров подразделяются на содержательные и эффективные.

Содержательные модели наиболее ясные и пригодные для физико-геологических выводов. Они имеют своей целью описание объекта в традиционных физических или геологических терминах. Сюда относятся: конкретные *физические параметры*, такие как: плотность, упругие параметры, электрические, магнитные свойства и многое другое; *физико-геологические параметры*, такие как литологические возрастные (стратиграфические), ёмкостные, коллекторские; *геометрические параметры* используемых моделей, характеризующие взаиморасположение компонент модели. Вопрос о перечне параметров в содержательных моделях чаще всего тривиален, поскольку он предопределён видом выбранной физико-геологической модели. Однако весьма существенен вопрос о связях между параметрами и их проявлениями в физических полях.

Эффективные модели вводятся и используются чаще всего для построения и изучения содержательных физико-геологических моделей. Среди эффективных моделей выделяются модели эффективного параметра, формально эквивалентные и комплексные модели.

Модели эффективного параметра представляют собой результат применения эвристических, чаще всего, нелинейных преобразований к наблюдаемым или физическим полям. Результат такого преобразования даёт распределение некоторой величины, для которой экспериментально установлены случаи связи между особенностями её пространственного распределения и некоторыми элементами физико-геологической модели среды. Яркими представителями этих приёмов служат метод полного нормированного градиента В. М. Берёзкина и метод яркого пятна при решении задач выделения аномальных зон в геологической модели. Эффективный параметр не имеет размерность конкретного физического параметра, а даже если и имеет, то рассчитанное от него с помощью уравнений математической физики поле не соответствует исходному. Это принципиально важное свойство эффективных моделей. Этот параметр подобен изображению объекта в инфракрасном диапазоне излучения – несёт о нём полезную информацию, но отличается от того, что видно в обычном – видимом – диапазоне спектра. Эту аналогию можно продолжить, считая модели эффективного параметра некоторыми специального вида изображениями реальной среды, возможно и в некотором «экзотическом» свете.

Формально-эквивалентные модели представляют собой особый класс моделей среды. Как уже указывалось при обсуждении интерпретационной модели, характерной чертой обратных задач геофизики является неоднозначность их решения. Это фундаментальное свойство, называемое эквивалентностью, состоит в том, что одному и тому же полю соответствует бесконечно много рас-

пределений физического параметра, различающихся существенно между собой, но эквивалентных по полю. Это формально-эквивалентные модели. Их бесконечно много, даже в том случае, если конкретная вычислительная технология построения распределения физического параметра приводит лишь к одному решению. Это может достигаться особенностями алгоритма либо выбором аппроксимирующей модели. Технология, приводящая к построению единственного решения, не сопровождающаяся тщательным геолого-геофизическим осмыслением и увязкой принципов, приводящих к выделению единственного решения, приводит к формально-эквивалентной модели. Получаемая в результате решения обратной задачи формально-эквивалентная модель ни в коем случае не должна рассматриваться как итоговая, но должна быть рассмотрена как трансформация поля в распределение параметра с размерностью физического свойства, результат расчёта поля от которого приводит к исходному полю. Формально-эквивалентная модель, в отличие от модели эффективного параметра, даже визуально может не напоминать «истинную» и отличаться от неё принципиально во всех отношениях, кроме эквивалентности по полю.

Комплексные модели представляют собой симбиоз различных моделей, приведённых к единому параметру (правильно говорить об интегрированной модели), либо систему содержательных и эффективных моделей.

1.5.2 Модели поля

Модели поля в содержательном отношении определены связями между моделью среды и полем. Что же касается формы, то модель поля может быть *дискретной*, что включает в себя описание поля в виде дискретных массивов значений, либо аппроксимационной.

Дискретная модель – это простейшая модель, требующая уточнения лишь в том, что означают дискретные отсчёты и куда они отнесены. Параметрами этой модели служат область задания значений, координаты точек.

Аппроксимационная модель поля – это способ его описания с помощью некоторого набора элементарных объектов – например, элементарных полей. Исходное поле, заданное массивом своих значений, заменяется набором элементарных объектов, с небольшим числом параметров – меньшим, чем число элементов массива, но так, что эта совокупность аппроксимирует исходные значения с точностью не хуже заданной. Этим приёмом достигается решение трёх задач: сжатие информации – описание большого числа элементов с помощью небольшого числа параметров; анализ структуры поля по распределению значений параметров аппроксимирующих элементарных полей (это может быть полезным для формирования модели среды); фильтрация и борьба с помехами.

Приведённые способы описания поля могут быть применены для описания, собственно модели физического поля или наблюдаемой, некоторой трансформанты – преобразования поля, которое используется в уравнениях связи и в последующих процедурах реконструкции моделей среды либо атрибутов.

Атрибуты поля – понятие, более всего используемое в сейсморазведке [15]. К атрибутам поля относятся специального типа наблюдаемые, пересчитываемые в параметры модели среды по заданным экспериментально зависимостям. Это собирательное понятие. Для сложных многокомпонентных наблюдаемых атрибутов – это выделенные характеристики поля или его трансформант, которые составляют лишь часть наблюдаемых, используемых далее в специализированной для этих атрибутов технологии анализа. Цель этого анализа – оценка некоторых параметров введённой эффективной модели среды. Именно для характеристики этой части используется понятие «атрибут» с последующим его наименованием – например, «атрибуты преобразования Гильберта».

1.5.3 Модель связей

Модель связей представляет собой стержень конструируемого процесса для реконструкции параметров физико-геологической модели по моделям физических полей – решения обратных задач или решения задач моделирования параметров среды. Эти связи определяют суть процедур обработки, решения обратных задач и реконструкции модели среды – содержательной либо эффективной. Связи могут быть *детерминированными, недоопределёнными и эвристическими*. В свою очередь недоопределённые связи, возникая как результат экспериментальных исследований, имеют форму корреляционно-статистических зависимостей – например, в форме уравнений регрессии, либо как функции принадлежности, характеризующие отношение между параметрами, рассматриваемыми как нечёткие величины.

Детерминированные связи имеют вид интегральных, дифференциальных уравнений. Это связи между физическими моделями среды и моделями физического поля – уравнения математической физики. Они составляют вычислительную основу при реконструкции физических моделей и построении формально-эквивалентных моделей.

Недоопределённые связи включают в себя корреляционно-статистические основаны на выявленных корреляционно-регрессионных зависимостях между параметрами среды и атрибутами поля. Нахождение этих связей выполняется методами математической статистики, основанных на понятиях о законах распределения вероятностей. Чаще всего эти законы неизвестны и их искусственное введение является одним из слабых мест статистических приёмов установления

регрессионных зависимостей. Недоопределённые связи, основанные на установлении нечётких отношений между параметрами как нечёткими величинами, не требуют априорного представления о вероятностных законах, но требуют априорного задания вида функций принадлежности, характеризующих искомые отношения. Недоопределённые связи используются для построения моделей эффективного параметра, а при дополнительных условиях проверки и корректировки результата моделированием, могут использоваться и для получения содержательных моделей.

Эвристические связи дают широкий простор для конструирования эффективных моделей среды. Типичным и, по-видимому, непревзойдённым по эффективности примером эвристических связей служит метод полного нормированного градиента В. М. Берёзкина. Он основан на том, что эффективный параметр, называемый полным нормированным градиентом гравитационного поля, отображает характеристики среды. Эта эвристическая связь основана на экспериментально установленном факте, состоящем в том, что экстремумы полного нормированного градиента пространственно-приурочены к аномальным зонам в изучаемой физико-геологической модели среды.

Другими примерами эвристических преобразований могут служить многочисленные процедуры параметрической фильтрации поля, основанные на таком же постулируемом предположении.

Глава 2. Принципы системного анализа при моделировании геологических сред в прикладной геофизике

Первый принцип системного анализа в прикладной геофизике состоит в том, что геологический объект рассматривается как обобщённая физико-геологическая модель, содержащая систему своих образов – содержательных интегрированных физико-геологических моделей с присущими им наблюдаемыми функциями геофизических полей, параметрами, отображениями параметров в наблюдаемые, и связями параметров между собой и с параметрами других физико-геологических образов изучаемого объекта. Содержательная интегрированная физико-геологическая модель – это модель распределения соответствующего физического параметра, согласованная со всем комплексом имеющихся данных, связанных с этим параметром. Например, моделью содержательного параметра плотности или плотностной моделью, может служить любое распределение плотности соответствующего наблюдаемому гравитационному полю. Но таких моделей может быть много и это ещё не физико-геологическая плотностная модель. Плотностная модель станет интегрированной плотностной физико-геологической моделью после того, как будет увязана со всем комплексом других данных, связанных с плотностной моделью – например, сейсмическими данными. В этом случае будет получена сейсмогравитационная интегрированная плотностная модель. Иерархия этих понятий приведена на рис. 2.1.

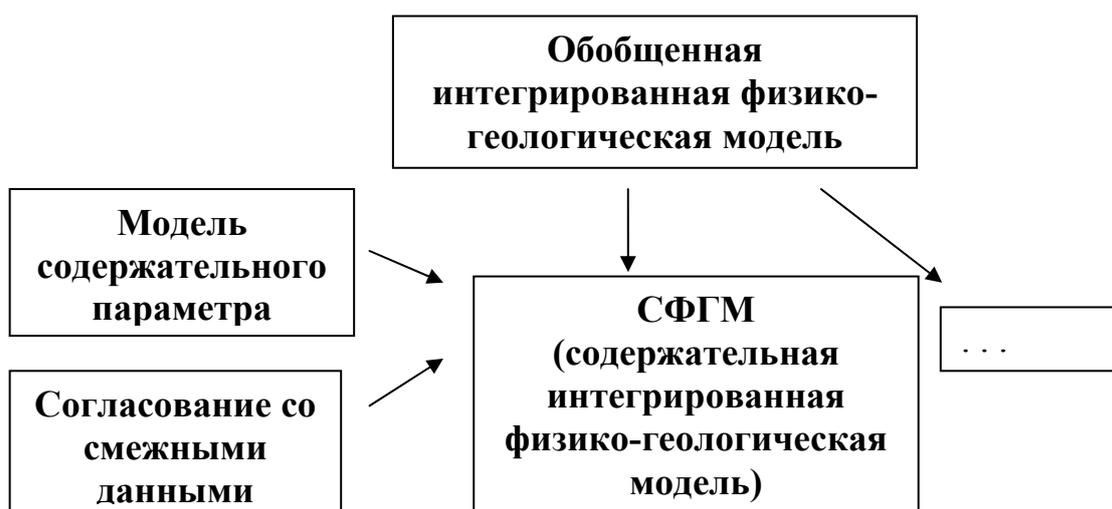


Рисунок 2.1 – Состав обобщённой физико-геологической модели

Уже столь общее определение первого системного принципа ведёт к конструктивным результатам, содержание которых будет раскрыто далее, а суть состоит в том, что критерием отбора элементов из класса эквивалентности по наблю-

даемой для каждой из содержательных ФГМ может служить принцип подобия различных элементов ФГМ – ведь это различные образы одного и того же объекта. Этим правилом снижается эффект эквивалентности, присутствующий при конструировании сложных физико-геологических моделей.

Второй принцип системного анализа комплекса геолого-геофизических данных состоит в том, что моделирование наблюдаемых компонент геофизических данных выбранными отображениями, реализуемыми аналитически либо алгоритмически определёнными зависимостями, адекватно природным законам. Этот принцип утверждает, что всякая итоговая содержательная физико-геологическая модель должна соответствовать требуемому уровню приближения своего поля – наблюдаемой, – и найдена в результате процедуры инверсии для этого поля. В результате, процесс её построения должен включать в себя этап построения модели содержательного параметра или решения обратной задачи для соответствующего поля.

Третий принцип системного анализа состоит в том, что все содержательные ФГМ имеют общую историю формирования, определённую историей формирования исходного объекта. Этот принцип означает, что должны существовать эволюционно-динамические законы и управляющие ими геодинамические параметры, которые контролируют развитие объекта от некоторого стартового состояния к современному, соответствующему всем имеющимся наблюдаемым. Все эти принципы являются конструктивными в том понимании, что приводят к конкретным уравнениям и законам, входящим в постановку задачи системного анализа, в совокупности со своей, определяющей конструктивную группу алгоритмов синтеза, обобщённой физико-геологической моделью. Рассмотрим подробнее те конструктивные следствия, которые содержатся в сформулированных принципах системного анализа в прикладной геофизике.

2.1 Первый принцип системного анализа

2.1.1 Идентификация моделей

В соответствии с первым принципом системного анализа, изучаемый объект рассматривается как система содержательных физико-геологических моделей. Каждая модель имеет свой идентификатор – имя модели.

В перечень содержательных элементов (СФГМ), определяющих обобщённую физико-геологическую модель (ОФГМ), входят:

- группа геологических моделей из СФГМ: $G_i(T_i)$, $i = 1 \div N_G$;
- группа физических моделей из СФГМ: $\Psi_i(M_i)$, $i = 1 \div N_\Psi$.

G_i, Ψ_i можно воспринимать как идентификаторы моделей, а T_i, M_i – их параметризации. N_G, N_Ψ – число вводимых геологических и физических моделей. Если Ψ_i, G_i , например, – функции пространственных координат или их аппроксимации заданными множествами, то M_i, G_i – параметры, заданием элементов которых конкретизируется элемент из Ψ_i, G_i . Эти параметры носят характер пространственно-распределённых и определяют распределение физического или геологического параметра в пространстве. Например, если $\Psi(M)$ – набор элементарных призматических тел: цилиндры, уступы, призмы, служащие для описания плотностной модели среды, то M – параметры этих объектов, а элемент $m \in M$ характеризует параметры конкретной геометрии призматической конструкции. Другой пример: $\Psi(M)$ – класс скоростных распределений, описываемых непрерывной функцией, локализованной в некоторой области V . Элементами M служит распределение пространственных координат из области V , и $\Psi(M)$ характеризует множество допустимых функций пространственных координат, аппроксимирующих скоростные неоднородности. В данном случае параметризация $\Psi(M)$ бесконечномерна, и переход к конечномерному случаю осуществляется стандартными средствами вычислительной математики – за счёт использования рядов, сеточных аппроксимаций или их обобщений методом конечных элементов. Особенностью группы физических моделей ($\Psi_i(M_i)$, $i = 1 \div N_\Psi$) служит то, что параметры M_i , служащие для конкретного описания их элементов, входят в уравнения и законы, определяющие наблюдаемые геофизические поля либо их атрибуты u_i . Физическая модель геологической среды – это модель свойств $\sigma_\Psi(m)$, $m \in M$, из $\Psi(M)$ непосредственно поддающиеся измерению физическим экспериментом и отражающихся в изучаемых физических полях $u_i(s)$, имеющих носитель S , $s \in S$.

К группе геологических моделей $G = G_i(T_i)$ из ФГМ относятся, в частности, литологическая $G_1(T_1)$, стратиграфическая $G_2(T_2)$, тектоническая, структурно-геологическая, фациальная и так далее. Конкретный перечень и параметризация устанавливаются с учётом объективных данных, ограничивающих доступную информацию об этих моделях. Особенностью группы геологических моделей служит отсутствие прямых отображений параметров T_i из её группы в наблюдаемые геофизические поля. Геологическая модель $g_G(t)$, $t \in T$ из $G(T)$ не имеет непосредственного отображения в физических полях. Включается в предмет рассмотрения в связи с наличием опосредованных связей геологической модели с геофизическими полями через физико-геологические зависимости.

2.1.2 Связи в физико-геологических моделях

Совокупность содержательных ФГМ (СФГМ) относится к единому объекту, что проявляется не только в общем принципе подобия, но и в наличии взаимосвязей между параметрами, характеризующими элементы СФГМ. Связи между параметрами модели разделяются на внутренние – устанавливающие ограничения и связи между различными компонентами внутри одной и той же модели, и внешние – связи между параметризациями для различных моделей.

2.1.2.1 Внутренние связи включают в себя:

- ограничения типа неравенств на значения параметров $(\cdot)_+^-$, например, M_+^- ;
- уравнения взаимозависимостей или меры подобия (например, корреляции) между различными компонентами параметров $R(\cdot)$. Например, задание матрицы корреляций между различными границами одной и той же структурной модели;
- ограничения диапазона допустимых значений: $\text{Im}M \in \sigma_i$. Здесь $\sigma = \{\sigma^j, j = 1, \dots\}$ либо конкретное значение, либо интервал значений параметра $\sigma_\psi(v)$. Например, плотность геологических объектов в изучаемой области может принимать значения: 2.3; 2.56; 2.6–2.65; 2.8. Легко понять, что это совсем иное, чем ограничения типа неравенств. Такие ограничения следует вводить в случаях, когда известны классы допустимых объектов, но неизвестно их место расположения. Эти ограничения записываем в форме $\text{Im}M \in M_\sigma$.

2.1.2.2 Внешние связи заданы между параметрами различных компонент ОФГМ. Выделяют:

- функциональные зависимости;
- корреляционно-регрессионные зависимости;
- отношения между функциями принадлежности для нечётких множеств.

Все они формально выражаются в виде принятия системы зависимостей:

$$\Xi_j [\sigma_\psi, g_G] = 0, j = 1, \dots, N_\Xi; \quad (2.1)$$

Особо следует обратить внимание на ту часть из них, которые, обеспечивая зависимости между геологическими и геофизическими параметрами, дают возможность реконструировать параметры геологических моделей g_G по заданным физическим σ_ψ моделям.

В той части геолого-геофизических параметров, в которой такие зависимости существуют, возможна постановка задачи геологической интерпретации геофизических данных – реконструкция геологической модели среды по наблюдаемым геофизическим полям. Всякая неопределённость такого прогноза означает принципиальную неопределённость, не прогнозируемость компонент геологи-

ческой модели. В этой связи, установление обозначенных геолого-геофизических связей эквивалентно обоснованию возможности геологической интерпретации геофизических данных. Установление таких связей осуществляется, в том числе, с привлечением аппарата обучения на контрольных, тестовых объектах.

2.1.2.3 Единство прообраза. Ещё одним существенным следствием первого системного принципа служит сам факт существования единого прообраза для всех содержательных физико-геологических моделей. Если существование отображений одних параметров в другие позволяет выразить одни через другие, за счёт чего существенно снизить неоднозначность задачи реконструкции моделей, то в их отсутствии такая последовательность действий неприемлема. Она может оказаться неприемлемой и в том случае, когда эти связи установлены, но с большими погрешностями, что, фактически, всегда имеет место, и последующим распространением этих погрешностей на результат реконструкции.

Вместо использования отображений одних параметров в другие первый принцип системного анализа позволяет воспользоваться критерием близости разноплановых содержательных ФГМ как различных образов одного и того же объекта. Это схематично изображено на рис. 2.2.

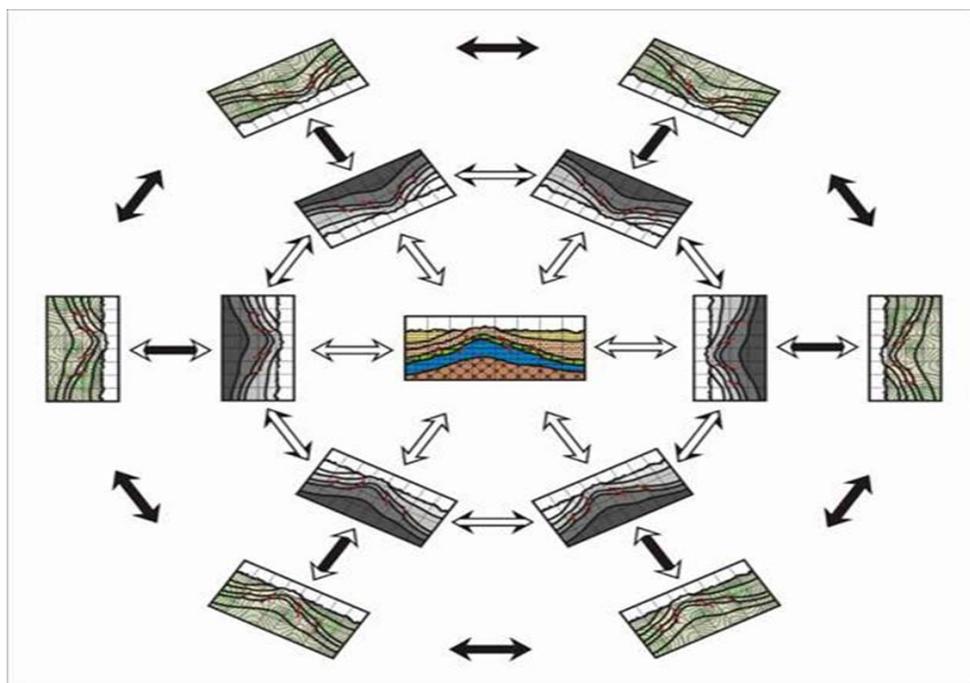


Рисунок 2.2 – Подобие ФГМ (по материалам А. П. Петровского)

Факт подобия может быть выражен принятием функционала качества подобия – критерия оптимальности, имеющего в общем случае вид:

$$J[\sigma_{\Psi}, g_G] \rightarrow \min \quad (2.2)$$

Его минимизация – обязательный элемент системной инверсии геофизических данных. Устанавливая подобие, тем самым происходит автоматическое доопределение задачи инверсии до задачи с единственным решением.

2.2 Второй принцип системного анализа

В соответствии со вторым принципом системного анализа, физически содержательные элементы ОФГМ должны соответствовать наблюдаемым компонентам геофизических полей.

Требование адекватности операторов состоит в том, что используемые операторы A_i расчёта геофизических полей $u_i(s)$ адекватны природным законам. Обеспечивают вычисление атрибутов поля и реализованы аналитически либо алгоритмически. В значительном числе случаев эти природные отображения в несколько идеализированной форме носят характер интегральных либо дифференциальных уравнений, и следствий из них, связанных со спецификой применяемой аппроксимационной конструкции. Тем не менее, допустимы и некоторые эвристические соотношения, например, регрессионного типа, если есть обоснование их адекватности целям расчёта.

В значительном числе случаев, в качестве такого исходного интегрального уравнения может использоваться представление решения дифференциального уравнения в виде интеграла от функции Грина: $G(t, \tau, v, \xi)$ (см. 1.4.3 части 1):

$$\int_{t_0}^t \int_V G(t, \tau, \xi) \sigma(\xi) d\xi d\tau = u(t, v) \quad (2.3)$$

где $u(t, v)$ – расчётное нестационарное физическое поле. Последнее уравнение существенно упрощается в случае инвариантности исходного (2.3) относительно пространственных и временных сдвигов. В этом случае функция Грина зависит лишь от двух переменных: t, v и уравнение (2.3) принимает вид:

$$\int_{t_0}^t \int_V G(t - \tau, s - \xi) \sigma(\xi) d\xi d\tau = u(t, s)$$

Для стационарного случая, интегральное представление Грина вырождается в преобразование вида:

$$\int_V G(v, \xi) \sigma(\xi) d\xi = u(s) \quad (2.4)$$

Следует заметить, что (2.4) – это общее выражение для линейного ограниченного (вполне непрерывного) оператора в Гильбертовом пространстве.

Эти уравнения можно записать в операторной форме $A_i[\sigma(v)] = u(s)$, где v – параметр характеризующий носитель для σ , и V – область определения для $\sigma(v)$. $u(s)$ – наблюдаемая компонента поля, зависящая от переменной s , которая может иметь как непрерывный, так и любой иной диапазон значений. Например, $u(s)$ может быть задано для отдельных значений s_i . В том случае, если наблюдаемое поле нестационарно, под параметром s понимается пространственно-временной параметр $s = (t, s)$. Если для $\sigma(v)$ введена некоторая аппроксимация системой параметров M , например, $\sigma(v)$ заменено действием системы призм аппроксимирующих $\sigma(v)$ и M – группа параметров этих призм. Конкретный элемент задаётся определением значений \mathbf{m} параметров из M . Подставляя эту аппроксимацию в (2.4), получаем уравнение $A[\sigma(\mathbf{m})] = u(s)$ для измеряемой величины во введённой параметризации. В других случаях эти зависимости носят эмпирический характер и установлены на основе анализа конкретных данных для конкретного района исследований. Тем не менее, принятие этих уравнений является внешним относительно процедуры последующей инверсии. Тем не менее, допустимыми являются ситуации, когда после завершения этапа инверсии полей, по его результатам уточняются процедуры отображения параметров модели среды в поле. Типичным примером такого рода ситуации служит учёт в процессе инверсии гравиметрических данных компонент регионального фона, которые уточняются по итогам выполненной инверсии и с учётом этого уточнения процедура инверсии может быть повторена.

Уравнения, связывающие параметры физических компонент моделей σ_Ψ и соответствующие им наблюдаемые компоненты физических полей $\mathbf{u}_\Psi = \{u_{\Psi_i} = u_i, i = 1 \div N_\Psi\}$, заданы цепочкой операторных соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\sigma_\Psi] = \mathbf{u}_\Psi : A_i[\sigma_i] = u_i, \\ i = 1 \div N_\Psi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для удобства письма здесь и далее обозначим $\sigma_i = \sigma_\Psi$. То же относится и к геологическим моделям: $g_i = g_{Gi}$.

Приведённые операторные соотношения называются операторами прямой задачи. Их можно трактовать как суперпозицию уравнений математической физики, ответственных за рассматриваемые физические законы и преобразования физических полей в интерпретируемые атрибуты поля – наблюдаемые. Эти последние преобразования условно называются эталонирующими.

2.3 Третий принцип системного анализа

В соответствии с третьим принципом системного анализа геолого-геофизических данных все содержательные ФГМ имеют общую историю формирования, определённую историей формирования исходного объекта. Этот принцип означает, что должны существовать эволюционно-динамические законы и управляющие ими геодинамические параметры, которые контролируют развитие объекта от некоторого стартового состояния σ^0_Ψ к современному, соответствующему всем имеющимся наблюдаемым. Развитие этого положения ведёт к конструктивным результатам и эффективным технологиям [20, 21]. Эволюционно-динамические уравнения содержат параметр эффективного времени t_0 , вдоль которого происходит развитие системы, динамически изменяющуюся модель $\sigma_i(t, v)$ с известным стартовым состоянием $\sigma_i(0, v) = \sigma_i^0(v)$, динамические параметры, управляющие процессом развития, например, векторы скорости движения вязкого массива. Уравнение движения, в частности, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_i(v, t) &= D_i [\sigma_i(v, t), \mathbf{d}_i]; \\ \sigma_i(v, 0) &= \sigma_i^0(v). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Конкретная форма такого уравнения для изучения поведения структурных моделей, представляющих собой систему уравнений для глубин залегания границ: $z = \mathbf{f}(s) = \{z = f_0(s), z = f_1(s), \dots, z = f_N(s)\}$, зависящих от горизонтальных координат $s = \{x, y\}$, с известным распределением физического параметра $\Delta\sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \{s, z\}$ между ними имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(s, t)}{\partial t} &= \mathbf{W}(s, t) - \langle \mathbf{V}(s, t) | \text{grad}(\mathbf{f}(s, t)) \rangle + F(\mathbf{f}(s, t)) + \Psi; \\ \mathbf{f}(s, t) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $z = \mathbf{f}(s, t) = \{z = f_0(s, t), z = f_1(s, t), \dots, z = f_N(s, t)\}$ – зависящие от условного времени t границы (определение – поток вещества через границы отсутствует); $\mathbf{W}(s, t)$ – вертикальные составляющие скорости перемещений границ; $\mathbf{V}(s, t)$ – векторы горизонтальных составляющих скоростей перемещений границ; $F(\mathbf{f}(s, t))$ – оператор, ответственный за модель денудации рельефа; Ψ – сложная функция, ответственная за дивергентную компоненту в эволюции системы и определяемая особенностями процессов осадконакопления и метаморфизма.

Она зависит от большого числа факторов, включая реологические свойства пород. Однако, именно в силу сложности, равнозначной многофакторности, среди которых нельзя выделить главные, эту компоненту следует рассматривать как отдельное аддитивное слагаемое, определяемое по результатам соответствия моделирования динамических процессов и сопоставления результатов с наблюдаемыми физическими полями. Дополнение этих динамических уравнений требованием стремления поля от итоговой – конечной в развитии – модели к наблюдаемой, дополняет динамический принцип гравитационного поля как конечного условия, доопределяющего параметры движения системы:

$$\lim_{t \rightarrow t_k} A[\mathbf{f}(s, t)] \rightarrow u(s). \quad (2.8)$$

Условная модель динамики плотностных границ с соответствующей динамикой гравитационного поля, приведена на рис. 2.3.

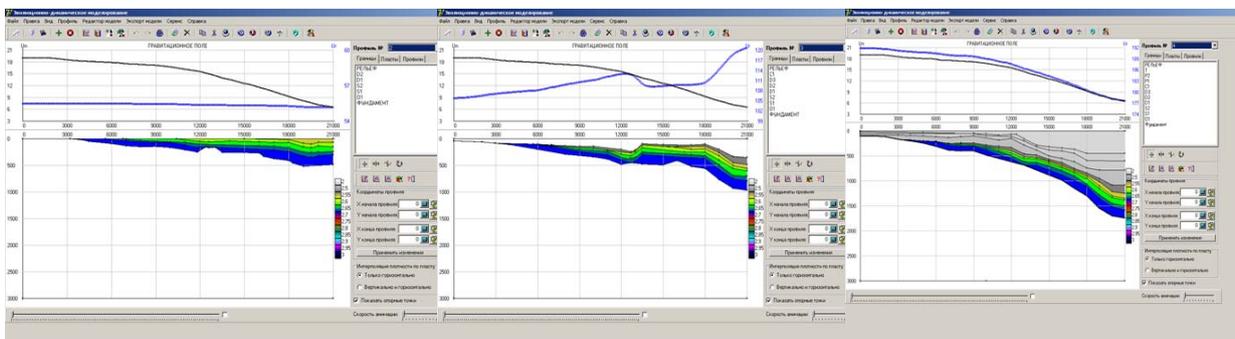


Рисунок 2.3 – Динамика структурной модели и соответствующего гравитационного поля от стартового (слева) с несоответствующим наблюдаемому современному полю до современного (справа), соответствующего наблюдаемому полю

Эволюционно-динамические уравнения обозначаем:

$$\begin{aligned} D_j [\sigma_\Psi, \mathbf{g}_G, \mathbf{d}]; \\ \sigma_\Psi(0) = \sigma_\Psi^0, \mathbf{g}_G(0) = \mathbf{g}_G^0. \\ j = 1, \dots, N_D. \end{aligned} \quad (2.9)$$

где \mathbf{d} – геодинамический параметр, который, в частности, может совпадать с одним из компонентов физической модели ФГМ.

Отличие в записи между (2.6, 2.7) и (2.9) состоит лишь в том, что в (2.9) подчёркивается, что компоненты эволюционных законов могут и не иметь форму дифференциальных уравнений, а лишь устанавливать подобие одних компонент ФГМ с другими, динамика которых рассматривается. Но в частном случае

можно (2.9) рассматривать как (2.6), либо (2.7). Кроме того, подчеркнём различие между (2.9) и (2.1). Она состоит в том, что (2.1) – это алгоритмически определённый закон, в соответствии с которым по заданному состоянию одних элементов ФГМ можно сузить, а в исключительных случаях сильно сузить класс допустимых моделей для других компонентов ФГМ, в то время как (2.9) есть уравнение развития компонент ФГМ модели во времени, начиная с некоторого начального состояния $\sigma^0_\Psi, \mathbf{g}^0_G$ до современного, соответствующего наблюдаемым геофизическим полям. Развитие происходит в соответствии со значениями геодинамических параметров \mathbf{d} связанными для всех компонент ФГМ, входящих в систему геодинамических уравнений. Взаимозависимость этих параметров для разных элементов ФГМ и есть то, что объединяет различные компоненты ФГМ в систему взаимоувязанных единым генезисом объектов.

2.4 Системная инверсия и декомпозиция

Итогом выполненного системного анализа данных в соответствии с тремя сформулированными принципами системного анализа служит формулировка задачи реконструкции компонент ФГМ. В неё входят: компоненты разноплановых моделей геологического объекта; выявленные взаимозависимости между ними; установленные операторы прямой задачи; сформулированные критерии близости различных представлений компонент модели; эволюционно-динамические принципы формирования изучаемого объекта:

$$\sigma_\Psi = \left\{ \sigma_i = \sigma_{\Psi_i} \in \Psi_i(M_i), i = 1 \div N_\Psi \right\}. \quad (2.10 \text{ а})$$

$$\mathbf{g}_G = \left\{ g_i = g_{G_i} \in G_i(T_i), i = 1 \div N_G \right\} \quad (2.10 \text{ б})$$

$$\begin{aligned} \Xi_j[\sigma_\Psi, \mathbf{g}_G] &= 0 \\ j &= 1, \dots, N_\Xi. \end{aligned} \quad (2.10 \text{ в})$$

$$\mathbf{A}[\sigma_\Psi] = \mathbf{u}_\Psi : A_i[\sigma_i] = u_i, i = 1 \div N_\Psi \quad (2.10 \text{ г})$$

$$\begin{aligned} D_j[\sigma_\Psi(t), \mathbf{g}_G(t), \mathbf{d}]; \\ j = 1, \dots, N_D. \end{aligned} \quad (2.10 \text{ д})$$

$$\sigma_\Psi(0) = \sigma^0_\Psi, \mathbf{g}_G(0) = \mathbf{g}^0_G.$$

$$J[\sigma_\Psi, \mathbf{g}_G] \rightarrow \min. \quad (2.10 \text{ е})$$

Эта задача называется задачей системной инверсии и состоит в нахождении системы взаимосвязанных моделей, синтезирующим элементом которой (системы) служат связи между параметрами и принцип подобия моделей (рис. 3.5), следующий из первого системного принципа.

Решения задачи системной инверсии основаны на *методе декомпозиции* сложной задачи к системе более простых.

Компонентами результатов декомпозиции общей задачи системной инверсии с целью построения содержательных ФГМ служат (рис. 3.5):

- **Аппроксимационный принцип.** Традиционные задачи подбора решений на заданном модельном классе. Этот принцип лежит в основе традиционных методов подбора. Они восходят к работам А. А. Юнькова (1958), Е. Г. Булаха (1964), после чего число разновидностей этих методов возросло лавинообразно. По меткому выражению В. Н. Страхова: «...Росли как грибы после летнего дождя, отличаясь иные на ε , а иные на δ ». Их особенностью является формирование модельных классов как множеств единственности для заданного операторного уравнения с последующим подбором элемента на модельном классе из принципа минимума невязок.



Рисунок 3.5 – Схема декомпозиции задач системной инверсии

- **Критериальный принцип.** нахождение оптимальных относительно заданного критерия оптимальности $J[\sigma, g]$ решения обратной задачи. Этот критериальный подход лежит в основе методов нахождения оптимальных решений обратных задач. В качестве модели, которая служит нулевым приближением, выбирается геологическая модель g , а в конструкцию функционала J входит дополнительная информация о равнозначности данных, на основе которых строилось нулевое приближение, и учёт специфических аналитических свойств нормальных решений. Предварительного сужения операторного уравнения на класс единственности не делается. Эквивалентность, по сути, используется для оптимизации решения относительно заданной **геологической модели g .**

- **Согласованно-критериальный принцип.** Нахождение системы взаимоувязанных принципом подобия $J[\sigma_i, \sigma_j] \rightarrow \min$ решений нескольких (двух и более) операторных уравнений. Этот согласованно-критериальный принцип лежит в основе методов комплексной интерпретации, понимаемых как совместное решение системы обратных задач, доопределённых критериальным принципом. Наиболее распространённый частный случай такой постановки – это нахождение в результате согласованной инверсии структурных задач гравиметрии и сейсморазведки. Реализация основана на итерационном решении последовательности обратных задач сейсморазведки и гравиразведки, в которых начальным приближением каждого следующего шага (например, сейсмического) служит результат решения обратной задачи на предыдущем (например, гравиметрическом). Этот итерационный процесс надлежащим выбором параметров приводится к сходящемуся.

- **Эволюционно-динамический принцип.** Лежит в основе одноимённых методов построения решений обратных задач с использованием информации о генезисе изучаемых объектов, состоящих в рассмотрении эволюционно-динамического развития модели от некоторой стартовой до текущей, соответствующей измеряемому современному полю. Особенностью служит использование поля в эволюционных уравнениях как конечного условия, доопределяющего частично неизвестные геодинамические параметры, управляющие процессом движения. Сама задача эволюции расчленяется на последовательность подзадач сдвигового и дивергентного развития модели. Их последовательная реализация приводит к конструктивным приёмам построения результирующей, согласованной с полем модели.

2.5 Синтез интегрированной ФГМ

Синтез результатов решений задач инверсии как элементов декомпозиции задачи системной инверсии основан на изучении сходимости процедур и наряду с формальным анализом контроля сходимости включает в себя и неформальный, основанный на группировании результатов и их визуальном анализе.

Выполняя группирование, следует убедиться в том, что последовательность решений сходится. Нет универсальных доказательств сходимости, но для некоторых частных задач, служащих эталоном, такие доказательства могут быть построены и взяты за основу в более общих и сложных случаях.

Рассмотрим подзадачу о нахождении системы взаимоувязанных принципом подобия $J[\sigma_i, \sigma_j] \rightarrow \min$ решений нескольких (двух и более) операторных уравнений. Для примера рассмотрим вопрос о согласованном построении двух физических компонент ФГМ в рамках синтетической критериально-аппроксимационной формулировки задачи инверсии. Геологическая компонента ФГМ отсутствует и в паре физических моделей её роль играет одна из них. Рассматривается система задач:

$$\begin{aligned} J[\sigma_1, \sigma_2] &\rightarrow \min, \\ A_1[\sigma_1] &= u_1, \\ A_2[\sigma_2] &= u_2, \\ \sigma_i &\in M_i, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для её решения строится итерационная последовательность:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{i+1} : J[\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^i] &= \min_{\xi \in M_1 \cap \Omega_{u_1}(A_1)} J[\xi, \sigma_2^i]; \\ \sigma_2^{i+1} : J[\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^{i+1}] &= \min_{\xi \in M_1 \cap \Omega_{u_1}(A_1)} J[\sigma_1^{i+1}, \xi]. \end{aligned}$$

Здесь $\Omega_{u_i}(A_i) = \sigma_i : A_i \sigma_i = u_i$. Легко видеть, что эта итерационная последовательность монотонно сходится относительно функционала:

$$J[\] : J[\sigma_1^i, \sigma_2^i] \leq J[\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^i] \leq J[\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^{i+1}].$$

Если последний сильно выпуклый, например:

$$J[\xi, \eta] = \|\xi - \eta\|_X,$$

где X – сильно выпуклое банахово пространство, и на некотором шаге i неравенство выполнено как равенство: $J[\sigma_1^i, \sigma_2^i] = J[\sigma_1^{i+1}, \sigma_2^i]$, то $\sigma_1^{i+1} = \sigma_1^i$ и процесс сошёлся. В противном случае он будет продолжать монотонно сходиться. В приведённом примере предполагается, что модели σ_1 и σ_2 имеют одинаковую физическую размерность, что достигается, например включением в функционал процедуры проектирования Ψ_1 на Ψ_2 , что эквивалентно проектору $P_X(\Psi_2, \Xi, \sigma_1): J[P_X(\Psi_2, \Xi, \sigma_1), \sigma_2^i]$.

Этот приём доказательства сходимости достаточно просто обобщается на другие классы задач.

Важно отметить лишь, что сходимость будет иметь место относительно норм, эквивалентных введённому функционалу качества, – мере уклонения двух моделей.

Глава 3. Неопределённость в задачах моделирования

Одна из наиболее характерных особенностей моделирования в науках о Земле состоит в том, что принимать решения о значениях параметров, характеризующих модель изучаемого объекта, приходится в условиях неопределённости. Эта неопределённость имеет связь с:

- неопределённостью исходных данных – их неполнотой и нечёткостью, и осложнённой помехами;
- неопределённостью в определении связей между различными параметрами, входящими в параметризацию модели;
- эквивалентность, присущая рассматриваемым уравнениям.

Практически приходится сталкиваться с проявлением всех видов неопределённости одновременно, и при конструировании алгоритмов системной инверсии вырабатывать механизмы, обеспечивающие учет этой неопределённости.

3.1 Природа неопределённости

Типичным примером неопределённости исходных данных служит отсутствие требуемых измерений, связанное с невозможностью выполнения работ. Например, выполнение геофизических наблюдений в труднодоступной местности. В этом случае данные неизбежно фрагментарны. Их просто недостаточно для того, чтобы дать исчерпывающий однозначный ответ о пространственно-временном распределении изучаемого параметра среды. Другой пример – изучение пространственного распределения гидродинамического сопротивления по результатам гидродинамических исследований в скважинах. Краевых условий для уравнений фильтрации, заданных в скважине, просто не хватает для изучения пространственного распределения фильтрационных характеристик.

Неопределённость данных включает в себя и эффект рассеяния данных. Он состоит в том, что повторные измерения одного и того же параметра приводят к существенно различающимся результатам. Это обстоятельство особо распространено при анализе петрофизических характеристик горных пород и имеет своими причинами не только и не столько ошибки измерений, но и факт неоднородности изучаемого объекта относительно изучаемого параметра. Два различных измерения параметра неоднородного относительно этого параметра объекта (пористости) приведут к двум различным результатам.

Типичным примером неопределённости связей между различными параметрами, входящими в параметризацию модели, служит неопределённость петрофизических зависимостей между измеряемыми геофизическими параметрами, та-

кими например, как интервальное время распространения упругих волн, интенсивность гамма-излучения, кажущееся электрическое сопротивление, физико-геологическими (пористость, глинистость) и промысловыми (проницаемость, нефтегазонасыщенность). Эти зависимости необходимы для прогнозирования промысловых моделей по геофизическим данным, и их неопределённость ведёт к неопределённостям в результате прогноза и, в частности, прогноза запасов углеводородов по геофизическим данным. Причиной неопределённости служит отсутствие надежных уравнений, характеризующих эти зависимости, ограниченность и локализация экспериментального материала, по которому такие связи устанавливаются.

Примером неопределённости, связанной с эквивалентностью рассматриваемых уравнений, служит обратная задача гравиметрии, в которой, наряду с практической эквивалентностью, возникает и теоретическая эквивалентность. Рассмотрим более подробно компоненты неопределённости.

3.2 Неопределённость исходных данных

Неопределённость наблюдаемых состоит в их:

- нерегулярности;
- фрагментарности;
- нечёткости.

Наиболее общим случаем служит нечёткость данных. Она включает в себя наличие погрешностей в измерениях и рассеяние измеряемых данных за счёт неоднородности изучаемого объекта.

Нерегулярность и фрагментарность можно учесть двумя способами. Первый – наиболее естественный, состоит в том, чтобы включить естественный способ задания данных в определение уравнений связи между параметрами модели среды и наблюдаемыми. Например, в уравнении связи плотностной модели среды с наблюдаемым полем можно в качестве координат поля задавать: весь континуум возможных значений (теоретический случай); набор точек, в которых определено поле и, соответственно, в которых это поле рассчитывается; многообразия – линии и поверхности, вдоль которых непрерывно либо дискретно определены значения поля и вдоль которых осуществляется расчёт соответствующих его компонент. Далее все расчёты выполнять в естественной области определения параметров.

Если такая естественная операция перевода неопределённости в характер связи между параметрами ФГМ и наблюдаемыми по каким-либо причинам неприемлема, неопределённость связанная с нерегулярностью и фрагментарностью мо-

жет быть учтена процедурами интерполяции (для нерегулярных случаев задания наблюдаемых) либо комбинацией интерполяции и экстраполяции, если компенсировать приходится фрагментарность задания наблюдаемых. В последних случаях погрешности интерполяции или экстраполяции оцениваются и учитываются при расчёте итоговых оценок погрешностей исходных данных. Однако такой путь обладает тем недостатком, что эти погрешности могут быть оценены неверно и далее, в процессе всех расчётов, они будут накапливаться, переходя в значимые величины для итоговых оценок.

Особого рассмотрения требует нечёткость данных. В простейшем случае природа нечёткости связана с ошибками в измерениях. В этом случае данные рассматриваются как реализация случайной величины, чаще всего нормально распределенной. За принятием такой модели данных стоит неявное предположение о том, что в случае повторяющихся измерений их результат будет сходиться к некоторому пределу – гипотетическому истинному значению – математическому ожиданию в случае нормально распределённой величины. В том случае, если измеряется сигнал, заданный своими значениями вдоль параметра t , модель случайных ошибок может быть двухкомпонентной. Первая компонента состоит в том, что точный сигнал $y(t)$ мультипликативно искажается с помощью операции линейного преобразования $N(t) \cdot y(t)$, а вторая состоит в аддитивном добавлении помехи $n(t)$ с заданными статистическими свойствами. В итоге измеряемый сигнал $y_\delta(t)$ имеет представление $y_\delta(t) = N(t) \cdot y(t) + n(t)$. В рамках такой модели погрешности строятся методы борьбы с ними.

Совершенно иная ситуация возникает в случае, когда нечёткость данных имеет природу рассеяния данных в следствии неоднородности изучаемого объекта. В этом случае изучаемый объект можно представить как объединение системы однородных с различными параметрами. Доля (массовая, объёмная, части со значением параметра c обозначим $\mu(c)$, а область возможных значений этого параметра – Ξ . Очевидно, что $\mu(c) \leq 1$; $\int_{\Xi} \mu(c) dc = 1$. Модель измеренного параметра $\mu_A(c)$ в результате экспериментов A возникает как итог линейного ограниченного преобразования $K_A \mu(c) = \mu_A(c)$. Борьба с этим видом рассеяния данных не надо. Следует ставить задачу корректного оперирования с данными $\mu_A(c)$ для получения объективных оценок результатов и ставить задачу изучения неоднородности объекта (функции $\mu(c)$) по результатам измерения $\mu_A(c)$.

3.3 Неопределённости в задании связей

Неопределённости в задании связей между компонентами ФГМ и наблюдаемыми возникают за счёт того, что:

- связи имеют описательный характер в виде нечётких отношений;
- связи заданы с оцененной погрешностью;
- связи неполны и включают в себя неопределённые параметры или группы параметров.

В первом случае для моделирования следует использовать аппарат теории нечётких множеств, с помощью которого в качестве итога моделирования рассматривается нечёткое множество и нечёткие заключения относительно искомого параметра для ФГМ. Методы моделирования для такого типа связей чаще всего представляют собой информационно-аналитические системы, основанные на нечёткой логике и реализованные в виде информационных и экспертных систем [3].

Все реальные связи являются приближёнными даже в том случае, когда имеют известный прообраз точных аналитических зависимостей. Это связано с множеством факторов, наиболее распространённый из которых состоит в использовании алгоритмов расчёта конечной точности, конечномерной аппроксимацией бесконечномерных интегральных или дифференциальных соотношений. Другим источником погрешностей служит погрешность, и следующие из неё эффекты, связанные с переходом к конечномерной аппроксимации элементов ФГМ. Они (погрешности) имеют природой замену исходных ФГМ на иные, например, сеточные или им близкие конструкции, которые отличаются от того, «что следовало бы использовать». Хорошим тоном является ситуация, когда в вычислительных схемах оцениваются погрешности результата, вызванные приближенностью используемых соотношений. Однако при этом следует иметь в виду, что рассчитываемые оценки погрешности параметра и собственно погрешность в приводимой оценке реального параметра – существенно различные вещи. Связано это отличие со следующим.

Как правило, при реконструкции параметров ФГМ приходится решать системы уравнений, размерность которых связана (растёт) с числом параметров, входящих в реконструируемую ФГМ. Если это число велико, то велика и размерность системы уравнений. Она решается достаточно плохо – неустойчиво. Погрешность высока. С уменьшением размерности счёт становится всё более устойчивым и параметры определяются всё с большей точностью. Но одновременно, уменьшение размерности ФГМ, ведёт к её генерализации, более сглаженному, схематичному описанию реальной ситуации и, как правило, больше-

му отличию по существу между рассчитываемым с высокой точностью параметром и истинным образом, лежащим в основе ФГМ. Это противоречие между точностью счёта и точностью аппроксимации ведёт к необходимости выбора некоторого осознанного компромисса между точностью счёта и итоговой точностью реконструкции модели.

В последнем – третьем случае – случае неполных связей, неопределяемые по наблюдаемой параметры или группы параметров, но, тем не менее, входящие в описание ФГМ, образуют симбиоз с реконструируемыми – определяемыми параметрами, относя, в итоге, задачу реконструкции модели к классу задач, которым присуща теоретическая эквивалентность. Это означает, что существуют такие комбинации параметров (реконструируемых и неопределяемых), при которых разным моделям соответствует, причём идеально точно соответствует, без каких-либо приближений, одна и та же наблюдаемая. В некоторых частных случаях удаётся реконструировать распределение ФГМ с явно заданной зависимостью результата от неопределённого параметра. В других случаях этого сделать не удаётся и следует обеспечить возможность отбора одного из серии эквивалентных моделей относительно некоторого внешнего критерия отбора.

Неопределённости в наблюдаемых и связях между компонентами ФГМ и наблюдаемыми, приводят к неопределённостям в оценке параметров ФГМ. В процессе реконструкции моделей ФГМ эти погрешности неизменно должны быть оценены. Однако есть особый случай, когда такого рода оценки теряют смысл и этот случай весьма часто, если не подавляюще часто, встречается при реконструкции моделей сред с распределёнными (пространственно-распределёнными) параметрами при интерпретации геофизических данных. Этот случай относится к ситуации, когда природа неопределённостей при реконструкции ФГМ включает в себя присутствие эквивалентности в самих уравнениях связи между параметрами ФГМ и наблюдаемыми. Эта неопределённость в «природе вещей». Если неопределённость в данных наблюдаемых отсутствует, и сами уравнения связи заданы точно, то возможность однозначной реконструкции параметров ФГМ обусловлена однозначной теоретической разрешимостью уравнений связи. Если это так, то это однозначное решение при отсутствии каких-либо погрешностей есть искомое, оцениваемое распределение и все оценки погрешности формулируются относительно этого точного распределения. Таким образом, если уравнения связи разрешимы однозначно, то все значимые проблемы с реконструкцией ФГМ сводятся к учету уже описанных выше неопределённостей. Вычислительные вопросы относятся к числу технических – решаемых проблем. Но если эти уравнения допускают множест-

во решений, то, как само получаемое с помощью тех либо иных приёмов решение, так и какие-либо оценки его точности решения теряют непосредственный смысл, нуждаются в уточнении того, к чему они, собственно говоря, относятся. Какой именно элемент из возможных – эквивалентных (по наблюдаемым) – решений является истинным и какое отношение к нему имеет численно найденное распределение и его оценённые погрешности. Этот случай наличия эквивалентности в уравнениях связи является весьма распространённым. Большая часть уравнений математической физики не допускает в своей общей постановке обратных задач, однозначных решений. Однозначность достигается некоторыми искусственными приёмами и зачастую лишь создаёт видимость снятой проблемы эквивалентности переводя в её скрытую форму.

Эквивалентность, присущая уравнениям связи между наблюдаемыми и физико-геологическими параметрами модели среды, подразделяется на три вида:

- теоретическая эквивалентность;
- практическая эквивалентность;
- скрытая эквивалентность.

3.3.1 Теоретическая эквивалентность

Теоретическая эквивалентность состоит в том, что уравнения связи между параметрами физико-геологической модели и наблюдаемой не могут быть однозначно обращены. Это означает, что одним и тем же данным (наблюдаемым) соответствует много (на самом деле бесконечно много) различных физико-геологических моделей. Они отличаются между собой параметрами, и эти отличия могут быть весьма существенны. Например, одному и тому же гравитационному полю могут быть поставлены в соответствие совершенно различные распределения плотности.

Это эквивалентные распределения. Причём в данном случае эквивалентность точная – теоретическая. Два разных по радиусу и плотности шара создают в точности один и тот же гравитационный эффект, если их массы равны, а центры находятся в одном и том же месте. Таков и эффект от структуры, описываемой линиями, – системой конхонд Слюза (приблизённо изображены на рисунке). Если обозначить $\sigma(\nu)$ пространственное распределение параметра физико-геологической модели среды, например, плотности, а соответствующую наблюдаемую или физическое поле – $u(\nu_0)$, то символически уравнение связи – это соотношение типа: $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$. Здесь индекс «0» при пространственной переменной ν символизирует «точку измерения». Это независимая переменная от точки ν – координаты расположения источника. Принимаем, что оператор

$A[\sigma(\nu)]$ отображает элементы пространства X в элементы пространства Y , каждое из которых предполагается полным нормированным пространством. Например, $A[\sigma(\nu)]$ отображает пространство интегрируемых в V функций (конечная масса) $X = L_1(V)$ в пространство непрерывных на дневной поверхности E_0 функций $Y = C(E_0)$.

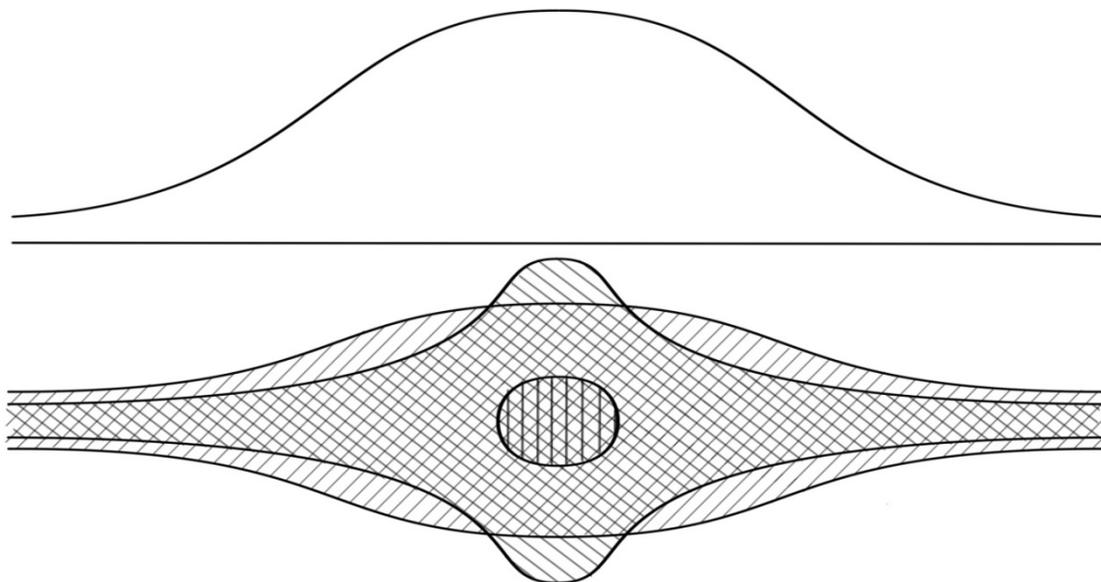


Рисунок 3.1 – Гравитационно-эквивалентные плотностные модели

Распределёнными параметрами модели, называются параметры, являющиеся функциями некоторых переменных. Если это функции пространственных координат, то такие параметры называются *пространственно-распределёнными*. Могут быть параметры, распределённые в фазовом пространстве. Если не оговорено противное, то распределённые параметры – это пространственно-распределённые. Наиболее рельефно проблемы эквивалентности проявляются в пространственно-распределённых параметрах и наследуются через них в иных формах (см. ниже скрытая эквивалентность) в других классах моделей.

Теоретическая эквивалентность состоит в том, что для каждого элемента $\sigma(\nu) \in X$ существуют отличные от $\sigma(\nu)$ элементы $\xi(\nu) \in X$, для каждого из которых $A[\sigma(\nu)] = A[\xi(\nu)] = u(\nu_0)$. Совокупность таких эквивалентных относительно оператора $A[\cdot]$ элементов $\xi(\nu)$ для $\sigma(\nu)$ называется классом эквивалентности для $\sigma(\nu)$ и обозначается $\Omega_u(A, X)$. В этом обозначении подчёркивается, что класс эквивалентности $\Omega_u(A, X)$ зависит от множества X , на котором определён оператор $A[\cdot]$, и конкретного элемента $u(\nu_0)$. Здесь много математических тонкостей. Для некоторых функции $u(\nu_0)$ такой класс не существует. Он может оказаться пустым множеством, если $u(\nu_0)$ не входит в допустимые образы оператора $A[\cdot]$. Если вид оператора ясен из контекста, его не указываем явно, записывая $\Omega_u(X)$.

Также, если ясно о каком многообразии X идёт речь, опускаем и этот компонент, записывая Ω_u . Математическое название класса эквивалентности – класс смежности, теория которых выходит за рамки наших рассмотрений. Тем не менее, совершенно очевидно, что если $A[\sigma(\nu)]$ – линейный оператор, то любая выпуклая комбинация элементов из $\Omega_u(X)$ есть снова элемент из $\Omega_u(X)$, и $\Omega_0(X)$ есть линейное подпространство в X .

Теоретическая эквивалентность изначально присуща большей части задач реконструкции физико-геологических моделей по геофизическим данным. Это их фундаментальное теоретическое свойство.

Образно можно представить себе множество эквивалентности в виде некоторой линии или поверхности в некотором условном «фазовом» пространстве X , каждая точка которого – это элемент $\sigma(\nu)$ из класса эквивалентности Ω_u . Понятно, что два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Их совокупность образует систему линий или поверхностей, покрывающую всё фазовое пространство.

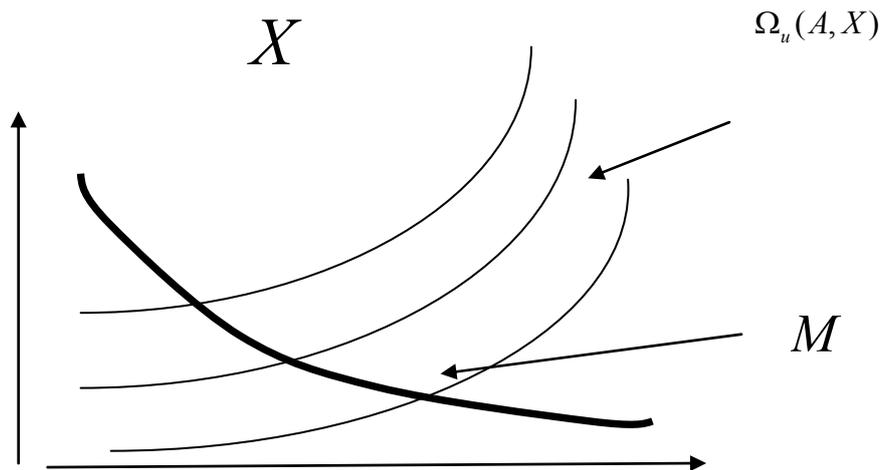


Рисунок 3.2 – Фазовое пространство и классы эквивалентности

Из рисунка 3.2 можно почерпнуть идею о том, что если рассматривать задачу реконструкции параметра $\sigma(\nu)$ не на всём фазовом пространстве X , а некотором подмножестве, пересекающем классы эквивалентности, например M , теоретической эквивалентности не будет. На M любые два разных элемента $\sigma(\nu)$ и $\xi(\nu)$ создают и разные наблюдаемые: $A[\sigma(\nu)] \neq A[\xi(\nu)]$. Если это так, то задача реконструкции физико-геологической модели, принадлежащей множеству M по заданной наблюдаемой $u(\nu_0)$, имеет смысл. Однако при этом возникают проблемы практической и рассмотренной далее скрытой эквивалентности.

3.3.2 Практическая эквивалентность

Практическая эквивалентность (рис. 3.3) является прямым следствием, во-первых, неопределённости в задании связей между компонентами ФГМ и наблюдаемых во всех их формах и, во-вторых, наличия погрешности в наблюдаемых. Наблюдаемые заданы с ошибкой, и это обстоятельство необходимо учитывать. Вместо теоретически точной наблюдаемой $u(v_0)$ задано её приближение $u_\delta(v_0)$. Точной наблюдаемой $u(v_0)$ соответствует одно распределение параметра $\sigma(v)$. Но вместо него известна некоторая δ -область возможных значений наблюдаемой, и каждому элементу $u_\delta(v_0)$ этой области соответствует своё распределение $\sigma_\delta(v)$. С точки зрения реальных данных все $\sigma_\delta(v)$ совершенно равноправны и образуют множество практической эквивалентности, которое можно описать так:

$$\delta\Omega_u(A, X) = \left\{ \sigma_\delta(v) : \left\| A[\sigma_\delta(v)] - u_\delta(v_0) \right\|_Y \leq \delta \right\}.$$

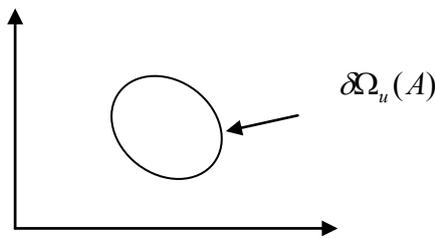


Рисунок 3.3 – Область практической эквивалентности

Связь $A[\cdot]$ между распределением параметра физико-геологической модели и наблюдаемой задана с погрешностью. Фактически вместо точного отображения $A[\cdot]$ имеется его приближенный аналог $A_h[\cdot]$ такой, что $A_h[\sigma(v)] = A[\sigma(v)] + \delta A_h[\sigma(v)]$. На самом деле характер погрешности, включаемый в вариацию: $\delta A_h[\sigma(v)]$, может носить сложный характер и состоять из аддитивной, мультипликативной и смешанной компонент. Однако для иллюстрации сути проблемы достаточно ограничиться приведённым её представлением $\delta A_h[\sigma(v)]$. Оценка величины этой погрешности принимается равной $\left\| \delta A_h[\sigma(v)] \right\| \leq h \cdot \left\| \sigma(v) \right\|$. Таким образом, в итоге величина, определяющая область практической эквивалентности $\left\| A[\sigma_\delta(v)] - u_\delta(v_0) \right\|_Y$, складывается из уже рассмотренной выше погрешности в наблюдаемой δ и величины $h \cdot \left\| \sigma(v) \right\|$. Эта величина $\Delta = \delta + h \cdot \left\| \sigma(v) \right\|$ называется обобщённой невязкой и определяет множество практической эквивалентности:

$$\delta\Omega_u(A_h, X) = \left\{ \sigma_\delta(v) : \left\| A[\sigma_\delta(v)] - u_\delta(v_0) \right\|_Y \leq \delta + h \cdot \left\| \sigma_\delta(v) \right\| \right\}$$

Это множество расширяется по мере увеличения $\|\sigma_\delta(v)\|$.

При уменьшении величин $\{\delta, h\}$ область практической эквивалентности стягивается в точку, при этом, однако, реально достигаемая точность может быть кажущейся за счёт эффектов неустойчивости решений. Практическая эквивалентность и правила борьбы с ней состоят во введении дополнительных требований о свойствах регулярности решений и выборе элемента из класса практической эквивалентности, который этим требованиям удовлетворяет наилучшим образом. Этот выбор из области практической эквивалентности называется нахождением регуляризованного приближения к решению. При этом введение этих требований основано на том, что регуляризованные приближения сходятся к точному при повышении точности данных. Чем более точны данные, тем более слабы требования к введению каких-либо внешних условий, включая условия регулярности.

3.3.3 Скрытая эквивалентность

Этот вид эквивалентности является разновидностью теоретической эквивалентности, но проявляющейся в ошибочности принимаемых решений в ситуациях кажущегося отсутствия эквивалентности. Ошибка, зачастую допускаемая интерпретаторами, состоит в молчаливом принятии недоказанного утверждения о том, что если на выбранном классе моделей M решение единственно (выполнен принцип единственности), а сам класс позволяет хорошо аппроксимировать реальную геологическую ситуацию (выполнен принцип содержательности), то построение квазирешения (решение, минимизирующее невязку полей на выбранном модельном классе) и есть приближение к истинному распределению искомого параметра. На самом деле найденное квазирешение $m_2(v)$ может быть аппроксимацией к совершенно иному, зачастую весьма «экзотическому» и существенно уклоняющемуся от истинного, элементу. Это возникает в том, реально распространённом случае, когда выполненный на узком «рабочем» множестве M принцип единственности оказывается не выполненным на всём множестве X . Но это сплошь и рядом встречающаяся ситуация. На самом деле, если множество эквивалентных по полю $u(v_0)$ на множестве X элементов $\Omega_u(A, X)$, то $m_2(v)$ служит аппроксимацией к $\sigma_2(v)$ из класса эквивалентности $\Omega_u(A, X) = \{\sigma(v) \in X: A[\sigma(v)] = u(v_0)\}$ содержащего $\sigma_1(v)$ и определённого условием:

$$\|m_2(v) - \sigma_2(v)\|_X = \min_{\xi(v) \in \Omega_u(A, X)} \|m_2(v) - \xi(v)\|_X = \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

Используя последнее выражение, получаем для пары $\{m_2(v), \sigma_2(v)\}$:

$$\begin{aligned} \|m_2(v) - \sigma_2(v)\|_X &= \min_{\substack{\xi(v) \in \Omega_u(A, X), \\ m(v) \in M}} \|m(v) - \xi(v)\| = \varepsilon_2(M, \Omega_u(A, X)) \leq \|m_1(v) - \sigma_1(v)\|_X = \\ &= \min_{\xi(v) \in M} \|\xi(v) - \sigma_1(v)\|_X \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) служит математической формулировкой эффекта скрытой эквивалентности, состоящего в том, что при условии $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ в качестве квази-решения будет получено $m_2(v) \neq m_1(v)$, дающее приближение $\sigma_2(v)$, а не $\sigma_1(v)$. Это трактуется следующим образом: на множестве X существует иной, отличный от $\sigma_1(v)$, но эквивалентный ему по полю, элемент $\sigma_2(v)$, который аппроксимируется множеством M лучше, чем $\sigma_1(v)$. Именно аппроксимация $\sigma_2(v)$ на M будет получена в качестве единственного решения $m_2(v)$ задачи (3.1), поскольку погрешность при этом обеспечивается меньшая.

Эффект скрытой эквивалентности состоит в отличии $m_2(v)$ и $m_1(v)$ при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, что приводит к получению ложного результата в качестве квазирешения, несмотря на выполнение условий единственности и содержательности аппроксимационной конструкции M . Это означает также то обстоятельство, что принцип содержательности при формировании аппроксимационных конструкций не является исчерпывающим, обеспечивающим содержательность результата решения задачи инверсии. Проявление эффекта скрытой эквивалентности контролируется двумя условиями – существованием расширения задачи инверсии в форме (3.2) до задачи с нетривиальным классом эквивалентности и достаточно широким множеством M , имеющим достаточно универсальные аппроксимационные возможности. В этой связи важен ответ на вопрос о том, допускает ли конкретная, имеющая единственное решение задача (3.2), расширение на $X \supset M$, в котором $\Omega_u(A, X)$ уже не тривиальное множество (состоящее более чем из одного элемента). Большая часть обратных задач геофизики такое расширение допускают, и, следовательно, эффект скрытой эквивалентности будет для них проявляться. Таким образом, модель $\sigma_1(v)$, под которую подстраивался аппроксимационный класс M , и модель $\sigma_2(v)$ из класса эквивалентных $\sigma_1(v)$, которую реально аппроксимирует получаемое квазирешение, вообще говоря, не совпадают. О том, чтобы они совпадали либо были близки, требуется специально позаботиться.

(M)-квазирешением называется элемент $m_2(v)$:

$$\|Am_2 - u\|_Y = \min_{m \in M} \|Am - u\|_Y. \quad (3.2)$$

Ему соответствующий элемент $\sigma_2(v)$ – это ближайший к $m_2(v)$ в норме пространства X в классе эквивалентных решений:

$$\|m_2 - \sigma_2\|_X = \min_{\xi \in \Omega_u(A, X)} \|m_2 - \xi\|_X \quad (3.3)$$

Таким образом, когда $u(v_0)$ пробегает все $\text{Im}A[]$, совокупность квазирешений $m_2(v)$ описывает многообразие (M) -квазирешений, а им соответствующие элементы $\sigma_2(v)$ – многообразие, называемое M, X -нормальными решениями задачи:

$$A\sigma = u(v_0). \quad (3.4)$$

Совокупность (M, X) -нормальных решений для $u(v_0)$, пробегающих все $\text{Im}A_M[]$ называется (M, X) -экстремальным классом. Причина использования термина «экстремальный класс» будет понятна из дальнейшего. Название «нормальное решение» наследовано из теории линейных уравнений в банаховых пространствах для обозначения решений с минимальной нормой (см. первую часть настоящего учебного пособия). Можно дать оценку возможного отклонения реального распределения параметра $\sigma_1(v)$ от ему эквивалентного по наблюдаемому полю (M, X) -нормального $-\sigma_2(v)$.

Теорема. Пусть A – линейный ограниченный оператор из X в Y , где X и Y – банаховы пространства. Пусть далее M – конечномерно¹, и модуль непрерывности обратного к A на M оператора $\omega(A^{-1}, M, X, Y)$ конечен:

$$\omega(A^{-1}, M, X, Y) = \sup_{\xi_1(v), \xi_2(v) \in M} \frac{\|\xi_1(v) - \xi_2(v)\|_X}{\|A[\xi_1(v)] - A[\xi_2(v)]\|_Y} < \infty.$$

Тогда:

$$\|\sigma_1(v) - \sigma_2(v)\|_X \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (1 + \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \|A\|) \quad (3.5)$$

Здесь $\|A\|$ – норма оператора A в паре банаховых пространств X и Y .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(v) - \sigma_2(v)\|_X &\leq \|\sigma_1(v) - m_1(v)\|_X + \|m_1(v) - m_2(v)\|_X + \|m_2(v) - \sigma_2(v)\|_X. \\ \|m_1(v) - m_2(v)\|_X &\leq \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \|Am_1(v) - Am_2(v)\|_Y \leq \\ &\leq \omega(A^{-1}, M, X, Y) \cdot \left\{ \|A[m_1(v) - \sigma_1(v)]\|_Y + \|A[\sigma_1(v) - \sigma_2(v)]\|_Y + \|A[\sigma_2(v) - m_2(v)]\|_Y \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma_1(v), \sigma_2(v) \in \Omega_u(A, X)$, то $A[\sigma_1(v)] = A[\sigma_1(v)]$, и

$\|\sigma_1(v) - \sigma_2(v)\|_X \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \omega(A, M) \|A\| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, что и требовалось доказать.

¹ Это требование можно ослабить до требования ограниченной компактности M .

Полученный результат о том, что, вообще говоря, модель $\sigma_1(\nu)$, под которую подстраивался аппроксимационный класс, и модель $\sigma_2(\nu)$ из класса эквивалентных $\sigma_1(\nu)$, которую реально аппроксимирует получаемое квазирешение, не совпадают, весьма настораживает. Он означает, что результаты решения задачи минимизации невязки на множестве M – это прообразы на M (M, X) – нормальных эквивалентных элементов, которые при определённых условиях могут с требуемой точностью совпадать с прообразами на M реальных распределений параметров, но могут и самым существенным образом от них отличаться. Эти отличия имеют свои проявления. Они состоят в том, что (M, X) -нормальные решения обладают некоторыми специфическими свойствами, общими для всего (M, X) -экстремального класса. Эти свойства, если их не учитывать, далее переходят в ошибки интерпретации результатов и ведут, в конечном итоге, к неверным выводам об изучаемом объекте. Необходим более тщательный анализ возможных негативных свойств, отличающих элемент $\sigma_2(\nu)$ от $\sigma_1(\nu)$. С этой целью следует изучить общие свойства (M, X) -экстремальных классов и условия, которыми эти свойства контролируются. Эту задачу удаётся пока решить точно только в специальных случаях и в существенно упрощающих анализ предположениях, а отрицательные эффекты проследить на ещё более частных примерах. Однако уяснение этих особенностей в более простых случаях позволяет предположить и их существования в более сложных, не поддающихся общему анализу, ситуациях, либо, по крайней мере, иметь в виду возможность их проявления при интерпретации результатов решения обратных задач.

Глава 4. Методы моделирования в условиях неопределённости

4.1 Квазирешения и аппроксимационный подход

В предыдущем разделе, в связи с изучением эффекта скрытой эквивалентности определялось понятие квазирешения уравнения как решения минимизирующего невязку на заданном классе моделей M . Метод нахождения квазирешений реализует аппроксимационный подход к решению некорректных задач, который в определённом смысле несколько шире чем метод квазирешения. Большая общность аппроксимационного подхода в сравнении с трактовкой его как нахождения квазирешения, связана с тем, что требование минимума невязки может и не быть. Хотя поиск решения на заданной аппроксимационной конструкции остается. Однако, в аппроксимационном подходе, в отличие от общего метода квазирешений, используемые аппроксимационные конструкции весьма специфичны и отражают принципы аппроксимации искомого объекта наборами некоторых элементарных объектов.

Как уже оказывалось выше, изначально, в естественной формулировке, большая часть уравнений, описывающих связь между физико-геологическими параметрами и наблюдаемыми, корни которых это уравнения математической физики, такова, что задачи реконструкции распределённых параметров по наблюдаемым обладают свойством эквивалентности. Так дело обстоит для уравнений гравитационного поля, уравнений электромагнетизма, уравнений движения вещества и распространения колебаний. Таково то, естественное, изначальное положение дел. Избавится от эквивалентности и обеспечить возможность реконструкции параметров ФГМ можно сужением области определения оператора прямой задачи со всего естественного пространства X до некоторого априорно заданного и отражающего представления об искомом решении множества M . Этот приём называется сужением задачи A (как следствия реконструкции параметров) со всего пространства X на его подмножество M , называемое классом (допустимых) моделей. Это достаточно распространенный приём, имеющий множество различных реализаций, причём различающихся между собой принципиально. Основное отличие состоит в том, как строится это множество. Оно может конструироваться в явном виде, как перечень допустимых элементов, может задаваться системой допустимых параметров для аппроксимирующей изучаемую модель элементарных объектов. Может задаваться как решение некоторых иных уравнений и здесь открывается обширное поле деятельности. Однако самым практически развитым, интуитивно понятным, и возникшим исторически первым, служит приём формирования модели, который называется

«аппроксимационный подход» к решению обратных задач – задач обращения уравнения $A[\sigma(\nu)]$ (инверсии) или задач реконструкции моделей.

Аппроксимационный подход основан на априорном введении моделей, предназначенных для аппроксимации реальной среды набором элементарных объектов из заданного класса. Этот класс называется аппроксимационным классом или аппроксимационной моделью и обозначается M . Чаще всего, в качестве аппроксимирующих элементов выступают элементарные геометрические объекты. Например, это система призм, уступов, многоугольников, предназначенных для аппроксимации плотностной модели геологического объекта в гравиразведке. Это система кусочно-линейных поверхностей для аппроксимации отражающих поверхностей в сейсморазведке. Каждый элемент аппроксимирующей системы имеет свои параметры – размеры, глубину залегания, плотность, если речь идет о плотностной модели. Перечень этих параметров составляет параметризацию модели, и ограничения, накладываемые на их значения в связи с дополнительной информацией, в том числе и в связи с информацией о других моделях, требованиями согласованности с геофизическими полями, также включены в определение аппроксимационной модели M .

Важной характеристикой аппроксимационной модели служит доставляемая ею *погрешность аппроксимации* элемента. Например, если $\xi(\nu)$ и есть неизвестная реальная физическая модель, то $\varepsilon(M, \xi)$ характеризует меру точности, с которой элементами из M может быть приближено распределение $\xi(\nu)$. Поскольку реально $\xi(\nu)$ неизвестна, а известно, в лучшем случае то, что изучаемый объект принадлежит некоторому множеству Ξ , образующему подмножество в X , то характеристикой аппроксимационной способности M для описания элементов из Ξ служит величина максимально возможной погрешности: $\max_{\eta \in \Xi} \varepsilon(M, \eta) = \varepsilon(M, \Xi)$. В качестве класса Ξ , выступает подмножество из X , с

содержательной точки зрения характеризующее тип решаемых задач. Например, класс Ξ может быть образован моделями, характерными при изучении платформенных областей. В другом случае это может быть класс объектов, типичных при изучении соляных диапиров и так далее.

То обстоятельство, что величина $\varepsilon(M, \Xi)$ достаточно мала, говорит о содержательности M , его пригодности для изучения распределения из класса Ξ . Она представляет собой оценку возможных погрешностей при замене всего X на M при изучении моделей из класса Ξ . Сама эта величина характеризует меру содержательности (например, погрешность аппроксимации) M относительно Ξ . Возможность эффективного использования аппроксимационных моделей M

предполагает, что эта величина достаточно мала или, что то же самое, M содержательно для изучения $\xi \in \Xi$.

Таким образом, выбор аппроксимационной модели M для физического параметра из класса $\Xi \in X$ (например, функций пространственных координат с финитным носителем, если изучаются локализованные аномалии распределения параметра), представляет собой этап, на котором формализуются результаты анализа имеющихся представлений о распределении физического параметра, характерного для реальной физико-геологической модели изучаемой среды. Саму реальную среду, точнее распределение ей соответствующего параметра обозначим $\sigma_1(\nu)$. Результатом системного анализа геолого-геофизических данных служит выбор аппроксимационной модели, обеспечивающей приемлемо малую погрешность аппроксимации элемента $\sigma_1(\nu)$ некоторым элементом $m_1(\nu) \in M$. Это значит, что наилучшая аппроксимация для $\sigma_1(\nu)$ доставляется элементом $m_1 \in M$, и погрешность аппроксимации $\varepsilon_1 > 0$, определённая формулой:

$$\|m_1(\nu) - \sigma_1(\nu)\|_X = \min_{\xi(\nu) \in M} \|\xi(\nu) - \sigma_1(\nu)\|_X \leq \varepsilon_1, \quad (4.1)$$

достаточно мала. Малость величины $\varepsilon_1 > 0$ это собственно и есть одно из требований для выбора аппроксимационной конструкции M . Оно называется *принцип содержательности*. Однако это еще не все требования.

Второе, требование состоит в том, чтобы на M отсутствовала теоретическая эквивалентность. Это требование называется *принципом единственности* на M , и его формализованная запись такова:

Если $\sigma_1(\nu), \sigma_2(\nu) \in M$ и $A[\sigma_1(\nu)] = A[\sigma_2(\nu)]$ то $\sigma_1(\nu) = \sigma_2(\nu)$.

Иными словами, если поля от двух моделей принадлежащих M совпадают, то и сами распределения совпадают. Эквивалентное пояснение состоит в том, что на множестве M поле $u(\nu_0)$ однозначно характеризует сами объекты. Если M удовлетворяет *принципу единственности*, а поле $u(\nu_0)$ соответствует какому либо из элементов из M , то задача:

$$\begin{aligned} A[\sigma(\nu)] &= u(\nu_0), \\ \sigma(\nu) &\in M, \end{aligned} \quad (4.2)$$

может быть решена единственным образом.

Это решение называется *квазирешением* для уравнения $A[\sigma(v)] = u(v_0)$ на множестве M .

Здесь есть одно осложняющее дело обстоятельство. Оно состоит в том, что реально заданная наблюдаемая это не $u(v_0)$, а осложненная погрешностями $u_\delta(v_0)$. Причём природа этих погрешностей не только не связана с собственно мультипликативными аддитивными и смешанными ошибками в наблюдаемых, но еще и реальное распределение $\sigma_1(v)$ аппроксимируется элементами из M приближенно. Поэтому, строго говоря, среди всех образов элементов из M , при отображении $A[\cdot]$, которое обозначается $\text{Im}A_M[\cdot]$ просто нет точно совпадающего с реально заданным элементом $u_\delta(v_0)$. Приближение может быть хорошим, но не идеально хорошим. Чем грубее конструкция M , чем меньше в ней детализирующих компонент, тем меньше элементов в $\text{Im}A_M[\cdot]$ и тем больше шансов на значимые отличия между $u_\delta(v_0)$ и наилучшем к нему приближением на $\text{Im}A_M[\cdot]$. Это отличие отражает ограниченные аппроксимационные возможности конструкции M при реконструкции $\sigma_1(v)$. В этой связи задача (3.2) должна быть переформулирована. Первоначально необходимо для $u_\delta(v_0)$ найти $\overline{u_\delta}(v_0)$ как наилучшее приближение $u_\delta(v_0)$ на $\text{Im}A_M[\cdot]$, в пространстве Y , а затем для $\overline{u_\delta}(v_0)$ решать задачу (4.2), которая уже будет иметь, и иметь только одно решение. Эти два этапа объединяются в один за счёт перехода от (4.2) к:

$$\begin{aligned} & \left\| A[\sigma(v)] - u_\delta(v_0) \right\|_Y \rightarrow \min, \\ & \sigma(v) \in M. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Требование минимизации невязки $\left\| A[\sigma(v)] - u_\delta(v_0) \right\|_Y$ может быть обобщено требованием минимизации некоторого более общего сильно выпуклого относительно $A[\sigma(v)] - u_\delta(v_0)$ функционала $J[u_\delta(v_0), \sigma(v)]$.

Решение (4.3) единственно, если единственна проекция $\overline{u_\delta}(v_0)$ на $\text{Im}A_M[\cdot]$. Это будет выполнено, в частности, если $A[\cdot]$ линейный оператор, а M замкнутое выпуклое множество. В этом случае не важно, каким методом минимизация в (3.2) достигается. Арсенал средств для этого достаточно велик. Важно, что все они в силу доказанного существования и единственности решения, дадут один и тот же результат (с точностью до вычислений). Обозначим это решение m_2 . В соответствии с введенным выше определением m_2 – это квазирешение задачи $A[\sigma(v)] = u(v_0)$ на M . Однако, в силу рассмотренных эффектов скрытой эквивалентности $m_2(v)$ может не совпадать и даже принципиально отличаться по

свойствам от $m_1(\nu)$ и, тем самым, служить приближением к совершенно иному элементу – $\sigma_1(\nu)$. Забегая вперед отметим, что на самом деле, следует еще позаботиться о том, чтобы все элементы из M , могли быть получены в качестве решений задачи (4.3) одинаково эффективно. В этом состоит особенность присутствующая геофизическим задачам. Эта особенность называется скрытой эквивалентностью.

4.2 Экстремальные классы и свойства квазирешений

(M, X) -экстремальный класс – это совокупность всех (M, X) -нормальных решений задачи $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ при $u(\nu_0)$ пробегающем все $\text{Im}A[]$. (X, X) -экстремальный класс или просто (X) -экстремальный класс – это множество (X) -нормальных решений задачи $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$; $\|\sigma(\nu)\|_X \rightarrow \min$, при всех возможных $u(\nu_0) \in \text{Im}A[]$. Для каждого конкретного $u(\nu_0)$, элемент из X -экстремального класса есть X -нормальное решение.

Для (X) -экстремального класса используется специальное обозначение $\mathfrak{R}(A, X)$. Однако следует допускать, что X -нормальное решение может оказаться не единственным и, следовательно, $\mathfrak{R}(A, X)$, вообще говоря, не является множеством единственности. Условие $u(\nu_0) \in \text{Im}A[]$ существенно при определении $\mathfrak{R}(A, X)$, поскольку в общем случае возможны такие элементы $y(\nu_0)$ из пространства Y , которые не входят в многообразие $\text{Im}A[]$. Для этих элементов уравнение $A[\sigma(\nu)] = y(\nu_0)$ не разрешимо и, следовательно, для них нет соответствующих элементов из $\mathfrak{R}(A, X)$. Поскольку на множестве $\mathfrak{R}(A, X)$ решение задачи $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ существует для каждого $u(\nu_0) \in \text{Im}A_M[]$, то в предположении однозначной разрешимости, экстремальный класс $\mathfrak{R}(A, X)$ называется идеальным. Таким образом, идеальный экстремальный класс – это такой экстремальный класс $\mathfrak{R}(A, X)$ на котором для каждого $u(\nu_0) \in \text{Im}A_M[]$ уравнение $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ разрешимо, и разрешимо единственным образом. Если уравнение $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ однозначно разрешимо на $\mathfrak{R}(A, X)$ с любой наперед заданной точностью (плотно разрешимо), то это подмножество называется почти идеальным экстремальным классом. Для него вводится специальное обозначение $\mathfrak{K}(A, X)$. Если на экстремальном классе для каждого $u(\nu_0) \in \text{Im}A_M[]$ уравнение $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ разрешимо, то он называется полным (но возможно не идеальным из-за того, что это решение не единственно).

Таким образом, иерархическая цепочка определений такова: «экстремальный класс» + «всюду разрешимость» = «полный экстремальный класс» + «класс

единственности» = «идеальный экстремальный класс»; «плотное в нем подмножество» = «почти идеальный экстремальный класс».

Оценка (3.5) меры уклонения реального распределения параметра $\sigma_1(\nu)$ от (M, X) -нормального эквивалентного – $\sigma_2(\nu)$ фиксирует сам факт этого различия. Качественная характеристика этих решений может быть выявлена при изучении свойств (M, X) -нормальных решений и свойств, связанных с ними экстремальных классов.

Далее полагаем: X, Y – рефлексивные банаховы, в частности гильбертовы пространства; оператор A линеен и замкнут в паре пространств X, Y ; A^* – сопряженный к A оператор; $\text{Im}A = \text{Im}A_X[\]$ – область значений оператора A . $P_M(\sigma(\nu))$ – операция проектирования в норме пространства X элемента $\sigma(\nu)$ на M . Если важно подчеркнуть вид пространства, в котором осуществляется проектирование, записываем эту операцию так: $P_M(\sigma(\nu), X)$. Образ множества Ξ при поэлементном проектировании на M обозначаем $P_M(\Xi)$, или $P_M(\Xi, X)$. Из перечисленных условий наиболее ограничительным служит линейность и ограниченность оператора $A[\cdot]$. Те реальные задачи, в которых оператор $A[\cdot]$ оказывается нелинейным могут быть сведены к линейному случаю процедурами линеаризации. Линеаризация задачи $A[\sigma(\nu)] = u(\nu_0)$ состоит в её замене на:

$$\begin{aligned} A'[\sigma^0(m)][h(\nu)] &= u(\nu_0) \\ \sigma(\nu) &= \sigma^0(\nu) + h(\nu). \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} A[\sigma(\nu)] &= A[\sigma_0(\nu)] + A'[\sigma_0(m)][h(\nu)] + r(h); \\ h(\nu) &= \sigma(\nu) - \sigma_0(\nu); \end{aligned}$$

где $r(h)$ – величина малая высшего порядка в сравнении с $\sigma(\nu) - \sigma^0(\nu)$; $\sigma_0(\nu)$ – нулевое приближение к искомому распределению. Введение итерационных процессов, организованных из последовательности линеаризованных приближений:

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1}(\nu) &= \sigma^n(\nu) + h^n(\nu); \\ A'[\sigma^n(m)][h^n(\nu)] &= \Delta u^n(\nu_0); \\ \Delta u^n(\nu_0) &= u(\nu_0) - A[\sigma^n(m)]; \\ \sigma(\nu) &= \sigma^n(\nu) + h^n(\nu). \end{aligned}$$

позволяет достаточно точно и, при определённых условиях, быстро приблизиться с помощью решения линеаризованных задач к решению исходной нелинейной задачи. Требование замкнутости оператора выполнено всякий раз, когда оператор ограничен либо ограничен к нему обратный. В практических задачах это всегда можно считать выполненным.

Следующий результат является вспомогательным.

Утверждение 1. Для линейного замкнутого оператора $A[\cdot]$ и линейного многообразия M множество $\{P_M(\mathfrak{R}(A, X), X)\}$ образует класс (M) -квазирешений задачи (4.2) относительно нормы фиксированного пространства X , свойственного алгоритму её решения.

Здесь важно обратить внимание на то, что различным нормам пространства X , будут соответствовать различные (M) -квазирешения. При этом классы квазирешений – т. е. многообразии решений задачи (4.2), при $u(v_0)$ пробегающем все допустимые значения могут совпадать, а могут и не совпадать. Если они совпадают, то алгоритм нахождения квазирешения не играет решающей роли. Если нет – то проявляются эффекты скрытой эквивалентности.

Основным результатом, характеризующим область эффективного применения аппроксимационного подхода при реконструкции распределённых параметров сред служит.

Утверждение 2. Для того, чтобы исключить проявление эффектов скрытой эквивалентности, достаточно чтобы проекция множества $\text{Im}(A^*)$ на M совпадала с самим множеством M :

$$P_M(\text{Im}(A^*)) = M. \quad (4.4)$$

В этом утверждении сконцентрировано определение круга задач, в которых использование аппроксимационных принципов для реконструкции распределённых параметров эффективно. Используемая аппроксимационная конструкция M должна быть не шире, чем класс проекций на её множества $\text{Im}(A^*)$. В противном случае результаты моделирования могут быть ошибочными из-за эффекта скрытой эквивалентности. Этим требованием определена эффективность применения аппроксимационного подхода относительно простыми конструкциями, не содержащими внутренних неопределённостей. Например, из (4.4) следует (строго доказано ниже), что используемая сеточная конструкция при реконструкции плотностных распределений не должна иметь неопределённых внутренних ячеек, окруженных внешними неопределёнными же ячейками.

Эффект скрытой эквивалентности имеет первопричиной то обстоятельство, что класс (M) -квазирешений обладает некоторыми, наследуемыми из самой задачи

свойствами, продиктованными внутренними особенностями задачи. Это вид множества $\text{Im}(A^*)$ определяет специфику оператора и способ его проектирования на M . Это уже свойство пространства X . Это означает класс $P_M(\text{Im}(A^*))$ уже, чем все M . Обозначим $M' = P_M(\text{Im}(A^*))$ подмножество в M элементов, которые могут быть получены в качестве квазирешений. Элемент $m_2(v)$ из M' и соответствующий ему формально-эквивалентный элемент $\sigma_2(v)$ их (M, X) -экстремального класса – суть решения задачи (4.1), которую можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned} \|m_2(v) - \sigma_2(v)\|_X &= \min_{\substack{\xi(v) \in \Omega_n(A, X); \\ m(v) \in M}} \|m(v) - \xi(v)\|_X \\ A[\xi(v)] &= u(v_0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если экстремальный класс $\mathfrak{R}(A, X)$, представляющий собой по определению множество решений задачи:

$$\begin{aligned} A[\xi(v)] &= u(v_0); \\ \|\xi(v)\|_X &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4.6)$$

при $u(v_0)$ пробегающем все $\text{Im}(A)$, то из (4.5), (4.6) и определения проектора $P_M(\mathfrak{R}, X)$ следует, что:

$$m_2(v) \in P_M(\mathfrak{R}(A, X), X) \in M'. \quad (4.7)$$

Главное значение этого представления состоит в том, что найденное квазирешение $m_2(v)$ – это в точности проекция на M некоторого элемента из экстремального класса $\mathfrak{R}(A, X)$ и, следовательно, наследует свойства элементов экстремального класса. Изучая их общие свойства можно отследить их фатальное проявление в проекциях на M .

Очень важное утверждение состоит в следующем. Для рефлексивных пространств ($X^{**} = X$ – второе сопряженное совпадает с исходным) и линейных замкнутых операторов $A[\cdot]$ множество $\mathfrak{R}(A, X)$ находится во взаимно однозначном соответствии с замыканием $\text{Im}(A^*)$ в X^* , которое обозначаем $\overline{\text{Im} A^*}$. Это означает, что $\mathfrak{R}(A, X)$ идеальный экстремальный класс. Формальное доказательство этого утверждения достаточно очевидно и состоит в том, что решение задачи (4.6) при каждом $u(v_0)$ из $\text{Im}(A)$ существует и единственно. Точно также, как существует и единственное решение уравнения $A[\xi(v)] = u(v_0)$ при $u(v_0)$ из $\text{Im}(A)$ на замыкании в звезда слабой топологии X^* множества из $\text{Im}(A^*)$: $\overline{\text{Im} A^*}$.

Последнее и означает взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{R}(A, X)$ и $\overline{\text{Im } A^*}$.

Если класс проекций $\text{Im}(A^*)$ на M (множество $P_M(\text{Im}(A^*), X)$) образует собственное подмножество в M , которое обозначим M_I : $M_I = P_M(\text{Im}(A^*), X) \subset M$, то и класс проекций $\mathfrak{R}(A, X)$ на M , который обозначим M_X : $M_X = P_M(\mathfrak{R}(A, X), X) \subset M$, также образует собственное в M подмножество, возможно и не совпадающее с $P_M(\text{Im}(A^*), X)$. Но тогда справедливо и обратное. В случае если $M \subseteq P_M(\text{Im}(A^*), X)$, то также и $M \subseteq P_M(\mathfrak{R}(A, X), X)$, все элементы из M , оказываются достигаемыми при конструировании квазирешений, и отрицательных эффектов, связанных с формально-эквивалентными решениями, нет. Здесь очень важно отметить следующее обстоятельство. Множества M_X для разных пространств X , вообще говоря, не совпадают между собой. Если некоторый элемент $m(v)$ является недостижимым в классе M_X , то он может быть достигаемым в другом классе – M_Z , соответствующем другому типу пространства – Z . Однако это означает явное или неявное изменение параметров в постановке задачи (4.6). Появление достижимых одних элементов влечет за собой исключение из области достижимости других. Причём процесс контроля этих эффектов достаточно затруднен.

Хорошей демонстрацией для описанного эффекта скрытой эквивалентности, демонстрации специфических свойств экстремальных классов $\mathfrak{R}(A, X)$ и их наследования в проекциях на M служат линейные обратные задачи гравиметрии.

Самым простым и наглядным примером служит использование сеточных методов для решения обратной задачи гравиметрии. Пусть в области V нижнего полупространства имеется некоторый изолированный объект постоянной плотности либо близкий к нему. Разобьем область V на N подобластей V_i , в своей со-

вокупности покрывающих все V : $\left(V = \bigcap_i V_i \right)$. Эту конструкцию обозначим M .

Её элементами служат плотностные модели, образованные приписыванием ячейкам конкретных значений плотности σ_i ; $\sigma = \{\sigma_i, i = 1, \dots, N\}$. Будем подбирать значения плотностей в ячейках сетки из условия минимума невязки:

$$\|u_p(v_0) - u_\delta(v_0)\|_{L_2} = \|A_M \sigma - u_\delta(v_0)\|_{L_2} \rightarrow \min, \quad (4.8)$$

где $u_\delta(v_0)$ – интерпретируемый гравитационный эффект.

Для гравитационных полей v_0 – это точки на двумерной поверхности, образованной из $\{x_0, y_0, z_0\}$, для которых будем использовать также обозначение s_0 –

идентифицирующее точки наблюдения поля $u_\delta(s_0)$. Она введена наряду с использованной ранее v_0 для того, чтобы подчеркнуть независимость этих переменных и их возможную различную размерность. Для простоты можно считать, что $s_0 = \{x_0, y_0\}$.

$u_p(s_0)$ – рассчитанный гравитационный эффект в точках наблюдения s_0 : $s_j = \{x_j, y_j\}$, $j = 1, 2, \dots, K$ от той либо иной комбинации плотностей в ячейках:

$$u_p(s_j) = \sum_{i=1}^N a_{i,j} \sigma_i = A\sigma,$$

$$A_M = \{a_{i,j}\}$$

$$a_{i,j} = \gamma \iiint_{V_i} \frac{(z) dx dy dz}{\left[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z)^2 \right]^{3/2}}.$$

где γ – гравитационная постоянная.

Здесь принято, что система наблюдений – точки s_0 принадлежат горизонтальной плоскости E_0 , характеризующейся условием $z_0 = 0$.

Оператор A_M представляет собой комбинацию проектора $P_M(\sigma(v), X)$ и хорошо известного оператора с ядром Пуассона:

$$A\sigma(v) = \gamma \int_V \frac{\sigma(v) \cdot (z) dx dy dz}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z)^2 \right]^{3/2}}, \quad (4.9)$$

так, что:

$$A_M \sigma = \gamma \int_V \frac{P_M(\sigma(v), X) \cdot (z) dx dy dz}{\left[(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z)^2 \right]^{3/2}}.$$

Решение задачи (4.8), в соответствии с методами теории оптимизации (см. ч. 1) сводится к решению системы уравнений:

$$A_M^* A_M \sigma = A_M^* u_\delta(s_0), \quad (4.10)$$

где A^* – сопряженная (симметричная в силу вещественности) матрица к A . Эта система уравнений в содержательных обозначениях запишется:

$$b_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot a_{kj};$$

$$\sum_j b_{ji} \sigma_j = \sum_j a_{ij} u_\delta(s_j)$$

Записанные соотношения имеют свои *двухмерные аналоги*, получающиеся из (4.9) в предположении независимости распределения плотности от одной из координат, например Y . Область V в этом случае оказывается цилиндрической, вытянутой в направлении оси OY , сечение которой плоскостью XZ есть S . Соотношение (4.9), после интегрирования по y в бесконечных пределах, трансформируется в:

$$A\sigma(s) = \iint_S \frac{(z)\sigma(x, z) dx dz}{(x - x_0)^2 + (z)^2} = \frac{u_z(x_0)}{2\gamma} \quad (4.11)$$

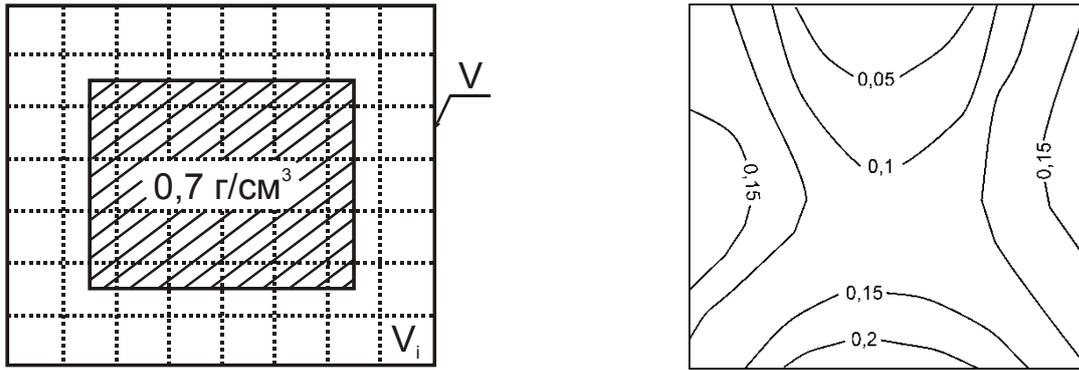
Соответствующим образом трансформируются коэффициенты a_{ij} для расчёта матрицы A_M .

Если в качестве исходного «гравитирующего» объекта («реального» плотностного распределения) выбрать прямоугольник, а область (в двухмерном случае S) и подобласти V_i (в двухмерном случае S_i) расположить так, как изображено на рисунке 4.1-а, то результат решения (4.10), схематично в виде изолиний будет выглядеть так, как это изображено на рисунке 4.1-б.

Ожидания получить локализацию плотностной модели в центре, которая отражала бы «реальный объект» не оправдались. Причина этому состоит в том, что расчёты выполнялись в квадратичной метрике, а экстремальный класс $\mathfrak{R}(A, L_2)$ для которой, совпадает с замыканием множества $\text{Im}(A^*)$, где:

$$A^* \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\varphi(x_0, y_0) z dx_0 dy_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}}, \quad \varphi \in L_2(E_0),$$

Напомним: E_0 – горизонтальная плоскость.



а – исходный геологический объект б – изолинии распределения плотности

Рисунок 4.1 – Различие исходного и полученного объектов.
Невязка 0.00063 мГал

В двумерном случае:

$$A^* \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0) z dx_0}{[(x-x_0)^2 + z^2]}$$

В качестве решения получен элемент из $P_M(\text{Im}(A^*), L_2(V))$. Поскольку, как легко убедиться, $\text{Im}(A^*)$ как в двух, так и трехмерном случае состоит из гармонических в V (в двумерном случае в (S)) функций, а операция проектирования на сетку сводится к вычислению средних значений по ячейке сетки, с присвоением полученного осредненного значения величине искомой плотности в подобласти V_i , то свойства гармонических функций должны проявляться и проявляются, как видно из экспериментов, в получаемом квазирешении. Эти свойства наследуются свойствами гармонических функций и состоят, в частности, в том, что недостигаемыми оказываются все комбинации, которые образуют локальные экстремумы в центре области V . Это следует из принципа максимума модуля для гармонических функций, в соответствии с которым её максимумы и минимумы достигаются только на границе области. Но если сетка такова, что она не имеет внутренних ячеек – однослойная либо двухслойная, то описанный эффект пропадает. В этом случае $P_M(\text{Im}(A^*), L_2(V)) = M$, что следует из известной теоремы о том, что краевые значения гармонических функций образуют плотное подмножество в пространстве непрерывных функций. Достижима оказывается любая комбинация значений плотности в ячейках и описанный эффект скрытой эквивалентности не проявляется.

4.3 Критериальные принципы доопределения задач инверсии

Подход к решению обратных задач геофизики, основанный на аппроксимационных принципах конструирования квазирешений на содержательных классах единственности, сталкивается не только с описанными выше проблемами скрытой эквивалентности. Другой весьма существенной проблемой, характерной для аппроксимационного подхода, является проблема параметризации. Она состоит в необходимости согласованной параметризации выбранной аппроксимационной модели (т. е. модели среды), модели наблюдаемой и соответствующего физического поля. Эта проблема относится к специфике конструирования вычислительных схем. Суть проблемы состоит в том, что система параметров наблюдаемой и система параметров аппроксимационной модели независимы между собой. В силу удачного стечения обстоятельств или применением специальных приёмов обработки они могут оказаться согласованными. Однако изначально — это не связанные между собой параметризации. Параметризация модели наблюдаемой предопределена условиями наблюдения, а параметризация содержательной аппроксимационной модели (конструкции) определена особенностями субъективно выбранной конструкции. На этапе конструирования квазирешения техническими приёмами, например, умножением на сопряженный оператор, достигается согласование размерности входных и искомым параметров. Однако эти приёмы не отражают естественное требование того, чтобы в задаче изначально были согласованы искомые и заданные величины. Это еще одно указание на то, что процесс введения априорной информации об изучаемой модели в виде содержательных аппроксимаций имеет недостатки, связанные с не учетом весьма важных свойств задачи реконструкции модели среды по физически полям. Это обстоятельство проявляется и в том, что при таком подходе возможны ситуации, при которых в сформулированной задаче как теряется информация (не все существенные параметры наблюдаемой активно используются), так и наоборот, делается попытка восстановить параметры при отсутствии соответствующей информации в наблюдаемой. Но самое неприятное состоит в том, что весьма затруднительно до проведения вычислительных процедур по реконструкции параметров модели определить, какая из этих трех ситуаций реализуется: информация теряется; информация согласована; информации недостаточно.

Альтернативным использованию аппроксимационно содержательных моделей среды является путь доопределения исходной задачи не сужением её области возможных значений, а требованием оптимальности искомого решения в своем классе эквивалентности относительно заданного критерия оптимальности. Этот путь означает непосредственное использование экстремальных классов для кон-

струирования решений обратных задач, поскольку критерий оптимальности присутствует в определении экстремального класса. Этот критерий представляет собой некотороеместилище априорной информации об изучаемом распределении параметра, имеет достаточные резервы для выражения разнородной, практически встречающейся о нем информации и исчерпывающе выполняет свою функцию доопределения исходно неопределённой задачи реконструкции изучаемого параметра. Это означает, что вместо задачи (4.2), где основным элементом доопределения задачи нахождения распределённого параметра $\sigma(v)$ по наблюдаемой $u(v_0)$ служило требование принадлежности $\sigma(v)$ заранее известному множеству M , рассматривается аналог задачи (4.6):

$$\begin{aligned} A[\sigma(v)] &= u(v_0); \\ J[\sigma(v)] &\rightarrow \min. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ее можно трактовать двояко. Либо: требуется найти распределение $\sigma(v)$ в классе себе эквивалентных по наблюдаемой $u(v_0)$ минимизирующее функционал качества $J[\sigma(v)]$; либо: требуется найти оптимальное относительно критерия качества $J[\sigma(v)]$ распределение, так чтобы оно дополнительно еще и удовлетворяло наблюдаемой $u(v_0)$. Эти формулировки эквивалентны. В первой подчеркивается главенствующая роль наблюдаемой $u(v_0)$. Во второй – главенствующим служит критерий оптимальности $J[\sigma(v)]$. Мне лично более по духу вторая формулировка.

Рассмотрим пример введения критерия оптимальности как фактора доопределения задачи реконструкции распределения параметра $\sigma(v)$ и, одновременно, проследим основные узловые моменты такого подхода на примере обратных задач гравиметрии, где эквивалентность явно прослеживается. Реконструировать плотностную модель $\sigma(v)$ по заданному полю (например, вертикальной производной гравитационного потенциала $u_z(s_0)$, $s_0 = (x_0; y_0)$) – это значит найти решение задачи²:

$$\gamma \int_V \frac{\sigma(v) \cdot z dx dy dz}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = u_z(s_0) \tag{4.13}$$

² Роль $u(v_0)$ в (4.13) играет $u_z(s_0)$. Использование переменных s_0 и v_0 для обозначения «точек задания» для $u(\cdot)$ эквивалентно. Формально разницы нет никакой. Это дело лишь обозначения. Однако мы предпочитаем использовать s_0 в ситуациях когда «точки наблюдения» заведомо находятся вне области V либо вообще служат координатами не связанными с пространственными координатами для задания параметров модели. Переменная v_0 чаще используется в случаях, когда точки наблюдения связаны с координатной системой задания области V .

Это линейная задача с вполне непрерывным оператором. Линейная и обратная задача, которая, как хорошо известно, не имеет единственного решения (если хотя бы одно решение существует, то их бесконечное множество). Предположим, что относительно изучаемой плотностной модели $\sigma(\nu)$ высказаны предположения представленные в форме нулевого приближения – описываемого функцией $\sigma^*(\nu)$ и кроме того оценена погрешность построения нулевого приближения $\sigma^*(\nu)$ в каждой точке $\nu \in V$. Эта погрешность есть функция пространственных координат: $\tau(\nu)$. Тогда мерой проверки пробного решения на истинность может служить оценка его правдоподобия. Из двух распределений $\sigma_1(\nu)$, $\sigma_2(\nu)$, каждое из которых удовлетворяют интерпретируемому полю $u(s_0)$, т. е. уравнению (4.13) предпочтительнее то, которое имеет меньшую меру расхождения с принятым нулевым приближением. В качестве меры расхождения можно, например, принять величину:

$$J(\sigma(\nu)) = \int_V \left[\frac{\sigma(\nu) - \sigma^*(\nu)}{\tau(\nu)} \right]^2 d\nu. \quad (4.14)$$

Можно в качестве меры уклонения принять:

$$J(\sigma(\nu)) = \max_{\nu \in V} \left| \frac{\sigma(\nu) - \sigma^*(\nu)}{\tau(\nu)} \right|.$$

Ее можно обобщить и так:

$$J(\sigma(\nu)) = \left\| \frac{\sigma(\nu) - \sigma^*(\nu)}{\tau(\nu)} \right\|_X.$$

Однако остановимся пока на (4.14). Простейшая замена переменных $\Delta\sigma(\nu) = \sigma(\nu) - \sigma^*(\nu)$ приводит такое правило выбора к необходимости решения задачи:

$$\int_V \frac{\Delta\sigma(\nu) \cdot z dx dy dz}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = \frac{\Delta u_z(s_0)}{\gamma},$$

$$\left\| \frac{\Delta\sigma(\nu)}{\tau(\nu)} \right\|_{L_2(V)} = \int_V \left[\frac{\sigma(\nu) - \sigma^*(\nu)}{\tau(\nu)} \right]^2 d\nu \rightarrow \min. \quad (4.15)$$

$$\Delta u_z(s_0) = u_z(s_0) - \int_V \frac{\sigma^*(v) \cdot z dx dy dz}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}}.$$

Но эта задача в точности есть задача построения нормального решения уравнения (4.13) в пространстве $L_2(V)$ с весом $\tau^{-1}(v) = \frac{1}{\tau(v)}$. Если есть явное описание

экстремального класса $\mathfrak{R}(A, X)$ для оператора A определённого соотношением (4.13) и пространства X образованного из $L_2(V)$ с весом $\tau^{-1}(v)$ $X = \{L_2(V), \tau^{-1}(v)\}$, то всё решение проблемы реконструкции плотностного распределения сводится к выделению (единственного) элемента из этого экстремального класса $(\mathfrak{R}(A, L_2(V)), \tau^{-1}(v))$ по признаку, чтобы поле от выделенного элемента соответствовало заданному. Это во-первых, можно сделать и, во-вторых, сделать однозначно. В силу линейности оператора прямой задачи (4.13) и квадратичности нормы в $X = \{L_2(V), \tau^{-1}(v)\}$, $\mathfrak{R}(A, X)$ есть линейное подпространство в $L_2(V)$ и проблема выделения этого единственного элемента – чисто вычислительная.

Рассмотрим теперь для той же задачи её другую модификацию, в которой важно, во-первых, проявление эффектов нелинейности, а во-вторых, многокомпонентности искомого элемента.

Пусть требуется реконструировать структурную плотностную модель среды, для которой известно число входящих в неё структурных элементов N и плотности этих пластов. Границ входящих в эту модель $N+1$ и они описываются с помощью функции $z = f_i(x, y)$, характеризующих глубину её залегания z в зависимости от координат $\{x, y\}$ на поверхности. Их число на единицу больше, чем число пластов, которые они ограничивают, и сами функции предполагаются однозначными и гладкими. Это не совсем удобно, учитывая возможные разрывные нарушения и структуры типа надвигов, но эти последние ситуации должны учитываться специальными приёмами, входящими в арсенал средств системного анализа, например, введением некоторых эффективных дополнительных объектов. Для простоты ограничимся рассмотрением двухмерного случая. Уравнения пространственно-зависимых параметров для двухмерного случая трансформируются в параметры, зависящие от двух координат $s = \{x, z\}$. Координаты точек наблюдения поля обозначаем $s_0 = \{x_0, z_0\}$. Чаще всего $z_0 = 0$ и $s_0 = x_0$. Область V представляет собой цилиндрическую область с сечением S каждой из вертикальной плоскостью $y = const$. Плотность пластов, ограниченных границами задана и для пласта с номером i , $i = 1, 2, \dots, N$ равна σ_i и может быть переменной по горизонтали $\sigma_i = \sigma_i(s)$. Вертикальное изменение плотности в структурной модели не допускается.

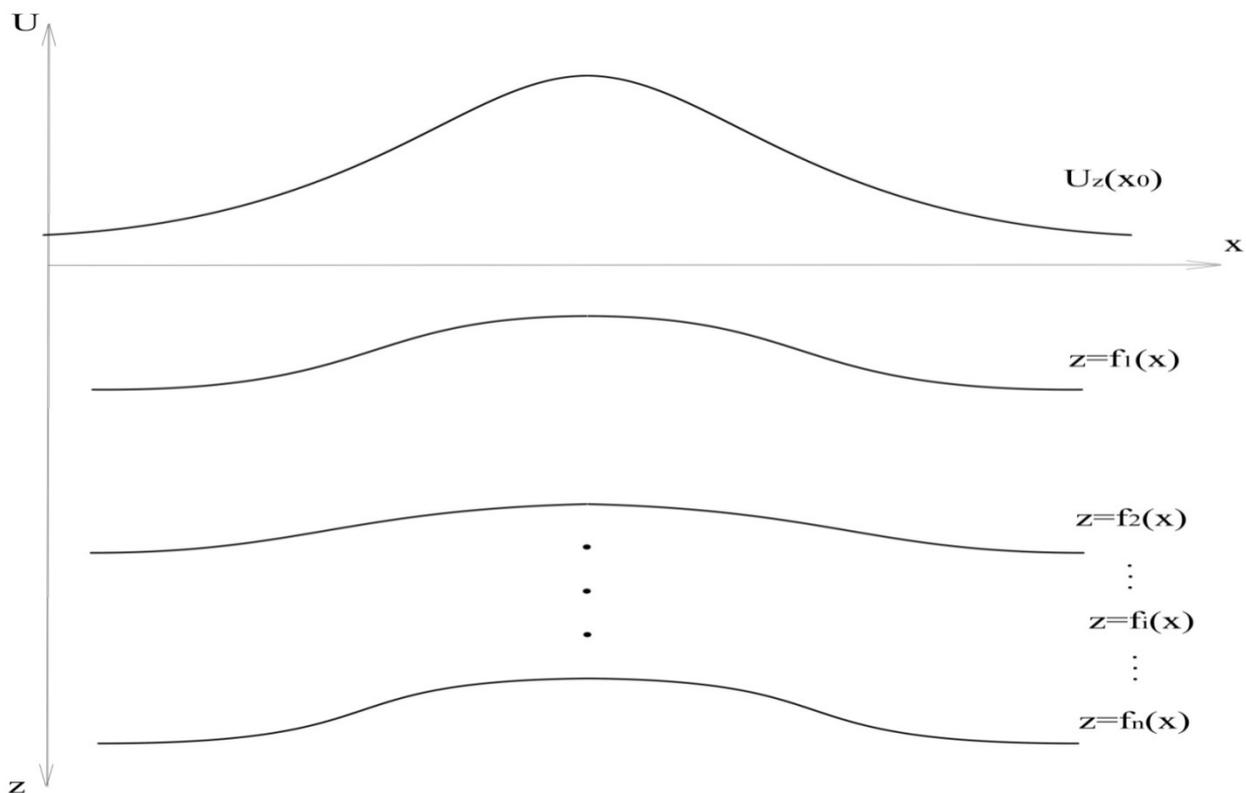


Рисунок 4.2 – Структурная модель среды

Для того чтобы вывести уравнение связи между структурными элементами – $\mathbf{f}(s) = \{f_i(s), i = 0 \div N\}$, $\boldsymbol{\sigma}(s) = \{\sigma_i(s), i = 0 \div N\}$ и «наблюдаемой» вертикальной производной гравитационного потенциала $u_z(x_0)$ воспользуемся исходным двумерным аналогом уравнения этой связи для распределения плотности $\sigma(x, z)$ в области S нижнего полупространства ($z > 0$) (формула (4.11)):

$$A\sigma(s) = \iint_S \frac{(z)\sigma(x, z)dxdz}{(x-x_0)^2 + (z)^2} = \frac{u_z(x_0)}{2\gamma}.$$

Подставляя пределы интегрирования, в соответствии с геометрией введенной модели среды получим:

$$u_z(x_0) = \sum_{i=1}^N 2\gamma \int_a^b \int_{f_{i-1}(x)}^{f_i(x)} \frac{z \cdot \sigma_i(x)dxdz}{(x-x_0)^2 + (z)^2},$$

где $[a, b]$ – профиль, вне которого границы выходят на асимптоты, а влияние этих зон (зон вне профиля $[a, b]$) будет учтено отдельным образом и на этапе конструирования конкретных алгоритмов.

Интегрируя по z и перегруппируя суммирование получаем:

$$\frac{u_z(x_0)}{\gamma} = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i(x) \ln \left[(x-x_0)^2 + (f_i(x))^2 \right] dx,$$

$$\Delta\sigma_i(x) = \sigma_i(x) - \sigma_{i+1}(x), \sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0.$$

Ее обобщением служит рассмотрение поля заданного на произвольном рельефе и имеет вид:

$$A(\mathbf{f}(x), \Psi) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[(x-x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \Delta u_z(x_j, h_j); \quad (4.16)$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \quad h_j = \psi(x_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

$\psi = \{\psi(x_j)\}$ – высоты рельефа в точках которого $\{x_j, h_j = \psi(x_j)\}$ задано поле. $s_j = \{x_j, h_j\}$.

$\Delta\sigma_i(x)$ – перепад плотности на контакте с номером i . Запишем соотношение (4.16) в операторном виде:

$$A(\mathbf{f}(x)) = u(s_0). \quad (4.17)$$

В данном случае s_0 символизирует набор точек, в которых задано поле. В частности при наблюдениях на горизонтальной линии нулевого уровня $z_0 = 0$, $s_0 = x_0$, либо $s_0 = s_j$, x_j , $j = 1 \div K$ – набор изолированных точек располагающихся на этой линии. С точки зрения информативности задания гармонической функции, к числу которых относятся гравитационные поля в областях не занятых массами, идеализированным оказывается случай когда эта функция определена на всей линии вдоль оси OX_0 , так как по значениям $u_z(x_0, 0)$ определено значение $u_z(x_0, 0)$ для всех $z_0 < 0$ – выше горизонтальной нулевой линии. Оно может быть рассчитано с помощью интеграла Пуассона. Если же пытаться задать эти значения иными величинами, сверх того что определено в $u_z(x_0, 0)$, то рассчитанные и заданные значения могут оказаться противоречивыми. Противоречия возникают из-за разного рода ошибок, сущность которых и влияние на результат в настоящий момент рассматривать не будем. Это отдельная тема. Но даже в этом идеальном случае, при котором исходной информации более всего – поле задано всюду от $-\infty$ до $+\infty$ и без каких-либо ошибок, можно увидеть, что искомым величин – границ $f_i(x)$, $i = 1 \div N$ явно больше, чем входных данных – $u_z(x_0, 0)$. Перепады плотности $\Delta\sigma_i(v)$ играют роль известных параметров. Если и они не известны – то дело совсем плохо – задача столь же неопределенна, как и исходное уравнение (4.13) для реконструкции распределения плотности $\sigma(x, z)$ по наблюдаемому полю $u_z(x_0)$.

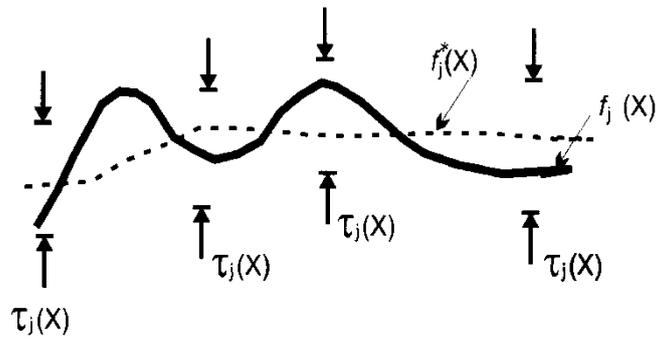


Рисунок 4.3 – Компоненты информации о границе

Вернемся к уравнению $A(f(x)) = u(s)$.

Реконструировать $N + 1$ функцию $f_i(x)$, $i = 0 \div N$ по «известной» одной $\Delta u_z(x_0)$ – задача явно недоопределённая. Рассмотрим, какого сорта информация об изучаемой модели среды, помимо уже введенной – задано число границ и значения плотности между ними, может быть в распоряжении интерпретатора. Прежде всего, обратимся к источнику этой информации. Им, как правило, служат данные бурения, других геофизических методов и некоторые общие соображения о генезисе и эволюции изучаемого участка. Бурением вскрыты горизонты и имеется достоверная информация о глубинах залегания границ в этих точках. Проведенная сейсморазведка в других участках характеризовалась различным качеством материала и с разной степенью достоверности на различных участках позволила определить глубину залегания плотностных границ. В зонах с хорошим качеством материала (здесь влияет много факторов) достоверность построения выше, с плохим – ниже. В промежуточных между бурением и другими геофизическими результатами, которые лишь корреляционно, косвенно связаны с изучаемыми плотностными границами (которые сами являются определённой идеализацией) использована интерполяция, на основе знания о характерных углах залегания границ, а эта информация почерпнута из геолого-тектонического анализа. Как можно объединить эту разнородную, разноплановую информацию об изучаемой модели среды? Таким объединяющим началом может служить ранжированность. Возможно, считать, что комплекс внешней, априорной информации о глубине залегания границы с номером i в точке x в принципе позволяет ранжировать возможные глубины залегания границ – указать систему предпочтений – на каких глубинах более, а на каких менее вероятно нахождение этой границы. Подчеркнем, что речь идет о выделенной точке профиля и глубинах залегания конкретной границы в этой точке (рис. 2). Таким образом, можно предположить, что для каждой точки профиля возможные глубины залегания границ образуют вполне упорядоченное множество: для каждой двух произвольно взятых глубин z_1 и z_2 можно указать какая из них более

предпочтительна или они имеют одинаковый ранг (рейтинг) – в том числе ранг недопустимой глубины (например, на дневной поверхности или выше нее). Такой ранжировке может быть поставлено в соответствие распределение вероятности или функции предпочтения (функции принадлежности в теории нечетких множеств) $P_i(x, z)$ и предпочтение z_1 перед z_2 состоит в том, что $P_i(x, z_1) > P_i(x, z_2)$. Как более привычную будем использовать вероятностную фразеологию, которая объективно не имеет выраженных предпочтений перед терминологией нечетких множеств и функций принадлежности или предпочтения. Обозначим $P_i(x, z(x)) = P(x, f_i(x))$ – это предпочтение для выделенной точки x встретить границу с номером i в точке x залегающую на глубине $z = f_i(x)$. Пока не следует утруждать себя выработкой техники ранжирования и конструированием функций предпочтения. Это будет выполнено отдельно. В настоящем разделе речь идет об иллюстрации принципиальных позиций. Важно то, что такая функция предпочтений в виде вероятностей или функций принадлежности может быть сконструирована как исчерпывающая характеристика всего комплекса данных о возможной глубине залегания изучаемых границы в тех либо иных точках. Для того чтобы перейти от меры достоверности в точке профиля к мере достоверности границы целиком, следует проинтегрировать вероятностный закон $P_i(x, z(x))$ по x . Результат конечно не следует рассматривать как вероятность в строгом понимании этого термина. Это – величина, оценивающая меру предпочтения того или иного варианта отрисованной границы. Но оперировать с этой величиной удобно имея в виду вероятностную трактовку. Таким образом, для произвольного «претендента» на функцию $\xi(x)$, описывающую положение границы с номером i можно вычислить интегрированную достоверность, предпочтительность, «вероятность», ранг этого претендента:

$$P_i(\xi) = \int_a^b P_i(x, \xi(x)) dx.$$

Однако реально имеются $N + 1$ граница и, следовательно, вероятностный закон (так будем трактовать предпочтения), выражающий информацию о глубинах залегания в данной точке профиля должен включать данные о всех $N + 1$ границах. Это значит, что он должен быть многомерным. Конкретно – $N + 1$ мерным. Следовательно, существует функция $P(x, z)$, $z = \{z_0, z_1, \dots, z_N\}$, которая для каждой точки x профиля $[a, b]$ и $N + 1$ значений $z_i = \xi_i(x)$ оценивает предпочтительность того, что каждая из $N + 1$ границ залегают в этой точке x на своих глубинах $z_i = \xi_i(x)$. Граница с номером 0 залегает на глубине z_0 , граница с номером 1 на глубине z_1 , граница с номером i на глубине z_i . Для того, чтобы перейти от предпочтительности в точке профиля к мере предпочтительности системы границ целиком, следует проинтегрировать закон предпочтений $P(x, z)$ по x . То,

что получится в результате, называется функцией правдоподобия. Этот термин взят из теории вероятности для того чтобы не вводить что то иное, когда можно обойтись уже существующим. Таким образом, для произвольного «претендента» на систему из $N + 1$ границ заданного в виде функции $\xi(x) = \{\xi_i(x), i = 0, \dots, N\}$, описывающей положение всех границ, можно вычислить интегрированное – предпочтение, ранг этого претендента – его правдоподобие:

$$P(\xi) = \int_a^b P(x, \xi(x)) dx. \quad (4.18)$$

Задачу реконструкции структурной плотностной модели (4.16) можно, имея оценку (4.18), доопределить требованием:

$$P(\xi) = \int_a^b P(x, \xi(x)) dx \rightarrow \max.$$

Это означает, что среди всех эквивалентных по гравитационному эффекту (с учетом условий задания поля) систем границ следует выбрать ту систему, которая наиболее предпочтительна, с точки зрения имеющейся априорной информации, выраженной в виде принятых предпочтений, рангов, принадлежностей или вероятностей. Этим требованием обеспечивается единственность реконструкции модели. Мера правдоподобия (4.18) служит своего рода вместителем априорной разнородной информации. Таким образом, приходим к задаче:

$$A(\mathbf{f}(x), \Psi) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta \sigma_i \ln \left[(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \Delta u_z(x_j, h_j);$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \quad h_j = \psi(x_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.19)$$

$$\int_a^b P(x, \mathbf{f}(x)) dx \rightarrow \max.$$

Функционал $\int_a^b P(x, \mathbf{f}(x)) dx$ в (4.19) называется критерием оптимальности и постановка (4.19) соответствует нахождению того единственного элемента из класса эквивалентных по гравитационному полю, который оптимален относительно введенного критерия оптимальности.

Постановку задачи (4.19) можно пояснить и несколько по-иному. Система уравнений (например, случай горизонтальной поверхности $h_j = 0$)

$$A(\mathbf{f}(x)) = \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[(x - x_j)^2 + (f_i(x))^2 \right] dx = \frac{\Delta u_z(x_j)}{\gamma}$$

не может быть однозначно решена относительно искомым границ. Поэтому вместо попыток решить эту задачу переходим к другой задаче – задаче минимизации критерия. Что же касается уравнений в (4.19), то они рассматриваются как дополнительные условия к этой задаче минимизации.

Для дальнейшей иллюстрации примем для простоты, что глубины залегания границ независимы между собой. Это очень жесткое на самом деле ограничение. Но далее оно будет снято. В этом случае имеются (могут быть сконструированы) $N + 1$ функции $P_i(x, z)$, $i = 0, 1, \dots, N$ и $P(x, \mathbf{f}(x)) = \prod_{i=0}^N P_i(x, f_i(x))$. Еще

одно упрощение состоит в том, что функция предпочтения по аналогии с нормальным законом имеет вид:

$$P_i(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]}$$

Здесь $f_i^*(x)$ – оценка среднего значения, $\tau_i(x)$ оценка стандарта – среднеквадратичного отклонения. Тогда:

$$P(x, \mathbf{f}(x)) = \prod_{i=0}^N P_i(x, f_i(x)) = \prod_{i=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]} \quad (4.20)$$

Величины $f_i^*(x)$ в трактовке законов распределений вероятностей имеют смысл поточечных оценок среднего для возможных глубин залегания границы. Другое название – нулевое приближение к глубине залегания. $\tau_i(x)$ априорная оценка среднеквадратичной погрешности построения нулевого приближения. Нетрудно понять, что максимизация выражения:

$$\int_a^b \prod_{i=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau_i(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right]} dx$$

эквивалентна минимизации функционала:

$$\sum_{i=0}^N \int_a^b \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx \rightarrow \min, \quad (4.21)$$

и задача (4.19) приобретает более частный вид:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{f}(x), \Psi) &= \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx = \frac{\Delta u_z(x_j, h_j)}{\gamma}; \\ \mathbf{f}(x) &= \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \\ h_j &= \psi(x_j), j = 1, \dots, M.. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\sum_{i=0}^N \int_a^b \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx \rightarrow \min.$$

Это задача на условный минимум, в которой условиями служат M уравнений, обеспечивающие требование того, чтобы все сравниваемые по критерию оптимальности (4.21) границы принадлежали одному классу эквивалентности по гравитационному полю с учетом параметризации наблюдаемых M его компонент $\Delta u_z(x_j)$. Для её решения воспользуемся принципом Лагранжа, в соответствии с которым должны найтись M чисел λ_j , таких, что экстремаль задачи на условный минимум (5.24) совпадает с экстремалью на безусловный минимум для задачи:

$$\sum_{i=0}^N \int_a^b \left[\frac{(f_i(x) - f_i^*(x))^2}{\tau_i^2(x)} \right] dx + \sum_{j=0}^M \lambda_j \cdot \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \ln \left[(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right] dx \rightarrow \min. \quad (4.23)$$

Применимость принципа Лагранжа требует, чтобы оператор $A(\mathbf{f}(x), \Psi)$ в (4.22) был непрерывно дифференцируем, а его производная (Фреше) регулярна в окрестности точки экстремума – решения $\mathbf{f}(x) = \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}$. Производная этого оператора имеет вид:

$$\begin{aligned} A'(\mathbf{f}(x), \Psi)\zeta(x) &= \sum_{i=0}^N \int_a^b \Delta\sigma_i \frac{(f_i(x)) \cdot \zeta_i(x)}{\left[(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right]} dx = \frac{\Delta u_z(x_j, h_j)}{2\gamma}; \\ \mathbf{f}(x) &= \{f_i(x), i = 0, \dots, N\}; \zeta(x) = \{\zeta_i(x), i = 0, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Она представляет собой линейный непрерывный оператор из $L_2^{N+1}(a, b)$ в R^M и отображает функцию $\zeta(x) = \{\zeta_i(x), i = 0, \dots, N\}$ в набор значений имеющий параметризацию наблюдаемой. Его непрерывная дифференцируемость очевидна,

а что касается регулярности, то это более тонкое свойство. Будем предполагать его выполненным. Варьируя (4.23) в предположении его экстремума получим уравнение Эйлера как необходимое условие минимума:

$$f_i(x) = f_i^*(x) + \Delta\sigma_i \tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot \frac{(f_i(x) - h_j)}{\left[(x - x_j)^2 + (f_i(x) - h_j)^2 \right]}; \quad (4.25)$$

$$i = 0, \dots, N.$$

Это система ровно из такого числа уравнений, сколько искомых границ. Они доопределяют уравнение в (4.22) и служат ничем иным, как параметризацией искомых границ, согласованной с параметризацией наблюдаемой. Параметров $\{\lambda_j\} = \lambda$ также ровно столько же, сколько задано компонент наблюдаемой, и они определены в тех же точках, в которых эта наблюдаемая задана. Задача нахождения границ оказывается полностью определённой. Система из M уравнений в (4.25) служит для того, чтобы определить параметры Лагранжа, по заданным компонентам поля $\frac{\Delta u_z(x_j, h_j)}{\gamma}$, которых ровно столько же, сколько и чисел λ_j .

После этого все $N + 1$ границы находятся из (4.25). Таким образом, введение критерия оптимальности доопределяет исходно неопределённую задачу. Доопределение обеспечивает одновременно конструктивное формирование класса единственности за счёт параметризации, согласованной с наблюдаемой. Возникающая согласованная параметризация выражает оптимальный принцип отбора из класса эквивалентности, основанный на выражении априорной информации о среде. Меняя нулевые приближения и оценки среднеквадратичной погрешности в критерии отбора (4.21) можно «настроить» класс единственности (4.25) на тот либо иной требуемый элемент. Эти параметры – $f^*(x) = \{f_i^*(x), i = 0, \dots, N\}$ и $\tau(x) = \{\tau_i(x), i = 0, \dots, N\}$ служат «рулями», позволяющими осуществлять «навигацию по классам эквивалентности» до получения наилучшего результата.

Теперь, после того, как формирование класса единственности завершено следует найти решение уравнения в (4.24) на множестве, имеющем представление (4.25). Делать это необходимо с учетом приближенности исходных данных и последняя задача – традиционна для методов вычислительной математики. В частности можно воспользоваться приёмами итерационной регуляризации, сконструировав следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned}
f_i^{n+1}(x) &= f_i^n(x) + \alpha_n \cdot \Delta \sigma_i \tau_i^2(x) \cdot \sum_{j=1}^M \varphi_j^n \frac{(f_i^n(x))}{\left[(x-x_j)^2 + (f_i^n(x))^2 \right]}; \\
f_i^0(x) &= f_i^*(x) \\
i &= 0, \dots, N. \\
\varphi_j^n &= A(\mathbf{f}^n(x)) - \frac{\Delta u_z(x_j)}{\gamma}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Здесь α_n подбираемый параметр релаксации, обеспечивающий сходимость процесса.

4.4 Классы критериев

Подведем некоторые итоги.

При моделировании сред в условиях неопределённости соответствующую задачу инверсии для уравнения

$$A[\sigma(v)] = u(v_0)$$

следует доопределять критерием оптимальности $J[\sigma(v)] \rightarrow \min$, обеспечивающем отбор единственного решения из класса эквивалентности $\Omega_u(A, X)$. Если этого не делать явно, управляя процессом нахождения решения, это будет сделано неявно самой вычислительной схемой, в результате чего будут получены специфические (M, X) -нормальные решения не отражающие реальные свойства изучаемых объектов. При этом распознать эти свойства в условиях жестких аппроксимационных конструкций достаточно сложно. Это понимание позволяет конструировать критерии оптимальности таким образом, чтобы управлять с их помощью свойствами получаемых решений. При этом важным оказываются не те аргументы, которые использованы при конструировании критериев оптимальности априори, а то к каким свойствам в решении приводит то либо иное их введение. При формировании критериев оптимальности следует руководствоваться двумя принципами: конструктивность и содержательность. Конструктивность критерия оптимальности $J[\sigma(v)]$ означает что задача:

$$\begin{aligned}
A[\sigma(v)] &= u(v_0), \\
J[\sigma(v)] &\rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

должна конструктивно решаться и это выполнено, например, тогда, когда совокупность решений этой задачи при $u(v_0)$, пробегающем все $\text{Im}(A[\])$ имеет явное аналитическое описание. Это множество, по аналогии с экстремальным клас-

сом, $\mathfrak{R}(A, X)$, следует назвать экстремальный классом для критерия оптимальности $\mathcal{J}[\sigma(v)]$. Он совпадает с множеством решений уравнения Эйлера для вариационной задачи (4.27) при $u(v_0)$ пробегающем все $\text{Im}A[\sigma(v)]$.

Содержательность означает, что в нем учтено влияние эффектов, связанных с характерными особенностями нормальных решений.

4.4.1 Интегральные квадратичные критерии оптимальности

Пользуясь рассуждениями, приведшими к формированию критерия оптимальности (4.21), легко построить его аналог:

$$\int_V \frac{[\sigma(v) - \sigma^*(v)]^2}{\tau^2(v)} dv \rightarrow \min. \quad (4.28)$$

Подстановка $\sigma(v) - \sigma^*(v) = \Delta\sigma(v)$ приводит к:

$$\int_V \frac{[\Delta\sigma(v)]^2}{\tau^2(v)} dv \rightarrow \min,$$

которая отличается от (4.28) только обозначениями для искомой функции.

Функцию – параметр $\tau^2(v)$, входящую в конструкцию критерия оптимальности (4.28), основываясь на статистических позициях, можно интерпретировать как величину, связанную с априорной оценкой достоверности (среднеквадратичной погрешности построения) нулевого приближения $\sigma^*(v)$. Заметим, что величина (4.28) есть квадрат нормы $\sigma(v) - \sigma^*(v)$ в пространстве $L_2(V)$ с весом:

$$\tau^{-1}(V): X = \{L_2(V), \tau^{-1}(v)\}$$

Обобщая этот случай, рассмотрим в качестве критериев оптимальности величину:

$$\mathcal{J}[\sigma(v)] = \|F \sigma(v)\|_X. \quad (4.29)$$

Здесь F линейный замкнутый оператор, действующий из пространства X в себя. Более обще можно считать, что $F: X \rightarrow Z$, где Z некоторое другое банахово пространство. Однако практической значимости такое обобщение не имеет. Экстремальный класс, соответствующий такому выбору функционала будем обозначать $\mathfrak{R}(A, X, F)$ и в частном случае, когда $X = L_2(V)$ это будет $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$.

Это первый, и наиболее простой класс критериев оптимальности, порождающий экстремальные классы $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$ чаще всего имеющие простое аналитическое описание. Так, например, для оператора, отображающего распределение

плотности $\sigma(v)$ в вертикальную производную гравитационного потенциала, определённую на дневной поверхности в точках с координатами $s_0 = \{x_0, y_0\}$:

$$A[\sigma(v)] = \int_V \frac{\sigma(v) \cdot z dx dy dz}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} = \frac{u_z(s_0)}{\gamma}, \quad (4.30)$$

плотное в $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$ подмножество $\mathfrak{N}(A, L_2, F)$ имеет вид:

$$\sigma(v) = F^{-1} F^{*-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_0, y_0) \cdot z dx_0 dy_0}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}}, \quad (4.31)$$

где F^* сопряженный к F оператор и, кроме того F , не имеет ядра (ненулевых распределений, отображающихся в ноль) общего с $A[\sigma(v)]$. Например, это выполнено, если $\text{Ker } F = \{0\}$. Это означает, что на множестве $\mathfrak{N}(A, L_2, F)$ уравнение (4.30) однозначно разрешимо и разрешимо с любой наперед заданной точностью. Это – почти идеальный экстремальный класс. Важно подчеркнуть попутно полученное свойство – параметризация искомой функции $\sigma(v)$ точно такая же, как и параметризация заданного поля $u_z(s_0)$. Конструктивное аналитическое описание плотного в $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$ подмножества $\mathfrak{N}(A, L_2, F)$ получено. Так обстоит дело, по сути, с любыми явно записанными интегральными операторами $A[\sigma(v)]$, что делает множество квадратичных интегральных критериев конструктивным инструментом отбора решения в задачах с в условиях эквивалентности.

Обобщением результата (4.31), на случай произвольного линейного ограниченного интегрального оператора, действующего из $X = L_2(V)$ в $Y = L_2(E_0)$ и не имеющего общих ненулевых элементов из ядра с ядром оператор F , выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(A, L_2, F) &= \left\{ \sigma(v) = F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi(s_0) \right\}, \\ \varphi(s_0) &\in DA^* \end{aligned} \quad (4.32)$$

Практически очевидно, что для любого элемента $\sigma(v)$ из класса эквивалентности

$$\Omega_u(A, X) = \left\{ \sigma(v) \in X : A[\sigma(v)] = u(v_0) \right\},$$

можно подобрать оператор F так, чтобы этот элемент входил в состав класса $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$ и, следовательно, мог быть получен в качестве решения задачи:

$$\begin{aligned}
A[\sigma(v)] &= u(s_0); \\
\sigma(v) &= F^{-1}F^{*-1}A^*\varphi(s_0); \\
\varphi(s_0) &\in DA^*.
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

Однако это может оказаться достаточно неудобным и потребовать некоторых изощренных методических приёмов. Действительно, в случае, когда $F = 1$, $X = L_2(V)$ критерий (4.29) можно трактовать, как требование найти наиболее близкое к нулю в смысле средних квадратов решение. Естественным служит ожидание некоторой равномерной близости к нулю результата во всех точках области V . Однако результатом неожиданно, оказывается гармоническая функция – функция имеющая максимальные по модулю значения на границе области и выполаживающаяся, монотонно убывающая от максимума к другому краю области. Всё так, как это было приведено выше, при вычислительных экспериментах, и заложена в свойствах элементов из экстремальных классов, следующих из их представления (4.31). Именно это распределение даёт меньшие значения суммарного уклонения от нуля, чем равномерно «размазанное» по всей области V решение. Возникает не соответствие результата ожиданиям и это затрудняет непосредственное, прямое практическое использование подобных критериев. В этой связи желательно введение и иных типов критерия оптимальности, обеспечивающего отбор решений из множества эквивалентных, выражающих различную информацию об искомом решении.

4.4.2 Корреляционные критерии оптимальности

Корреляционные критерии оптимальности выражают либо факт зависимости изучаемой модели распределённого параметра $\sigma(v)$ от некоторого другого параметра, который обозначим $\zeta(v)$, либо взаимозависимость различных компонент модели для $\sigma(v)$. Типичным примером первой ситуации служит использование принципа наилучшей связи между искомой моделью среды (например, плотностной) и заданной $\zeta(v)$ – например, скоростной, при условии, что результирующая плотностная модель $\sigma(v)$ удовлетворяет требуемому гравитационному полю $u(v_0)$. Задача максимизации коэффициента корреляции $r[\sigma(v); \zeta(v)]$, по определению понятия корреляции, означает нахождение наилучшей линейной связи $R:\sigma(v)=R[\zeta(v)]$ либо $R^{-1}:\xi(v)=R^{-1}[\sigma(v)]$. Сама эта связь ищется по принципу наименьших квадратов между искомой моделью $\sigma(v)$, которая, дополнительно должна удовлетворять уравнению $A[\sigma(v)] = u(v_0)$ и заданной $\zeta(v)$. Но последнее означает, что искомое распределение $\sigma(v)$ должно быть, при найденной линейной связи $R:\sigma = R[\zeta]$ между значениями параметров σ и ξ решением задачи:

$$A[\sigma(v)] = u(v_0);$$

$$\|\sigma(v) - R[\xi(v)]\|_{L_2(V)}^2 \rightarrow \min.$$

Последняя задача, после элементарной замены переменных $\Delta\sigma(v) = \sigma(v) - R[\xi(v)]$ приводит к:

$$\begin{aligned} A[\Delta\sigma(v)] &= \Delta u(v_0); \\ \Delta u(v_0) - u(v_0) - A[R[\xi(v)]]; \end{aligned}$$

$$\|\Delta\sigma(v)\|_{L_2(V)}^2 \rightarrow \min.$$

Эта задача с точностью до обозначений совпадает с уже рассмотренной ранее:

$$\begin{aligned} A[\sigma(v)] &= u(v_0); \\ \|\sigma(v)\|_{L_2(V)}^2 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Ее решение есть элемент экстремального класса $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$, что приводит к условию $\Delta\sigma(v) \in \mathfrak{R}(A, L_2, F)$.

Это означает, что результат будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= R[\xi(v)] + A^*\varphi(s_0); \\ \varphi(s_0) &\in DA^*. \end{aligned}$$

Таким образом, результатом служит исходная модель для распределённого параметра $\xi(v)$, подвергнутая линейному преобразованию типа $\sigma = \alpha\xi + \beta$, где α, β – константы, к которым добавлен элемент из $\text{Im}A^* = \mathfrak{R}(A, L_2, I) \subseteq \mathfrak{R}(A, L_2, I)$. Таким образом, с содержательной точки зрения этот вид критерия приводит к частному случаю решений интегральных квадратичных критериев, без возможности регулирования свойств решения за счёт принципов оптимальности (отсутствие оператора F).

Рассмотрим другой случай – ситуацию, когда искомый объект многокомпонентен и его компоненты взаимосвязаны между собой. Это, например, случай уже рассмотренных границ, разделяющих пласты заданной плотности (рис. 5.5) так, что для каждой точки и каждой границы указана мера зависимости глубины залегания этой границы от глубины залегания других границ в той же точке. Этот пример простой заменой терминов обобщается на случай компонент любой

природы, имеет достаточно наглядный характер, поэтому на нем и остановимся. В отличие от рассмотренного ранее случая, когда критерий оптимальности представлял собой сумму критериев – компонент, теперь рассмотрим случай взаимосвязей между этими компонентами.

Также как и ранее, для всех точек и всех границ $z = f_i(x, y)$, $i = 0, \dots, N$ считаем заданным нулевое приближение $z = f_i^*(x, y)$, $i = 0, \dots, N$ и ковариационную матрицу для отклонений от нулевых приближений границ с номерами i и j :

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= \{ \lambda_{ij}(x, y) \} = \text{cov} \left((f_i(x, y) - f_i^*(x, y)); (f_j(x, y) - f_j^*(x, y)) \right) = \\ &= \mathbf{M} \left[(f_i(x, y) - f_i^*(x, y)) \cdot (f_j(x, y) - f_j^*(x, y)) \right] \end{aligned}$$

Элементы этой матрицы характеризуют меру зависимости между i и j объектами (границами) в точке (x, y) . Если эти объекты не зависимы, то $\lambda_{ij}(x, y) = 0$ при $i \neq j$. Диагональные элементы суть дисперсии (оценки дисперсии) отклонения нулевого приближения от искомой границы – мера недоверности знания нулевого приближения. Тогда совместная плотность вероятности для этих величин, можно охарактеризовать нормальным законом:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\lambda_{ij}|(x, y)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \Lambda_{ij}(x, y) (f_i(x, y) - f_i^*(x, y)) (f_j(x, y) - f_j^*(x, y)) \right], \quad (4.34)$$

где $\Lambda(x, y) = \{ \Lambda_{ij}(x, y) \}$ – матрица обратная к $\lambda(x, y)$.

Величину (4.34) после интегрирования по всей дневной поверхности – проекции V на плоскость $z = 0$, которую (проекцию) обозначим S можно рассматривать как функцию правдоподобия одновременного появления системы границ $z = f(x, y) = \{ f_i(x, y), i = 0, \dots, N \}$ с точки зрения данных $z = f^*(x, y) = \{ f_i^*(x, y), i = 0, \dots, N \}$; $\lambda(x, y)$ и ставить задачу её максимизации при условии, что границы должны соответствовать заданному уравнению $A[f] = u(s_0)$. Переменная точки задания поля обозначена s_0 . Эквивалентной задачей оказывается задача условной минимизации квадратичной формы:

$$\iint_S \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \Lambda_{ij} (f_i(x, y) - f_i^*(x, y)) (f_j(x, y) - f_j^*(x, y)) \right] dx dy. \quad (4.35)$$

Учитывая свойства ковариационной матрицы – её положительность и самосопряженность – легко прийти к выводу о существовании положительного квадратного корня $\Lambda^{1/2}$ от матрицы $\Lambda = \{ \Lambda_{ij} \}$, с помощью которой выражение (4.35) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\iint_S |\Lambda^{1/2} \Delta \mathbf{f}(x, y)|^2 dx dy,$$

где: $\Delta \mathbf{f}(x, y) = \{f_i(x, y) - f_i^*(x, y), i = 0, 1, 2, \dots, N\}$.

В соответствии с принятыми обозначениями, задаче

$$A[\mathbf{f}] = u(s_0), \quad (4.36)$$

$$\iint_S |\Lambda^{1/2} \Delta \mathbf{f}(x, y)|^2 dx dy \rightarrow \min, \quad (4.37)$$

Соответствует экстремальный класс $\mathfrak{R}(A, L_2^{N+1}, \Lambda^{1/2})$.

Оператор $A[\mathbf{f}]$ рассматривается действующим из пространства $L_2^{N+1}(S)$ в $L_2(E_0)$, где E_0 – горизонтальная плоскость $z = 0$. Плотное подмножество $\mathfrak{S}(A, L_2^{N+1}, \Lambda^{1/2})$ в $\mathfrak{R}(A, L_2^{N+1}, \Lambda^{1/2})$ характеризуется условием:

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}^*(x, y) + \lambda(x, y) [\xi(x, y)]. \quad (4.38)$$

Вектор столбец

$$\xi(x, y) = \{\xi_i(x, y)\} = A'^* [\mathbf{f}(x, y)] \varphi(s_0). \quad (4.39)$$

$A'^*[\mathbf{f}(x, y)]$ – сопряженный к производной Фреше оператора $A[\mathbf{f}(x, y)]$ в «точке» $\mathbf{f}(x, y)$. $\varphi(s_0)$ – функция из $L_2(E_0)$ параметризующая элементы экстремального класса и по свойствам аналогичная исходному полю $u(s_0)$.

Содержательная запись для структурной задачи гравиметрии при условии «нулевого рельефа» в трехмерном случае такова:

$$A(\mathbf{f}(x, y)) = \sum_{i=0}^N \iint_S \frac{\Delta \sigma_i dx dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{1/2}} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}. \quad (4.40)$$

$$\Delta \sigma_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i, \sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0.$$

σ_i – плотность пласта с номером i заключенного между границами $f_{i-1}(x, y)$ и $f_i(x, y)$. В этом случае

$$\mathbf{A}'^*(\mathbf{f}(x, y))\varphi(x_0, y_0) = \left\{ \Delta\sigma_i \iint_{D(u_z)} \frac{\varphi(x_0, y_0) f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}}, i = 0, 1, 2, \dots, N \right\}$$

$$\xi(x, y) = \left\{ \xi_i(x, y) = \Delta\sigma_i \iint_{E_0} \frac{\varphi(x_0, y_0) f_i(x, y) dx_0 dy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \{f_i(x, y)\}^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\aleph(A, L_2^{N+1}, \mathbf{A}^{1/2}) = \left\{ \mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}^*(x, y) + \lambda(x, y) [\xi(x, y)] \right\} \quad (4.41)$$

Последнее соотношение, дополненное (4.40), служит основой для конструирования алгоритмов нахождения взаимоувязанных систем границ по известному от них полю $u_z(x_0, y_0)$.

4.4.3 Равномерные критерии оптимальности

Интегральные критерии оптимальности и, в частности имеющие вид квадратичной формы: $\|F\sigma(v)\|_{L_2} \rightarrow \min$, в целом отражают усредненные характеристики искомого решения. Другие классы критериев возникают из требований, чтобы максимальная или минимальная величина изучаемого параметра была экстремальной. Рассмотрим следующий пример.

Пусть в горизонтальной полосе нижнего полупространства (система координат XYZ , $\Pi = \{-\infty \leq x, y \leq \infty, 0 < z < z_1 \leq z_2 < \infty\} = E_0 \times [z_1, z_2]$, $E_0 = \{x, y: -\infty \leq x, y \leq \infty\}$) требуется восстановить распределение параметра $\sigma(v)$ и известно, что для каждого $z \in [z_1, z_2]$ функция $C(x, y, z)$ с некоторым сдвигом по горизонтали подобна искомому распределению $\sigma(x, y, z)$. Это соответствует требованию максимума функции взаимной корреляции между $\sigma(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$. Как меры подобия $\sigma(x, y, z)$ и $C(x, y, z)$. Функция взаимной корреляции для каждого $z \in [z_1, z_2]$ рассчитывается по правилу:

$$\iint_{E_0} \sigma(\xi, \eta, z) \cdot C(\xi + x, \eta + y, z) dx dy = g(x, y, z) = [\sigma(\xi, \eta, z) * C(-\xi, -\eta, z)]_{\xi, \eta}$$

Индексы ξ, η в последнем выражении указывают на то, что свертка выполняется по этим координатам. Критерием оптимальности для отбора распределения $\sigma(x, y, z)$ из класса эквивалентности в этом случае служит требование максимизации функции взаимной корреляции между $\sigma(x, y, z)$ и заданной функцией $C(x, y, z)$ по всем $z \in [z_1, z_2]$:

$$\max_{x,y \in E_0, z \in [z_1, z_2]} \left| \sigma(\xi, \eta, z) * C(-\xi, -\eta, z) \right|_{\xi, \eta} \rightarrow \max. \quad (4.42)$$

Всегда можно подобрать функцию $R(v)$ так, что задача (4.42) окажется эквивалентной задаче:

$$\max_{x,y \in E_0, z \in [z_1, z_2]} \left| \sigma(\xi, \eta, z) * C(-\xi, -\eta, z) \right|_{\xi, \eta} = \left\| \sigma(x, y, z) * R(x, y, z) \right\|_{x,y} \Big\|_{C(\Pi)} \rightarrow \min. \quad (4.43)$$

Но выражение (4.43) – это ни что иное, как требование минимума нормы в равномерной метрике трансформации по горизонтальным координатам искомого распределения $\sigma(x, y, z)$ с помощью линейного оператора свертки с функцией $R(x, y, z)$:

$$\max_{z \in [z_1, z_2]} \left\| R\sigma(v) \right\|_{C(E_0)} = \left\| R\sigma(v) \right\|_{C(\Pi)} \rightarrow \min. \quad (4.44)$$

Свертка с функцией $R(x, y, z)$ по горизонтальным координатам (в данном случае эти координаты не выписаны как (x, y) и которые можно обозначать по-разному, но при этом они принадлежат E_0) обозначена как оператор R , действующий на $\sigma(x, y, z)$. Такого сорта критерии относятся к классу равномерных критериев оптимальности. Они естественны для банаховых пространств типа $C(V)$. Пространства с равномерной метрикой это нереклексивные и не сильно выпуклые пространства. В этой связи решение задачи

$$\left\| R\sigma(v) \right\|_{C(\Pi)} \rightarrow \min,$$

$$A[\sigma(v)] = u(s_0), \quad (4.45)$$

может оказаться неединственным, а процесс его нахождения из-за недифференцируемости нормы в $C(E_0)$ достаточно сложным. Но эти критерии имеют большое практическое значение. Далее мы выделим некоторую ветвь решения задачи (4.43) и выразим её через более конструктивное решение на экстремальных ласках $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$.

Выполняя в уравнении из (4.45) замену переменных $\xi(v) = [R\sigma(v)]$ и считая, что оператор R имеет ограниченный обратный, переходим к:

$$\begin{aligned} \left\| \xi(v) \right\|_{C(\Pi)} &\rightarrow \min, \\ AR^{-1}\xi(v) &= u(s_0). \end{aligned} \quad (4.46)$$

R^{-1} для каждого фиксированного $z \in [z_1, z_2]$ есть обратная свертка относительно горизонтальных координат к свертки с функцией $R(x, y, z): R^{-1}R = I$. Обозначим AR^{-1} через K и предположим, что этот оператор представим в виде³:

$$K\xi(v) = \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \xi(x, y, z) K(x_0 - x, y_0 - y, z) dz dx dy = u(x_0, y_0). \quad (4.47)$$

Предполагаем, что $K(x, y, z) \in L_1(\Pi) \cap C(\Pi) L_1(V) \cap C(V)$, и при каждом $z \in [z_1, z_2]$ $K(x, y, z) \in L_1(E_0) \cap C(E_0)$.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} \|\xi(v)\|_{C(\Pi)} &\rightarrow \min \\ K\xi(v) &= u(s_0), \end{aligned} \quad (4.48)$$

В силу свойств функции $K(x, y, z)$ этот оператор K – непрерывен из $L_p(V)$ в $L_q(E_0)$ для $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Следовательно, он непрерывен и из $C(\Pi)$ в $C(E_0)$, и, класс эквивалентности, $\Omega_u = \{\xi: K\xi = u(s_0)\}$ – есть сдвиг замкнутого в $C(\Pi)$ пространства $\text{Ker } K$. Тогда решение задачи (4.48) существует. Однако, в силу того, что норма в $C(\Pi)$ не сильно выпукла, её решение, вообще говоря, не единственно. Почти тривиален такой результат.

Утверждение 1. Множество \mathfrak{S}_u решений задачи (4.48) при $u(s_0) \in \text{Im } K$ есть замкнутое выпуклое множество.

Доказательство. Замкнутость \mathfrak{S}_u очевидна, поскольку минимизируемый функционал – $\|\xi(v)\|_{C(\Pi)}$ непрерывен в $C(\Pi)$. Следует доказать выпуклость \mathfrak{S}_u . Пусть ξ_1 и ξ_2 – два решения задачи (4.48), доставляющие значение d функционалу $\|\xi(v)\|_{C(\Pi)}$. Тогда их выпуклая комбинация $\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ есть также элемент из Ω_u . В силу неравенства:

$$\|\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2\|_c \leq \alpha \|\xi_1\| + (1 - \alpha) \|\xi_2\| = d,$$

имеем $\|\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2\|_c = d$, поскольку в противоположном случае элемент $\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2$ доставлял бы функционалу в (4.48) меньше, чем d значение и, следовательно, ξ_1 и ξ_2 не являлись бы решением этой задачи. Таким образом, любая выпуклая комбинация элементов из \mathfrak{S}_u есть снова элемент из \mathfrak{S}_u .

Существование, но возможная неединственность решения задачи (4.48), позволяет сделать вывод о том, что экстремальный класс $\mathfrak{R}(K, C, I)$ есть полный, но

³ Особенность в зависимости от вертикальной переменной и интегрировании по ней в пределах полосы.

не идеальный, поскольку не есть класс единственности. Поставим задачу выделения в $\mathfrak{R}(K, C, L)$ почти идеального подмножества $\mathfrak{R}(K, F, C)$. Рассмотрим на первый взгляд более общую, чем (4.48) задачу:

$$\begin{aligned} K\xi(v) &= u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |F\xi(v)| &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Здесь F замкнутый оператор, отображающий $C(V)$ в себя с ядром, не имеющим общих ненулевых элементов с $\text{Ker } K$. Замена переменных $\eta(v) = F\xi(v)$ сводит её к:

$$\begin{aligned} KF^{-1}\eta(v) &= u(s_0); \\ \sup_{v \in V} |\eta(v)| &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Что полностью эквивалентно (4.49), отличаясь от неё только обозначениями. Таким образом, экстремальные классы $\mathfrak{R}(K, C, F)$ и $\mathfrak{R}(KF^{-1}, C, L)$ совпадают.

Утверждение 2. Если оператор K , представим в виде

$$K\xi(v) = \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \xi(x, y, z) K(x_0 - x, y_0 - y, z) dz dx dy = u(x_0, y_0),$$

$K(x, y, z) \in L_1(\Pi) \cap C(\Pi)$ вещественна и знакопостоянна,

$$\int_{z_1}^{z_2} K(x, y, z) dz \in L_1(E_0) \cap C(E_0); \quad \text{Ker } K \cap \text{Ker } F = \{0\},$$

то множество функций $\zeta(v)$, не зависящие от вертикальной координаты принадлежат $\mathfrak{R}(K, C, L)$ и $\mathfrak{R}(K, C, F)$ состоит из элементов $\zeta(v)$ имеющих вид:

$$\xi(v) = F^{-1}\zeta(s) \quad (4.51)$$

Замечание 1. Условие знакопостоянства легко можно отбросить, заменив требованием, чтобы $G(x, y) = \int_{z_1}^2 K(x, y, z) dz$ не обращалась в ноль.

Замечание 2. Строго говоря, класс $\mathfrak{R}(K, C, L)$ шире, чем множество функций, не зависящих от вертикальной координаты и имеющих, тем самым вид $\zeta(v) = \zeta(s)$. Тем не менее, именно это подмножество функций будем обозначать $\mathfrak{R}(K, C, L)$,

отбрасывая все остальные ветви решений задачи (4.49) и пользуясь тем, что на этом множестве оператор K имеет только нулевое ядро.

Доказательство.

То, что оператор K имеет нулевое ядро на функциях из $C(\Pi)$ не зависящих от вертикальной координаты следует из того простого факта, что

$$K\xi(s) = \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \xi(x, y) K(x_0 - x, y_0 - y, z) dz dx dy = \iint_{E_0} \xi(x, y) G(x_0 - x, y_0 - y) dx dy,$$

$$G(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} K(x, y, z) dz.$$

Это обычное уравнение в свертках с интегрируемой, непрерывной и не равной тождественно нулю функцией.

Далее. В соответствии с основным результатом теории оптимизации – теоремой двойственности (см. ч. 1 Раздел 1.2.2.2), для того, чтобы элемент $\bar{\xi}(v)$ был решением задачи (4.49), необходимо и достаточно, чтобы в сопряженном к $C(\Pi)$ пространстве $C^*(\Pi)$ нашелся функционал $\langle f | \cdot \rangle, f \in L_1(\Pi)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \|f\|_{L_1(\Pi)} \leq 1; \\ \text{b) } & \langle f | \bar{\xi}(v) \rangle = \|\bar{\xi}(v)\|_{C(\Pi)}; \\ \text{c) } & \langle f | g \rangle = 0 \quad \forall g \in \text{Ker}K. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Схема дальнейших рассуждений следующая. Мы намерены “угадать” вид множества решений задачи (4.48–4.49). Далее покажем, что для «угаданного» элемента могут быть выполнены условия (4.52), что и будет служить доказательством тому, что “угаданный” элемент действительно служит решением задачи (4.49). Наконец, мы намерены показать, что на выделенном классе из “угаданных” элементов уравнение $K\xi(v) = u(s_0)$ однозначно и плотно разрешимо, что и будет завершать доказательство того, что выделенное множество есть почти идеальный экстремальный подкласс $\mathfrak{N}(K, C, I)$ (далее называем его классом) класса $\mathfrak{R}(K, C, I)$. Дополнительные условия на вид функции $K(x, y, z)$ будут вводиться по мере надобности, и в конце мы резюмируем результат.

Предположим, что функция $\bar{\xi}(v)$ не зависит от вертикальной координаты – z (это и есть “догадка”), т. е. $\bar{\xi}(v) = \zeta(s), s = \{x, y\}$. В силу теоремы о ядре, устанавливающей ортогональность ядра оператора и множества значений его со-

пряженного условие (4.52-с) даёт выражение для $f(v)$: $f(v)$ принадлежит $*$ – сла-
бому замыканию $\text{Im } K^*$ в пространстве $C^*(\Pi)$, где:

$$\text{Im } K^* = \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K^*(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0. \quad (4.53)$$

$K^*(x, y, z)$ комплексно-сопряженная к $K(x, y, z)$ и в случае вещественных функ-
ций совпадающая с $K(x, y, z)$. $\varphi(s_0) \in L_1(E_0)$. Это означает, что $f(v)$ принадлежит
множеству пределов последовательностей $f^n(v)$ функций из $\text{Im } K^*$ относительно
сходимости в смысле:

$$\langle \tau(v) | f^n(v) \rangle \text{ для } \tau(v) \in C(\Pi).$$

Пусть $f^n(v)$ – последовательность элементов из $\text{Im } K^*$. Тогда:

$$\langle f^n(v) | \zeta(s) \rangle = \iiint_{\Pi} f^n(v) \cdot \zeta(s) dv = \iint_{E_0} \zeta(s) \int_{z_1}^{z_2} f^n(v) dz ds = \iint_{E_0} \zeta(s) \cdot f^n(s) ds,$$

где $f^n(s)$ функция, полученная из $f^n(v)$ интегрированием по координате z . Эту
операцию сокращенно обозначим G :

$$f^n(s) = Gf^n(v) = \int_{z_1}^{z_2} f^n(v) dz.$$

Следует показать, что последовательности $f^n(v)$ из $\text{Im } K^*$ может быть поставлена
в соответствие последовательность $f^n(s) = Gf^n(v)$ такая, что для её предельных
элементов $f(s)$ и $f(v)$ из условия $\|f(s)\|_{L_1(E_0)} \leq 1$ следует $\|f(v)\|_{L_1(\Pi)} \leq 1$.

Если множество функций из $C(\Pi)$ не зависящих от вертикальной координаты и
образующих подпространство $C(E_0)$ в $C(\Pi)$, не имеет элементов, принадлежа-
щих ядру оператора K , то образ $\text{Im } K$ при отображении G плотен в $L_1(E_0)$. Дей-
ствительно, если это не так, то в $L_1(E_0)$ должен найтись элемент $g(s)$ и

$$\iint_{E_0} g(s) G K^* \phi(s) ds = 0 \quad \forall \phi(s) \in L_1(E_0).$$

Но, отсюда после подстановки выражения для K^* , получим:

$$\iint_{E_0} K g(s) \phi(s) ds = 0 \quad \forall \phi(s) \in L_1(E_0).$$

Последнее означает, что $Kg(s) = 0$, что противоречит условию, наложенному на оператор K . В силу доказанной плотности $C(E_0)$ образа $(\text{Im } A^*)$ при отображении G существует последовательность $f^n(s)$, сходящаяся к $f(s)$ и

$$\|f(s)\|_{C^*(E_0)=L_1(E_0)} \leq 1;$$

$$\langle f(s) | \zeta(s) \rangle = \|\zeta(s)\|_{C(E_0)}.$$

Далее приведенное выше равенство $\langle f^n(v) | \zeta(s) \rangle = \iint_{E_0} \zeta(s) f^n(s) ds$ гарантирует выполнение (4.52-b). Следует теперь показать, что и для прообраза $f(v)$ элемента $f(s)$ при отображении G выполнено условие (4.52-a). Нетрудно увидеть, что $\|G\|=1$. Следовательно $\|f(s)\|_{L_1(E_0)} \leq \|f(v)\|_{L_1(\Pi)}$. Необходимо доказать строгое равенство. Это будет выполнено в дополнительном предположении: $K(x, y, z) \geq 0$.

Обозначим $L_1^+(E_0)$ – множество в $L_1(E_0)$ неотрицательных функций, а $L_1^-(E_0)$ – отрицательных. Ясно, что каждая из функций $\varphi(s)$ может быть представлена в виде своих положительной $\varphi^+(s) \in L_1^+(E_0)$ и отрицательной $\varphi^-(s) \in L_1^-(E_0)$ компонент. Тогда:

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{L_1(v)} &= \left| \int_{\Pi} \iint_{E_0} \varphi(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 \right| = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \iint_{E_0} \iint_{E_0} (\varphi^+(x_0, y_0) - \varphi^-(x_0, y_0)) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 dx dy dz = \\ &= \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \iint_{E_0} (\varphi^+(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) - \varphi^-(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z)) dx_0 dy_0 dx dy dz = \\ &= \iint_{E_0} (Gf^+(v) - Cf^-(v)) ds = \|f(s)\|_{C^*(E_0)=L_1(E_0)} \\ f^+(v) &= \iint_{E_0} \varphi^+(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 = \\ f^-(v) &= \iint_{E_0} \varphi^-(x_0, y_0) \cdot K(x_0 - x, y_0 - y, z) dx_0 dy_0 = \end{aligned}$$

Последнее справедливо в силу положительности функции $K(x, y, z) \geq 0$.

Требуемое доказано. Предположение о независимости $\bar{\xi}(v)$ от вертикальной координаты характеризует одно из решений задачи (4.50).

Резюмируем сказанное.

Если оператор K имеет вид:

$$K\xi(v) = \iint_{E_0} \int_{z_1}^{z_2} \xi(x, y, z) K(x_0 - x, y_0 - y, z) dz dx dy,$$

действует из $C(\Pi)$ в $C(E_0)$, является линейным, ограниченными в $C(E_0)$ имеет плотную область значений, $K(x, y, z) \geq 0$ и класс функций из $C(\Pi)$, не зависящих от вертикальной координаты, не входит в ядро операторов K и K^* , то множество функций, не зависящих от вертикальной координаты, есть подмножество в $\mathfrak{R}(K, C, I)$ образующее почти идеальный экстремальный класс $\mathfrak{N}(K, C, I)$.

То, что множество независимых от вертикальной координаты функций есть элементы экстремального класса $\mathfrak{R}(K, C, I)$ уже выяснено. Условие единственности решения уравнения $K\xi(v) = u(s)$ на этом множестве входит в перечень ограничений на оператор K . Следует еще показать, что уравнение $K\xi(v) = u(s)$ плотно разрешимо на $\mathfrak{N}(K, C, I)$.

Если это не так, то в $C(E_0)$ существует элемент $g(s)$, и

$$\langle K\xi(s) | g(s) \rangle = 0 \quad \forall \xi(s) \in C(E_0).$$

Но, тогда:

$$\langle \xi(s) | K^*g(s) \rangle = 0 \quad \forall \xi(s) \in C(E_0),$$

откуда следует, что $g(s) \in \text{Ker} K^*$, что невозможно в силу постулированных свойств K .

Представление класса $\mathfrak{R}(K, C, F)$ в форме

$$\xi(v) = F^{-1}\zeta(s) \tag{4.54}$$

легко позволяет установить связь между выделенной ветвью $\mathfrak{R}(K, C, F)$ в множестве решений задачи (4.49) и экстремальными классами $\mathfrak{R}(K, L_2(\Pi), Q)$. Для этого достаточно сопоставить аналитические представления для этих классов.

Для плотного в $\mathfrak{R}(A, L_2, F)$ подмножества:

$$\mathfrak{N}(A, L_2, F) = \left\{ \sigma(v) = F^{-1} F^{*-1} A^* \varphi(s_0) \right\},$$

$$\varphi(s_0) \in DA^*.$$

Меняя обозначения: $K \rightarrow A$ получаем:

$$\mathfrak{N}(K, L_2, Q) = \left\{ \sigma(v) = Q^{-1} Q^{*-1} K^* \varphi(s_0) \right\},$$

$$\varphi(s_0) \in DK^*$$

Если Q оператор выбран так, чтобы $Q^{-1} Q^{*-1} K^* = F^{-1}$, а $\varphi(s_0)$ рассматривается как $\zeta(s)$, то $\mathfrak{R}(K, C, F) \subseteq \mathfrak{R}(K, L_2(\Pi), Q)$. Иными словами, если оговорить существование всех операторов и совместимость областей определения и областей значений, то

$$\mathfrak{R}(K, C, (Q^{-1} Q^{*-1} K^*)^{-1}) \subseteq \mathfrak{R}(K, L_2(\Pi), Q).$$

Этому утверждению можно придать строгий смысл, однако мы ограничимся лишь приведенным замечанием.

Глава 5. Эволюционно-динамические принципы моделирования в условиях неопределённости

Эволюционно динамические принципы при моделировании в условиях неопределённости занимают совершенно особое место. Они состоят в том, что вместо того чтобы бросаться в драку с неопределённостью, вводя те либо иные, еще большие ограничения либо критерии, преодолевая все виды некорректности, связанные с требующей решения задачей, мы «сидим на заборе и посвистываем», занимаясь чем-то совершенно иным, а не исходной задачей, которая рассматривается как некоторое дополнительное условие к основному предмету нашего внимания. Описанная стратегия следует из третьего принципа системного анализа и анонсирована в разделе 2.3. Содержание эволюционно-динамических принципов моделирования не доопределённых задач наиболее рельефно проявляется при изучении плотностных моделей геологических сред. Моделируется динамика геологической среды, подчиненная соответствующим общим уравнениям движения, на фоне рассмотрения которой в качестве условия добавляется требование, чтобы развитие вело к современному наблюдаемому гравитационному полю. На примере этой задачи, служащей своего рода эталоном для других содержательных приложений и разрабатывается эволюционно динамический принцип, общая стратегия которого изложена в 2.3.

5.1 Эволюционно-динамические условия

Мы возвращаемся к уравнению $A[\sigma(v)] = u(s_0)$ и рассмотрим совершенно иной класс критериев отбора единственного решения, основанных на введении динамических задач, в которых изучаемый параметр оказывается краевым условием.

Предположим, что есть основания полагать, что искомая модель $\sigma(v)$ с распределёнными параметрами или её частный случай – система границ $f(x, y)$ претерпевали в процессе своего формирования из некоторого начального состояния $\sigma^*(v)$ (или $f^*(x, y)$) в конечном трансформации, описываемые теми либо уравнениями движения $\Xi(t, \sigma(v), v(v), \dots, q(v)) = 0$ ($\Xi(t, f(x, y), v(x, y), \dots, q(x, y)) = 0$), в которых v, \dots, q – параметры, определяющие динамику процессов Ξ , а t – время, в течение которого эти трансформации происходили. Например, v, q могут быть параметры вектора скорости перемещения и массового притока вещества, t – геологическое время, выраженное в некоторых условных единицах. Трансформации происходили из начального состояния $\sigma^*(v) = \sigma(t_0, v)$ (или $f^*(x, y) = f[t_0, (x, y)]$) в конечном, $\sigma(v) = \sigma(t_k, v)$ ($f[t_k, (x, y)]$) и обязательным усло-

вием служит требование того, чтобы в конечном пункте этого движения поле результат решения прямой задачи от результирующей модели соответствовал заданному наблюдаемому $u(s_0)$. В задаче о распределённом параметре $\sigma(v)$, модель инверсии, учитывающая динамический генезис искомого распределения должна формулироваться как задача реконструкции $\sigma(t_k, v)$ исходя из уравнений:

$$\begin{aligned} \Xi(t, \sigma(v), \mathbf{v}(v), \dots, \mathbf{q}(v)) &= 0; & a \\ \sigma^*(v) &= \sigma(t_0, v); & b \\ A[\sigma(t_k, v)] &= u(s_0) & c \end{aligned} \quad (5.1)$$

Эта задача будет иметь смысл, если параметры v, \dots, q заданы с неопределённостью, допускающей множественность решения уравнения (5.1-а) и их доопределение осуществляется (также возможно не исчерпывающее) исходя из условия $A[\sigma(t_k, v)] = u(s_0)$. Но и так сформулированная задача еще может быть не доопределённой, если произвол в выборе v, \dots, q чрезмерно велик. В этом случае, в соответствии со сформулированными критериальными принципами доопределения задач инверсии в условиях неопределённости, следует ввести дополнительный критерий отбора $J[\sigma(v)]$, так что задача (5.1) дополнится еще одним требованием:

$$J[\sigma(t_k, v)] \rightarrow \min \quad d \quad (5.1)$$

В качестве примера для уравнения $\Xi(t, \sigma(v), \mathbf{v}(v), \dots, \mathbf{q}(v)) = 0$ можно привести уравнение движения вещества:

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial t} + \text{div}(\sigma(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

$\mathbf{x} = \{t, v\}$, $\mathbf{v}(x, t) = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})$ – вектор скорости движений, зависящий, как от пространственных координат, так и от времени $v = v(t, v)$, $q(x)$ – внешние источники вещества, ассоциирующиеся с процессами седиментации или притока извне (положительные значения), эрозией, размывом (отрицательные значения). Введение этого параметра достаточно условно. Его истинное значение и физический смысл состоит в том, чтобы в «конечной точке» динамической системы обеспечить то полное количество вещества, которое соответствует наблюдаемому полю, компенсировать дисбаланс «полной массы», существующий в «начальной» модели – «начальный момент времени». Механизм движения

контролируется уравнением движения и входящими в него параметрами $v(t, v)$, $q(t, v)$, которые называются эволюционно-динамическими параметрами. В этом названии подчеркивается эволюционный, т. е. генетический характер итоговой модели и, в частности той части её эволюции, которая связана с процессами движения. В общем случае уравнения могут быть эволюционными (уравнениями происхождения) но не динамическими (например, химические превращения, эффекты метаморфизма и так далее). Теоретически могут быть динамические уравнения – уравнения движения, но не эволюционные, т. е. не связанные с процессом формирования изучаемого объекта. Приводимый пример относится к числу эволюционно-динамических уравнений, содержащих эволюционно динамические параметры.

Структурные геодинамические модели и уравнения, описывающие их эволюцию, могут быть получены из общего уравнения движения (5.2), если должным образом определить понятие внутренних границ. Граница – это сохраняющаяся в процессе движения структурная единица, которая меняет свою форму, поднимается, либо опускается, но остается границей раздела для заданных физических параметров. Её свойства, отличающие её от любой другой поверхности внутри среды с распределёнными параметрами, состоят в том, что в процессе движения переноса вещества через границу не происходит, и она определяется как поверхность, через которую отсутствует поток вещества – параметра $\sigma(t, v)$. Следовательно, для каждой из границ системы $z = \mathbf{f}(t, s) = \{z = f_0(t, s), z = f_1(t, s), \dots, z = f_N(t, s)\}, s = \{x, y\}$ полная производная по времени для частиц, расположенных на этой поверхности, равна нулю: $\frac{d}{dt} \sigma(t, x, y, f_i(t, x, y)) = 0$, а последняя, в свою очередь, складывается из производных по времени к пространственной нормальной и частной по времени производных. Это приводит к уравнению движения [1, 4]:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, s)}{\partial t} = \langle \mathbf{V}(t, s) | \text{grad}(\mathbf{f}(t, s)) \rangle + \mathbf{W}(t, s);$$

$$\mathbf{f}(t, s)|_{t=0} = \mathbf{f}(0, s) = \mathbf{f}^*(s). \quad (5.3)$$

Здесь $f^0(s)$ – начальное положение границ, с которого «начинается» эволюция. $W(t, s) = \{W_0(t, s), W_1(t, s), \dots, W_N(t, s)\}$ – геодинамические параметры, соответствующие притоку вещества и служащие компонентами вертикального «приращения» – точнее скорости приращения глубины залегания границ; $V(t, s) = \{V_0(t, s), V_1(t, s), \dots, V_N(t, s)\}$ – геодинамические параметры, имеющие

смысл горизонтальной составляющей вектора скорости перемещения для каждой из границ.

Параметры скорости перемещения являются интегрированными параметрами и зависят от многих факторов. К числу основных относятся силы, служащие источником движения, сопротивление этим силам (динамическая и кинематическая вязкости), которые сами являются составными параметрами. Они, в свою очередь, зависят от величины прилагаемых сил и времени их приложения, что в конечном итоге приводит к тому, что параметры, входящие в уравнение (5.2) либо (5.3) известны весьма приближенно, либо неизвестны вовсе. Так, например, изменчивость параметров вязкости в зависимости от существенно неопределённых величин прилагаемых нагрузок на элемент среды составляет порядки самой величины вязкости. Соответствующие данные можно почерпнуть в [5]. В этих условиях априорная информация о характере распределения геодинамических скоростей движения может черпаться из анализа тектонофизической характеристики района, наблюдением за его неогеодинмикой.

В этих условиях следует вводить гипотезы о величинах геодинамических параметров, входящих в (5.3). В любом случае эти параметры должны в процессе моделирования уточниться. Информацией для такого уточнения служат: требование асимптотического стремления динамического процесса к состоянию соответствующему современному – наблюдаемому полю (5.1-с); условие оптимальности предельных элементов относительно параметров среды (5.1-d).

5.2 Инверсия для распределённых параметров

В связи с тем, что уравнение движения вещества в форме (5.2) является одним из фундаментальных законов природы, рассмотрим на его примере, как конструируется вычислительная схема для эволюционно-динамической инверсии уравнения $A[\sigma(v)] = u(s_0)$. Перепишем (5.1) для этого случая:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) &= q(\mathbf{x}); & a \\
 \sigma^*(v) &= \sigma(t_0, v); & b \\
 \lim_{t \rightarrow t_k} \mathbf{A}[\sigma(t, v)] &= u(s); & c \\
 J[\sigma(t_k, v)] &\rightarrow \min & d
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

В частности, если внешний приток отсутствует, $q(\mathbf{x}) = 0$, то:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial t} &= -[\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot \operatorname{grad}] \sigma(\mathbf{x}); \\ \sigma^*(\mathbf{v}) &= \sigma(t_0, \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Уточним, что

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot \operatorname{grad} \sigma(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{v}) | \operatorname{grad} \sigma(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial \sigma(t, \mathbf{v})}{\partial x_j}.$$

Напомним, что $\mathbf{x} = (t, \mathbf{v})$.

Предположим, что в пределах рассматриваемого интервала времени скорость движения $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ не зависит от переменной t – времени. Чтобы избавиться от этого, весьма ограничительного условия, в последующем мы разобьем весь интервал времени $[0, t_k]$ на подинтервалы длительностью h_i в пределах каждого из которых все параметры можно считать стационарными, а сшивку всех данных обеспечивается за счёт того, что краевое условие на конце интервала с номером i служит начальным условием для интервала с номером $i+1$. Для (5.5) в введенных предположениях формально можно записать:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{v}, t) &= e^{-t[\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{v}) + \langle \mathbf{v}(\mathbf{v}) | \operatorname{grad} \rangle]} \sigma^i(\mathbf{v}). \\ t &\in h_i,\end{aligned}\tag{5.6}$$

$\sigma^i(\mathbf{v})$ – начальное значение параметра $\sigma(t, \mathbf{v})$ в начале интервала h_i . Для интервала с номером 1 это значение равно $\sigma^*(\mathbf{v})$.

Справедливость последнего уравнения проверяется простой подстановкой (5.6) в (5.5) и выполнением формального дифференцирования по переменной t (\mathbf{v} не зависит от t) с обращением с величиной $[\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot \operatorname{grad}]$ как с некоторой формальной переменной. Далее будет пояснено, как обращаться с подобного рода объектами.

Для случая, когда членом $q(\mathbf{x})$ пренебрегать нельзя введем для рассуждений промежуточный объект – оператор D :

$$\begin{aligned}D(\sigma(\mathbf{v}, t)) &= \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{v})) = [\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot \operatorname{grad}] \sigma(\mathbf{v}, t) = \\ &= \sigma(\mathbf{v}, t) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{v}) + \langle \mathbf{v}(\mathbf{v}) | \operatorname{grad} \sigma(\mathbf{v}, t) \rangle.\end{aligned}$$

Этот оператор действует на пространственную переменную, хотя в списке аргументов, присутствует и временная компонента $\mathbf{x}=(t, \mathbf{v})$.

Обозначим символом D^{-1} обратный к $D = D(g(\mathbf{x}))$ так, что:

$$D^{-1}Dg(\mathbf{x}) = D^{-1}y(\mathbf{x}) = D^{-1}(\operatorname{div}(g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v})) = g(\mathbf{x}).$$

Поскольку однородное уравнение $\operatorname{div}(g(\mathbf{x})) = 0$ имеет нетривиальное решение в виде $g(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\psi)$, где ψ – векторный потенциал – D^{-1} многозначен. В этой связи можно записать $g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{rot}(\psi) + \operatorname{grad}(\phi)$, где ϕ – скалярный потенциал. Вводя условие калибровки $\operatorname{rot}(\psi) = 0$, получаем $g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{grad}(\phi)$, откуда, для определения скалярного потенциала получаем уравнение Пуассона: $\Delta\phi = y(x)$, частным решением которого служит интеграл Пуассона:

$$\phi(v_0) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{y(v)}{R(v-v_0)} dv.$$

Здесь $R(v-v_0)$ – евклидово расстояние между точками v и v_0 . Во всех этих рассмотрениях важно на самом деле лишь то, что оператор D^{-1} может быть некоторым образом определён, но пока не важно – каким.

Если $q(x) = q(v) \neq 0$, то (5.4-а) может быть записано в форме (5.5) с помощью введенного оператора:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma(t, v) + D^{-1}q(v)) = -D(\sigma(t, v) + D^{-1}q(v)). \quad (5.7)$$

Считая, что D^{-1} , D и e^{-tD} коммутируют (что на самом деле имеет место), получаем для (5.7):

$$\sigma(t, v) = e^{-tD} \sigma(t, v) + D^{-1}q(v) - D^{-1}e^{-tD}q(v).$$

В более подробной записи:

$$\begin{aligned} \sigma(t, v) &= e^{-t(\Theta(v)+\mathbf{v}(v)\cdot\operatorname{grad})} \sigma(t_i, v) + D^{-1}q(v) - D^{-1}e^{-t(\Theta(v)+\mathbf{v}(v)\cdot\operatorname{grad})} q(v) \\ t &\in h_i; \\ \sigma(t_i, v) &= \sigma^i(v) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\Theta(v) = \operatorname{div} \mathbf{v}(v).$$

Теперь вернем зависимость от времени вектора скорости движений, считая, что на интервале с номером i : $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}^i(v)$. Тогда из (5.8) получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma^{i+1}(\mathbf{v}) &= e^{-h_i(\Theta^i(\mathbf{v})+\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot\mathit{grad})}\sigma^i(\mathbf{v})+D^{-1}q^i(\mathbf{v})-D^{-1}e^{-h_i(\Theta^i(\mathbf{v})+\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot\mathit{grad})}q^i(\mathbf{v}); \\
\sigma^0(\mathbf{v}) &= \sigma^*(\mathbf{v}); \\
h_{i+1} &= t_{i+1}-t_i; \\
\Theta^i(\mathbf{v}) &= \mathit{div}\mathbf{v}^i(\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Эта формула позволяет найти значение $\sigma(t, \mathbf{v})$ на конце интервала с номером i , которое одновременно служит начальным условием для следующего, если известны данные о значении этого распределения и скоростях движения в начале интервала, которые принимаем сохраняющимися на всем его протяжении – h_i . Однако для практического счёта в расшифровке нуждаются выражения, включающие в себя экспоненты от операторов.

Экспонента от оператора понимается в следующем смысле: если Ξ линейный, замкнутый оператор, куда, в частности относятся операторы дифференцирования, умножения на весовые функции и все ограниченные операторы, то для $e^{-\Xi s}$ можно применить разложение экспоненты в ряд Тейлора, что даёт:

$$e^{-s\Xi}\sigma(\mathbf{v})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s\Xi)^n}{n!}\sigma(\mathbf{v}).$$

Здесь s некоторая формальная переменная, например время. Подставим вместо Ξ оператор дифференцирования по координате x : $\Xi=\frac{d}{dx}$. Тогда:

$$e^{-s\frac{d}{dx}}\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\sigma(x)=\sigma(x-s).$$

Учитывая что $\mathbf{v}(\mathbf{v})\cdot\mathit{grad}=\mathbf{v}_x(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{v}_y(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{v}_z(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial z}$; $\mathbf{v}(\mathbf{v})=\{\mathbf{v}_x(\mathbf{v}),\mathbf{v}_y(\mathbf{v}),\mathbf{v}_z(\mathbf{v})\}$, трудно получить, в частности:

$$e^{-t\cdot\mathbf{v}(\mathbf{v})\cdot\mathit{grad}}\sigma(\mathbf{v})=\sigma(\mathbf{v}-t\cdot\mathbf{v}(\mathbf{v})). \tag{5.10}$$

Последнее соотношение позволит дать алгоритмическую интерпретацию для (5.9). Она состоит в том, что одно из действий, входящих в (5.9), а именно действие $e^{-h_i(\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot\mathit{grad})}\sigma^i(\mathbf{v})$, следует понимать как сдвиг $\sigma^i(\mathbf{v})$ в направлении $\mathbf{v}^i(\mathbf{v})$ на величину $h_i\mathbf{v}^i(\mathbf{v})$.

Отдельного внимания заслуживает член $e^{-t\mathit{div}\mathbf{v}(\mathbf{v})}\sigma^i(\mathbf{v})$.

Обозначим $\Theta(v) = \text{div } v(v)$. Эту величина называется дилатацией – относительное изменение объема. Её действие на распределение $\sigma(v)$ сводится к умножению на весовую функцию $e^{-t\Theta(v)}$. Реально этой компонентой можно пренебречь, поскольку сжатие и расширение сопровождающиеся координатными преобразованиями контролируются уравнением (5.10). Однако (5.9) можно еще более упростить, заменив его приближенным аналогом.

Пользуемся соотношением

$$\begin{aligned}\sigma(v, t) &= e^{-tD} \sigma^i(v), \\ t &\in h_i,\end{aligned}$$

которое справедливо для решения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \sigma(v, t) &= -D(\sigma(v, t)) \\ \sigma(v, t_i) &= \sigma^i(v),\end{aligned};$$

t_i начальная точка интервала h_i . $t_{i+1} - t_i = h_i$, $t_1=0$.

$$\sigma^{i+1}(v) = e^{-h_i \cdot D} \sigma^i(v).$$

Трансформация $\sigma(v)$ « на +1 шаг » от предшествующего положения для распределения в конечных разностях равна:

$$\frac{\sigma^{i+1}(v) - \sigma^i(v)}{h_i} = \frac{e^{-h_i \cdot D} \sigma^i(v) - \sigma^i(v)}{h_i} \approx -D(\sigma^i(v)).$$

Тогда:

$$\sigma^i(v) \approx -\frac{D^{-1}(e^{-h_i \cdot D} - 1)\sigma^i(v)}{h_i}.$$

Применяя эти уравнения для характеристики динамики компенсационных источников $q^i(v)$, получим:

$$D^{-1}q^i(v) - D^{-1}e^{-h_i(\Theta^i(v) + v^i(v) \cdot \text{grad})} q^i(v) = h_i \cdot q^i(v).$$

Таким образом, процесс (5.9) приближенно переписывается так:

$$\begin{aligned}
\sigma^{i+1}(\mathbf{v}) &= e^{-h_i(\Theta^i(\mathbf{v})+\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot grad)} \left[\sigma^i(\mathbf{v}) + q^i(\mathbf{v}) \right]; \\
\sigma^0(\mathbf{v}) &= \sigma^*(\mathbf{v}); \\
h_{i+1} &= t_{i+1} - t_i, \\
\Theta^i(\mathbf{v}) &= div \mathbf{v}^i(\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Эволюция модели распределения параметра $\sigma^i(x)$ на каждом из интервалов h_i в соответствии с (5.11) складывается из комбинации деформационной $e^{-h_i\Theta^i(\mathbf{v})}\sigma^i(\mathbf{v})$, сдвиговой $e^{-h_i\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot grad}\sigma^i(\mathbf{v}) = \sigma^i(\mathbf{v} - t \cdot \mathbf{v}^i(\mathbf{v}))$ и дивергентной $h_i \cdot q^i(\mathbf{v})$ компонент. На следующем шаге вновь полученная модель эволюционирует с новыми параметрами. В частности, осуществляется перенос и дивергентной компоненты по законам для всего распределения – сдвига и деформации. Далее в уточнении нуждается выражение $e^{-h_i(\Theta^i(\mathbf{v})+\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot grad)}\sigma^i(\mathbf{v})$ в связи с некоммутативностью входящих в него операций:

$$e^{-h_i\Theta^i(\mathbf{v})} \left[e^{-h_i\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot grad} \sigma^i(\mathbf{v}) \right] \neq e^{-h_i\mathbf{v}^i(\mathbf{v})\cdot grad} \cdot \left[e^{-h_i\Theta^i(\mathbf{v})} \sigma^i(\mathbf{v}) \right]. \tag{5.12}$$

Сдвиг и последующее сжатие, вообще говоря, не дают тот же результат, что сжатие и последующий сдвиг. Строго говоря $e^{-\mathbf{v}(\mathbf{v})\cdot grad} e^{-\Theta(\mathbf{v})} = e^{-\Omega}$, где Ω специальным образом определённый оператор. Несколько первых членов его разложения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot grad + \Theta(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}[\mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot grad, \Theta(\mathbf{v})] + \frac{1}{12}[\mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot grad, [\mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot grad, \Theta(\mathbf{v})]] + \\
&+ \frac{1}{12}[\Theta(\mathbf{v}), [\Theta(\mathbf{v}), \mathbf{v}(\mathbf{v}) \cdot grad]] + \dots
\end{aligned}$$

где $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ – скобки Ли.

Некоммутируемость операторов $grad$ и умножения на весовую функцию $e^{-h_i\Theta^i(\mathbf{v})}$, приобретает вполне конкретный физический смысл. Различие состоит в том, происходит ли перемещение с последующим уплотнением, либо происходит перемещение уже уплотненных пород. В значительном числе случаев этим различием можно пренебречь, что выполняется, в частности, при плавном изменении величины Θ , либо условия несжимаемости среды – $\Theta(\mathbf{v}) = div \mathbf{v}(\mathbf{v}) = 0$. Однако, даже если эти условия не выполняются, с точки зрения алгоритма моделирования процесса эволюции, при условии уточнения в процессе моделирования геодинамических параметров, оба эти подхода практически совпадают. Кроме того механизм уплотнения может возникать не только как

следствие перемещений в рассматриваемой модели течения, но и в результате приложения внешних сил, выходящих за рамки введенной модели. Этим оправдано рассмотрение дилатационной функции $\Theta(x)$ как независимого объекта, не связанного со скоростями течений.

Принимая условную длительность интервала $h_i = 1$ получаем:

$$\begin{aligned}\sigma^{i+1}(v) &= e^{-\Theta^i(v)} \cdot \{\sigma^i(v - h_i \mathbf{v}^i(v)) + q^i(v)\}; \\ \sigma^0(v) &= \sigma^*(v); \\ h_{i+1} &= t_{i+1} - t_i = 1, \\ \Theta^i(v) &= \text{div } \mathbf{v}^i(v).\end{aligned}\tag{5.13}$$

Таким образом, в соответствии с (5.13) процесс эволюции начальной модели $\sigma^0(v)$ состоит из шагов реализующих процесс перехода от $\sigma^i(v)$ к $\sigma^{i+1}(v)$, каждый из которых включает в себя три вида трансформаций. Это, во-первых, дилатационные преобразования, состоящие в умножении текущей модели на величину $e^{-h_i \Theta^i(v)}$. Этот шаг интерпретируется как результат процессов сжатия – растяжения. Такой вид преобразований обозначим $D_d^i(\sigma^i(v), \Theta^i(v))$. Во-вторых, преобразование сдвига или сдвиговые деформации на вектор $\mathbf{v}^i(v) : \theta^i(v - h_i \mathbf{v}^i(v))$, которое обозначим $D_s^i(\sigma^i(v), \mathbf{v}^i(v))$ и, наконец, дивергентное преобразование, состоящее в добавлении к $\sigma^i(v)$ аддитивной компоненты $q^i(v)$, контролирующей баланс вещества при динамике модели. Эту, последнюю операцию, обозначим $D_q^i(\sigma^i(v), q^i(v))$. Любой процесс движения вещества, в рамках определённой выше модели, распадается на последовательность из трех приведенных преобразований. Результат зависит от того, какая последовательность преобразований выбрана. Это легко понять. Сдвиг, с последующим сжатием и добавлением вещества, это совсем не то же самое, что сжатие вместе с добавленным веществом и последующим сдвигом.

Динамический процесс (5.13) следует дополнить, во-первых, требованием (5.4-с): $\lim_{t_i \rightarrow t_k} \mathbf{A}[\sigma^i(v)] = u(s)$, а во-вторых, (5.4-d): $\mathcal{J}[\sigma(t_k, v)] \rightarrow \min$. Ввести эти усло-

вия можно включением их в геодинамические параметры – вектор скорости и притока вещества, воспользовавшись тем обстоятельством, что они известны с большой степенью неопределённости. В такого рода задачах не бывает исчерпывающе строгих решений. Важным является то, что искомое распределение параметра должно отражать априорную информацию об общих закономерностях в динамике процесса, асимптотически выходя на такие допустимые пара-

метры дилатации, скорости и притока вещества, которые обеспечивает соответствие современному полю (5.4-с) и принципу оптимальности (5.4-d). Для того чтобы обеспечить условие (5.4-с), следует положить, что параметры $\Omega^i(v) = e^{-h_i \Theta^i(v)}$, $\mathbf{v}^i(v)$, $q^i(v)$ зависит от невязки $\phi^i(s_0) = u(s_0) - A[\sigma^i(v)]$ таким образом, что при $\phi^i(s_0) = 0$: $\Theta^i(v), \mathbf{v}^i(v), q^i(v)$ тождественно равны нулю и $\sigma^{i+1}(v) = \sigma^i(v)$. Пошаговое уменьшение невязки в итерационном процессе обеспечивает выполнение динамических законов и приближение к распределению с требуемым полем.

Дальнейшие действия основываются на предварительном системном анализе задачи, состоящем в выявлении и установлении взаимосвязи между различными компонентами движений и их ролью в компенсации невязки $\phi^i(s_0)$. Итогом этого анализа служит разложение $\phi^i(s_0)$ на компоненты $\varphi_d^i(s_0), \varphi_s^i(s_0), \varphi_q^i(s_0)$, каждая из которых компенсируется своим типом трансформации $D_d^i(\sigma^i(v), \Theta^i(v)), D_s^i(\sigma^i(v), \mathbf{v}^i(v)), D_q^i(\sigma^i(v), q^i(v))$. Вводя операторы для дилатации, скорости и притока имеющие вид линейных преобразований над соответствующими компонентами невязки:

$$\Omega^i(v) = e^{\Theta^i(v)} = \Omega^i[v, \varphi_d^i(s_0)]; \quad \mathbf{v}^i(v) = \mathbf{V}^i[v, \varphi_s^i(s_0)]; \quad q^i(v) = \mathbf{q}^i[v, \varphi_q^i(s_0)],$$

получим:

$$\sigma^{i+1}(v) = \Omega^i[v, \varphi_d^i(s_0)] \cdot \{ \sigma^i(v - \mathbf{V}^i[v, \varphi_s^i(s_0)]) + \mathbf{q}^i[v, \varphi_q^i(s_0)] \}; \quad (a)$$

$$\sigma^0(v) = \sigma^*(v), \quad (b)$$

$$\Omega^i(v) = e^{\Theta^i(v)} = \Omega^i[v, \varphi_d^i(s_0)]; \quad \mathbf{v}^i(v) = \mathbf{V}^i[v, \varphi_s^i(s_0)]; \quad q^i(v) = \mathbf{q}^i[v, \varphi_q^i(s_0)], \quad (c) \quad (5.14)$$

$$\varphi^i(s_0) = \varphi_d^i(s_0) + \varphi_s^i(s_0) + \varphi_q^i(s_0), \quad (d)$$

$$\phi^i(s_0) = u(s_0) - A[\sigma^i(v)]. \quad (e)$$

Элементы

$$\Omega^i[v, \varphi_d^i(s_0)]; \quad \mathbf{v}^i(v) = \mathbf{V}^i[v, \varphi_s^i(s_0)]; \quad q^i(v) = \mathbf{q}^i[v, \varphi_q^i(s_0)],$$

включают в себя числовые параметры $\alpha_d^i, \alpha_s^i, \alpha_q^i$, входящие в выражения:

$$\Omega^i[\alpha_d^i, v, \varphi_d^i(s_0)]; \quad \mathbf{v}^i(v) = \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, v, \varphi_s^i(s_0)]; \quad q^i(v) = \mathbf{q}^i[\alpha_q^i, v, \varphi_q^i(s_0)],$$

назначение которых состоит в обеспечении монотонной сходимости итерационного процесса:

$$\sigma^{i+1}(v) = \Omega^i \left[\alpha_{d^i}^i(v, \varphi_{d^i}(s_0)) \right] \cdot \left\{ \sigma^i(v - \mathbf{V}^i \left[\alpha_{s^i}^i(v, \varphi_{s^i}(s_0)) \right]) + \mathbf{q}^i \left[\alpha_{q^i}^i(v, \varphi_{q^i}(s_0)) \right] \right\}$$

относительно соответствующих невязок поля:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{d^i}^{i+1}(s_0)\| &\leq \|\varphi_{d^i}^i(s_0)\|; \\ \|\varphi_{s^i}^{i+1}(s_0)\| &\leq \|\varphi_{s^i}^i(s_0)\|; \\ \|\varphi_{q^i}^{i+1}(s_0)\| &\leq \|\varphi_{q^i}^i(s_0)\|. \end{aligned}$$

Эти параметры называются *параметрами релаксации*. Чаще всего они входят в виде линейных множителей к соответствующим операторам. Однако допустимы и иного типа зависимости. Примем, что линейные ограниченные операторы, действующие из Гильбертова пространства $L(S)$ в $L_2(V)$ имеют интегральные представления:

$$\begin{aligned} \Delta^i \left[v, \varphi_{d^i}^i(s_0) \right] &= \int_{s_0} K_{\Omega^i}(v - s_0) \varphi_{d^i}^i(s_0) ds_0; \\ \mathbf{V}^i \left[v, \varphi_{s^i}^i(s_0) \right] &= \int_{s_0} K_{\mathbf{V}^i}(v - s_0) \varphi_{s^i}^i(s_0) ds_0; \\ \mathbf{q}^i \left[v, \varphi_{q^i}^i(s_0) \right] &= \int_{s_0} K_{\mathbf{q}^i}(v - s_0) \varphi_{q^i}^i(s_0) ds_0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Функции $K_{\Delta^i}(v), K_{\mathbf{V}^i}(v), K_{\mathbf{q}^i}(v)$ следует либо задать, либо определить из требования:

$$J[\sigma(t_k, v)] \rightarrow \min.$$

Рассмотрим в качестве критерия отбора требование (5.4-d) в форме):

$$J[\sigma(t_k, v)] = \min_{v \in V} \sup |F \sigma(t_k, v)| \rightarrow \min. \text{ Считаем, что вид оператора } F \text{ определён}$$

и удовлетворяет всем условиям, перечисленным в разделе 4.2. В этом случае искомое распределение $\sigma(v) \in \mathfrak{R}(A, C, F)$ и, в частности, в соответствии с (4.54):

$$\sigma(v) = F^{-1} \zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ не зависящая от вертикальной координаты z функция. Но это означает, что:

$$F \left[\Omega^i \left[v, \varphi_{d^i}^i(s_0) \right] \cdot \left\{ \sigma^i(v - \mathbf{V}^i \left[v, \varphi_{s^i}^i(s_0) \right]) + \mathbf{q}^i \left[v, \varphi_{q^i}^i(s_0) \right] \right\} \right] = \zeta(s). \quad (5.16)$$

Условие (5.16) является метообразующим для уточнения операторов, входящих в (5.15). Его следует понимать в том смысле, что применение заданного вида оператора F , конструкция которого отражает свойства требуемой оптимальности и оговорена в утверждении 2 предыдущего раздела, ко всему выражению

$$\Omega^i [v, \varphi_d^i(s_0)] \cdot \left\{ \sigma^i (v - \mathbf{V}^i [v, \varphi_s^i(s_0)]) + \mathbf{q}^i [v, \varphi_q^i(s_0)] \right\}$$

должно приводить к функции, независимой от вертикальной координаты. Это условие позволяет внести коррективы и доопределить операторы, входящие в перечень определяющих для геодинамических параметров. Здесь возникает большое разнообразие возможных комбинаций доопределения введенных геодинамических компонент модели, включения числовых параметров, обеспечивающих сходимость процессов и убывание невязки, алгоритмов расчёта значений этих параметров и их последовательного введения в вычислительный процесс. Конкретный алгоритм составляет предмет отдельного углубленного рассмотрения, составляющего предмет методики реконструкции модели распределённых параметров.

5.3 Инверсия для структурных моделей

Распространение развитого в предшествующем разделе метода инверсии на основе эволюционно-динамического уравнения на структурные задачи, подчиненные динамическому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}(t, s)}{\partial t} &= \langle \mathbf{V}(t, s) | \text{grad}(\mathbf{f}(t, s)) \rangle + \mathbf{W}(t, s); & (a) \\ \mathbf{f}(t, s) \Big|_{t=0} &= \mathbf{f}(0, s) = \mathbf{f}^*(s); & (b) \\ A[\mathbf{f}(t_k, s)] &= u(s_0); & (c) \\ J[\mathbf{f}(t_k, s)] &\rightarrow \min. & (d) \end{aligned} \quad (5.17)$$

представляется очевидным. Отличие от уравнений (5.4) состоит в отсутствии члена, ответственного за дилатацию, поскольку такого рода движения уточнены в вертикальной компоненте $V_x(t, s)$ скорости перемещения каждой из $N + 1$ границ:

$$\mathbf{V}(t, s) = \{ \mathbf{v}^j(t, s), j = 0 \div N \}; \mathbf{v}^j(t, s) = [v_x^j(t, s), v_y^j(t, s), v_z^j(t, s)].$$

Обратим внимание на присутствие дивергентного члена в виде, вектора $W(t, s)$, компоненты которого связаны с наращиванием мощности слоя вследствие притока (положительного или отрицательного) вещества в слой и отражают сопутствующее изменение вертикальной координаты границ (рис. 5.1).

Для компонент комплекса структурной модели $f(t, s)$ зарезервирован, в отличие от предшествующих рассмотрений, индекс j . Индекс i также как и в предшествующем разделе резервируется для индексации шагов итерационного процесса. Это служит для однообразия обозначений, но не имеет значения по существу. При этом расположение индексов – верхнее или нижнее – только лишь дело удобства записи.

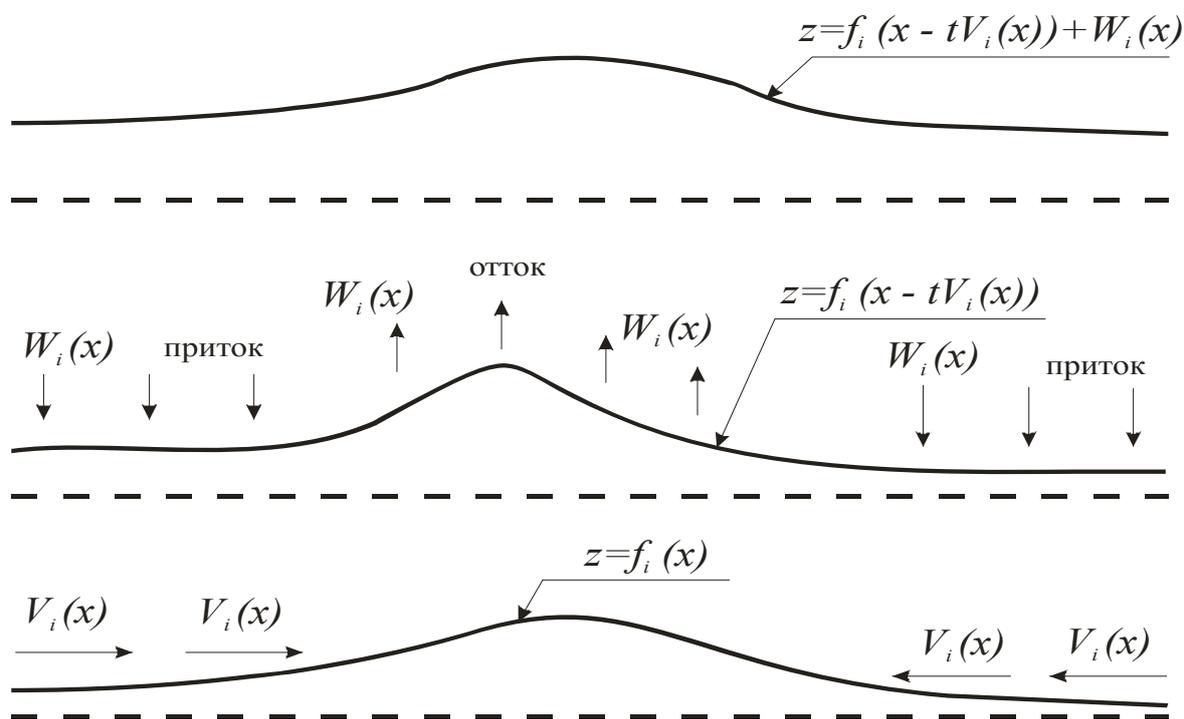


Рисунок 5.1 – Сдвиговые и дилатационные компоненты деформаций

Следует при конструировании конкретных технологий принимать во внимание, что наращивание вещества на том либо ином историческом этапе в результате процессов осадконакопления или наоборот его размыва ведёт в исторической перспективе к изменению конфигурации всех структурных комплексов, находящихся выше границы, служащей фундаментом в текущее время. Однако эти соображения носят внешний характер по отношению к моделированию и постановке задачи инверсии для структурных моделей на основе эволюционно динамических принципов. Для последнего важно итоговое представление о компонентах $W_j(t, s)$ приращения глубин залегания границ $f_j(t, v)$ в рассматриваемый формальный момент времени эволюции t .

Также как и ранее перейдем к дискретным интервалам «времени» с (условной) длительностью h_i , в пределах каждого из которых все динамические компоненты $V(t, s)$, $W(t, s)$ стационарны и концы интервалов индексирован переменной t_i , $i = 0, \dots, t_k$. Повторяя приведенные при конструировании вычислительной схемы для распределённого параметра рассуждения, получим следующий аналог итерационного процесса (5.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i(s)) + \mathbf{W}^i(s); & (a) \\ \mathbf{f}^i(s) &= \mathbf{f}(t_i, s); & (5.18) \\ \mathbf{f}(t_0, s)|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s) = \mathbf{f}^*(s). & (b) \end{aligned}$$

Также как и в (5.13), процесс (5.18) следует дополнить, во-первых, требованием (5.17-с):

$$\lim_{t_i \rightarrow t_k} A[\mathbf{f}(t_k, s)] = u(s_0),$$

во-вторых, обеспечить выполнение (5.17-d):

$$J[\mathbf{f}(t_k, s)] \rightarrow \min.$$

Ввести эти условия можно включением их в геодинимические параметры – сдвиговой – вектора скорости $V^i(s)$ и дивергентный $W^i(s)$, состоящий в наращивании мощности, воспользовавшись тем обстоятельством, что они известны с большой степенью неопределённости.

Для обеспечения стремления предела последовательности (5.18) к модели соответствующей «современному полю» $u(s_0)$, также как и для распределённых параметров введем дивергентный и сдвиговой операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^i(s) &= \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi_q^i(s_0)]; \\ \mathbf{V}^i(s) &= \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi_s^i(s_0)], \end{aligned} \quad (5.19)$$

включающие в себя компоненты невязок полей

$$\begin{aligned} \varphi_q^i(s_0), \varphi_s^i(s_0), \\ \varphi_q^i(s_0) + \varphi_s^i(s_0) = \varphi^i(s_0) = u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)], \end{aligned}$$

и параметры релаксации α_q^j, α_s^j , ответственные за сходимость последовательности $\mathbf{f}^{i+1}(s)$ относительно невязки:

$$\begin{aligned}\|\varphi_s^{i+1}(s_0)\| &\leq \|\varphi_s^i(s_0)\|; \\ \|\varphi_q^{i+1}(s_0)\| &\leq \|\varphi_q^i(s_0)\|.\end{aligned}$$

Обеспечение требования $J[\mathbf{f}(t_k, s)]$ достигается по аналогии с приёмом, использованным при реконструкции распределённых параметров.

Итерационный процесс, обеспечивающий решение задачи инверсии для структурных моделей с использованием эволюционно динамических принципов запишется следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi_s^i(s_0)]) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi_q^i(s_0)]; & (a) \\ \mathbf{f}^i(s) &= \mathbf{f}(t_i, s) & (b) \\ \mathbf{f}(t_0, s)|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s) = \mathbf{f}^*(s); & (c) \\ \varphi_q^i(s_0), \varphi_s^i(s_0), \varphi_q^i(s_0) + \varphi_s^i(s_0) &= \varphi^i(s_0) = u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)], & (d)\end{aligned}\tag{5.20}$$

Пусть $J[\mathbf{f}(t_k, s)] = \|\mathbf{F}\mathbf{f}(t_k, s)\|_{L_2^{N+1}}$, где \mathbf{F} замкнутый линейный оператор из $L_2^{N+1}(S)$ в себя, допускающий ограниченный обратный. Тогда, если экстремальный класс $\mathfrak{R}(A[\mathbf{f}], L_2^{N+1}, \mathbf{F})$ или плотное в нём подмножество $\mathfrak{N}(A[\mathbf{f}], L_2^{N+1}, \mathbf{F})$, конструктивно определены на $L_2^{N+1}(S)$, то требование (5.17-d) обеспечено, если

$$\mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi_s^i(s_0)]) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi_q^i(s_0)] \in \mathfrak{R}(A[\mathbf{f}], L_2^{N+1}, \mathbf{F}).$$

Его обобщением на случай произвольных пространств \mathbf{X} (не только L_2) служит:

$$\mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi_s^i(s_0)]) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi_q^i(s_0)] \in \mathfrak{R}(A[\mathbf{f}], \mathbf{X}^{N+1}, \mathbf{F}).\tag{5.21}$$

Здесь \mathbf{X}^{N+1} функциональное пространство для системы из $N+1$ функций. Это может быть прямым произведением $N+1$ экземпляров функционального пространства X , которому принадлежит каждая из компонент $f_j(s), j = 0 \div N$ границ $\mathbf{f}(s)$. Само собой разумеется, что оператор \mathbf{F} представляет собой отображение \mathbf{X}^{N+1} в себя. Условие (5.21) позволяет скорректировать вид операторов (5.19) и уточнить значение входящих в него параметров.

Также как и выше здесь возникает большое разнообразие возможных комбинаций доопределения введенных геодинамических компонент модели, включения числовых параметров, обеспечивающих сходимость процессов и убывание невязки, алгоритмов расчёта значений этих параметров и их последовательного введения в вычислительный процесс. Конкретный алгоритм составляет предмет

отдельного углубленного рассмотрения, составляющего предмет методики реконструкции модели распределённых параметров.

5.4 Параметр релаксации и смежные вопросы технологии

Разложение невязки $\varphi^i(s_0) = u(s_0) - A[\sigma^i(v)]$ на компоненты $\varphi_d^i(s_0)$, $\varphi_s^i(s_0)$, $\varphi_q^i(s_0)$ с последующим итерированием в соответствии с (5.14) может оказаться неудобным, если неизвестны принципы такого разложения. В этом случае следует использовать приём, называемый *приоритетными трансформациями*. Он состоит в том, что среди трансформаций $D_d^i(\sigma^i(v), \Theta^i(v))$, $D_s^i(\sigma^i(v), v^i(v))$, $D_q^i(\sigma^i(v), q^i(v))$ выделяется приоритетная для данного региона, например, $D_s^i(\sigma^i(v), v^i(v))$ и принимается, что $\varphi_s^i(s_0) = \varphi^i(s_0)$, $\varphi_d^i(s_0) = 0$, $\varphi_q^i(s_0) = 0$. Это означает выбор того типа тектонических движений, которые были главенствующими для данной модели в определённый промежуток времени. Процесс (5.20-а) продолжается до достижения предела сходимости, при этом на каждом шаге вся невязка включается в член соответствующий сдвиговым деформациям. После того, как процесс сошелся, например на итерации номер L , оставшаяся, некомпенсированная компонента $\varphi^L(s_0)$ принимается за начальную невязку и $\varphi_q^L(s_0) = u(s_0) - A[\sigma^L(v)]$; $\varphi_s(s_0) = \varphi_d(s_0) = 0$. Далее итерационный процесс продолжается относительно других типов тектонических движений. В частности дивергентных членов до достижения минимально возможной невязки, что происходит, например, на итерации с номером N . Если достигнута при этом невязка $\varphi^N(s_0) = u(s_0) - A[\sigma^N(v)]$ всё еще превышает допустимую, итерации продолжают уже относительно оставшейся дилатационной компоненты деформации. Таким образом, последовательно выполняется итерирование относительно первого выбранного типа деформаций, затем второго, затем третьего. В конечном итоге, таким образом, будет достигнуто наилучшее приближение. Последовательности итераций по типам движений могут повторяться и в конечном итоге использоваться более сложные алгоритмы, что составляет предмет конкретной вычислительной работы при эволюционно динамической инверсии геофизических данных. Также возможна ситуация, при которой различные компоненты движений итерируются для компенсации различных компонент некоторой системы полей. Параметр релаксации, обеспечивающий сходимость итерационного процесса (5.20) или (5.21) должен быть выбран так, чтобы обеспечить пошаговую минимизацию невязки. Это может быть достигнуто многими способами минимизации, начиная от эвристических приёмов и завершая в некоторых случаях аналитическими зависимостями. Рассмотрим в качестве примера, поясняющего применение развитых методов

способ выбора параметра релаксации и, одновременно процедуру уточнения геодинамических параметров из условия (5.17-с) на примере инверсии для структурной задачи гравиметрии. При этом мы будем пользоваться максимально возможно общей операторной записью для прямой задачи, что делает применимым эту технологии и для других задач.

Для определённости в итерационной последовательности (5.20-а):

$$\mathbf{f}^{i+1}(s) = (\mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi_s^i(s_0)])) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi_q^i(s_0)].$$

положим, что сдвиговые деформации отсутствуют, $\mathbf{V}^j[\alpha_s^j, s, \varphi_s^j(s_0)] = 0$ и, следовательно, вся невязка связана с дивергентной компонентой: $\varphi_q^i(s_0) = \varphi^i(s_0)$.

Итерационное соотношение (5.20-а) примет вид:

$$\mathbf{f}^{i+1}(s) = \mathbf{f}^i(s) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi^i(s_0)]. \quad (5.22)$$

Условие (5.21) приводит к соотношению:

$$\mathbf{f}^i(s) + \mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \varphi^i(s_0)] \in \mathfrak{R}(A[\mathbf{f}], \mathbf{X}^{N+1}, \mathbf{F}).$$

Оно означает, что, $\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)$ принадлежат множеству решений задачи:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{F}[\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)] \right\|_{\mathbf{X}^{N+1}} \rightarrow \min, \\ & A(\mathbf{f}^{i+1}(s)) = u(s_0), \\ & u(s_0) \in \text{Im } A \end{aligned}$$

Выберем для определённости в качестве пространства \mathbf{X}^{N+1} произведение пространств $C(S)$: $\mathbf{X}^{N+1}(S) = C^{N+1}(S)$. Многообразие $\mathfrak{R}(A[\mathbf{f}], C^{N+1}, F)$ характеризуется тем, что:

$$\mathbf{F}[\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)] = \xi(s),$$

где $\xi(s)$ одна и та же функция для всех компонент результирующего отображения $\mathbf{F}[\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)]$. Иначе это можно записать в покомпонентной записи:

$$\left[\mathbf{F}[\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)] \right]_j = \xi(s) \text{ для всех } j = 0 \div N,$$

где $[f]_j = f_j$ – операция извлечения j -ой компоненты вектора $\mathbf{f} = \{f_j, j = 0 \div N\}$.

Этот результат аналогичен утверждению из раздела 4.3 об оптимальных в равномерной метрике распределениях как функциях, не зависящих от вертикальной координаты. В результате получаем:

$$\mathbf{W}^i [\alpha_q^i, s, \varphi^i(s_0)] \cdot \mathbf{F}^{-1} \xi(s).$$

Напомним, что ранее при изучении экстремальных классов $\mathfrak{R}(A[f], X^{N+1}, F)$ полагалось отсутствие общих ненулевых элементов ядер операторов $A[f^i(s)]$ и F . Отсюда следует и ограничение, относительно $\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \varphi^i(s))$, состоящее в предположении об отсутствии и у этого оператора ненулевых значений принадлежащих ядру оператора $A[f^i(s)]$.

Выражение $F^{-1}\xi(s)$ следует понимать в том смысле, что оператор действует на вектор – функцию $\xi(s) = \{\xi_j(s), j = 0 \div N\}$ имеющей равными $\xi(s)$ все компоненты: $\xi_j(s)$ для всех $j = 0, 1, \dots, N$.

Естественно положить $\xi(s) = \alpha_q^i \varphi^i(s)$, где невязка $\varphi^i(s_0) = u(s_0) - A(\mathbf{f}^{i+1}(s))$ пересчитана в функцию координаты s $\varphi^i(s) = [u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)]]_{s_0 \rightarrow s}$. Операция $[\cdot]_{s_0 \rightarrow s}$

может состоять в обычном присваивании значения $\varphi^i(s_0)$ функции $\varphi^i(s)$ в соответствующей точке s , но может носить и более сложный характер – например, присваивание $\varphi^i(s)$ в точке s некоторого линейного преобразования от $\varphi^i(s_0)$ при условии, что из убывания $\varphi^i(s_0)$ следует убывание $\varphi^i(s)$ и наоборот. Можно сделать и еще один шаг в обобщении пересчёта $\varphi^i(s_0)$ в $\varphi^i(s)$: $[\varphi^i(s_0)]_{s_0 \rightarrow s} = \Phi^i(s)$,

считая, что результирующая функция есть векторнозначная: $\varphi^i(s) = \{\varphi_j^i(s), j = 0 \div N\}$. На самом деле это предположение избыточно, так как зависимость $\varphi^i(s)$ от номера границы может учитываться и включаться в значение: $F^{-1}\varphi^i(s)$.

Однако удобней записывать $F^{-1}[\varphi^i(s)]$, считая, что оператор F^{-1} действует на вектор-функцию $\varphi^i(s) = \{\varphi_j^i(s), j = 0 \div N\}$, у которой в частности равны все компоненты: $\varphi^i(s) = \{\varphi_j^i(s) = \varphi^i(s), j = 0 \div N\}$. Из методических соображений может

оказаться удобным положить компоненты $\varphi^i(s)$ различными, считая, что причиной тому служит разложение оператора F^{-1} на составные части одна из которых переводит $\varphi^i(s)$ в $\varphi^i(s) = \{\varphi_j^i(s), j = 0 \div N\}$, а другая действует способом определённым пользователем. Итерационный процесс (5.22) запишется таким образом

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}^i(s) + \alpha_q^i \cdot \mathbf{F}^{-1}[\boldsymbol{\varphi}^i(s)]; \\
\mathbf{f}^0(s) &= \mathbf{f}^*(s); \\
\boldsymbol{\varphi}^i(s) &= \left[u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)] \right]_{s_0 \rightarrow s}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Далее необходимо рассчитать для каждого шага оптимальное значение параметра релаксации α_q^i . Для этого итерационного процесса это удаётся сделать аналитически.

Внешнее введение критерия оптимальности $\mathcal{J}[\mathbf{f}(t_k, s)] \rightarrow \min$ совсем не обязательный элемент. Он полезен если нет особых причин для предпочтения того либо иного вида оператора $\mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \boldsymbol{\varphi}_q^i(s_0)] \sim \mathbf{F}^{-1}\xi(s)$. Можно считать, например, что накопление мощности слоя и, следовательно, увеличение амплитуды структуры $\mathbf{f}^i(s)$ зависит от самой этой структуры, например, корреляционно связано с ней. В этом случае, можно положить

$$\mathbf{W}^i[\alpha_q^i, s, \boldsymbol{\varphi}_q^i(s_0)] = \alpha_q^i \cdot \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s))\boldsymbol{\varphi}^i(s), \tag{5.24}$$

В частности, $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s))$. Это выражение позволяет проинтерпретировать оператор дивергентных трансформаций с позиций критерия оптимальности относительно решений и наоборот. В последнем выражении предполагается, по сути, что параметры критерия оптимальности $\|\mathbf{F}[\mathbf{f}^{i+1}(s) - \mathbf{f}^i(s)]\|_{\mathbf{X}^{N+1}}$, в частности вид оператора \mathbf{F} зависят от текущего состояния эволюционирующей модели. Выведем выражение для расчёта оптимального параметра релаксации именно для этого – более общего случая.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}^i(s) + \alpha_q^i \cdot \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)); & (a) \\
\mathbf{f}^0(s) &= \mathbf{f}^*(s); & (b) \\
\boldsymbol{\varphi}^i(s) &= \left[u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)] \right]_{s_0 \rightarrow s} & (c)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Обратим внимание, что здесь невязка записана как операнд и может входить нелинейно в итерационный процесс (5.25).

Воспользуемся принципом максимальной скорости убывания невязки $\boldsymbol{\varphi}^i(s_0)$ между исходным полем $u(s_0)$ и полем $A(\mathbf{f}^{i+1}(s))$ от следующего приближения $\mathbf{f}^{i+1}(s)$. $\boldsymbol{\varphi}^{i+1}(s_0) = u(s_0) - A[\mathbf{f}^{i+1}(s)]$.

Для невязки:

$$\begin{aligned}\varphi^{i+1}(s_o) &= u(s_o) - \mathbf{A}[\mathbf{f}^{i+1}(s)] = u(s_o) - \mathbf{A}[\mathbf{f}^i(s) + \alpha_q^i \cdot \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))] = \\ &= u(s_o) - \mathbf{A}[\mathbf{f}^i(s)] - \alpha_q^i \cdot \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) + \mathbf{r}[\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))]\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{r}[\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))]$ величина второго порядка малости в сравнении с $\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$. Отбрасывая этот член, переписываем последнее уравнение в виде:

$$\varphi^{i+1}(s_o) = \varphi^i(s_o) - \alpha_q^i \cdot \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$$

Далее, рассчитываем квадрат нормы правой и левой частей, для чего умножим их скалярно самих на себя:

$$\begin{aligned}\|\varphi^{i+1}(s_o)\|^2 &= \|\varphi^i(s_o)\|^2 - 2\alpha_q^i \cdot \langle \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) | \varphi^i(s_o) \rangle + \\ &+ [\alpha_q^i]^2 \cdot \|\mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))\|^2\end{aligned}$$

Последнее уравнение переписываем после тривиальных преобразований:

$$\|\varphi^{i+1}(s_o)\|^2 = q(\alpha) \|\varphi^i(s_o)\|^2,$$

где:

$$q(\alpha_q^i) = 1 - 2\alpha_q^i \frac{\langle \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) | \varphi^i(s_o) \rangle}{\|\varphi^i(s_o)\|^2} + [\alpha_q^i]^2 \cdot \frac{\|\mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))\|^2}{\|\varphi^i(s_o)\|^2}$$

Величина $q(\alpha_q^i)$ характеризует скорость убывания невязки $\|\varphi^i(s_o)\|^2$. Скорейшее убывание будет достигнуто тогда, когда эта величина минимальна. Для нахождения минимума дифференцируем по α_q^i , приравниваем результат нулю, после чего получаем:

$$\alpha_q^i = \frac{\langle \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) | \varphi^i(s_o) \rangle}{\|\mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))\|^2}. \quad (5.26)$$

Напомним, что невязка в этом выражении рассчитывается «заданное поле минус расчёт от очередного приближения». Если считать наоборот – «расчёт минус заданное поле» знак при вычислении α_q^i измениться на противоположный. Это и есть искомое соотношение для расчёта текущего значения параметра ре-

лаксации α_n . Можно доказать [1], что такой выбор параметра релаксации обеспечивает монотонное убывание невязки $\|\varphi^i(s_0)\|^2$, а обращение в ноль параметра релаксации α_q^i означает принадлежность $\varphi^i(s_0)$ к ядру оператора $A[f^i(s)]$ $W^i(f^i(s), \varphi^i(s))$. Поскольку всюду полагалось, что $W^i(f^i(s), \varphi^i(s))$ не имеет общих ненулевых элементов с ядром оператора $A[f^i(s)]$, то последнее свидетельствует о том, что $W^i(f^i(s), \varphi^i(s)) = 0$ и, следовательно $\varphi^i(s_0) = 0$. Сходимость обеспечена.

5.5 Абстрактная вычислительная схема

Рассмотрим двухэтапную схему вычислений, в которой на первом этапе выполняется компенсация невязки за счёт сдвиговых деформаций. После достижения предела выполняется второй этап, состоящий в компенсации дивергентной компоненты. Последняя по своей сути совпадает с процедурами построения решения на экстремальных классах.

5.5.1 ЭТАП 1

Итерационный процесс, реализующий компенсацию сдвиговых деформаций, состоит в следующем:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{i+1}(s) &= \mathbf{f}^i(s - \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi^i(s)]); & (a) \\ \mathbf{f}(t_0, s)|_{t=0} &= \mathbf{f}^0(s) = \mathbf{f}^*(s); & (b) \\ \varphi^i(s) &= [u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)]]_{s_0 \rightarrow s}. & (c) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Шаг 0. Исходные данные: наблюдаемой поле $u(s_0)$; нулевое приближение $\mathbf{f}^*(s) = \{f_j^*(s), j = 0 \div N\}$; оператор $\mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi^i(s)]$, ставящий в соответствие числу α_s^i , функции переменной $s: \varphi^i(s)$ векторнозначную функцию $\Delta(s) = [\Delta x(s), \Delta y(s)]$, определяющую величину смещения точки $s: s \rightarrow s - \Delta(s)$. Иными словами $\mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi^i(s)]$ – это способ пересчёта невязки полей $\varphi^i(s_0) = [u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)]]_{s_0 \rightarrow s}$ в сдвиги, зависящие от координат модели нулевого приближения $\mathbf{f}^*(s)$. При этом $\Delta(s) = \{\Delta_j(s) = (\Delta_j x(s), \Delta_j y(s))\}$ эти сдвиги различны для различных границ модели. Они одни для верхних границ и другие для нижних. В частном случае они могут и совпадать. Таким образом:

$$\Delta(s, \alpha_s^i) = \{\Delta_j(s, \alpha_s^i) = (\Delta_j x(s, \alpha_s^i), \Delta_j y(s, \alpha_s^i)), j = 0 \div N\} = \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \varphi^i(s)]. \quad (5.28)$$

Задание способа такого пересчёта относится к части опытно методических работ. Коэффициент α_s^i – параметр релаксации представляет собой масштабный коэффициент применения уже определённых сдвиговых деформаций и должен подбираться таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия минимизации невязки $i = 0$.

Шаг 1. Расчёт невязки $\varphi^i(s_0) = u(s_0) - A[f^i(s)]$, погрешности $(\delta^i)^2 = \|\varphi^i(s_0)\|^2$ анализ погрешности и при достижении её значения допустимого минимума окончание процесса.

Шаг 2. Пересчёт невязки в координаты $s : \Phi^i(s) = [\varphi^i(s_0)]_{s_0 \rightarrow s}$. Расчёт

$$\Delta(s, \alpha_s^i) = \{\Delta_j(s) = (\Delta_j x(s), \Delta_j y(s)), j = 0 \div N\} = \mathbf{V}^i[\alpha_s^i, s, \Phi^i(s)].$$

Для последовательности значений α_s^i .

Шаг 3.

$$\mathbf{f}^{i+1}(s, \alpha_s^i) = \mathbf{f}^i(s - \Delta(s, \alpha_s^i)).$$

В покомпонентной записи:

$$f_j^{i+1}(s, \alpha_s^i) = f_j^i(s - \Delta(s, \alpha_s^i));$$

$$j = 0, 1, \dots, N.$$

Шаг 4. Нахождение α_{opt} как решение задачи: $\|u(s_0) - A[\mathbf{f}^{i+1}(s, \alpha_s^i)]\| \rightarrow \min_{\alpha_s^i}$.

Шаг 5. $\mathbf{f}^{i+1}(s) = \mathbf{f}^i(s - \Delta(s, \alpha_{opt}))$;

Шаг 6. $i = i + 1$; переход к шагу 1.

5.5.2 ЭТАП 2

Итерационная процедура (5.25) по сути своей общая как для построения решения на экстремальных классах $\mathfrak{R}(A[f], C^{N+1}, F)$, так и для поиска структурной модели в рамках эволюционно динамической движения дивергентного типа. Итерационный процесс решения этой задачи определён:

$$\mathbf{f}^{i+1}(s) = \mathbf{f}^i(s) + \alpha_q^i \cdot \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \Phi^i(s)); \quad (a)$$

$$\mathbf{f}^0(s) = \mathbf{f}^*(s); \quad (b) \quad (5.29)$$

$$\Phi^i(s) = [u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)]]_{s_0 \rightarrow s} \quad (c)$$

Выбор параметра релаксации предлагается выполнять по формуле.

$$\alpha_q^i = \frac{\langle \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) | \boldsymbol{\varphi}^i(s_0) \rangle}{\| \mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) \|^2} \quad (5.30)$$

Рассмотрим вычислительную схему этой процедуры, считая, что компенсация сдвиговых компонент уже выполнена.

Шаг 0. Исходные данные: наблюдаемой поле $u(s_0)$; нулевое приближение (результат выполнения предшествующего этапа): $\mathbf{f}^*(s) = \{f_j^*(s), j = 0 \div N\}$; оператор $\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$, ставящий в соответствие векторнозначной функции переменной s : $\boldsymbol{\varphi}^i(s)$ векторнозначную функцию $\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) = \{W_j^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)), j = 0 \div N\}$. $W_j^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$ – это та поправка к $f_j^i(s)$ которую надо добавить, вместе с множителем α_q^i чтобы получить $f_j^{i+1}(s)$. $i = 0$.

Шаг 1. Расчёт невязки $\boldsymbol{\varphi}^i(s_0) = u(s_0) - A[\mathbf{f}^i(s)]$, погрешности $(\delta^i)^2 = \|\boldsymbol{\varphi}^i(s_0)\|^2$ анализ погрешности и при достижении её значения допустимого минимума окончание процесса.

Шаг 2. Пересчёт невязки в координаты s : $\boldsymbol{\varphi}^i(s) = [\boldsymbol{\varphi}^i(s_0)]_{s_0 \rightarrow s}$. Расчёт

$$\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)) = \{W_j^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s)), j = 0 \div N\}.$$

Реализация этого шага расчётов основывается на сделанном выборе в пользу того либо иного вида оператора $\mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$. Это составляет предмет опытно-методических работ.

Шаг 3. Нахождение оператора $A'[\mathbf{f}^i(s)]$ и вычисление $\mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$.

В том случае, когда оператор $A[\cdot]$ задан аналитически, нахождение $A'[\mathbf{f}^i(s)]$ выполняется один раз и далее, используются полученные соотношения на всех итерациях. В том случае, когда этот оператор задан алгоритмически, его рассчитывают численно в виде матрицы элементов в «точке» \mathbf{f}^0 и далее, если расчёт матрицы – трудоемкая задача, заменяют $A'[\mathbf{f}^i(s)]$ на один раз вычисленную матрицу $A'[\mathbf{f}^0(s)]$. Величина $\mathbf{A}'[\mathbf{f}^i(s)] \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \boldsymbol{\varphi}^i(s))$ представляет собой функцию $\xi(s_0)$, по структуре аналогичную заданному полю $u(s_0)$.

Шаг 4. Расчёт параметра релаксации по формуле:

$$\alpha_q^i = \frac{\langle \xi(s_0) | \varphi^i(s_0) \rangle}{\|\xi(s_0)\|^2}.$$

Шаг 5. Расчёт следующего приближения:

$$\mathbf{f}^{i+1}(s) = \mathbf{f}^i(s) + \alpha_q^i \cdot \mathbf{W}^i(\mathbf{f}^i(s), \varphi^i(s));$$

Шаг 6. $i = i + 1$; переход к шагу 1.

Приведенное пошаговое описание вычислительного процесса призвано служить направляющей нитью при конструировании реальных вычислительных схем для содержательных задач моделирования в условиях неопределённости. Его основная цель пояснить что служит исходными данными, что должно вычисляться в промежутки и как получаться окончательный результат. Это демонстрация полноты и замкнутости вычислительной схемы. Но следует понимать что любые вычисления по казалось бы полной вычислительной схеме – это всего лишь небольшой вычислительный этап трудоемкого процесса геологического осмысления данных. Никакие вычисления, решения обратных задач не могут заменить интерпретационного процесса, а служат лишь ему в помощь, к результатам которой тем не менее, следует относиться осторожно, сверяя его со здравым смыслом геолога. Все новые элементы, полученные в результате решения моделирования сред в условиях неопределённости, обратных задач геофизики, должны тщательно перепроверяться, поскольку цена ошибочных решений весьма велика. Но несомненным служит то обстоятельство, что трансформация разрозненных геолого-геофизических данных в итоге системного анализа и системной инверсии в модель соответствующую наблюдаемым геофизическим полям существенно снижает технико-экономические риски в сравнении с традиционными приёмами интерполяции без увязки с задачами инверсии. И совершенно необходим при моделировании контроль достоверности результатов по их соответствию наблюдаемым гравитационным полям, в силу их объективности и уникальных интегрирующих свойств. Это своего рода выходной технический контроль результатов геологического моделирования.

Глава 6. Прогнозирование параметров на основе недоопределённых связей

6.1 Уравнения связи между параметрами

Связи между параметрами различных компонент физико-геологических моделей чаще всего выводятся из экспериментальных исследований значений параметров на образцах горных пород – керновом материале. Итогом таких измерений служат массив значений группы параметров $\mathbf{s} = \{s_i, i = 1 \div I\}$, и группы параметров $\mathbf{q} = (q_j, j = 1 \div J)$. Параметры $\mathbf{s} = \{s_i, i = 1 \div I\}$ это те, по измеренным значениям которым будет выполняться прогноз значений $\mathbf{q} = (q_j, j = 1 \div J)$. Обучающая выборка \mathfrak{A} это массив одновременного измерения всех параметров $(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \{s_i^{m(i,j)} q_j^{m(i,j)}\}, i = 1 \div I, j = 1 \div J, m(i, j) = 1 \div M(i, j)$. Здесь $M(i, j)$ – количество одновременных измерений параметра s_i и q_j – например число образцов керна материала, I – число параметров в группе параметров аргументов и J число прогнозных параметров. Удобно использовать терминологию фазового пространства $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$ параметров, как пространства $I \times J$ измерений, состоящего из точек $\{\mathbf{s}, \mathbf{q}\} = \{s_i, i = 1 \div I; q_j, j = 1 \div J\}$. В фазовом пространстве $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$ экспериментальные данные \mathfrak{A} образуют поле рассеяния $I \times J$ мерных точек

$$(\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}} = \{s_i^{m(i,j)} q_j^{m(i,j)}\}, i = 1 \div I, j = 1 \div J, m(i, j) = 1 \div M(i, j).$$

Например, в качестве параметров s_i могут выступать: интервальное время распространения акустических волн Δt ; кажущееся электрическое сопротивление ρ_k . q_1 – параметр пористости. В этом частном случае $I = 2, J = 1$ и фазовое пространство $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$ трехмерно. Каждый из трех параметров представлен измерениями на M образцах ($M = \max_{i,j} M(i, j)$) и всего данные \mathfrak{A} представлены в $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$ полем точек, состоящем из M точек. В разных областях фазового пространства плотность этих точек (число на единицу объема) в общем-то различна и это обстоятельство следует помнить при оценке информативности данных \mathfrak{A} . Классическая задача регрессионного анализа состоит в нахождении коэффициентов \mathbf{a} уравнения $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = 0$ связывающего компоненты $\mathbf{s} = \{s_i, i = 1 \div I\}, \mathbf{q} = (q_j, j = 1 \div J)$ так, чтобы они лучше всего соответствовали измеренным данным \mathfrak{A} . Вид уравнения задаётся из внешних соображений, на-

пример, принимается линейным относительно $\{s_i, i = 1 \div I; q_j, j = 1, J\}$. Если обозначить $\Delta^m(\mathbf{a}) = |\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{a})|$, то стратегия подбора параметров \mathbf{a} состоит в решении задач:

$$\begin{aligned} \sum_m \Delta^m(\mathbf{a}) &\rightarrow \min; \\ \sum_m [\Delta^m(\mathbf{a})]^2 &\rightarrow \min; \\ \max_{m=1 \div M} \Delta^m(\mathbf{a}) &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Могут быть введены и более сложные, чем левые части (6.1) критерии: учитывающие разноточность измерений за счёт введения весовых положительных множителей β^m к величинам $\Delta^m(\mathbf{a})$; использующие комбинаций левых частей (6.1) либо преобразований вектора $\Delta^m(\mathbf{a})$ с помощью матрицы $\Psi = \{\Psi^{r,m}\}$ с последующей минимизацией по одному из правил (6.1) векторов $\Delta_{\Psi}^r(\mathbf{a}) = \sum_m \Psi^{r,m} \Delta^m(\mathbf{a})$. Простор для конструирования здесь достаточно велик.

Что же касается задачи минимизации, то она решается традиционными методами оптимизации, описанными в разделе 1.2. Ч. 1. В отдельных случаях, например для линейного уравнения $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = 0$ в форме разрешенной относительно одного из коэффициентов $\{q_j, s_i, i = 1 \div I, j = 1 \div J\}$, эта задача имеет аналитические решения, хорошо известные в линейной регрессии данных. После подбора оптимальных значений $\bar{\mathbf{a}}$ параметра \mathbf{a} , вектор «нескомпенсированных невязок»

$$\Delta^m(\bar{\mathbf{a}}) = |\varphi(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{a}})|$$

анализируется. Итогом анализа служит расчёт числовых

характеристик для величин $\Delta^m(\bar{\mathbf{a}})$, рассматриваемых как реализации случайной величины с выбранным законом распределения. Чаще всего таким законом распределения служит нормальный и оцениваются его дисперсия $D[\Delta^m(\bar{\mathbf{a}})]$ и

отношение $R = \frac{D[\Delta^m(\bar{\mathbf{a}})]}{D[\Delta^m(\mathbf{a})]}$, называемое дисперсионным отношением. Эта вели-

чина характеризует меру «наведенного порядка» в данных за счёт построения регрессионного уравнения $\varphi(\mathbf{s}, \bar{\mathbf{a}}) = 0$. Если $R = 0$, то уравнение $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{a}}) = 0$ точно описывает входные данные $\mathfrak{A} : (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$. Если $R = 1$, то труды по упорядочению данных \mathfrak{A} с помощью уравнения $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{a}}) = 0$ были напрасны. Разброс

невязок $\Delta^m(\bar{\mathbf{a}})$ после введения упорядочения с помощью зависимости $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{a}}) = 0$ таков же как и $\Delta^m(\mathbf{a})$ – до введения упорядочения. Описанная схема является традиционной и изложена во всех руководствах по статистической обработке данных [6].

Регрессионные зависимости устанавливаются для того, чтобы иметь способ вычисления (прогнозирования) значения одних параметров – прогнозных (например, s_1) по измеренным значениям других – параметрам аргументам (например, $\{s_i, i = 2 \div I\}$) в точках, где отсутствует значения одновременно всех I параметров. Такой прогноз направлен на восстановление полных данные в местах их частичного или полного отсутствия. Но реальные данные характеризуются разбросом своих значений в окрестности уравнения регрессии $\varphi(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = 0$. Поэтому если бы была возможность реального измерения в точках аргумента то было бы получено локальное поле данных. Для того чтобы выполнить имитацию этого разброса в области прогнозных параметров, согласованного с разбросом данных $(\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\text{д}}$ используются методы прогноза параметров разброса. Они основаны на генерации случайных величин в окрестности точки аргумент – прогнозных значения фазового пространства $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$, соответствующей зависимости $\varphi(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{a}}) = 0$ с параметрами случайных величин, рассчитанных для $\Delta^m(\bar{\mathbf{a}})$. Наиболее известным примером технологии, учитывающей информацию о разбросе данных при прогнозировании параметров служат методы геостатистики, впервые предложенные в работе [7]. Они состоят в выделении пространственных (или региональных по другой терминологии) переменных и построении для них по экспериментальным данным вариограмм, характеризующим пространственную изменчивость этих переменных. Далее эти вариограммы используются для прогнозирования, интерполяции, (основанных на построенных уравнениях регрессии), называемой крикинг, значений переменных в других точках, в которых эти данные отсутствуют. Это направление интенсивно развивалось [8, 9, 10 и др.] и сегодня представляет собой отлаженный инструмент прогноза параметров, с учетом рассеяния. Неопределённость в прогнозных параметрах \mathbf{q} имеет характер рассеяния данных в окрестности прогнозируемых значений и предопределена полем рассеянием параметров для которым выполнен прогноз. Неопределённость прогноза состоит в том, что вместо конкретных значений параметра прогнозируется область которой прогнозный параметр принадлежит. Интуитивно понятно, что с более высокой степенью достоверности можно делать заключения о том что параметры лежат в более широкой об-

ласти и ширина прогнозной области увеличивается с достоверностью заключения. Может быть сформулирована задача выбора подобластей поля прогнозных значений параметров, в пределах которых с различным уровнем находятся их значения. Эта задача решается стандартным способом использованием интервальных оценок для параметров вероятностных законов [11, 12, 6] (например дисперсии) при выполнении статистического моделирования прогнозного поля рассеяния. Но переходя к задаче прогнозирования физико-геологической модели и анализируя поле рассеяния данных параметров, которые относятся к «заполнению» геометрии модели прогнозными значениями параметров получаем совершенно противоположную картину. Чем выше уровень доверия, тем меньшая часть модели прогнозируется с уровнем доверия не ниже этого (рис. 1).

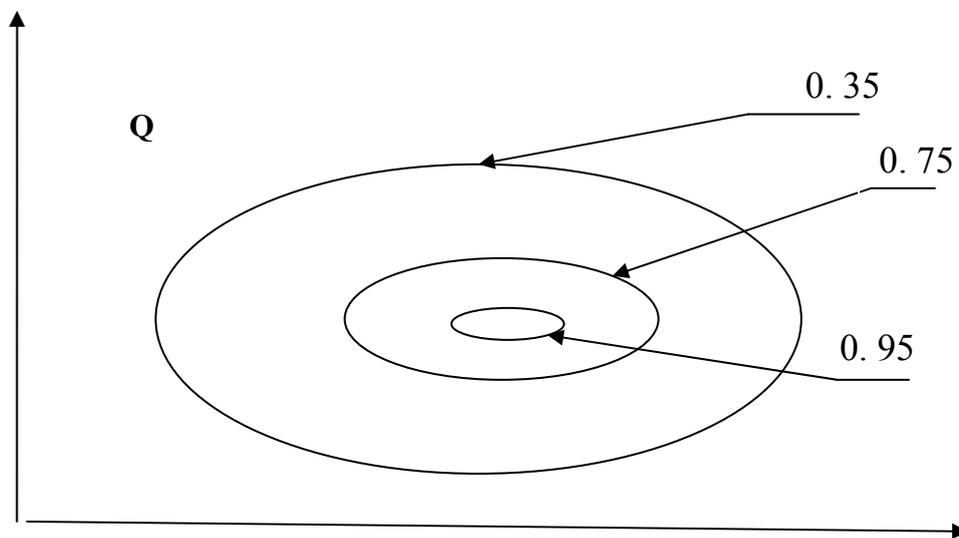


Рисунок 6.1 – Изолинии по уровню доверия прогнозной модели

Методы прогнозирования параметров с учетом рассеяния, основанные на принципах геостатистики несомненно более адекватны задачам прогноза реальных данных, чем обычное использование регрессионных уравнений для прогноза отдельных значений. Тем не менее они основаны на непроверяемом предположении, что параметры вариограмм сохраняются в прогнозной области теми же что и получаемые в обучающей области $\mathcal{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathcal{A}}$. Более целесообразно на этапе прогнозирования отказаться от выполнения подобного рода условий экстраполяции заменив их некоторыми физически осмысленными моделями неопределённости данных, следующих из представлений о неоднородности среды.

6.2 Неоднородные данные и поля рассеяния

Среда неоднородна, если содержит элементы с различными свойствами. Идентификатором свойства служат специфический для элементарной составляющей неоднородной среды набор параметров (s, q) фазового пространства $S \oplus Q$. Таким образом параметры (s, q) в неоднородной среде различны. Есть два способа описания факта неоднородностей относительно выделенных параметров. Первый традиционный, условно называемый принципом Римана. Он состоит в том, что параметры (s, q) рассматриваются как функции пространственных координат. В этом случае неоднородность описывается в форме функций $(s(v), q(v))$, где v – пространственные координаты. Другой способ описания неоднородностей основано на принципе Лебега и состоит в указании в элементарном объеме доли параметров имеющих заданные свойства. В этом случае неоднородность описывается функцией концентрации, которая указывает $\mu(s, q)$ какова доля компонентов с параметрами (s, q) в общем объеме всех параметров. От функций $(s(v), q(v))$ можно перейти к распределению концентраций $(s(v), q(v))$. С этой целью для каждого значения (\bar{s}, \bar{q}) из возможных значений параметров $(s(v), q(v))$ найдем меру множества $Q(\bar{s}, \bar{q}) = \text{mes} \{v : (s(v) = \bar{s}, q(v) = \bar{q})\}$. Тогда $\mu(\bar{s}, \bar{q}) = Q(\bar{s}, \bar{q}) / V$. Здесь V объем изучаемой области. Обратное преобразование неоднозначно. Одному и тому же $\mu(s, q)$ могут быть поставлены различные $(s(v), q(v))$. При этом интегралы от (s, q) и $\mu(s, q)$ совпадают.

Условия неопределённости в задачах прогнозирования параметров имеют форму проявления различной плотности поля рассеяния в данных $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$ и, как следствие неопределённости в использовании прогнозных данных для последующих этапов прогнозирования и моделирования. Традиционно поле рассеяния параметров ассоциируется с погрешностями, осложняющими некоторые гипотетические точные данные. Так обстоит дело в методах геостатистики, где моделирование рассеяния реализуется на основе случайных величин, подчиненных статистикам, найденным из вариограмм данных. В еще большей степени и рельефно такая идеология проявляется в традиционных методах регрессионного анализа, в которых основные усилия сконцентрированы на поиск «хороших» уравнений связи «освобожденных от мешающих погрешностей». В то же время трудно представить себе, чтобы измерительные приборы были столь неточны, а операторы, производящие измерения столь небрежны, что получаемое в результате измерений поле рассеяния по амплитуде вариаций значений соизмеримо с самими измеренными значениями. Гораздо более естественно

предположить, что разброс значений в исходных данных $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$ связан с их неоднородностью. В данных $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$ соединены параметры, характерные для различных типов объектов и поле рассеяния в $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$ отражает эту неоднородность. В этой ситуации никакое усреднение и никакие статистические методы подавления помех смысла не имеют противоречат природе объекта и являются надуманными.

Представим себе, что изучаемый объект, например продуктивный пласт нефтегазовой залежи представляет собой конгломерат некоторых элементарных объектов, характеризующихся различными значениями параметров (s, q) . Каждый элемент этого конгломерата имеет свою уникальную систему значений этих параметров. Не имеет смысла выполнять пространственную локализацию компонентов конгломерата, указывая что именно лежит в окрестности той либо иной точки. Эта задача трудно разрешима и нет большого смысла в её решении. Но сам объект характеризуется распределением содержания своих компонентов вне зависимости от деталей их пространственной локализации и отличие между геологическими объектами состоит в процентном соотношении его образующих элементов. Получив распределение относительного содержания, концентрации $\mu(s, q)$ в объеме элементов, характеризующихся тем либо иным значением параметров (s, q) можно поставить в соответствие этому распределению геологически содержательный элемент, выполняя распознавание образов по реализации функции $\mu(s, q)$. Совокупность измерений \mathfrak{A} представляет собой информацию для нахождения приближения $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ к $\mu(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ являясь аппроксимацией поля $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$. Экспериментальные данные \mathfrak{A} образуют поле точек, элементы которых $\mathfrak{A}(m) = (\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)_{\mathfrak{A}} = \{s_i^{m(i,j)} q_j^{m(i,j)}, i = 1 \div I, j = 1 \div J\}$. Для простоты письма считаем, что $m(i, j) = m$. Легко видеть, что \mathfrak{A} , есть объединение $\mathfrak{A}(m)$.

Для построения $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ в точках не принадлежащих $\mathfrak{A} = (\mathbf{s}, \mathbf{q})_{\mathfrak{A}}$ следует выполнить экстраполяцию значений $\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)$ во всё фазовое пространство $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$, получив $\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$. Это можно сделать на формально математическом уровне, используя в качестве аппроксимирующих поле $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ в окрестности $(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)$ функций некоторые полиномы, фиксированной степени. Этот способ называется способом полиномиальной аппроксимации. Например, для полиномов первой степени интерполирующие функции суть линейные функции и ап-

проксимация $\mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ осуществляется с помощью локальных гиперплоскостей в $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$, с узлами находящимися в точках $(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)$. Другим способом выбора интерполяционных функций служит их истокообразное представление в виде полей некоторых источников, расположенных в узлах $(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)$. Обозначим это поле, с источником, сконцентрированным в начале координат $\bar{\mu}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$. При выборе аппроксимационных функций $\mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \bar{\mu}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^m, \mathbf{q} - \mathbf{q}^m)$, обеспечивающих экстраполяцию значений $\mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m)$ в фазовое пространство $\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}$ следует руководствоваться следующими принципами:

$$0 \leq \mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \leq 1; \quad (6.2)$$

$$\max_{\mathbf{s}, \mathbf{q}} \mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m); \quad (6.3)$$

$$\mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \sum_m \mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m) * \mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}); \quad (6.4)$$

$$\int_{\mathbf{S} \oplus \mathbf{Q}} \mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s} d\mathbf{q} = 1. \quad (6.5)$$

Приведенные требования легко понять, если рассматривать функции $\mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ как функции принадлежности для параметров, служащих нечёткими величинами. В такой трактовке поле рассеяния тождественно равно функции принадлежности для нечётких величин, описанных в Ч. 1, . и приведенные условия есть просто элементы определения функции принадлежности. Наиболее неочевидное это третье из приведенных условий, которое, по сути, есть всего лишь правило получения всего поля рассеяния экспериментального материала из элементов отдельных измерений. Эти правила не являются жесткими и могут быть заменены другими, например:

$$\mu_{\mathcal{Q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \max_m \mu_{\mathcal{Q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}); \quad (6.4-б)$$

Но есть и еще одно важное обстоятельство.

Процедуры прогнозирования поля рассеяния для параметра (в данном случае параметра \mathbf{q} по измеренным значениям $\bar{\mathbf{s}}$) устойчивы по отношению к выбору правил прогнозирования. Кроме того в реальных вычислениях существуют настраиваемые под реальные условия параметры расчёта, и в этой связи настройкой этих параметров можно добиться близких результатов при использовании

различных функций источников $\bar{\mu}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$, соответствующих различным моделям физического процесса смешивания параметров исходного конгломерата концентраций неоднородной среды. Также должной настройкой параметров могут быть снивелированы различия в правилах синтеза поля рассеяния $\mu_{\mathfrak{q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ из полей для элементов $\mu_{\mathfrak{q}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$. В этой связи основой для конструирования полей рассеяния должны служить простота реализации и физико-геологическая наглядность вводимых моделей.

1. Примем модель, согласно которой регистрируемое поле рассеяния $\mu_{\mathfrak{q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ параметров $\xi=(s, q)$ является трансформацией поля концентраций $\mu(s, q) = \mu(\zeta)$ тех же параметров, произошедшей в результате процессов, аналогичных диффузии и взаимопроникновению параметров концентраций. Диффузия происходит в пространстве образованном модулем величины $|\xi|$, характеризуется коэффициентом диффузии α и длится время τ . В этом случае

$$\Delta\mu(|\xi|, \tau) = a^2 \frac{\partial\mu(|\xi|, \tau)}{\partial|\tau|}, \quad (6.6)$$

$$\mu(|\xi|, \tau)\Big|_{\tau=0} = \mu(\mathbf{s}, \mathbf{q}).$$

Фундаментальное решение уравнения диффузии имеет вид (см. 1.4.3 Ч1 и [13]):

$$\mu(\xi, \tau, a) = \frac{a^2}{4\pi\tau} \exp\left(-\frac{a^2|\xi|^2}{4\tau}\right). \quad (6.7)$$

Приём $\bar{\mu}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \mu(\xi, \tau, a)$ при некоторых (τ, a) . В соответствии с методом функций Грина:

$$\mu(\xi, \tau, a) = \int_{\mathbf{s} \oplus \mathbf{Q}} \mu(\zeta) \frac{a^2}{4\pi\tau} \exp\left(-\frac{a^2|\xi - \zeta|^2}{4\tau}\right) d\zeta. \quad (6.8)$$

Обозначим эффективным параметром глубины диффузии $\beta = 2a\sqrt{\tau}$

Учтем, что $\mu(\xi, \beta) = \mu_{\mathfrak{q}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ при некотором β и перепишем (6.8) в форме:

$$\mu_{\mathfrak{q}}(\xi) = \int_{\mathbf{s} \oplus \mathbf{Q}} \mu(\zeta) \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{|\xi - \zeta|^2}{\beta^2}\right) d\zeta. \quad (6.9)$$

В соответствии с (6.4) принимая в качестве поля – источник, сконцентрированный в нулевой точке (6.7), для источника в $\{\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m\}$ получим:

$$\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{\left(|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2\right)^{1/2}}{\beta^2}\right); \quad (6.10)$$

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \sum_m \mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m) * \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{\left(|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2\right)^{1/2}}{\beta^2}\right).$$

Пологая $\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m) = 1$ для всех m и вводя нормирующий множитель $N(\mathfrak{A})$ из условия (6.5) получаем окончательно:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = N(\mathfrak{A}) * \sum_m \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{\left(|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2\right)^{1/2}}{\beta^2}\right). \quad (6.11)$$

Модель диффузии параметров ассоциируется с термодинамическим принципом рассеяния и принципом рассеяния информации за счёт возрастания информационной энтропии открытой системы. Поэтому модель физической диффузии параметров может быть заменена при сохранении всей вычислительной части, моделью возрастания энтропии информации о параметрах, например, за счёт удаленного измерительного прибора.

2. Примем модель, согласно которой регистрируемое поле рассеяния $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ параметров $\xi = (\mathbf{s}, \mathbf{q})$ является трансформацией поля концентраций $\mu(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \mu(\xi)$ тех же параметров, произошедшей в результате завершеного, установившегося процесса диффузии или рассеяния происходившего в пространстве двух измерений $|\xi|$ и $\beta \geq 0$. Поскольку процесс стационарен, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial |\xi|^2} \mu(|\xi|, \beta) + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mu(|\xi|, \beta) &= 0, \\ \mu(|\xi|, \beta) \Big|_{\beta=0} &= \mu(\mathbf{s}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Другая феноменологическая интерпретация той же модели состоит в том, что элементарный источник в истокообразной аппроксимации поля рассеяния дан-

ных \mathfrak{A} эквивалентен источнику кулонова поля в начале координат. Тогда $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ эквивалентно распределению напряженности от поля зарядов на плоскости $\beta = 0$ на некотором удалении $\beta > 0$ от этой плоскости. Фундаментальным решением уравнения (6.12) служит

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\beta}{|\xi|^2 + \beta^2}. \quad (6.13)$$

Примем $\bar{\mu}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \mu(\xi, \beta)$ при некотором $\beta > 0$.

$$\mu(\xi, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{Q}} \mu(\zeta) \frac{\beta}{|\xi - \zeta|^2 + \beta^2} d\zeta. \quad (6.14)$$

Полагая $\mu(\xi, \beta) = \mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ при некотором β получим:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{Q}} \mu(\zeta, \eta) \frac{\beta}{|\mathbf{s} - \zeta|^2 + |\mathbf{q} - \eta|^2 + \beta^2} d\zeta. \quad (6.15)$$

В соответствии с (6.4) принимая в качестве поля источник, сконцентрированного в нулевой точке в точке $\{\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m\}$ получим:

$$\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta}{|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2 + \beta^2}. \quad (6.16)$$

Тогда

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m) * \frac{\beta}{|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2 + \beta^2}.$$

Пологая $\mu_{\mathfrak{A}(m)}(\mathbf{s}^m, \mathbf{q}^m) = 1$ для всех m и вводя нормирующий множитель $N(\mathfrak{A})$ из условия (6.5) получаем окончательно:

$$\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{N(\mathfrak{A})}{2\pi} \sum_m \frac{\beta}{|\mathbf{s} - \mathbf{s}^m|^2 + |\mathbf{q} - \mathbf{q}^m|^2 + \beta^2}. \quad (6.17)$$

Поле рассеяния $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ это представление данных, служащих основанием для установления зависимости между \mathbf{s} и \mathbf{q} . С помощью этого общего поля следует установить как выглядит локальное поле рассеяния для прогнозных параметров

q, если измерены данные \bar{s} для прогноза. Поле рассеяния $\bar{\mu}(\mathbf{s})$ соответствующее измеренным данным \bar{s} включающем в себя значения s^k , $k = 1 \div K$ рассчитывается по аналогам формул (6.11) либо (6.17):

$$\bar{\mu}(\mathbf{s}) = N(\mathfrak{A}) * \sum_k \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{(|\mathbf{s} - \mathbf{s}^k|)}{\beta^2}\right) \quad (6.18)$$

$$\bar{\mu}(\mathbf{s}) = \frac{N(\mathfrak{A})}{2\pi} \sum_k \frac{\beta}{|\mathbf{s} - \mathbf{s}^k|^2 + \beta^2}, \quad (6.19)$$

где $N(\mathfrak{A})$ нормирующий коэффициент, обеспечивающий единичную площадь левой части. Поле рассеяния данных эквивалентно понятию функции принадлежности между параметрами и поэтому допускает правила оперирования, характерные для функций принадлежности. В соответствии с правилом логического вывода Мамдани о значениях функции принадлежности отклика $\bar{\mu}(\mathbf{q})$ по функциям принадлежности $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ для отношения между параметрами \mathbf{s} и \mathbf{q} и функцией принадлежности $\bar{\mu}(\mathbf{s})$ заданного параметра (см. 1.5 Ч1):

$$\bar{\mu}(\mathbf{q}) = \bar{\mu}(\mathbf{s}) * \mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})|_{\mathbf{s}} = \max_{\mathbf{s}} \left[\min \{ \mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}), \bar{\mu}(\mathbf{s}) \} \right] \quad (6.20)$$

Для поля рассеяния $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ наряду с термином функция принадлежности для параметров \mathbf{s} и \mathbf{q} применим также термин «матрица рассеяния», который хорошо отражает суть происходящего преобразования. Рассеянные данные \bar{s} образующие облако рассеяния взаимодействуют с некоторым облаком представленным в виде матрицы рассеяния $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ итогом чего служит новое – рассеянное облако $\bar{\mu}(\mathbf{q})$, получившееся в результате взаимодействия $\bar{\mu}(\mathbf{s})$ с $\mu_{\mathfrak{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$. Но в отличие от обычных алгебраических матричных операций, взаимодействие описывается алгеброй логических операций объединения и пересечения.

6.3 Цепные правила прогнозирования

Одной из наиболее характерных черт задачи прогнозирования параметров в прикладной геофизике и, в частности при прогнозировании параметров продуктивности пласта по комплексу геофизических данных служит то обстоятельство, что прогнозные параметры конструируются по системе цепных правил. Это

означает, что параметры q , поле рассеяния которых – прогнозируется по результатам измерений \bar{s} с помощью (6.20) не является конечным результатом, а лишь связано с искомыми «подсчётно-промысловыми» параметрами $f = (f_l; l = 1 \div L)$. Поле рассеяния этих, последних «подсчётно-промысловых» параметров и должно быть найдено, основанием к чему служит набор экспериментальных данных $\mathfrak{M} = (\mathbf{q}^n, \mathbf{f}^n) = \{q_j^n, f_l^n\}, n = 1 \div N$ характеризующих полем рассеяния $\mu_{\mathfrak{M}}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$. Например, в качестве параметра f может выступать коэффициент пористости по керну, коэффициента нефте-(газо-)насыщения, проницаемости. Эти параметры и служат, например, для расчёта запасов углеводородного сырья, наряду с пространственно-геометрическими характеристиками залежи. Цепное правило нахождения параметров f состоит в расчёте для залежи и каждого продуктивного пласта поля рассеяния параметров f по заданным измеренным величинам \bar{s} и данным рассеяния $(\mathbf{s}, \mathbf{q}); (\mathbf{q}, \mathbf{f})$:

$$\mathbf{s} \Rightarrow (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{q} \Rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{f}. \quad (6.21)$$

Цепочка прогноза (6.21) в реальных условиях может быть более широкой за счёт большего числа промежуточных параметров, $(q, f^1), (f^1, f^2), \dots, (f^K, f)$ и выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{s} \Rightarrow (\mathbf{s}, \mathbf{f}^1) \rightarrow \mathbf{f}^1 \Rightarrow (\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2) \rightarrow \mathbf{f}^2, \dots, \mathbf{f}^K \Rightarrow (\mathbf{f}^K, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{f} \quad (6.22)$$

Кроме того, таких цепочек может быть несколько, опирающихся на различные параметры, но приводящие к различному по значениям прогнозу одного и того же параметра:

$$\omega \Rightarrow (\omega, \sigma^1) \rightarrow \sigma^1 \Rightarrow (\sigma^1, \sigma^2) \rightarrow \sigma^2 \dots \rightarrow \sigma^{K_\omega} \Rightarrow (\sigma^{K_\omega}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{f} \quad (6.23)$$

Итогом прогноза по каждой из цепочек служит вообще говоря не совпадающие поля значений (поля рассеяния, характеризующиеся функциями принадлежности) для прогнозируемого параметра f . Отдельной процедурой служит их согласование, основанное на логических процедурах «и», «или», «не», а также процедур дефазификации и представления результата прогнозирования в параметрической форме прогнозных моделей, в которых параметром служит величина, связанная с уровнем принадлежности (достоверности) выделенной компоненты в поле рассеяния для прогнозных параметров. Тем не менее, базовым элементом, из которого конструируются (6.22), (6.23) и в последующем согласование результатов, служит (6.21). Для реализации (6.21) следует найти поле рассеяния

$\mu_{\text{л}\oplus\text{м}}(\mathbf{s}, \mathbf{f})$ на основании построенных функций $\mu_{\text{л}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$ и $\mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$. В этом случае

$$\bar{\mu}(\mathbf{f}) = \bar{\mu}(\mathbf{q}) * \mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \bar{\mu}(\mathbf{s}) * \mu_{\text{л}\oplus\text{м}}(\mathbf{s}, \mathbf{f}) \Big|_{\mathbf{s}} = \max_{\mathbf{s}} \left[\min \{ \mu_{\text{л}\oplus\text{м}}(\mathbf{s}, \mathbf{f}), \bar{\mu}(\mathbf{s}) \} \right]. \quad (6.24)$$

Подставим (6.20) в $\bar{\mu}(\mathbf{f}) = \bar{\mu}(\mathbf{q}) * \mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$. В итоге получим:

$$\bar{\mu}(\mathbf{f}) = \bar{\mu}(\mathbf{q}) * \mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \Big|_{\mathbf{q}} = \max_{\mathbf{q}} \min \left[\max_{\mathbf{s}} \left[\min \{ \mu_{\text{л}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}), \bar{\mu}(\mathbf{s}) \} \right], \mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \right]. \quad (6.25)$$

Откуда

$$\mu_{\text{л}\oplus\text{м}}(\mathbf{s}, \mathbf{f}) = \max_{\mathbf{q}} \min \left[\mu_{\text{л}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}), \mu_{\text{м}}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \right]. \quad (6.26)$$

Соотношение (6.26) представляет собой правило композиции Мамдани полей рассеяния а формула (6.24) прогноз поля рассеяния для искомым подсчётно-промысловых параметров.

6.4 Представление результатов в форме моделей параметров

Основной конструкцией для визуального представления и использования в расчётах значений параметра f по сконструированному полю рассеяния $\mu(f)$ служит аппарат α сечений. Поскольку $0 \leq \mu(f) \leq 1$ и значение функции $\mu(f)$ ассоциируется с мерой принадлежности – уровнем доверия значению параметра f , область F^α тех значений f для которых $\mu(f) \geq \alpha$ ассоциируется с областью значений параметров, уровень доверия к которым не ниже величины α : $F^\alpha = \{f: \mu(f) \geq \alpha\}$. Эта область называется α сечением для $\mu(f)$. Поверхность $\Omega(F^\alpha) = \{f: \mu(f) = \alpha\}$ называется граничной для α сечения. Множество тех значений f для которых их достоверности ниже α определён условием $\Omega^\alpha = \{f: \mu(f) < \alpha\}$. Вся область возможных значений параметра f разбивается на достоверные с уровнем не менее α и достоверные с уровнем не превосходящем α . Понятно, с увеличением параметра α множества F^α вкладываются друг в друга, а Ω^α поглощаются. Точнее, если $\alpha_1 \geq \alpha_2$ то $F^{\alpha_2} \subseteq F^{\alpha_1}$ и $\Omega^{\alpha_1} \subseteq \Omega^{\alpha_2}$. В реальных условиях прогнозируемые параметры «привязаны» к элементам изучаемой физико-геологической модели и, в этой связи, являются функциями пространственных координат. Таким образом граничная поверхность α сечений представляет собой модель среды, наполненную значением прогнозного параметра, соответствующую уровню

достоверности (значению функции принадлежности) α . Значимость дифференциации модели по уровню достоверности и, тем самым обоснованность самого введения такой дифференциации определяется изменчивостью $\Omega(F^\alpha)$ в зависимости от α . С этой целью определим меру $mes[\Omega(F^\alpha)]$ области $\Omega(F^\alpha)$. В зависимости от размерности прогнозируемого параметра это может быть длина, площадь, объем и так далее. Введем далее функцию локализации

$$f(\alpha) = \frac{mes[\Omega(F^\alpha)]}{mes[\Omega(F^0)]}. \quad (6.27)$$

В связи с тем, что $\Omega(F^0)$ совпадает со всей областью возможных значений параметров, величина $f(\alpha)$.

По мере изменения параметра α от нуля к единице эта область стягивается, вырождаясь в линию либо точку. Динамика размерности этой области может быть охарактеризована кривой локализации прогноза:

$$f(\alpha) = \frac{mes\left[\Omega_{\mu_{\alpha(\bar{s})}}^\alpha(s^2)\right]}{mes\left[\Omega_{\mu_{\alpha(\bar{s})}}^0(s^2)\right]}, \quad (6.28)$$

Эта функция монотонно убывающая от нуля до единицы, $f(0) = 1$; $f(1) = 0$, и крутизна убывания этой функции качественно характеризует степень сгруппированности данных и их изменчивости по достоверности. В силу уже указанной зависимости прогнозных параметров от пространственных координат функция локализации и, как следствие, рельефность зависимости модели от достоверности также различна для различных компонент модели.

6.5 Алгоритм и технология прогнозирования параметров

Описанные математические основы прогнозирования полей рассеяния прогнозных параметров на основании данных, позволяющих конструировать поля рассеяния для параметров аргументах и обучающих данных представленных форме полей рассеяния и обеспечивающих применение правила логического вывода Мамдани представляют собой вычислительную ячейку прогноза (6.21). Реальная многошаговость прогноза (6.23) и возможность одновременного использовать несколько независимых цепочек для прогнозирования параметров феноменологически одного и того же параметра но по различным данным, приво-

дящим к различным полям рассеяния одного и того же параметра превращают эту задачу прогноза в проблему системного анализа на основе методов прогнозирования полей рассеяния. С целью реализации процесса системного анализа прогноза параметров следует выделить несколько этапов решения этой задачи.

6.5.1 Построение и анализ графа прогноза

Граф прогноза представляет собой последовательность иерархически организованных и взаимоувязанных параметров, цепочки связей между которыми завершаются прогнозируемым параметром. Выделяют стартовые параметры аргументы, промежуточные параметры и итоговый прогнозируемый параметр. Стартовые параметры ω – это исходные данные для прогноза, например данные геофизических исследований в скважинах. Итоговые прогнозные параметры f – это целевые параметры. Граф прогноза поля распределений для f по стартовым параметрам ω называется (ω, f) графом.

Таких графов может быть несколько так как прогнозируются различные итоговые параметры. Например, наряду с нефтегазонасыщением прогнозируется извлекаемость запасов. Но замкнутый цикл вычислений реализуется для каждого графа отдельно.

Простейшая линейная цепочка прогноза:

$$\omega \Rightarrow (\omega, \sigma) \rightarrow \sigma \Rightarrow (\sigma, g) \rightarrow g \dots \rightarrow \xi \Rightarrow (\xi, f) \rightarrow f$$

реализуется с помощью правил (6.25) и (6.26). Однако в такой последовательности не учитывается взаимосвязь между промежуточными параметрами и прогнозирование одного и того же феноменологического параметра с помощью различных цепочек. Схема графа прогноза представлена на рис. 2.

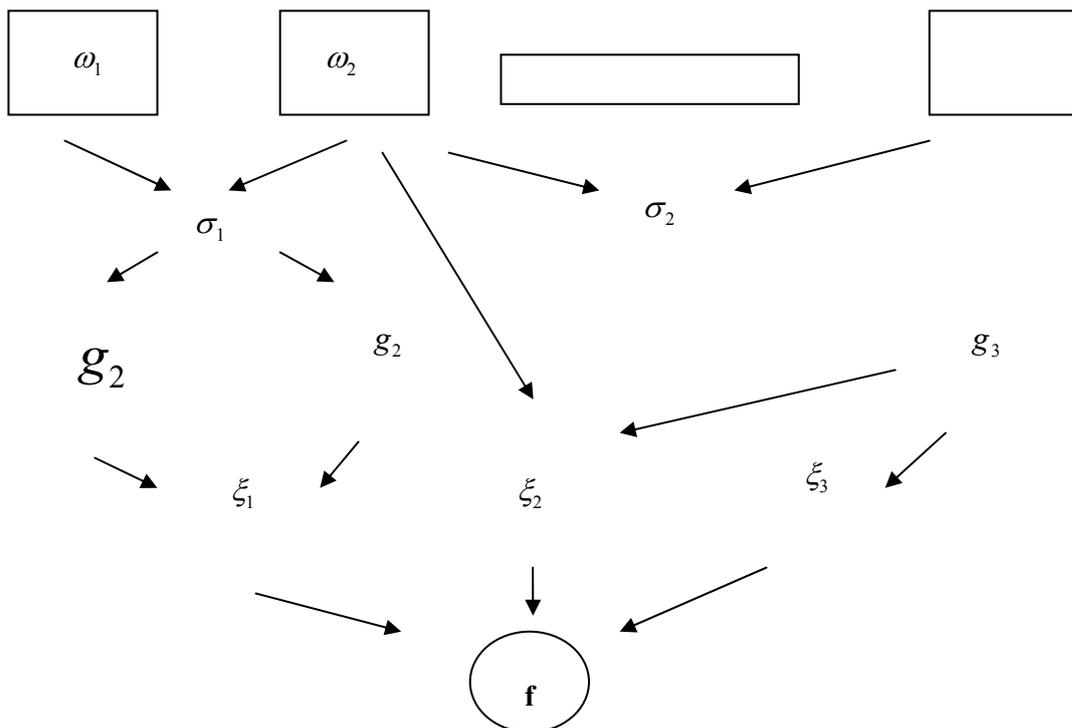


Рисунок 6.2 – Граф прогноза ((ω, f) – граф)

Начальные – стартовые параметры, обозначены $\omega_i, i = 1 \div \dots$ служат параметрами – аргументами это начальный – самый верхний уровень. Например, это данные геофизических исследований. Далее следуют несколько уровней промежуточных параметров, которые связаны с начальными как прямыми связями так и с помощью других промежуточных параметров. Кроме того они связаны между собой.

Анализ графа прогноза параметров позволяет выделить простейшие элементы графа.

- Линейную цепочку (рис. 3):

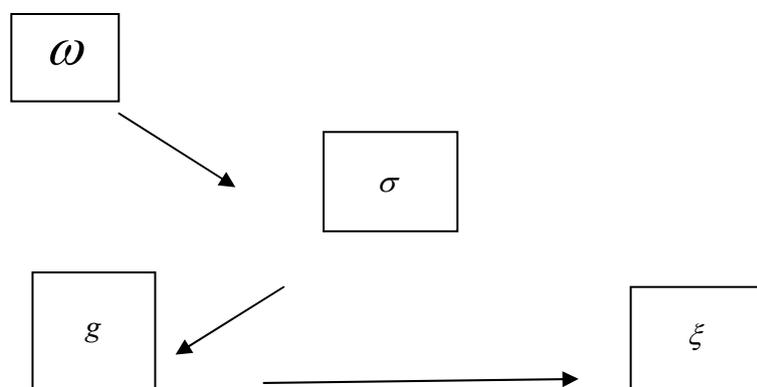


Рисунок 6.3 – Линейная цепочка графа прогноза

Линейная цепочка может иметь различную длину. Прогнозирование осуществляется по правилу (6.25).

- Элемент «Стрелочка» в графе обозначает связь между параметрами, реализованную в форме поля рассеяния между двумя параметрами, например ω и σ с помощью данных $\mathfrak{A}_i: \mu_{\mathfrak{A}_i}(\omega, \sigma)$.
- Элемент «Узел» (рис. 4)

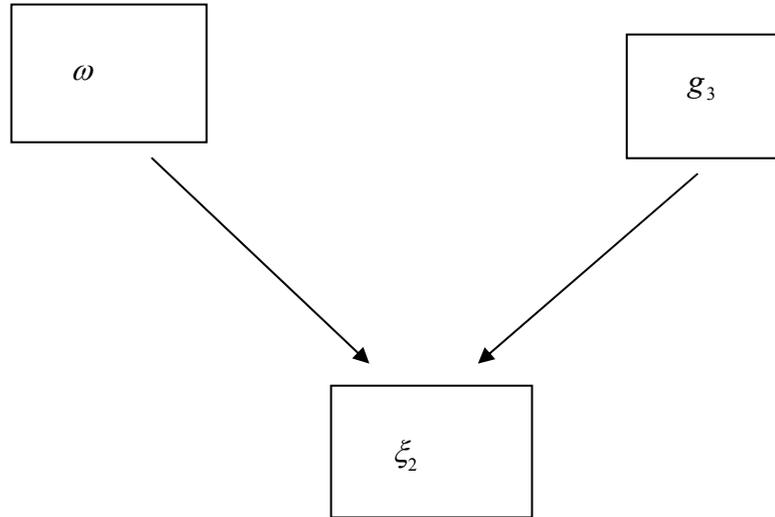


Рисунок 6.4 – Элемент «Узел»

Элемент узел представляет собой прогноз поля рассеяния феноменологически одного и того же параметра – ξ_2 , но реализованного с помощью различных цепочек и потому приводящих к различным полям рассеяния $\mu_{\{\omega, \xi_2\}}(\xi_2)$ и $\mu_{\{g_3, \xi_2\}}(\xi_2)$. Поле рассеяния $\mu(\xi_2)$ которое используется в последующей линейной цепочке, основанной на связи $\mu_{\{\xi_2, f\}}(\xi_2)$ следует вычислять как логическое пересечение $\mu_{\{\omega, \xi_2\}}(\xi_2)$ и $\mu_{\{g_3, \xi_2\}}(\xi_2)$:

$$\mu(\xi_2) = \min\left(\mu_{\{\omega, \xi_2\}}(\xi_2), \mu_{\{g_3, \xi_2\}}(\xi_2)\right). \quad (6.29)$$

Факт связи между параметрами g_1 и g_2 отдельно не учитывается, поскольку его учет автоматически реализуется через последовательность линейных цепочек:

$$\begin{aligned} \sigma &\Rightarrow (\sigma, g_1) \rightarrow g_1 \Rightarrow (g_1, \xi_1) \rightarrow \xi_1; \\ \sigma &\Rightarrow (\sigma, g_2) \rightarrow g_2 \Rightarrow (g_2, \xi_1) \rightarrow \xi_1, \end{aligned}$$

и узла $\min\left(\mu_{\{g_1, \xi_2\}}(\xi_2), \mu_{\{g_2, \xi_2\}}(\xi_2)\right)$.

6.5.2 Продвижение по графу

- Процесс прогнозирования реализуется от начальных – стартовых параметров через промежуточные к конечному по предусмотренным в графе

элементам. Каждый параметр, условно обозначим его s представляется в форме своего поля рассеяния $\mu(s)$, вычисляемого по (6.18), (6.19).

- Параметр β входящий в формулы подбирается так, чтобы наиболее рельефно отобразить особенности в неопределённости исходных данных сохраняя непрерывность значений поля на всем рассматриваемом диапазоне их значений.
- Для перехода от $\mu(s)$ к $\mu(q)$ необходима реализация операции (6.20) для чего должно быть вычислено $\mu_{2l}(s, q)$.
- Расчёт поля рассеяния, связывающего параметры s и q реализуется по правилу (6.11) ((6.17)).
- Если параметры s и q связаны более длинной цепочкой в состав которой не входит операция «узел», для расчёта поля рассеяния, характеризующего связь параметра аргумента и прогнозного параметра используется правило (6.26).
- Поле рассеяния для прогнозного параметра реализуется по правилу (6.20).
- Итоговый прогнозный параметр f рассчитывается в результате применения операции «узел», состоящей в вычислении по правилу (6.29) пересечения всех полей рассеяния для f , полученных по всем ветвям (ω, f) графа.
- Итоговое поле рассеяния $\mu(f)$ анализируется на предмет степени локализации. По результатам анализа принимается решение о необходимости его большей локализации, с помощью изменения использованного параметра β . В этом случае для различных значений этого параметра находится функция $\mu(f, -\beta)$ как решение уравнения

$$\int_{D(f)} \mu(\zeta, -\beta) \frac{1}{\beta^2} \exp\left(-\frac{|f - \zeta^2|}{\beta^2}\right) d\zeta = \mu(f), \quad (6.30)$$

либо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{D(f)} \mu(\zeta, -\beta) \frac{\beta}{|f - \zeta|^2 + \beta^2} d\zeta = \mu(f). \quad (6.31)$$

Здесь $\mu(\zeta, -\beta)$ трансформация исходного поля $\mu(\zeta)$ в сторону локализации источников этого поля на глубину β (продолжение в сторону источников). Параметр β подбирается эмпирическим так чтобы решение было рельефным и одно-

временно устойчивым эта операция реализуется с помощью приближенного устойчивого нахождения решения методом регуляризации и рассмотрена в учебном пособии автора [1].

- Рассматривается последовательность α сечений $\Omega^\alpha = \{f: \mu(f) < \alpha\}$, представляющих собой прогнозные модели, для изучаемого объекта (зависящие от пространственных координат), характеризуемого параметром f , дифференцируемые по степени условной достоверности.
- Строится и анализируется кривая локализации прогноза $f(\alpha)$ для каждой пространственной точки модели и делается вывод о значимости введенных прогнозных оценок.

Перспективы использования получаемых вариантов прогноза моделей с оценками их достоверности как α сечений прогнозных функций рассеяния для изучаемого параметра связаны с принятием решений о доразведке и разработке месторождений. Прежде всего оценка достоверности вариантов прогноза позволяет объективно оценивать возможные риски при принятии технологических решений. На полученных оценках достоверности компонент модели могут быть основаны технологии принятия оптимальных технико-экономических решений. Кроме того, распределение достоверности сконструированной модели по пространственным координатам, позволяет выработать рациональные объемы и комплекс методов доразведки месторождения.

Заключение

Системный анализ геолого-геофизической информации с целью моделирования строения геологических сред имеет в качестве своего предшественника методы комплексной интерпретации геолого-геофизических данных. В частности, методы системной инверсии – это развитие теории обратных задач комплексной интерпретации рассматриваемых как специальный класс обратных задач, особенностью которых служило совмещение различных по физическому содержанию частных физических моделей, адекватных наблюдаемым геофизическим полям [Кобрунов А. И. К теории комплексной интерпретации / А. И. Кобрунов // Геофизический журнал, 1980. – Т. 2. – № 2. – С. 31–38.]. Способом такого совмещения служит рассмотрение некоторой единой модели, связанной через корреляционные зависимости с различными физически содержательными моделями [Голиздра Г. Я. О формулировке задач комплексной интерпретации гравитационного поля и сейсмических наблюдений / Г. Я. Голиздра // Физика Земли, 1980. – №8. – С. 95–99., Старостенко В. И. Комплексная интерпретация данных сейсмометрии и гравиметрии. Принципы и методика. / В. И. Старостенко, А. С. Костюкевич, В. Г. Козленко // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1988. – № 4. – С. 33–50]. Другой способ – это построение системы взаимоувязанных принципом наилучшей близости системы моделей [1]. В этом же ряду декомпозиций находится и методы реализующие эволюционно-динамический подход к решению обратных задач.

Реальное значение эти методы приобретают при моделировании строения сложнопостроенных сред в условиях неопределённости. Простые, однородные среды достаточно эффективно изучаются традиционными методами по достаточным системам данных. Для сложных сред возникает дуализм между сложностью среды и достаточностью данных для изучения этой сложности. Чем более сложная среда тем больше данных требуется для её исчерпывающего описания. В конечном итоге сложность вводимых моделей, требующаяся для решения актуальных задач всегда опережает объем реально доступных данных для её реконструкции. Ситуация недоопределённости – это обычная ситуация в современных задачах моделирования и она потребовала развития специализированных на этом обстоятельстве методов. Но описанные методы формулировки и решения задач системной инверсии – это вычислительная компонента. Она обеспечивает вычислительными средствами задачу системного анализа и здесь в каждом конкретном случае необходимо тщательная проработка всех специфических деталей. Фрагментарно организованные данные, касающиеся различных компонент физико-геологических моделей с помощью доопределения кри-

териальными, согласовано-критериальными и эволюционно-динамическими принципами преобразуются в параметры моделей. Можно представить себе эту процедуру как пассивную томографическую систему, вырисовывающую различные фрагменты модели среды по разрозненным данным. В процессе системной инверсии участвуют не только связи между параметрами моделей и среды, которых не хватает для реконструкции но и связи между различными компонентами модели и перекрестные связи как дополнительный источник информации. В таком понимании методы системной инверсии трансформируются в томографическую геофизическую систему оперирующую разрозненными многокомпонентными и фрагментарными данными, как о полях так и связях между параметрами. Фрагментарность связана не только с ограничениями вытекающими из сложных условий производства работ, но и соотношения сложности модели – допустимые измерения. Методическое развитие этого направления – будущее развития теории интерпретации геолого-геофизических данных в сложных условиях и для сложнопостроенных сред.

В условиях недостатка информации любое прогнозирование неизбежно должно быть многовариантным с желательной оценкой меры доверия этих вариантов в целом и их компонент по отдельности. Тем более прогнозная модель не может быть одиночной в силу неоднородности среды, что выражено в рассеянии прогнозных параметров. Изложенный аппарат прогнозирования параметров, заполняющих геометрическое пространство модели, основанный на принципах нечёткого логического вывода это как раз тот инструмент, который обеспечивает такое многовариантное прогнозирование и оценку уровня доверия компонент модели. Дальнейшее продвижение в этом направлении связано, во-первых, с развитием методов принятия оптимальных решений, использующих построенные модели, распределение достоверности и функции локализации. Эти методы направлены на минимизацию технико-экономических рисков в принятии управленческих и технологических решений по доразведке и разработке месторождений. Во-вторых, методы прогнозирования на основе технологии нечёткого логического вывода могут быть распространены на задачи инверсии для уравнений, связывающие модели среды и модели поля. В этом случае будет получено оцененное по достоверности семейство решений обратных задач геофизики, что несомненно послужит повышением надежности результатов интерпретации отдельных методов геофизики. В третьих, эти методы могут быть распространены на задачи системной инверсии что обеспечит совершенно новый уровень эффективности и оценки надежности реконструкции моделей в сложных условиях недоопределённости.

Литература

1. Кобрунов А. И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие / А. И. Кобрунов. – М. : ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. – 286 с.
2. Никитин А. А. Теоретические основы обработки геофизической информации / А. А. Никитин. – М. : Недра, 1986. – 342 с.
3. Кузнецов О. Л. Геоинформационные системы: учебник для вузов / О. Л. Кузнецов, А. Никитин, Е. Н. Черемисина. – Государственный научный центр Российской Федерации – ВНИИГеосистем, 2005. – 346 с.
4. Михайлов В. О. Геодинамические модели и их применение при совместной интерпретации геологических и геофизических данных (обзор) / В. О. Михайлов [и др.] // Физика Земли, 2007. – №16. – С. 4–15.
5. Гзовский М. И. Основы тектонофизики / М. И. Гзовский. – М. : Наука, 1975. – 536 с.
6. Дмитриев В. И. (ред.). Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике: Справочник геофизика. – Недра, 1990
7. Krige, Danie G. (1951). "A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand". J. of the Chem., Metal. and Mining Soc. of South Africa 52 (6): 119–139
8. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики / Ж. Матерон. – 2013.
9. Дюбрул О. Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных //Издание EAGE. – 2002.
10. Демьянов В., Савельева Е. Геостатистика. Теория и практика //В. Демьянов, Е. Савельева. – 2010.
11. Гольцман Ф. М. Статистическая теория и методы многоальтернативного распознавания геолого-геофизических объектов по комплексу геоданных / Ф. М. Гольцман, Т. Б. Калинина // Сб. научн. трудов, ОИФЗ РАН, 1997. – С. 21
12. Никитин А. А. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения Земли. // Геофизика, № 4, 1997, с. 3–12
13. Бутковский А. Г. Характеристика систем с распределёнными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, глав изд. ф-м. лит., 1979. – 224 с.
14. Гольцман Ф. М. Статистические модели интерпретации / Ф. М. Гольцман. – М. : Наука, 1971. – 328с.

Предметный указатель

Абстрактная вычислительная схема эволюционной инверсии .. 126	Интегральные квадратичные критерии оптимальности..... 90
аппроксимационная модель 67	Интегрированная физико- геологическая модель 19
Аппроксимационная модель поля 35	Квазирешения 65
Аппроксимационные модели 32	Классы критериев..... 89
Аппроксимационный подход 66	Комплексные модели..... 35
Аппроксимационный принцип ... 48	Композиции Мамдани 142
Атрибуты поля..... 36	Конструктивность критерия 89
Второй принцип системного анализа 39, 43	Корреляционные критерии оптимальности..... 92
Геологический объект..... 23	Критериальные принципы доопределения задач инверсии 77
Геолого-геофизические связи .. 9, 26	Критериальный принцип..... 49
Геостатистика 132, 134	Критерий оптимальности 85
Граф прогноза 144	Линеаризация 70
Дальнейшие действия 115	Линейные обратные задачи гравиметрии..... 73
Декомпозиция 48	Модели объектов и их системная организация 21
Детерминированные связи 36	Модели поля 35
Дефазификация 141	Модели эффективного параметра 34
Деформационная компонента эволюции 113	Моделирование геологических сред 18
Дивергентная компонента эволюции 113	Моделирование сред..... 18
Дивергентное преобразование ... 114	Моделирование физических полей..... 28
Дилатационные преобразования 114	Моделирования полей 20
Динамические модели..... 33	Моделирования физико- геологических процессов 20
Дискретная модель поля 35	Модель геофизического метода .. 28
<i>Инверсия</i> 19	Модель денудации рельефа 45
Инверсия для распределённых параметров 108	Модель диффузии параметров .. 138
Инверсия для структурных моделей..... 117	

Модель связей	36	Распределённые параметры	58
Модуль непрерывности	63	Связь между экстремальными	
Наблюдаемые	29	классами	104
Неопределённости в задании		Сдвига преобразования	114
связей	55	Сдвиговая компонента	
Неопределённость исходных		эволюции	113
данных	53	Синтез интегрированной ФГМ....	50
Неопределённость наблюдаемых	53	Синтез результатов	50
Нормальное решение	63	Системная инверсия.....	21, 47
Нормальное эквивалентное		Системный анализ в прикладной	
решение	70	геофизике	21
Нормирующий коэффициент	140	Скрытая эквивалентность	61
Нулевое приближение.....	86	Согласованно-критериальный	
Обобщённая интегрированная		принцип	49
модель	18	Содержательность критерия	90
Обобщённая физико-		Содержательные модели	34
геологическая модель.....	19, 25	Стартовые параметры.....	145
Операторы (сист. анализ)	43	Теоретическая эквивалентность ..	57
Операторы прямой задачи	44	Третий принцип системного	
Параметр релаксации	116, 121	анализа.....	39, 45
Параметризации моделей	31	Уравнение движения	45
Первый принцип системного		Уравнения математической	
анализа	38, 39	физики	28
Поле рассеяния	137, 138	Условие калибровки	110
Почти идеальный		Физическая модель	25, 40
экстремальный класс.....	91, 103	Формально-эквивалентные	
Практическая эквивалентность....	60	модели	34
Принцип содержательности	67	Функция локализации.....	143
Принципом единственности.....	67	Функция правдоподобия	85
Природа неопределённости.....	52	Функция принадлежности.....	136
Проблема параметризации	77	Цепные правила.....	140
Прогнозирования параметров	143	Эволюционно динамические	
Равномерные критерии		принципы	105
оптимальности	96	Эволюционно-динамическая	
Распределение концентрации.....	135	инверсия	108

Эволюционно-динамические уравнения	46	Элемент «Узел»	146
Эволюционно-динамический принцип	49	Эталонирующие преобразования	30
Эвристические связи	37	Эффект скрытой эквивалентности	62
Экспонента от оператора	111	Эффективные модели	34
Экстремальные классы	69, 90	Эффективным параметр глубины диффузии	137
Элемент «Стрелочка»	146		

Учебное издание

Кобрунов Александр Иванович

**Математические методы моделирования
в прикладной геофизике (избранные главы)**

Часть 2

Системный анализ и моделирование в условиях неопределённости

Учебное пособие

План 2014 г., позиция 131. Подписано в печать 28.11.2014 г.

Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.

Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 150 экз. Заказ №290.

Ухтинский государственный технический университет.

169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Первомайская, д. 13.

Типография УГТУ.

169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Октябрьская, д. 13.