В. Ф. Пивень

Математические модели фильтрации жидкости

Орёл 2015

ББК 22.365
УДК 532.546
П 32

Печатается по рекомендации
редакционно-издательского совета
ФГБОУ ВПО «Орловский
государственный университет»
(протокол № 3 от 23.10.2014 г.)

Пивень В. Ф.

П 32 Математические модели фильтрации жидкости. — Орёл: Издательство ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», ПФ «Картуш», 2015. — 408 с.

ISBN 978-5-9708-0470-4

Изложена теория математических моделей фильтрации жидкости в анизотропной неоднородной пористой среде на основе теории обобщённых аналитических функций и обобщённого потенциала. Решены в конечном виде и численно на основе метода дискретных особенностей трёхмерные и двумерные граничные задачи фильтрации однородной жидкости и задачи эволюции границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости, плотности), которые представляют интерес для практики разработки нефтеносных (водоносных) пластов грунта сложной геологической структуры и мониторинга загрязнения грунтовых вод в таких пластах.

Монография предназначена широкому кругу научных работников, специалистам в области гидродинамики, фильтрации жидкости, математической физики и численных методов, а также студентам, аспирантам и преподавателям вузов.

Ил. 33. Библиогр. 179 назв.

Книга издана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-97522 р_центр_а).

ББК 22.365
УДК 532.546

ISBN 978-5-9708-0470-4

Оглавление

Светлой памяти
Ольги Владимировны
Голубевой
посвящается

Предисловие

Для решения современных прикладных задач фильтрации жидкости в пористой среде используются математические модели. Это относится в первую очередь к основному закону фильтрационных течений жидкости — закону Дарси и его обобщениям на случай пористой среды сложной структуры. В известных исследованиях [9, 27, 123, 125, 126, 149, 155, 156] используются, как правило, наиболее простые модели пористых сред. А именно, полагается, что пористая среда изотропная (однородная и неоднородная) либо среда ортотропная однородная и характеризуется симметричным тензором проницаемости второго ранга с постоянными компонентами. Решение современных проблем практики таких, как добыча флюидов (воды, нефти) из природных пластов грунта сложной геологической структуры (слоистых, трещиноватых, трещиновато-пористых), миграция загрязнений в таких пластах, требуют создания и исследования новых математических моделей фильтрационных течений с учётом усложнённой структуры пористых сред (грунтов). Для этого воспользуемся линейным законом Дарси, обобщённым на случай анизотропной неоднородной пористой среды, характеризуемой тензором проницаемости, компоненты которого, вообще говоря, несимметричные и зависят от координат точки в среде. Возможность и необходимость использования такого обобщённого закона Дарси отмечена в работах [66, с. 90; 126, с. 413].

Построению новых математических моделей фильтрационных течений в анизотропной неоднородной пористой среде и разработке математического аппарата их исследования посвящена эта монография, которая состоит из двух частей. В первой из них излагается теория математических моделей фильтрации жидкости в анизотропной и неоднородной пористой среде. Ставятся трёхмерные (двумерные) граничные задачи: первая и вторая краевые задачи (Дирихле и Неймана), задача сопряжения на границе раздела сред разных проницаемостей (проводимостей), задача эволюции границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости, плотности), исследуется разрешимость этих задач. Развивается математический аппарат решения этих задач, основанный на теории обобщённых аналитических функций и обобщённого потенциала для полученных канонических уравнений фильтрации.

Во второй части книги исследуются поставленные граничные задачи. Решения краевых задач и задачи сопряжения с каноническими границами находятся в конечном виде, а в случае произвольных гладких границ эти задачи редуцируются к системам сингулярных интегральных уравнений. Задача эволюции границы раздела жидкостей редуцируется к системе сингулярных интегральных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Исследуются актуальные задачи о работе скважин в анизотропных и неоднородных пластах с учётом подвижной границы раздела жидкостей различных физических свойств (водо-нефтяного контакта, границы загрязнения).

В монографии обобщены работы [3, 64, 65, 80, 94, 103–121, 144, 146, 170, 171], являющиеся результатом реализации проектов (научный руководитель В. Ф. Пивень), поддержанных Российским фондом фундаментальных исследований, а также Рособразованием по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)».

Монография предназначена широкому кругу научных работников, специалистам в области гидродинамики, фильтрации жидкости, математической физики и численных методов, а также студентам, аспирантам и преподавателям вузов.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность и признательность рецензентам монографии: доктору физ.-мат. наук, профессору Г.В. Голубеву, доктору физ.-мат. наук, профессору А.В. Сетухе и доктору физ.-мат. наук, профессору В.А. Толпаеву. Благодарю кандидата физ.-мат. наук, доцента Ю.С. Федяева, аспирантов О.В. Костина и Д.Г. Лекомцева, которые выполнили компьютерный набор и изготовили оригинал-макет книги.

Октябрь 2014 г. В.Ф. Пивень

Часть I

Теория математических моделей фильтрации

Излагается теория математических моделей фильтрации жидкости в анизотропной и неоднородной пористой среде. Ставятся основные граничные задачи и предлагаются методы их решений, основанные на теории обобщенных аналитических функций и обобщенного потенциала.

Глава 1

Основные уравнения и граничные задачи фильтрации

Указываются основные уравнения фильтрации несжимаемой жидкости в недеформируемой анизотропной и неоднородной пористой среде. Ставятся основные граничные задачи фильтрации в такой среде и исследуется единственность их решения.

§ 1.1. Основные уравнения

Обобщённый закон Дарси. Уравнение неразрывности. Взаимосвязь скорости фильтрации и физической скорости

Течение несжимаемой жидкости вязкости μ и плотности ρ в недеформируемой и, вообще говоря, анизотропной и неоднородной пористой среде описываем полями скоростей фильтрации $\vec{v}$ и давлений p, которые как функции координат точки M пространства, а в нестационарном случае и времени t (t — параметр) взаимосвязаны обобщённым законом Дарси [9, 66, 126][1]

$$\vec{v} = \frac{K}{\mu} \cdot (\rho \vec{F} - \nabla p) \tag{1.1.1}$$

и уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{1.1.2}$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона, $\vec{F}$ — действующая на жидкость массовая сила (сила $\vec{F}$ приходится на единицу массы жидкости), K — коэффициент проницаемости (проницаемость) пористой среды, характеризующий её

[1] В случае напорной фильтрации, когда $|\nabla p| \gg \rho F$, массовой силой $\vec{F}$ в законе (1.1.1) можно пренебречь. Уравнение (1.1.2) выполняется всюду в области, где отсутствуют источники (стоки) течения.

физические свойства. В случае анизотропной среды K — тензор второго ранга, который характеризуется матрицей[1]

$$K = (K_{ij}) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.1.3}$$

а в случае изотропной среды K — скаляр (тензор нулевого ранга). Проницаемость K зависит, вообще говоря, от координат точки M. В частности, если среда однородная, то проницаемость K постоянная (компоненты тензора $K = (K_{ij})$ не зависят от координат).

Пусть $\vec{F}$ — потенциальная[2] и, вообще говоря, нестационарная сила: $\vec{F} = -\nabla\Pi$, Π — потенциал. В частности, если $\vec{F}$ — сила тяжести ($\vec{F} = \vec{g}$, $\vec{g} = \overrightarrow{\text{const}}$ — ускорение свободного падения), то $\Pi = -\vec{g}\cdot\vec{r} + \text{const}$, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M. В этом случае закон (1.1.1) принимает вид

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu}\cdot\nabla(p + \rho\Pi). \tag{1.1.4}$$

Скорость фильтрации $\vec{v}$ и физическая скорость $d\vec{r}/dt$ взаимосвязаны равенством [9, 123, 149, 156]

$$m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \tag{1.1.5}$$

Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор малой частицы жидкости, находящейся в точке M пространства в момент t; m — просветность или поверхностная пористость, которая в общем случае пористой среды (анизотропной и неоднородной) зависит от положения точки M и ориентации сечения, проведённого в этой точке[3]. Далее полагаем, что в рассматриваемой области среды среднее значение просветности или поверхностной пористости постоянно и равно средней объёмной пористости среды в этой области. Согласно определению пористости среды её возможные значения $m \in (0,1)$.

---

[1] Возможность описания анизотропных сред тензором (1.1.3),вообще говоря, не симметричным, подтверждена экспериментально [10, 66]. Так как K — тензор, то закон (1.1.1) ковариантен (сохраняет форму записи) относительно преобразований координат. В случае изотропной среды (K — скаляр) при $\nabla p = 0$ векторы $\vec{F}$ и $\vec{v}$ в законе (1.1.1), естественно, совпадают по направлению.

[2] Далее исследуем течения в случае, когда $\vec{F}$ — потенциальная сила.

[3] В книге [9] обсуждается возможность характеризовать анизотропную среду матрицей коэффициентов просветности.

Выражения (1.1.1) (в случае потенциальной силы $\vec{F}$ — это (1.1.4)), (1.1.2) и (1.1.5)[1] — *основные уравнения* фильтрации в пористой среде.

Уравнения в безразмерных величинах

При исследовании задач практики целесообразно использовать безразмерные координаты $\vec{r'} = \vec{r}/L_0$, время $t' = t/T_0$, скорость $\vec{v'} = \vec{v}/V_0$, давление $p' = p/P_0$, вязкость $\mu' = \mu/\mu_0$, плотность $\rho' = \rho/\rho_0$, проницаемость среды $K' = K/K_0$ ($K'_{ij} = K_{ij}/K_0$, $i, j = 1, 2, 3$), потенциал $\Pi' = \Pi/\Pi_0$, оператор Гамильтона $\nabla' = L_0 \nabla$. Здесь L_0, T_0, V_0, P_0, μ_0, ρ_0, K_0 и Π_0 — характерные значения соответствующих величин, которые взаимосвязаны равенствами

$$P_0 = \rho\Pi, \qquad \frac{K_0 \rho_0 \Pi_0}{\mu_0 L_0 V_0} = 1, \qquad \frac{m L_0}{T_0 V_0} = 1. \tag{1.1.6}$$

Учитывая равенства (1.1.6), записываем основные уравнения (1.1.2), (1.1.4) и (1.1.5) в безразмерных величинах (штрихи опускаем):

$$\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi \qquad \left(\varphi = -\frac{p + \rho\Pi}{\mu}\right), \tag{1.1.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.1.8}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \tag{1.1.9}$$

Как следует из закона (1.1.7), в котором $\varphi = \varphi(M, t)$ — скалярная функция, поле скоростей $\vec{v}$ в анизотропной или изотропной неоднородной среде не потенциально ($\nabla \times \vec{v} \neq 0$). Оно согласно уравнению (1.1.8) соленоидально. Если среда изотропная и однородная ($K = \mathrm{const}$), то φ — потенциал скорости. Поэтому в общем случае анизотропной и неоднородной среды назовём φ обобщённым потенциалом скорости[2].

---

[1] Далее исследуется задача эволюции границы раздела жидкостей, в которой (1.1.5) — дифференциальное уравнение границы и поэтому наряду с (1.1.1) и (1.1.2) является основным.

[2] В случае изотропной неоднородной среды φ называют квазипотенциалом [108]. Далее и в этом случае называем φ обобщённым потенциалом.

Уравнения в декартовых координатах

Используем ортогональную систему декартовых координат x_1 , x_2 , x_3 с ортами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и запишем радиус-вектор $\vec{r}$, скорость $\vec{v}$ и оператор Гамильтона ∇ :

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i x_i, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i v_i, \qquad \nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Следуя [19, 73], представим тензор проницаемости K как сумму трех диад

$$K = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \vec{K}_i = \vec{e}_1 \vec{K}_1 + \vec{e}_2 \vec{K}_2 + \vec{e}_3 \vec{K}_3, \tag{1.1.10}$$

где векторы $\vec{K}_i$ выражаются через компоненты K_{ij} этого тензора равенствами

$$\vec{K}_i = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j K_{ij} = \vec{e}_1 K_{i1} + \vec{e}_2 K_{i2} + \vec{e}_3 K_{i3}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.11}$$

Следовательно,

$$K = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \vec{e}_j K_{ij}. \tag{1.1.10$'$}$$

Согласно правилу скалярного произведения тензора на вектор справа [73] раскроем скалярное произведение тензора K на вектор $\nabla\varphi$ (иначе произведение суммы диад (1.1.10) на вектор $\nabla\varphi$ справа):

$$K \cdot \nabla\varphi = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \vec{K}_i \right) \cdot \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i (\vec{K}_i \cdot \nabla\varphi)$$

или, учитывая формулы (1.1.11), $\nabla\varphi = \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \vec{e}_k$ и, следовательно, $\vec{K}_i \cdot \nabla\varphi = \sum\limits_{j=1}^{3} K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, имеем

$$K \cdot \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \sum_{j=1}^{3} K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \tag{1.1.12}$$

Тогда обобщенный закон Дарси (1.1.7) примет вид

$$\vec{v} = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \tag{1.1.13}$$

Отсюда с учётом равенств (1.1.11) имеем прекции скорости на декартовые оси Ox_i:

$$v_i = \vec{K}_i \cdot \nabla\varphi \qquad \left(v_i = \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.14}$$

В проекциях на те же координатные оси записываем уравнения (1.1.8) и (1.1.9) в виде

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1.1.15}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.16}$$

Обобщённый закон Дарси в проекции на произвольное направление. Проницаемость пористой среды

Равенства (1.1.14) выражают проекции обобщённого закона Дарси на ортогональные координатные оси Ox_i, $i = 1, 2, 3$. Запишем его для ортогональной проекции на произвольное направление, задаваемое в произвольной точке $M = (x_1, x_2, x_3)$ пространства ортом $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ с направляющими косинусами $n_i = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i})$, $i = 1, 2, 3$. Учитывая равенства (1.1.14) и нормальную состовляющую скорости $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \sum\limits_{i=1}^{3} v_i n_i$, обобщённый закон Дарси запишем в проекции на направление $\vec{n}$:

$$v_n = \left(\sum_{i=1}^{3} n_i \vec{K}_i\right) \cdot \nabla\varphi = \sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \tag{1.1.17}$$

Запишем скорость (1.1.17) в другом виде. Будем интерпретировать выраженные формулой (1.1.11) векторы $\vec{K}_i$, $i = 1, 2, 3$ как векторы, характеризующие в точке M проницаемость пористой среды в направлении ортов

$\vec{e}_i$ координатных осей Ox_i $(i = 1, 2, 3)$. Назовём $\vec{K}_n$ — *вектором, характеризующим проницаемость пористой среды в точке M пространства в направлении орта $\vec{n}$*. Определим его как скалярное произведение тензора K (суммы диад (1.1.10) на орт $\vec{n}$ слева (его проекции K_{nj}, $j = 1, 2, 3$ на ортогональные декартовые оси и модуль $|\vec{K}_n| \equiv K_n = [\sum\limits_{j=1}^{3} K_{nj}^2]^{1/2}$):

$$\vec{K}_n = \vec{n} \cdot K = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{K}_i = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_j n_i K_{ij} \tag{1.1.18}$$

$$\left(K_{nj} = (\vec{n} \cdot K)_j = \sum_{i=1}^{3} n_i K_{ij}, \qquad K_n = |\vec{n} \cdot K| = \left[\sum_{j=1}^{3} \big(\sum_{i=1}^{3} n_i K_{ij}\big)^2\right]^{1/2}\right).$$

Направление вектора $\vec{K}_n$ в точке M пористой среды характеризуем ортом $\vec{\nu}_n = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ [1] с направляющими косинусами $\nu_j = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{e}_j})$, $j = 1, 2, 3$:

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{K}_n}{K_n} = \frac{\vec{n} \cdot K}{|\vec{n} \cdot K|} \tag{1.1.19}$$

$$\left(\nu_j = \frac{K_{nj}}{K_n} = \left(\sum_{i=1}^{3} n_i K_{ij}\right) \left[\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} n_i K_{ij}\right)^2\right]^{-1/2},\ j = 1, 2, 3\right).$$

Учитывая равенства (1.1.18) и (1.1.19), выражение обобщенного закона Дарси в проекции на направление орта $\vec{n}$ (1.1.17) запишем

$$v_n = \vec{K}_n \cdot \nabla\varphi = K_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \tag{1.1.20}$$

где производная по направлению орта $\vec{\nu}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \vec{\nu} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{3} \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{K_n} \sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.1.21}$$

Видно, что проекция скорости v_n на произвольное направление орта $\vec{n}$ в точке M определяется модулем K_n вектора проницаемости среды и производной обобщённого потенциала φ по направлению орта $\vec{\nu}$ в этой точке.

[1] Если $\vec{n}$ — орт нормали поверхности (кривой), то орт $\vec{\nu}$ называют конормалью. Орты $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$ совпадают $(\vec{\nu} \equiv \vec{n})$ в случае изотропной пористой среды.

В частности, если $\vec{n}$ совпадает с одной из координатных осей, например, i–ой осью ($\vec{n} = \vec{e}_i$, $n_i = 1$), то из (1.1.20) имеем проекцию скорости v_i в виде (1.1.14).

Найдём ортогональную проекцию вектора $\vec{K}_n$ на направление орта $\vec{n}$, обозначив её K_{nn}. Учитывая равенства (1.1.18), имеем (рис.1.1.1)

$$K_{nn} = \vec{K}_n \cdot \vec{n} = K_n \cos\alpha = \sum_{j=1}^{3} K_{nj} n_j = \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij} n_i n_j. \qquad (1.1.22)$$

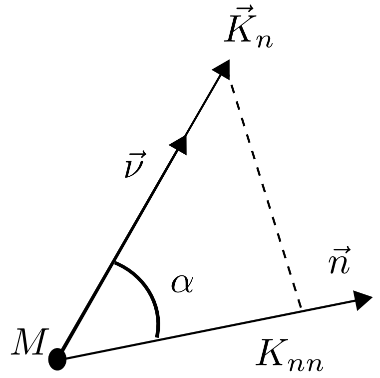

Рис. 1.1.1. Проницаемость пористой среды.

K_{nn} — скалярная величина, зависящая от проницаемости K среды в точке M и выбора направления орта $\vec{n}$ в ней. Заменяя в выражении K_{nn} тензор $K = (K_{ij})$ на транспонированный $K^T = (K_{ji})$, замечаем, что K_{nn} не изменяется:

$$K_{nn} = (\vec{n} \cdot K) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \cdot K^T) \cdot \vec{n}$$

или

$$K_{nn} = \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij} n_i n_j = \sum_{i,j=1}^{3} K_{ji} n_j n_i.$$

Это означает, что K_{nn} определяется только[1] симметричной частью $K_s = (K + K^T)/2$ ($K^s_{ij} = (K_{ij} + K_{ji})/2$, $i, j = 1, 2, 3$) тензора K:

$$K_{nn} = (\vec{n} \cdot K_s) \cdot \vec{n} = (K_s \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \sum_{i,j=1}^{3} K^s_{ij} n_i n_j. \qquad (1.1.23)$$

K_{nn} допускает интересную геометрическую интерпретацию. Пусть $\vec{n}$ является ортом радиус-вектора $\vec{\rho} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ некоторой переменной точки $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ пространства ($\vec{n} = \vec{\rho}/\rho$). Тогда формула (1.1.23) принимает вид

$$K_{nn}\rho^2 = (\vec{\rho} \cdot K_s) \cdot \vec{\rho} = (K_s \cdot \vec{\rho}) \cdot \vec{\rho} = \sum_{i,j=1}^{3} K^s_{ij}. \qquad (1.1.24)$$

---

[1] Действительно, $K_{nn} = (\vec{n} \cdot K) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \cdot K_s) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \cdot K_a) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \cdot K_s) \cdot \vec{n}$, так как для антисимметричной части $K_a = (K - K^T)/2$ тензора K имеем $(\vec{n} \cdot K_a) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \cdot K) \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot K^T) \cdot \vec{n} \equiv 0$.

Следуя [73], симметричному тензору K_s однозначно сопоставим поверхность второго порядка, уравнение которой

$$\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}^{s}\xi_i\xi_j = 1. \tag{1.1.24$'$}$$

Компоненты тензора K_{ij}^{s} однозначно определяют поверхность, которую назовём поверхностью *тензорного эллипсоида проницаемости пористой среды.* Эта поверхность представляет собой геометрическое место точек $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ концов радиус-векторов $\vec{\rho}$, проведённых из точки $M = (x_1, x_2, x_3)$ пространства, которая принимается за центр этой поверхности (рис. 1.1.2). Из равенств (1.1.24) и (1.1.24$'$) следует, что расстояние $MP = \rho$ определяется значением K_{nn} в точке $M : \rho = 1/\sqrt{K_{nn}(M)}$, причём $K_{nn}(M) > 0$.

Таким образом, геометрический смысл K_{nn} состоит в том, что K_{nn} определяет расстояние $\rho = 1/\sqrt{K_{nn}(M)}$ от точки M до точки P поверхности тензорного эллипсоида проницаемости среды, с которой пересекается направление орта $(\vec{n} = \vec{\rho}/\rho)$ в точке M.

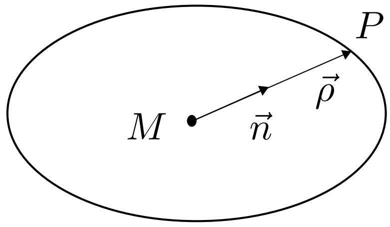

Рис. 1.1.2. Тензорный эллипсоид проницаемости пористой среды.

Можно придать K_{nn} определенный физический смысл. Выберем орт $\vec{n}$ в точке M в направлении вектора $\nabla\varphi$ в этой точке $(\nabla\varphi = |\nabla\varphi|\vec{n})$. Обозначим $\vec{v}_n = v_n\vec{n}$ и учитываем равенства (1.1.20) и (1.1.22), запишем[1]

$$\vec{v}_n = K_{nn}\nabla\varphi \quad (v_n = K_{nn}|\nabla\varphi|). \tag{1.1.25}$$

Выражение (1.1.25) аналогично закону Дарси, записанному на направлении $\vec{n}$ в случае изотропной пористой среды (K_{nn} — аналог коэффициента проницаемости среды). Поэтому назовём K_{nn} *коэффициентом проницаемости пористой среды в направлении орта* $\vec{n}$*, совпадающим с направлением вектора* $\nabla\varphi$ $(\vec{n} = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|)$. Направление вектора $\vec{v}_n = v_n\vec{n}$ при $v_n > 0$ совпадает с направлением вектора $\nabla\varphi$, если коэффициент K_{nn} строго положителен ($K_{nn} > 0$). Это означает, что вектор скорости $\vec{v}$ составляет острый угол с направлением вектора $\nabla\varphi$ (вектора $\vec{v}$ и $\nabla\varphi$ сонаправлены в случае изотропной пористой среды). Это отвечает

[1] Равенство (1.1.25) в случае напорной фильтрации $|\nabla p| \gg \rho|\nabla\Pi|$ принято в книге [9] за основу определения направленной проницаемости анизотропной пористой среды.

естественному процессу фильтрации жидкости. Жидкость течёт в сторону уменьшения давления p (возрастания φ, так как $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$).

Далее будем рассматривать только такие анизотропные пористые среды, коэффициент проницаемости которых $K_{nn} > 0$ при произвольной ориентации орта $\vec{n}$ в каждой точке среды. Это означает, что угол $\alpha = (\vec{n}, \vec{\nu})$ между ортами $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ острый (рис. 1.1.1) и $\cos\alpha = K_{nn}/K_n > 0$.

Так как коэффициент $K_{nn} > 0$, то выражающая его согласно (1.1.23) квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{3} K_{ij}^s n_i n_j$ положительно определена. Тогда согласно [143] будет положительно определена матрица $K_s = (K_{ij}^s)$, представляющая собой симметричную часть тензора проницаемости среды. В соответствии с необходимым и достаточным критерием Сильвестера [143] квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{3} K_{ij}^s n_i n_j$ положительно определена в том и только в том случае, если строго положительны определители

$$\triangle_1 = K_{11}^s = K_{11} > 0,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} K_{11}^s & K_{12}^s \\ K_{21}^s & K_{22}^s \end{vmatrix} = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} K_{11}^s & K_{12}^s & K_{13}^s \\ K_{21}^s & K_{22}^s & K_{23}^s \\ K_{31}^s & K_{32}^s & K_{33}^s \end{vmatrix} = K_{11}K_{22}K_{33} + \tag{1.1.26}$$

$$+ \frac{1}{4}\Big[(K_{12} + K_{21})(K_{13} + K_{31})(K_{23} + K_{32}) -$$

$$- K_{11}(K_{23} + K_{32})^2 - K_{22}(K_{13} + K_{31})^2 - K_{33}(K_{12} + K_{21})^2\Big] > 0.$$

Уравнение для обобщённого потенциала

Исключая из законов (1.1.7) и (1.1.8) скорость $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, имеем уравнение относительно обобщённого потенциала

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla\varphi) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = 0. \tag{1.1.27}$$

Для отыскания решений уравнения (1.1.27) принципиально важно знать к какому типу оно относится. Чтобы установить тип этого уравнения, запишем его в виде

$$\sum_{i,j=1}^{3}\left(K_{ij}^{s}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=0, \qquad (1.1.28)$$

где $K_{ij}^{s}=(K_{ij}+K_{ji})/2$ — симметричная часть $K_s=(K_{ij}^{s})$ тензора $K = (K_{ij})$.

Полагаем, что коэффициенты K_{ij}, $i,j=1,2,3$ и их первые производные непрерывные в области D функции координат, а функция φ непрерывна вместе с её вторыми частными производными в этой области. Тогда согласно теории уравнений в частных производных второго порядка [18] уравнение (1.1.28) эллиптического типа в области D, если его характеристическая форма (λ_1, λ_2, λ_3 — вещественные параметры)

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}^{s}\lambda_i\lambda_j \qquad (1.1.29)$$

положительно (или отрицательно) определена в каждой точке $M \in D$. Согласно [143] в силу симметрии матрицы (K_{ij}^{s}) выражение (1.1.29) — квадратичная форма. Эта форма аналогична положительно определённой квадратичной форме (1.1.23) для коэффициента K_{nn}. Положительность квадратичной формы для K_{nn} выражают указанные ранее необходимые и достаточные условия (1.1.26). Эти же условия остаются в силе для положительной определённости формы (1.1.29). Следовательно, условия (1.1.26) являются необходимыми и достаточными для эллиптичности уравнения (1.1.28) или, что же то самое, уравнения (1.1.27).

Уравнения для поля скоростей

Получим уравнения для поля скоростей фильтрации. Наряду со скоростью $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ введём скорость $\vec{V}=(V_1,V_2,V_3)$, которую назовём *приведённой* скоростью, которая связана с обобщённым потенциалом φ равенством

$$\vec{V}=\nabla\varphi \qquad \left(V_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad i=1,2,3\right). \qquad (1.1.30)$$

Полагаем, что тензор проницаемости среды K невырожденный, то есть его определитель

$$D(K) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, следуя [7, 142], находим тензор K^{-1}, обратный K:

$$K^{-1} = \frac{\widetilde{K}^T}{D(K)} \qquad \left(K_{ij}^{-1} = \frac{\widetilde{K}_{ji}}{D(K)}, \quad i,j = 1,2,3\right). \tag{1.1.31}$$

Здесь использована матрица $\widetilde{K} = (\widetilde{K}_{ij})$, в которой элемент $\widetilde{K}_{ij}$ есть алгебраическое дополнение элемента K_{ij} в матрице $K = (K_{ij})$: $\widetilde{K}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (M_{ij} — минор элемента K_{ij}, то есть определитель второго порядка, получающийся после вычеркивания из определителя $D(K)$ i-ой строки и j-го столбца). Транспонированная матрица $\widetilde{K}^T = (\widetilde{K}_{ji})$ называется присоединённой для матрицы $K = (K_{ij})$.

Используя обобщённый закон Дарси (1.1.7), находим прямую (с учётом равенств (1.1.14), (1.1.30) и обратную (с учётом равенства (1.1.31)) связь векторов $\vec{v}$ и $\vec{V}$:

$$\begin{gathered} \vec{v} = K \cdot \vec{V} \qquad \left(v_i = \vec{K}_i \cdot \vec{V} = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} V_j, \quad i = 1,2,3\right), \\ \vec{V} = K^{-1} \cdot \vec{v} \qquad \left(V_i = \frac{1}{D(K)} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{K}_{ji} v_j, \quad i = 1,2,3\right). \end{gathered} \tag{1.1.32}$$

Учитывая уравнение неразрывности (1.1.8) и равенства (1.1.30)-(1.1.32), имеем системы уравнений для скорости $\vec{v}$:

$$\nabla \times (K^{-1} \cdot \vec{v}) = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1.1.33}$$

и приведённой скорости $\vec{V}$:

$$\nabla \times \vec{V} = 0, \qquad \nabla \cdot (K \cdot \vec{V}) = 0. \tag{1.1.34}$$

Видим, что поле скоростей $\vec{v}$ соленоидально ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$), а поле приведённых скоростей $\vec{V}$ потенциально ($\nabla \times \vec{V} = 0$).

Уравнения фильтрации в частных случаях пористой среды

Рассмотрим частные случаи анизотропной и, вообще говоря, неоднородной пористой среды[1]. Среду характеризуем тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, компоненты которого K_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ моделируем непрерывно дифференцируемыми (хотя бы один раз) функциями координат.

1. Изотропная среда. В случае изотропной среды проницаемость K — скалярная функция (тензор нулевого ранга): $K_{ij} = K\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Обобщённый закон Дарси (1.1.7) принимает вид

$$\vec{v} = K\nabla\varphi \qquad \left(v_i = K\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3\right). \tag{1.1.35}$$

Уравнения (1.1.27), (1.1.33) и (1.1.34) принимают следующий вид: для обобщённого потенциала φ

$$\nabla\cdot(K\nabla\varphi) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{1.1.36}$$

поля скорости $\vec{v}$

$$\nabla\times\frac{\vec{v}}{K} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{1.1.37}$$

и поля приведённой скорости $\vec{V}$

$$\nabla\times\vec{V} = 0, \qquad \nabla\cdot(K\vec{V}) = 0. \tag{1.1.38}$$

Скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$ взаимосвязаны равенством $\vec{v} = K\vec{V}$.

Если изотропная среда однородная $K = K_0 = \mathrm{const}$, то из формул (1.1.35)–(1.1.38) следует: закон Дарси $\vec{v} = K_0\nabla\varphi$, уравнение Лапласа ($\varphi$ — потенциал скорости — гармоническая функция)

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0,$$

а поле скоростей $\vec{v}$ ($\vec{v} = K_0\vec{V}$) потенциально и соленоидально:

$$\nabla\times\vec{v} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0.$$

[1] Возможные тензоры проницаемости пористых сред указаны в книге [9].

2. Среда с раздельной анизотропией и неоднородностью. Рассмотрим случай пористой среды, когда её тензор проницаемости можно представить следующим образом

$$K = k\chi \qquad (K_{ij} = k_{ij}\chi, \quad i,j = 1,2,3), \tag{1.1.39}$$

где χ — функция координат (хотя бы один раз непрерывно дифференцируемая), $k = (k_{ij})$ — тензор второго ранга, компоненты которого k_{ij} — постоянные. Пористую среду с тензором проницаемости (1.1.39) назовём средой с *раздельной анизотропией и неоднородностью.*

В этом случае обобщенный закон Дарси (1.1.7) принимает вид

$$\vec{v} = \chi k \cdot \nabla\varphi \qquad (v_i = \chi \sum_{i=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3).$$

Уравнение для обобщённого потенциала (1.1.27) запишем

$$\nabla \cdot (\chi k \cdot \nabla\varphi) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\chi k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) = 0. \tag{1.1.40}$$

Поля скоростей $\vec{v}$ и $\vec{V}$ в этом случае взаимосвязаны согласно (1.1.32) и (1.1.39) равенствами

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \chi k \cdot \vec{V} \qquad (v_i = \chi \sum_{j=1}^{3} k_{ij}V_j, \quad i = 1,2,3), \\ &\vec{V} = \frac{k^{-1}\cdot\vec{V}}{\chi} \qquad (V_i = \frac{1}{\chi D(k)} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{k}_{ji}v_j, \quad i = 1,2,3), \end{aligned} \tag{1.1.41}$$

где k^{-1} — тензор, обратный тензору k, который определяется формулами вида (1.1.31).

Уравнения для скорости (1.1.33) и приведённой скорости (1.1.34) с учётом равенства (1.1.39) принимают вид

$$\nabla \times [\chi(k^{-1}\cdot\vec{v})] = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{1.1.42}$$

и

$$\nabla\times\vec{V} = 0, \qquad \nabla\cdot[\chi(k\cdot\vec{V})] = 0. \tag{1.1.43}$$

3. Ортотропная среда. Исследования [66] показали, что пористые среды могут обладать взаимно-ортогональными главными направлениями (осями) анизотропии. Такие среды называют *ортотропными.* Для ортотропных сред тензор проницаемости $K = (K_{ij})$, симметричен ($K_{ij} = K_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$) в системе ортогональных осей координат с любой их ориентацией в пространстве. Если оси координат $Ox_1x_2x_3$ выбрать специальным образом: ориентировать их вдоль главных направлений анизотропии, то тензор K принимает диагональный вид: $K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ (δ_{ij} — символ Кронекера) или

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.44}$$

В этом случае обобщённый закон Дарси (1.1.7) принимает вид

$$\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi \qquad (v_i = K_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3). \tag{1.1.45}$$

Уравнение для обобщённого потенциала (1.1.27) с учётом тензора проницаемости (1.1.44) запишем следующим образом

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla\varphi) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{1.1.46}$$

Скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$ взаимосвязаны согласно (1.1.32) равенствами

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} K_i V_i \vec{e}_i \qquad (v_i = K_i V_i, \quad i = 1, 2, 3),$$

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{K_i} \vec{e}_i \qquad (V_i = \frac{v_i}{K_i}, \quad i = 1, 2, 3),$$

и уравнения для них (1.1.33) и (1.1.34) принимают вид

$$\nabla \times \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{K_i} \vec{e}_i = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{V} = 0, \qquad \nabla \cdot \sum_{i=1}^{3} K_i V_i \vec{e}_i = 0.$$

Заметим, что в случае ортотропной пористой среды с раздельной анизотропией и неоднородностью, когда $K_i = k_i \chi$, $i = 1, 2, 3$ уравнение (1.1.46) можно преобразовать к виду, характерному для случая изотропной неоднородной пористой среды (см. § 7.1).

Основные уравнения в криволинейных ортогональных координатах

Запишем обобщённый закон Дарси (1.1.7) и уравнение неразрывности (1.1.8) в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 с ортами $\vec{e}_1^*$, $\vec{e}_2^*$, $\vec{e}_3^*$, направленными по касательным к координатным линиям в точке M пространства в сторону возрастания, соответственно, q_1, q_2, q_3. Положение точки M можно характеризовать радиус-вектором $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ или декартовыми координатами x_1, x_2, x_3, или же криволинейными координатами q_1, q_2, q_3, причём

$$q_i = q_i(\vec{r}) = q_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.47}$$

Преобразование координат (1.1.47) взаимно однозначно для любой точки M области D, если якобиан $\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0$ в этой области. В этом случае равенства (1.1.47) можно разрешить:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \qquad (x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3). \tag{1.1.48}$$

Используя (1.1.48), вычислим производные $\partial\vec{r}/\partial q_i$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку при вычислении, например, $\partial\vec{r}/\partial q_1$ полагаются q_2 и q_3 постоянными, то радиус-вектор $\vec{r}$ описывает координатную линию q_1 и поэтому вектор $\partial\vec{r}/\partial q_1$ направлен по орту $\vec{e}_1^*$ касательной к этой линии, то есть $\partial\vec{r}/\partial q_1 = H_1 \vec{e}_1^*$ $(H_1 = |\partial\vec{r}/\partial q_1|)$ Следовательно, имеем

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_1^*, \quad i = 1, 2, 3,$$

где H_i коэффициенты Ламэ:

$$H_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{1.1.49}$$

Тогда находим бесконечно малое изменение радиус-вектора

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^{3} H_i dq_i \vec{e}_i^{\,*}$$

и его проекции dS_i на направления ортов $\vec{e}_i^{\,*}$:

$$dS_i = H_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1.50}$$

Учитывая равенства (1.1.49) и (1.1.50), и представляя вектор скорости через его проекции: $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i^{\,*}$, находим следуя [73]:

$$\nabla\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial S_i} \vec{e}_i^{\,*} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \vec{e}_i^{\,*}, \tag{1.1.51}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right]. \tag{1.1.52}$$

Тогда запишем в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 с учётом (1.1.51) обобщённый закон Дарси (по аналогии с тем как были получены его выражения (1.1.13) и (1.1.14)):

$$\vec{v} = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i^{\,*} \frac{K_{ij}}{H_j} \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}, \tag{1.1.53}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{K_{ij}}{H_j} \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.54}$$

а на основании (1.1.52) имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} = 0. \tag{1.1.55}$$

Подставляя в уравнение (1.1.55) компоненты скорости (1.1.54), нетрудно получить уравнение относительно обобщённого потенциала φ в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3.

Обобщённые основные уравнения

Рассмотрим общий случай, когда в области D течения распределены его источники (стоки) с объёмной плотностью $\widetilde{\rho}$. Плотность $\widetilde{\rho}$ непрерывно зависит от координат точки M (а в нестационарном случае также времени t), если источники (стоки) распределены непрерывно. Плотность $\widetilde{\rho}$ — сингулярная функция, если источники (стоки) дискретные, расположенные в конечном числе изолированных точек области D.

Обобщая на этот случай уравнения (1.1.27), (1.1.33) и (1.1.34), имеем уравнения: для обобщённого потенциала φ

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla\varphi) = \widetilde{\rho} \quad \text{или} \quad \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \widetilde{\rho}, \tag{1.1.56}$$

поля скоростей $\vec{v}$

$$\nabla \times (K^{-1} \cdot \vec{v}) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = \widetilde{\rho} \tag{1.1.57}$$

и поля приведённых скоростей $\vec{V}$

$$\nabla \times \vec{V} = 0, \quad \nabla \cdot (K \cdot \vec{V}) = \widetilde{\rho}.$$

Если в рассматриваемой области D отсутствуют источники (стоки), то в указанных уравнениях $\widetilde{\rho} = 0$.

§ 1.2. Уравнения двумерной фильтрации

Уравнения в криволинейных ортогональных координатах

Записанные выше в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 основные уравнения фильтрации представим в двумерном случае. Пусть течение двумерное и происходит вдоль координатной поверхности $q_3 = \mathrm{const}$. Это означает, что составляющая скорости $v_3 = 0$. Выберем составляющую массовой силы $F_3 = 0$. Полагаем, что вектор скорости $\vec{v} = (v_1, v_2)$, давление p, массовая сила $\vec{F} = (F_1, F_2)$ (потенциал Π) и, следовательно, обобщённый потенциал φ зависят только от двух координат q_1, q_2, а в нестационарном случае также от времени t. Коэффициенты Ламэ H_1, H_2, H_3 и тензор проницаемости (K_{ij}) среды в случае её неоднородности зависят только от q_1, q_2. Тогда в двумерном случае обобщённый закон Дарси (1.1.54) (его проекции на направление ортов $\vec{e}_1^{\,*}$ и $\vec{e}_2^{\,*}$) и уравнение неразрывности (1.1.55) принимают вид

$$v_1 = \frac{K_{11}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{K_{12}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \quad v_2 = \frac{K_{21}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{K_{22}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \tag{1.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 H_1 H_3) = 0. \tag{1.2.2}$$

Проекция обобщённого закона Дарси (1.1.54) на направление орта $\vec{e}_3^{\,*}$ с учётом $v_3 = 0$ приводит к равенству

$$\frac{K_{31}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{K_{32}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = 0.$$

Отсюда следует, что поскольку для произвольного двумерного течения $\partial\varphi/\partial q_1$ и $\partial\varphi/\partial q_2$ не равны нулю, то это течение возможно в такой анизотропной среде, для которой компоненты тензора проницаемости $K_{31} = 0$, $K_{32} = 0$[1].

Из формул (1.2.1) ясно, что двумерное течение определяется тензором

$$K = (K_{ij}) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.2.3}$$

который назовем *двумерным тензором* проницаемости пористой среды.

Компоненты тензора (1.2.3) удовлетворяют вытекающим из равенств (1.1.26) (после введения обозначения $\Delta_2 \equiv D(K_s)$) следующим условиям[2]

$$K_{11} > 0, \quad (K_{22} > 0), \quad D(K_S) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0. \tag{1.2.4}$$

Здесь $D(K_s)$ — определитель симметричной части $K_s = (K + K^T)/2$ $(K_{ij}^s = (K_{ij} + K_{ji})/2,\ i,j = 1,2)$ тензора (1.2.3). Для тензора (1.2.3) определитель $D(K) = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})$ строго положителен: $D(K) > 0$. Действительно, представляя его в виде $D(K) = D(K_s) + D(K_a)$, где $D(K_a) = (K_{12} - K_{21})^2/4$ — определитель антисимметричной части $K_a = (K - K^T)/2$, $(K_{ij}^a = (K_{ij} - K_{ji})/2$, $i,j = 1,2)$ тензора (1.2.3), и учитывая $D(K_s) > 0$, $D(K_a) > 0$, находим $D(K) > 0$.

[1]Компоненты тензора K_{13}, K_{23} и K_{33}, вообще говоря, не равны нулю.

[2]В условиях (1.2.4) $K_{11} > 0$ или $K_{22} > 0$ поскольку должно быть $D(K_s) > 0$.

Учитывая для $\nabla\varphi$ выражение (1.1.51) и тензор (1.2.3), запишем обобщённый закон Дарси для двумерного течения в виде $\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi$, аналогичном по форме представления для трехмерного случая.

Из уравнения (1.2.2) следует существование функции тока ψ, зависящей от координат q_1, q_2, а в нестационарном случае и от времени t, такой, что

$$v_1 = \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \quad v_2 = -\frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}. \tag{1.2.5}$$

Таким образом, согласно (1.2.1) и (1.2.5), скорость $\vec{v} = (v_1, v_2)$ выражается через обобщённый потенциал φ и функцию тока ψ формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{K_{11}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{K_{12}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \\ v_2 &= \frac{K_{21}}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{K_{22}}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Для двумерных течений скорость $\vec{v} = (v_1, v_2)$ и приведённая скорость $\vec{V} = (V_1, V_2)$ взаимосвязаны согласно (1.1.32) равенствами

$$\begin{gathered} v_1 = K_{11}V_1 + K_{12}V_2, \quad v_2 = K_{21}V_1 + K_{22}V_2, \\ V_1 = \frac{K_{22}v_1 - K_{12}v_2}{D(K)}, \quad V_2 = \frac{K_{11}v_1 - K_{21}v_2}{D(K)}. \end{gathered} \tag{1.2.7}$$

Учитывая равенства (1.2.6) и (1.2.7), приведенную скорость выразим через функции φ и ψ:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3 D(K)}\left(\frac{K_{12}}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{K_{22}}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right), \\ V_2 &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_3 D(K)}\left(\frac{K_{11}}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{K_{21}}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right). \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Выражения (1.2.6) и (1.2.8) можно рассматривать, как системы уравнений для обобщённого потенциала φ и функции тока ψ двумерного течения, записанного в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2. Эти системы взаимно эквивалентны. Это видно из того, что определяемые ими скорости $\vec{v} = (v_1, v_2)$ и $\vec{V} = (V_1, V_2)$ взаимосвязаны равенствами (1.2.7).

Системы уравнений (1.2.6) и (1.2.8) относятся к эллиптическому типу, поскольку компоненты тензора (K_{ij}) удовлетворяют условиям (1.2.4). Действительно, запишем эти системы уравнений в виде

$$a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}=\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\quad a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_1} \tag{1.2.9}$$

$$\left(a_{11}=\frac{H_2H_3K_{11}}{H_1},\quad a_{12}=H_3K_{12},\quad a_{21}=H_3K_{21},\quad a_{22}=\frac{H_1H_3K_{22}}{H_2}\right)$$

и

$$b_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+b_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\quad b_{21}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+b_{22}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \tag{1.2.10}$$

$$\left(b_{11}=\frac{H_2K_{11}}{H_1H_3D(K)}, b_{12}=\frac{K_{21}}{H_3D(K)}, b_{21}=\frac{K_{12}}{H_3D(K)}, b_{22}=\frac{H_1K_{22}}{H_2H_3D(K)}\right).$$

Следуя [32, с. 106], находим, что системы уравнений (1.2.9) и (1.2.10) относятся к эллиптическому типу, если их коэффициенты a_{ij} и b_{ij} $i,j=$ $=1,2$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &a_{11}>0\quad(a_{22}>0),\quad \Delta_a=a_{11}a_{22}-\left(\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\right)^2>0,\\ &b_{11}>0\quad(b_{22}>0),\quad \Delta_b=b_{11}b_{22}-\left(\frac{b_{12}+b_{21}}{2}\right)^2>0. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Условия (1.2.11) действительно выполняются, если учесть, что $\Delta_a=$ $=H_3^2D(K_s)$, $\Delta_b=D(K_s)/H_3^2D^2(K)$, тензор $K=(K_{ij})$ удовлетворяет условиям (1.2.4) и $D(K)>0$, а коэффициенты Ламэ положительные.

Из систем (1.2.9) и (1.2.10) следуют уравнения (также эллиптического типа) для обобщённого потенциала φ и функции тока ψ:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)=0, \tag{1.2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(b_{11}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+b_{12}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(b_{21}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}+b_{22}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)=0. \tag{1.2.13}$$

Уравнения (1.2.12) и (1.2.13) математически аналогичны. Если найдено решение одного из этих уравнений, то поле скоростей $\vec{v}$ (или $\vec{V}$) можно найти из равенств (1.2.6) и (или (1.2.8)).

Полученные уравнения двумерных течений нетрудно записать для рассмотренных в § 1.1 частных случаев пористых сред.

Запишем уравнения двумерных течений для следующих частных случаев: плоскопараллельного и осесимметричного течений и течения в тонком слое. Эти уравнения также будут эллиптического типа.

Уравнения плоскопараллельных течений

Если течение плоскопараллельное, то $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, и выбирая $q_1 = x$, $q_2 = y$ (x, y — декартовые координаты), уравнения (1.2.6), (1.2.12) и (1.2.13) запишем

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{D(K)}\left(K_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_{21}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{D(K)}\left(K_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] = 0. \tag{1.2.16}$$

Уравнения осесимметричных течений

В случае осесимметричного течения направим координатную ось Ox вдоль оси симметрии течения, а координатную ось Oy — перпендикулярно. Тогда $q_1 = x$, $q_2 = y \geqslant 0$ и $H_1 = H_2 = 1$, $H_3 = y$. Течение происходит в координатной полуплоскости $x \in (-\infty, \infty)$, $y \geqslant 0$, пересекающую ось Ox, и описывается следующими из(1.2.6), (1.2.10) и (1.2.13) уравнениями

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (y > 0), \tag{1.2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = 0 \quad (y > 0), \tag{1.2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{yD(K)}\left(K_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_{21}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{yD(K)}\left(K_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] = 0 \quad (y > 0). \tag{1.2.19}$$

Уравнения течений в тонком слое

Пусть двумерное течение происходит в слое с плоским основанием (подошвой). Полагаем, что слой тонкий, то есть его толщина H $(H > 0)$ гораздо меньше характерного размера слоя по его простиранию в направлении, параллельном основанию. Выберем в основании декартовые оси Ox и Oy $(q_1 = x,\ q_2 = y)$ и положим $H_1 = H_2 = 1,\ H_3 = H$. Уравнения (1.2.6), (1.2.10) и (1.2.13) в этом случае запишем[1]

$$v_x = K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (1.2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1.2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{D(P)}\left(P_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x} + P_{21}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{D(P)}\left(P_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] = 0. \quad (1.2.22)$$

Коэффициенты $P_{ij} = HK_{ij},\ i,j = 1,2$ — компоненты тензора второго ранга $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$. Определитель этого тензора $D(P) = H^2D(K) > 0$, поскольку в области течения определитель $D(K) > 0$ и толщина слоя $H > 0$.

Назовем $P = HK$ *проводимостью* слоя. Слой неоднородный, если его проводимость P (проницаемость K и/или толщина H) зависят от координат точек (x, y) его основания. Слой *однородный*, если его проводимость P (проницаемость K и толщина H) постоянны.

Сопоставим уравнения течения в слое переменной толщины H с соответствующими уравнениями плоскопараллельного и осесимметричного течений. Видим, что последние являются частными случаями уравнений течений в слое переменной толщины, когда слой имеет толщину (проводимость) $H = 1$ $(P = K)$ и $H = y$ $(P = yK)$.

Заметим, что из уравнений (1.2.8) нетрудно получить в рассмотренных частных случаях течений уравнения, аналогичные (1.2.14), (1.2.17) и (1.2.20).

---

[1] Уравнения (1.2.20) указаны в работах О.В. Голубевой [125]. Исследованию двумерных течений в анизотропных слоях посвящены работы [44-47, 49, 50, 139].

Уравнения течения в тонком слое в естественных осях координат

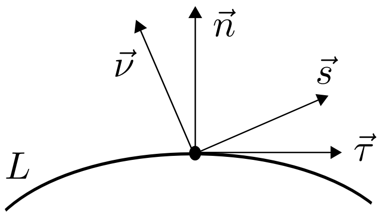

Рис. 1.2.1. Орты на кривой L.

Запишем уравнения (1.2.20) в естественных осях координат, связанных с произвольной гладкой кривой L (рис. 1.2.1). Находим проекции скорости $\vec{v}$ на направления ортов касательной $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ и нормали $\vec{n} = (n_1, n_2)$ кривой L (τ_1, τ_2 и n_2, n_1 — направляющие косинусы этих ортов, причём $\tau_1 = n_2$, $\tau_2 = -n_1$):

$$v_\tau = \vec{v} \cdot \vec{\tau} = v_x \tau_1 + v_y \tau_2, \quad v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = v_x n_1 + v_y n_2.$$

Учитывая выражения скоростей v_x, v_y из (1.2.20), находим

$$\begin{aligned} v_\tau &= (\tau_1 K_{11} + \tau_2 K_{21})\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\tau_1 K_{12} + \tau_2 K_{22})\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H}(\tau_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} - \tau_2 \frac{\partial \psi}{\partial x}), \\ v_n &= (n_1 K_{11} + n_2 K_{21})\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (n_1 K_{12} + n_2 K_{22})\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H}(n_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_2 \frac{\partial \psi}{\partial x}). \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

По аналогии с ортом (1.1.19) вводим в двумерном случае орты *конормали* $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ и *кокасательной* $\vec{s} = (s_1, s_2)$ кривой L (ν_1, ν_2 и s_1, s_2 — направляющие косинусы ортов $\vec{\nu}$ и $\vec{s}$):

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n} \cdot K}{|\vec{n} \cdot K|}, \qquad \vec{s} = \frac{\vec{\tau} \cdot K}{|\vec{\tau} \cdot K|} \tag{1.2.24}$$

$$\left(\begin{aligned} \nu_j &= \tfrac{(\vec{n} \cdot K)_j}{K_n} = \tfrac{1}{K_n} \sum_{i=1}^{2} n_i K_{ij}, K_n = |\vec{n} \cdot K| = \left[\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} n_i K_{ij} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ s_j &= \tfrac{(\vec{\tau} \cdot K)_j}{K_\tau} = \tfrac{1}{K_\tau} \sum_{i=1}^{2} \tau_i K_{ij}, K_\tau = |\vec{\tau} \cdot K| = \left[\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} \tau_i K_{ij} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right).$$

Углы между ортами $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$, $\vec{s}$ и $\vec{\tau}$ — острые, а в случае изотропной среды равны нулю. Орты $\vec{\nu}$ и $\vec{s}$, вообще говоря, взаимно не ортогональные[1].

[1] Орты $\vec{\nu}$ и $\vec{s}$ взаимно ортогональные в случае канонического слоя, характеризуемого тензором проводимости (проницаемости) частного вида (см. § 4.2).

Учитывая орты (1.2.24) и $\tau_1 = n_2$, $\tau_2 = -n_1$), составляющие скорости (1.2.23) запишем

$$v_\tau = K_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{H}\frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad v_n = K_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{1}{H}\frac{\partial \psi}{\partial l}, \tag{1.2.25}$$

где dl — элемент длины кривой L, на этой кривой $\partial\psi/\partial\tau = \partial\psi/\partial l$.

Назовем (1.2.25) системой уравнений для обобщённого потенциала φ и функции тока ψ течения в тонком слое в *естественных осях* с ортами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, связанных с произвольной гладкой кривой L. Если известны φ или ψ, течения, то на основании (1.2.25) можно найти его скорость $\vec{v} = (v_\tau, v_n)$.

Теперь запишем в естественных координатах для приведённой скорости $\vec{V}$ двумерной фильтрации в слое. Полагая в уравнениях (1.2.8) $q_1 = x$, $q_2 = y$ и $H_1 = H_2 = 1$, $H_3 = H$, имеем

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{HD(K)}\left(K_{12}\frac{\partial \psi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),\ V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{HD(K)}\left(K_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x} + K_{21}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right).$$

Тогда проекции вектора $\vec{V}$ на орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ кривой L:

$$V_\tau = \vec{V}\cdot\vec{\tau} = V_x\tau_1 + V_y\tau_2, \qquad V_n = \vec{V}\cdot\vec{n} = V_x n_1 + V_y n_2$$

с учётом $\tau_1 = n_2$ и $\tau_2 = -n_1$ запишем

$$V_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\tau_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\tau_2 = \frac{1}{HD(K)}\left[(n_1K_{11} + n_2K_{12})\frac{\partial \psi}{\partial x} + (n_1K_{21} + n_2K_{22})\frac{\partial \psi}{\partial y}\right],$$

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x}n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}n_2 = -\frac{1}{HD(K)}\left[(\tau_1K_{11} + \tau_2K_{12})\frac{\partial \psi}{\partial x} + (\tau_1K_{21} + \tau_2K_{22})\frac{\partial \psi}{\partial y}\right].$$

Используем транспонированный тензор $K^T = (K_{ji})$ и введём орты конормали $\vec{\nu}^T$ и кокасательной $\vec{s}^T$, которые назовём *транспонированными* по отношению к ковекторам (1.2.24), по формулам

$$\vec{\nu}^T = \frac{\vec{n}\cdot K^T}{|\vec{n}\cdot K^T|}, \qquad \vec{s}^T = \frac{\vec{\tau}\cdot K^T}{|\vec{\tau}\cdot K^T|}$$

$$\left(\begin{array}{l} \nu_j^T = \frac{(\vec{n}\cdot K^T)_j}{K_n} = \frac{1}{K_n^T}\sum\limits_{i=1}^{2} n_iK_{ji}, K_n^T = |\vec{n}\cdot K^T| = \left[\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{2} n_iK_{ji}\right)^2\right]^{1/2}, \\ s_j = \frac{(\vec{\tau}\cdot K^T)_j}{K_\tau} = \frac{1}{K_\tau^T}\sum\limits_{i=1}^{2} \tau_iK_{ji}, K_\tau^T = |\vec{\tau}\cdot K^T| = \left[\sum\limits_{j=1}^{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{2} \tau_iK_{ji}\right)^2\right]^{1/2} \end{array}\right).$$

Тогда находим

$$V_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{K_n^T}{HD(K)} \frac{\partial \psi}{\partial \nu^T}, \quad V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{K_\tau^T}{HD(K)} \frac{\partial \psi}{\partial s^T}. \tag{1.2.26}$$

Итак, имеем систему уравнений (1.2.26) для обобщённого потенциала φ и функции тока ψ в естественных ортогональных координатах с ортами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ кривой L. Она позволяет находить V_τ и V_n, составляющие вектора приведённой скорости $\vec{V}$, по известным функциям φ и ψ.

§ 1.3. Граничные и начальные условия

Роль граничных и начальных условий

Течение жидкости, как правило, происходит в некоторой области D анизотропной и неоднородной пористой среды с неподвижными границами. В случае кусочно-анизотропной и неоднородной пористой среды (или несмешивающихся жидкостей) имеем также неподвижную (или подвижную) гарницу сопряжения областей D_1 и D_2 различных проницаемостей пористых сред (вязкостей и плотностей жидкостей). В этом случае область течения $D = D_1 \cup D_2$.

Границы моделируем гладкими поверхностями (линиями — в двумерном случае). *Гладкой поверхностью (линией)* называют поверхность (линию), уравнение которой представляется функциями, непрерывно дифференцируемыми хотя бы один раз. Поверхность (линию) называют *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких поверхностей (линий).

Поверхности (линии) могут быть незамкнутыми или замкнутыми. Гладкую замкнутую линию называют *гладким контуром*. Контур кусочно-гладкий, если он состоит из конечного числа кусочно-гладких линий. Линии полагаем простыми (без самопересечений).

Орт $\vec{\tau}$ касательной к линии выберем в направлении ее обхода так, чтобы область D, ограниченная этой линией, оставалась слева при обходе. При этом орт $\vec{n}$ нормали к этой линии остаётся слева и направлен внутрь области D.

Орт $\vec{n}$ нормали в некоторой точке поверхности, ограничивающей область D, перпендикулярен к касательной плоскости, проведённой к этой поверхности. Орт $\vec{n}$ к поверхности (линии), являющейся границей раздела анизотропно-неоднородных сред (или жидкостей), выбирается во внутрь области D_1.

Полагаем, что источники (стоки) течения на границах отсутствуют, а значит описывающие течения функции не имеют на них изолированных особых точек.

Течение может быть стационарныи либо нестационарным. Нестационарность течения обусловлена нестационарностью его источников и стоков (изменением со временем их мощности и их движением), а также в случае нескольких жидкостей — движением границы их раздела.

Чтобы однозначно определить характеристики течения: обобщённый потенциал φ или поле скоростей $\vec{v}$, необходимо указать для них граничные условия, а в нестационарном случае так же начальные условия[1]. Условия на границах — это динамические или кинематические условия для φ или $\vec{v}$, отражающие физическую (техническую) специфику этих границ. Начальные условия состоят в том, что в некоторый (начальный) момент времени заданы φ и $\vec{v}$, а при наличии подвижной границы раздела жидкостей задано её положение в этот момент времени.

Сформулируем условия на неподвижных границах в предположении стационарности источников (стоков) течения. В нестационарном случае эти условия принципиально не изменятся: время t войдет в φ и $\vec{v}$ в виде параметра.

Условия для заданного на границе обобщённого потенциала (давления)

Пусть на границе σ_1 области D течения задано давление как непрерывная функция $p_0(M)$ координат точки M этой границы[2]:

$$p^+(M) = p_0(M), \quad M \in \sigma_1. \tag{1.3.1}$$

Условие (1.3.1) с учётом равенства $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$ запишем для обобщённого потенциала:

---

[1] Для описания двумерного течения используется также функция тока ψ с соответствующими граничными и начальными условиями.

[2] Здесь и далее « + » означает предельное значение соответствующей функции на границе при подходе со стороны орта $\vec{n}$ нормали к ней. Предельными значениями в условиях (1.3.1)–(1.3.4) следует понимать: $p^+(M) = \lim\limits_{M' \to M} p(M')$, $\varphi^+(M) = \lim\limits_{M' \to M} \varphi(M')$, $[K^{-1}(M)\vec{v}_M \times \vec{n}_M]^+ = \lim\limits_{M' \to M} [K^{-1}(M')\vec{v}_{M'} \times \vec{n}_M]$, где орт $\vec{n}_M$ нормали границы σ_1 направлен в область D и $M' \in D$.

$$\varphi^+(M) = f_0(M), \quad M \in \sigma_1, \tag{1.3.2}$$

где $f_0(M) = -[p_0(M) + \rho\Pi(M))]/\mu$.

Назовём (1.3.2) условием *первого* рода для обобщённого потенциала.

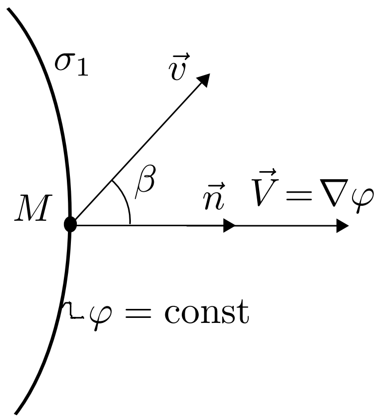

Рис. 1.3.1. Векторы скорости $\vec v$ и $\vec V$ на границе σ_1.

В случае напорной фильтрации, когда массовая сила $\vec F = -\nabla\Pi$ пренебрежимо мала по сравнению с гидродинамической силой, характеризуемой ∇p $(\rho F \ll |\nabla p|)$, то $\varphi = -p/\mu$. Тогда в условии (1.3.2) можно положить $\Pi(M) = 0$. Если кроме того давление на границе σ_1 постоянно $p_0(M) = \mathrm{const}$, то условие (1.3.2) принимает вид ($C_1 = \mathrm{const}$):

$$\varphi^+(M) = C_1, \quad M \in \sigma_1. \tag{1.3.3}$$

Не нарушая общности суждений, в условии (1.3.3) выберем $C_1 = 0$ и запишем

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_1. \tag{1.3.3$'$}$$

Условие (1.3.3) (или (1.3.3$'$)) означает, что вектор $\nabla\varphi$ (а значит вектор приведённой скорости $\vec V = \nabla\varphi$) коллинеален орту нормали $\vec n$ границы σ_1. Иначе говоря, составляющая скорости $\vec V_\tau^+(M) = [\vec V(M) \times \vec n_M]^+$, $M \in \sigma_1$, которая лежит в плоскости, касательной в точке M к поверхности σ_1 [1], будет равна нулю:

$$\vec V_\tau^+(M) = [\vec V(M) \times \vec n_M]^+ = 0, \quad M \in \sigma_1.$$

Тогда вектор скорости $\vec v(M)$, связанный с $\vec V(M)$ формулами (1.1.32), будет удовлетворять на этой границе условию

$$\big(K^{-1}(M)\vec v(M) \times \vec n_M\big)^+ = 0, \quad M \in \sigma_1. \tag{1.3.4}$$

Из условия (1.3.4) следует, что вектор $\vec v$ составляет с ортом $\vec n$, а значит с вектором $\vec V$, некоторый угол β (рис. 1.3.1). Так как в этом случае $\vec V = V\vec n$ и $\vec v = K \cdot \nabla\varphi = K \cdot \vec n V$, то

$$\cos\beta = \frac{\vec v \cdot \vec n}{v} = \frac{K_{nn}}{|K \cdot \vec n|},$$

[1] В двумерном случае вектор $\vec V_\tau^+$ направлен по касательной к кривой, моделирующей границу σ_1.

где $K_{nn} = (K_s \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$, $|K \cdot \vec{n}| = \left[\sum\limits_{i=1}^{3} \left(\sum\limits_{i=1}^{3} K_{ij} n_j \right)^2 \right]^{1/2}$. Поскольку $K_{nn} > 0$, то угол β острый. В случае изотропной пористой среды $\beta = 0$.

В случае напорной фильтрации условия (1.3.3) (или (1.3.3′)) и (1.3.4) выполняются на границе σ_1 большой каверны — области, полностью свободной от пористой среды (грунта) и заполненной неподвижной жидкостью.

Эти же условия имеют место на границе σ_1 большого открытого (сообщаются с атмосферой) водоема неподвижной жидкости, находящегося в однородном поле силы тяжести $\Pi(M) = -gz$, z — координата точки M, отсчитываемая от поверхности водоема по вертикали вниз). Полагая, что распределение давления в водоеме гидростатическое: $p(M) = p_a + \rho g z$ (p_a — постоянное атмосферное давление), с учётом равенства $\varphi(M) = [-p(M) + \rho g z]/\mu$ имеем условие вида (1.3.3), в котором $C_1 = -p_a/\mu$.

Условия на непроницаемой границе

В случае непроницаемой для жидкости границы σ_2 области D (расход жидкости через нее равен нулю) нормальная составляющая скорости течения $v_n(M) = \vec{v}(M) \cdot \vec{n}_M$ ($\vec{n}_M$ — орт нормали к σ_2) на этой границе равна нулю:

$$v_n^+(M) = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{v}(M) \cdot \vec{n}_M]^+ = 0, \quad M \in \sigma_2. \tag{1.3.5}$$

Видно, что вектор $\vec{v}(M)$ лежит в плоскости, касательной в точке M поверхности σ_2 [1].

Учитывая равенство (1.1.20) и что проницаемость среды $K(M) = (K_{ij}(M))$ не равна нулю на границе σ_2, условие (1.3.5) запишем для обобщённого потенциала[2]

$$\left(\vec{K}_n(M) \cdot \nabla\varphi(M)\right)^+ = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2. \tag{1.3.6}$$

[1] В двумерном случае вектор $\vec{v}(M)$ направлен по касательной в точке M кривой σ_2, моделирующей непроницаемую границу.

[2] Под предельными значениями в условии (1.3.6) следует понимать: $(\vec{K}_n(M) \cdot \nabla\varphi(M))^+ = \lim\limits_{M' \to M} [\vec{K}_n(M') \cdot \nabla\varphi(M')]$, $\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = \lim\limits_{M' \to M} \frac{\partial\varphi(M')}{\partial\nu_M} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\partial\varphi(\vec{r}_M + h\vec{\nu}_M)}{\partial\nu_M}$, $M \in \sigma_2$, где $M' \in D$, $M' \in \vec{\nu}_M$, $h = \text{const} > 0$, $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки M. Остальные предельные значения определяются аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте.

Здесь вектор $\vec{K}_n(M) \neq 0$ характеризует проницаемость среды в направлении орта $\vec{n}$ нормали к σ_2, производная по конормали $\partial/\partial\nu_M$ имеет вид (1.1.21). Назовём (1.3.6) условием *второго* рода для обобщённого потенциала.

Так как $\vec{K}_n(M) = K_n(M)\vec{\nu}_M$ и $\vec{V}(M) = \nabla\varphi(M)$, то условие (1.3.6) означает взаимную ортогональность вектора приведённой скорости $\vec{V}$ (или $\nabla\varphi$) и орта конормали $\vec{\nu}_M$ на границе σ_2:

$$\big(\vec{V}(M)\cdot\vec{\nu}_M\big)^+ = 0 \quad \text{или} \quad \big(\vec{\nu}_M\cdot\nabla\varphi(M)\big)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2.$$

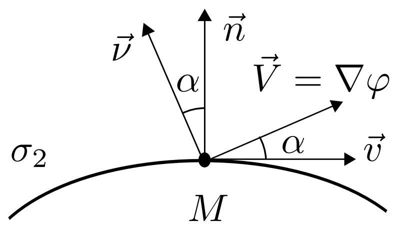

Рис. 1.3.2. Скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$ на границе σ_2.

В трёхмерном случае векторы скорости $\vec{v}$, $\vec{V}$ и орты $\vec{n}$, $\vec{\nu}$ в токе $M \in \sigma_2$ лежат, вообще говоря, в разных плоскостях. В двумерном случае они располагаются в одной плоскости и в силу указанной ортогональности $\vec{v} \perp \vec{n}$ и $\vec{V} \perp \vec{\nu}$ ($\nabla\varphi \perp \vec{\nu}$) углы между $\vec{v}$ и $\vec{V}$, $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ равны: $(\widehat{\vec{v},\vec{V}}) = (\widehat{\vec{n},\vec{\nu}}) = \alpha$ (рис. 1.3.2). Угол α — острый, так как для рассматриваемой пористой среды $\cos\alpha = \vec{n}\cdot\vec{\nu} = K_{nn}/K_n > 0$.

В двумерном случае условие (1.3.5) запишем для функции тока ψ. Воспользуемся вторым из равенств (1.2.25), записав его на непроницаемой граничной кривой σ_2:

$$v_n(M) = K_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M} = -\frac{1}{H(M)}\frac{\partial\psi(M)}{\partial l_M} = 0, \quad M \in \sigma_2.$$

Полагаем, что толщина слоя $H(M)$, $M \in \sigma_2$ конечная и не равна нулю. Имеем равенство $\partial\psi(M)/\partial l_M = 0$, $M \in \sigma_2$, интегрируя которое вдоль кривой σ_2, находим условие для функции тока $\psi(M)$ (кривая σ_2 — линия тока):

$$\psi^+(M) = C_2 \quad (C_2 = \text{const}), \quad M \in \sigma_2. \tag{1.3.7}$$

Не нарушая общности суждений, в условии (1.3.7) выберем $C_2 = 0$ и запишем (кривая σ_2 — «нулевая» линия тока):

$$\psi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_2. \tag{1.3.7$'$}$$

Условия на сингулярной границе

Границу $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ назовем *сингулярной*, если на ней проницаемость $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ (в двумерном случае проводимость слоя

$P = HK = H(K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, H — его толщина) обращается в бесконечность на σ_{01}, когда $K = \infty$ (H — конечно), и в ноль на σ_{02}, когда $K = 0$ (или/и $H = 0$).

Размеры, форма и положение границы σ_0 определяются зависимостью от координаты точки M проницаемости $K(M)$ (проводимости $P(M)$). Будем моделировать $K(M)$ ($P(M)$) такими функциями координат, чтобы σ_0 представляла собой гладкую поверхность (кривую).

Укажем условия на границе $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, отдельно на каждой из составляющих ее частей σ_{01} и σ_{02}. Рассматриваем σ_{01} как границу большой каверны (водоема) покоящейся жидкости, на которой обобщённый потенциал (давление) постоянно: $\varphi^+(M) = \text{const}$, $M \in \sigma_{01}$. Не нарушая общности суждений, выберем постоянную равную нулю и запишем

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01}. \tag{1.3.8}$$

Рассматриваем σ_{02} как непроницаемую для жидкости границу. Условие отсутствия потока жидкости через единичную площадку (единичный отрезок) граничной поверхности (кривой) σ_{02} в трехмерном и двумерном случаях запишем

$$v_n^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \tag{1.3.9}$$

$$\big(H(M) v_n(M)\big)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \tag{1.3.10}$$

Учитывая равество (1.1.20), условия (1.3.9) и (1.3.10) запишем для обобщённого потенциала[1]

$$\big(\vec{K}_n(M) \cdot \nabla\varphi(M)\big)^+ = 0 \quad \text{или} \quad \left(K_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \tag{1.3.11}$$

$$\big(\vec{P}_n(M) \cdot \nabla\varphi(M)\big)^+ = 0 \quad \text{или} \quad \left(P_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \tag{1.3.12}$$

где $\vec{P}_n(M) = H(M)\vec{K}_n(M)$ — вектор проводимости слоя в направлении орта $\vec{n}$, $P_n(M) = H(M)K_n(M)$ — его модуль.

---

[1] Под предельным значением в условии (1.3.11) следует понимать: $\left[K_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right]^+ = \lim\limits_{M' \to M}\left[K_n(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial\nu_M}\right] = \lim\limits_{h \to 0}\left[K_n(\vec{r}_M + h\vec{\nu}_M)\frac{\partial\varphi(\vec{r}_M + h\vec{\nu}_M)}{\partial\nu_M}\right]$, $M \in \sigma_{02}$, где $M' \in D$, $M' \in \nu_M$, $h = \text{const} > 0$, $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки M. Аналогично для предельного значения в условии (1.3.12).

В двумерном случае условие (1.3.10) (или (1.3.12)) представим для функции тока. Воспользуемся вторым из равенств (1.2.25), записанным для кривой $\widetilde{\sigma}_{02}$, близкой к кривой σ_{02}:

$$v_n(M') = K_n(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial\nu_{M'}} = -\frac{1}{H(M')}\frac{\partial\psi(M')}{\partial l_{M'}}, \quad M' \in \widetilde{\sigma}_{02}.$$

Умножим это равенство на $H(M')$ и перейдем в полученном выражении к пределу при $M' \to M$. С учётом условия (1.3.10) (или (1.3.12)) имеем равенство $[\partial\psi(M)/\partial l_M]^+ = 0$, $M \in \sigma_{02}$ интегрируя которое вдоль кривой σ_{02} находим (σ_{02} — линия тока) $\psi^+(M) = \mathrm{const}$, $M \in \sigma_{02}$. Выберем постоянную равную нулю. Получим для функции тока (σ_{02} — «нулевая» линия тока)

$$\psi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \tag{1.3.13}$$

Сингулярная поверхность (линия) $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ может служить границей области течения. Причём одна из этих поверхностей (линий) σ_{01} или σ_{02}, в зависимости от характера поведения проницаемости $K(M)$ (проводимости $P(M)$), может быть удалена в бесконечность.

Отметим, что условия (1.3.8) и (1.3.13) на сингулярных границах σ_{01} и σ_{02} по форме записи похожи на условия (1.3.3′) и (1.3.7′) на границах σ_1 и σ_2. Однако, эти условия принципиально различны по своей физической сути, поскольку условия на границе σ_{01} и σ_{02} обусловлены характером изменения проницаемости $K(M)$ (проводимости $P(M)$).

Условия в бесконечности

Пусть область течения D содержит бесконечно удаленную точку. Источники (стоки) течения могут располагаться как в конечных так и в бесконечно удалённой точках области D. Источники (стоки) моделируем сингулярностями (изолированными особыми точками) обобщённого потенциала $\varphi(M)$.

Если обобщённый потенциал $\varphi(M)$ не имеет сингулярностей в бесконечности, то потребуем для него выполнение условия[1]

[1] Символ «O» означает порядок отношения функций [97]. Пусть функции $\varphi(M)$ и $f(M)$ заданы в окрестности точки M_0 (конечной или бесконечно удалённой). Будем писать $\varphi(M) = O[f(M)]$ при $M \to M_0$, если отношение $\varphi(M)/f(M)$ ограничено при $M \to M_0$.

$$\varphi(M) = O\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right), \quad |K(M)\cdot\nabla\varphi(M)| = O\left(\frac{1}{r^2_{MM_0}}\right) \quad \text{при} \quad r_{MM_0}\to\infty, \tag{1.3.14}$$

где r_{MM_0} — расстояние от произвольной точки $M \in D$ до фиксированной точки $M_0 \in D$, $K(M)$ — тензор проницаемости.

Условия (1.3.14) назовём *условиями регулярности обобщённого потенциала* $\varphi(M)$ в бесконечности. Эти условия накладывают ограничение на поведение в бесконечности обобщённого потенциала и согласно обобщённому закону Дарси (1.1.7) модуля скорости

$$v(M) = |K(M)\cdot\nabla\varphi(M)| = O\left(\frac{1}{r^2_{MM_0}}\right) \quad \text{при} \quad r_{MM_0}\to\infty.$$

Условия (1.3.14) означают, что обобщённый потенциал течения равномерно (одинаково для всех точек $M \in D$) стремится к нулю: $\varphi(M)\to 0$ при $r_{MM_0}\to\infty$. При этом поток жидкости через замкнутую поверхность σ (например, сферу большого радиуса R с центром в точке M_0, $r_{MM_0} = R$) отличен от нуля, поскольку при больших значениях R

$$\left|\int\limits_\sigma v_n(M)d\sigma\right| \leqslant \int\limits_\sigma |\vec{n}\cdot(K(M)\cdot\nabla\varphi(M))|d\sigma \leqslant \frac{A}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi A \quad (A = \text{const}).$$

В случае двумерного течения в слое проводимости $P(M) = H(M)K(M)$ условия регулярности $\varphi(M)$ запишем

$$\varphi(M) = O\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right), \quad |P(M)\cdot\nabla\varphi(M)| = O\left(\frac{1}{r^2_{MM_0}}\right) \quad \text{при} \quad r_{MM_0}\to\infty. \tag{1.3.15}$$

Второе из условий (1.3.15) означает, что поток жидкости через закнутый контур L (например, окружность большого радиуса R с центром в точке M_0, $r_{MM_0} = R$) стремится к нулю при $R\to\infty$, поскольку при больших значениях R:

$$\left|\int\limits_L H(M)v_n(M)dl\right| \leqslant \int\limits_L |\vec{n}\cdot(P(M)\cdot\nabla\varphi(M))|dl \leqslant \frac{B}{R^2}2\pi R = \frac{2\pi B}{R} \;\; (B = \text{const}).$$

Пусть теперь обобщённый потенциал $\varphi(M)$ имеет сингулярность в бесконечности. Представим его в виде $\varphi(M) = \varphi_0(M) + \Phi(M)$, где $\varphi_0(M)$ имеет в бесконечности эту сингулярность. Тогда обобщённый потенциал $\Phi(M)$ будет удовлетворять условиям (1.3.14) или (1.3.15).

Условия на границе раздела среды (слоя)

Пусть Γ — граница раздела областей D_1 и D_2 проницаемости $K(M)$ среды (в двумерном случае проводимость слоя $P(M)$), в которых

$$K(M) = \begin{cases} K_1(M), & M \in D_1, \\ K_2(M), & M \in D_2, \end{cases}$$

$$P(M) = \begin{cases} P_1(M) = H_1(M)K_1(M), & M \in D_1, \\ P_2(M) = H_2(M)K_2(M), & M \in D_2. \end{cases}$$

Здесь $K_\alpha(M) = (K_{ij}^\alpha(M))$, $\alpha = 1,2$, толщина слоя непрерывна на Γ: $H_1(M) = H_2(M)$, $M \in \Gamma$. Течение в этих областях описываем обобщённым потенциалом $\varphi(M)$ и полем скоростей $\vec{v}(M)$[1]:

$$\varphi(M) = \begin{cases} \varphi_1(M), & M \in D_1, \\ \varphi_2(M), & M \in D_2, \end{cases} \qquad \vec{v}(M) = \begin{cases} \vec{v}_1(M), & M \in D_1, \\ \vec{v}_2(M), & M \in D_2. \end{cases}$$

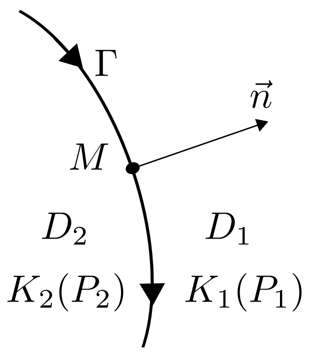

Рис. 1.3.3. Граница Γ раздела пористой среды (слоя).

Полагаем, что при обходе границы Γ область D_1 остаётся слева (орт нормали $\vec{n}$ направлен внутрь этой области, рис. 1.3.3). Условия непрерывности давления $p(M)$ и расхода жидкости на границе Γ

$$p^+(M) = p^-(M), \quad v_n^+(M) = v_n^-(M), \quad M \in \Gamma$$

запишем на основании формул (1.1.7) и (1.1.20) для обобщённого потенциала трехмерного и двумерного течений в виде

$$\begin{gathered} \varphi^+(M) = \varphi^-(M), \\ K_n^+(M)\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = K_n^-(M)\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma. \end{gathered} \tag{1.3.16}$$

Здесь и далее «$+$» («$-$») обозначают предельные значения соответствующих функций на границе при подходе к ней со стороны (противоположной стороны) орта $\vec{n}$ этой границы[2].

---

[1] Аналогично для поля давлений $p(M) = \begin{cases} p_1(M), & M \in D_1, \\ p_2(M), & M \in D_2. \end{cases}$

[2] Под предельными значениями следует понимать $K_n^\pm(M)\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu}\right)^\pm = \lim\limits_{M^\pm\to M}\left[K_n(M^\pm)\frac{\partial\varphi(M^\pm)}{\partial\nu_M}\right] = \lim\limits_{M^\pm\to M}\left[K_n(\vec{r}_M + h\vec{\nu}_M^\pm)\frac{\partial\varphi(\vec{r}_M + h\vec{\nu}_M^\pm)}{\partial\nu_M}\right]$, где конормали

Назовём (1.3.16) условиями *сопряжения обобщённого потенциала* на границе раздела анизотропной пористой среды (слоя).

В частности, если проницаемость (проводимость) $K_\alpha(M) = k_\alpha K(M)$ ($P_\alpha(M) = k_\alpha P(M)$), $k_\alpha > 0$, $\alpha = 1,2$ — постоянные, то условия (1.3.16) запишем[1]

$$\varphi^+(M) = \varphi^-(M), \quad k_1\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = k_2\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma. \tag{1.3.17}$$

Дифференцируя первое из условий (1.3.16) по касательной к граничной поверхности Γ, находим

$$\Big[\big(\nabla\varphi(M)\big)^+ - \big(\nabla\varphi(M)\big)^-\Big] \times \vec{n}_M = 0, \quad M \in \Gamma.$$

Тогда, учитывая равенства (1.1.30) и (1.1.32), имеем условия для поля скоростей $\vec{v}(M)$ на границе Γ:

$$\begin{gathered}\Big[\Big(K^{-1}(M)\cdot\vec{v}(M)\Big)^+ - \Big(K^{-1}(M)\cdot\vec{v}(M)\Big)^-\Big] \times \vec{n}_M = 0,\\ v_n^+(M) = v_n^-(M), \quad M \in \Gamma.\end{gathered} \tag{1.3.18}$$

Назовем (1.3.18) *условиями сопряжения скорости* $\vec{v}(M)$ течения на границе Γ. Видно, что вектор $\vec{v}(M)$ имеет на границе Γ разрыв касательной и непрерывность нормальной составляющих[2].

Для двумерных течений второе из условий (1.3.16) запишем для функции тока. Воспользуемся вторым из равенств (1.2.25), записав его на границе Γ при учете непрерывности толщины слоя $H(M)$ на ней:

$$K_n^\pm(M)\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^\pm = -\frac{1}{H(M)}\left(\frac{\partial\psi(M)}{\partial l_M}\right)^\pm, \quad M \in \Gamma.$$

$\vec{\nu}^+$ и $\vec{\nu}^-$ различны (составляют разные углы с ортом $\vec{n}_M \in \Gamma$) и определяются согласно (1.1.19) в виде $\vec{\nu}_M^\pm = \frac{\vec{n}_M\cdot K^\pm(M)}{|\vec{n}_M\cdot K^\pm(M)|}$, $K^\pm(M) = \lim\limits_{M^\pm\to M} K(M^\pm)$, $M \in \Gamma$, $M^+ \in D_1$, $M^- \in D_2$, $M^\pm \in \vec{\nu}_M^\pm$, $h = \mathrm{const} > 0$, $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки M.

[1] В этом случае конормаль границы Γ одна единственная: $\vec{\nu}_M = \frac{\vec{n}_M\cdot K(M)}{|\vec{n}_M\cdot K(M)|}$, $M \in \Gamma$.

[2] В то время как условия (1.3.18), записанные согласно формул (1.1.32) для вектора приведённой скорости $\vec{V}(M)$ в виде (условия сопряжения для $\vec{V}(M)$) $\big[\vec{V}^+(M) - \vec{V}^-(M)\big] \times \vec{n}_M = 0$, $\vec{K}_n^+(M)\cdot\vec{V}^+(M) = \vec{K}_n^-(M)\cdot\vec{V}^-(M)$, $M \in \Gamma$, выражают непрерывность касательной и разрыв нормальной составляющих этой скорости.

Тогда имеем равенство $\left(\partial\psi(M)/\partial l_M\right)^+ = \left(\partial\psi(M)/\partial l_M\right)^-$, интегрируя которое вдоль граничной кривой Γ получаем (постоянную интегрирования полагаем равную нулю) $\psi^+(M) = \psi^-(M)$, $M \in \Gamma$. Следовательно, условия сопряжения (1.3.16) для двумерного течения принимают вид

$$\varphi^+(M) = \varphi^-(M), \quad \psi^+(M) = \psi^-(M), \quad M \in \Gamma. \tag{1.3.19}$$

Они выражают непрерывность на границе Γ обобщённого потенциала и функции тока двумерного течения.

Условия на границе раздела жидкостей

Рассмотрим нестационарную фильтрацию двух жидкостей, физические свойства (вязкость и плотность) которых различны. Полагаем, что жидкости не смешиваются, взаимно не растворяются, химически не реагируют между собой и пористой средой. Считаем, что одна жидкость полностью замещает другую, то есть имеет место, так называемое, «поршневое» вытеснение [88]. В этом случае нестационарную, подвижную границу Γ_t раздела жидкостей можно считать резкой — нет переходной зоны между жидкостями. Гарницу моделируем в каждый момент времени $t \geqslant 0$ гладкой поверхностью (линией — в двумерном случае) и описываем уравнением в параметрической форме

$$\vec{r}_M = \vec{r}_M(t,s) \quad (x_i = x_i(t,s), \quad i = 1,2,3), \quad M = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_t. \tag{1.3.20}$$

Здесь $\vec{r}_M = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки $M \in \Gamma_t$, под s понимаются два параметра s_1, s_2: $s = (s_1, s_2)$ и один параметр — в двумерном случае.

В начальный момент $t = 0$ границу $\Gamma_t = \Gamma_0$ описываем в соответствии с (1.3.20) уравнением

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_M(0,s) \quad (x_{i0} = x_i(0,s), \quad i = 1,2,3), \tag{1.3.21}$$

$$M = M_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) \in \Gamma_0.$$

Граница Γ_t делит всю область D на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$), занятые жидкостями вязкости и плотности μ_1, ρ_1 и μ_2, ρ_2, движение которых описываем обобщённым потенциалом $\varphi(M,t)$ и полем скоростей

$\vec{v}(M,t)$[1]:

$$\varphi(M,t) = \begin{cases} \varphi_1(M,t), & M \in D_1, \\ \varphi_2(M,t), & M \in D_2, \end{cases} \qquad \vec{v}(M,t) = \begin{cases} \vec{v}_1(M,t), & M \in D_1, \\ \vec{v}_2(M,t), & M \in D_2. \end{cases}$$

При перемещении границы Γ_t части области D_1 и D_2 изменяются с течением времени, а проницаемость пористой среды K неизменна. Полагаем, что действие капиллярных сил на границе Γ_t пренебрежимо мало по сравнению с силами гидродинамического давления и массовыми силами. В этом случае, как известно [43, 149], на границе Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости, которые запишем (орт нормали $\vec{n}(M) \in \Gamma_t$ направлен в D_1):

$$p^+(M,t) = p^-(M,t), \quad v_n^+(M,t) = v_n^-(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{1.3.22}$$

Так как при «поршневом» вытеснении жидкости не смешиваются (частицы жидкости не переходят с одной стороны границы Γ_t на другую), то это означает, что граница Γ_t состоит в любой момент времени $t \geqslant 0$ из одних и тех же отмеченных в момент времени $t = 0$ частиц жидкости. Следовательно, скорость перемещения какой-либо точки границы $M \in \Gamma_t$, направленная по орту $\vec{n}(M)$ нормали к ней и равная $\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} \cdot \vec{n}_M$, $M \in \Gamma_t$, должна быть равна в соответствии с формулой (1.1.9) предельным значениям нормальных составляющих скоростей фильтрации $v_n^+(M,t)$ и $v_n^-(M,t)$ на Γ_t[2]:

$$\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} \cdot \vec{n}_M = v_n^+(M,t), \quad \frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} \cdot \vec{n}_M = v_n^-(M,t), \quad M \in \Gamma_t, \tag{1.3.23}$$

Таким образом, на границе Γ_t выполняются в каждый момент времени $t \geqslant 0$ условия (1.3.22) и (1.3.23).

Учитывая обобщённый закон Дарси (1.1.7) для каждой жидкости

$$\vec{v}_\alpha(M,t) = K(M) \cdot \nabla\varphi_\alpha(M,t)$$

$$\left(\varphi_\alpha(M,t) = -\frac{p_\alpha(M,t) + \rho_\alpha \Pi(M,t)}{\mu_\alpha}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

[1] Аналогично для поля давлений $p(M,t) = \begin{cases} p_1(M,t), & M \in D_1, \\ p_2(M,t), & M \in D_2. \end{cases}$

[2] Здесь и далее следует понимать $v_n^\pm(M,t) = v_n^\pm(\vec{r}_M(t,s),t)$.

а также равенство (1.1.20), условия (1.3.22) представим для обобщённого потенциала:

$$\begin{gathered}\mu_1\varphi^+(M,t)-\mu_2\varphi^-(M,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(M,t),\\ \left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial\nu_M}\right)^+=\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial\nu_M}\right)^-\\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu_M}=\frac{1}{K_n}\sum_{i,j=1}^{3}n_i(M)K_{ij}(M)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\quad M\in\Gamma_t.\end{gathered}\tag{1.3.24}$$

Назовём (1.3.24) — *условиями сопряжения обобщённого потенциала* $\varphi(M,t)$ *на границе* Γ_t. Видно, что $\varphi(M,t)$ на границе Γ_t терпит разрыв, а его производная по орту конормали $\vec{\nu}_M\in\Gamma_t$ непрерывна.

Дифференцируя первое из условий (1.3.24) по касательной к граничной поверхности Γ_t, имеем

$$\left[\mu_1\Big(\nabla\varphi(M,t)\Big)^+-\mu_2\Big(\nabla\varphi(M,t)\Big)^-\right]\times\vec{n}_M=(\rho_2-\rho_1)\nabla\Pi(M,t)\times\vec{n}_M,\quad M\in\Gamma_t.$$

Тогда, учитывая равенства (1.1.20), (1.1.30), имеем условия для поля скоростей на границе Γ_t:

$$\begin{gathered}\mu_1\big(K^{-1}(M)\cdot\vec{v}^+(M,t)\big)_\tau-\mu_2\big(K^{-1}(M)\cdot\vec{v}^-(M,t)\big)_\tau=\\ =(\rho_2-\rho_1)\widetilde{\nabla}\Pi(M,t),\quad v_n^+(M,t)=v_n^-(M,t),\quad M\in\Gamma_t,\end{gathered}\tag{1.3.25}$$

где $\widetilde{\nabla}=\nabla\times\vec{n}_M=\frac{\partial}{\partial\tau_{1M}}\vec{\tau}_{1M}+\frac{\partial}{\partial\tau_{2M}}\vec{\tau}_{2M}$ — поверхностный оператор Гамильтона ($\vec{\tau}_{1M}$ и $\vec{\tau}_{2M}$ — взаимно ортогональные орты в касательной плоскости к поверхности Γ_t).

Назовём (1.3.25) *условиями сопряжения скорости* $\vec{v}(M,t)$ *на границе* Γ_t. Видно, что на границе Γ_t касательная составляющая скорости терпит разрыв, а ее нормальная составляюшая непрерывна. Поэтому Γ_t относится к поверхности (в двумерном случае — линии) тангенциального или касательного разрва, которое имеют место в гидродинамике [82, 129].

Для двумерных течений второе из условий (1.3.24) представим для функции тока $\psi(M,t)$ [1]. Воспользуемся вторым из равенств (1.2.25),

[1] Функция тока течения в частях D_1 и D_2 области $D=D_1\cup D_2$ имеет вид $\psi(M,t)=\begin{cases}\psi_1(M,t), & M\in D_1,\\ \psi_2(M,t), & M\in D_2.\end{cases}$

записав его с учётом непрерывности на границе Γ_t толщины $H(M)$ и проницаемости $K(M)$ (коэффициента $K_n(M)$) в виде:

$$K_n(M)\left(\frac{\partial\varphi(M,t)}{\partial\nu_M}\right)^{\pm} = -\frac{1}{H(M)}\left(\frac{\partial\psi(M,t)}{\partial l_M}\right)^{\pm}, \quad M \in \Gamma_t.$$

Имеем равенство

$$\left(\frac{\partial\psi(M,t)}{\partial l_M}\right)^{+} = \left(\frac{\partial\psi(M,t)}{\partial l_M}\right)^{-}, \quad M \in \Gamma_t.$$

Интегрируя его вдоль граничной кривой Γ_t, получаем (постоянную интегрирования полагаем равную нулю)

$$\psi^+(M,t) = \psi^-(M,t), \quad M \in \Gamma_t.$$

Следовательно, условия (1.3.24) для двумерного течения принимают вид

$$\begin{aligned} \mu_1\varphi^+(M,t) - \mu_2\varphi^-(M,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(M,t), \\ \psi^+(M,t) = \psi^-(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \end{aligned} \tag{1.3.26}$$

Заметим, что в случае напорной фильтрации, когда массовая сила гораздо меньше сил гидродинамического давления $(\rho_\alpha|\nabla\Pi| \ll |\nabla p_\alpha|,\ \alpha = 1, 2)$, то массовой силой можно пренебречь и в условиях (1.3.24)–(1.3.26) положить $\Pi(M,t) = 0$.

Из условий (1.3.23) находим нормальную составляющую скорости перемещения границы Γ_t как полусумму предельных значений нормальных составляющих вектора скорости фильтрации жидкостей на Γ_t:

$$\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} \cdot \vec{n}_M = \frac{v_n^+(M,t) + v_n^-(M,t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t$$

или

$$\left[\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} - \frac{\vec{v}^+(M,t) + \vec{v}^-(M,t)}{2}\right] \cdot \vec{n}_M = 0, \quad M \in \Gamma_t.$$

Это выражение есть проекция векторного равенства

$$\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} = \frac{\vec{v}^+(M,t) + \vec{v}^-(M,t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t \tag{1.3.27}$$

на направление орта $\vec{n}_M \in \Gamma_t$.

Назовём (1.3.27) *дифференциальным уравнением движения границы раздела жидкостей.*

Умножая векторно обе части уравнения (1.3.27) на орт $\vec{n}_M \in \Gamma_t$, находим, касательная составляющая скорости движения границы Γ_t равна полусумме предельных значений касательных составляющих скоростей фильтрации на Γ_t:

$$\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} \times \vec{n}_M = \frac{\vec{v}^+(M,t) \times \vec{n}_M + \vec{v}^-(M,t) \times \vec{n}_M}{2}, \quad M \in \Gamma_t.$$

В случае модели «разноцветных» жидкостей (вязкости и плотности жидкостей одинаковы: $\mu_1 = \mu_2$, $\rho_1 = \rho_2$) поле скоростей фильтрации непрерывно на границе Γ_t ($\vec{v}^+(M,t) = \vec{v}^-(M,t) = \vec{v}(M,t)$), и её дифференциальное уравнение (1.3.27) принимает вид

$$\frac{d\vec{r}_M(t,s)}{dt} = \vec{v}(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{1.3.27$'$}$$

Начальные условия

Поскольку обобщённый потенциал φ и скорость $\vec{v}$ взаимосвязаны обобщённым законом Дарси (1.1.7), то в нестационарном случае необходимо использовать начальные условия для φ либо для $\vec{v}$. Эти условия состоят в том, что в некоторый момент времени, принимаемый за начальный $t = 0$, задаётся для течения в области D обобщённый потенциал $\varphi_0(M) = -[p_0(M) + \rho\Pi_0(M)]/\mu$ ($p_0(M)$ и $\Pi_0(M)$ — давление и потенциал массовой силы при $t = 0$) или поле скоростей $\vec{v}_0(M)$:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \varphi(M,t) = \varphi_0(M), \quad \text{или} \quad \vec{v}(M,t) = \vec{v}_0(M), \quad M \in D. \tag{1.3.28}$$

В случае подвижной границы раздела жидкостей Γ_t кроме условия (1.3.28) необходимо задать положение Γ_t в момент $t = 0$ уравнением (1.3.21), которое будет начальным условием для её дифференциального уравнения (1.3.27) ((1.3.27$'$) — в случае «разноцветных» жидкостей).

§ 1.4. Постановка основных граничных задач

Обоснование постановок задач

При решении конкретных задач практики, связанных с исследованием стационарных и нестационарных фильтрационных течений в анизотропных и неоднородных пористых средах (грунтах) возникнет необходимость в постановке граничных задач. Эти задачи поставим для обобщённого потенциала[1], который удовлетворяет уравнению (1.1.56), то есть

$$T\varphi \equiv \nabla\cdot(K(M)\cdot\nabla\varphi) = \widetilde{\rho} \quad \text{или} \quad T\varphi \equiv \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \widetilde{\rho}, \tag{1.4.1}$$

где $\widetilde{\rho}$ и φ — функции координат точки $M = (x_1, x_2, x_3)$, а в нестационарном случае также времени t.

Постановка задач определяется видом границ и условиями на них, а в нестационарном случае также начальными условиями. В случае подвижной границы раздела жидкостей Γ_t к уравнению (1.4.1) следует присоединить дифференциальное уравнение (1.3.27) и начальное условие (1.3.21) для этой границы.

Сформулируем задачи, которые назовём *основными* граничными задачами. К ним относятся: первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения на границе раздела сред и задача эволюции границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости, плотности). Эти задачи имеют место при добыче флюидов (воды, нефти) и мониторинге распространения загрязнений в пластах грунта сложной геологической структуры (анизотропных и неоднородных).

Краевые задачи и задачу сопряжения на границе раздела сред поставим для стационарных течений. В нестационарном случае они формулируются аналогично поскольку время t — параметр.

Если указанные выше граничные поверхности (кривые) σ_0, σ_1 и σ_2 замкнутые, то они одновременно ограничивают внутреннюю и внешнюю области, в одной из которых следует рассматривать течение. В этом случае следует различать внешние и внутренние граничные задачи для течения. При формулировке внешних задач (область D течения содержит бесконечно удаленную точку) помимо условий на указанных границах σ_0, σ_1 и σ_2, Γ и Γ_t необходимо также учитывать условия в бесконечности (1.3.14).

[1] Постановка основных задач для φ остаётся в силе для плоскопараллельного течения в слое проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Следуя [117], нетрудно сформулировать основные задачи для поля скоростей, удовлетворяющих уравнению (1.1.57). Это продемонстрировано в двумерном случае слоя проводимости $P = HK$ (см. § 6.2). В этом же случае основные задачи формулируются и решаются на основе комплексного потенциала течения (см. гл. 5 и § 6.1).

В основных задачах полагаются заданными в области D течения проницаемость среды $K(M)$[1] и источники (стоки) течения (плотность $\tilde{\rho}(M,t)$).

Первая внутренняя (внешняя) краевая задача (задача Дирихле)

Найти обобщённый потенциал $\varphi(M)$, удовлетворяющий в области D уравнению (1.4.1) и на её границе σ_1 условию первого рода

$$\varphi^{+}(M) = f_0(M), \quad M \in \sigma_1, \tag{1.4.2}$$

а также условию (1.3.14) в случае внешней задачи. Здесь $f_0(M)$ — заданная на σ_1 функция. Она может иметь такой же вид, что и в условии (1.3.2), либо равной константе (условие (1.4.2) принимает вид (1.3.3)).

Вторая внутренняя (внешняя) краевая задача (задача Неймана)

Найти обобщённый потенциал $\varphi(M)$, удовлетворяющий в области D уравнению (1.4.1) и на её границе σ_2 условию второго рода

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^{+} = g(M), \quad M \in \sigma_2, \tag{1.4.3}$$

а также условию (1.3.14) в случае внешней задачи. Здесь $g(M)$ — заданная на σ_2 функция. В частности, если $g(M) = 0$, то условие (1.4.3) принимает вид (1.3.6), характерный для случая непроницаемой границы.

Задача сопряжения на границе раздела сред

Определить обобщенный потенциал $\varphi(M)$, удовлетворяющий в области $D = D_1 \cup D_2$ уравнению (1.4.1) и условиям на границе Γ (1.3.16) и в бесконечности (1.3.14).

[1] В двумерном случае задана проводимость слоя $P(M) = H(M)K(M)$.

Задача эволюции границы раздела жидкостей

По заданным источникам (стокам) в пористой среде проницаемости $K(M)$, вязкостей и плотностей жидкостей, потенциалу масовой силы и положению границы Γ_t в начальный момент времени $t = 0$ найти её положение в последующие моменты времени $t > 0$, а также (если это необходимо) обобщённый потенциал $\varphi(M,t)$. Для этого необходимо решить систему уравнений (1.3.27), (1.4.1) при условиях (1.3.21), (1.3.24) и (1.3.14).

Отметим, что постановки основных задач нетрудно обобщить на случай, когда в них имеют место одновременно несколько из указанных границ, включая сингулярную границу $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ с условиями (1.3.8), (1.3.11). В этом случае обобщённый потенциал φ должен удовлетворять уравнению (1.4.1) и условиям на всех границах задачи.

§ 1.5. Единственность решений граничных задач

Формулы Остроградского и Грина

Пусть вектор $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ как функция точки $M = (x_1, x_2, x_3)$ непрерывна вместе с первыми производными в области D и непрерывна на гладкой поверхности σ, ограничивающую эту область. Тогда имеет место формула Остроградского [132]

$$\int\limits_D \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \int\limits_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \text{или} \quad \int\limits_D \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\tau = \int\limits_\sigma \sum_{i=1}^{3} A_i n_i d\sigma, \qquad (1.5.1)$$

где $\nabla = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i$ — оператор Гамильтона, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — орт внешней нормали к поверхности σ $(n_i = \cos(\widehat{\vec{n}_i, \vec{e}_i})$, $i = 1, 2, 3$ — направляющие косинусы орта $\vec{n}$; $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ — орты декартовых осей координат).

Запишем формулу (1.5.1) для обобщённого потенциала $\varphi(M)$ в среде проницаемости $K(M) = (K_{ij}(M))$, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть $\varphi(M)$ дважды, а $K(M)$ — один раз дифференцируемые функции в области D; $\varphi(M)$ — один раз непрерывно дифференцируемая функция, а $K(M)$ — непрерывная функция на поверхности σ. Полагаем в формуле (1.5.1) $\vec{A}$ — вектор скорости $\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi$ $(v_i = \sum\limits_{j=1}^{3} K_{ij} \partial\varphi/\partial x_i$ $i = 1, 2, 3)$, имеем (формула

Остроградского для вектора скорости $\vec{v}$):

$$\int\limits_D \nabla\cdot\vec{v}d\tau = \int\limits_\sigma \vec{v}\cdot\vec{n}d\sigma.$$

Согласно (1.4.1) имеем выражение оператора $T\varphi = \nabla\cdot(K\cdot\nabla\varphi) = \nabla\cdot\vec{v}$ и с учётом равенства (1.1.20) $\vec{v}\cdot\vec{n} = v_n = K_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ запишем формулу Остроградского для обобщённого потенциала

$$\int\limits_D T\varphi d\tau = \int\limits_\sigma K_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma. \tag{1.5.2}$$

Здесь производная по конормали $\partial/\partial\nu$ имеет вид (1.1.21).

Эта формула при учете уравнения (1.4.1) ($T\varphi = \widetilde{\rho}$) имеет ясный гидродинамический смысл: поток вектора скорости $\vec{v}$ через поверхность σ равен суммарной мощности источников (стоков) в области D, ограниченной этой поверхностью, то есть

$$\int\limits_\sigma \vec{v}\cdot\vec{n}d\sigma = \int\limits_D \widetilde{\rho}d\tau.$$

Запишем теперь первую формулу Грина для обобщённого потенциала φ. Воспользуемся оператором $T\varphi \equiv \nabla\cdot(K\cdot\nabla\varphi)$ и запишем для области D интеграл

$$\int\limits_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int\limits_D \varphi_2\nabla\cdot(K\cdot\nabla\varphi_1)d\tau,$$

где φ_1 и φ_2 — функции точки $M\in D$, удовлетворяют тем же условиям, что указанные выше для функции $\varphi(M)$. Так как

$$\varphi_2\nabla\cdot(K\cdot\nabla\varphi) = \nabla\cdot\big[\varphi_2(K\cdot\nabla\varphi_1)\big] - (K\cdot\nabla\varphi_1)\cdot\nabla\varphi_2,$$

то

$$\int\limits_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int\limits_D \nabla\cdot\big[\varphi_2(K\cdot\nabla\varphi_1)\big]d\tau - \int\limits_D (K\cdot\nabla\varphi_1)\cdot\nabla\varphi_2 d\tau.$$

Воспользуемся формулой (1.5.1), положив в ней $\vec{A} = \varphi_2(K\cdot\nabla\varphi_1)$. С учётом равенства (1.1.20) находим

$$\int\limits_D \nabla\cdot\big[\varphi_2(K\cdot\nabla\varphi_1)\big]d\tau = \int\limits_\sigma \varphi_2(K\cdot\nabla\varphi)\cdot\vec{n}d\sigma = \int\limits_\sigma K_n\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}d\sigma.$$

Тогда получаем первую формулу Грина

$$\int\limits_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int\limits_\sigma K_n \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu} d\sigma - \int\limits_D (K\cdot\nabla\varphi_1)\cdot\nabla\varphi_2 d\tau. \tag{1.5.3}$$

Теперь запишем вторую формулу Грина для обобщённого потенциала. Оператор уравнения (1.4.1) представим в виде

$$T\varphi \equiv \sum_{i,j=1}^{3}\left(K_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right).$$

Тензор $K=(K_{ij})$ представим как сумму симметричной $K_s=(K^s_{ij})$ и антисимметричной $K_a=(K^a_{ij})$ частей: $K_{ij}=K^s_{ij}+K^a_{ij}$ $\big(K^s_{ij}=(K_{ij}+K_{ji})/2$, $K^a_{ij}=(K_{ij}-K_{ji})/2\big)$. В силу симметрии $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}$ имеем $\sum\limits_{i,j=1}^{3} K^a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=0$. Тогда оператор запишем

$$T\varphi \equiv \sum_{i,j=1}^{3} K^s_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} K_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \tag{1.5.4}$$

где обозначено $K_j=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_i}$.

Введем сопряженный (1.5.4) в смысле Лагранжа [133] оператор

$$T^*\varphi = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2(K^s_{ij}\varphi)}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(K_j\varphi). \tag{1.5.5}$$

Для функций $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$, дважды непрерывно дифференцируемых в области D и хотя бы один раз непрерывно дифференцируемых на ее границе σ, имеем тождество

$$\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T^*\varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K^s_{ij}\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right) - \varphi_1\varphi_2\frac{\partial K^s_{ij}}{\partial x_j}\right] +$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_1\varphi_2 K_j) + \sum_{i,j=1}^{3}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial(K^s_{ij}\varphi_2)}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\frac{\partial(K^s_{ij}\varphi_2)}{\partial x_i}\right].$$

Так как последняя сумма слагаемых обращается в нуль (в силу ее антисимметрии), то

$$\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T^*\varphi_2 =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_{ij}^s\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\right) - \varphi_1\varphi_2 \frac{\partial K_{ij}^s}{\partial x_j}\right] + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_1\varphi_2 K_j).$$

Применим к этому тождеству формулу (1.5.1). Получаем

$$\int\limits_D \left(\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T^*\varphi_2\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_\sigma \left\{\left[\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}^s\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\right) - \varphi_1\varphi_2 \frac{\partial K_{ij}^s}{\partial x_j}\right] n_i + \varphi_1\varphi_2 \sum_{j=1}^{3} K_j n_j\right\} d\sigma.$$

Учитывая $K_j = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_i}$ и $K_{ij} = K_{ij}^s + K_{ij}^a$, имеем для обобщённого потенциала вторую формулу Грина

$$\int\limits_D \left(\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T^*\varphi_2\right) d\tau = \int\limits_\sigma \left(\varphi_2 P\varphi_1 - \varphi_1 P\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 Q\right) d\sigma, \qquad (1.5.6)$$

в которой

$$P\varphi_\alpha = \sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij}^s \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$Q = \sum_{i,j=1}^{3} \left(n_j \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial K_{ij}^s}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} n_j \frac{\partial K_{ij}^a}{\partial x_i}.$$

Используя формулу (1.1.21), введём производную по конормали $\vec{\nu}_s$, определяемую симметричной частью $K_s = (K_{ij}^s)$ тензора K:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_s} = \vec{\nu}_s \cdot \nabla = \frac{1}{K_n^s} \sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij}^s \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad K_n^s = |\vec{n} \cdot K_s| = \Big[\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3} n_i K_{ij}^s)^2\Big]^{1/2}.$$

Тогда $P\varphi_\alpha = K_n^s \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \nu_S}$ и формулу Грина (1.5.6) окончательно запишем

$$\int\limits_D \left(\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T^*\varphi_2\right) d\tau = \int\limits_\sigma \left[K_n^s\left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu_s} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu_s}\right) + \varphi_1\varphi_2 Q\right] d\sigma. \quad (1.5.7)$$

В частности, если среда ортотропная и неоднородная, то тензор K симметричен: $K_{ij} = K^s_{ij}$, $K^a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $Q = 0$ и, следовательно, оператор $T\varphi$ уравнения (1.4.1) симметричный и самосопряженный ($T\varphi = T^*\varphi$)[1]. В этом случае, обозначая $\vec{\nu} = \vec{\nu}_s$ и $K_n = K^s_n$, формулу (1.5.7) запишем

$$\int\limits_D \left(\varphi_2 T\varphi_1 - \varphi_1 T\varphi_2\right) d\tau = \int\limits_\sigma K_n \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu}\right) d\sigma. \qquad (1.5.7')$$

Формулы (1.5.2), (1.5.3) и (1.5.7) получены в предположении непрерывности проницаемости среды $K(M)$ в области D. Далее нам потребуется первая формула Грина (1.5.3) в случае, когда $K(M)$ терпит разрывы в этой области. Покажем, что и в этом случае формула (1.5.3) остаётся в силе, если $K(M)$ и обобщённый потенциал $\varphi(M)$ удовлетворяют определенным условиям.

Пусть в области D, ограниченной поверхностью σ, проницаемость $K(M)$ разрывна на конечном числе m поверхностей (линий — в двумерном случае) Γ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, принадлежащих области D и разбивающих её на взаимно не пересекающиеся подобласти D_α, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m$, ограниченных поверхностями σ и Γ_α, таких, что $\bar{D} = \bar{D}_0 \cup \bar{D}_\alpha$ ($\bar{D}_0 = D_0 \cup \sigma$, $\bar{D}_\alpha = D_\alpha \cup \Gamma_\alpha$), рис. 1.5.1. Следуя [7], потребуем чтобы в каждой из подобластей $\bar{D}_\alpha$ проницаемость $K(M)$ была непрерывной вместе с частными производными первого порядка по координатам точки M, а обобщённый потенциал $\varphi(M)$ удовлетворяет в области D *условиям Остроградского*:

1) $\varphi(M)$ — непрерывная функция в $\bar{D}$;

2) в каждой подобласти D_α функция $\varphi(M)$ имеет частные производные первого и второго порядка по координатам точки M, непрерывные в $\bar{D}_\alpha$;

3) на общих границах Γ_α подобластей D_α выполняются условия

$$K_n^+(M)\left(\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \nu_M}\right)^+ = K_n^-(M)\left(\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \nu_M}\right)^-,$$
$$M \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

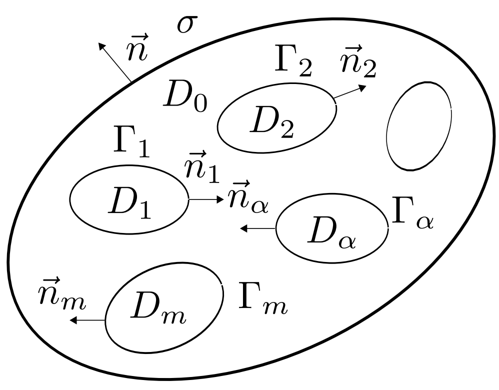

Рис. 1.5.1. Область фильтрации в случае разрыва проницаемости среды.

[1] В других случаях, когда анизотропная среда однородная (проницаемость $K = (K_{ij})$ — постоянная) и среда изотропная (K — скаляр), то $Q = 0$ и, следовательно, оператор $T\varphi$ самосопряженный и фоормула (1.5.7) упрощается.

Здесь «+» («−») обозначены предельные значения соответствующих функций при подходе к границе Γ_α со стороны (противоположной стороны) орта нормали $n_\alpha \in \Gamma_\alpha$, которые определяются аналогично предельным значениям во втором из условий (1.3.16).

Пусть функции $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$ удовлетворяют условиям Остроградского. Для каждой из подобластей D_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, m$ с учётом направления ортов $\vec{n}_\alpha \in \Gamma_\alpha$ запишем формулу (1.5.3):

$$\int\limits_{D_0} \varphi_2(M) T\varphi_1(M) d\tau + \int\limits_{D_0} \big(K(M)\cdot\nabla\varphi_1(M)\big)\cdot\nabla\varphi_2(M) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\sigma} \varphi_2(M) K_n(M) \frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M} d\sigma - \sum_{\alpha=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_\alpha} \varphi_2(M) K_n^+(M) \left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ d\sigma,$$

$$\int\limits_{D_\alpha} \varphi_2(M) T\varphi_1(M) d\tau + \int\limits_{D_\alpha} \big(K(M)\cdot\nabla\varphi_1(M)\big)\cdot\nabla\varphi_2(M) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\alpha} \varphi_2(M) K_n^-(M) \left(\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M}\right)^- d\sigma, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Складывая равенства почленно и учитывая условия Остроградского, имеем равенство

$$\int\limits_{D} \varphi_2(M) T\varphi_1(M) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\sigma} K_n(M) \varphi_2(M) \frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M} d\sigma - \int\limits_{D} \big(K(M)\cdot\nabla\varphi_1(M)\big)\cdot\nabla\varphi_2(M) d\tau,$$

совпадающее с первой формулой Грина (1.5.3).

Отметим, что при выполнении указанных условий для проницаемости $K(M)$ и условий Остроградского остаются также в силе формулы (1.5.2) и (1.5.7) в случае разрыва $K(M)$. Действительно это так, поскольку частным случаем формулы (1.5.3) при $\varphi_1 = \varphi$ и $\varphi_2 = 1$ является формула (1.5.2), а в формуле (1.5.7) производные $\partial K_{ij}^a/\partial x_i$, $i, j = 1, 2, 3$ непрерывны на границах Γ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$.

Заметим, что поскольку в нестационарном случае в обобщённом потенциале $\varphi(M, t)$ время t — параметр и он удовлетворяет условиям Остроградского, то формулы (1.5.2), (1.5.3) и (1.5.7) имеют место и в этом случае.

Единственность решений основных задач

Исследуем единственность решений поставленных выше основных граничных задач фильтрации. Единственность решений первой и второй краевых задач и задачи сопряжения на границе раздела пористых сред исследуем (для простоты суждений) в стационарном случае. Результаты остаются в силе и в нестационарном случае, поскольку в этих задачах время t — параметр. Вопрос о единственности решения нестационарной задачи эволюции границы раздела жидкостей рассмотрим отдельно.

Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ — два решения какой-либо из указанных стационарных задач. Разность этих решений $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$ удовлетворяет всюду в области D вытекающему из (1.4.1) однородному уравнению

$$T\omega(M) \equiv \nabla \cdot [K(M) \cdot \nabla\omega(M)] = 0 \tag{1.5.8}$$

$$\left(T\omega(M) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}\right) = 0\right), \quad M \in D.$$

В случае краевых задач условия (1.4.2) и (1.4.3) становятся для $\omega(M)$ однородными

$$\omega(M)^+ = 0, \quad M \in \sigma_1, \tag{1.5.9}$$

$$\left(\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2. \tag{1.5.10}$$

На сингулярной границе $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ условия (1.3.8), (1.3.11) для $\omega(M)$ имеют вид

$$\omega(M)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left(K_n(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \tag{1.5.11}$$

Условия в бесконечности (1.3.14) записываем для $\omega(M)$ в виде (условие регулярности для $\omega(M)$):

$$\omega(M) = O\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right), \quad |K(M) \cdot \nabla\omega(M)| = O\left(\frac{1}{r^2_{MM_0}}\right) \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty. \tag{1.5.12}$$

Условия на границе раздела сред (1.3.16) принимают для $\omega(M)$ следующий вид

$$\omega(M)^+ = \omega(M)^-, \quad K_n^+(M)\left(\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = K_n^-(M)\left(\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma. \tag{1.5.13}$$

Так как полагаем, что функции $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ удовлетворяют условиям Остроградского, то $\omega(M)$ также удовлетворяет этим условиям. Поэтому к $\omega(M)$ можно применить формулы (1.5.2)–(1.5.4).

Воспользуемся первой формулой Грина (1.5.3) и запишем для области D, ограниченной поверхностью σ, состоящей из поверхностей σ_1 и σ_2 ($\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$). Полагая в этой формуле $\varphi_1=\omega(M)$, $\varphi_2=\omega(M)$ и учитывая, что

$$\nabla\omega\cdot(K\cdot\nabla\omega)=\sum_{\alpha=1}^{3}\vec{e}_\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}\cdot\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\cdot\sum_{\alpha=1}^{3}\vec{e}_\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}\sum_{\alpha=1}^{3}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}\sum_{\alpha=1}^{3}\vec{e}_j\cdot\vec{e}_\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha}=\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j},$$

получаем равенство (первую формулу Грина для $\omega(M)$):

$$\begin{gathered}\int\limits_D\omega(M)T\omega(M)d\tau=\\=\int\limits_\sigma K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma-\int\limits_D\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau.\end{gathered}\tag{1.5.14}$$

Если область D кроме поверхности σ ограничена также сингулярной поверхностью σ_0 ($\sigma_0=\sigma_{01}\cup\sigma_{02}$), то в силу условий (1.5.11) интеграл

$$\int\limits_{\sigma_0}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma=0\tag{1.5.15}$$

и, следовательно, в равенстве (1.5.14) интеграл, по-прежнему, берется только по поверхности σ.

Так как $\omega(M)$ — решение уравнения (1.5.8) в рассматриваемой области D ($T\omega(M)=0$), то равенство (1.5.14) принимает вид

$$\int\limits_D\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=\int\limits_\sigma K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma.\tag{1.5.16}$$

Поскольку формула Грина (1.5.3) имеет место также нри наличии в области D сред с разными проницаемостями, сопрягающихся на одной или нескольких границах Γ ($\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{m} \Gamma_\alpha$), то равенство (1.5.16) остаётся в силе и в этом случае.

Воспользуемся равенством (1.5.16) и исследуем единственность решения первой и второй краевых задач и задачи сопряжения на границе Γ.

Теорема 1.5.1. *Решение* $\varphi(M)$ *первой внутренней краевой задачи* (1.4.1), (1.4.2) *единственно в классе функций, непрерывных в области* $\bar{D}$ ($\bar{D} = D \cup \sigma_1$) *вместе с частными производными первого порядка по координатам точки* $M \in \bar{D}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ — два решения внутренней задачи (1.4.1), (1.4.2). Так как функция $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$ является решением однородной краевой задачи (1.5.8), (1.5.9), то из равенства (1.5.16) при $\sigma = \sigma_1$ имеем

$$\frac{\partial \omega(M)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{или} \quad \omega(M) = \text{const}, \quad M \in D.$$

Поскольку функция $\omega(M)$ непрерывна всюду в области $\bar{D}$, то согласно условию (1.5.9) имеем $\omega(M) = 0$, то есть $\varphi(M) = \varphi'(M)$, $M \in \bar{D}$. ■

Теорема 1.5.2. *Любые два решения* $\varphi(M)$ *и* $\varphi'(M)$ *второй внутренней краевой задачи* (1.4.1), (1.4.3) *из класса функций, непрерывных в области* $\bar{D}$ ($\bar{D} = D \cup \sigma_2$) *вместе с частными производными первого порядка по координатам точки* $M \in \bar{D}$ *могут отличаться лишь на аддитивную постоянную:* $\varphi(M) - \varphi'(M) = \text{const}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ — решения внутренней задачи (1.4.1), (1.4.3). Поскольку функция $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$ является решением однородной краевой задачи (1.5.8), (1.5.10), то из равенства (1.5.6) при $\sigma = \sigma_2$ следует

$$\frac{\partial \omega(M)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{или} \quad \omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M) = \text{const}. \qquad ■$$

Замечание. Вторая внутренняя краевая задача (1.4.1), (1.4.3) может не иметь решения (не разрешима) в случае наличия в области D произвольных источников (стоков) течения. Укажем условие, при котором эта задача разрешима. Согласно формуле Остроградского (1.5.2) при учете уравнения (1.4.1) имеем

$$\int\limits_{\sigma_2} K_n(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \nu_M} d\sigma = Q, \tag{1.5.17}$$

где $Q = \int\limits_D \widetilde{\rho}(M)d\tau$ — суммарная мощность источников (стоков), расположенных в области D, ограниченной поверхностью σ_2. ($Q = \sum\limits_{i=1}^{N} q_i$ — в случае системы N дискретных источников (стоков), q_i — мощность каждого из них).

Равенство (1.5.17) имеет ясный гидродинамический смысл: поток скорости фильтрации $\vec{v}$, определяемой ее нормальной к поверхности σ_2 составляющей $v_n = K_n(M)\partial\varphi(M)/\partial\nu_M$, через эту поверхность равен мощности Q источников и стоков, расположенных внутри этой поверхности.

Из равенства (1.5.17) при учете условия (1.4.3) имеем

$$\int\limits_{\sigma_2} K_n(M)g(M)d\sigma = Q. \tag{1.5.18}$$

Равенство (1.5.18) выражает условие разрешимости внутренней задачи (1.4.1), (1.4.3) при наличии в области D источников и стоков. А именно, функция $g(M)$ в условии (1.4.3) такая, что для источников и стоков суммарной мощности Q, расположенных в области D, ограниченной поверхностью σ_2, выполнялось равенство (1.5.18).

В частности, если в области D нет источников и стоков, либо их суммарная мощность $Q = 0$, то функция $g(M)$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{\sigma_2} K_n(M)g(M)d\sigma = 0. \tag{1.5.18$'$}$$

Если область D ограничена непроницаемой поверхностью σ_2, то вторая внутренняя краевая задача для уравнения (1.4.1) с однородным $(g(M) = 0)$ условием

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^{+} = 0, \quad M \in \sigma_2$$

будет согласно (1.5.18) разрешимой, если в области D нет источников и стоков либо их суммарная мощность равна нулю $(Q = 0)$.

Теорема 1.5.3. *Пусть функция $\varphi(M)$ определена в области D, внешней к замкнутой поверхности σ ($\sigma = \sigma_1$ или σ_2) и регулярная на бесконечности, то есть удовлетворяет условиям* (1.3.14). *Тогда $\varphi(M)$ — решение первой* (1.4.1), (1.4.2) *(второй* (1.4.1), (1.4.3)*) внешней краевой* *задачи, непрерывное в области* $\bar{D} = D \cup \sigma$ *вместе с частными производными первого порядка и регулярное на бесконечности, будет единственным.*

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ — два решения первой (второй) краевой задачи и их разность $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$. Из некоторой точки M_0, лежащей внутри поверхности σ ($\sigma = \sigma_1$ или σ_2), опишем сферу σ_R настолько большого радиуса R, чтобы эта сфера лежала целиком в области D. Пусть D_R — область, ограниченная поверхностями σ и σ_R (рис. 1.5.2).

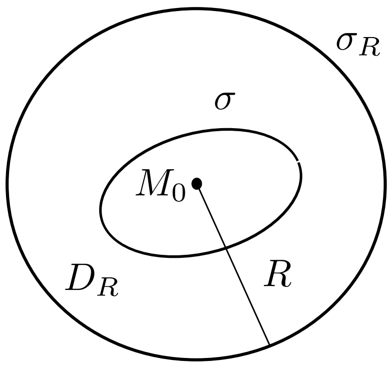

Рис. 1.5.2. Область D_R, ограниченная поверхностями σ и σ_R.

Применим первую формулу Грина (1.5.14) для функции $\omega(M)$ в области D_R. Получим

$$\int\limits_{D_R} \omega(M) T\omega(M) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\sigma\cup\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M} d\sigma - \int\limits_{D_R} \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j} d\tau.$$

Это равенство имеет место также в случае, когда область D_R кроме поверхностей σ и σ_R ограничена сингулярной поверхностью σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$), поскольку на ней выполняется равенство (1.5.15).

Так как функция $\omega(M)$ — решение первой (1.5.8), (1.5.9) (второй (1.5.8), (1.5.10)) краевой задачи в области D_R, то в последнем равенстве $T\omega(M) = 0$ и интеграл по поверхности σ равен нулю. Следовательно, для этих задач имеем равенство

$$\int\limits_{D_R} \sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j} d\tau = \int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M} d\sigma. \tag{1.5.19}$$

Оценим интеграл по σ_R в равенстве (1.5.19). Учитывая для $\omega(M)$ условия регулярности на бесконечности (1.5.12) и равенство

$$K_n(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M} = \vec{K}_n(M)\cdot\nabla\omega(M) = \vec{n}_M\cdot\big[K(M)\cdot\nabla\omega(M)\big], \quad M\in\sigma_R,$$

находим

$$\left|\int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma\right| \leqslant B\int\limits_{\sigma_R}\frac{d\sigma}{r^3_{MM_0}} = \frac{4\pi B}{R} \quad (B = \mathrm{const}). \quad (1.5.20)$$

Учитывая оценку интеграла (1.5.20) и переходя в равенстве (1.5.19) при $R \to \infty$ к пределу, имеем

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что $\partial\omega(M)/\partial x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ или $\omega(M) = \mathrm{const}$, $M \in D$. В силу условий регулярности (1.5.12) $\omega(M) \to 0$ при $r_{MM_0} = R \to \infty$. Поэтому $\omega(M) = 0$ или $\varphi(M) = \varphi'(M)$, $M \in D$. ■

Теорема 1.5.4. *Пусть в неограниченной области D $(D = D_1 \cup D_2)$ проницаемость среды $K(M)$ терпит разрыв на границе Γ сопряжения областей D_1 и D_2 и вместе с обобщенным потенциалом $\varphi(M)$ удовлетворяет условиям Остроградского. Тогда решение $\varphi(M)$ задачи сопряжения* (1.4.1), (1.3.16) *единственно в классе функций, непрерывных в области D вместе с частными производными первого порядка по координатам точки M и регулярных на бесконечности.*

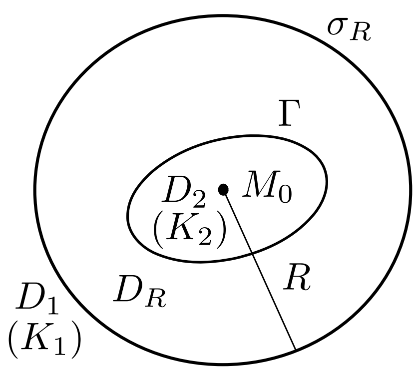

Рис. 1.5.3. Область D_R в кусочно-анизотропной и неоднородной пористой среде.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ два решения задачи (1.4.1), (1.3.16), удовлетворяющих условиям Остроградского. Их разность $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$ также удовлетворяет этим условиям. Проведём из произвольной точки $M_0 \in D$ $(D = D_1 \cup D_2)$ сферу σ_R настолько большого радиуса R, чтобы замкнутая граничная поверхность Γ целиком лежала внутри этой сферы (рис. 1.5.3). Применим для области D_R (шара радиуса R с центром M_0) первую формулу Грина для $\omega(M)$ (1.5.14) . Получим равенство

$$\int\limits_{D_R}\omega(M)T\omega(M)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma - \int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau.$$

Заметим, если границей области D_R является также сингулярная поверхность σ_0, то в силу условия (1.5.15) в этом равенстве будет по-прежнему интеграл только по поверхности σ_R.

Так как функция $\omega(M)$ — решение задачи (1.5.8), (1.5.13) ($T\omega(M) = 0$), то последнее равенство принимает вид

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau = \int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma.$$

Учитывая для $\omega(M)$ условия регулярности (1.5.12) и оценку (1.5.20) интеграла по поверхности σ_R, переходим при $R \to \infty$ к пределу и получаем

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3} K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau = 0.$$

Отсюда имеем $\partial\omega(M)/\partial x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ или $\omega(M) = \mathrm{const}$, $M \in D$. В силу условий (1.5.12) $\omega(M) \to 0$ при $r_{MM_0} = R \to \infty$. Поэтому $\omega(M) = 0$ или $\varphi(M) = \varphi'(M)$, $M \in D$. ■

Обратимся теперь к задаче эволюции границы раздела жидкостей Γ_t. Напомним, что в этой задаче необходимо решать систему уравнений (1.3.27), (1.4.1) при условиях (1.3.21), (1.3.24) и (1.3.14). Принципиальная трудность отыскания её решения состоит в том, что условия (1.3.24) заданы на границе Γ_t, которая неизвестна, её надлежит найти при $t > 0$. В момент времени $t = 0$ уравнение границы Γ_0 задано (1.3.21). В этот момент времени условия (1.3.24) на Γ_0 математически аналогичны условиям (1.3.16) задачи сопряжения на границе раздела сред Γ. Условия в бесконечности для $\varphi(M,t)$ при $t \geqslant 0$ в задаче эволюции границы Γ_t совершенно аналогичны для $\varphi(M)$ в задаче сопряжения на Γ условиям (1.3.14). Поэтому по аналогии с задачей сопряжения на Γ можно утверждать, что при $t = 0$ существует единственное решение $\varphi(M, 0)$ уравнения (1.4.1) при условиях (1.3.24) на Γ_0 и (1.3.14), а значит единственное поле скоростей $\vec{v}(M, 0) = K(M) \cdot \nabla\varphi(M, 0)$, $M \in D$.

Чтобы найти положение границы Γ_t при $t > 0$ необходимо далее решать совместно уравнения (1.4.1) и (1.3.27) при условиях (1.3.24), (1.3.14).

Единственность решения задачи эволюции границы Γ_t в общем случае требует отдельного исследования. В частности, для плоскопараллельного течения в изотропной однородной пористой среде локальная разрешимость задачи эволюции границы Γ_t изучалась в работе [95].

Исследование единственности решения основных задач двумерной фильтрации в слое проводимости $P = HK$ (H — толщина слоя, $K = K_{ij}$, $i, j = 1, 2$ — его проницаемость) аналогично трёхмерному случаю. В двумерном случае в исходных формулах (1.5.2), (1.5.3), (1.5.7) следует вместо K_n писать P_n $(P_n = HK_n)$ и интегрировать по контуру области D , имея в виду условия (1.3.12) и (1.3.15). Тогда результаты, выраженные теоремами (1.5.1)–(1.5.4), распространяются на основные задачи двумерной фильтрации в слое проводимости P .

Интегральное условие регулярности обобщённого потенциала в бесконечности

Первое из условий (1.3.14) ((1.3.15) — в двумерном случае) регулярности обобщённого потенциала $\varphi(M)$ в бесконечности может не выполнятся. Укажем другое условие регулярности $\varphi(M)$ в бесконечности, выполнение которого обеспечивает единственность решения основных граничных задач. Проведенные выше суждения показывают, что для единственности решения этих задач в областях, содержащих бесконечно удаленную точку, необходимо обращение в ноль интеграла от $\omega(M)$ по сфере σ_R радиуса R при $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu_M}d\sigma = 0.$$

Напоминаем, $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$, $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ — два решения одной и той же задачи. Отсюда следует, что обобщённый потенциал $\varphi(M)$ трехмерного течения удовлетворяет в бесконечности условию

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} K_n(M)\varphi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}d\sigma = 0. \tag{1.5.21}$$

Назовем (1.5.21) *интегральным* условием регулярности $\varphi(M)$ в бесконечности.

Интегральное условие регулярности в бесконечности обобщённого потенциала $\varphi(M)$ двумерного течения имеет вид

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_R} P_n(M)\varphi(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}dl = 0, \tag{1.5.22}$$

где $P_n(M) = H(M)K_n(M)$, L_R — контур окружности радиуса R.

Учитывая для нормальной составляющей скорости v_n выражения $v_n = K_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ и $v_n = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial l}$ (ψ — функция тока), условия (1.5.21) и (1.5.22) запишем

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\varphi(M)v_n(M)d\sigma = 0, \tag{1.5.21$'$}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_R} H(M)\varphi(M)v_n(M)d\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_R}\varphi(M)\frac{\partial\psi(M)}{\partial l_M}dl = 0. \tag{1.5.22$'$}$$

Выполнение условий (1.5.21) и (1.5.22) (или их представления (1.5.21′) и (1.5.22′) через v_n и ψ), обеспечивает единственность решения основных гарничных задач трёхмерных и двумерных течений в областях, содержащих бесконечно удалённую точку.

Глава 2

Уравнения двумерных течений в слое и свойства их решений

Основные уравнения двумерных течений в анизотропном и неоднородном слое преобразуются на основе гомеоморфизма уравнения Бельтрами к каноническому виду. Указываются свойства основных уравнений и их решений.

§ 2.1. Основные уравнения течений в слое

Уравнения для обобщённого потенциала и функции тока

Как показано в § 1.2, двумерное течение в анизотропном и неоднородном слое пористой среды описывают обобщённый потенциал φ и функция тока ψ, которые удовлетворяют системе уравнений (1.2.20), которую запишем

$$\begin{aligned} Hv_x &= P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \\ Hv_y &= P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

где $P = (P_{ij})$ — проводимость слоя — тензор($P = HK$, $P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$).

Система уравнений (2.1.1) относительно φ и ψ эллиптического типа, если согласно (1.2.11) компоненты тензора (P_{ij}) удовлетворяют условиям

$$P_{11} > 0 \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_s) = P_{11}P_{22} - \left(\frac{P_{12} + P_{21}}{2}\right)^2 > 0, \tag{2.1.1$'$}$$

где $D(P_s)$ — определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P, $P^T = (P_{ji})$ — транспонированный тензор.

Обобщённый потенциал φ и функция тока ψ удовлетворяют всюду в области D за исключением особых точек функций φ и ψ уравнениям (1.2.21) и (1.2.22), которые математически аналогичны: они имеют дивергентную форму[1]

$$T_1\varphi \equiv \nabla \cdot (P \cdot \triangledown\varphi) = 0, \tag{2.1.2}$$

$$T_2\psi \equiv \nabla \cdot (P^* \cdot \triangledown\psi) = 0. \tag{2.1.3}$$

Здесь

$$P^* = \frac{P^T}{D(P)} = \frac{K^T}{HD(K)} \quad \left(P^*_{ij} = \frac{P_{ji}}{D(P)} = \frac{K_{ji}}{HD(K)}, \quad i, j = 1, 2\right), \tag{2.1.4}$$

$P^T = HK^T$, $P^T = (P_{ji})$ и $K^T = (K_{ji})$ — транспонированные тензоры проводимости и проницаемости слоя, $D(P)$ и $D(K)$ — определители тензоров P и K $(D(P) = H^2 D(K))$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}$ — оператор Гамильтона.

Как показано в § 2.2, уравнения (2.1.2) и (2.1.3) описывают течения в сопряжённых слоях проводимости P и P^*.

Если известны решения φ и ψ уравнений (2.1.2) и (2.1.3), то поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$ можно найти из (2.1.1). Тогда поле приведённых скоростей $\vec{V} = (V_x, V_y)$, можно найти из равенств (1.2.7) или с учётом системы (2.1.1) из формул

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{D(P)}\left(P_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \\ V_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{D(P)}\left(P_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x} + P_{21}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Отметим, что равенства (2.1.5) следуют также из равенств (1.2.8) при $H_1 = H_2 = 1$, $H_3 = H$.

Рассматривая (2.1.1) и (2.1.5) как систему уравнений для функций φ и ψ, находим, что они эквивалентны. Действительно, поскольку определитель $D(P)$ не равен нулю $(D(P) > 0)$, то из системы (2.1.1), разрешая её относительно $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$, имеем систему (2.1.5). Обратно, из системы (2.1.5), разрешая её относительно $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$, находим систему (2.1.1).

Исключая функции φ и ψ соответственно из системы (2.1.1) и (2.1.5) (путём дифференцирования по x и y и последующего почленного сложения или вычитания), имеем уравнения (2.1.2) для φ и (2.1.3) для ψ.

[1] Уравнения (2.1.2) и (2.1.3) следуют также из системы (2.1.1).

Если найдена одна из функций φ (или ψ) как решение уравнения (2.1.2) (или (2.1.3)), то другая может быть представлена в квадратурах. Действительно, имеем полные дифференциалы функций $\varphi = \varphi(x, y)$ и $\psi = \psi(x, y)$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \quad d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy\,.$$

Используя равенства (2.1.5) и (2.1.1), запишем

$$d\varphi = \frac{1}{D(P)} \left[\left(P_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx - \left(P_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_{21} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \right],$$

$$d\psi = -\left(P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx + \left(P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy.$$

Отсюда в случае односвязной области течения имеем с точностью до аддитивных постоянных φ_0 и ψ_0 функцию φ (или ψ), если известна функция ψ (или φ):

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{1}{D(P)} \left[\left(P_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx - \left(P_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_{21} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \right], \\ \psi - \psi_0 &= \int \left[\left(P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy - \left(P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx \right]. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Уравнения для поля скоростей

Учтём, что поля скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ и приведённой скорости $\vec{V} = (V_x, V_y)$ взаимосвязаны равенствами (1.2.7). Тогда из равенств (2.1.1) и (2.1.5) имеем системы уравнений для $\vec{v}$:

$$\left[\nabla \times \left(K^{-1} \cdot \vec{v} \right) \right]_{\perp} = 0, \quad \nabla \cdot (H\vec{v}) = 0 \tag{2.1.7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_{11} v_y - K_{21} v_x}{D(K)} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_{22} v_x - K_{12} v_y}{D(K)} \right) = 0,\ \frac{\partial (H v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (H v_y)}{\partial y} = 0 \right),$$

и для $\vec{V}$:

$$\left(\nabla \times \vec{V} \right)_{\perp} = 0, \quad \nabla \cdot \left(P \cdot \vec{V} \right) = 0 \tag{2.1.8}$$

$$\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(P_{11} V_x + P_{12} V_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_{21} V_x + P_{22} V_y \right) = 0 \right),$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}$. Первые из уравнений (2.1.7) и (2.1.8) записаны в проекции на направление, перпендикулярное плоскости Oxy (что помечено знаком $\perp$).

Если известно поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$ или $\vec{V} = (V_x, V_y)$, то учитывая их выражения (2.1.1) и (2.1.5) через функции φ и ψ, имеем из (2.1.6) равенства

$$\begin{gathered}\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0) = \int\limits_L V_x dx + V_y dy = \int\limits_L \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L (K^{-1}\cdot\vec{v})\cdot d\vec{l} = \Gamma, \\ \psi(x,y) - \psi(x_0,y_0) = \int\limits_L H\left[v_y dx - v_x dy\right] = -\int\limits_L H\vec{v}\cdot\vec{n}dl = \\ = -\int\limits_L (P\cdot\vec{V})\cdot\vec{n}dl = -\Pi,\end{gathered} \tag{2.1.9}$$

где L — произвольный контур , соединяющий в односвязной области точки (x_0, y_0) и (x, y); $\vec{n}$ — орт нормали контура L, остающийся слева при его обходе; Γ и Π — циркуляция и поток скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$, вычисленные для контура L. Видно, что разности значений функций φ, ψ в точках (x_0, y_0) и (x, y) определяются циркуляцией Γ и потоком Π.

Уравнения в комплексной форме

Введём комплексную скорость v и приведённую комплексную скорость V:

$$v = v_x + iv_y, \quad V = V_x + iV_y. \tag{2.1.10}$$

Будем рассматривать проводимость слоя $P = HK$, обобщённый потенциал φ, функцию тока ψ, компоненты скоростей v_x, v_y и V_x, V_y и в силу (2.1.10) скорости v и V как функции комплексных переменных z и $\bar{z}$ ($x = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$), а в нестационарном случае времени t[1].

Введём комплексные операторы дифференцирования по z и $\bar{z}$, которые

[1] Для краткости записи, там где это не вызывает недоразумений, переменную $\bar{z}$ будем опускать, пишем: $K = K(z)$, $H = H(z)$ и $\varphi = \varphi(z,t)$, $\psi = \psi(z,t)$, $v = v(z,t)$, $V = V(z,t)$ (в стационарном случае $\varphi = \varphi(z)$, $\psi = \psi(z)$, $v = v(z)$, $V = V(z)$).

взаимосвязаны с частными производными по x и y равенствами [32]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{2.1.11}$$

Тогда равенства (2.1.1) и (2.1.5) запишем в комплексной форме

$$Hv = A_0\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + B_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -i2\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}, \tag{2.1.12}$$

$$V = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = -\frac{i}{D(P)}\left[\bar{A}_0\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} + B_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right], \tag{2.1.13}$$

где

$$A_0 = P_{11}+P_{22}-i(P_{12}-P_{21}),\ B_0 = P_{11}-P_{22}+i(P_{12}+P_{21}),\ |A_0|^2-|B_0|^2 = 4D(P).$$

Из равенств (2.1.12), (2.1.13) в соответствии с (1.2.7) находим:

$$v = \frac{A_0V + B_0\bar{V}}{2H}, \quad V = \frac{H(\bar{A}_0 v - B_0\bar{v})}{2D(P)}. \tag{2.1.14}$$

Из равенств (2.1.12) и (2.1.13) имеем уравнения для φ и ψ в комплексной форме

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + b\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{2.1.15}$$

$$\frac{\bar{a}}{D(P)}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} - \frac{b}{D(P)}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{2.1.15$'$}$$

где

$$a = \frac{A_0}{2i} = \frac{1}{2i}\left[P_{11} + P_{22} - i(P_{12} - P_{21})\right],$$
$$b = \frac{B_0}{2i} = \frac{1}{2i}\left[P_{11} - P_{22} + i(P_{12} + P_{21})\right], \quad |a|^2 - |b|^2 = D(P).$$

Уравнения (2.1.15) и (2.1.15$'$) эквивалентны друг другу, поскольку они представляют собой комплексную форму записи эквивалентных систем уравнений (2.1.1) и (2.1.5) для функций φ, ψ.

§ 2.2. Свойства основных уравнений и их решений

Конформная ковариантность основных уравнений

Покажем, что уравнение (2.1.15), а значит системы уравнений (2.1.1) и (2.1.5) конформно ковариантны, то есть их форма записи сохраняется (не меняется) при конформном преобразовании. Рассмотрим течение в двух плоскостях $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, которые взаимосвязаны конформным преобразованием

$$\zeta = f(z), \qquad z = f_1(\zeta). \tag{2.2.1}$$

Здесь $f(z)$ — аналитическая функция $(df(z)/d\bar{z} = 0)$, $f_1(z)$ — обратная ей функция. Полагаем, что производная $df(z)/dz$ конечная и отличная от нуля при отображении области D течения плоскости z на область D' плоскости ζ.

Согласно (2.2.1) обобщённый потенциал и функция тока преобразуются[1]

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi(z,\bar{z}) = \varphi\left[f_1(\zeta), \bar{f}_1(\zeta)\right] = \varphi'(\zeta,\bar{\zeta}) = \varphi', \\ \psi = \psi(z,\bar{z}) = \psi\left[f_1(\zeta), \bar{f}_1(\zeta)\right] = \psi'(\zeta,\bar{\zeta}) = \psi'. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Функции φ' и ψ' описывают течение в области D' слоя другой проводимости $P' = H'K' = H'(K'_{ij})$, которая связана конформным преобразованием (2.2.1) со слоем проводимости $P = HK = H(K_{ij})$ равенством

$$P = P(z,\bar{z}) = P\left[f_1(\zeta), \bar{f}_1(\zeta)\right] = P^{'}(\zeta,\bar{\zeta}) = P^{'}. \tag{2.2.3}$$

Используем, аналогичные (2.1.11), комплексные операторы дифференцирования по ζ и $\bar{\zeta}$, которые взаимосвязаны с производными по ξ и η равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \\ \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta} = i\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

[1] Для простоты суждений рассматриваем стационарные течения. Эти суждения справедливы также в нестационарном случае.

В силу конформности преобразований (2.2.1) находим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial}{\partial \zeta}\,, \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{d\bar f(z)}{d\bar z}\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\,.$$

При учёте последних равенств уравнение (2.1.15) запишем

$$a'\frac{\partial \varphi'}{\partial \bar\zeta} + b'\frac{\partial \varphi'}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi'}{\partial \bar\zeta} = 0\,, \tag{2.2.5}$$

где коэффициенты $a' = a'(\zeta), b' = b'(\zeta) = b(\zeta)\frac{df(z)/dz}{d\bar f(z)/d\bar z}\Big|_{z=f_1(\zeta)}$.

Уравнение (2.2.5), имея другие коэффициенты нежели уравнение (2.1.15), совпадает с последним по форме записи. Это означает конформную ковариантность уравнения (2.1.15). Аналогично нетрудно убедиться в конформной ковариантности уравнения (2.1.15′). Тогда конформно ковариантны системы уравнений (2.1.1) и (2.1.5), комплексной формой записи которых являются уравненния (2.1.15) и (2.1.15′).

Конформная ковариантность основных уравнений позволяет по заданным обобщённому потенциалу φ и функции тока ψ течения в области D слоя проводимости P находить согласно преобразованиям (2.2.2) и (2.2.3) обобщённый потенциал φ' и функцию тока ψ' течения в области D' слоя проводимости P'.

Принцип обратимости течений

Два слоя, проводимости которых $P = HK$ и $P^* = H^*K^*$ (H, H^* и $K = (K_{ij})$, $K^* = (K^*_{ij})$) — толщины и проницаемости слоёв), назовём *взаимно сопряжёнными*, если выполняются равенства[1]

$$P^* = \frac{P^T}{D(P)} = \frac{K^T}{HD(K)}, \quad P = \frac{P^{*T}}{D(P^*)} = \frac{K^{*T}}{HD(K^*)} \tag{2.2.6}$$

$$\left(P^*_{ij} = \frac{P_{ji}}{D(P)} = \frac{K_{ji}}{HD(K)}, \quad P_{ij} = \frac{P^*_{ji}}{D(P^*)} = \frac{K^*_{ji}}{H^*D(K^*)},\, i,j = 1,2\right),$$

где $P^T = (P_{ji})$, $P^{*T} = (P^*_{ji})$ и $K^T = (K_{ji})$, $K^{*T} = (K^*_{ji})$ — транспонированные тензоры проводимостей и проницаемостей слоёв ($P^T = HK^T$,

[1] Равенства (2.2.6) аналогичны (2.1.4).

$P^{*T} = H^* K^{*T}$); $D(P)$, $D(P^*)$ и $D(K)$, $D(K^*)$ — определители проводимостей P, P^* и проницаемостей K, K^* ($D(P) = H^2 D(K)$, $D(P^*) = H^{*2} D(K^*)$), причём $D(P)D(P^*) = D(PP^*) = 1$. Как видно из (2.2.6), для проводимостей и проницаемостей сопряжённых слоёв выполняются равенства

$$PP^* = (PP^*)^T, \quad (KK^*) = (KK^*)^T,$$

означающие симметрию матриц PP^* и KK^*.

Рассмотрим частные случаи сопряжённых слоёв. Если слои изотропные и неоднородные: $K = kE$, $K^* = k^* E$ (E — единичная матрица, k и k^* — скалярные функции), $D(K) = k^2$, $D(K^*) = k^{*2}$, то их проводимости $P = HK$ и $P^* = H^* K^*$ связаны известным [43] равенством $PP^* = 1$. Когда анизотропные слои постоянной толщины $(H = H^* = 1)$, то их проницаемости взаимосвязаны равенствами

$$K^* = \frac{K^T}{D(K)}, \quad K = \frac{K^{*T}}{D(K^*)} \quad (D(K)D(K^*) = 1).$$

Для фильтрационных течений в сопряжённых слоях имеет место утверждение, которое по своей геометрической сути аналогично принципу обратимости для течений идеальной жидкости [72] и которое выражает

Теорема 2.2.1. *(принцип обратимости течений). Пусть обобщённый потенциал φ и функция тока ψ описывают течение в анизотропном и неоднородном слое проводимости $P = HK = H(K_{ij})$. Тогда течение в сопряжённом согласно* (2.2.6) *слое проводимости $P^* = H^* K^* = H^*(K^*_{ji})$ описывают обобщённый потенциал φ^* и функция тока ψ^* такие, что*

$$\varphi* = -\psi, \quad \psi^* = \varphi. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Убедимся, что функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ течения в слое проводимости $P^* = H^* K^*$ удовлетворяют уравнению (2.1.5), а значит системе уравнений (2.1.1). Воспользуемся тем, что уравнение (2.1.15) эквивалентно уравнению (2.1.15$'$) и в последнем заменим φ и ψ на φ^* и ψ^* согласно равенствам (2.2.7). Получим уравнение для φ^* и ψ^*:

$$a^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{z}} + b^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \bar{z}} = 0,$$

в котором

$$a^* = \frac{1}{2i} \left[P^*_{11} + P^*_{22} - i(P^*_{12} - P^*_{21})\right], \quad b^* = \frac{1}{2i} \left[P^*_{11} - P^*_{22} + i(P^*_{12} + P^*_{21})\right].$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.1.15) и описывает течение в слое проводимости P^*, сопряжённом слою проводимости P. ■

Значимость этого принципа состоит в том, что он позволяет по заданным функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ течения в слое проводимости P находить на основании равенств (2.2.7) функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ течения в сопряжённом согласно (2.2.6) слое проводимости P^*.

Принцип обратимости имеет наглядный геометрический смысл: линии равного обобщённого потенциала $\varphi = \mathrm{const}$ и линии тока $\psi = \mathrm{const}$ при переходе к сопряжённому слою заменяются на линии тока $\psi^* = \mathrm{const}$ и линии равного обобщённого потенциала $\varphi^* = \mathrm{const}$. Однако эти линии не являются взаимно ортогональными ($\nabla\varphi \cdot \nabla\psi \neq 0$, как это следует из уравнений (2.1.1)) в отличии от течения в изотропном слое, где эти линии взаимно ортогональны [43].

Отметим, что в соответствии с принципом обратимости (2.2.7) и определением сопряжённых слоёв (2.2.6) полученные для φ и ψ уравнения (2.1.2) и (2.1.3) можно рассматривать как уравнения течений в сопряжённых слоях.

Продифференцируем равенства (2.2.7) по $\bar{z}$:

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\bar{z}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}, \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}.$$

Учитывая вытекающие из (2.1.12), (2.1.13) выражения скорости течений в сопряжённых слоях проводимостей P и P^*:

$$v = -\frac{i2}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}, \quad V = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} \quad \text{и} \quad v^* = -\frac{i2}{H^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial\bar{z}}, \quad V^* = 2\frac{\partial\varphi^*}{\partial\bar{z}},$$

находим

$$V^* = -iHv, \quad V = iH^*v^*. \tag{2.2.8}$$

Равенства (2.2.8) позволяют находить скорости течения в сопряжённых слоях, если известны скорости в одном из них. Они имеют интересную геометрическую интерпретацию. А именно, учитывая $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, находим, что модули скорости связаны равенствами $|V^*| = H|v|$, $|V| = H^*|v^*|$ и вектор приведённой скорости $\vec{V}^*$ ($\vec{V}$) повёрнут на угол $\pi/2$ относительно вектора скорости $\vec{v}$ ($\vec{v}^*$) по (против) часовой стрелки.

Принцип наложения течений

В силу линейности системы уравнений (2.1.1) имеет место

Теорема 2.2.2. *(принцип наложения течений). Если φ_ν и ψ_ν — обобщённые потенциалы и функции тока двух $(\nu = 1, 2)$ течений в слое проводимости $P = HK$, то обобщённый потенциал и функция тока*

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta_2\varphi_2, \quad \psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \tag{2.2.9}$$

опишут другое течение в этом же слое (α, β — произвольные вещественные постоянные).

Доказательство. Так как φ_ν и ψ_ν , $\nu = 1, 2$ решения уравнений (2.1.1), то в силу линейности этих уравнений их решениями будут обобщённый потенциал φ и функция тока ψ вида (2.2.9). ■

Этот принцип позволяет по заданным обобщённым потенциалам и функциям тока течений находить согласно формулам (2.2.9) эти функции другого течения.

§ 2.3. Канонические уравнения двумерных течений

Физическая и вспомогательная плоскости

Преобразуем систему уравнений (2.1.1) к каноническому виду, воспользовавшись её комплексным представлением (2.1.12). Для этого наряду с комплексной плоскостью $z = x + iy$, которую назовём *физической плоскостью*, введём *вспомогательную плоскость* $\zeta = \xi + i\eta$. Полагаем, что плоскости z и ζ связаны гомеоморфно (взаимно однозначно и непрерывно) прямым

$$\zeta = \zeta(z) \quad (\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)) \tag{2.3.1}$$

и обратным

$$z = z(\zeta) \quad (x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)) \tag{2.3.1$'$}$$

преобразованиями[1]. Якобианы этих преобразований

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad J' \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi},$$

[1] В преобразованиях (2.3.1) и (2.3.1$'$) следует учитывать, что $\zeta = \zeta(z, \bar{z})$ и $z = z(\zeta, \bar{\zeta})$.

используя комплексные операторы дифференцирования (2.1.11) и (2.2.4), запишем

$$J \equiv \frac{\partial(\zeta,\bar\zeta)}{\partial(z,\bar z)} = \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z} - \frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z} = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right|^2, \tag{2.3.2}$$

$$J' \equiv \frac{\partial(z,\bar z)}{\partial(\zeta,\bar\zeta)} = \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\bar\zeta} - \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta} = \left|\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\right|^2. \tag{2.3.2$'$}$$

Полагаем, что якобианы J и J' конечны и отличны от нуля в областях D и D' (D' — область плоскости ζ является образом области D плоскости z).

Для непрерывно дифференцируемой в областях D и D' функции $f = f(z,\bar z) = f(\zeta,\bar\zeta)$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial\bar z} = \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z} + \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}. \tag{2.3.3}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z} - \frac{\partial f}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right). \tag{2.3.4}$$

В частности, полагая в (2.3.4) $f = z$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta} = \frac{1}{J}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}, \quad \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta} = -\frac{1}{J}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}. \tag{2.3.5}$$

Учитывая равенства (2.3.5), находим взаимосвязь якобианов (2.3.2) и (2.3.2$'$):

$$JJ' = \frac{\partial(\zeta,\bar\zeta)}{\partial(z,\bar z)}\frac{\partial(z,\bar z)}{\partial(\zeta,\bar\zeta)} = 1. \tag{2.3.6}$$

Принимая во внимание (2.3.6), формулы (2.3.5) запишем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{J'}\frac{\partial\bar z}{\partial\bar\zeta}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\bar z} = -\frac{1}{J'}\frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}. \tag{2.3.5$'$}$$

Тогда формулы (2.3.3) с учётом равенств (2.3.5$'$) перепишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{J'}\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\bar\zeta} - \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial\bar z} = \frac{1}{J'}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial z}{\partial\zeta} - \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar z}{\partial\zeta}\right). \tag{2.3.7}$$

Преобразование уравнений к канонической форме

Полагая в формуле (2.3.3) последовательно $f = \varphi$ и $f = \psi$, уравнение (2.1.12) запишем

$$Hv(z)=\left(A_0\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}+B_0\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}+\left(A_0\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}+B_0\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=-i2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}\right).$$

Присоединяя к этому равенству комплексно сопряжённое выражение

$$H\bar v(z)=\left(\bar A_0\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z}+\bar B_0\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}+\left(\bar A_0\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\bar B_0\frac{\partial\bar\zeta}{\partial\bar z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=i2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z}\right),$$

исключим из них $\partial\psi/\partial\zeta$. Для этого первое из этих равенств умножим на $\partial\zeta/\partial z$, а второе — на $\partial\zeta/\partial\bar z$ и полученное сложим почленно. Учитывая выражение якобиана (2.3.2), находим

$$H\left[v(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\bar v(z)\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right]=A_0'\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}+B_0'\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=-i2J\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}\,, \tag{2.3.8}$$

где

$$A_0'=A_0\left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2+\bar A_0\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right|^2+2Re\left(B_0\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial z}\right),$$

$$B_0'=B_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2+(A_0+\bar A_0)\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}+\bar B_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right)^2.$$

Потребуем, чтобы преобразование (2.3.1) обращало в нуль коэффициент B_0', то есть удовлетворяло уравнению

$$\bar B_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}\right)^2+(A_0+\bar A_0)\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}+B_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2=0. \tag{2.3.9}$$

Отсюда, вводя обозначения $\mu=\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}/\frac{\partial\zeta}{\partial z}$, имеем для μ квадратное уравнение

$$\bar B_0\mu^2+(A_0+\bar A_0)\mu+B_0=0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\mu_\pm=\frac{-(A_0+\bar A_0)\pm\sqrt{\left(A_0+\bar A_0\right)^2-4|B_0|^2}}{2\bar B_0}.$$

Тогда уравнение (2.3.9) запишем

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}-\mu_+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}-\mu_-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=0. \qquad (2.3.9')$$

Учитывая коэффициенты A_0 и B_0 уравнения (2.1.12), находим

$$A_0+\bar A_0=2(P_{11}+P_{22}),$$
$$|B_0|^2=(P_{11}-P_{22})^2+(P_{12}+P_{21})^2=(P_{11}+P_{22})^2-(2\sqrt{D(P_s)})^2,$$
$$\mu_\pm=\frac{-(P_{11}+P_{22})\pm 2\sqrt{D(P_s)}}{P_{11}-P_{22}-i(P_{12}+P_{21})}=-\frac{P_{11}-P_{22}+i(P_{12}+P_{21})}{P_{11}+P_{22}\pm 2\sqrt{D(P_s)}}.$$

Находим $|\mu_\pm|^2=\mu_\pm\bar\mu_\pm$:

$$|\mu_\pm|^2=\frac{(P_{11}-P_{22})^2+(P_{12}+P_{21})^2}{P_{11}+P_{22}\pm 2\sqrt{D(P_s)}}=\frac{(P_{11}+P_{22})^2-(2\sqrt{D(P_s)})^2}{(P_{11}+P_{22}\pm 2\sqrt{D(P_s)})^2}.$$

Полагаем, что $\sqrt{D(P_s)}>0$. Это обеспечивает, как увидим далее в § 2.4 эллиптический тип системы основных уравнений в плоскости ζ и полный гомеоморфизм преобразования (2.3.1). Из двух корней выберем корень $\mu = \mu_+$ [1]:

$$\mu=\mu_+=-\frac{P_{11}-P_{22}+i(P_{12}+P_{21})}{P_{11}+P_{22}+2\sqrt{D(P_s)}}$$

и, следовательно,

$$|\mu|^2=|\mu_+|^2=\frac{P_{11}+P_{22}-2\sqrt{D(P_s)}}{P_{11}+P_{22}+2\sqrt{D(P_s)}}<1.$$

Тогда преобразование (2.3.1) будет удовлетворять вытекающему из (2.3.9′) уравнению

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\bar z}-\mu(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0 \quad \left(\mu(z)=\frac{P_{22}-P_{11}-i(P_{12}+P_{21})}{P_{22}+P_{11}+2\sqrt{D(P_s)}},\ |\mu(z)|<1\right). \qquad (2.3.10)$$

[1] Если выберем корень μ_-, то для него при том же условии $\sqrt{D(P_s)}>0$ имеем

$$|\mu_-|^2=\frac{P_{11}+P_{22}+2\sqrt{D(P_s)}}{P_{11}+P_{22}-2\sqrt{D(P_s)}}>1,$$

что не отвечает условию (2.4.8) (см. § 2.4) существования преобразования (2.3.1) в виде полного гомеоморфизма уравнения (2.3.10), в котором $\mu=\mu_-$.

Обратное преобразование (2.3.1′) является решением вытекающего из (2.3.10) при учёте равенства (2.3.5′) уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}+\mu(\zeta)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}=0 \quad \left(\mu(\zeta)=\frac{P_{22}-P_{11}-i(P_{12}+P_{21})}{P_{22}+P_{11}+2\sqrt{D(P_s)}},\ |\mu(\zeta)|<1\right). \tag{2.3.10′}$$

Уравнения (2.3.10) и (2.3.10′) имеют вид уравнения Бельтрами [32].

Используем уравнение (2.3.10). Запишем якобиан (2.3.2) в виде

$$J=(1-|\mu(z)|^2)\left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|^2 \quad (J>0). \tag{2.3.11}$$

Преобразуем коэффициент A_0' выражения (2.3.8) к виду

$$A_0'=J\left[\frac{4\sqrt{D(P_s)}}{1-|\mu|^2}-(P_{11}+P_{22})-i(P_{12}-P_{21})\right]$$

или, учитывая коэффициент $\mu(z)$ уравнения (2.3.10), имеем

$$A_0'=2J(\sqrt{D(P_s)}-i\sqrt{D(P_a)}),$$

где $D(P_a)=(P_{12}-P_{21})^2/4$ — определитель антисимметричной части $P_a = (P-P^T)/2$ тензора P.

Тогда с учётом уравнения (2.3.9) равенство (2.3.8) запишем

$$H\left[v(z)\frac{\partial \zeta}{\partial z}+\bar{v}(z)\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\right]=2J\left(\sqrt{D(P_s)}-i\sqrt{D(P_a)}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}=-i2J\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}, \tag{2.3.12}$$

откуда имеем равенство

$$J\left[\left(\sqrt{D(P_s)}-i\sqrt{D(P_a)}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}+i\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}\right]=0.$$

Отсюда с учётом того, что в областях D и D' якобиан J, проводимость (толщина H и проницаемость K) слоя отличны от нуля находим для обобщённого потенциала $\varphi(\zeta)$ и функции тока $\psi(\zeta)$ уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}+\frac{i}{P'}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}=0. \tag{2.3.13}$$

Здесь $P' = P'(\zeta)$ — комплекнозначная функция ζ:

$$P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)} = H\left[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}\right], \tag{2.3.14}$$

которую назовём *проводимостью слоя в плоскости* ζ, $D(P_s) = H^2 D(K_s)$, $D(P_a) = H^2 D(K_a)$, $D(K_s) = K_{11}K_{22} - (K_{12}+K_{21})^2/4 > 0$ и $D(K_a) = (K_{12}-K_{21})^2/4 > 0$ — определители симметричной $K_s = (K+K^T)/2$ и антисимметричной $K_a = (K-K^T)/2$ частей тензора проницаемости слоя $K = (K_{ij})$, $K^T = (K_{ji})$.

Учитывая комплексные операторы дифференцирования (2.2.4), находим, что уравнение (2.3.13) — комплексное представление эквивалентных между собой систем уравнений[1]

$$\begin{aligned} \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \\ -\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} &= \frac{1}{D(P)}\left(\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \frac{1}{D(P)}\left(-\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right). \end{aligned} \tag{2.3.15$'$}$$

Уравнения (2.3.15) и (2.3.15′) представляют в плоскости ζ каноническую форму записи эллиптических систем уравнений (2.1.1) и (2.1.5) относительно φ, ψ. Поэтому уравнение (2.3.13) — комплексное представление систем уравнений (2.1.1) и (2.1.5).

Уравнения (2.3.15) и (2.3.15′) можно рассматривать в плоскости ζ как уравнения двумерных течений в анизотропном слое проводимости $P' = (P'_{ij})$ ($P'_{11} = P'_{22} = \sqrt{D(P_s)} = H\sqrt{D(K_s)}$, $-P'_{12} = P'_{21} = \sqrt{D(P_a)} = H\sqrt{D(K_a)}$). Полагая $P' = HK'$ (H — толщина слоя, $K' = (K'_{ij})$ — его проницаемость), имеем $K'_{11} = K'_{22} = \sqrt{D(K_s)}$, $-K'_{12} = K'_{21} = \sqrt{D(K_a)}$.

Как видно из (2.3.14), проводимость P' (проницаемость $K' = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}$) слоя комплекснозначная функция ζ или комплексное число в случае однородной среды. Представим P' и K' в виде

$$P' = |P'|e^{i\delta}, \quad K' = |K'|e^{i\delta}, \tag{2.3.16}$$

[1]Если из системы (2.3.15) найти $\partial\varphi/\partial\xi$ и $\partial\varphi/\partial\eta$, то получим систему (2.3.15′). Наоборот, находя $\partial\psi/\partial\xi$ и $\partial\varphi/\partial\eta$ из (2.3.15′), получим систему (2.3.15).

где $|P'| = \sqrt{D(P)}$, $|K'| = \sqrt{D(K)}$ $(|P'| = H|K'|)$, $\delta = \arg P' = \arg K'$, $\left(\operatorname{tg}\delta = -\frac{\sqrt{D(P_a)}}{\sqrt{D(P_s)}} = -\frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}}\right)$.

Иначе (2.3.16) запишем

$$P' = \sqrt{D(P)}\Pi, \quad K' = \sqrt{D(K)}\Pi \quad (\Pi = e^{i\delta}). \tag{2.3.16$'$}$$

Следуя [73], назовём Π тензором *поворота* на угол δ:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix},$$

который является ортогональным в силу равенства $\Pi\Pi^T = E$ и его определитель $D(\Pi) = 1$ (Π^T — транспонированный тензор, E — единичный тензор).

Из выражения (2.3.16′) видно, что проводимость P' слоя и его проницаемость K' — тензоры второго ранга. Они пропорциональны тензору простого вида — тензору поворота. Поэтому анизотропный слой с проводимостью P' (проницаемостью K') вида (2.3.16) или (2.3.16′) назовём *каноническим* слоем.

Таким образом, исследование течения в слое проводимости P сводится к его изучению в каноническом слое проводимости P', которая связана с P равенством (2.3.14).

Наложенные на проницаемость K условия (1.2.4) в области D плоскости z остаются в силе и в области D' вплоскости ζ (D' — образ области D). Однако, учитывая, что $K'_{11} = \sqrt{D(K_s)}$, потребуем выполнения в области D' дополнительного условия $\sqrt{D(K_s)} > 0$ ($\sqrt{D(P_s)} > 0$)[1], которое наряду с условиями (1.2.4) обеспечивает эллиптичность систем уравнений (2.3.15) и (2.3.15′). В этих системах $\sqrt{D(P_a)} = H\sqrt{D(K_a)} = H(K_{12}-K_{21})/2$ может принимать как положительные (при $K_{12} > K_{21}$), так и отрицательные (при $K_{12} < K_{21}$) значения.

Уравнения для φ и ψ

Поскольку системы уравнений (2.3.15) и (2.3.15′) — канонические формы записи систем уравнений (2.1.1) и (2.1.5), то уравнениям (2.1.2) и (2.1.3)

[1] Это же следует из условий (1.2.11) систем уравнений (1.2.9) и (1.2.10), частными случаями которых являются уравнения (2.3.15) и (2.3.15′). А именно, так как в этом случае $a_{11} = \sqrt{D(P_s)} > 0$ и $b_{11} = \sqrt{D(P_s)}/D(P) > 0$, то $\sqrt{D(P_s)} > 0$.

соответствуют их канонические представления в дивергентной форме

$$T_1'\varphi \equiv \nabla \cdot (P' \cdot \nabla\varphi) = 0 \quad (P' = \sqrt{D(P)}\Pi), \tag{2.3.17}$$

$$T_2'\psi \equiv \nabla \cdot (P'^* \cdot \nabla\psi) = 0 \quad (P'^* = \frac{\Pi^T}{\sqrt{D(P)}}), \tag{2.3.18}$$

где Π — тензор поворота, Π^T — его транспонированное выражение, $\nabla = \frac{\partial}{\partial\xi}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial\eta}\vec{\jmath}$ — оператор Гамильтона.

Иначе уравнения (2.3.17) и (2.3.18) запишем

$$T_1'\varphi \equiv \triangle\varphi + a_1\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \tag{2.3.17$'$}$$

$$T_1'\psi \equiv \triangle\psi + a_2\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \tag{2.3.18$'$}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\sqrt{D(P_s)}}{} - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\sqrt{D(P_a)}}{}\right],$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\sqrt{D(P_s)}}{} + \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\sqrt{D(P_a)}}{}\right],$$

$$a_2 = \frac{D(P)}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{D(P_s)}}{D(P)}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{D(P_a)}}{D(P)}\right)\right],$$

$$b_2 = \frac{D(P)}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{D(P_s)}}{D(P)}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{D(P_a)}}{D(P)}\right)\right],$$

$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа.

Если известна функция φ или ψ, то функцию ψ или φ, удовлетворяющую уравнению (2.3.18$'$) или (2.3.17$'$), находим в односвязной области

D' плоскости ζ по формулам (φ_0 и ψ_0 — постоянные)[1]:

$$\begin{aligned}\psi-\psi_0&=\int\Bigg[\left(\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)d\xi+\\&\qquad+\left(\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)d\eta\Bigg],\\\varphi-\varphi_0&=\int\frac{1}{D(P)}\Bigg[\left(\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)d\xi-\\&\qquad-\left(\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)d\eta\Bigg],\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

которые являются каноническим представлением выражений (2.1.6) в плоскости ζ.

Комплексный потенциал течения

Для описания в плоскости ζ течения целесообразно ввести комплексный потенциал

$$W=\varphi+i\frac{\psi}{P'},\tag{2.3.20}$$

через который выразим обобщённый потенциал и функцию тока

$$\varphi=\frac{\operatorname{Re}(P'W)}{\operatorname{Re}(P')}=\frac{P'W+\overline{P'W}}{P'+\overline{P'}},\quad\psi=\frac{|P'|^2\operatorname{Im}W}{\operatorname{Re}P'}=\frac{P'\overline{P'}(W-\overline{W})}{i(P'+\overline{P'})}.\tag{2.3.21}$$

Тогда W как функция ζ и $\overline{\zeta}$, а в нестационарном случае времени t, удовлетворяет всюду в области D' (за исключением особых точек W) следующему из (2.3.13) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial\bar\zeta}+A(W-\overline{W})=0\qquad\left(A=\frac{\overline{P'}}{P'+\overline{P'}}\frac{\partial\ln P'}{\partial\bar\zeta}\right).\tag{2.3.22}$$

[1] Поскольку функции $\varphi(\xi,\eta)$ и $\psi(\xi,\eta)$ взаимно сопряжённые (они удовлетворяют системам уравнений (2.3.15), (2.3.15$'$)), то формулы (2.3.19) доказываются аналогично тому, как были получены формулы (2.1.6).

Скорость течения на вспомогательной плоскости

Так как в области D якобиан $J \neq 0$, то равенство (2.3.12) можно записать в виде

$$\frac{1}{J}\left[v(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \overline{v}(z)\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\right] = 2K'\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} = -\frac{i2}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}, \tag{2.3.23}$$

где $K' = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}$.

В соответствии с равенством (2.3.23) введём в плоскости ζ комплексную скорость $v(\zeta) = v_\xi + iv_\eta$, которая связана со скоростью $v(z) = v_x + iv_y$ в плоскости z формулой

$$v(\zeta) = \frac{1}{J}\left[v(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \overline{v}(z)\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\right], \quad z = z(\zeta). \tag{2.3.24}$$

Из равенства (2.3.24) и комплексно сопряжённому ему

$$\overline{v}(\zeta) = \frac{1}{J}\left[v(z)\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial z} + \overline{v}(z)\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}}\right], \quad z = z(\zeta)$$

выражаем скорость $v(z)$ через $v(\zeta)$:

$$v(z) = v(\zeta)\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}} - \overline{v}(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}, \quad \zeta = \zeta(z) \tag{2.3.25}$$

или, учитывая равенства (2.3.5′),

$$v(z) = \frac{1}{J'}\left[v(\zeta)\frac{\partial z}{\partial\zeta} + \overline{v}(\zeta)\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}}\right], \quad \zeta = \zeta(z). \tag{2.3.25′}$$

Тогда согласно равенству (2.3.23) при учёте (2.3.24) выразим скорость $v(\zeta)$ через функции φ и ψ:

$$v(\zeta) = 2K'\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} = -\frac{i2}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} \tag{2.3.26}$$

или в симметричном виде

$$v(\zeta) = K'\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} - \frac{i}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}. \tag{2.3.26′}$$

Используя комплексные операторы дифференцирования (2.2.4), из формулы (2.3.26) имеем составляющие скорости

$$
\begin{aligned}
v_\xi &= \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\\
v_\eta &= -\sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.
\end{aligned}
\tag{2.3.27}
$$

Наряду со скоростью $v(\zeta)$ в плоскости ζ будем использовать приведённую комплексную скорость $V(\zeta) = V_\xi + iV_\eta$. Учитывая, что в плоскости ζ проницаемость слоя K' ($K'_{11} = K'_{22} = \sqrt{D(K_s)}$, $K'_{12} = -K'_{21} = \sqrt{D(K_a)}$), на основании формул (1.2.7) имеем взаимосвязь этих скоростей

$$
v(\zeta) = K'V(\zeta) \tag{2.3.28}
$$

$$
\left(v_\xi = \sqrt{D(K_s)}V_\xi + \sqrt{D(K_a)}V_\eta, \quad v_\eta = -\sqrt{D(K_a)}V_\xi + \sqrt{D(K_s)}V_\eta\right),
$$

$$
V(\zeta) = \frac{v(\zeta)}{K'} \tag{2.3.28$'$}
$$

$$
\left(V_\xi = \frac{\sqrt{D(K_s)}v_\xi - \sqrt{D(K_a)}v_\eta}{D(K)}, \quad V_\eta = \frac{\sqrt{D(K_a)}v_\xi + \sqrt{D(K_s)}v_\eta}{D(K)}\right).
$$

Учитывая равенство (2.3.16), согласно (2.3.28) имеем

$$
v(\zeta) = \sqrt{D(K)}e^{i\delta}V(\zeta) \qquad (\sqrt{D(K)} > 0, \;\; \delta = \arg K').
$$

Отсюда видно, что модули комплексных скоростей связаны равенством $|v(\zeta)| = \sqrt{D(K)}|V(\zeta)|$ и и комплексные скорости как векторы повёрнуты на угол δ относительно друг друга.

Учитывая равенства (2.3.26) и (2.3.28$'$), скорость $V(\zeta)$ выразим через функции φ и ψ

$$
V(\zeta) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta} = -\frac{i2}{P'}\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta} \tag{2.3.29}
$$

или в симметричном виде

$$
V(\zeta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta} - \frac{i}{P'}\frac{\partial\psi}{\partial\bar\zeta}. \tag{2.3.29$'$}
$$

Используя комплексные операторы дифференцирования (2.2.4), из (2.3.29) имеем составляющие скорости

$$\begin{aligned} V_\xi &= \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{D(P)}\left[\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right], \\ V_\eta &= \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{D(P)}\left[\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Из выражения скорости (2.3.29) и комплексно сопряжённой скорости

$$\overline{V}(\zeta) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{2i}{\overline{P'}}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

следует, что эта скорость удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial\zeta} - \frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar\zeta} = 0, \quad \frac{\partial(P'V)}{\partial\zeta} + \frac{\partial(\overline{P}'\overline{V}')}{\partial\bar\zeta} = 0. \tag{2.3.31}$$

Уравнения (2.3.31) — комплексное представление системы уравнений поля вектора скорости $\vec{V} = (V_\xi, V_\eta)$:

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial V_\xi}{\partial\eta} = 0, \tag{2.3.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{D(P_s)}V_\xi + \sqrt{D(P_a)}V_\eta\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{D(P_s)}V_\eta - \sqrt{D(P_a)}V_\xi\right) = 0.$$

Эти уравнения — каноническая форма записи в плоскости ζ системы уравнений (2.1.8). Первое из этих уравнений выражает потенциальность поля скорости $\vec{V}$.

Исключая $\partial V/\partial\zeta$ из системы (2.3.31), находим, что приведённая комплексная скорость $V = V(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar\zeta} + BV + \overline{B}\,\overline{V} = 0 \qquad \left(B = \frac{1}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial P'}{\partial\zeta}, \quad \overline{B} = \frac{1}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial\overline{P'}}{\partial\bar\zeta}\right). \tag{2.3.33}$$

Заметим, что, учитывая равенство (2.3.28′), уравнение (2.3.33) нетрудно записать для скорости $v(\zeta)$, которое будет иметь другие коэффициенты.

Отметим, что теория и приложения функций, удовлетворяющих уравнениям (2.3.22) и (2.3.33) (соответствующим им системам уравнений), развивалась в многочисленных трудах [4, 13–15, 21–24, 29, 30, 38–42, 60, 81, 83–85, 117, 121, 122, 159–169, 173–179].

Связь скорости с комплексным потенциалом

Из равенств (2.3.29) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{\overline{V}}{2}, \qquad i\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \frac{\overline{P}'\overline{V}'}{2},$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{i}{P'}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \left(1 + \frac{\overline{P'}}{P'}\right)\frac{\overline{V}}{2}.$$

Отсюда находим выражения приведённой скорости через φ и ψ (эквивалентное (2.3.29))

$$\overline{V} = \frac{2P'}{P' + \overline{P'}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{i}{P'}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right). \tag{2.3.34}$$

Учитывая (2.3.20) и (2.3.21), выражаем скорость (2.3.34) через комплексный потенциал в виде

$$\overline{V} = \frac{2P'}{P' + \overline{P'}}\left[\frac{\partial W}{\partial\zeta} + C(W - \overline{W})\right] \qquad \left(C = \frac{\overline{P'}}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\zeta}\right). \tag{2.3.35}$$

Коэффициент C связан с коэффициентом B уравнения (2.3.33) равенством $P'C = \overline{P'}B$. Формула (2.3.35) позволяет по известному комплексному потенциалу течения W находить приведённую скорость V, а значит согласно (2.3.28) скорость v.

Уравнения течений в слоях частного вида

Рассмотрим два частных случая слоёв, когда основные уравнения двумерных течений значительно упрощаются.

Анизотропный однородный слой. В этом случае проводимость слоя $P = (P_{ij})$ — постоянная и, следовательно, коэффициенты уравнений (2.1.1) и (2.1.5) также постоянные. В уравнении Бельтрами (2.3.10) коэффициент μ — комплексная постоянная и поэтому плоскости z и ζ взаимосвязаны афинным преобразованием (см. § 2.4). В уравнениях (2.3.22) и (2.3.33) коэффициенты $A = 0$, $B = \overline{B} = 0$. Следовательно, комплексный потенциал $W(\zeta)$ и скорость $\overline{V}(\zeta)$ течения — аналитические функции[1]. Они связаны

[1] Если анизотропный слой неоднородный и его проводимость в плоскости ζ моделируется аналитической функцией $(\partial P'(\zeta)/\partial\overline{\zeta} = 0)$, то комплексный потенциал $W(\zeta)$ — аналитическая функция, а скорость $\overline{V}(\zeta)$ не является таковой (в уравнении (2.3.33) коэффициенты $B \neq 0, \overline{B} \neq 0$).

согласно (2.3.35) при учёте $C = 0$ равенством

$$\overline{V} = k_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \qquad \left(k_0 = \frac{2P'}{P' + \overline{P'}} \right), \tag{2.3.36}$$

где k_0 — комплексная постоянная.

Ортотропный слой. В этом случае проводимость (проницаемость) слоя характеризуются симметричным тензором, у которого $P_{12} = P_{21}$ $(K_{12} = K_{21})$. Течение описывает система уравнений (2.1.1), в которой $P_{12} = P_{21}$. Плоскости z и ζ связаны гомеоморфизмом $\zeta = \zeta(z)$, удовлетворяющим уравнению Бельтрами (2.3.10), в котором $K_{12} = K_{21}$ $(D(K_s) = D(K) = K_{11}K_{22} - K_{12}^2)$. В плоскости ζ уравнения для комплексного потенциала (2.3.22) и скорости (2.3.33) принимают вид

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta}} + A(W - \overline{W}) = 0, \tag{2.3.37}$$

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{\zeta}} + \overline{A}V + A\overline{V}) = 0, \tag{2.3.38}$$

где

$$A = \frac{\partial \ln \sqrt{P'}}{\partial \overline{\zeta}}, \quad P' = \sqrt{D(P)} \quad (D(P) = P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = H^2(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)).$$

Уравнения (2.3.37) и (2.3.38) — комплексное представление систем уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{P'} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{P'} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(P'V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(P'V_\eta) = 0.$$

Видно, что уравнения течения в ортотропном слое имеют вид, характерный для течения в изотропном слое, проводимость которого $P' = \sqrt{D(P)}$. Это позволяет применить методы, развитые в работе [117], для исследования течений в ортотропном слое. Введём в этом случае комплексный потенциал Ω и комплексную скорость ω:

$$\Omega = u + iv, \quad \omega = \omega_\xi + i\omega_\eta, \tag{2.3.39}$$

которые связаны с комплексным потенциалом W и приведённой скоростью V равенствами

$$W = \frac{\Omega}{\sqrt{P'}} \qquad \left(\varphi = \frac{u}{\sqrt{P'}},\ \psi = \sqrt{P'}v\right), \tag{2.3.40}$$

$$V = \frac{\omega}{\sqrt{P'}} \qquad \left(V_\xi = \frac{\omega_\xi}{\sqrt{P'}},\ V_\eta = \frac{\omega_\eta}{\sqrt{P'}}\right). \tag{2.3.41}$$

Назовём Ω и ω *приведённым комплексным потенциалом и нормированной комплексной скоростью*. Соответствующие согласно (2.3.39) u и v назовём *приведённым обобщённым потенциалом и приведённой функцией тока* течения. Согласно (2.3.41) вектор $\vec{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta)$ связан с вектором $\vec{V} = (V_\xi, V_\eta)$ равенством $\vec{V} = \vec{\omega}/\sqrt{P'}$.

Относительно Ω и ω уравнения (2.3.22) и (2.3.33) принимают более простой вид. Действительно, учитывая (2.3.40) и (2.3.41) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{P'}}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}} - \Omega\frac{\partial \ln\sqrt{P'}}{\partial \bar{\zeta}}\right), \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{P'}}\left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \bar{\zeta}} - \overline{\omega}\frac{\partial \ln\sqrt{P'}}{\partial \bar{\zeta}}\right)$$

и, следовательно, уравнения (2.3.22) и (2.3.33) запишем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}} - A\overline{\Omega} = 0 \qquad \left(A = \frac{\partial \ln\sqrt{P'}}{\partial \bar{\zeta}}\right), \tag{2.3.42}$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \bar{\zeta}} + \bar{A}\omega = 0 \qquad \left(\bar{A} = \frac{\partial \ln\sqrt{P'}}{\partial \zeta}\right). \tag{2.3.43}$$

Видно, что уравнения (2.3.42) и (2.3.43) математически аналогичны.

Рассмотрим уравнение (2.3.42) и покажем, что отыскание его решения Ω эквивалентно нахождению решений уравнений, записанных для функций $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$. Действительно, так как имеет место уравнение (2.3.42), то производная по ζ от него будет

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}} - A\overline{\Omega}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - A\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \zeta} - \frac{\partial A}{\partial \zeta}\overline{\Omega} = 0.$$

Так как $\overline{\partial\Omega/\partial\overline{\zeta}} = \partial\overline{\Omega}/\partial\zeta$, то из уравнения (2.3.42) имеем $\partial\overline{\Omega}/\partial\zeta = \overline{A}\Omega$. Тогда

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} - |A|^2\Omega - \frac{\partial A}{\partial\zeta}\overline{\Omega} = 0. \tag{2.3.44}$$

Учитывая для коэффициентов A и $\overline{A}$ выражения

$$A = \frac{1}{\sqrt{P'}}\frac{\partial\sqrt{P'}}{\partial\overline{\zeta}} = -\sqrt{P'}\frac{\partial 1/\sqrt{P'}}{\partial\overline{\zeta}}, \quad \overline{A} = \frac{1}{\sqrt{P'}}\frac{\partial\sqrt{P'}}{\partial\zeta} = -\sqrt{P'}\frac{\partial 1/\sqrt{P'}}{\partial\zeta},$$

находим

$$|A|^2 + \frac{\partial A}{\partial\zeta} = \frac{1}{\sqrt{P'}}\frac{\partial^2 P'}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}, \quad A^2 - \frac{\partial A}{\partial\zeta} = \sqrt{P'}\frac{\partial^2 1/\sqrt{P'}}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}. \tag{2.3.45}$$

Выделяя в (2.3.44) действительные и мнимые части, учитывая (2.3.45) и $4\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} \equiv \triangle$ — двумерный оператор Лапласа ($\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$), находим

$$\triangle u - \Lambda_1 u = 0 \qquad \left(\Lambda_1 = \frac{\triangle\sqrt{P'}}{\sqrt{P'}}\right), \tag{2.3.46}$$

$$\triangle v - \Lambda_2 v = 0 \qquad \left(\Lambda_2 = \sqrt{P'}\triangle(1/\sqrt{P'})\right). \tag{2.3.47}$$

Таким образом, нахождение решения Ω уравнения (2.3.42), а значит согласно (2.3.40) комплексного потенциала W течения эквивалентно отысканию решений u и v уравнений (2.3.46) и (2.3.47). При этом решения уравнения (2.3.46) (или (2.3.47)) отыскивается сразу для класса слоёв, проводимости P' которых таковы, что для них одинаков коэффициент Λ_1 (или Λ_2).

§ 2.4. Уравнения Бельтрами

Система уравнений Бельтрами

Уравнение (2.3.10) является комплексной формой записи системы уравнений Бельтрами. Действительно, замечаем, что коэффициент μ этого уравнения можно преобразовать к следующему виду

$$\mu = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D_s}} = \frac{\sqrt{D_s} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})/2}{\sqrt{D_s} + P_{11} - i(P_{12} + P_{21})/2},$$

где $D_s \equiv D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4$.

Тогда, используя комплексные операторы дифференцирования (2.1.11), уравнение (2.3.10) запишем

$$P_{11}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{P_{12} + P_{21}}{2} + i\sqrt{D_s}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Учитывая $\zeta = \xi + i\eta$, выделим отсюда действительную и мнимую части. Находим систему уравнений для функций $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$:

$$\begin{aligned} P_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \sqrt{D_s}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\ P_{11}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{D_s}\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Придадим системе (2.4.1) симметричный вид. Последовательно исключим из неё $\partial\eta/\partial y$ и $\partial\xi/\partial y$. Учитывая $P_{11} > 0$, находим уравнения

$$\frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \sqrt{D_s}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{2.4.2}$$

и

$$\frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \sqrt{D_s}\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{2.4.2$'$}$$

Присоединяя к первому и второму уравнению системы (2.4.1) соответственно уравнение (2.4.2) и (2.4.2′), получим симметричные системы уравнений

$$P_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \sqrt{D_s}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\sqrt{D_s}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2.4.3}$$

и

$$P_{11}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\sqrt{D_s}\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{P_{12} + P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{D_s}\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{2.4.4}$$

Таким образом, имеем эквивалентные между собой системы уравнений (2.4.1), (2.4.3) и (2.4.4), которые относятся к системе уравнений типа Бельтрами [74][1].

[1] Системы уравнений (2.4.3) и (2.4.4) относятся к системам вида (1.2.9) и (1.2.10) и отвечают условиям эллиптичности (1.2.11), если $P_{11} > 0$ ($P_{22} > 0$) и $\sqrt{D(P_s)} > 0$.

Из систем (2.4.3) и (2.4.4) следуют уравнения для функций $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{D_s}}\left(P_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{P_{12}+P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{D_s}}\left(\frac{P_{12}+P_{21}}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\right] = 0, \quad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{D_s}}\left(P_{11}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{P_{12}+P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{D_s}}\left(\frac{P_{12}+P_{21}}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right] = 0, \quad (2.4.6)$$

которые имеют одинаковую дивергентную форму записи:

$$\nabla \cdot \left(\frac{P_s \cdot \triangledown\zeta}{\sqrt{D(P_s)}}\right) = 0$$

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{P_s \cdot \triangledown\xi}{\sqrt{D(P_s)}}\right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\frac{P_s \cdot \triangledown\eta}{\sqrt{D(P_s)}}\right) = 0\right),$$

где

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}, \quad P_s = \frac{P + P^T}{2}, \quad P = (P_{ij}), \quad P^T = (P_{ji}).$$

Таким образом, нахождение преобразований (2.3.1) сводится к отысканию решения уравнения Бельтрами (2.3.10) или вытекающей из него одной из систем уравнений (2.4.1) или (2.4.3) или (2.4.4). При отыскании этих преобразований можно также использовать уравнения (2.4.5) и (2.4.6). Однако, в этом случае нужно помнить, что функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — сопряжённые, поскольку они взаимосвязаны одной из указанных систем уравнений.

Отметим, что, так как $P = HK$ и $D_s = H^2 D(K_s)$, то решение $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ уравнений Бельтрами определяется компонентами симметричной части K_s тензора проницаемости слоя (K_{ij}) и не зависит от его толщины H. Поэтому связывающее плоскости z и ζ преобразование (2.3.1) не будет зависеть от H. Если тензор (K_{ij}) не зависит от времени (он может зависеть от координат x, y), то преобразование (2.3.1) также не зависит от времени и имеет место в случае нестационарных течений[1].

Связь решений уравнения Бельтрами с квазиконформными отображениями

Пусть в замкнутой области $\overline{D} = D \cup L$ (L — граница области D) компоненты тензора проводимости P_{ij}, $i, j = 1, 2$ непрерывны и имеют непрерывные производные. В случае, если слой изотропный и, вообще говоря, неоднородный ($P_{ij} = p(z)\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, δ_{ij} — символ Кронекера), то в уравнении Бельтрами (2.3.10) коэффициент $\mu(z) = 0$ и оно принимает вид уравнения Коши-Римана: $\partial\zeta/\partial\overline{z} = 0$. Отсюда следует, что $\zeta = \zeta(z)$-аналитическая функция в области D. Области D и D' плоскостей z и ζ взаимосвязаны конформным преобразованием $\zeta = \zeta(z)$ при $\partial\zeta/\partial z \neq 0, z \in D$. Уравнения (2.1.1) и (2.1.5) принимают вид, характерный для изотропного случая [108], и они конформно ковариантны.

Рассмотрим случай анизотропного неоднородного слоя, когда его проводимость $P = (P_{ij})$ удовлетворяет в области $\overline{D}$ условиям (в соответствии с (2.1.1′)):

$$P_{11} > 0 \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_s) = P_{11}P_{22} - \left(\frac{P_{12} + P_{21}}{2}\right)^2 \geqslant d_0 > 0 \quad (d_0 = \text{const}). \tag{2.4.7}$$

Следуя [32, с. 109], назовём (2.4.7) условием *равномерной* эллиптичности системы уравнений (2.3.10). В этом случае коэффициент $\mu(z)$ уравнения (2.3.10) удовлетворяет условию

$$|\mu(z)| \leqslant \mu_0 < 1 \quad (\mu_0 = \text{const}), \quad z \in \overline{D}. \tag{2.4.8}$$

Следуя [32], решение уравнения Бельтрами (2.3.10), однозначное и непрерывное в области D, назовём *гомеоморфизмом* этого уравнения. При выполнении условия (2.4.8) гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$ уравнения (2.3.10) существует и обеспечивает взаимно однозначное и непрерывное отображение области D плоскости z на область D' плоскости ζ. Если вся плоскость z преобразуется полностью в плоскость ζ, то следуя [32], гомеоморфизм

[1] В общем случае, когда все компоненты тензора (K_{ij}) одинаково изменяются с течением времени t: $K_{ij}(t, x, y) = f(t)K_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$ ($f(t)$ — функция t), то преобразование (2.3.1) также не будет зависеть от t.

$\zeta = \zeta(z)$ назовём *полным*[1]. Полагаем, что при преобразовании $\zeta = \zeta(z)$ бесконечно удалённая точка остаётся неподвижной (точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = \infty$).

При выполнении условия (2.4.8) гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$ представляет собой *квазиконформное* отображение. Его свойства изучены в работах [6, 11, 35, 75, 76].

Изучению и построению гомеоморфизмов уравнения Бельтрами посвящены работы [14, 15, 32], в том числе тесно связанными с проблемами газовой динамики [13, 77].

Связь решений уравнения Бельтрами конформными преобразованиями

Как отмечалось выше, в случае изотропного слоя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$ удовлетворяет уравнению Коши-Римана $\partial\zeta/\partial\overline{z} = 0$. Общее решение этого уравнения выражается формулой $\zeta = \Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция z.

Это свойство обобщим, следуя [32,76], на решение уравнения Бельтрами (2.3.10) в следующей форме. Пусть $\zeta_0 = F(z)$ — частное гомеоморфное решение уравнения (2.3.10) в области D плоскости z. Тогда всякая функция вида

$$\zeta = \Phi(\zeta_0) = \Phi(F(z)), \tag{2.4.9}$$

где $\Phi(\zeta_0)$ — произвольная аналитическая функция в области $\zeta_0(D)$, является также решением уравнения (2.3.10) в области D. Действительно, это утверждение следует из равенства

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}} - \mu(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_0}\left[\frac{\partial\zeta_0}{\partial\overline{z}} - \mu(z)\frac{\partial\zeta_0}{\partial z}\right] = 0.$$

Таким образом, построение общего решения уравнения Бельтрами сводится к построению некоторого гомеоморфизма, реализующего взаимно однозначное и непрерывное отображение области D на область $D' = \zeta(D)$.

[1] В работе [32] вводится и изучается также *локальный* гомеоморфизм уравнения Бельтрами, который осуществляет отображение малой окрестности точки z_0 на малую окрестность точки $\zeta_0 = \zeta(z_0)$.

Аффинное преобразование

Рассмотрим случай пористой среды с раздельной анизотропией и неоднородностью, когда тензор проницаемости (K_{ij}) можно представить согласно (1.1.39) в виде

$$K_{ij} = k_{ij}\chi(z), \quad i,j = 1,2, \tag{2.4.10}$$

где $\chi(z)$ — непрерывная и дифференцируемая хотя бы один раз функция координат $z = x + iy$ в области D. В этом случае, учитывая компоненты тензора проводимости слоя $P_{ij} = HK_{ij}$, находим, что коэффициент уравнения (2.3.10) — комплексная постоянная:

$$\mu = \frac{k_{22} - k_{11} - i(k_{12} + k_{21})}{k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)}} \quad (|\mu| < 1), \tag{2.4.11}$$

где $D(k_s) = k_{11}k_{22} - (k_{12} + k_{21})^2/4$. Тогда уравнение (2.3.10) имеет гомеоморфизм

$$\zeta' = C(z + \mu\overline{z}) + d, \tag{2.4.12}$$

где C и d — вообще говоря, комплексные постоянные.

Гомеоморфизм (2.4.12) является полным и устанавливает связь между плоскостями $z = x+iy$ и $\zeta' = \xi'+i\eta'$ и представляет в комплексной форме преобразование точек (x, y) и (ξ', η') этих плоскостей, которое относится к афинным преобразованиям [5]. Преобразование (2.4.12) оставляет неподвижной бесконечно удалённую точку. Его якобиан J положителен

$$J = \left|\frac{\partial\zeta'}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\zeta'}{\partial\overline{z}}\right|^2 = |C|^2(1 - |\mu|^2) > 0.$$

Не нарушая общности суждений, введём плоскость $\zeta = (\zeta' - d)/C$ $(C \neq \neq 0)$[1]. Имеем наиболее простой случай аффинного преобразования плоскостей z и ζ (прямого и обратного)

$$\zeta = z + \mu\overline{z}, \quad z = \frac{\zeta - \mu\overline{\zeta}}{1 - |\mu|^2} \quad (|\mu| < 1). \tag{2.4.13}$$

[1]Этот переход от плоскости ζ' к плоскости ζ представляет собой наложение преобразований параллельного переноса и поворота.

Преобразования (2.4.13) оставляют неподвижными точки 0 и ∞ на плоскостях z и ζ. Полагая в этих преобразованиях коэффициент (2.4.11) в виде

$$\mu = a + ib, \quad a = \frac{k_{22} - k_{11}}{k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)}}, \quad b = -\frac{k_{12} + k_{21}}{k_{22} + k_{11} + 2\sqrt{D(k_s)}},$$

имеем преобразования декартовых координат плоскостей z и ζ (прямое и обратное)[1]:

$$\begin{gathered} \xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y, \\ x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1 - a^2 - b^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2} \quad (a^2 + b^2 < 1). \end{gathered} \tag{2.4.13$'$}$$

Выясним геометрический смысл преобразований (прямого и обратного)

$$\zeta = C(z + \mu\overline{z}), \quad z = \frac{\zeta/C - \mu\overline{\zeta}/\overline{C}}{1 - |\mu|^2}, \tag{2.4.14}$$

где C — вообще говоря, комплексная постоянная ($C = \overline{C} = 1$ в случае преобразований (2.4.13)). Положим $\mu = |\mu|e^{i\alpha}$ ($\alpha = \arg\mu$, $\operatorname{tg}\alpha = b/a$) и введём плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$ и $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, которые связаны с плоскостями z и ζ конформными преобразованиями поворота на углы α_1 и β_1:

$$z = z_1 e^{i\alpha_1}, \quad \zeta = \zeta_1 e^{i\beta_1}.$$

Тогда прямое преобразование из (2.4.14) принимает вид

$$\zeta_1 e^{i\beta_1} = C z_1 e^{i\alpha_1}\left[1 + \frac{|\mu|\overline{z_1}}{z_1} e^{i(\alpha - 2\alpha_1)}\right].$$

Положим $C = |C|e^{i\gamma_1}$ и выберем углы поворота $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\arg\mu$, $\beta_1 = \gamma_1 + \alpha_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\arg\mu$. Получим[2]

$$\zeta_1 = |C|(z_1 + |\mu|\overline{z_1}), \quad (\xi_1 = |C|(1+|\mu|)x_1, \quad \eta_1 = |C|(1-|\mu|)y_1). \tag{2.4.14$'$}$$

[1] Если ввести в плоскостях z и ζ радиус-векторы $\vec{r} = (x, y)$ и $\vec{\rho} = (\xi, \eta)$, то преобразование (2.4.13$'$) можно записать в виде $\vec{\rho} = T \cdot \vec{r}$, где T — симметричный тензор. Его компоненты, например, для прямого преобразования таковы: $T_{11} = 1 + a$, $T_{22} = 1 - a$, $T_{12} = T_{21} = b$. Определитель тензора T равен якобиану преобразования J ($D(T) = J = 1 - |\mu|^2$).

[2] Радиус-векторы $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$ и $\vec{\rho_1} = (\xi_1, \eta_1)$ связаны согласно преобразований (2.4.14$'$) равенством $\vec{\rho_1} = T' \cdot \vec{r_1}$, где T' — диагональный тензор растяжения (сжатия) ($T'_{11} = C(1 + |\mu|)$, $T'_{22} = C(1 - |\mu|)$, $T'_{12} = T'_{21} = 0$). В частности, если положить $\gamma_1 = -\alpha_1 = -\frac{1}{2}\arg\mu$, то $\beta_1 = 0$. Плоскости ζ и ζ_1 совпадут и в преобразованиях (2.4.14$'$) следует положить $\zeta_1 = \zeta$ ($\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$).

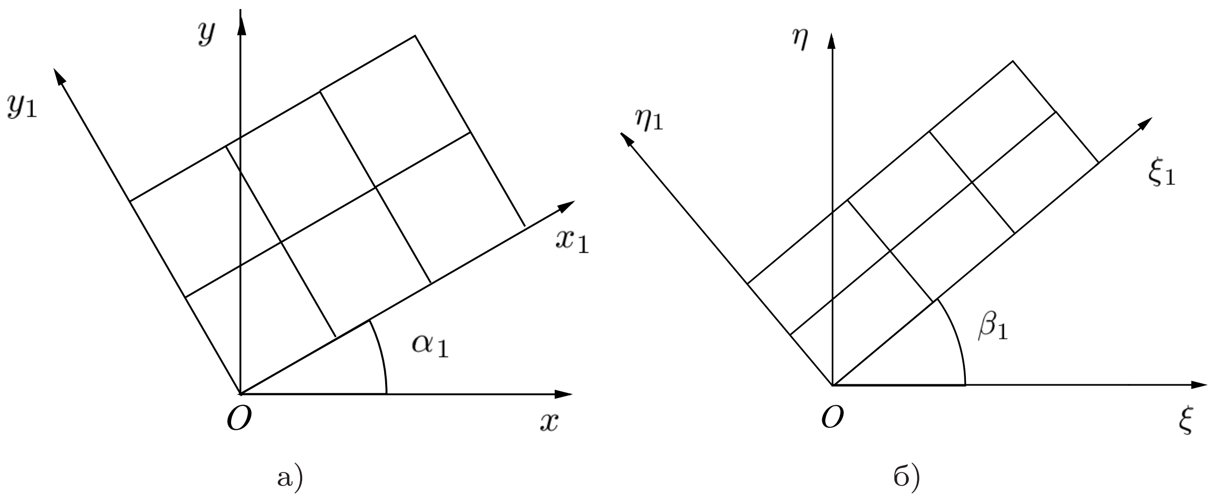

Рис. 2.4.1. Преобразование координатной сети.

Отсюда, учитывая $|\mu| < 1$, заключаем, что преобразование координатной сети $x_1 = \text{const}$, $y_1 = \text{const}$ (например, квадратной на рис. 2.4.1 а) в координатную сеть $\xi_1 = \text{const}$, $\eta_1 = \text{const}$ (прямоугольную на рис. 2.4.1 б) представляет собой растяжение вдоль оси $O\xi_1$ и сжатия вдоль оси $O\eta_1$. ($|C|(1+|\mu|)$ и $|C|(1-|\mu|)$ — коэффициенты растяжения и сжатия, $|C|$ — масштабный множитель).

В частности, если выбрать в преобразованиях (2.4.14$'$) масштабный множитель $|C| = 1/(1-|\mu|)$ (или $|C| = 1/(1+|\mu|)$), то растяжение (или сжатие) происходит только вдоль осей $O\xi_1$ (или $O\eta_1$).

Площади $\triangle S = \triangle x_1 \triangle y_1$ и $\triangle S' = \triangle \xi_1 \triangle \eta_1$ согласно преобразований (2.4.14$'$) связаны равенством $\triangle S' = J \triangle S$ ($J = |C|^2(1-|\mu|^2)$ — якобиан преобразования). если выбрать $|C| = (1-|\mu|^2)^{-1/2}$, то площадь инвариантна (не изменяется, $\triangle S' = \triangle S$) относительно этих преобразований.

Таким образом, преобразование (2.4.14) представляет собой наложение преобразований поворота на указанные углы α_1 и β_1, растяжения и сжатия вдоль осей $O\xi_1$ и $O\eta_1$ с коэффициентами $|C|(1+|\mu|)$ и $|C|(1-|\mu|)$.

Отметим, что, используя гомеоморфизм (2.4.13), согласно представлению (2.4.9) имеем класс решений уравнения Бельтрами в виде

$$\zeta = \Phi(z + \mu\overline{z}),$$

где Φ — аналитическая функция.

Основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами

Построение решения уравнения Бельтрами (2.3.10) в общем случае, когда μ не является константой, представляет трудную задачу и требует применения сложного математического аппарата, в частности, теории сингулярных интегральных уравнений.

Пусть в области D плоскости z компоненты тензора P_{ij}, $i, j = 1, 2$ — непрерывные функции координат и удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности (2.4.7). Тогда в этой области $\mu(z)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (2.4.8). Полагаем вне области D функцию $\mu(z)$ равной нулю. Это означает, что вне D система уравнений Бельтрами (2.3.10) обращается в систему уравнений Коши-Римана и неравенство (2.4.8) выполняется на всей плоскости E комплексной переменной z.

Следуя работам [31, 32], представим решение уравнения (2.3.10) в виде

$$\zeta(z) = z + T\rho(z), \tag{2.4.15}$$

где

$$T\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{\rho(t)}{t-z}dt_1dt_2, \quad t = t_1 + it_2.$$

Здесь $\rho(t)$ — искомая функция, которую полагаем суммируемой в E. Интеграл сходится абсолютно. Оператор $T\rho(z)$ обладает следующими свойствами [32]:

$$\frac{\partial T\rho(z)}{\partial \overline{z}} = \rho(z), \quad \frac{\partial T\rho(z)}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{\rho(t)}{(t-z)^2}dt_1dt_2 \equiv \Pi\rho(z), \tag{2.4.16}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши:

$$\Pi\rho(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t-z|>\varepsilon} \frac{\rho(t)}{(t-z)^2}dt_1dt_2\right].$$

Если функция $\rho(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то частные производные $\partial T\rho(z)/\partial\overline{z}$ и $\partial T\rho(z)/\partial z$ существуют в классическом смысле и равенства (2.4.16) имеют место всюду в E.

Подставим решение (2.4.15) в уравнение (2.3.10) и учтём равенства (2.4.16). Получим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\rho(z) + \frac{\mu(z)}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho(t)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2 = \mu(z), \tag{2.4.17}$$

которое запишем кратко в виде

$$\rho - \mu \Pi \rho = \mu, \tag{2.4.17$'$}$$

где

$$\Pi \rho = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho(t)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2.$$

В работе [32] показано, что уравнение (2.4.17′) разрешимо. Оно может быть решено методом последовательных приближений[1]:

$$\rho_0 = \mu, \quad \rho_n = \mu \left[1 - \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho_{n-1}(t)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2 \right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Функции $\rho_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ будут удовлетворять условию Гёльдера, если функция $\mu(z)$ непрерывна в смысле Гёльдера на всей плоскости E.

Последовательность функций

$$\zeta_n(z) = z - \frac{1}{\pi} \iint\limits_E \frac{\rho_n(t)}{(t-z)^2} dt_1 dt_2, \quad n = 1, 2, 0, 3, \ldots .$$

сходится равномерно внутри всякой ограниченной области к функции $\zeta(z)$ вида (2.4.15), которая непрерывна на всей плоскости z и удовлетворяет уравнению Бельтрами (2.3.10). Функция $\zeta(z)$ вида (2.4.15) взаимно однозначно и непрерывно отображает полностью плоскость z на всю плоскость ζ ($\zeta(z)$ — полный гомеоморфизм) и она удовлетворяет согласно [32] условиям

$$\zeta(\infty) = \infty, \quad z^{-1}\zeta(z) \to 1 \quad \textit{при} \quad z \to \infty. \tag{2.4.18}$$

Отсюда видно, что бесконечно удалённая точка неподвижна.

Полный гомеоморфизм (2.4.15), удовлетворяющий условиям (2.4.18), назовём, следуя [32], *основным* гомеоморфмизмом уравнения Бельтрами (2.3.10).

---

[1] Если область D — круг, а $\mu(x, y)$ — полином от переменных x и y, то все приближения строятся явно в виде полиномов [31].

§ 2.5. Метод исследования двумерных течений. Свойства решений канонических уравнений

Сущность метода изучения двумерных течений

Полученные выше канонические уравнения позволяют развить метод исследования двумерных течений в анизотропном неоднородном слое пористой среды[1]. Используем введённые ранее комплексные плоскости: физическую плоскость $z = x + iy$, где описываем течение обобщённым потенциалом $\varphi(z)$ и функцией тока $\psi(z)$, и вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, в которой описываем течение комплексным потенциалом $W(\zeta)$ (обобщённым потенциалом $\varphi(\zeta)$ и функцией тока $\psi(\zeta)$, $W(\zeta) = \varphi(\zeta) + i\psi(\zeta)/P'$). Функции $\varphi(z) = \varphi(x, y)$, $\psi(z) = \psi(x, y)$ и $\varphi(\zeta) = \varphi(\xi, \eta)$, $\psi = \psi(\xi, \eta)$ удовлетворяют уравнениям (2.1.1) и (2.3.15) всюду за исключением особых точек этих функций, которые моделируют заданные источники (стоки) течения. Плоскости z и ζ, области D и D' на них взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием $\zeta = \zeta(z)$ (или $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$), которое удовлетворяет уравнению Бельтрами (2.3.10) (или (2.4.5), (2.4.6)). Если течение происходит в области D, ограниченной кривой L с заданными на ней физическими условиями (см. § 1.3), то согласно преобразованию $\zeta = \zeta(z)$ на плоскости ζ область течения D' ограничена кривой L' с теми же физическими условиями[2]. Причём, граничные условия ковариантны (сохраняют форму записи) относительно преобразований $\zeta = \zeta(z)$. Отыскивается сначала комплексный потенциал $W(\zeta)$, который удовлетворяет уравнению (2.3.22) (или функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, удовлетворяющие системе уравнений (2.3.15)) в области D' и условиям на её границе L', а затем на основе преобразований $\zeta = \zeta(z)$, указанных в § 2.4, находим искомые функции $\varphi(z) = \varphi[\zeta(z)]$, $\psi(z) = \psi[\zeta(z)]$, описывающие в плоскости z течение в области D с теми же условиями, заданными на границе L.

[1] Для простоты суждений рассматриваем стационарные течения (функции φ, ψ и W не зависят от времени t). Метод имеет место также в нестационарном случае, когда t — параметр.

[2] Исследование течения упрощается, если область D покрывает всю плоскость z (надобность в условиях на границе L отпадает). Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то в этой точке функции φ и ψ должны отвечать условиям регулярности (см. § 1.3).

Таким образом, исследование двумерных течений сводится к отысканию решений уравнения (2.3.22) (или системы уравнений (2.3.15)). Так как уравнения (2.3.22) (или (2.3.15)) канонические (наиболее простые), то это значительно упрощает отыскание решений этих уравнений. Далее развивается ряд методов их решения, которые являются усложнёнными аналогами методов в случае изотропного слоя [117].

Простейшие свойства течений

Поскольку канонические уравнения в плоскости ζ можно рассматривать как частный случай уравнений в плоскости z , то свойства решений последних переносятся на решения канонических уравнений. Воспользуемся представлением канонических уравнений в комплексном виде (2.3.22). Уравнение (2.3.22) конформно ковариантно.

Учтём, что проводимость канонического слоя $P' = (P'_{ij}) = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$ ($D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4$, $D(P_a) = (P_{12} - P_{21})^2/4$) и $P'^T = (P'_{ji}) = \sqrt{D(P_s)} + i\sqrt{D(P_a)} = \overline{P'}$ ($P'\overline{P'} = |P'|^2 = D(P)$). Тогда согласно равенствам (2.2.6) канонические слои с проводимостями P' и $P'^* = \overline{P'}/D(P)$ будут взаимно сопряжёнными и для них

$$P'P'^* = 1. \tag{2.5.1}$$

Пусть течения в сопряжённых слоях проводимости P' и P'^* описывают комплексные потенциалы (функции φ , ψ и φ^* , ψ^*) $W = \varphi + i\psi/P'$ и $W^* = \varphi^* + i\psi^*/P'^*$. Тогда принцип обратимости (2.2.7) с учётом (2.5.1) запишем

$$\begin{aligned} &W^* = iP'W \qquad (\varphi^* = -\psi, \quad \psi^* = \varphi), \\ &W = -iP'^*W^* \qquad (\varphi = \psi^*, \quad \psi = -\varphi^*). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Видно, что линии $\varphi = \mathrm{const}$ и $\psi = \mathrm{const}$ для сопряжённых канонических слоёв (также как и для слоёв в плоскости z) взаимно заменяемые. Но они, вообще говоря, взаимно не ортогональны. В частности, если канонические слои ортотропные ($K_{12} = K_{21}$, $D(P_a) = HD(K_a) = 0$), то эти линии, как это следует из уравнений (2.3.15), взаимно ортогональные: $\nabla\varphi(\xi,\eta) \cdot \nabla\psi(\xi,\eta) = 0$.

Равенства (2.2.8), записанные для комплексных приведённых скоростей течений в сопряжённых канонических слоях, имеют вид

$$V^* = -iP'V, \quad V = iP'^*V^*. \tag{2.5.3}$$

Так как $P' = |P'|e^{i\delta}$ ($|P'| = \sqrt{D(P)}$; $\delta = \arg P'$, $\operatorname{tg}\delta = -\sqrt{D(P_a)}/\sqrt{D(P_s)}$), то $V^* = \sqrt{D(P)}e^{i(\delta-\pi/2)}V$. Отсюда видно, что комплексные векторы V и V^* взаимосвязаны: их модули $|V^*| = \sqrt{D(P)}|V|$, они повёрнуты на угол $\delta - \pi/2$ относительно друг друга.

Используя преобразования (2.5.1)–(2.5.3), нетрудно убедиться, что W^* и V^* удовлетворяют уравнениям (2.3.22) и (2.3.33), записанным для слоя проводимости P'^*.

Так как уравнение (2.3.22) линейное, то имеет место в плоскости ζ принцип наложения течений вида (2.2.9). Если $W_\nu = \varphi_\nu + i\psi_\nu/P'$ ($\nu = 1, 2$) — комплексные потенциалы двух течений в каноническом слое проводимости P', то в соответствии с этим принципом комплексный потенциал $W = \varphi + i\psi/P'$ вида

$$W = \alpha W_1 + \beta W_2 \quad (\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \quad \psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \tag{2.5.4}$$

опишет течение в этом же слое (α, β — произвольные вещественные постоянные).

Согласно принципу (2.5.4) одно и то же течение в слое описывают комплексные потенциалы, которые могут отличаться на аддитивные слагаемые

$$W_0 = \alpha_0 + i\frac{\beta_0}{P'(\zeta)} = \alpha_0 + i\frac{\beta_0}{P'(\xi,\eta)} \quad (\varphi_0 = \alpha_0, \quad \psi_0 = \beta_0), \tag{2.5.5}$$

где α_0, β_0 — вещественные постоянные. W_0 удовлетворяет уравнению (2.3.22) и его можно рассматривать как комплексный потенциал покоящейся жидкости (согласно (2.3.26) скорость $v = 0$). Если анизотропный слой однороден (компоненты тензора $P' = (P'_{ij})$ — постоянные), то W_0 — комплексная постоянная. Поэтому W_0 , определяемое формулой (2.5.5), назовём *обобщённой* комплексной постоянной.

Σ-дифференцирование

Для комплексного потенциала W как непрерывной функции $\zeta = \xi + i\eta$ в области D' введём понятие Σ-дифференцирования, обобщающее дифференцирование аналитической функции. Назовём Σ*-производной* $W(\zeta)$, которую обозначим $W_\Sigma(\zeta) = \frac{d_\Sigma W(\zeta)}{d\zeta}$, предел разностного отношения

$$W_\Sigma(\zeta) = \lim_{\triangle\zeta\to 0} \frac{\triangle_\Sigma W(\zeta)}{\triangle\zeta} = \lim_{\triangle\zeta\to 0} \frac{\varphi(\zeta+\triangle\zeta) - \varphi(\zeta) + \frac{i}{P'(\zeta)}[\psi(\zeta+\triangle\zeta) - \psi(\zeta)]}{\triangle\zeta}. \tag{2.5.6}$$

Полагая в этом пределе последовательно $\triangle\zeta = \triangle\xi$ и $\triangle\zeta = i\triangle\eta$, учитывая выражения для W (2.3.20) и (2.3.21), имеем

$$W_\Sigma(\zeta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{i}{P'(\zeta)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial W}{\partial\xi} + \frac{(W-\overline{W})\overline{P'}}{P'+\overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\xi}, \tag{2.5.7}$$

$$W_\Sigma(\zeta) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{i}{P'(\zeta)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right] = -i\left[\frac{\partial W}{\partial\eta} + \frac{(W-\overline{W})\overline{P'}}{P'+\overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\eta}\right]. \tag{2.5.8}$$

В силу уравнений (2.3.15) (или (2.3.22)) равенства (2.5.7) и (2.5.8) совпадают. Следовательно, предел разностного отношения (2.5.6) не зависит от способа стремления $\triangle\zeta$ к нулю.

Из равенства (2.5.6) следует

$$W_\Sigma(\zeta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{i}{P'(\zeta)}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \tag{2.5.9}$$

или, учитывая комплексный потенциал (2.3.20),

$$W_\Sigma(\zeta) = \frac{\partial W}{\partial\zeta} + C(W-\overline{W}) \qquad \left(C = \frac{\overline{P'}}{P'+\overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\zeta}\right). \tag{2.5.10}$$

Формула (2.5.10) выражает Σ-производную от комплексного потенциала. Используя уравнение (2.3.22) при $A \neq 0$, запишем

$$W_\Sigma(\zeta) = \frac{\partial W}{\partial\zeta} - \frac{C}{A}\frac{\partial W}{\partial\overline{\zeta}} \qquad \left(\frac{C}{A} = \frac{\partial P'/\partial\zeta}{\partial P'/\partial\overline{\zeta}}\right). \tag{2.5.10$'$}$$

$W_\Sigma(\zeta)$ имеет ясный гидродинамический смысл: она связана с приведённой скоростью течения (2.3.35) равенством

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{2P'}{P'+\overline{P'}}W_\Sigma(\zeta). \tag{2.5.11}$$

Эта формула позволяет Σ-дифференцированием (2.5.10) комплексного потенциала $W(\zeta)$ течения находить его скорость $\overline{V}(\zeta)$.

В равенстве (2.5.6) обозначим $\triangle\varphi = \varphi(\zeta + \triangle\zeta) - \varphi(\zeta)$ и $\triangle\psi = \psi(\zeta + \triangle\zeta) - \psi(\zeta)$ и найдём

$$\triangle_\Sigma W(\zeta) = \triangle\varphi + i\frac{\triangle\psi}{P'(\zeta)} = [W_\Sigma(\zeta) + \varepsilon(\zeta, \triangle\zeta)]\triangle\zeta,$$

где $\varepsilon(\zeta, \triangle\zeta)$ — малая величина, стремящаяся к нулю при $\triangle\zeta \to 0$. В последнем равенстве выделим часть, линейную относительно $\triangle\zeta$. Обозначим линейные части приращений $\triangle\varphi$ и $\triangle\psi$ через $d\varphi$ и $d\psi$, а также $\triangle\zeta$ через $d\zeta$. Имеем выражение

$$d_\Sigma W(\zeta) = d\varphi(\zeta) + i\frac{d\psi(\zeta)}{P'(\zeta)} = W_\Sigma(\zeta)d\zeta, \tag{2.5.12}$$

которое назовём Σ-*дифференциалом* функции $W(\zeta)$. Ясно, что Σ-дифференциал $d_\Sigma W(\zeta)$ не равен дифференциалу $dW(\zeta) = d[\varphi(\zeta) + i\psi(\zeta)/P'(\zeta)]$. Действительно, $dW(\zeta)$ характеризует изменение всей функции $W(\zeta)$, а $d_\Sigma W(\zeta)$ — только её составляющих $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$.

Введём оператор Σ-дифференцирования $W(\zeta)$ по переменной $\overline{\zeta}$ как полусумму двух пределов вида (2.5.6), в которых заменим $\triangle\zeta$ на $\triangle\overline{\zeta} = \triangle\xi - i\triangle\eta$ и последовательно положим $\triangle\overline{\zeta} = \triangle\xi$ и $\triangle\overline{\zeta} = -i\triangle\eta$. Обозначим этот оператор $W_{\overline{\Sigma}}(\zeta) = \frac{d_\Sigma W(\zeta)}{d\overline{\zeta}}$, запишем

$$W_{\overline{\Sigma}}(\zeta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}} + \frac{i}{P'(\zeta)}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}} \tag{2.5.13}$$

или, учитывая комплексный потенциал (2.3.20), имеем

$$W_{\overline{\Sigma}}(\zeta) = \frac{\partial W}{\partial\overline{\zeta}} + A(W - \overline{W}) \qquad \left(A = \frac{\overline{P'}}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\overline{\zeta}}\right). \tag{2.5.13$'$}$$

Тогда уравнение (2.3.22) с помощью оператора $W_{\overline{\Sigma}}$ кратко запишем

$$W_{\overline{\Sigma}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d_\Sigma W(\zeta)}{d\overline{\zeta}} = 0. \tag{2.5.14}$$

Введённое понятие Σ- производной обобщает понятие производной для аналитической функции. Действительно, если анизотропный слой однороден (его проводимость P' постоянная, $A = 0$), то функция $W(\zeta)$ аналитическая ($W_{\overline{\Sigma}}(\zeta) = 0$) и её производная $W_\Sigma(\zeta) = dW(\zeta)/d\zeta$ — обычная производная для аналитической функции. В этом случае скорость (2.5.11) также аналитическая функция:

$$\overline{V} = \frac{2P'}{P' + \overline{P'}} \frac{dW(\zeta)}{d\zeta}.$$

Σ-интегрирование. Обобщённая формула Ньютона—Лейбница

Из выражения Σ-дифференциала (2.5.12) и комплексно сопряжённого ему равенства

$$d_\Sigma \overline{W}(\zeta) = d\varphi(\zeta) - i\frac{d\psi(\zeta)}{\overline{P'}(\zeta)} = \overline{W}_\Sigma(\zeta)d\overline{\zeta}$$

находим полные дифференциалы функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$:

$$d\varphi(\zeta) = \frac{P'(\zeta)W_\Sigma(\zeta)d\zeta + \overline{P'}(\zeta)\overline{W}_\Sigma(\zeta)d\overline{\zeta}}{P'(\zeta) + \overline{P'}(\zeta)},$$

$$d\psi(\zeta) = \frac{|P'(\zeta)|^2(W_\Sigma(\zeta)d\zeta - \overline{W}_\Sigma(\zeta)d\overline{\zeta})}{i(P'(\zeta) + \overline{P'}(\zeta))}.$$

Проинтегрируем эти равенства от точки $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ до точки $\zeta = \xi + i\eta$ произвольной гладкой кривой C, лежащей в односвязной области D'. Получаем разности функций ($\zeta' = \xi' + i\eta'$ — переменная интегрирования)

$$\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} [P'(\zeta') + \overline{P'}(\zeta')]^{-1}[P'(\zeta')W_\Sigma(\zeta')d\zeta' + \overline{P'}(\zeta')\overline{W_\Sigma}(\zeta')d\overline{\zeta'}],$$

$$\psi(\zeta) - \psi(\zeta_0) = -i\int_{\zeta_0}^{\zeta} [P'(\zeta') + \overline{P'}(\zeta')]^{-1}|P'(\zeta')|^2[W_\Sigma(\zeta')d\zeta' - \overline{W_\Sigma}(\zeta')d\overline{\zeta'}], \tag{2.5.15}$$

которые не зависят от выбора кривой C, соединяющей точки ζ_0 и ζ.

Из равенств (2.5.15) второе умножим на $i/P'(\zeta)$ (ζ — конечная точка кривой C) и полученный результат сложим почленно с первым. Имеем $(W_0 = \varphi(\zeta_0) + i\psi(\zeta_0)/P'(\zeta))$:

$$W(\zeta) - W_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} W_\Sigma(\zeta')d_\Sigma\zeta', \tag{2.5.16}$$

где стоящее справа выражение

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} W_\Sigma(\zeta')d_\Sigma\zeta' \equiv \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}[P'(\zeta')+\overline{P'}(\zeta')]^{-1}\left[\left(P'(\zeta')+\frac{|P'(\zeta')|^2}{P'(\zeta)}\right)W_\Sigma(\zeta')d\zeta' + \right.$$

$$\left. + \left(\overline{P'}(\zeta')-\frac{|P'(\zeta')|^2}{P'(\zeta)}\right)\overline{W_\Sigma}(\zeta')d\overline{\zeta'}\right] \quad (2.5.17)$$

назовём Σ-*интегралом* от функции $W_\Sigma(\zeta)$. Значение Σ-интеграла определяется положением точек ζ_0 и ζ и не зависит от выбора кривой C, соединяющей эти точки.

Если точку ζ_0 зафиксировать, то W_0 аналогично обобщённой комплексной постоянной (2.5.5). Полагая в этом случае точку ζ переменной, найдём Σ-*интегрированием* согласно равенству (2.5.16) функцию $W(\zeta)$ с точностью до W_0 по её известной Σ-производной $W_\Sigma(\zeta)$.

Из формулы (2.5.11) выразим Σ-производную от $W(\zeta)$ через скорость $\overline{V}(\zeta)$:

$$\frac{d_\Sigma W(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}(\zeta). \quad (2.5.18)$$

В этом выражении $W(\zeta)$ можно рассматривать как первообразную от справа стоящей функции. $W(\zeta)$ находим Σ-интегрированием по формуле (2.5.16) с учётом выражения (2.5.18). Имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' = W(\zeta)-W_0, \quad (2.5.19)$$

где Σ-интеграл от скорости $\overline{V}(\zeta)$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}(\zeta')d\zeta' + \left(1-\frac{P'(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)V(\zeta')d\overline{\zeta'}. \quad (2.5.19')$$

В случае, когда анизотропный слой однороден (его проводимость P' — комплексная постоянная), то $W(\zeta)$ и $\overline{V}(\zeta)$ — аналитические функции, причём в соответствии с формулой (2.3.36) имеем

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{P'}}{P'}\right)\overline{V}(\zeta).$$

В этом случае формула (2.5.19) принимает вид

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{P'}}{P'}\right)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\overline{V}(\zeta')d\zeta' = W(\zeta) - W_0,$$

характерный для аналитических функций (формула Ньютона-Лейбница [124, 154]). Поэтому (2.5.19) назовём *обобщённой* формулой Ньютона-Лейбница для комплексного потенциала $W(\zeta)$ и скорости $\overline{V}(\zeta)$ течения. Она позволяет по известной скорости течения находить его комплексный потенциал с точностью до обобщённой постоянной W_0.

Σ-интеграл от скорости $\overline{V}(\zeta)$ имеет ясный гидродинамический смысл: он определяет циркуляцию и поток жидкости в каноническом слое. Действительно, согласно формулам (2.1.9) находим

$$W(\zeta) - W_0 = \varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0) + \frac{i}{P'(\zeta)}[\psi(\zeta) - \psi(\zeta_0)] = \Gamma - i\frac{\Pi}{P'(\zeta)},$$

где Γ и Π — циркуляция и поток скорости $V(\zeta)$ жидкости, вычиленные для гладкой кривой C, соединяющей точки ζ_0 и ζ. Тогда согласно формуле (2.5.19) Σ-интеграл от скорости

$$\frac{1}{2}\int\limits_{C}\left(1 + \frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_{\Sigma}\zeta' = \Gamma - i\frac{\Pi}{P'(\zeta)} \qquad (2.5.20)$$

определяет циркуляцию Γ и поток Π жидкости.

Обобщённая теорема Коши

Для двумерного течения в каноническом слое проводимости $P'(\zeta)$ имеет место

Теорема 2.5.1 (*обобщённая* теорема Коши). *Пусть скорость течения* $\overline{V}(\zeta)$ *удовлетворяет всюду в односвязной области* D' *уравнению* (2.3.33) *(комплексный потенциал* $W(\zeta)$ *— уравнению* (2.3.22)*). Тогда* Σ*-интеграл от* $\overline{V}(\zeta)$ *по любому гладкому (кусочно-гладкому) замкнутому контуру* C*, целиком лежащем в этой области, равен нулю:*

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' = 0 \tag{2.5.21}$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}(\zeta')d\zeta' + \left(1-\frac{P'(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)V(\zeta')d\overline{\zeta'} = 0, \tag{2.5.21$'$}$$

где $P'(\zeta)$ *— проводимость слоя в произвольной точке* $\zeta \in C$*.*

Доказательство. Так как скорость $\overline{V}(\zeta)$ (комплексный потенциал $W(\zeta)$) удовлетворяет всюду в области D' уравнению (2.3.33) ((2.3.22)), то имеет место формула (2.5.19). Поскольку расположенный в области D' контур C замкнут (его точки ζ_0 и ζ совпадают), то из формулы (2.5.19) следует равенство (2.5.21) или (2.5.21$'$). ■

Если анизотропный слой однороден (его проводимость P' — постоянна), то $\overline{V}(\zeta)$ — аналитическая функция и равенство (2.5.21$'$) принимает вид

$$\int\limits_C \overline{V}(\zeta')d\zeta' = 0,$$

характерный выражению теоремы Коши для аналитических функций [124]. Поэтому выраженный формулой (2.5.21) результат назовём *обобщённой* теоремой Коши для скорости $\overline{V}(\zeta)$. Эта теорема имеет ясный гидродинамический смысл. Из (2.5.21) при учёте (2.5.20) следует $\Gamma = 0$ и $\Pi = 0$. Это означает, что теорема в интегральной форме (2.5.21) выражает потенциальность течения ($\Gamma = 0$) и закон сохранения объёмного расхода жидкости ($\Pi = 0$) в односвязной области D', где нет вихрей и источников (стоков).

Рассмотрим теперь многосвязную область.

Теорема 2.5.2 (*обобщённая* теорема Коши для многосвязной области). *Пусть скорость течения* $\overline{V}(\zeta)$ *удовлетворяет уравнению* (2.3.33) *(комплексный потенциал* $W(\zeta)$*-уравнению* (2.3.22)*) в* m*-связной области* D'*,* *ограниченной гладким (кусочно-гладким) контуром* $C\bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1} C_\nu$. *Тогда* Σ-*интеграл от* $\overline{V}(\zeta)$, *вычисленного по контуру* C, *равен сумме* Σ-*интегралов от* $\overline{V}(\zeta)$, *вычисленных по контурам* C_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ *(причём все части контура* $C\bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1} C_\nu$ *проходятся в одном и том же направлении):*

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' = \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{2}\int\limits_{C_\nu}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' \qquad (2.5.22)$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}(\zeta')d\zeta' + \left(1-\frac{P'(\zeta')}{P'(\zeta)}\right)V(\zeta')d\overline{\zeta'} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{2}\int\limits_{C_\nu}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta_\nu)}\right)\overline{V}(\zeta')d\zeta' + \left(1-\frac{P'(\zeta')}{P'(\zeta_\nu)}\right)V(\zeta')d\overline{\zeta'}. \qquad (2.5.22')$$

Здесь $P'(\zeta)$ *и* $P'(\zeta_\nu)$ *— проводимости слоя в произвольных точках* $\zeta \in C$ *и* $\zeta_\nu \in C_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$.

Доказательство. Соединим каждый контур C_1, C_2, $\ldots$, C_{m-1} с контуром C разрезами γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_{m-1} (рис. 2.5.1). Тогда область D' станет односвязной и для неё можно применить равенство (2.5.21). Обходим контур $C\bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1} C_\nu \bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1}\gamma_\nu$ в положительном направлении (область D' при этом остаётся слева). Учтём, что Σ-интегралы от $\overline{V}(\zeta)$ берутся вдоль каждого разреза $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ дважды, их значения равны и противоположны по знаку. Поэтому Σ-интеграл по всем разрезам $\bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1}\gamma_\nu$ равен нулю. Тогда согласно равенству (2.5.21) имеем выражение

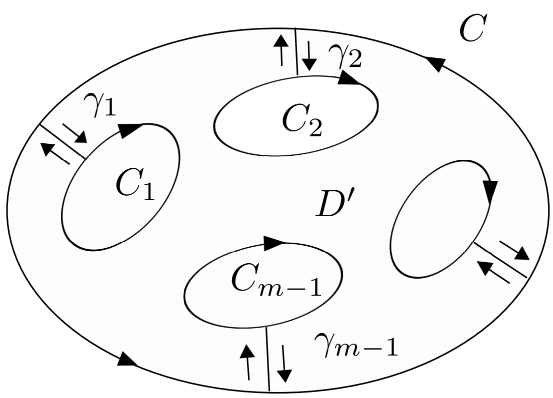

Рис. 2.5.1. Многосвязная область.

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{C\\ \circlearrowleft}}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{C_\nu\\ \circlearrowleft}}\left(1+\frac{\overline{P'}(\zeta')}{P'(\zeta')}\right)\overline{V}(\zeta')d_\Sigma\zeta' = 0,$$

в котором контуры C и C_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$ проходятся соответственно против и по часовой стрелки (рис. 2.5.1). Меняя в этом равенстве обход контуров C_ν $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$ на противоположный (контур $C\bigcup\limits_{\nu=1}^{m-1}C_\nu$ проходится в одном и том же направлении — против часовой стрелки), получаем равенство (2.5.22), а значит имеет место и равенство (2.5.22′). ■

В частности, если область D' односвязная ($m = 1$) равенства (2.5.22) или (2.5.22′) принимают вид (2.5.21) или (2.5.21′).

Построение комплексных потенциалов Σ-дифференцированием и Σ-интегрированием

Используем Σ-дифференцирование и Σ-интегрирование для нахождения систем комплексных потенциалов $W(\zeta)$, а значит с помощью гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ искомых систем комплексных потенциалов $W(z) = W[\zeta(z)]$. Пусть канонический слой однороден, его проводимость P' — постоянная. В этом случае $W(\zeta)$ — аналитическая функция и её Σ-дифференцирование и Σ-интегрирование — обычные дифференцирование и интегрирование такой функции. Пусть известен комплексный потенциал какого-либо течения $W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\psi_0(\zeta)/P'$. Тогда дифференцируя n-раз $W_0(\zeta)$, находим комплексные потенциалы

$$W_n(\zeta) = \frac{d^n W_0(\zeta)}{d\zeta^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.5.23}$$

Интегрируя n-раз W_0 от точки ζ_0 до точки ζ в односвязной области D', имеем комплексные потенциалы[1]

$$W_n(\zeta) = n\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} W_{n-1}(\zeta')d\zeta', \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.5.24}$$

[1]В качестве W_0 можно выбрать в формуле (2.5.24) произвольную комплексную постоянную.

Пусть теперь проводимость канонического слоя $P' = HK'$ (его проницаемость K' и толщина H) моделируются непрерывно дифференцируемыми (хотя бы один раз) функциями одной переменной, например, η $(P' = P'(\eta))$ [1]. В этом случае Σ-дифференцирование (2.5.7) — это дифференцирование W по переменной ξ $(W_\Sigma(\zeta) = \partial W(\zeta)/\partial\xi)$, и операторы Σ-дифференцирования по ζ и $\overline{\zeta}$ от W (2.5.10) и (2.5.13′) коммутируют: $[W_{\overline{\Sigma}}(\zeta)]_\Sigma = [W_\Sigma(\zeta)]_{\overline{\Sigma}}$. Следовательно , если $W(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (2.5.14), то ему же удовлетворяет Σ- производная $W_\Sigma(\zeta)$. Тогда Σ-дифференцируя n-раз известный комплексный потенциал $W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\psi_0(\zeta)/P'(\zeta)$, имеем комплексные потенциалы

$$W_n(\zeta) = \frac{d^n_\Sigma W_0(\zeta)}{d\zeta^n} \quad \left(W_n(\xi,\eta) = \frac{\partial^n W_0(\xi,\eta)}{\partial\xi^n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (2.5.25)$$

Пусть в рассматриваемом случае проводимости $P'(\zeta)$ комплексный потенциал $W(\zeta) = \varphi(\zeta) + i\psi(\zeta)/P'(\eta)$ — первообразная функции $W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\psi_0(\zeta)/P'(\eta)$, то есть $W_\Sigma(\zeta) = W_0(\zeta)$. Тогда, Σ-интегрируя согласно (2.5.16) n раз $W_0(\zeta)$, имеем комплексные потенциалы[2]

$$W_n(\zeta) = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} W_{n-1}(\zeta')d_\Sigma\zeta', \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \qquad (2.5.26)$$

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} W_0(\zeta')d_\Sigma\zeta' = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} [P'(\eta') + \overline{P'}(\eta')]^{-1} \left[\left(P'(\eta') + \frac{|P'(\eta')|^2}{P'(\eta)}\right) W_0(\zeta')d\zeta' + \right.$$
$$\left. + \left(\overline{P}(\eta') - \frac{|P'(\eta')|^2}{P'(\eta)}\right) \overline{W_0}(\zeta')d\overline{\zeta'}\right].$$

Таким образом, формулы (2.5.25) и (2.5.26) с последующим использованием гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ позволяют находить комплексные потенциалы течений $W(z)$ в слоях проводимости $P(x, y) = P[\eta(x, y)]$.

Отметим, что Σ-дифференцирование и Σ-интегрирование и их усложнённые аналоги изучены в работах [12, 13, 24–26, 38–41, 74, 83–85, 98].

---

[1] В плоскости z проводимость слоя $P = HK$ согласно гомеоморфному преобразованию $\zeta = \zeta(z)$ является функцией, вообще говоря, двух переменных x, y.

[2] В качестве W_0 можно выбрать обобщённую комплексную постоянную: $W_0 = \alpha_0 + i\beta_0/P'(\eta)$ (α_0, β_0 — вещественые постоянные).

Глава 3

Фундаментальные решения и системы комплексных потенциалов двумерных течений

Отыскиваются фундаментальные решения и системы комплексных потенциалов двумерных течений в анизотропном и неоднородном слое пористой среды.

§ 3.1. Фундаментальные и главные решения

Фундаментальные решения

Для исследования двумерных граничных задач принципиальное значение имеют фундаментальные решения основных уравнений течения в анизотропном слое. Как отмечалось выше, эти уравнения в канонической форме (2.3.22) являются усложнённым аналогом уравнений двумерных течений в изотропном слое. Поэтому по аналогии с изотропным случаем дадим определение комплексных фундаментальных решений уравнения (2.3.22).

По формулам, аналогичным (2.3.20) и (2.3.21), вводим в области D' плоскости ζ две комплекснозначные функции

$$F_k(\zeta,\zeta_0) = \Phi_k(\zeta,\zeta_0) + i\frac{\Psi_k(\zeta,\zeta_0)}{P'(\zeta)}, \quad k = 1,2, \tag{3.1.1}$$

где вещественные функции

$$\Phi_k(\zeta,\zeta_0) = \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)F_k(\zeta,\zeta_0)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}, \quad \Psi_k(\zeta,\zeta_0) = \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im}F_k(\zeta,\zeta_0)}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}, \quad k = 1,2 \tag{3.1.2}$$

взаимосвязаны (сопряжены по переменной $\zeta = \xi + i\eta$) уравнениями (2.3.13) или (2.3.15), $P'(\zeta)$ — проводимость слоя — непрерывно дифференцируемая (хотя бы один раз) функция $\zeta \in D'$, $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in D'$ точка-параметр.

Для функций $F_k(\zeta,\zeta_0)$, по переменной ζ уравнений (2.3.22) запишем

$$\frac{\partial F_k}{\partial\bar\zeta}+A(F_k-\bar F_k)=0\quad\left(A=\frac{\bar P'}{P'+\bar P'}\frac{\partial\ln P'}{\partial\bar\zeta}\right),\quad k=1,2. \tag{3.1.3}$$

Первым и вторым комплексными фундаментальными решениями уравнения (3.1.3) в области D' назовем комплекснозначные функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ вида (3.1.1), которые удовлетворяют условиям:

1. Всюду в области D' по координатам точки ζ, за исключением точки-параметра ζ_0 ($\zeta\neq\zeta_0$, $\zeta,\zeta_0\in D'$) функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ хотя бы один раз непрерывно дифференцируемые по ζ и ζ_0 и удовлетворяют уравнению (3.1.3).

2. Функции $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ имеют в точке ζ_0 сингулярность (особенность) логарифмического типа. А именно, они имеют асимптотические приближения:

$$F_1(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi P'(\zeta_0)}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0},\quad F_2(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\quad\text{при}\quad\zeta\to\zeta_0. \tag{3.1.4}$$

Как известно [76], логарифмическая функция многозначная, поскольку её мнимая часть определена с точностью до слагаемого, кратного 2π. Выделим главное значение (ветвь) логарифма и будем иметь $\ln(\zeta-\zeta_0)=$ $=\ln|\zeta-\zeta_0|+i\arg(\zeta-\zeta_0)$. Это обеспечит однозначность решений $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ и их асимптотик (3.1.4)[1].

Используя формулы (3.1.2),(3.1.4) и полагая в них $P'(\zeta_0)=P_1'(\zeta_0)+$ $+iP_2'(\zeta_0)$ ($P_1'(\zeta_0)=\sqrt{D[P_s(\zeta_0)]}>0$, $P_2'(\zeta_0)=-\sqrt{D[P_a(\zeta_0)]}$, $|P'(\zeta_0)|=$ $=\sqrt{D[P(\zeta_0)]}$), имеем для функций $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ при $\zeta\to\zeta_0$ асимптотические приближения

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi P_1'(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}, \tag{3.1.5}$$

$$\Psi_1(\zeta,\zeta_0)\sim-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{P_2'(\zeta_0)}{P_1'(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}+\arg(\zeta-\zeta_0)\right],$$

$$\Phi_2(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi}\left[\frac{P_2'(\zeta_0)}{P_1'(\zeta_0)}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\arg(\zeta-\zeta_0)\right],$$

[1] Наложение фундаментальных решений: $F(\zeta,\zeta_0)=F_1(\zeta,\zeta_0)+F_2(\zeta,\zeta_0)$ также есть решение уравнения (3.1.3) и обладает асимптотикой $F(\zeta,\zeta_0)\sim\frac{1}{2\pi}\big(\frac{1}{P'(\zeta_0)}+$ $+\frac{1}{i}\big)\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0}$ при $\zeta\to\zeta_0$.

$$\Psi_2(\zeta,\zeta_0) \sim -\frac{|P'(\zeta_0)|^2}{2\pi P_1'(\zeta_0)} \ln \frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}.$$

Из асимптотик (3.1.5) следует, что в малой окрестности точки ζ_0 линии $\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \mathrm{const}$ и $\Psi_1(\zeta,\zeta_0) = \mathrm{const}$ представляют собой окружности радиуса $R = |\zeta-\zeta_0| = \mathrm{const}$ и логарифмические спирали при $P_2'(\zeta_0) \neq 0$ ($K_{12} \neq K_{21}$) вида $R = C\exp\left[\frac{P_1'(\zeta_0)}{P_2'(\zeta_0)}\arg(\zeta-\zeta_0)\right]$ (C — произвольная константа) или лучей: $\arg(\zeta-\zeta_0) = \mathrm{const}$ при $P_2'(\zeta_0) = 0$ $(K_{12} = K_{21})$. В то время как линии $\Phi_2(\zeta,\zeta_0) = \mathrm{const}$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0) = \mathrm{const}$ в малой окрестности точки ζ_0 при $P_2'(\zeta_0) \neq 0$ ($K_{12} \neq K_{21}$) имеют вид логарифмических спиралей: $R = C\exp\left[-\frac{P_1'(\zeta_0)}{P_2'(\zeta_0)}\arg(\zeta-\zeta_0)\right]$ или лучей: $\arg(\zeta-\zeta_0) = \mathrm{const}$ при $P_2'(\zeta_0) = 0$ $(K_{12} = K_{21})$ и окружностей радиуса $R = |\zeta-\zeta_0| = \mathrm{const}$. Точка ζ_0 является центром этих окружностей и асимптотической точкой этих логарифмических спиралей и исходной точкой этих лучей.

Функции $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ по переменной $\zeta = \xi + i\eta$ решения системы уравнений (2.3.15) или (2.3.15$'$), а значит вытекающих из них уравнений (2.3.17) и (2.3.18). Запишем последние уравнения для $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$:

$$T_1'\Phi_1(\zeta,\zeta_0) \equiv \nabla\cdot\left[P'(\zeta)\cdot\nabla\Phi_1(\zeta,\zeta_0)\right] = 0, \tag{3.1.6}$$

$$T_2'\Psi_2(\zeta,\zeta_0) \equiv \nabla\cdot\left[P'^*(\zeta)\cdot\nabla\Psi_2(\zeta,\zeta_0)\right] = 0 \tag{3.1.7}$$

или

$$T_1'\Phi_1(\zeta,\zeta_0) \equiv \triangle\Phi_1 + a_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} + b_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} = 0, \tag{3.1.6$'$}$$

$$T_2'\Psi_2(\zeta,\zeta_0) \equiv \triangle\Psi_2 + a_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\eta} = 0. \tag{3.1.7$'$}$$

Здесь коэффициенты a_1, b_1 и a_2, b_2 имеют такой же вид как и в уравнениях (2.3.17$'$) и (2.3.18$'$).

Функции $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ являются решениями уравнений (3.1.6) и (3.1.7) в сопряжённых слоях $(P'P'^* = 1)$, что отражено в их асимптотиках (3.1.5) .

Если найдены решения $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ уравнений (3.1.6) и (3.1.7), то сопряженные им функции $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$ представим согласно формулам (2.3.19) интегралами от точки $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ до точки $\zeta = \xi + {}$ ${}+ i\eta$ односвязной области D' (переменная интегрирования $\zeta' = \xi' + i\eta'$

не совпадает с точкой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$: $\zeta' \neq \zeta_0$):

$$\Psi_1(\zeta,\zeta_0) - \Psi_1(\zeta_1,\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta} \Bigg[\Bigg(\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Phi_1(\zeta',\zeta_0)}{\partial\xi'} - \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Phi_1(\zeta',\zeta_0)}{\partial\eta'}\Bigg)d\xi' +$$

$$+\Bigg(\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Phi_1(\zeta',\zeta_0)}{\partial\xi'} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Phi_1(\zeta',\zeta_0)}{\partial\eta'}\Bigg)d\eta'\Bigg], \tag{3.1.8}$$

$$\Phi_2(\zeta,\zeta_0) - \Phi_2(\zeta_1,\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{1}{D(P)}\Bigg[\Bigg(\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Psi_2(\zeta',\zeta_0)}{\partial\xi'} +$$

$$+\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Psi_2(\zeta',\zeta_0)}{\partial\eta'}\Bigg)d\xi' - \Bigg(\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Psi_2(\zeta',\zeta_0)}{\partial\xi'} - \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Psi_2(\zeta',\zeta_0)}{\partial\eta'}\Bigg)d\eta'\Bigg].$$

Вид фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ зависит от закона изменения проводимости слоя $P'(\zeta)$, который может иметь сингулярную линию $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$ (σ'_0 — образ сингулярной линии $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ в плоскости z слоя проводимости $P(z)$). На линии σ'_0 проводимость $P'(\zeta)$ обращается в бесконечность (на σ'_{01}) и ноль (на σ'_{02}) и поэтому может являться границей области D'. В этом случае дополнительно к указанным условиям 1 и 2 можно потребовать, чтобы решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ удовлетворяли условиям на σ'_0. Поскольку далее будут отыскиваться решения $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ уравнений (3.1.6) и (3.1.7), то запишем для них условия на σ'_0.[1] Обратимся к условиям (1.3.8), (1.3.12) и запишем их для $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ ($P'_n = HK'_n = \big[\sum\limits_{j=1}^{2}(\sum\limits_{i=1}^{2} n_i P'_{ij})^2\big]^{1/2}$, $P'_{11} = P'_{22} = \sqrt{D(P_s)}$, $P'_{12} = -P'_{21} = \sqrt{D(P_a)}$):

$$\Phi_1^+(\zeta,\zeta_0) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}; \quad \Bigg(P'_n(\zeta)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\nu_\zeta}\Bigg)^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \tag{3.1.9}$$

где

$$P'_n(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} = (n_1\sqrt{D(P_s)} - n_2\sqrt{D(P_a)})\frac{\partial}{\partial\xi} + (n_1\sqrt{D(P_a)} - n_2\sqrt{D(P_s)})\frac{\partial}{\partial\eta},$$

[1]Достаточно наложить условия на $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$. Тогда сопряжённые им функции $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$, а значит искомые решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ будут отвечать этим же условиям на σ'_0.

n_1 и n_2 — направляющие косинусы орта $\vec{n_\zeta}$, $\zeta \in \sigma'_{02}$.

Укажем теперь условия для $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ на σ'_0. Для этого запишем аналогичные (3.1.9) равенства для $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$ на кривой $\widetilde{\sigma}'_0 = \widetilde{\sigma}'_{01} \cup \widetilde{\sigma}'_{02}$, близкой к сингулярной линии $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$ ($\widetilde{\sigma}'_{01}$ и $\widetilde{\sigma}'_{02}$ близки соответственно к σ'_{01} и σ'_{02}):

$$\Phi_2(\zeta,\zeta_0) = 0, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{01}; \quad P'_n(\zeta)\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu_\zeta} = 0, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{02}.$$

Продифференцируем первое из этих равенств по касательной к кривой $\widetilde{\sigma}'_{01}$ $\left(\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_\zeta} = 0,\ \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{01}\right)$ и учтем вытекающие из (1.2.25), (1.2.26) равенства для функций $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ на кривой $\widetilde{\sigma}'_0$:

$$\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_\zeta} = \frac{P'^T_n(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu^T_\zeta}, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{01};$$

$$P'_n(\zeta)\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu_\zeta} = \frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu_\zeta}, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{02},$$

где $P'^T_n = HK'^T_n = \left[\sum\limits_{j=1}^{2}(\sum\limits_{i=1}^{2} n_i P'_{ji})^2\right]^{1/2}$, $P'_{11} = P'_{22} = \sqrt{D(P_s)}$, $P'_{12} = -P'_{21} = \sqrt{D(P_a)}$.

Тогда имеем

$$\frac{P'^T_n(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu^T_\zeta} = 0, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{01}; \quad \frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu_\zeta} = 0, \quad \zeta \in \widetilde{\sigma}'_{02}.$$

Интегрируя второе из этих равенств по касательной к $\widetilde{\sigma}'_{02}$ (постоянную интегрирования полагаем равную нулю), и переходя в этих равенствах к пределу при $\widetilde{\sigma}'_{01} \to \sigma'_{01}$ и $\widetilde{\sigma}'_{02} \to \sigma'_{02}$, находим условия для $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ на σ'_0:

$$\left(\frac{P'^T_n}{|P'(\zeta)|^2}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \nu^T_\zeta}\right)^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}; \quad \Psi_2^+(\zeta,\zeta_0) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \quad (3.1.9')$$

где

$$\frac{P'^T_n}{|P'(\zeta)|^2}\frac{\partial}{\partial \nu^T_\zeta} = \frac{1}{D(P)}\left[(n_1\sqrt{D(P_s)} + n_2\sqrt{D(P_a)})\frac{\partial}{\partial \xi} + (n_2\sqrt{D(P_s)} - n_1\sqrt{D(P_a)})\frac{\partial}{\partial \eta}\right],$$

n_1 и n_2 — направляющие косинусы орта $\vec{n}_\zeta$, $\zeta \in \sigma'_{01}$.

Главные решения для комплексного потенциала и комплексной скорости

На основании фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ введем, так называемые, главные решения уравнений (2.3.22) и (2.3.33), которые имеют особенности (сингулярности) типа простого полюса.

Так как коэффициент A уравнения (2.3.22) — функция $\zeta=\xi+i\eta$, то производные от $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ по точке-параметру $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ также будут решениями этого уравнения.

Главными решениями уравнения (2.3.22) в области D' назовем комплекснозначные функции $w_1(\zeta,\zeta_0)$ и $w_2(\zeta,\zeta_0)$ вида

$$w_k(\zeta,\zeta_0)=\varphi_k(\zeta,\zeta_0)+i\frac{\psi_k(\zeta,\zeta_0)}{P'(\zeta)},\quad k=1,2, \tag{3.1.10}$$

которые удовлетворяют по координатам точки $\zeta\in D'$ $(\zeta'\neq\zeta_0)$ этому уравнению и выражаются через его первое $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и второе $F_2(\zeta,\zeta_0)$ фундаментальные решения следующим образом[1]

$$w_1(\zeta,\zeta_0)=-\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0}, \tag{3.1.11}$$

$$w_2(\zeta,\zeta_0)=-\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0}.$$

Здесь производные можно представить в комплексной форме:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}=\frac{\partial}{\partial\zeta_0}+\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0},\quad \frac{\partial}{\partial\eta_0}=i\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_0}-\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial l_p}=\frac{\partial}{\partial\xi_0}\cos\delta+\frac{\partial}{\partial\eta_0}\sin\delta=\frac{\partial}{\partial\zeta_0}e^{i\delta}+\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0}e^{-i\delta}=\frac{1}{|P'|}\left(P'\frac{\partial}{\partial\zeta_0}+\bar P'\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0}\right), \tag{3.1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_p}=-\frac{\partial}{\partial\xi_0}\sin\delta+\frac{\partial}{\partial\eta_0}\cos\delta=i\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_0}e^{i\delta}-\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0}e^{-i\delta}\right)=\frac{i}{|P'|}\left(P'\frac{\partial}{\partial\zeta_0}-\bar P'\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_0}\right),$$

где $P'=P'(\zeta_0)$, $\partial/\partial l_p$ и $\partial/\partial n_p$ — производные по направлениям взаимно ортогональных ортов $\vec{l}_p$ и $\vec{n}_p$ с началом в точке $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$, которые образуют правовинтовой локальный (зависящий от координат точки ζ_0) базис.

[1] Обоснование формул (3.1.11) приведено далее в § 3.3.

Этот базис введём следующим образом. Комплексную проводимость слоя в точке ζ_0 представим в виде $P'(\zeta_0) = |P'(\zeta_0)|e^{i\delta(\zeta_0)}$ ($|P'(\zeta_0)| = \sqrt{D[P(\zeta_0)]}$, $\operatorname{tg}\delta(\zeta_0) = -\sqrt{D[P_a(\zeta_0)]}/\sqrt{D[P_s(\zeta_0)]}$, $\delta(\zeta_0) = \arg P'(\zeta_0)$) и будем изображать ее вектором $\vec{P}'(\zeta_0) = |P'(\zeta_0)|\vec{l}_p$, где $\vec{l}_p = (\cos\delta, \sin\delta)$ — орт, направленный в точке ζ_0 углом $\delta = \delta(\zeta_0)$ к оси $O\xi$, а $\vec{n}_p = (-\sin\delta, \cos\delta)$ — ортогональный ему орт (рис. 3.1.1). Тогда производные (3.1.12) запишем в виде

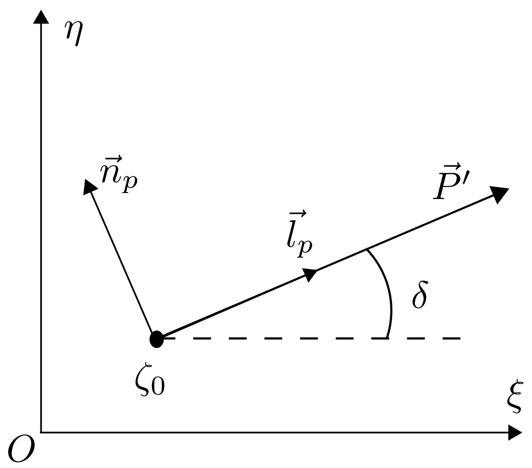

Рис. 3.1.1. Координатный базис, связанный с проводимостью слоя $\vec{P}'$.

$$\frac{\partial}{\partial l_p} = \vec{l}_p \cdot \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial \xi_0}\cos\delta + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\sin\delta,$$
$$\frac{\partial}{\partial n_p} = \vec{n}_p \cdot \nabla_0 = -\frac{\partial}{\partial \xi_0}\sin\delta + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\cos\delta, \tag{3.1.12$'$}$$

где $\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial\xi_0}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\vec{\jmath}$ — оператор Гамильтона по координатам точки ζ_0. Из формул (3.1.10) и (3.1.11) следует выражение функций $\varphi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ через функции $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$:

$$\varphi_1(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p} = -\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0},$$
$$\psi_1(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\partial\Psi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p} = -\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0}, \tag{3.1.13}$$
$$\varphi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p} = \frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0},$$
$$\psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\partial\Psi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p} = \frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0}.$$

Исследуем асимптотику главных решений $w_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$ при $\zeta \to \zeta_0$, учитывая асимптотику (3.1.4) фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k = 1,2$. На основании формул (3.1.11) имеем

$$w_1(\zeta,\zeta_0) \sim -\frac{1}{2\pi|P'(\zeta_0)|(\zeta-\zeta_0)},$$
$$w_2(\zeta,\zeta_0) \sim \frac{1}{2\pi i|P'(\zeta_0)|(\zeta-\zeta_0)} \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0. \tag{3.1.14}$$

Видно, что решения $w_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ имеют в точке ζ_0 сингулярность типа простого полюса (полюса первого порядка).

Из формул (3.1.11) и (3.1.13) следует, что фундаментальные решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$ и функции $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$ сопряжены по точке-параметру $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ согласно равенств (условий сопряжения):

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0},\quad \frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0} \tag{3.1.15}$$

и

$$\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0},\quad \frac{\partial \Psi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0}, \tag{3.1.15$'$}$$

$$\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0},\quad \frac{\partial \Psi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0}.$$

Используя операторы дифференцирования по ζ_0 (3.1.12), условия сопряжения решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ запишем в виде

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial \zeta_0}-\frac{i}{P'(\zeta_0)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \zeta_0}=0,\quad \frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial \bar\zeta_0}+\frac{i}{\bar P'(\zeta_0)}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \bar\zeta_0}=0. \tag{3.1.15$''$}$$

Из равенств (3.1.13) следует, что главные решения $w_1(\zeta,\zeta_0)$ и $w_2(\zeta,\zeta_0)$ сопряжены по точке-параметру $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$:

$$\frac{\partial w_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=\frac{\partial w_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p},\quad \frac{\partial}{\partial \xi_0}\Big[|P'(\zeta_0)|w_1(\zeta,\zeta_0)\Big]=-\frac{\partial}{\partial \eta_0}\Big[|P'(\zeta_0)|w_2(\zeta,\zeta_0)\Big].$$

Введём теперь главные решения уравнения (2.3.33) для скорости, учитывая, что она связана с комплексным потенциалом формулой (2.5.11). *Главными решениями* уравнения (2.3.33) в области D' назовем комплекснозначные функции $\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)$ вида

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=V_{k\xi}(\zeta,\zeta_0)-iV_{k\eta}(\zeta,\zeta_0),\quad k=1,2, \tag{3.1.16}$$

которые по координатам точки $\zeta_0\in D'$ (за исключением точки ζ_0, $\zeta\neq\neq\zeta_0\in D'$) удовлетворяют этому уравнению и выражаются Σ-производной от фундаментальных решений $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ уравнения (3.1.3) равенствами

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\bar{P}'(\zeta)}\frac{d_\Sigma F_k(\zeta,\zeta_0)}{d\zeta},\quad k=1,2. \tag{3.1.17}$$

Учитывая определение Σ-производной (2.5.10) или (2.5.10′), формулы (3.1.17) запишем

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\bar{P}'(\zeta)}\left[\frac{\partial F_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta}+C\big(F_k(\zeta,\zeta_0)-\bar{F}_k(\zeta,\zeta_0)\big)\right],\quad k=1,2 \tag{3.1.18}$$

или

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\bar{P}'(\zeta)}\left[\frac{\partial F_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta}-\frac{C}{A}\frac{F_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\bar{\zeta}}\right],\quad k=1,2. \tag{3.1.18′}$$

Учитывая равенства (2.5.7) и (2.5.8), главные решения $\bar{V}_k(\zeta,\zeta_0)$ на основе формулы (3.1.17) выразим через $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$:

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\bar{P}'(\zeta)}\left[\frac{\partial\Phi_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi}+\frac{i}{P'(\zeta)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi}\right],\quad k=1,2,$$

$$\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\bar{P}'(\zeta)}\left[-i\frac{\partial\Phi_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}+\frac{1}{P'(\zeta)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}\right],\quad k=1,2. \tag{3.1.18″}$$

Здесь $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$ ($k=1,2$) — сопряжённые по переменной $\zeta=\xi+$ $+i\eta$ функции, взаимосвязанные системой уравнений (2.3.15) или (2.3.15′).

Исследуем асимптотическое поведение решений $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$ в малой окрестности точки ζ_0 (при $\zeta\to\zeta_0$). Учитывая для $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ асимптотики (3.1.4), находим по формулам (3.1.18):

$$\begin{aligned}\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)&\sim-\frac{1}{2\pi P_1'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)},\\ \overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)&\sim-\frac{P'(\zeta_0)}{2\pi iP_1'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)}\quad\text{при}\quad\zeta\to\zeta_0,\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

где $P_1'(\zeta_0)=\operatorname{Re}P'(\zeta_0)=\sqrt{D[P_s(\zeta_0)]}$. Видно, что решения $\bar{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=$ $=1,2$ имеют в точке ζ_0 простые полюсы (полюсы первого порядка).

Запишем условия сопряжения для решений $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$. Возьмем Σ-производную по ζ от условий сопряжения фундаментальных решений

$F_k(\zeta,\zeta_0)$ $,k=1,2$ в виде (3.1.15) или (3.1.15$''$). Так как производные по координатам точек $\zeta=\xi+i\eta$ и $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ коммутируют, то с учётом (3.1.17) имеем условия сопряжения решений $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ в виде

$$\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0},\quad \frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0} \tag{3.1.20}$$

или

$$\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}-\frac{i}{P'(\zeta_0)}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\zeta_0}=0,\quad \frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\overline{\zeta_0}}+\frac{i}{\overline{P}'(\zeta_0)}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\bar{\zeta_0}}=0. \tag{3.1.20$'$}$$

Запишем условия (3.1.20) для векторов приведённых скоростей $\vec{V_k}=$ $=V_{k\xi}\vec{\imath}+V_{k\eta}\vec{\jmath}$, $k=1,2$ ($\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ — орты координатных осей $O\xi$ и $O\eta$). Учитывая равенства (3.1.16), имеем

$$\frac{\partial\vec{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\vec{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0},\quad \frac{\partial\vec{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=-\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\vec{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0}. \tag{3.1.20$''$}$$

Уравнения для фундаментальных и главных решений по точке-параметру

Получим уравнения для фундаментальных $F_k(\zeta,\zeta_0)$ и главных $\bar{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ решений по точке-параметру $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$. Исключая из условий сопряжения (3.1.15) последовательно $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$, находим уравнения для $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ по координатам точки ζ_0:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left[|P'(\zeta_0)|\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta_0}\left[|P'(\zeta_0)|\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}\right]=0,\\
&\frac{\partial}{\partial l_p}\left[\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0}\right]+\frac{\partial}{\partial n_p}\left[\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0}\right]=0,
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial l_p}=\frac{\partial}{\partial\xi_0}\cos\delta+\frac{\partial}{\partial\eta_0}\sin\delta,\quad \frac{\partial}{\partial n_p}=-\frac{\partial}{\partial\xi_0}\sin\delta+\frac{\partial}{\partial\eta_0}\cos\delta,\quad \delta=\arg P'(\zeta_0).$$

Учитывая равенства (3.1.1), нетрудно найти из (3.1.21) уравнения для $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$. Для $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ эти уравнения имеют следующий вид

$$\Delta_0\Phi_1 + a_1'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_0} + b_1'\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_0} = 0, \quad \Delta_0\Psi_2 + a_2'\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi_0} + b_2'\frac{\partial\Psi_2}{\partial\eta_0} = 0,$$

где $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_0^2}$ — оператор Лапласа по точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$,

$$a_1' = \frac{1}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial\sqrt{D(P_s)}}{\partial\xi_0} + \frac{\partial\sqrt{D(P_a)}}{\partial\eta_0}\right],$$

$$b_1' = \frac{1}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial\sqrt{D(P_s)}}{\partial\eta_0} - \frac{\partial\sqrt{D(P_s)}}{\partial\xi_0}\right],$$

$$a_2' = \frac{D(P)}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left(\frac{\sqrt{D(P_s)}}{D(P)}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta_0}\left(\frac{\sqrt{D(P_a)}}{D(P)}\right)\right],$$

$$b_2' = \frac{D(P)}{\sqrt{D(P_s)}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left(\frac{\sqrt{D(P_a)}}{D(P)}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\left(\frac{\sqrt{D(P_s)}}{D(P)}\right)\right].$$

Отметим, что уравнения для $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ по точке-параметру $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ аналогичны уравнениям (3.1.6′) и (3.1.7′) по переменной $\zeta = \xi + i\eta$.

Получим теперь уравнения для $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$. Исключая из (3.1.20) последовательно $\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)$, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi_0}\left[|P'(\zeta_0)|\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\left[|P'(\zeta_0)|\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}\right] = 0,\\ \frac{\partial}{\partial l_p}\left[\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\xi_0}\right] + \frac{\partial}{\partial n_p}\left[\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta_0}\right] = 0.\end{gathered} \tag{3.1.22}$$

Из уравнений (3.1.20″) следуют уравнения для векторов скорости $\vec{V}_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\vec{V}_2(\zeta,\zeta_0)$, которые (как нетрудно убедиться) имеют вид, аналогичный (3.1.22).

Гидродинамический смысл фундаментальных и главных решений

Выясним гидродинамический смысл фундаментальных $F_k(\zeta,\zeta_0)$ и главных $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $(k{=}1,2)$ решений. Фундаментальные решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$ уравнения (3.1.3) и соответствующие им согласно (3.1.17) главные решения $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$ уравнений (2.3.33) можно рассматривать как комплексные потенциалы и комплексно сопряжённые скорости двух течений, каждое из которых описывается $F_1(\zeta,\zeta_0)$, $\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$, $\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)$. Установим вид этих течений, используя обобщённую теорему Коши (2.5.22) для $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$. Пусть произвольный замкнутый контур C охватывает точку ζ_0, где расположена сингулярность типа простого полюса для $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k= =1,2$ (для $F_k(\zeta,\zeta_0)$), $k=1,2$ — сингулярность логарифмического типа). Из этой точки проведем окружность C_ε малого радиуса ε. Полагаем, что контуры C и C_ε взаимно не пересекаются и не пересекают сингулярную линию $\sigma_0'=\sigma_{01}'\cup\sigma_{02}'$. Для двусвязной области $m=2$, ограниченной контуром $C\cup C_\varepsilon$ запишем равенство (2.5.22) для $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_C\left(1+\frac{\overline{P}'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d_\Sigma\zeta=\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon}\left(1+\frac{\overline{P}'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d_\Sigma\zeta,\quad k=1,2.$$

Здесь контуры C и C_ε проходятся в одном и том же направлении (для определенности — против часовой стрелки), при этом орты нормали к ним остаются при обходе слева. Учитывая (2.5.20), имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_C\left(1+\frac{\overline{P}'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d_\Sigma\zeta=\Gamma_k-i\frac{\Pi_k}{P'(\zeta_*)},\quad k=1,2\quad \zeta_*\in C\cup C_\varepsilon,$$

где Γ_k и Π_k — циркуляция и поток, вычисленные для контура C для каждой сингулярности $(k=1,2)$. Тогда с учётом (2.5.19′) имеем

$$\Gamma_k-i\frac{\Pi_k}{P'(\zeta_*)}=\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon}\left(1+\frac{\overline{P}'(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d_\Sigma\zeta=\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon}\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d\zeta+V_k(\zeta,\zeta_0)d\bar{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2P(\zeta_*)}\int\limits_{C_\varepsilon}\overline{P}'(\zeta)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d\zeta-\overline{P}'(\zeta)V_k(\zeta,\zeta_0)d\bar{\zeta},\quad k=1,2\quad \zeta_*\in C\cup C_\varepsilon.$$

Отсюда находим

$$\Gamma_k = \frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon} \overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d\zeta + V_k(\zeta,\zeta_0)d\bar{\zeta},$$

$$\Pi_k = \frac{i}{2}\int\limits_{C_\varepsilon} \overline{P}'(\zeta)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)d\zeta - P'(\zeta)V_k(\zeta,\zeta_0)d\bar{\zeta}, \quad k=1,2.$$

По теореме о среднем вычисляем интегралы по окружности $C_\varepsilon : \zeta-\zeta_0 = = \varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0,2\pi]$. Так как на этой окружности $d\zeta = i\varepsilon e^{i\vartheta}d\vartheta = i(\zeta-\zeta_0)d\vartheta$, $d\bar{\zeta} = -i(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)d\vartheta$, то получаем равенства

$$\Gamma_k = i\pi[\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0) - V_k(\zeta,\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)] = -2\pi\,\mathrm{Im}[\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)],$$

$$\Pi_k = -\pi[\overline{P}'(\zeta)\bar{V}_k(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0) + P'(\zeta)V_k(\zeta,\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)] =$$

$$= -2\pi\,\mathrm{Re}[\overline{P}'(\zeta)\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)], \quad k=1,2, \quad \zeta\in C_\varepsilon.$$

Перейдём в этих равенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$ ($\zeta \to \zeta_0$). Учитывая для $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ асимптотики (3.1.19), находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)] = -\frac{1}{2\pi P_1'(\zeta_0)}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}[\overline{P}'(\zeta)\bar{V}_1(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)] = -\frac{\overline{P}'(\zeta_0)}{2\pi P_1'(\zeta_0)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)] = \frac{i\overline{P}'(\zeta_0)}{2\pi P_1'(\zeta_0)}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}[\overline{P}'(\zeta)\overline{V}_2(\zeta,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)] = \frac{i|\overline{P}'(\zeta_0)|^2}{2\pi P_1'(\zeta_0)}.$$

Следовательно, имеем $\Gamma_1 = 0$, $\Pi_1 = 1$ и $\Gamma_2 = -1$, $\Pi_2 = 0$. Знаки потока $\Pi_1 > 0$ и циркуляции $\Gamma_2 < 0$ соответсвуют выбранным направлениям ортов нормали и касательной к контуру C: орт нормали направлен во внутрь контура C, касательной — в направлении обхода этого контура против часовой стрелки.

Таким образом решения $F_k(\zeta,\zeta_0) = \Phi_k(\zeta,\zeta_0) + i\Psi_k(\zeta,\zeta_0)/P'(\zeta)$ и $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0) = V_{k\xi}(\zeta,\zeta_0) - iV_{k\eta}(\zeta,\zeta_0)$ $(k=1,2)$ — комплексные потенциалы и комплексные сопряжённые скорости течения к стоку (при $k=1$) суммарной мощности $\Pi_1 = -1$ (для источника принимаем $\Pi_1 > 0$) и от вихря (при $k=2$) с отрицательной циркуляцией или интенсивностью $\Gamma_2 = -1$ (у вихря с положительной против часовой стрелки циркуляцией $\Gamma_2 > 0$). $\Phi_k(\zeta,\zeta_0), \Psi_k(\zeta,\zeta_0$ и $V_{k\xi}(\zeta,\zeta_0), V_{k\eta}(\zeta,\zeta_0)$ $(k=1,2)$ — обобщённые потенциалы скорости, функции тока и составляющие по координатным осям $O\xi$

и $O\eta$ скорости стока (при $k=1$) и вихря (при $k=2$). Сток (или вихрь) располагается в точке ζ_0. Назовём $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ *нормированными* комплексными потенциалами стока и вихря. Им отвечают *нормированные* сопряжённые скорости стока $\overline{V}_1(\zeta,\zeta_0)$ и вихря $\bar{V}_2(\zeta,\zeta_0)$.

Выясним теперь гидродинамический смысл главных решений $w_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ уравнения (2.3.22). $w_1(\zeta,\zeta_0)$ и $w_2(\zeta,\zeta_0)$ — комплексные потенциалы двух течений, которые связаны с комплексными потенциалами стока $F_1(\zeta,\zeta_0)$ с $\Pi=-1$ и вихря $F_2(\zeta,\zeta_0)$ с $\Gamma=-1$ равенствами (3.1.11). Эти равенства запишем в виде пределов разностных отношений

$$w_1(\zeta,\zeta_0) = -\lim_{\Delta l_p\to 0}\frac{F_1(\zeta,\zeta_0+\Delta l_p)-F_1(\zeta,\zeta_0)}{\Delta l_p} =$$

$$= -\frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\lim_{\Delta\eta_0\to 0}\frac{F_2(\zeta,\zeta_0+\Delta\eta_0)-F_2(\zeta,\zeta_0)}{\Delta\eta_0},$$

$$w_2(\zeta,\zeta_0) = -\lim_{\Delta n_p\to 0}\frac{F_1(\zeta,\zeta_0+\Delta n_p)-F_1(\zeta,\zeta_0)}{\Delta n_p} =$$

$$= \frac{1}{|P'(\zeta_0)|}\lim_{\Delta\xi_0\to 0}\frac{F_2(\zeta,\zeta_0+\Delta\xi_0)-F_2(\zeta,\zeta_0)}{\Delta\xi_0}.$$

Отсюда видно, что $w_k(\zeta,\zeta_0) = \varphi_k(\zeta,\zeta_0)+i\psi_k(\zeta,\zeta_0)/P'(\zeta)$, $k=1,2$ — комплексные потенциалы ($\varphi_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\psi_k(\zeta,\zeta_0)$ — обобщённые потенциалы и функции тока) диполей с моментами, направленными соответственно вдоль оси $O\xi$ (при $k=1$) и вдоль оси $O\eta$ (при $k=2$). Диполь с $w_1(\zeta,\zeta_0)$ получается взаимным сближением источника и стока вдоль орта $\vec{l}_p$ или вихрей с противоположными по знаку циркуляциями вдоль оси $O\eta$. Диполь с $w_2(\zeta,\zeta_0)$ получается взаимным сближением источника и стока вдоль орта $\vec{n}_p$ или вихрей с противоположными знаками вдоль оси $O\xi$ [1]. Модули моментов этих диполей равны единице. Поэтому $w_1(\zeta,\zeta_0)$ и $w_2(\zeta,\zeta_0)$ назовём *нормированными* комплексными потенциалами диполей с моментами вдоль осей $O\xi$ и $O\eta$. Каждый из этих диполей располагается в точке ζ_0.

Используя гомеоморфизм $\zeta=\zeta(z)$ уравнения Бельтрами (2.3.10), фундаментальные $F_k(\zeta,\zeta_0)$ и главные $w_k(\zeta,\zeta_0)$, $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$ решения можно записать в физической плоскости z: $F_k[(\zeta(z),\zeta_0(z)] = F_k(z,z_0)$ и

[1] Идея взаимного сближения сингулярностей одного порядка (логарифмического типа или полюсов) позволила найти в § 3.3 класс комплексных потенциалов течений в виде мультиполей произвольного порядка.

$w_k[(\zeta(z),\zeta_0(z)]=w_k(z,z_0)$ $(k=1,2)$. Причём эти решения в точке z_0 плоскости z имеют, по-прежнему, тот же тип (порядок) сингулярности и гидродинамический смысл, а их вид определяется проводимостью слоя $P=(P_{ij})$.

§ 3.2. Фундаментальные решения для классов слоёв

Фундаментальные решения в случае сопряжённых слоёв

Пусть известны фундаментальные решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ в случае слоя проводимости $P'(\zeta)$. Используя принцип обратимости (2.5.2), находим в случае сопряжённого слоя проводимости $P'^*(\zeta)=1/P'(\zeta)$ фундаментальные решения $F_k^*(\zeta,\zeta_0)=\Phi_k^*(\zeta,\zeta_0)+i\Psi_k^*(\zeta,\zeta_0)/P'^*(\zeta)$, $k=1,2$ по формулам

$$F_1^*(\zeta,\zeta_0)=iP'(\zeta)F_2(\zeta,\zeta_0)\quad(\Phi_1^*(\zeta,\zeta_0)=-\Psi_2(\zeta,\zeta_0),\quad \Psi_1^*(\zeta,\zeta_0)=\Phi_2(\zeta,\zeta_0)),$$
$$F_2^*(\zeta,\zeta_0)=-iP'(\zeta)F_1(\zeta,\zeta_0)\quad(\Phi_2^*(\zeta,\zeta_0)=\Psi_1(\zeta,\zeta_0),\quad \Psi_2^*(\zeta,\zeta_0)=-\Phi_1(\zeta,\zeta_0)).\tag{3.2.1}$$

Формулы (3.2.1) позволяют находить фундаментальные решения в случае класса взаимно сопряжённых слоёв $P'P'^*=1$. Причём эти решения обладают в точке ζ_0 сингулярностями одного и того же (логарифмического) типа.

Тогда на основании $F_k^*(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ нетрудно найти согласно (3.1.11) и (3.1.17) в случае сопряжённого слоя главные решения $w_k^*(\zeta,\zeta_0)=\varphi_k^*(\zeta,\zeta_0)+ i\psi_k^*(\zeta,\zeta_0)/P'^*(\zeta)$ и $\overline{V}_k^*(\zeta,\zeta_0)=V_{k\xi}^*(\zeta,\zeta_0)-iV_{k\eta}^*(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ по формулам[1]

$$w_1^*(\zeta,\zeta_0)=-\frac{\partial F_1^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p}=-\frac{1}{|P'^*(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0},$$
$$w_2^*(\zeta,\zeta_0)=-\frac{\partial F_1^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}=\frac{1}{|P'^*(\zeta_0)|}\frac{\partial F_2^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0},$$

и

$$\bar{V}_k^*(\zeta,\zeta_0)=\frac{2P'^*(\zeta)}{P'^*(\zeta)+\bar{P}'^*(\zeta)}\frac{d_\Sigma F_k^*(\zeta,\zeta_0)}{d\zeta},\quad k=1,2.$$

[1] Решения $w_k^*(\zeta,\zeta_0)$ и $\bar{V}_k^*(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ можно также найти используя формулы (2.5.2) и (2.5.3), если известны решения $w_k(\zeta,\zeta_0)$ и $\overline{V}_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$.

Решения $w_k^*(\zeta,\zeta_0)$ и $\overline{V}_k^*(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ имеют в точке ζ_0 простые полюсы.

Фундаментальные решения в случае анизотропно-однородного слоя

На основе указанных выше определений фундаментальных решений запишем их в случае анизотропного однородного слоя, когда его толщина H и проницаемость $K=(K_{i,j})$ — постоянные. В этом случае проводимость слоя $P'=\sqrt{D_s}-i\sqrt{D_a}$ — комплексная постоянная (определители $D_s\equiv D(P_s)=H^2D(K_s)$, $D_a\equiv D(P_a)=H^2D(K_a)$, $D\equiv D(P)=$ $=H^2D(K)$ — вещественные постоянные).

В соответствии с асимптотиками (3.1.4) имеем фундаментальные решения уравнения (3.1.3) при $A=0$, которые представляют собой аналитические функции

$$F_1(\zeta,\zeta_0)=\frac{1}{2\pi P'}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0}, \tag{3.2.2}$$

$$F_2(\zeta,\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\zeta-\zeta_0}. \tag{3.2.3}$$

Решения (3.2.2) и (3.2.3) удовлетворяют по переменной ζ_0 условиям сопряжения (3.1.15″). Из этих решений, используя формулы (3.1.2), находим функции

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|},\quad \Psi_1(\zeta,\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\arg(\zeta-\zeta_0)\right], \tag{3.2.4}$$

$$\Phi_2(\zeta,\zeta_0)=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}+\arg(\zeta-\zeta_0)\right],\ \Psi_2(\zeta,\zeta_0)=-\frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}. \tag{3.2.5}$$

Как было выяснено выше, $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ — нормированные комплексные потенциалы стока и вихря. Из выражений (3.2.4), (3.2.5) следуют в плоскости ζ уравнения линий равного потенциала $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ и линий тока $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ $(k=1,2)$ этих течений. В случае стока линии $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ — концентрические окружности радиуса $R=$ $=|\ \zeta-\zeta_0\ |=\mathrm{const}$ с центром в точке ζ_0, а линии $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ — логарифмические спирали: $R=C\exp(-\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\vartheta)$, $(v=\arg(\zeta-\zeta_0)$, C — произвольная постоянная) с асимптотической точкой ζ_0. В случае вихря линии $\Phi_2(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ — логарифмические спирали: $R=C\exp(-\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\vartheta)$, а линии $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)=\mathrm{const}$ — окружности радиуса $R=\mid\zeta-\zeta_0\mid=\mathrm{const}$ [1].

При переходе на плоскость $z=x+iy$ в соответствии с аффинным преобразованием (2.4.13) имеем: $\zeta_0=z_0+\mu\bar{z}_0$, $z_0=x_0+iy_0$. Тогда фундаментальные решения (3.2.2) и (3.2.3) в этой плоскости принимают вид

$$F_1(z,z_0)=\frac{1}{2\pi P'}\ln\frac{1}{z-z_0+\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}, \tag{3.2.6}$$

$$F_2(z,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{z-z_0+\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}. \tag{3.2.7}$$

Видно, что фундаментальные решения (3.2.6) и (3.2.7) имеют в точке z_0 особенности логарифмического типа.

Из решений (3.2.6), (3.2.7) или из ((3.2.4), (3.2.5) с учётом преобразования (2.4.13)) имеем функции $\Phi_k(\zeta,\zeta_0)$, $\Psi_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ в виде

$$\Phi_1(z,z_0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{R},\quad \Psi_1(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{R}-\vartheta\right),$$

$$\Phi_2(z,z_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{R}+\vartheta\right),\quad \Psi_2(z,z_0)=-\frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{R},$$

где

$$R=\left\{[(1+a)^2+b^2](x-x_0)^2+4b(x-x_0)(y-y_0)+[(1-a)^2+b^2](y-y_0)^2\right\}^{1/2},$$

$$\vartheta=\operatorname{arctg}\frac{b(x-x_0)+(1-a)(y-y_0)}{(1+a)(x-x_0)+b(y-y_0)},$$

$$a=\frac{K_{22}-K_{11}}{K_{22}+K_{11}+2\sqrt{D_s}},\quad b=-\frac{K_{12}+K_{21}}{K_{22}+K_{11}+2\sqrt{D_s}}.$$

Отсюда видно, что линии $\Phi_1=\mathrm{const}$ и $\Psi_2=\mathrm{const}$, представляющие собой в плоскости ζ окружности радиуса $R=\mathrm{const}$, принимают в плоскости z вид эллипсов, уравнения которых

$$[(1+a)^2+b^2](x-x_0)^2+4b(x-x_0)(y-y_0)+[(1-a)^2+b^2](y-y_0)^2=\mathrm{const}.$$

Линии $\Psi_1=\mathrm{const}$ и $\Phi_2=\mathrm{const}$, имеющие в плоскости ζ вид логарифмических спиралей, преобразуются в некоторые кривые плоскости z.

[1] В случае ортотропной пористой среды ($K_{12}=K_{21}$, $D_a=0$) логарифмические спирали следует заменить на лучи $v=\mathrm{const}$, исходящие из точки ζ_0.

Приведённые фундаментальные решения в случае ортотропного слоя

Для отыскания фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ в случае ортотропного слоя введём аналогично первому равенству (2.3.39) функции

$$f_k(\zeta,\zeta_0)=u_k(\zeta,\zeta_0)+iv_k(\zeta,\zeta_0), k=1,2, \tag{3.2.8}$$

которые назовем *приведёнными* комплексными фундаментальными решениями. Функции $F_k(\zeta,\zeta_0)$ и $f_k(\zeta,\zeta_0)$ взаимосвязаны в соответствии с (2.3.40) равенствами

$$F_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{f_k(\zeta,\zeta_0)}{\sqrt{P'(\zeta)}},\quad k=1,2 \tag{3.2.9}$$

$$\left(\Phi_k(\zeta,\zeta_0)=\frac{u_k(\zeta,\zeta_0)}{\sqrt{P'(\zeta)}},\quad \Psi_k(\zeta,\zeta_0)=\sqrt{P'(\zeta)}v_k(\zeta,\zeta_0)\right),$$

где $P'=\sqrt{D(P)}$, $D(P)=P_{11}P_{22}-P_{12}^2=H^2(K_{11}K_{22}-K_{12}^2)$.

Решения $f_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ удовлетворяют по переменной ζ уравнению вида (2.3.42), то есть

$$\frac{\partial f_k(\zeta,\zeta_0)}{\partial\bar\zeta}-A(\zeta)\bar f_k(\zeta,\zeta_0)=0\quad\left(A(\zeta)=\frac{\partial\ln\sqrt{P'(\zeta)}}{\partial\bar\zeta}\right).$$

Действительные $u_k(\zeta,\zeta_0)$ и мнимые $v_k(\zeta,\zeta_0)$ части решений $f_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ в соответствии с (2.3.46) и (2.3.47) по координатам точки (ξ,η) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u_k-\Lambda_1u_k=0\quad\left(\Lambda_1=\frac{\Delta\sqrt{P'}}{\sqrt{P'}}\right),\quad k=1,2, \tag{3.2.10}$$

$$\Delta v_k-\Lambda_2v_k=0\quad\left(\Lambda_2=\sqrt{P'}\Delta(1/\sqrt{P'})\right),\quad k=1,2. \tag{3.2.11}$$

Таким образом, нахождение фундаментальных решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=$ $=1,2$ в случае ортотропного слоя сводится к отысканию действительных $u_k(\zeta,\zeta_0)$ и мнимых $v_k(\zeta,\zeta_0)$ частей приведённых фундаментальных решений $f_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$, которые удовлетворяют уравнениям (3.2.10) и (3.2.11). Структура уравнения (3.2.10) (и (3.2.11)) такова, что его решения

$u_k(\zeta, \zeta_0)$ (и $v_k(\zeta, \zeta_0)$), $k = 1, 2$ можно отыскать сразу для классов слоёв с проводимостями $P'(\zeta)$, для которых одинаков коэффициент Λ_1 (и Λ_2).

Далее будут получены приведённые фундаментальные решения $u_1(\zeta, \zeta_0)$ и $v_2(\zeta, \zeta_0)$, которым соответствуют согласно (3.2.9) фундаментальные решения $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta, \zeta_0)$. Сопряжённые решениям $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta, \zeta_0)$ функции $\Psi_1(\zeta, \zeta_0)$ и $\Phi_2(\zeta, \zeta_0)$ определяются в конечном виде (3.1.8). Тогда можно найти фундаментальные решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$, а значит на основании гомеморфизма $\zeta = \zeta(z)$ ($\zeta_0 = \zeta(z_0)$) получим искомые решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$ в плоскости z.

Фундаментальные решения в случае гармонических слоёв

Пусть проводимости ортотропных слоёв таковы, что их можно моделировать квадратом гармонической функции, то есть $\Delta\sqrt{P'(\zeta)} = 0$. Слои с такой проводимостью назовём *гармоническими* слоями. Тогда в уравнении (3.2.10) коэффициент $\Lambda_1 = 0$ и оно принимает вид уравнения Лапласа $\Delta u_k = 0$, $k = 1, 2$. Фундаментальным решением этого уравнения при $k = 1$ является функция $\ln(1/R)$, $R = |\zeta - \zeta_0|$ и это решение запишем в виде

$$u_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P'(\zeta_0)}} \ln\frac{1}{R}.$$

Поэтому согласно (3.2.9) имеем действительную часть $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ фундаментального решения $F_1(\zeta, \zeta_0)$ (или фундаментальное решение уравнения (3.1.6)):

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P'(\zeta)P'(\zeta_0)}} \ln\frac{1}{R}. \tag{3.2.12}$$

Решение (3.2.12) представляет собой функцию Грина в круге радиуса $R = 1$ с центром в точке ζ_0 и для него $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)|_{R=1} = 0$. Решение симметрично ($\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \Phi_1(\zeta_0, \zeta)$) в этом круге. При этом сингулярная линия $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$ лежит вне этого круга.

Когда область D' плоскости ζ ограничена сингулярной линией $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$, то можно потребовать, чтобы $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ удовлетворяло условиям (3.1.9) и представить его в виде

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P'(\zeta)P'(\zeta_0)}} \Big[\ln\frac{1}{R} + g(\zeta, \zeta_0)\Big]. \tag{3.2.13}$$

Здесь $g(\zeta, \zeta_0)$ — гармоническая симметричная функция $(g(\zeta, \zeta_0) = g(\zeta_0, \zeta))$, которая определяется видом проводимости $P'(\zeta)$ слоя и соответствующими ей условиями (3.1.9) на σ_0'. Функция (3.2.13) симметричная в области D'.

В качестве примера рассмотрим слой проводимости $P' = \eta^2$. В этом случае слой постоянной толщины $(H = 1)$ и переменной проницаемости $K_{ij} = \eta^2 k_{ij}/k_0$ (k_0 и k_{ij} — постоянные, $k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$) либо переменной толщины $H = \eta^2$ и постоянной проницаемости $K_{ij} = k_{ij}/k_0$. Этот слой имеет сингулярную линию σ_{02}' — прямую $\eta = 0$, на которой $P' = 0$. В этом случае решение (3.2.13) принимает вид

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\eta\eta_0} \ln \frac{R_*}{R}, \tag{3.2.14}$$

где

$$R = |\zeta - \zeta_0| = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2},\ R_* = |\zeta - \bar{\zeta_0}| = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2}.$$

Решение (3.2.14) удовлетворяет согласно (3.1.9) на сингулярной линии $\sigma_{02}' : \eta = 0$ условию $\lim\limits_{\eta \to 0} \left[\eta^2 \frac{\partial \Phi_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta}\right] = 0$.

В случае сопряжённого слоя проводимости $P'^* = 1/P'$ на основании принципа обратимости (3.2.1) и решения (3.2.12) находим

$$\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{P'^*(\zeta)P'^*(\zeta_0)}} \ln \frac{1}{R} \quad (R = |\zeta - \zeta_0|). \tag{3.2.15}$$

Учитывая, что $1/\sqrt{P'}$ — гармоническая функция ($\Delta(1/\sqrt{P'}) = 0$), на основании уравнения (3.2.11) при $k = 2$, $\Lambda_2 = 0$ и равенства (3.2.9) убеждаемся, что $\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0)$ — фундаментальное решение уравнения (3.1.7).

Функция (3.2.15) является функцией Грина в круге радиуса $R = 1$ с центром в точке ζ_0, для которой $\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0)|_{R=1} = 0$. Сингулярная линия $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$ лежит вне этого круга. Функция $\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0)$ симметрична $(\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0) = \Psi_2^*(\zeta_0, \zeta))$ в этом круге.

Если область D' плоскости ζ ограничена сингулярной линией $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$, то можно потребовать, чтобы решение $\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0)$ удовлетворяло условиям (3.1.9′) на σ_0' и представить его в соответствии с принципом обратимости (3.2.1) и решением (3.2.13) в виде

$$\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{P'^*(\zeta)P'^*(\zeta_0)}} \ln \left[\frac{1}{R} + g^*(\zeta, \zeta_0)\right]. \tag{3.2.16}$$

Здесь $g^*(\zeta,\zeta_0)$ — гармоническая симметричная ($g^*(\zeta,\zeta_0) = g(\zeta_0,\zeta)$) в области D' функция определяется проводимостью $P^*(\zeta)$ слоя. Функция (3.2.16) симметричная в области D'.

Как пример, рассмотрим слой проводимости $P'^*(\zeta) = \eta^{-2}$. Он является сопряжённым слою проводимости $P'(\zeta) = \eta^2$. Слой проводимости $P'^*(\zeta) = \eta^{-2}$ имеет сингулярную линию $\sigma'_0 = \sigma'_{01}$ — прямую $\eta = 0$, на которой $P'^*(\zeta) = \infty$ (проницаемость слоя $K'^* = (K'^*_{ij}) = \infty$, а его толщина H^* — конечна). В этом случае функция (3.2.16) принимает вид

$$\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\eta\eta_0}{2\pi}\ln\frac{R_*}{R}, \tag{3.2.17}$$

где

$$R = |\zeta-\zeta_0| = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}, \quad R_* = |\zeta-\bar{\zeta_0}| = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2}.$$

Функция (3.2.17) является фундаментальным решением уравнения (3.1.7) для слоя проводимости $P'^*(\zeta) = \eta^{-2}$. Она удовлетворяет согласно (3.1.9′) на сингулярной линии σ'_{01}: $\eta = 0$ условию вида $\lim\limits_{\eta\to 0}\left[\eta^2\frac{\partial\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}\right] = 0$.

Фундаментальные решения в случае метагармонических слоёв

Пусть теперь $\sqrt{P'(\zeta)}$ метагармоническая функция, то есть удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{P'} - \mu^2\sqrt{P'} = 0 \quad (\mu^2 = \mathrm{const} > 0).$$

Ортотропные слои проводимости P', для которых $\sqrt{P'}$ удовлетворяет этому уравнению, назовем *метагармоническими* слоями. Если проводимость слоя зависит только от одной переменной, например, η, то общим решением этого уравнения будет

$$P' = (ae^{\mu\eta} + be^{-\mu\eta})^2, \tag{3.2.18}$$

где a, b — произвольные постоянные. Если a и b одного знака (положительные или отрицательные), то проводимость P' конечна во всех точках (ξ,η) за исключением бесконечно удаленной точки. Когда a и b противоположного знака, то имеется сингулярная линия σ'_{02} — прямая $y = d$

($d = (2\mu)^{-1} \ln(-b/a)$), на которой проводимость $P' = 0$. Частными случаями проводимости (3.2.18) являются: $e^{2\mu\eta}, e^{-2\mu\eta}, \mathrm{ch}^2\,\mu\eta, \mathrm{sh}^2\,\mu\eta$. Заметим, что слой проводимости $P' = e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ (α, β — постоянные, $\alpha^2 + \beta^2 = 4\mu^2$) преобразованием поворота осей координат на угол φ ($\mathrm{tg}\,\varphi = -\alpha/\beta$) сводится в новых координатах ξ', η' к слою проводимости $P' = e^{2\mu\eta'}$, который является частным случаем проводимости (3.2.18).

Проводимостью (3.2.18) обладают слои постоянной толщины ($H = 1$) и проницаемости $K'_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_0}(ae^{\mu\eta} + be^{-\mu\eta})^2$ ($k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$, k_{ij} — постоянные, $i, j = 1, 2$) или переменной толщины $H = (ae^{\mu\eta} + be^{-\mu\eta})^2$ и постоянной проницаемости $K'_{ij} = k_{i,j}/k_0$, $i, j = 1, 2$.

Для метагармонических слоев в уравнении (3.2.10) коэффициент $\Lambda_1 = \mu^2$. Решением этого уравнения при $k = 1$ является, как известно [122], функция Макдональда $K_0(\mu R)$, ($R = |\zeta - \zeta_0|$). Полагая $\mu R = \rho$, эту функцию согласно формул (7.2.5(38)) и (7.2.2(12)) из [17] запишем

$$K_0(\rho) = -I_0(\rho) \ln \frac{\rho}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m} \frac{\psi(m+1)}{(m!)^2},$$

где $I_0(\rho) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}$ — функция Бесселя нулевого порядка, $\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$, γ — постоянная Эйлера-Маскерони. Видно, что в точке $\zeta = \zeta_0$ ($\rho = 0$) функция $K_0(\rho)$ имеет особенность логарифмического типа. Поэтому в качестве приведённого фундаментального решения уравнения (3.2.10) выберем

$$u_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi\sqrt{P'(\zeta_0)}}.$$

Тогда согласно (3.2.9) имеем фундаментальное решение уравнения (3.1.6):

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi\sqrt{P'(\zeta)P'(\zeta_0)}}. \qquad (3.2.19)$$

Решение (3.2.19) симметрично: $\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \Phi_1(\zeta_0, \zeta)$. Если область D' ограничена сингулярной линией $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$, то можно потребовать, чтобы решение $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ удовлетворяло условиям (3.1.9) и его запишем

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R) + h(\zeta, \zeta_0)}{2\pi\sqrt{P(\zeta)P(\zeta_0)}}. \qquad (3.2.20)$$

Здесь $h(\zeta, \zeta_0)$ — метагармоническая функция ζ, то есть удовлетворяющая уравнению (3.2.10) при $k = 1$, $\Lambda_1 = \mu^2$. Она симметрична: $h(\zeta, \zeta_0) = h(\zeta_0, \zeta)$. Функция (3.2.20) симметричная в области D'.

В качестве примера найдём фундаментальные решения $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ в слоях проводимости (3.2.18). Когда константы a и b одного знака, то согласно (3.2.19) имеем

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi(ae^{\mu\eta} + be^{-\mu\eta})(ae^{\mu\eta_0} + be^{-\mu\eta_0})}. \tag{3.2.21}$$

Если a и b противоположного знака, то полагаем $a = -b = 1/2$ имеем слой проводимости $P' = \operatorname{sh}^2 \mu\eta$. Этот слой обладает сингулярной линией σ'_{02}: $\eta = 0$, на которой $P' = 0$. Для такого слоя согласно (3.2.20) находим

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R) - K_0(\mu R_*)}{2\pi \operatorname{sh}\mu\eta \operatorname{sh}\mu\eta_0}, \tag{3.2.22}$$

где $R_* = \mid \zeta - \bar{\zeta}_0 \mid = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2}$. Решение (3.2.22) удовлетворяет согласно (3.1.9) на сингулярной линии σ'_{02}: $\eta = 0$ условию

$$\lim_{\eta \to 0} \left[\operatorname{sh}^2 \mu\eta \frac{\partial \Phi_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} \right] = 0.$$

В частности ($a = 1$, $b = 0$), для слоя проводимости $P' = e^{2\mu y}$ коэффициенты Λ_1 и Λ_2 уравнений (3.2.10) и (3.2.11) равны: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mu^2$. В этом случае в качестве приведённых фундаментальных решений этих уравнений выберем

$$u_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi e^{\mu\eta_0}}, \quad v_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{e^{\mu\eta_0} K_0(\mu R)}{2\pi}.$$

Тогда согласно формуле (3.2.9) имеем фундаментальные решения уравнений (3.1.6) и (3.1.7):

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{K_0(\mu R)}{2\pi e^{\mu(\eta+\eta_0)}}, \quad \Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{e^{\mu(\eta+\eta_0)} K_0(\mu R)}{2\pi}.$$

В сопряженом слое проводимости $P'^*(\zeta) = 1/P'(\zeta)$ на основании принципа обратимости (3.2.1) и решений (3.2.19) и (3.2.20) имеем фундаментальные решения уравнения (3.1.7):

$$\Psi_2^*(\zeta, \zeta_0) = -\frac{K_0(\mu R)}{2\pi\sqrt{P'^*(\zeta) P'^*(\zeta_0)}}, \tag{3.2.23}$$

$$\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0) = -\frac{K_0(\mu R) + h^*(\zeta,\zeta_0)}{2\pi\sqrt{P'^*(\zeta)P'^*(\zeta_0)}}, \tag{3.2.24}$$

где $h^*(\zeta,\zeta_0)$ — метагармоническая симметричная ($h^*(\zeta,\zeta_0) = h^*(\zeta_0,\zeta)$) в области D' функция определяется проводимостью $P'^*(\zeta)$. Функции (3.2.23) и (3.2.24) — симметричные в области D'.

В случае слоя, сопряжённого (3.2.18), $P'^*(\zeta) = (ae^{-\mu\eta} + be^{-\mu\eta})^{-2}$, когда a и b разного знака, из (3.2.23) имеем

$$\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0) = -\frac{(ae^{\mu\eta} + be^{-\mu\eta})(ae^{\mu\eta_0} + be^{-\mu\eta_0})K_0(\mu R)}{2\pi}.$$

Для слоя проводимости $P'^*(\zeta) = 1/\operatorname{sh}^2\mu\eta$, имеющего сингулярную линию $\sigma'_{01}: \ \eta = 0$, на которой $P'^*(\zeta) = \infty$, на основании (3.2.24) находим решение

$$\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\operatorname{sh}\mu\eta\operatorname{sh}\mu\eta_0\left[K_0(\mu R) - K_0(\mu R_*)\right]}{2\pi}.$$

Это решение согласно (3.1.9′) удовлетворяет на $\sigma'_{01}: \ \eta = 0$ условию $\lim\limits_{\eta\to 0}\left[\operatorname{sh}^2\mu\eta\frac{\partial\Psi_2^*(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}\right] = 0$.

Фундаментальные решения в случае степенных слоёв

Ортотропные слои, проводимости которых изменяются по степенному закону

$$P' = \eta^s \quad (s = \mathrm{const}),$$

назовём *степенными* слоями. Для этих слоев прямая $\eta = 0$ является сингулярной линией $\sigma'_{01}(P' = \infty)$ при $s < 0$ или $\sigma'_{02}(P' = 0)$ при $s > 0$.

Для степенных слоёв в уравнениях (3.2.10) и (3.2.11) коэффициенты $\Lambda_1 = \frac{s}{2}(\frac{s}{2} - 1)\eta^{-2}$ и $\Lambda_2 = \frac{s}{2}(\frac{s}{2} + 1)\eta^{-2}$ и эти уравнения принимают вид

$$\Delta u_k - \frac{\frac{s}{2}(\frac{s}{2} - 1)}{\eta^2}u_k = 0, \quad k = 1, 2, \tag{3.2.25}$$

$$\Delta v_k - \frac{\frac{s}{2}(\frac{s}{2} + 1)}{\eta^2}v_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{3.2.26}$$

Уравнения (3.2.25) и (3.2.26) идентичны. Они переходят друг в друга при замене s на $-s$. Поэтому достаточно найти, например, приведённое фундаментальное решение $u_1(\zeta, \zeta_0)$ уравнения (3.2.25). Тогда приведённое фундаментальное решение $v_2(\zeta, \zeta_0)$ уравнения (3.2.26) получим путём замены в $u_1(\zeta, \zeta_0)$ s на $-s$.

Рассмотрим $u_k(\zeta, \zeta_0)$ как сложную функцию $u_k(\zeta, \zeta_0) = u_k[\omega(\zeta, \zeta_0)]$, где $\omega(\zeta, \zeta_0)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по координатам точки ζ функция (ζ_0 — параметр). Учитывая равенства

$$\nabla u_k = \frac{du_k}{d\omega}\nabla\omega, \quad \Delta u_k = \operatorname{div}\nabla u_k = \frac{d^2u_k}{d\omega^2}\nabla\omega\cdot\nabla\omega + \frac{du_k}{d\omega}\Delta\omega, \quad k = 1, 2,$$

уравнения (3.2.25) запишем

$$\frac{d^2u_k}{d\omega^2}\nabla\omega\cdot\nabla\omega + \frac{du_k}{d\omega}\Delta\omega - \frac{s}{2}(\frac{s}{2} - 1)\eta^{-2}u_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{3.2.27}$$

Выберем ω в виде

$$\omega = 1 + \frac{R^2}{2\eta\eta_0} \quad (\omega \in [1, \infty)),$$

где $R =\mid \zeta - \zeta_0 \mid$ — модуль вектора $\vec{R} = \vec{\zeta_0\zeta} = (\xi - \xi_0)\vec{\imath} + (\eta - \eta_0)\vec{\jmath}$. Находим

$$\nabla\omega = \frac{1}{2\eta_0}(\frac{2\vec{R}}{\eta} - \frac{R^2}{\eta^2}\vec{\jmath}), \quad \nabla\omega\cdot\nabla\omega = (\omega^2 - 1)\eta^{-2}, \quad \Delta\omega = \operatorname{div}\nabla\omega = 2\omega\eta^{-2}.$$

Тогда из (3.2.27) имеем уравнения

$$(1 - \omega^2)\frac{d^2u_k}{d\omega^2} - 2\omega\frac{du_k}{d\omega} + \frac{s}{2}(\frac{s}{2} - 1)u_k = 0, \quad k = 1, 2, \tag{3.2.28}$$

которые аналогичны дифференциальному уравнению Лежандра [16].

Частными решениями уравнений (3.2.28) являются функции Лежандра первого $P_\nu(\omega)$ и второго $Q_\nu(\omega)$ родов степени ν $(\nu = \frac{s}{2} - 1)$ аргумента ω $(\omega = 1 + \frac{R^2}{2\eta\eta_0})$.

Согласно формуле (3.6.1(11)) при $m = 0$ [16] имеем

$$Q_\nu(\omega) = \frac{P_\nu(\omega)}{2}\left[\ln\frac{\omega+1}{\omega-1} - 2\gamma - 2\psi(\nu+1)\right] - \tag{3.2.29}$$

$$-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\Gamma(-\nu+l)\Gamma(\nu+l+1)\frac{\sigma(l)}{(l!)^2}\left(\frac{1-\omega}{2}\right)^l,$$

где $\sigma(l) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{l}$, γ — постоянная Эйлера-Маскерони; $\psi(\nu+1)$ — логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(\nu+1)$, функция $\psi(\nu+1)$ — мероморфная и имеет простые полюсы в точках $\nu+1 = 0, -1, -2, \ldots$. В точке $\zeta = \zeta_0$ ($R = 0$, следовательно, $\omega = 1$) функция $Q_\nu(\omega)$ обладает особенностью логарифмического типа. Действительно, учитывая $P_\nu(1) = 1$, имеем в малой окрестности точки ζ_0:

$$Q_\nu(\omega) = -\frac{1}{2}\ln\frac{\omega-1}{2} - \gamma - \psi(\nu+1), \quad \nu \neq -1, -2, -3, \ldots$$

или

$$Q_\nu(\omega) = \ln\frac{1}{R} - \gamma - \psi(\nu+1), \quad \nu \neq -1, -2, -3, \ldots \quad . \tag{3.2.30}$$

Поэтому в качестве приведённого фундаментального решения $u_1(\zeta, \zeta_0)$ уравнения (3.2.28) при $k = 1$ выберем

$$u_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi\eta_0^{s/2}}. \tag{3.2.31}$$

Тогда на основании формул (3.2.9) и (3.2.31) имеем фундаментальное решение

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{Q_{\frac{s}{2}-1}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^{s/2}} \quad (s > 0). \tag{3.2.32}$$

Воспользуемся математической идентичностью уравнений (3.2.25) и (3.2.26). Заменяя в решении (3.2.31) s на $-s$ и учитывая равенство [1] $Q_{-(\frac{s}{2}+1)}(\omega) = Q_{\frac{s}{2}}(\omega)$, имеем приведённое фундаментальное решение $v_2(\zeta, \zeta_0)$ уравнения (3.2.26) при $k = 2$:

$$v_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\eta_0^{s/2} Q_{\frac{s}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad (s > 0).$$

Следовательно, согласно формуле (3.2.9) находим фундаментальное решение

$$\Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{(\eta\eta_0)^{s/2} Q_{\frac{s}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad (s > 0). \tag{3.2.33}$$

При $\eta \to 0$ имеем $\omega \to \frac{R^2}{2\eta\eta_0} \to \infty$. Тогда на основании формулы (3.9.2(21)) [16] находим для $Q_\nu(\omega)$ асимптотику

$$Q_\nu(\omega) \sim \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\left(\frac{\eta\eta_0}{R^2}\right)^{\nu+1} \quad \text{при} \quad \eta \to 0. \tag{3.2.34}$$

Учитывая асимптотику (3.2.34), убеждаемся, что решения (3.2.32) и (3.2.33) удовлетворяют согласно (3.1.9) и (3.1.9′) на сингулярной линии $\sigma'_{02} : \eta = 0$ условиям

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\eta^s \frac{\partial\Phi_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}\right] = 0, \quad \lim_{\eta\to 0}\Psi_2(\zeta,\zeta_0) = 0.$$

Заменяя в решениях (3.2.32) и (3.2.33) s на $-s$ и учитывая равенство $Q_{-(\frac{|s|}{2}+1)}(\omega) = Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)$, запишем фундаментальные решения в случае отрицательных значений показателя s:

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{(\eta\eta_0)^{\frac{|s|}{2}} Q_{\frac{|s|}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad (s < 0), \tag{3.2.32′}$$

$$\Psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{Q_{\frac{|s|}{2}-1}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^{|s|/2}} \quad (s < 0). \tag{3.2.33′}$$

Решения (3.2.32′) и (3.2.33′) можно получить также на основании формулы (3.2.1) из решений (3.2.32) и (3.2.33), рассматривая слой проводимости $P'^*(\zeta) = \eta^{-|s|}$ при $s < 0$, который является сопряжённым слою проводимости $P' = \eta^s$ при $s > 0$.

Учитывая асимптотику (3.2.34), убеждаемся, что решения (3.2.32′) и (3.2.33′) удовлетворяют согласно (3.1.9) и (3.1.9′) на сингулярной линии $\sigma'_{01}:\ \eta = 0$ условиям

$$\lim_{\eta\to 0}\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = 0, \quad \lim_{\eta\to 0}\left[\eta^{|s|}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial\eta}\right] = 0.$$

Фундаментальные решения (3.2.32), (3.2.33) и (3.2.32′), (3.2.33′) обладают свойством симметрии: $\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \Phi_1(\zeta_0,\zeta)$, $\Psi_1(\zeta,\zeta_0) = \Psi_1(\zeta_0,\zeta)$.

Рассмотрим предельный случай фундаментальных решений $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$, когда их особая точка ζ_0 располагается на сингулярной линии $\sigma'_0:\ \eta = 0$. Учитывая асимптотику (3.2.34), которая имеет место также при $\eta_0 \to 0$ ($\omega \to 0$, η — конечно) в силу симметрии $Q_\nu(\omega)$ относительно координат точек ξ,η и ξ_0,η_0 согласно равенства (3.2.29). В пределе ($\eta_0 = 0$) решения (3.2.32), (3.2.33) и (3.2.32′), (3.2.33′) примут вид

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)R_1^s} \quad (s > 0), \tag{3.2.35}$$

$$\Psi_2(\zeta,\xi_0) = -\frac{\Gamma\left(\frac{|s|}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|s|+1}{2}\right)R_1^{|s|}} \quad (s<0), \tag{3.2.36}$$

($R_1 = |\zeta-\xi_0| = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2+\eta^2}$) и $\Phi_1(\zeta,\xi_0) = 0$ $(s<0)$, $\Psi_2(\zeta,\xi_0) = 0$ $(s>0)$. Решения (3.2.35) и (3.2.36) удовлетворяют согласно (3.1.9) и (3.1.9′) условиям на сингулярных линиях σ'_{02} и σ'_{01} (за исключением точки $(\xi_0,0)$):

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\eta^s\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\xi_0)}{\partial\eta}\right] = 0, \quad \lim_{\eta\to 0}\left[\eta^{|s|}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\xi_0)}{\partial\eta}\right] = 0.$$

Видно, что в результате предельного перехода $(\eta_0\to 0)$ в решениях (3.2.32) и (3.2.33′) их сингулярность изменяется. А именно, решения (3.2.32) и (3.2.33′) имеют в точке $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ особенности логарифмического типа, в то время как их предельные выражения (3.2.35) и (3.2.36) обладают в точке $(\xi_0,0)$ особенностями вида R_1^{-s} и $R_1^{-|s|}$.

В частности, когда s чётное натуральное число (положительное или отрицательное), то решения (3.2.32), (3.2.33) при $s=2n$ и (3.2.32′), (3.2.33′) при $s=-2n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ примут вид

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{Q_{n-1}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^n}, \quad \Psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{(\eta\eta_0)^n Q_n(\omega)}{2\pi} \quad \text{для} \quad P'=\eta^{2n} \tag{3.2.37}$$

и

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{(\eta\eta_0)^n Q_n(\omega)}{2\pi}, \quad \Psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{Q_{n-1}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^n} \quad \text{для} \quad P'=\eta^{-2n}. \tag{3.2.38}$$

Здесь $Q_n(\omega)$ — функции Лежандра целой степени n, которые согласно формулам (3.5(24)) и (3.5(28)) [16] можно выразить через полиномы Лежандра $P_n(\omega)$:

$$Q_0(\omega) = \frac{1}{2}\ln\frac{\omega+1}{\omega-1},$$

$$Q_n(\omega) = \frac{P_n(\omega)}{2}\ln\frac{\omega+1}{\omega-1} - \sum_{m=0}^{N}\frac{2n-4m-1}{(n-m)(2m+1)}P_{n-2m-1}(\omega),$$

где $N=n/2$ — для чётных n, $N=(n-1)/2$ — для нечётных n $(n = 1,2,3,\ldots)$. В частности, при $n=1$ решения $\Phi_1(\zeta,\zeta_0)$ из (3.2.37) и $\Psi_2(\zeta,\zeta_0)$ из (3.2.38) принимают вид (3.2.14) и (3.2.17).

Когда s нечётное натуральное число (положительное или отрицательное), то решения (3.2.32), (3.2.33) при $s = 2n-1$ и (3.2.32′), (3.2.33′) при $s = -(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ запишем

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{Q_{n-\frac{s}{2}}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^{n-\frac{1}{2}}}, \ \Psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{(\eta\eta_0)^{n-\frac{1}{2}} Q_{n-\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi} \text{ для } P' = \eta^{2n-1} \tag{3.2.39}$$

и

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{(\eta\eta_0)^{n-\frac{1}{2}} Q_{n-\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi}, \ \Psi_2(\zeta,\zeta_0) = -\frac{Q_{n-\frac{3}{2}}(\omega)}{2\pi(\eta\eta_0)^{n-\frac{1}{2}}} \text{ для } P' = \eta^{-(2n-1)}. \tag{3.2.40}$$

Здесь $Q_{n-\frac{1}{2}}(\omega)$, $Q_{n-\frac{3}{2}}(\omega)$ — функции Лежандра полуцелой степени. Эти функции с помощью вытекающих из формулы (3.9(2)) [16] рекуррентных соотношений

$$\Big(n+\frac{1}{2}\Big) Q_{n+\frac{1}{2}}(\omega) = 2n\omega Q_{n-\frac{1}{2}}(\omega) + \Big(n-\frac{1}{2}\Big) Q_{n-\frac{3}{2}}(\omega), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

можно найти на основе функций $Q_{\pm\frac{1}{2}}(\omega)$. Функции $Q_{\pm\frac{1}{2}}(\omega)$ представим согласно формулам (8.13.3), (8.13.7) из справочника [1] через полные эллиптические интегралы первого $K(k)$ и второго $E(k)$ рода модуля k в виде

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) = kK(k), \quad Q_{\frac{1}{2}}(\omega) = \Big(\frac{2}{k} - k\Big) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \tag{3.2.41}$$

где

$$K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}, \quad K(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\, d\beta,$$

$k = \sqrt{\frac{2}{\omega+1}}$ $(k \in [0,1])$. Учитывая $\omega = 1 + \frac{R^2}{2\eta\eta_0}$, запишем $k = 2\sqrt{\eta\eta_0}/R_*$, $R_* = |\zeta - \bar{\zeta}_0| = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta+\eta_0)^2}$.

Используя полный эллиптический интеграл модуля k вида [8, 157]

$$C(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\beta\cos^2\beta\, d\beta}{(1-k^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

и учитывая равенство [157]

$$\Big(\frac{2}{k} - k\Big)K(k) - \frac{2}{k}E(k) = k^3 C(k),$$

запишем

$$Q_{\frac{1}{2}}(\omega) = k^3 C(k). \tag{3.2.42}$$

В частности, если $s = 1$ $(n = 1)$, то фундаментальные решения (3.2.39) с учётом равенств (3.2.41) и (3.2.42) представим через функции Лежандра:

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi\sqrt{\eta\eta_0}}, \quad \Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\sqrt{\eta\eta_0}\,Q_{\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi} \tag{3.2.43}$$

и через эллиптические интегралы:

$$\Phi_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{kK(k)}{2\pi\sqrt{\eta\eta_0}}, \quad \Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\sqrt{\eta\eta_0}\,k^3 C(k)}{2\pi}. \tag{3.2.43$'$}$$

Решения $\Phi_1(\zeta, \zeta_0)$ и $\Psi_2(\zeta, \zeta_0)$ вида (3.2.43) (или (3.2.43′)) описывают в плоскости ζ осесимметричные течения, которые известны [117] как нормированные сток и вихрь в виде колец (η_0 — радиус колец).

§ 3.3. Элементарные течения и мультиполи в произвольном слое

Элементарные течения

Как было показано в § 3.1, фундаментальные решения $F_1(\zeta, \zeta_0)$ и $F_2(\zeta, \zeta_0)$ пердставляют собой соответственно сток полной (суммарной) мощности $\Pi_1 = -1$ и вихрь интенсивности (циркуляции) $\Gamma_2 = -1$. Поэтому для источника полной мощности $\Pi > 0$ (стока полной мощности $\Pi < 0$) и вихря интенсивности Γ (для циркуляции вектора скорости против часовой стрелки $\Gamma > 0$ и по часовой стрелке $\Gamma < 0$) имеем комплексные потенциалы течений

$$W = -\Pi F_1(\zeta, \zeta_0), \tag{3.3.1}$$

$$W = -\Gamma F_2(\zeta, \zeta_0). \tag{3.3.2}$$

Применяя к комплексным потенциалам (3.3.1) и (3.3.2) принцип наложения течений (2.5.4), находим комплексный потенциал течения, называемого *вихреисточником*:

$$W = -\Pi F_1(\zeta, \zeta_0) - \Gamma F_2(\zeta, \zeta_0). \tag{3.3.3}$$

Каждый из комплексных потенциалов (3.3.1)–(3.3.3) имеет в точке ζ_0 сингулярность логарифмического типа, поскольку такая сингулярность присуща решениям $F_1(\zeta, \zeta_0)$ и $F_2(\zeta, \zeta_0)$. Описываемые ими течения назовем *элементарными* течениями.

Используя указанные в § 3.2 фундаментальные решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$ (или функции $\Phi_k(\zeta, \zeta_0)$ и $\Psi_k(\zeta, \zeta_0)$), $k = 1, 2$ для классов слоёв, нетрудно найти по формулам (3.3.1)–(3.3.3) комплексные потенциалы $W(\zeta, \zeta_0)$ (обобщённые потенциалы $\varphi(\zeta, \zeta_0)$ и функции тока $\psi(\zeta, \zeta_0)$ элементарных течений в этих слоях. Тогда на основании гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ можно найти в плоскости z комплексные потенциалы $W(z, z_0)$ (функции $\varphi(z, z_0)$ и $\psi(z, z_0)$) этих течений.

Диполь

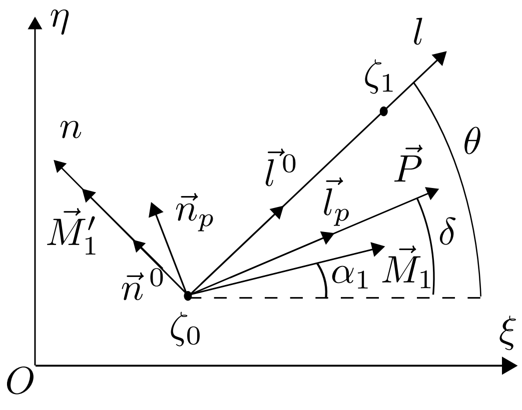

Рис. 3.3.1. Построение диполя.

Пусть в точках ζ_0 и $\zeta_1 = \zeta_0 + \Delta\zeta_0$ области D' расположены сток и источник одинаковой по величине мощности Π. Тогда согласно (3.3.1) и принципу наложения (2.5.4) находим комплексный потенциал результирующего течения

$$W = -\Pi[F_1(\zeta, \zeta_0 + \Delta\zeta_0) - F_1(\zeta, \zeta_0)]. \tag{3.3.4}$$

Выберем в точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ ортогональные оси l и n правовинтовой координатной системы с ортами $\vec{l}^{\,0} = (\cos\theta, \sin\theta)$ и $\vec{n}^{\,0} = (-\sin\theta, \cos\theta)$, которые направлены соответственно вдоль и перпендикулярно прямой, соединяющей точки ζ и ζ_1 и составляющей угол θ с осью $O\xi$ (рис. 3.3.1).

Поделим и умножим равенство (3.3.4) на $\mid \Delta\zeta_0 \mid = \Delta l$. Будем источник приближать к стоку ($\Delta l \to 0$), оставляя последний неподвижным в точке ζ_0. При этом неограниченно увеличиваем их мощности ($\Pi \to \infty$).

В пределе получим систему, которую назовём *диполем*. Учитывая, что $\Delta\zeta_0 = \Delta l e^{i\theta}$, его комплексный потенциал запишем в виде

$$W_1 = -\lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Pi \to \infty}} \Pi \Delta l \lim_{\Delta l \to 0} \frac{F_1(\zeta, \zeta_0 + \Delta l e^{i\theta}) - F_1(\zeta, \zeta_0)}{\Delta l}. \tag{3.3.5}$$

Обозначим через $M_1 = \lim\limits_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Pi \to \infty}} \Pi \Delta l$ величину момента диполя. Вычисляя в выражении (3.3.5) предел, имеем

$$W_1 = -M_1 \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l}. \tag{3.3.6}$$

Находим

$$\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} = \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} \frac{d\zeta_0}{dl} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dl}$$

или, учитывая равенства $d\zeta_0 = dl e^{i\theta}$, $d\bar{\zeta}_0 = dl e^{-i\theta}$, имеем

$$\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} = \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} e^{-i\theta}. \tag{3.3.7}$$

Тогда комплексный потенциал (3.3.6) запишем

$$W_1 = -M_1 \left[\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}_0} e^{-i\theta} \right]. \tag{3.3.8}$$

Чтобы выяснить направление момента диполя, обратимся к асимптотике (3.1.4) для $F_1(\zeta, \zeta_0)$. На основании равенства (3.3.5), аналогично тому как была получена формула (3.3.8), имеем

$$W_1 \sim -\frac{M_1 e^{i\theta}}{2\pi P'(\zeta_0)} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0.$$

Учтём, что в точке ζ_0 проводимость слоя $P'(\zeta_0) =\mid P'(\zeta_0) \mid e^{i\delta(\zeta_0)}$ и ей отвечает вектор $\vec{P}'(\zeta_0) =\mid P'(\zeta_0) \mid \vec{l}_p$ ($\vec{l}_p = (\cos\delta, \sin\delta)$ — орт, направленный под углом $\delta = \delta(\zeta_0)$ к оси $O\xi$ и образующий с ортом $\vec{n}_p = (-\sin\delta, \cos\delta)$ правовинтовой ортогональный базис в точке ζ_0, (рис. 3.1.1). Тогда имеем

$$W_1 \sim -\frac{M_1 e^{i\alpha_1(\zeta_0)}}{2\pi |P'(\zeta_0)| (\zeta - \zeta_0)} \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0, \tag{3.3.9}$$

где $\alpha_1(\zeta_0) = \theta - \delta(\zeta_0)$. Сопоставляя (3.3.9) с комплексным потенциалом диполя в изотропном однородном слое ($\mid P'(\zeta_0) \mid = 1, \delta(\zeta_0)$ см. [117]), замечаем, что диполь в анизотропном неоднородном слое можно характеризовать вектором приведённого момента $\vec{m}_1 = \vec{M}_1 / \mid P'(\zeta_0) \mid$. Модуль этого вектора $m_1 = M_1 / \mid P'(\zeta_0) \mid$ и направлен он под углом $\alpha_1(\zeta_0) = \theta - \delta(\zeta_0)$ к оси $O\xi$ (рис. 3.3.1). Тогда вектор дипольного момента $\vec{M}_1 = \vec{m}_1 \mid P'(\zeta_0) \mid$.

Принимая во внимание $\theta = \alpha_1 + \delta$, комплексный потенциал (3.3.8) запишем

$$W_1 = -M_1 \left[\frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i(\alpha_1 + \delta)} + \frac{\partial F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta_0}} e^{-i(\alpha_1 + \delta)} \right] \tag{3.3.10}$$

или, учитывая $e^{\pm i(\alpha_1 + \delta)} = \cos(\alpha_1 + \delta) \pm i \sin(\alpha_1 + \delta)$ и комплексные операторы (3.1.12), имеем его представление через $F_1 = F_1(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$:

$$W_1 = -M_1 \left[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} \cos(\alpha_1 + \delta) + \frac{\partial F_1}{\partial \eta_0} \sin(\alpha_1 + \delta) \right]. \tag{3.3.10$'$}$$

Из (3.3.10) и (3.3.10$'$) следуют, в частности, комплексные потенциалы диполей, моменты $\vec{M}_1$ которого ориентированы вдоль осей $O\xi$ ($\alpha_1 = 0$) и $O\eta$ ($\alpha_1 = \pi/2$):

$$W_{1\xi} = -M_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \zeta_0} e^{i\delta} + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{\zeta_0}} e^{-i\delta} \right) = -M_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} \cos\delta + \frac{\partial F_1}{\partial \eta_0} \sin\delta \right) = -M_1 \frac{\partial F_1}{\partial l_p},$$

$$W_{1\eta} = -iM_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \zeta_0} e^{i\delta} - \frac{\partial F_1}{\partial \bar{\zeta_0}} e^{-i\delta} \right) = -M_1 \left(-\frac{\partial F_1}{\partial \xi_0} \sin\delta + \frac{\partial F_1}{\partial \eta_0} \cos\delta \right) = -M_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_p}, \tag{3.3.10$''$}$$

где $\partial/\partial l_p$ и $\partial/\partial n_p$ — производные по направлениям ортов $\vec{l_p}$ и $\vec{n}_p$, которые имеют вид (3.1.12) или (3.1.12$'$). Замечаем, что комплексные потенциалы $W_{1\xi}$ и $W_{1\eta}$ получаются предельным сближением пары источник — сток вдоль и перпендикулярно вектору проводимости слоя $\vec{P}' = \mid \vec{P}' \mid \vec{l_p}$.

Теперь построим другой диполь на основе пары вихрей, то есть двух вихрей с равными по величине интенсивностями Γ и противоположными по знаку. Пусть вихрь интенсивности $\Gamma > 0$ расположен в точке ζ_0, а интенсивности $\Gamma < 0$ — в точке $\zeta_1 = \zeta_0 + \Delta\zeta_0$ области D' (рис. 3.3.1). Применяя принцип наложения течений к комплексным потенциалам этих вихрей вида (3.3.2), получим комплексный потенциал

$$W = \Gamma[F_2(\zeta, \zeta_0 + \Delta\zeta_0) - F_2(\zeta, \zeta_0)].$$

Поделим и умножим это равенство на $\mid \Delta\zeta_0 \mid = \Delta l$. Вихрь в точке $\zeta_0 + \Delta\zeta_0$ приближаем к неподвижному в точке ζ_0 вихрю $(\Delta l \to 0)$, неограниченно увеличивая их интенсивности $(\Gamma \to \infty)$. В результате предельного перехода получаем комплексный потенциал диполя

$$W_1' = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Gamma \to \infty}} \Gamma \Delta l \lim_{\Delta l \to 0} \frac{F_2(\zeta, \zeta_0 + \Delta l e^{i\theta}) - F_2(\zeta, \zeta_0)}{\Delta l}. \tag{3.3.11}$$

Введём понятие полной интенсивности вихря $\mathcal{T} = \Gamma \mid P'(\zeta_0) \mid$, где $P'(\zeta_0)$ — проводимость в точке ζ_0 расположения вихря. Имеем

$$\lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Gamma \to \infty}} \Gamma \Delta l = \frac{1}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \mathcal{T} \to \infty}} \mathcal{T} \Delta l.$$

Обозначим $M_1' = \lim\limits_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \mathcal{T} \to \infty}} \mathcal{T} \Delta l$ и назовем *модулем* момента диполя.

Назовём *модулем приведённого* момента m_1 отношение

$$m_1' = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \quad (m_1' = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \Gamma \to \infty}} \Gamma \Delta l). \tag{3.3.12}$$

Тогда из формулы (3.3.11) следует комплексный потенциал диполя

$$W_1' = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial l}. \tag{3.3.13}$$

Аналогично равенству (3.3.7) имеем

$$\frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} = \frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta} + \frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta_0}} e^{-i\theta}.$$

Тогда комплексный потенциал диполя (3.3.13) принимает вид

$$W_1' = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \left[\frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \zeta_0} e^{i\theta} + \frac{\partial F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta_0}} e^{-i\theta} \right]. \tag{3.3.14}$$

Выясним направление момента этого диполя. На основании равенства (3.3.11) и асимптотики (3.1.4) для $F_2(\zeta, \zeta_0)$, аналогично тому как была получена формула (3.3.14), имеем

$$W_1'(\zeta, \zeta_0) \sim \frac{m_1' e^{i\theta}}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0$$

или

$$W_1'(\zeta,\zeta_0) \sim -\frac{m_1' e^{i\alpha_1'}}{2\pi(\zeta-\zeta_0)} \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0, \tag{3.3.15}$$

где $\alpha_1' = \theta + \pi/2$. Сопоставляя (3.3.15) с комплексным потенциалом диполя в изотропном слое, замечаем, что диполь в анизотропном слое можно характеризовать вектором приведённого момента $\vec{m}_1' = \vec{M}_1'/\mid P'(\zeta_0)\mid$. Модуль этого вектора $m_1' = M_1'/|P'(\zeta_0)|$ и направлен под углом $\alpha_1' = \theta + \pi/2$ к оси $O\xi$ (совпадает с ортом $\vec{n}^0$ (рис. 3.3.1). Тогда вектор момента этого диполя $\vec{M}_1' = \vec{m}_1'|P'(\zeta_0)|$ направлен вдоль $\vec{n}^0$.

Учитывая $\theta = \alpha_1' - \pi/2$ и $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$, комплексный потенциал (3.3.14) запишем

$$W_1' = -\frac{iM_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \zeta_0}e^{i\alpha_1'} - \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\zeta}_0}e^{-i\alpha_1'}\right) \tag{3.3.16}$$

или, используя операторы (3.3.12) и $e^{\pm i\alpha_1'} = \cos\alpha_1' \pm i\sin\alpha_1'$, имеем

$$W_1' = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \xi_0}\sin\alpha_1' - \frac{\partial F_2}{\partial \eta_0}\cos\alpha_1'\right). \tag{3.3.16$'$}$$

Из (3.3.16) и (3.3.16$'$) следует, в частности, комплексные потенциалы диполей, моменты которых ориентированы вдоль осей $O\xi$ ($\alpha_1 = 0$) и $O\eta$ ($\alpha_1 = \pi/2$):

$$\begin{aligned} W_{1\xi}' &= -\frac{iM_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \zeta_0} - \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\zeta}_0}\right) = -\frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial F_2}{\partial \eta_0}, \\ W_{1\eta}' &= \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \zeta_0} + \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\zeta}_0}\right) = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_0}. \end{aligned} \tag{3.3.16$''$}$$

Видно, что комплексные потенциалы $W_{1\xi}$ и $W_{1\eta}$ получаются предельным сближением пары вихрей вдоль осей $O\eta$ и $O\xi$ соответственно.

Итак, предельные сближения пары источник-сток и пары вихрей приводят к диполям с различными моментами M_1 и M_1'. Пусть модули моментов этих диполей одинаковы: $M_1 = M_1'$ $\left(\lim\limits_{\substack{\Delta l\to 0\\ \Pi\to\infty}} \Pi\Delta l = \lim\limits_{\substack{\Delta l\to 0\\ \mathcal{T}\to\infty}} \mathcal{T}\Delta l\right)$. Тогда будут равны комплексные потенциалы диполей, моменты которых ориентированы вдоль координатных осей $O\xi$ и $O\eta$: $W_{1\xi} = W_{1\xi}'$ и $W_{1\eta} = W_{1\eta}'$. Из этих равенств и выражений комплексных потенциалов (3.3.10$''$) и (3.3.16$''$) имеем для нормированных комплексных потенциалов $w_1(\zeta,\zeta_0)$ и $w_1(\zeta,\zeta_0)$

диполей (моменты которых по величине $M_1 = M_1' = 1$ и ориентированы вдоль координатных осей $O\xi$ и $O\eta$) формулы

$$\begin{aligned} w_1(\zeta,\zeta_0) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p} = -\frac{1}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0}, \\ w_2(\zeta,\zeta_0) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p} = \frac{1}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0}. \end{aligned} \qquad (3.3.16''')$$

Эти равенства слвпадают с формулами (3.1.11), выражающими главные решения $w_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ уравнения (2.3.22) через его фундаментальные решения $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$. Эти равенства — условия сопряжения решений $F_k(\zeta,\zeta_0)$, $k=1,2$ по точке-параметру $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$.

Мультиполи

Процесс сближения особых точек продолжим. Воспользуемся комплексными потенциалами, построенными на основе пары источник-сток (3.3.6) и пары вихрей (3.3.13), которые запишем

$$W_1 = M_1 w_1(\zeta,\zeta_0), \quad W_1' = m_1' w_2(\zeta,\zeta_0) \quad \left(m_1' = \frac{M_1'}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\right),$$

где

$$w_1(\zeta,\zeta_0) = -\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_1}, \quad w_2(\zeta,\zeta_0) = \frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_1},$$

M_1, M_1' и m_1' — моменты и приведённый момент диполей; дифференцирование ведется в направлении, задаваемого ортом $\vec{l}_1^{\,0}$, составляющим угол θ_1 с осью $O\xi$.

Сблизим два диполя с моментами $M_1'(m_1')$, противоположно направленными и расположенными в точках ζ_0 и $\zeta_1=\zeta_0+\Delta l_2 e^{i\theta_2}$ (θ_2 — угол между направлением сближения диполей, задаваемого ортом $\vec{l}_2^{\,0}$ и осью $O\xi$, $\Delta l_2 = \mid \zeta_1-\zeta_0\mid$). Аналогично (3.3.5) и (3.3.11) имеем

$$W_2 = \lim_{\substack{\Delta l_2\to 0\\ M_1\to\infty}} M_1\Delta l_2 \lim_{\Delta l_2\to 0}\frac{w_1(\zeta,\zeta_0+\Delta l_2 e^{i\theta_2}) - w_1(\zeta,\zeta_0)}{\Delta l_2},$$

$$W_2' = \lim_{\substack{\Delta l_2\to 0\\ m_1'\to\infty}} m_1'\Delta l_2 \lim_{\Delta l_2\to 0}\frac{w_2(\zeta,\zeta_0+\Delta l_2 e^{i\theta_2}) - w_2(\zeta,\zeta_0)}{\Delta l_2}.$$

Обозначая $M_2 = \lim\limits_{\substack{\Delta l_2 \to 0 \\ M_1 \to \infty}} M_1 \Delta l_2$, $m'_2 = \lim\limits_{\substack{\Delta l_2 \to 0 \\ m'_1 \to \infty}} m'_1 \Delta l_2$, имеем

$$W_2 = M_2 \frac{\partial w_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_2}, \quad W'_2 = m'_2 \frac{\partial w_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_2},$$

или

$$W_2 = -M_2 \frac{\partial^2 F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_2 \partial l_1}, \quad W'_2 = \frac{M'_2}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \frac{\partial^2 F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_2 \partial l_1} \quad (M'_2 = m'_2 \mid P'(\zeta_0) \mid).$$

Комплексные потенциалы течений W_2 и W'_2 назовем *квадруполями* с моментами M_2 и M'_2 (M'_2 — момент квадруполя, $m'_2 = M'_2/ \mid P'(\zeta_0) \mid$ — его приведённый момент).

Продолжая процесс сближения особых точек течения по направлениям, задаваемых в точке ζ_0 ортами $\vec{l}^{\,0}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, находим комплексные потенциалы *мультиполей* порядка $2n$:

$$W_n = -M_n \frac{\partial^n F_1(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_n \ldots \partial l_2 \partial l_1}, \quad W'_n = \frac{M'_n}{\mid P'(\zeta_0) \mid} \frac{\partial^n F_2(\zeta, \zeta_0)}{\partial l_n \ldots \partial l_2 \partial l_1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.3.17}$$

Здесь M_n и M'_n — моменты этих мультиполей:

$$M_n = \lim_{\substack{\Delta l_n \to 0 \\ M_{n-1} \to \infty}} M_{n-1} \Delta l_n, \quad M'_n = m'_n \mid P'(\zeta_0) \mid, \quad m'_n = \lim_{\substack{\Delta l_n \to 0 \\ m'_{n-1} \to \infty}} m'_{n-1} \Delta l_n.$$

В частности, если сближение особых точек течения происходит вдоль одного и того же направления $\vec{l}^{\,0}$, ($\vec{l}^{\,0}_1 = \vec{l}^{\,0}_2 = \ldots = \vec{l}^{\,0}_n = \vec{l}^{\,0}$), то комплексные потенциалы W_n и W'_n будут определяться n — кратными производными от фундаментальных решений $F_1(\zeta, \zeta_0)$ и $F_2(\zeta, \zeta_0)$ по этому направлению. Если в этом случае пара источник-сток сближается по направлению орта $\vec{l}_p = (\cos\delta, \sin\delta)$, составляющем угол δ с осью $O\xi$ $(\vec{l}^{\,0} = \vec{l}_p)$, а пара вихрей — по направлению оси $O\xi$ $(\vec{l}^{\,0} = \vec{\imath})$, то комплексные потенциалы W_n и W'_n имеют наиболее простой вид и являются усложнёнными аналогами аналитических функций в виде отрицательных степеней $(\zeta - \zeta_0)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Обозначим через $Z_1^{(-n)}(\zeta, \zeta_0)$ и $Z_2^{(-n)}(\zeta, \zeta_0)$ отрицательные формальные степени порядка n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, которые получаются n-кратным дифференцированием решений $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ по направлениям ортов $\vec{l}_p$ и $\vec{\imath}$. Учитывая равенства (3.1.11) и (3.3.17), каждую степень представим через $F_1(\zeta,\zeta_0)$ и $F_2(\zeta,\zeta_0)$ в виде

$$Z_1^{(-n)}(\zeta,\zeta_0) = \frac{2\pi}{(n-1)!}\frac{\partial^n F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial l_p^n} = \frac{2\pi}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial l_p^{n-1}}\left[\frac{1}{\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \eta_0}\right], \tag{3.3.18}$$

$$Z_2^{(-n)}(\zeta,\zeta_0) = \frac{2\pi}{(n-1)!\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial^n F_2(\zeta,\zeta_0)}{\partial \xi_0^n} =$$

$$= -\frac{2\pi}{(n-1)!\mid P'(\zeta_0)\mid}\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}}\left[\mid P'(\zeta_0)\mid\frac{\partial F_1(\zeta,\zeta_0)}{\partial n_p}\right], \quad n=1,2,3,\ldots,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial l_p} = \frac{\partial}{\partial \xi_0}\cos\delta + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\sin\delta = e^{i\delta}\frac{\partial}{\partial \zeta_0} + e^{-i\delta}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_0} = \frac{\partial}{\partial \zeta_0} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_p} = -\frac{\partial}{\partial \xi_0}\sin\delta + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\cos\delta = i\left(e^{i\delta}\frac{\partial}{\partial \zeta_0} - e^{-i\delta}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta_0} = i\left(\frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0}\right).$$

Тогда согласно принципу наложения решений имеем отрицательные формальные степени вида

$$Z^{(-n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0) = \alpha Z_1^{(-n)}(\zeta,\zeta_0) + \beta Z_2^{(-n)}(\zeta,\zeta_0), \quad n=1,2,3,\ldots, \tag{3.3.19}$$

где α и β — вещественные постоянные.

Степени (3.3.19) выражают комплексные потенциалы W_n мультиполей порядка $2n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, величина и направление моментов которых определяются постоянными α и β. В частности, при $n=1$ степень $Z^{-1}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$, в которой выбраны $\alpha=-M_1/(2\pi)$, $\beta=-M_1/(2\pi)$ определяет наложение комплексных потенциалов диполей $W_{1\xi}$ и $W_{1\eta}$ вида (3.3.10″), то есть

$$Z^{(-1)}(-\frac{M_1}{2\pi},\frac{M_1}{2\pi},\zeta,\zeta_0) = W_{1\xi} + W_{1\eta}.$$

Учитывая асимптотики фундаментальных решений (3.1.4), находим асимптотики степеней (3.3.19):

$$Z^{(-n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0) \sim \frac{\alpha - i\beta}{\mid P'(\zeta_0)\mid(\zeta-\zeta_0)^n}, \quad n=1,2,3,\ldots \quad \text{при} \quad \zeta\to\zeta_0.$$

Отсюда следует, что степени (3.3.19) имеют в точке ζ_0 полюсы порядка n. Эти степени являются усложнёнными аналогами аналитических функций $(\zeta-\zeta_0)^{-n}$, $n=1,2,3,\ldots$.

Продолжая эту аналогию, аналитическим функциям $(\alpha+i\beta)(\zeta-\zeta_0)^n$, $n=1,2,3,\ldots$. поставим в соответствие положительные формальные степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$ $n=0,1,2,\ldots$. Это удается сделать для определённых классов проводимостей слоёв (см. § 3.4).

Таким образом, будем иметь формальные степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, которые являются усложнёнными аналогами аналитических функций $(\zeta-\zeta_0)^n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

После того как будут найдены степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$, то по формулам (2.3.21) можно отыскать в плоскости ζ обобщённые потенциалы и функции тока течений:

$$\varphi_n(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)=\frac{\mathrm{Re}[P'(\zeta)Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)]}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)}, \tag{3.3.20}$$

$$\psi_n(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)=\frac{\mid P'(\zeta_0)\mid^2\,\mathrm{Im}\,Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\quad.$$

Тогда, используя гомеморфизм $\zeta=\zeta(z)$, можно найти в плоскости z степени, а значит соответствующие им обобщённые потенциалы и функции тока течений.

Понятие формальных степеней введено в работах [13, 14, 163–166]. Развиты различные способы отыскания этих степеней [12, 14, 38–41], а также нахождение на их основе решений систем уравнений [28, 30, 57–59, 122, 148, 167–169]. Вид формальных степеней определяется проводимостью слоя. В том случае, когда слой анизотропно-однородный и ортотропно-неоднородный с проводимостью, моделируемой функцией одного переменного, формальные степени выглядят наиболее просто (см. § 3.4).

§ 3.4. Мультиполи для классов слоёв

Мультиполи в анизотропно-однородном слое

В случае, когда анизотропный слой однороден ($H=1$, $P'=\sqrt{D(K_s)}-i\sqrt{D(K_a)}$ — комплексная постоянная), степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ — аналитические функции в области D' за исключением их особых точек $\zeta = \zeta_0$. В этом случае, как отмечалось выше, Σ-дифференцирование и Σ-интегрирование — обычные операции дифференцирования и интегрирования аналитических функций, которые применим для нахождения этих степеней. На основании формул (3.2.2), (3.2.3), (3.3.18) и (3.3.19) имеем отрицательные степени

$$Z^{(-n)}(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_0) = \frac{\alpha - i\beta}{(n-1)! \mid P' \mid} \frac{\partial^n}{\partial \zeta_0^n} \ln \frac{1}{\zeta - \zeta_0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$Z^{(-n)}(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_0) = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{D(K)}(\zeta - \zeta_0)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $D(K) = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}$.

Положительные степени находим, выполняя n-кратное интегрирование комплексной постоянной C от точки $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ до точки $\zeta = \xi + i\eta$ односвязной области D', то есть по формулам

$$Z^{(0)}(C, \zeta, \zeta_0) = C, \quad Z^{(n)}(C, \zeta, \zeta_0) = n \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} Z^{(n-1)}(C, \zeta', \zeta_0) d\zeta', \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

В результате получаем степени

$$Z^n(C, \zeta, \zeta_0) = C(\zeta - \zeta_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Выбирая $C = (\alpha - i\beta)/\sqrt{D(K)}$, отрицательные и положительные степени представим в виде

$$Z^{(n)}(C, \zeta, \zeta_0) = C(\zeta - \zeta_0)^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3.4.1}$$

Используя гомеморфизм (2.4.13), степени (3.4.1) запишем в плоскости z:

$$Z^n(C, z, z_0) = C\big[z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)\big]^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3.4.2}$$

Степени (3.4.2) описывают в плоскости z комплексные потенциалы течений от мультиполей порядка $2n$, которые расположены в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ при $n < 0$ и в бесконечности при $n > 0$. По формулам (3.3.20) можно найти обобщённые потенциалы и функции тока этих течений. В частности, при $n = -1$ имеем диполь в точке z_0, а при $n = 1$ — диполь в бесконечности (поступательный поток).

Мультиполи в слое проводимости $P'(\eta)$

Рассмотрим случай, когда проводимость канонического слоя моделируется функцией одного переменного, например, как и в § 2.5 переменной η. Так как в этом случае коэффициент A уравнения (2.3.22) зависит только от η, то его фундаментальные решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$ — функции разности координат $\xi - \xi_0$. Поэтому, учитывая $\partial/\partial\xi_0 = -\partial/\partial\xi$, в соответствии с формулой (2.5.25) найдём отрицательные формальные степени (3.3.19) n-кратным Σ-дифференцированием (дифференцированием по ξ):

$$Z^{(-n)}(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_0) = \frac{2\pi(-1)^n}{(n-1)!} \frac{d^n_\Sigma F(\zeta, \zeta_0)}{d\zeta^n} = \frac{2\pi(-1)^n}{(n-1)!} \frac{\partial^n F(\zeta, \zeta_0)}{\partial \xi^n}, \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.4.3}$$

функции $F(\zeta, \zeta_0)$ следующего вида

$$F(\zeta, \zeta_0) = \alpha F_1(\zeta, \zeta_0) + \frac{\beta}{\mid P'(\eta_0) \mid} F_2(\zeta, \zeta_0).$$

Функция $F(\zeta, \zeta_0)$ аналогична (3.3.3) и представляет собой комплексный потенциал вихреисточника, состоящего из источника мощности $\Pi = -\alpha$ и вихря интенсивности $\Gamma = -\beta / \mid P'(\eta) \mid$ (полной интенсивности $\mathcal{T} = -\beta$).

Формула (3.4.3) позволяет находить на основе решений $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$ отрицательные степени[1], представляющие собой комплексные потенциалы течений от мультиполей порядка $2n$, которые имеют особые точки (полюсы) порядка n в конечных точках области D'.

В указанном слое построим комплексные потенциалы мультиполей в виде положительных формальных степеней, имеющих особые точки в бесконечности. Назовем положительной формальной степенью $Z^n(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_0)$ комплексный потенциал W_n мультиполя порядка $2n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получаемого n-кратным Σ-интегрированием (2.5.26) от точки $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ до точки $\zeta = \xi + i\eta$ односвязной области D' обобщённой комплексной постоянной $C_0 = \alpha + i\beta/P'(\eta)$ (α, β — произвольные вещественные постоянные) и последующего умножения найденного результата на $n!$. А именно,

$$Z^{(0)}(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_0) = \alpha + i\frac{\beta}{P'(\eta)},$$

[1] Решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$ указаны в §3.2 для широких классов проводимостей ортотропных слоев.

$$Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)=n\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}Z^{(n-1)}(\alpha,\beta,\zeta',\zeta_0)d_\Sigma\zeta',\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{3.4.4}$$

Вид степеней (3.4.4) определяется выбором констант α,β и положением точек ζ и ζ_0. Представим степени следующим образом

$$Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)=\alpha Z_1^{(n)}(\zeta,\zeta_0)+\beta Z_2^{(n)}(\zeta,\zeta_0), \tag{3.4.5}$$

где

$$Z_1^{(0)}(\zeta,\zeta_0)=1,\quad Z_2^{(0)}(\zeta,\zeta_0)=\frac{i}{P'(\eta)},$$

$$Z_k^{(n)}(\zeta,\zeta_0)=n\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}Z_k^{(n-1)}(\zeta',\zeta_0)d_\Sigma\zeta',\quad k=1,2;\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Видно, что степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$ представляют собой наложение степеней $Z_1^{(n)}(\zeta,\zeta_0)$ и $Z_2^{(n)}(\zeta,\zeta_0)$.

Поскольку согласно определению Σ-интеграла, его значения не зависят от пути интегрирования, то в качестве такового выберем путь от точки $\zeta_0=\xi_0+i\eta_0$ до точки $\zeta_0'=\xi+i\eta_0$ и от точки ζ_0' до точки $\zeta=\xi+i\eta$. Тогда степени $Z_k^{(n)}(\zeta,\zeta_0)$ запишем в виде

$$Z_k^{(n)}(\zeta,\zeta_0)=X_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)+\frac{i}{P'(\eta)}Y_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)= \tag{3.4.6}$$

$$=X_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)+\frac{P_2'(\eta)}{\mid P'(\eta)\mid^2}Y_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)+i\frac{P_1'(\eta)}{\mid P'(\eta)\mid^2}Y_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0),$$

где

$$X_1^{(0)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=1,\quad Y_1^{(0)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=0,$$

$$X_2^{(0)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=0,\quad Y_2^{(0)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=1,$$

$$X_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=n\Bigg\{\int\limits_{\xi_0}^{\xi}X_k^{(n-1)}(\xi',\eta,\xi_0,\eta_0)d\xi'-$$

$$-\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\frac{1}{P_1'(\eta')}\Big[P_2'(\eta')X_k^{(n-1)}(\xi,\eta',\xi_0,\eta_0)+Y_k^{(n-1)}(\xi,\eta',\xi_0,\eta_0)\Big]d\eta'\Bigg\},$$

$$Y_k^{(n)}(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0) = n\Bigg\{ \int\limits_{\xi_0}^{\xi} Y_k^{(n-1)}(\xi',\eta,\xi_0,\eta_0)d\xi' +$$

$$+\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{P_1'(\eta')}\Big[\mid P'(\eta') \mid^2 X_k^{(n-1)}(\xi,\eta',\xi_0,\eta_0) + P_2'(\eta')Y_k^{(n-1)}(\xi,\eta',\xi_0,\eta_0)\Big] d\eta' \Bigg\},$$

$$k = 1,2, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

где

$$P_1'(\eta) = \sqrt{D_s[P(\eta)]}, \quad P_2'(\eta) = -\sqrt{D_a[P(\eta)]}, \quad \mid P'(\eta) \mid^2 = D[P(\eta)].$$

Как следует из выражений (3.4.5) и (3.4.6), степени $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$ имеют в точке ζ_0 нули порядка n, а значит полюсы того же порядка в бесконечности. В чём нетрудно убедиться, записав эти степени для конкретных значений n.

В частности, если слой ортотропный ($K_{12} = K_{21}$ и, следовательно, $P_2'(\eta) = 0$, $P_1'(\eta) = P'(\eta) = \sqrt{D[P(\eta)]}$), то степени (3.4.3) и (3.4.5) принимают вид, аналогичный случаю изотропного слоя [117]. В этом случае при $\zeta_0 = 0$, то степени (3.4.5) принимают вид, аналогичный указанному в книге [74].

По найденным степеням $Z^{(n)}(\alpha,\beta,\zeta,\zeta_0)$, $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ нетрудно отыскать по формулам (3.3.20) обобщённые потенциалы и функции тока течений. Используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$, можно записать эти степени в плоскости z, которые будут иметь изолированные особые точки того же типа, что и в плоскости ζ.

Глава 4

Обобщённые интегралы Коши и типа Коши для комплексного потенциала и скорости

Комплексные потенциалы и скорости двумерных течений в каноническом слое представляются обобщёнными интегралами Коши и типа Коши. Вводится понятие обобщённого интеграла в смысле главного значения по Коши. Находятся предельные значения обощённого интеграла типа Коши (обобщённые формулы Сохоцкого-Племеля).

§ 4.1. Сопряжённость уравнений двумерных течений

Формула Грина в комплексной форме

Пусть вещественные функции $p(\xi, \eta)$ и $q(\xi, \eta)$ имеют в плоскости ζ непрерывные первые производные в области D' и непрерывны на её замкнутой границе-контуре C'. Будем обходить область D' по контуру C' так, чтобы она оставалась слева. Орт касательной $\vec{\tau}$ контура C' выберем в направлении его обхода, а орт нормали $\vec{n}$ направим во внутрь области D'. Тогда согласно [132] для этих функций имеет место формула Грина

$$\int\limits_{C'} pd\xi + qd\eta = \int\limits_{D'} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta. \tag{4.1.1}$$

Пусть функция $f(\zeta) = u + iv$ (u и v — вещественные функции) имеет непрерывные первые производные по $\zeta = \xi + i\eta$ в области D' и непрерывна на её границе C'. Находим интеграл

$$\int\limits_{C'} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{C'} (u+iv)(d\xi + i\,d\eta) = \int\limits_{C'} u\,d\xi - v\,d\eta + i\int\limits_{C'} v\,d\xi + u\,d\eta\,.$$

Согласно формуле (4.1.1) имеем

$$\int\limits_{C'} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{D'} \left[-\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + i\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right] d\xi\,d\eta$$

или, учитывая $2\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}$, получаем формулу Грина в *комплексной* форме [69]

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{D'} \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\,d\xi\,d\eta\,. \tag{4.1.2}$$

Формула (4.1.2) имеет место также для многосвязной области D', ограниченной контуром C', поскольку для такой области справедлива формула (4.1.1).

Сопряжённые уравнения. Интегральные равенства.

Течение в слое проводимости $P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$ описывают комплексный потенциал W и приведённая комплексно сопряжённая скорость $\overline{V}$, которые удовлетворяют всюду в области D' (за исключением их особых точек) уравнениям (2.3.22) и (2.3.33), то есть

$$T_1 W \equiv \frac{\partial W}{\partial\overline{\zeta}} + A(W - \overline{W}) = 0 \quad \left(A = \frac{\overline{P}'}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\overline{\zeta}}\right), \tag{4.1.3}$$

$$T_2\overline{V} \equiv \frac{\partial\overline{V}}{\partial\overline{\zeta}} + BV + \overline{B}\,\overline{V} = 0 \quad \left(B = \frac{1}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial P'}{\partial\zeta}, \overline{B} = \frac{1}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial\overline{P}'}{\partial\overline{\zeta}}\right). \tag{4.1.4}$$

Пусть течение в слое другой проводимости $\widetilde{P}'$, комплексно сопряжённой проводимости P' $(\widetilde{P}' = \overline{P'} = \sqrt{D(P_s)} + i\sqrt{D(P_a)})$ описывают комплексный потенциал W' и приведённая комплексно сопряжённая скорость

$\overline{V}'$, которые удовлетворяют всюду в той же области D' (за исключением их особых точек) уравнениям

$$T_1'W' \equiv \frac{\partial W'}{\partial \overline{\zeta}} + A'(W' - \overline{W'}) = 0 \quad \left(A' = \frac{P'}{P' + \overline{P'}} \frac{\partial \ln \overline{P'}}{\partial \overline{\zeta}}\right), \tag{4.1.5}$$

$$T_2'\overline{V'} \equiv \frac{\partial \overline{V'}}{\partial \overline{\zeta}} + B'V' + \overline{B'}\,\overline{V'} = 0 \quad \left(B' = \frac{1}{P' + \overline{P'}} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial \zeta},\ \ \overline{B'} = \frac{1}{P' + \overline{P'}} \frac{\partial P'}{\partial \overline{\zeta}}\right). \tag{4.1.6}$$

Полагая, что W, $\overline{V}$, W', $\overline{V'}$ и P' непрерывно дифференцируемые хотя бы один раз в области D' и непрерывны на её границе C', на основании формулы (4.1.2) и при учёте уравнений (4.1.3)–(4.1.6) имеем

$$\frac{1}{2i} \int\limits_{C'} P'(\zeta) W(\zeta) \overline{V'}(\zeta) d\zeta = \int\limits_{D'} \frac{\partial (P' W \overline{V'})}{\partial \overline{\zeta}} d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{D'} P' \left(\overline{V'} \frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta}} + W \frac{\partial \overline{V'}}{\partial \overline{\zeta}} + W \overline{V'} \frac{\partial \ln P'}{\partial \overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{D'} P' \left[\overline{V'} T_1 W + W T_2 \overline{V'} + W \overline{V'} \left(\frac{\partial \ln P'}{\partial \overline{\zeta}} - A - \overline{B'} \right) - (B' W V' - A \overline{W}\, \overline{V'}) \right] d\xi d\eta,$$

$$\frac{1}{2i} \int\limits_{C'} \overline{P'}(\zeta) W'(\zeta) \overline{V}(\zeta) d\zeta = \int\limits_{D'} \frac{\partial (\overline{P'} W' \overline{V})}{\partial \overline{\zeta}} d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{D'} \overline{P'} \left(\overline{V} \frac{\partial W'}{\partial \overline{\zeta}} + W' \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{\zeta}} + W' \overline{V} \frac{\partial \ln \overline{P'}}{\partial \overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{D'} \overline{P'} \left[\overline{V} T_1' W' + W' T_2 \overline{V} + W' \overline{V} \left(\frac{\partial \ln \overline{P'}}{\partial \overline{\zeta}} - A' - \overline{B} \right) - (B W' V - A' \overline{W'}\, \overline{V}) \right] d\xi d\eta.$$

Учитывая в этих равенствах коэффициенты уравнений (4.1.3)–(4.1.6), находим

$$\frac{\partial \ln P'}{\partial \overline{\zeta}} - A - \overline{B'} = 0, \quad P'(B' W V' - A \overline{W V'}) = \frac{i2|P'|^2}{P' + \overline{P'}} \operatorname{Im} \left[W V' \frac{\partial \ln P'}{\partial \zeta} \right],$$

$$\frac{\partial \ln \overline{P'}}{\partial \overline{\zeta}} - A' - \overline{B} = 0, \quad \overline{P'}(BW'V - A'\overline{W'V'}) = \frac{i2|P'|^2}{P' + \overline{P'}} \operatorname{Im}\left[W'V\frac{\partial \ln \overline{P'}}{\partial \zeta}\right].$$

Следовательно, получаем равенства

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} P'(\zeta)W(\zeta)\overline{V'}(\zeta)d\zeta\right] = \operatorname{Re}\int\limits_{D'} P'(\overline{V'}T_1W + WT_2'\overline{V'})\,d\xi d\eta,$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} \overline{P'}(\zeta)W'(\zeta)\overline{V}(\zeta)d\zeta\right] = \operatorname{Re}\int\limits_{D'} \overline{P'}(\overline{V}T_1'W' + W'T_2\overline{V})\,d\xi d\eta.$$

В соответствии с [32.с.139] первое из этих равенств выражает свойство взаимной сопряжённости уравнений (4.1.3) и (4.1.6), а второе — уравнений (4.1.4) и (4.1.5).

Полагая, что W, $\overline{V}$ и W', $\overline{V'}$ являются в области D' решениями уравнений (4.1.3)–(4.1.6) ($T_1W = 0$, $T_2\overline{V} = 0$ и $T_1'W' = 0$, $T_2'\overline{V'} = 0$), то имеем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} P'(\zeta)W(\zeta)\overline{V'}(\zeta)d\zeta\right] = 0, \tag{4.1.7}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} \overline{P'}(\zeta)W'(\zeta)\overline{V}(\zeta)d\zeta\right] = 0. \tag{4.1.8}$$

Назовём (4.1.7) и (4.1.8) *интегральными* равенствами для W, $\overline{V'}$ и W', $\overline{V}$ — комплексных потенциалов и приведённых комплексно сопряжённых скоростей течений в слоях проводимости P' и $\widetilde{P}' = \overline{P'}$. Эти равенства имеют место также для многосвязной области D', ограниченной контуром C', так как для такой области справедлива формула (4.1.2).

Учитывая $W = \varphi + i\psi/P'$, $W' = \varphi' + i\psi'/\overline{P'}$ и вытекающие из формул (2.5.12) и (2.5.18) соотношения

$$\overline{V}d\zeta = \frac{2P'}{P' + \overline{P'}}\left(d\varphi + i\frac{d\psi}{P'}\right), \overline{V'}d\zeta = \frac{2\overline{P'}}{P' + \overline{P'}}\left(d\varphi' + i\frac{d\psi'}{\overline{P'}}\right),$$

равенства (4.1.7) и (4.1.8) запишем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'} P'(\zeta)W(\zeta)\overline{V'}(\zeta)d\zeta\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{C'}(\varphi d\psi' + \psi d\varphi') = 0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\overline{P'}(\zeta)W'(\zeta)\overline{V}(\zeta)d\zeta\right]=\frac{1}{2}\int\limits_{C'}(\varphi' d\psi+\psi' d\varphi)=0.$$

Складывая последние равенства почленно, получаем в силу замкнутости контура C' тождество

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\left[P'(\zeta)W(\zeta)\overline{V'}(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)W'(\zeta)\overline{V}(\zeta)\right]d\zeta\right\}=\frac{1}{2}\int\limits_{C'}d(\varphi\psi'+\varphi'\psi)\equiv 0.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}P'(\zeta)W(\zeta)\overline{V'}(\zeta)d\zeta\right]=-\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\overline{P'}(\zeta)W'(\zeta)\overline{V}(\zeta)d\zeta\right].$$

§ 4.2. Обобщённые формулы Коши для комплексных потенциалов и скоростей

Обобщённая формула Коши для комплексного потенциала

В равенстве (4.1.7) используем в качестве $\overline{V'}$ главные решения $\overline{V'_k}(\eta,t)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.6) по переменной ζ (t — точка-параметр). Учитывая асимптотику (3.1.19), имеем для слоя комплексно сопряжённой проводимости $\widetilde{P'}(\zeta)=\overline{P'}(\zeta)$ асимптотику решений

$$\overline{V'_1}(\zeta,t)\sim-\frac{1}{2\pi P'_1(t)(\zeta-t)},\quad \overline{V'_2}(\zeta,t)\sim-\frac{\overline{P'}(t)}{2\pi i P'_1(t)(\zeta-t)}\quad\text{при}\quad \zeta\to t. \tag{4.2.1}$$

Исходя из асимптотики (4.2.1), в равенстве (4.1.7) выберем в качестве $\overline{V'}$ последовательно $P'_1(t)\overline{V'_1}(\zeta,t)/P'(t)$ и $P'_1(t)\overline{V'_2}(\zeta,t)/|P'(t)|^2$. Запишем

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\frac{P'_1(t)}{P'(t)}\overline{V'_1}(\zeta,t)P'(\zeta)W(\zeta)d\zeta\right]=0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\frac{P'_1(t)}{|P'(t)|^2}\overline{V'_2}(\zeta,t)P'(\zeta)W(\zeta)d\zeta\right]=0.$$

Умножая второе равенство на $i = \sqrt{-1}$ и складывая с первым, получаем после умножения на π равенство

$$\int\limits_{C'} \Omega_1'(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega_2'}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta} = 0, \tag{4.2.2}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega_1'(\zeta,t) &= \frac{\pi P_1'(t)P'(\zeta)}{P'(t)}\left[\overline{V_1'}(\zeta,t) + i\frac{\overline{V_2'}(\zeta,t)}{\overline{P'}(t)}\right], \\ \Omega_2'(\zeta,t) &= \frac{\pi P_1'(t)P'(\zeta)}{P'(t)}\left[\overline{V_1'}(\zeta,t) - i\frac{\overline{V_2'}(\zeta,t)}{\overline{P'}(t)}\right]. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Учитывая (4.2.1), находим, что $\Omega_k'(\zeta,t)$, $k=1,2$ имеют асимптотики

$$\Omega_1'(\zeta,t) \sim -\frac{1}{\zeta - t}, \quad \Omega_2'(\zeta,t) \sim 0 \quad \text{при} \quad \zeta \to t. \tag{4.2.4}$$

Видно, что $\Omega_1'(\zeta,t)$ имеет в точке $\zeta = t$ простой полюс. Тогда (4.2.2) представляет собой тождество для всех $\zeta \neq t$. В связи с этим необходимо рассмотреть возможные случаи, когда точка $t \in D'$, $t \in C'$ и $t' \notin \overline{D'}$ ($\overline{D'} = D' \cup C'$).

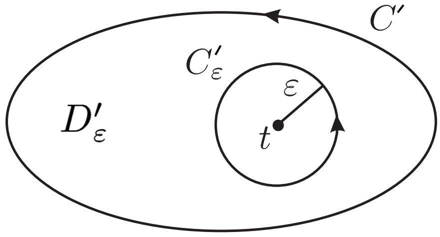

Рис. 4.2.1. Область D'_ε.

Пусть точка $t \in D'$. Чтобы можно было применить тождество (4.2.2), необходимо исключить точку $t \in D'$. Проведём из этой точки окружность C'_ε малого радиуса ε (рис. 4.2.1).Для области D'_ε, ограниченной контуром $C' \cup C'_\varepsilon$, согласно равенству (4.2.2) имеем

$$\int\limits_{C'} \Omega_1'(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega_2'}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta} = \int\limits_{C'_\varepsilon} \Omega_1'(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega_2'}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta}. \tag{4.2.5}$$

В равенстве (4.2.5) вычислим интеграл по окружности C'_ε, обозначив его $\mathfrak{I}(\varepsilon)$. Так как для этой окружности $\zeta - t = \varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ и $d\zeta = i\varepsilon e^{i\vartheta} d\vartheta =$

$= i(\zeta - t)d\vartheta$, то по теореме о среднем находим

$$\mathfrak{I}(\varepsilon) = \int\limits_{C'_\varepsilon} \Omega'_1(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega'_2}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta} =$$

$$= i2\pi[W(\zeta)\Omega'_1(\zeta,t)(\zeta - t) + \overline{W}(\zeta)\overline{\Omega'_2}(\zeta,t)(\overline{\zeta} - \overline{t})],\ \zeta = \zeta_* \in C'_\varepsilon.$$

В этом равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0\,(\zeta = \zeta_* \to t)$. Учитывая асимптотики (4.2.4), находим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{I}(\varepsilon) = -i2\pi W(t)$. Поэтому равенство (4.2.5) при $\varepsilon \to 0$ в пределе примет вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \Omega'_1(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega'_2}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta} = W(t),\ t \in D'. \tag{4.2.6}$$

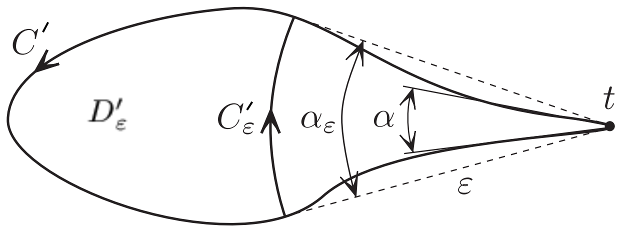

Рис. 4.2.2. Контур C' с заострением.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $t \in C'$ и в ней касательные, внутренние к контуру C', образуют угол $\alpha \in (0,\pi]$ (рис. 4.2.2). При $\alpha = \pi$ точка t — точка гладкости контура C'. Проведём из точки t окружность малого радиуса ε (C'_ε — дуга этой окружности с центральным углом α_ε). Для области D'_ε, ограниченной контуром $C \cup C'_\varepsilon$, имеет место равенство (4.2.5), в котором интеграл справа берётся по дуге C'_ε окружности $\zeta - t = \varepsilon e^{i\vartheta},\ \vartheta \in (0,\alpha_\varepsilon]$. Обозначив этот интеграл $\mathfrak{I}(\varepsilon)$, вычислим его по теореме о среднем:

$$\mathfrak{I}(\varepsilon) = \int\limits_{C'_\varepsilon} \Omega'_1(\zeta,t)W(\zeta)d\zeta - \overline{\Omega'_2}(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)d\overline{\zeta} =$$

$$= i\alpha_\varepsilon[W(\zeta)\Omega'_1(\zeta,t)(\zeta - t) + \overline{W}(\zeta)\overline{\Omega'_2}(\zeta,t)(\overline{\zeta} - \overline{t})],\ \zeta = \zeta_* = C'_\varepsilon.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ ($\zeta = \zeta_* \to t$, $\alpha_\varepsilon \to \alpha$), с учётом асимптотик (4.2.4) имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{I}(\varepsilon) = -i\alpha W(t)$. Тогда в рассматриваемом случае равенство (4.2.5) при $\varepsilon \to 0$ в пределе примет вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \Omega'_1(\zeta,t)W(\zeta)\,d\zeta - \overline{\Omega'}_2(\zeta,t)\overline{W}(\zeta)\,d\overline{\zeta} = \frac{\alpha}{2\pi}W(t), \quad t \in C'. \tag{4.2.7}$$

Если точка $t \notin \overline{D'}$ то в этом случае согласно (4.2.2) интеграл по контуру C' будет равен нулю.

Таким образом, согласно равенств (4.2.2), (4.2.6) и (4.2.7) после взаимной замены t и ζ в них, имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\Omega'_1(t,\zeta)W(t)\,dt-\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{W}(t)\,d\bar{t}=\begin{cases}W(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases}\qquad(4.2.8)$$

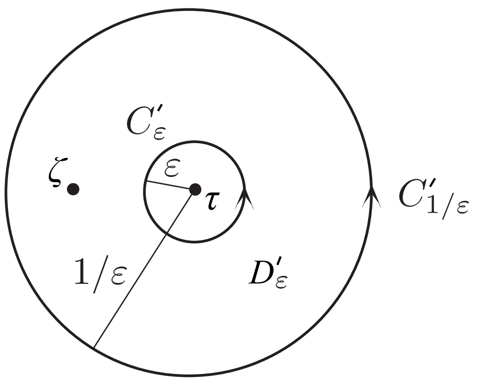

Рис. 4.2.3. Кольцо D'_ε.

Входящие в подынтегральное выражение (4.2.8) функции $\Omega'_1(t,\zeta)$, $\overline{\Omega}'_2(t,\zeta)$ выразим через главные решения $w_1(\zeta,\tau)$, $w_2(\zeta,\tau)$ по переменной ζ уравнения (4.1.3). Пусть τ — фиксированная точка области D'. Проведём из этой точки концентрические окружности $C'_\varepsilon : |\zeta-\tau|=\varepsilon$ и $C'_{1/\varepsilon} : |\zeta-\tau|=1/\varepsilon$, радиусы которых ε и $1/\varepsilon$ (ε — малое число) (рис. 4.2.3). В кольце $D'_\varepsilon : \varepsilon\leqslant|\zeta-\tau|\leqslant 1/\varepsilon$ решения $w_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ непрерывны и поэтому на основании формулы (4.2.8) имеем

$$\begin{aligned}w_k(\zeta,\tau)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{1/\varepsilon}}\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)\,dt-\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)\,d\bar{t}\,+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_\varepsilon}\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)\,dt-\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)\,d\bar{t},\end{aligned}$$

$$k=1,2\,,\quad \zeta\in D'_\varepsilon\,.\qquad(4.2.9)$$

Исследуем входящие в равенство (4.2.9) интегралы по окружностям $C'_{1/\varepsilon}$ и C'_ε, обозначив их $\mathcal{I}_k(1/\varepsilon)$ и $\mathcal{I}_k(\varepsilon)$, $k=1,2$. Из формул (3.1.14) и (4.2.1) имеем на окружности $C'_\varepsilon : t-\tau=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,2\pi]$ оценки

$$|w_k(t,\tau)|=O(1/\varepsilon)\,,\quad |\overline{V}'_k(t,\tau)|=O(1/\varepsilon)\,,\quad k=1,2\,,\quad t=t_\varepsilon\in C'_\varepsilon\,.$$

Точки $t_\varepsilon=\tau+\varepsilon e^{i\vartheta}$ и $t_{1/\varepsilon}=\tau+e^{i\vartheta}/\varepsilon$ окружностей C'_ε и $C'_{1/\varepsilon}$ взаимосвязаны преобразованием инверсии: $(t_\varepsilon-\tau)(\bar{t}_{1/\varepsilon}-\bar{\tau}\,)=1$ относительно окружности единичного радиуса, которая проведена из точки τ и расположена в кольце D'_ε. Поэтому на окружности $C'_{1/\varepsilon}$ имеем

$$|w_k(t,\tau)| = O(\varepsilon)\,,\quad |\overline{V'}_k(t,\tau)| = O(\varepsilon)\,,\quad k=1,2\,,\quad t=t_{1/\varepsilon}\in C'_{1/\varepsilon}\,. \tag{4.2.10}$$

Тогда на основании (4.2.3) и (4.2.10) находим, что на окружности $C'_{1/\varepsilon}$

$$|\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)| = O(\varepsilon^2),\quad |\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)w_k(t,\tau)| = O(\varepsilon^2),\quad k=1,2\,,\quad t=t_{1/\varepsilon}\in C'_{1/\varepsilon}\,.$$

Оценим интегралы $\mathfrak{I}_k(1/\varepsilon)$, $k=1,2$ по окружности $C'_{1/\varepsilon}$:

$$|\mathfrak{I}_k(1/\varepsilon)| = \left|\int\limits_{C'_{1/\varepsilon}} \Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)\,dt - \overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)\,d\bar t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{C'_{1/\varepsilon}} \left[|\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)| + |\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)|\right]dt \leqslant M_k\frac{2\pi}{\varepsilon},\quad k=1,2, \tag{4.2.11}$$

где $M_k = \max\left[|\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)| + |\overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)|\right] = O(\varepsilon^2)$, $t = t_{1/\varepsilon}\in C'_{1/\varepsilon}$.

Вычислим по теореме о среднем интегралы $\mathfrak{I}_k(\varepsilon)$, $k=1,2$ по окружности C'_ε. Учитывая, что на этой окружности $t-\tau=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,2\pi]$ и $dt = i\varepsilon e^{i\vartheta}\,d\vartheta = i(t-\tau)\,d\vartheta$, имеем

$$\mathfrak{I}_k(\varepsilon) = i2\pi[\Omega'_1(t,\zeta)w_k(t,\tau)(t-\tau) + \overline{\Omega'}_2(t,\zeta)\overline{w}_k(t,\tau)(\bar t-\bar\tau)],$$
$$k=1,2,\quad t=t_*\in C'_\varepsilon\,. \tag{4.2.11$'$}$$

Находим предельные значения выражений (4.2.11) и (4.2.11$'$) при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\mathfrak{I}_k(1/\varepsilon)| = 0\,,\quad k=1,2\,.$$

Учитывая, что в соответствии с формулами (3.1.14) имеют место асимптотики:

$$w_1(t,\tau)\sim -\frac{1}{2\pi|P'(\tau)|(t-\tau)}\,,\quad w_2(t,\tau)\sim\frac{1}{2\pi i|P'(\tau)|(t-\tau)}\quad\text{при}\quad t\to\tau\,,$$

находим

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(t=t_*\to\tau)}}\mathfrak{I}_1(\varepsilon) = \frac{\Omega'_1(\tau,\zeta)+\overline{\Omega}'_2(\tau,\zeta)}{i|P'(\tau)|}\,,\qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(t=t_*\to\tau)}}\mathfrak{I}_2(\varepsilon) = \frac{\Omega'_1(\tau,\zeta)-\overline{\Omega}'_2(\tau,\zeta)}{|P'(\tau)|}\,.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ равенства (4.2.9) в пределе примут вид

$$w_1(\zeta,\tau) = -\frac{\Omega_1'(\tau,\zeta) + \overline{\Omega'}_2(\tau,\zeta)}{2\pi|P'(\tau)|}\,, \quad w_2(\zeta,\tau) = \frac{\Omega_1'(\tau,\zeta) - \overline{\Omega'}_2(\tau,\zeta)}{2\pi i|P'(\tau)|}\,. \tag{4.2.12}$$

Из равенств (4.2.12) выразим $\Omega_1'(\tau,\zeta)$ и $\overline{\Omega'}_2(\tau,\zeta)$ через главные решения $w_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ по переменной ζ уравнения (4.1.3). Имеем

$$\Omega_1'(\tau,\zeta) = -\pi|P'(\tau)|\,[w_1(\zeta,\tau) - iw_2(\zeta,\tau)]\,,$$

$$\overline{\Omega'}_2(\tau,\zeta) = -\pi|P'(\tau)|\,[w_1(\zeta,\tau) + iw_2(\zeta,\tau)]$$

или кратко

$$\Omega_1'(\tau,\zeta) = -\Omega_1(\zeta,\tau)\,, \qquad \overline{\Omega'}_2 = -\Omega_2(\zeta,\tau)\,, \tag{4.2.13}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\Omega_1(\zeta,\tau) &= \pi|P'(\tau)|\,[w_1(\zeta,\tau) - iw_2(\zeta,\tau)]\,,\\ \Omega_2(\zeta,\tau) &= \pi|P'(\tau)|\,[w_1(\zeta,\tau) + iw_2(\zeta,\tau)]\,.\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Формулы (4.2.13) устанавливают взаимосвязь главных решений $w_k(\zeta,\tau)$ и $\overline{V_k'}(\tau,\zeta)$, $k=1,2$. Действительно, из этих формул с учётом равенств (4.2.3) и (4.2.14) находим

$$\overline{V_1'}(\tau,\zeta) = -\frac{P'(\zeta)|P'(\tau)|^2}{2P_1'(\zeta)P'(\tau)}\{w_1(\zeta,\tau) + \overline{w_1}(\zeta,\tau) - i[w_2(\zeta,\tau) + \overline{w_2}(\zeta,\tau)]\},$$

$$\overline{V_2'}(\tau,\zeta) = \frac{|P'(\tau)||P'(\zeta)|^2}{2P_1'(\zeta)P'(\tau)}\{w_2(\zeta,\tau) + \overline{w_2}(\zeta,\tau) + i[w_1(\zeta,\tau) - \overline{w_1}(\zeta,\tau)]\}.$$

Учитывая равенства (4.2.13), формулу (4.2.8) после замены в ней переменной интегрирования t на τ запишем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \Omega_1(\zeta,\tau)W(\tau)\,d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\overline{W}(\tau)\,d\bar\tau = \begin{cases} W(\zeta)\,, & \zeta \in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & \zeta \in C'\,,\\ 0\,, & \zeta \notin \overline{D'}\,.\end{cases} \tag{4.2.15}$$

Для плоскопараллельных течений в анизотропном однородном слое (его проводимость P' — комплексная постоянная) согласно формулам (3.1.11), (3.2.2) и (3.2.3) имеем

$$w_1(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi|P'|(\zeta-\tau)}\,, \qquad w_2(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi i|P'|(\zeta-\tau)}\,.$$

В этом случае согласно равенств (4.2.14) $\Omega_1(\zeta,\tau)=(\tau-\zeta)^{-1}$, $\Omega_2(\zeta,\tau)= = 0$, и, следовательно, (4.2.15) принимает вид формулы Коши [122]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{W(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}=\begin{cases}W(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases}$$

Поэтому формулу (4.2.15) будем называть *обобщённой* формулой Коши для *комплексного потенциала*, входящий в неё интеграл — *обобщённым* интегралом Коши для этого потенциала, а $\Omega_1(\zeta,\tau)$ и $\Omega_2(\zeta,\tau)$ — *ядрами* этого интеграла.

Формула (4.2.15) позволяет найти в случае анизотропного неоднородного слоя проводимости $P'(\zeta)$ комплексный потенциал $W(\zeta)$ течения в области $\overline{D'}=D'\cup C'$ по заданным его значениям на границе C' этой области. При этом должны быть известны ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$.

Ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ обобщённого интеграла Коши можно найти согласно равенств (4.2.14) по известным главным решениям $w_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.3). Используя равенства (3.1.11), (4.2.14) и комплексные операторы дифференцирования (3.1.12), записанные по переменной τ, эти ядра выразим через фундаментальные решения $F_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (3.1.3):

$$\begin{aligned}\Omega_1(\zeta,\tau)&=-2\pi P'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\tau}=-2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\tau}\,,\\ \Omega_2(\zeta,\tau)&=-2\pi\overline{P'}(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}=2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}.\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

Как следует из равенств (4.2.16), фундаментальные решения $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$ сопряжены по точке-параметру τ. А именно, выполняются условия

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\tau}-\frac{i}{P'(\tau)}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\tau}=0,\qquad\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}+\frac{i}{\overline{P'}(\tau)}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}=0,\tag{4.2.17}$$

которые идентичны условиям (3.1.15″). Учитывая условия (4.2.17), ядра запишем в симметричном виде

$$\begin{aligned}\Omega_1(\zeta,\tau)&=-\pi\left[P'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\tau}+i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\tau}\right],\\ \Omega_2(\zeta,\tau)&=-\pi\left[\overline{P'}(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}-i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar\tau}\right].\end{aligned}\tag{4.2.16′}$$

Используя определение отрицательных формальных степеней (3.3.18), представим ядра через степени $Z_k^{(-1)}(\zeta,\tau)$, $k=1,2$:

$$\begin{aligned}\Omega_1(\zeta,\tau) &= -\frac{|P'(\tau)|}{2}\left[Z_1^{(-1)}(\zeta,\tau)+iZ_2^{(-1)}(\zeta,\tau)\right],\\ \Omega_2(\zeta,\tau) &= -\frac{|P'(\tau)|}{2}\left[Z_1^{(-1)}(\zeta,\tau)-iZ_2^{(-1)}(\zeta,\tau)\right].\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Таким образом, ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ могут быть найдены по любой из указанных формул: (4.2.14), (4.2.16), (4.2.16′), (4.2.18).

Так как ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ связаны равенствами (4.2.14) с решениями $w_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.3) по переменной ζ ($\zeta\neq\tau$), то эти ядра по переменной ζ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Omega_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar\zeta}+A(\zeta)\left[\Omega_1(\zeta,\tau)-\overline{\Omega}_2(\zeta,\tau)\right]=0,\\ \frac{\partial\Omega_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar\zeta}+A(\zeta)\left[\Omega_2(\zeta,\tau)-\overline{\Omega}_1(\zeta,\tau)\right]=0\\ \left(A(\zeta)=\frac{\overline{P'}(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{\partial\ln P'(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right).\end{gathered} \tag{4.2.19}$$

Обобщённая формула Коши для комплексной скорости

Получим теперь обобщённую формулу Коши для комплексной скорости. Воспользуемся равенством (4.1.8), в котором используем главные решения $w_k'(\zeta,t)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.5) по переменной ζ (t — точка параметр). Учитывая асимптотики (3.1.14), имеем для слоя проводимости $\widetilde{P'}=\overline{P'}$ асимптотику решений (идентичную в случае слоя проводимости P'):

$$w_1'(\zeta,t)\sim-\frac{1}{2\pi|P'(t)|(\zeta-t)},\quad w_2'(\zeta,t)\sim\frac{1}{2\pi i|P'(t)|(\zeta-t)}\quad \text{при}\quad \zeta\to t. \tag{4.2.20}$$

Исходя из асимптотик (4.2.20), в равенстве (4.1.8) в качестве W' выберем $|P'(t)|w_k'(\zeta,t)/\overline{P'}(t)$, $k=1,2$. Получим

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int\limits_{C'}\frac{\overline{P'}(\zeta)|P'(t)|}{\overline{P'}(t)}w_k'(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)d\zeta\right]=0,\ k=1,2. \tag{4.2.21}$$

Согласно асимптотик (4.2.20) решения $w'_k(\zeta,t), k=1,2$ имеют в точке t простой полюс. Поэтому необходимо рассмотреть (как это было сделано выше при выводе обобщённой формулы Коши для комплексного потенциала) следующие случаи, когда $t\in D'$, $t\in C'$ и $t\notin \overline{D'}$ ($\overline{D'}=D'\cup C'$). Если $t\in D'$, то применим равенства (4.2.21) для области D'_ε, ограниченной контуром C' и окружностью C'_ε малого радиуса ε, проведённой из точки t (рис. 4.2.1). Получаем равенства

$$\int\limits_{C'}|P'(t)|\left[\frac{\overline{P'}(\zeta)}{\overline{P'}(t)}w'_k(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)\,d\zeta-\frac{P'(\zeta)}{P'(t)}\overline{w'}_k(\zeta,t)V(\zeta)\,d\bar\zeta\right]=$$
$$=\int\limits_{C_\varepsilon}|P'(t)|\left[\frac{\overline{P'}(\zeta)}{\overline{P'}(t)}w'_k(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)\,d\zeta-\frac{P'(\zeta)}{P'(t)}w_k(\zeta,t)V(\zeta)\,d\bar\zeta\right],\quad k=1,2\,.$$

Умножим второе ($k=2$) из этих равенств на $-i$ и полученное сложим с первым ($k=1$). После умножения на π и вводя обозначения

$$\begin{aligned}\omega'_1(\zeta,t)&=\frac{\pi\overline{P'}(\zeta)|P'(t)|}{\overline{P'}(t)}\left[w'_1(\zeta,t)-iw'_2(\zeta,t)\right],\\ \omega'_2(\zeta,t)&=\frac{\pi\overline{P'}(\zeta)|P'(t)|}{\overline{P'}(t)}\left[w'_1(\zeta,t)+iw'_2(\zeta,t)\right],\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

находим

$$\int\limits_{C'}\omega'_1(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)\,d\zeta-\overline{\omega}'_2(\zeta,t)V(\zeta)\,d\bar\zeta=\int\limits_{C'_\varepsilon}\omega'_1(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)\,d\zeta-\overline{\omega}'_2(\zeta,t)V(\zeta)\,d\bar\zeta\,.\tag{4.2.23}$$

В равенстве (4.2.23) обозначим интеграл по окружности C'_ε как $\mathcal{I}(\varepsilon)$ и вычислим его по теореме о среднем. Так как на этой окружности $\zeta-t=$ $=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,2\pi]$, $d\zeta=i(\zeta-t)\,d\vartheta$, $d\bar\zeta=-i(\bar\zeta-\bar t\,)\,d\vartheta$, то имеем

$$\mathcal{I}(\varepsilon)=\int\limits_{C'_\varepsilon}\omega'_1(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)\,d\zeta-\overline{\omega}'_2(\zeta,t)V(\zeta)\,d\bar\zeta=$$
$$=i2\pi[\omega'_1(\zeta,t)\overline{V}(\zeta)(\zeta-t)+\overline{\omega}'_2(\zeta,t)V(\zeta)(\bar\zeta-\bar t\,)],\quad \zeta=\zeta_*\in C'_\varepsilon.$$

или, учитывая равенства (4.2.22), получаем

$$\mathcal{I}(\varepsilon) = i2\pi^2 |P'(t)| \left\{ \overline{V}(\zeta) \frac{\overline{P'}(\zeta)}{\overline{P'}(t)} [w_1'(\zeta,t) - iw_2'(\zeta,t)](\zeta - t) + \right.$$
$$\left. + V(\zeta) \frac{P'(\zeta)}{P'(t)} [\overline{w'}_1(\zeta,t) - i\overline{w'}_2(\zeta,t)(\bar{\zeta} - \bar{t}\,)] \right\}, \quad \zeta = \zeta_* \in C'_\varepsilon.$$

Переходя в этом выражении к пределу при $\varepsilon \to 0$ $(\,\zeta = \zeta_* \to t\,)$ и учитывая асимптотики (4.2.20), находим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(\varepsilon) = -i2\pi \overline{V}(t)\,, \quad t \in D'\,.$$

Если точка $t \in C'$ (рис. 4.2.2), то в этом случае интеграл $\mathcal{I}(\varepsilon)$ по теореме о среднем равен

$$\mathcal{I}(\varepsilon) = i\alpha_\varepsilon \left[\omega_1'(\zeta,t) \overline{V}(\zeta)(\zeta - t) + \overline{\omega}_2'(\zeta,t) V(\zeta)(\bar{\zeta} - \bar{t}\,) \right], \quad \zeta = \zeta_* \in C'_\varepsilon\,.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ $(\,\zeta = \zeta_* \to t\,,\ \alpha_\varepsilon \to \alpha\,)$, имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{I}(\varepsilon) = -i\alpha \overline{V}(t)\,, \quad t \in C'\,.$$

Если точка $t \notin \overline{D'}$ $(\,\overline{D'} = D' \cup C'\,)$, то согласно равенству (4.2.21) интеграл по контуру C' будет равен нулю.

Таким образом, равенство (4.2.23) при $\varepsilon \to 0$ в пределе после взаимной замены t и ζ запишем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \omega_1'(t,\zeta) \overline{V}(t)\, dt - \overline{\omega}_2'(t,\zeta) V(t)\, d\bar{t} = \begin{cases} \overline{V}(\zeta)\,, & \zeta \in D'\,, \\ \dfrac{\alpha}{2\pi} \overline{V}(\zeta)\,, & \zeta \in C'\,, \\ 0\,, & \zeta \notin \overline{D'}\,. \end{cases} \qquad (4.2.24)$$

Входящие в формулу (4.2.24) функции $\omega_1'(t,\zeta)$, $\overline{\omega}_2'(t,\zeta)$ выразим через главные решения $\overline{V}_1(\zeta,\tau)$, $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$ уравнения (4.1.4) по переменной ζ $(\,\tau$ — точка-параметр). Применим эту формулу к кольцу D'_ε с внутренней C'_ε и наружной $C'_{1/\varepsilon}$ окружностями, проведенными из точки τ (рис. 4.2.3).

Имеем

$$\overline{V}_k(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{1/\varepsilon}} \omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\,dt - \overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)\,d\bar{t} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{\varepsilon}} \omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\,dt - \overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)\,d\bar{t}\,, \quad k=1,2\,, \ \ \zeta\in D'_\varepsilon\,. \quad (4.2.25)$$

Исследуем входящие в равенство (4.2.25) интегралы $\mathcal{I}_k(1/\varepsilon)$ и $\mathcal{I}_k(\varepsilon)$, $k=1,2$ по окружностям $C'_{1/\varepsilon}$ и C'_ε.

Так как на окружности $C'_{1/\varepsilon}$ для $w_k(t,\tau)$ и $\overline{V}_k(t,\tau)$, $k=1,2$ имеют место оценки (4.2.10)($\overline{V_k}(t,\zeta)$ имеет такой же порядок, что и $\overline{V'_k}(t,\zeta)$), то

$$\left|\omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\right| = O(\varepsilon^2)\,,\ |\overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)| = O(\varepsilon^2)\,,\ k=1,2\,,\ t=t_{1/\varepsilon}\in C'_{1/\varepsilon}.$$

Поэтому по аналогии с выражениями (4.2.11) имеем для модулей интегралов $\mathcal{I}_k(1/\varepsilon)$, $k=1,2$ оценки

$$|\mathcal{I}_k(1/\varepsilon)| = \left|\int\limits_{C'_{1/\varepsilon}} \omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\,dt - \overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)\,d\bar{t}\right| \leqslant M_k\frac{2\pi}{\varepsilon}\,, \quad (4.2.26)$$

где $M_k = \max\left[\left|\omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\right| + \left|\overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)\right|\right] = O(\varepsilon^2)$, $k=1,2$.

Интегралы $\mathcal{I}_k(\varepsilon)$, $k=1,2$, по окружности C'_ε вычислим по теореме о среднем. Так как на этой окружности $t-\zeta=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,2\pi]$ и $dt = i(t-\tau)\,d\vartheta$, $d\bar{t} = -i(\bar{t}-\bar{\tau}\,)\,d\vartheta$, то находим

$$\mathcal{I}_k(\varepsilon) = \int\limits_{C'_\varepsilon} \omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)\,dt - \overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)\,d\bar{t} =$$

$$= i2\pi\left[\omega'_1(t,\zeta)\overline{V}_k(t,\tau)(t-\tau) + \overline{\omega}'_2(t,\zeta)V_k(t,\tau)(\bar{t}-\bar{\tau}\,)\right],$$

$$k=1,2, \qquad t=t_*\in C'_\varepsilon. \quad (4.2.26')$$

Вычислим предельные значения выражений (4.2.26) и (4.2.26′) при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_k(1/\varepsilon) = 0\,, \qquad k=1,2\,.$$

Учитывая, что в соответствии с выражениями (3.1.9) имеют место асимптотики

$$\overline{V}_1(t,\tau) \sim -\frac{1}{2\pi P_1'(\tau)(t-\tau)}\,, \quad \overline{V}_2(t,\tau) \sim -\frac{P'(\tau)}{2\pi i P_1'(\tau)(t-\tau)} \quad \text{при} \quad t\to\tau\,,$$

находим

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (t=t_*\to\tau)}} \mathcal{I}_1(\varepsilon)=\frac{\omega_1'(\tau,\zeta)+\omega_2'(\tau,\zeta)}{iP_1'(\tau)}\,, \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (t=t_*\to\tau)}} \mathcal{I}_2(\varepsilon)=\frac{\overline{P'}(\tau)\overline{\omega}_2'(\tau,\zeta)-P'(\tau)\omega_1'(\tau,\zeta)}{P_1'(\tau)}\,.$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$ равенства (4.2.25) в пределе принимают вид

$$\overline{V}_1(\zeta,\tau) = -\frac{\omega_1'(\tau,\zeta)+\overline{\omega}_2'(\tau,\zeta)}{2\pi P_1'(\tau)}\,, \quad \overline{V}_2(\zeta,\tau) = \frac{\overline{P'}(\tau)\overline{\omega}_2'(\tau,\zeta)-P'(\tau)\omega_1'(\tau,\zeta)}{2\pi i P_1'(\tau)}\,.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\omega_1'(\tau,\zeta) &= -\pi[\overline{P'}(\tau)\overline{V}_1(\zeta,\tau)+i\overline{V}_2(\zeta,\tau)],\\ \overline{\omega}_2'(\tau,\zeta) &= -\pi[P'(\tau)\overline{V}_1(\zeta,\tau)-i\overline{V}_2(\zeta,\tau)]\end{aligned}$$

или

$$\omega_1'(\tau,\zeta) = -\omega_1(\zeta,\tau)\,, \qquad \overline{\omega}_2'(\tau,\zeta) = -\omega_2(\zeta,\tau)\,, \tag{4.2.27}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\omega_1(\zeta,\tau) &= \pi\left[\overline{P'}(\tau)\overline{V}_1(\zeta,\tau)+i\overline{V}_2(\zeta,\tau)\right],\\ \omega_2(\zeta,\tau) &= \pi\left[P'(\tau)\overline{V}_1(\zeta,\tau)-i\overline{V}_2(\zeta,\tau)\right].\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Учитывая равенства (4.2.27), (4.2.28), формулу (4.2.24) запишем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\omega_1(\zeta,\tau)\overline{V}(\tau)\,d\tau-\omega_2(\zeta,\tau)V(\tau)\,d\bar\tau = \begin{cases}\overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}\overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases} \tag{4.2.29}$$

В случае плоскопараллельных течений в анизотропном однородном слое (его проводимость P' — комплексная постоянная) на основании формул (3.1.18′), (3.2.2) и (3.2.3) имеем

$$\overline{V}_1(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi P_1'(\zeta-\tau)}\,, \qquad \overline{V}_2(\zeta,\tau) = \frac{iP'}{2\pi P_1'(\zeta-\tau)}\,.$$

В этом случае из равенств (4.2.28) находим

$$\omega_1(\zeta,\tau) = -\frac{1}{\zeta-\tau}\,, \qquad \omega_2(\zeta,\tau) = 0\,.$$

Тогда формула (4.2.29) принимает вид формулы Коши для комплексно сопряжённой скорости $\overline{V}(\zeta)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\overline{V}(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \begin{cases} \overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}\overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin \overline{D'}\,. \end{cases}$$

Поэтому выражение (4.2.29) назовём *обобщённой* формулой Коши для *комплексно сопряжённой скорости*, стоящий в ней интеграл — *обобщённым* интегралом Коши для этой скорости, а $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ — *ядрами* этого интеграла.

Формула (4.2.29) позволяет в случае течений в анизотропном неоднородном слое проводимости $P'(\zeta)$ находить комплексную скорость течения в области $\overline{D'} = D'\cup C'$ по значениям этой скорости на границе C'. При этом ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ должны быть известны.

Ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ выражаются согласно равенству (4.2.28) через главные решения $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.4). Учтём, что главные $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ и фундаментальные $F_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ решения уравнения (4.1.3) взаимосвязаны согласно формуле (3.1.17) равенствами

$$\overline{V}_k(\zeta,\tau) = \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma F_k(\zeta,\tau)}{d\zeta}\,, \qquad k=1,2\,.$$

Тогда ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ в соответствии с формулами (4.2.28) можно выразить через фундаментальные решения $F_k(\zeta,\tau), k=1,2$:

$$\omega_k(\zeta,\tau) = \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma \mathcal{F}_k(\zeta,\tau)}{d\zeta}\,, \qquad k=1,2\,, \tag{4.2.30}$$

где

$$\mathcal{F}_1(\zeta,\tau) = \pi[\overline{P'}(\tau)F_1(\zeta,\tau)+iF_2(\zeta,\tau)],\ \ \mathcal{F}_2(\zeta,\tau) = \pi[P'(\tau)F_1(\zeta,\tau)-iF_2(\zeta,\tau)].$$

Таким образом, ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ можно найти по любой из указанных формул (4.2.28) или (4.2.30).

Так как ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ связаны равенствами (4.2.28) с главными решениями $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.4) по переменной ζ (τ — точка-параметр), то ядра по этой переменной удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar{\zeta}}+\overline{B}(\zeta)\omega_1(\zeta,\tau)+B(\zeta)\overline{\omega}_2(\zeta,\tau)=0\,,\\
&\frac{\partial\omega_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar{\zeta}}+\overline{B}(\zeta)\omega_2(\zeta,\tau)+B(\zeta)\overline{\omega}_1(\zeta,\tau)=0
\end{aligned}\tag{4.2.31}$$

$$\left(B(\zeta)=\frac{1}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{\partial P'(\zeta)}{\partial\zeta},\ \bar{B}'(\zeta)=\frac{1}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{\partial\overline{P'}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right).$$

Асимптотики ядер $\boldsymbol{\Omega_k(\zeta,\tau)}$ и $\boldsymbol{\omega_k(\zeta,\tau)}$, $\boldsymbol{k=1,2}$

Введённые выше функции $\Omega_k(\zeta,\tau)$ и $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ резонно названы ядрами поскольку в случае $k=1$ они имеют при $\tau\to\zeta$ асимптотиками выражение ядра $1/(\zeta-\tau)$ интеграла Коши для аналитических функций. Действительно, согласно выражений (3.1.14) и (3.1.19) для главных решений $w_k(\zeta,\tau)$ и $\overline{V_k}(\zeta,\tau)\,,k=1,2$ имеем при $\tau\to\zeta$ асимптотики

$$w_1(\zeta,\tau)\sim-\frac{1}{2\pi|P'(\tau)|(\zeta-\tau)}\,,\qquad w_2(\zeta,\tau)\sim\frac{1}{2\pi i|P'(\tau)|(\zeta-\tau)}\,,$$

$$\overline{V}_1(\zeta,\tau)\sim-\frac{1}{2\pi P_1'(\tau)(\zeta-\tau)}\,,\qquad \overline{V}_2(\zeta,\tau)\sim-\frac{P'(\tau)}{2\pi i P_1'(\tau)(\zeta-\tau)}\,.$$

Тогда на основании равенств (4.2.14) и (4.2.28) имеем при $\tau\to\zeta$ одинаковые асимптотики ядер

$$\begin{aligned}
&\Omega_1(\zeta,\tau)\sim\frac{1}{\tau-\zeta}\,,\qquad \Omega_2(\zeta,\tau)\sim 0\,,\\
&\omega_1(\zeta,\tau)\sim\frac{1}{\tau-\zeta}\,,\qquad \omega_2(\zeta,\tau)\sim 0\,.
\end{aligned}\tag{4.2.32}$$

Из выражений (4.2.32) видно, что асимптотики ядер $\Omega_k(\zeta,\tau)$ и $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ не зависят от проводимости слоя P'. Асимптотиками ядер $\Omega_1(\zeta,\tau)$ и $\omega_1(\zeta,\tau)$ является выражение ядра интеграла Коши для аналитических функций. Это приводит к тому, что определяемые формулами (4.2.15) и (4.2.29) комплексный потенциал $W(\zeta)$ и комплексная скорость $\overline{V}(\zeta)$ обладают рядом свойств, характерных для аналитических функций, представленных интегралом Коши (типа Коши).

Конформная ковариантность обобщённого интеграла Коши и обобщённой формулы Коши

Покажем, что обобщённый интеграл Коши и обобщённая формула Коши конформно ковариантны, то есть сохраняют свою форму относительно конформных преобразований. Пусть комплексные плоскости ζ и ζ_1 связаны взаимнооднозначным конформным преобразованием

$$\zeta = f(\zeta_1)\,, \qquad \zeta_1 = f_1(\zeta)\,,$$

где $f(\zeta_1)$ — аналитическая функция ζ_1 ($df(\zeta_1)/d\bar{\zeta}_1 = 0$), а $f_1(\zeta)$ — функция, обратная $f(\zeta_1)$. Полагаем, что производная $df(\zeta_1)/d\zeta_1$ — конечная и отличная от нуля в области $\overline{D'}_1$ плоскости ζ_1 ($\overline{D'}_1 = D'_1 \cup C'_1, C'_1$ — контур, ограничивающий область D'_1), которая является образом области $\overline{D'} = D' \cup C'$ плоскости ζ.

На плоскости ζ_1 течение происходит в слое проводимости $P'(\zeta_1) = P'[f(\zeta_1)]$. Учтём, что точка-параметр τ в решениях $F_k(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$ преобразуется согласно тем же конформным преобразованиям. Находим

$$\frac{\partial F_k}{\partial \tau}\, d\tau = \left(\frac{\partial F_k}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} + \frac{\partial F_k}{\partial \bar{\tau}_1}\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \tau}\right) d\tau = \frac{\partial F'_k}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau}\, d\tau = \frac{\partial F'_k}{\partial \tau_1}\, d\tau_1\,,$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial \bar{\tau}}\, d\bar{\tau} = \left(\frac{\partial F_k}{\partial \tau_1}\frac{\partial \tau_1}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial F_k}{\partial \bar{\tau}_1}\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \bar{\tau}}\right) d\bar{\tau} = \frac{\partial F'_k}{\partial \bar{\tau}_1}\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \bar{\tau}}\, d\bar{\tau} = \frac{\partial F'_k}{\partial \bar{\tau}_1}\, d\bar{\tau}_1\,,$$

где $F'_k = F'_k(\zeta_1, \tau_1) = F_k[f(\zeta_1), f(\tau_1)]$, $k = 1, 2$.

Тогда обобщённая формула Коши (4.2.15) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_1} \Omega'_1(\zeta_1, \tau_1) W'(\tau_1)\, d\tau_1 - \Omega'_2(\zeta_1, \tau_1)\overline{W'}(\tau_1)\, d\bar{\tau}_1 = \begin{cases} W'(\zeta_1)\,, & \zeta_1 \in D'_1\,, \\ \dfrac{\alpha}{2\pi} W'(\zeta_1)\,, & \zeta_1 \in C'_1\,, \\ 0\,, & \zeta_1 \notin \overline{D'}_1\,, \end{cases} \tag{4.2.33}$$

где ядра

$$\Omega'_1(\zeta_1, \tau_1) = -2\pi P'(\tau_1)\frac{\partial F'_1(\zeta_1, \tau_1)}{\partial \tau_1} = -2\pi i \frac{\partial F'_2(\zeta_1, \tau_1)}{\partial \tau_1}\,,$$

$$\Omega'_2(\zeta_1, \tau_1) = -2\pi \overline{P'}(\tau_1)\frac{\partial F'_1(\zeta_1, \tau_1)}{\partial \bar{\tau}_1} = 2\pi i \frac{\partial F'_2(\zeta_1, \tau_1)}{\partial \bar{\tau}_1}\,.$$

Учитывая, что $d\tau = \frac{df(\tau_1)}{d\tau_1} d\tau_1$, обобщённую формулу Коши для комплексной скорости (4.2.29) запишем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'_1} \omega'_1(\zeta_1, \tau_1) \overline{V'}(\tau_1)\, d\tau_1 - \omega'_2(\zeta_1, \tau_1) V(\tau_1)\, d\bar{\tau}_1 = \begin{cases} \overline{V}'(\zeta_1), & \zeta_1 \in D'_1, \\ \dfrac{\alpha}{2\pi} \overline{V}'(\zeta_1), & \zeta_1 \in C'_1, \\ 0, & \zeta_1 \notin \overline{D'}_1. \end{cases} \tag{4.2.34}$$

где ядра

$$\omega'_1(\zeta_1, \tau_1) = \pi P'_1(\tau_1) \left[\overline{V'}_1(\zeta_1, \tau_1) + i \frac{\overline{V'}_2(\zeta_1, \tau_1)}{P'(\tau_1)} \right] \frac{df(\tau_1)}{d\tau_1},$$

$$\omega'_2(\zeta_1, \tau_1) = \pi P'_1(\tau_1) \left[\overline{V'}_1(\zeta_1, \tau_1) - i \frac{\overline{V'}_2(\zeta_1, \tau_1)}{P'(\tau_1)} \right] \frac{d\bar{f}(\tau_1)}{d\bar{\tau}_1}$$

$$\left(\overline{V'}_k(\zeta_1, \tau_1) = \overline{V}_k[f(\zeta_1), f(\tau_1)], \quad k = 1, 2 \right).$$

Из формул (4.2.33) и (4.2.34) следует, что обобщённый интеграл Коши и обобщённая формула Коши для комплексного потенциала и комплексной скорости конформно ковариантны. Это позволяет на плоскости ζ по известным комплексному потенциалу (комплексной скорости) течения в канонической области слоя проводимости $P'(\zeta)$ находить комплексные потенциалы (комплексные скорости) течения в более сложных областях слоёв проводимостей $P'(\zeta_1)$, связанных со слоями проводимостей $P'(\zeta)$ конформными преобразованиями.

Гидродинамический смысл обобщённых формул Коши

Выясним гидродинамический смысл обобщённых формул Коши (4.2.15) и (4.2.29). Для этого воспользуемся связанным с кривой C' координатным базисом взаимно ортогональных ортов касательной $\vec{l} = (\cos\theta, \sin\theta)$ и нормали $\vec{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (θ — угол между $\vec{l}$ и осью $O\xi$, рис. 4.2.4). Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ — одна из точек кривой C' ($\tau = \zeta_0 \in C'$). Тогда из формул (3.3.10′) и (3.3.16′) при $M_1 = M'_1 = 1$, $\alpha_1 = \alpha'_1 = \theta$ и $\alpha_1 = \alpha'_1 = \theta + \pi/2$ имеем нормированные комплексные потенциалы диполей $w_1^0(\zeta, \tau)$ и $w_2^0(\zeta, \tau)$, моменты которых $\vec{M}$ и $\vec{M}'$ ориентированы в направлении ортов $\vec{l}$ и $\vec{n}$:

$$
\begin{aligned}
w_1^0(\zeta,\tau) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \xi_0}\cos(\theta+\delta) - \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \eta_0}\sin(\theta+\delta) = \\
&= -\frac{1}{|P'(\tau)|}\left[-\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \xi_0}\sin\theta + \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \eta_0}\cos\theta\right], \\
w_2^0(\zeta,\tau) &= -\left[-\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \xi_0}\sin(\theta+\delta) + \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \eta_0}\cos(\theta+\delta)\right] = \\
&= \frac{1}{|P'(\tau)|}\left[\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \xi_0}\cos\theta + \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \eta_0}\sin\theta\right],\ \tau=\zeta_0\in C',
\end{aligned}
\tag{4.2.35}
$$

где и далее $\theta=\theta_\tau\equiv\theta(\tau)$, $\delta=\delta_\tau\equiv$ $\equiv\delta(\tau)$. Введём согласно формулам (1.2.24) в случае $P_{12}<P_{21}$ тензора проводимости $P'=\begin{pmatrix} P_1' & P_2' \\ -P_2' & P_1'\end{pmatrix}$ взаимно ортогональные[1] орты кокасательной $\vec{s}$ и конормали $\vec{\nu}$ в той же точке $\tau=\zeta_0\in C'$ (орт $\vec{s}$ направлен под углом $\theta+\delta$ к оси $O\xi$, угол δ задаёт направление орта $\vec{l_p}=(\cos\delta,\sin\delta)$):

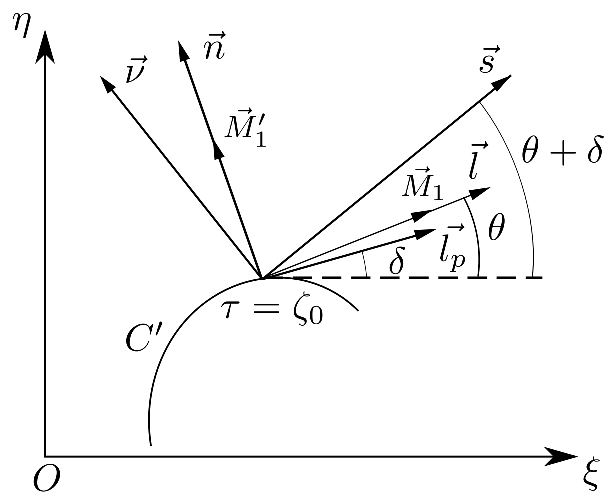

Рис. 4.2.4. Диполи в координатном базисе, связанным с кривой C'.

$$
\begin{aligned}
\vec{s} &= \frac{\vec{l}\cdot P'}{|\vec{l}\cdot P'|} = \vec{l}\cos\delta+\vec{n}\sin\delta = \cos(\theta+\delta)\vec{\imath}+\sin(\theta+\delta)\vec{\jmath}, \\
\vec{\nu} &= \frac{\vec{n}\cdot P'}{|\vec{n}\cdot P'|} = \vec{n}\cos\delta-\vec{l}\sin\delta = -\sin(\theta+\delta)\vec{\imath}+\cos(\theta+\delta)\vec{\jmath},
\end{aligned}
\tag{4.2.36}
$$

где

$$
\cos\delta=\frac{P_1'}{|P'|},\ \ \sin\delta=\frac{P_2'}{|P'|},\ \ |P'|=\left[{P_1'}^2+{P_2'}^2\right]^{1/2}.
$$

Тогда запишем

$$
\begin{aligned}
w_1^0(\zeta,\tau) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial s_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau}, \\
w_2^0(\zeta,\tau) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \nu_\tau} = \frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},\ \tau=\zeta_0\in C',
\end{aligned}
\tag{4.2.35$'$}
$$

[1]Действительно, орты $\vec{s}$ и $\vec{\nu}$ взаимно ортогональные, так как $\vec{s}\cdot\vec{\nu}=0$.

где согласно равенствам (4.2.36)

$$\frac{\partial}{\partial s_\tau} = \vec{s}\cdot\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial l_\tau}\cos\delta + \frac{\partial}{\partial n_\tau}\sin\delta = \frac{\partial}{\partial \xi_0}\cos(\theta+\delta) + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\sin(\theta+\delta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\tau} = \vec{\nu}\cdot\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial n_\tau}\cos\delta - \frac{\partial}{\partial l_\tau}\sin\delta = -\frac{\partial}{\partial \xi_0}\sin(\theta+\delta) + \frac{\partial}{\partial \eta_0}\cos(\theta+\delta),$$

$\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial\xi_0}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\vec{\jmath}$ — оператор Гамильтона по координатам точки $\tau = \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in C'$.

Из формул (4.2.35′) видно, что нормированный комплексный потенциал ${w_1}^0(\zeta,\tau)$ получается путём предельного сближения пары источник-сток ($M_1 = \lim\limits_{\substack{\triangle l\to 0\\ (\Pi\to\infty)}}(\Pi\triangle l) = 1$) вдоль орта $\vec{s}$ либо пары вихрей ($M_1' = \lim\limits_{\substack{\triangle l\to 0\\ (\mathcal{T}\to\infty)}}(\mathcal{T}\triangle l) = 1$) в направлении орта $\vec{n}$. Нормированный комплексный потенциал ${w_2}^0(\zeta,\tau)$ — результат предельного сближения тех же пар источник-сток вдоль орта $\vec{\nu}$ или вихрей вдоль орта $\vec{l}$.

В тех точках $\tau = \zeta_0 \in C'$, где $\theta = 0$ (орты $\vec{l}$ и $\vec{n}$ ориентированы по осям $O\xi$ и $O\eta$), согласно (4.2.36) $\vec{s} = \vec{l_p} = (\cos\delta, \sin\delta)$, $\vec{\nu} = \vec{n_p} = (-\sin\delta, \cos\delta)$. Тогда из равенств (4.2.35′) имеем нормированные комплексные потенциалы диполей $w_1(\zeta,\tau)$ и $w_2(\zeta,\tau)$, моменты которых направлены вдоль осей $O\xi$ и $O\eta$, формулы в виде (совпадающем с (3.3.16‴)):

$$\begin{aligned} w_1(\zeta,\tau) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_p} = -\frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \eta_0},\\ w_2(\zeta,\tau) &= -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial n_p} = \frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial \xi_0},\ \tau = \zeta_0 \in C', \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial l_p} = \vec{l_p}\cdot\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial\xi_0}\cos\delta + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\sin\delta,\ \frac{\partial}{\partial n_p} = \vec{n_p}\cdot\nabla_0 = -\frac{\partial}{\partial\xi_0}\sin\delta + \frac{\partial}{\partial\eta_0}\cos\delta.$$

Учитывая

$$\cos(\theta+\delta) = \cos\theta\cos\delta - \sin\theta\sin\delta, \quad \sin(\theta+\delta) = \sin\theta\cos\delta + \cos\theta\sin\delta,$$

из равенств (4.2.35) и (4.2.37) имеем для любых точек кривой C':

$$\begin{aligned} w_1^0(\zeta,\tau) &= w_1(\zeta,\tau)\cos\theta_\tau + w_2(\zeta,\tau)\sin\theta_\tau,\\ w_2^0(\zeta,\tau) &= -w_1(\zeta,\tau)\sin\theta_\tau + w_2(\zeta,\tau)\cos\theta_\tau,\ \tau\in C'. \end{aligned} \tag{4.2.37′}$$

Ясно, что $w_1^0(\zeta,\tau)$ и $w_2^0(\zeta,\tau)$ — главные решения уравнения (2.3.21), имеющие в точке $\tau=\zeta_0\in C'$ простой полюс (полюс первого порядка).

Аналогично формулам (4.2.14) введём ядра

$$\begin{aligned}\Omega_1^0(\zeta,\tau)&=\pi|P'(\tau)|\left[w_1^0(\zeta,\tau)-iw_2^0(\zeta,\tau)\right],\\ \Omega_2^0(\zeta,\tau)&=\pi|P'(\tau)|[w_1^0(\zeta,\tau)+iw_2^0(\zeta,\tau)].\end{aligned}\tag{4.2.37''}$$

Тогда ядра $\Omega_k^0(\zeta,\tau)$ и $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ согласно (4.2.37′) связаны равенствами

$$\begin{aligned}\Omega_1^0(\zeta,\tau)&=\Omega_1(\zeta,\tau)e^{i\theta_\tau}=[w_1(\zeta,\tau)-iw_2(\zeta,\tau)]\,e^{i\theta_\tau},\\ \Omega_2^0(\zeta,\tau)&=\Omega_2(\zeta,\tau)e^{-i\theta_\tau}=[w_1(\zeta,\tau)+iw_2(\zeta,\tau)]\,e^{-i\theta_\tau}.\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

Тогда формулу (4.2.15) при учёте равенств (4.2.38) и $d\tau=dl_\tau e^{i\theta_\tau}$ запишем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\left[\Omega_1^0(\zeta,\tau)W(\tau)-\Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{W}(\tau)\right]\,dl_\tau=\begin{cases}W(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & z\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases}\tag{4.2.15'}$$

Используя формулы (4.2.35′) и (4.2.37′), представим ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k==1,2$ интеграла (4.2.15′) через фундаментальные решения $F_k(\zeta,\tau)$, $k==1,2$ в виде

$$\begin{aligned}\Omega_1^0(\zeta,\tau)&=-2\pi P'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau}=-2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau},\\ \Omega_2^0(\zeta,\tau)&=-2\pi\overline{P'}(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau}=2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau},\end{aligned}\tag{4.2.39}$$

где введены аналогично (2.1.11) комплексные операторы дифференцирования по $\lambda_\tau=l_\tau+in_\tau$ и $\bar\lambda_\tau=l_\tau-in_\tau$, которые взаимосвязаны с производными по направлениям ортов касательной $\vec{l}_\tau$ и нормали $\vec{n}_\tau$ кривой C' равенствами ($\tau\in C'$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda_\tau}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_\tau}-i\frac{\partial}{\partial n_\tau}\right), &\qquad \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial l_\tau}+i\frac{\partial}{\partial n_\tau}\right),\\ \frac{\partial}{\partial l_\tau}&=\frac{\partial}{\partial\lambda_\tau}+\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau}, &\qquad \frac{\partial}{\partial n_\tau}&=i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_\tau}-\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau}\right).\end{aligned}$$

Из равенств (4.2.39) следует для фундаментальных решений $F_k(\zeta,\tau) = \Phi_k(\zeta,\tau)+i\Psi_k(\zeta,\tau)/P'(\zeta)$ и функций $\Phi_k(\zeta,\tau)$, $\Psi_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ условия сопряжения по переменной $\tau\in C'$ в естественных координатах, связанных с кривой C':

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau} - \frac{1}{P'(\tau)}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau} = 0,\ \ \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau} + \frac{1}{\overline{P'}(\tau)}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau} = 0 \qquad (4.2.39')$$

или

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial s_\tau} = \frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau},\ \ \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial \nu_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} \qquad (4.2.39'')$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial s_\tau} &= \frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau},\ \ \frac{\partial \Psi_1(\zeta,\tau)}{\partial s_\tau} = \frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau},\\ \frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial \nu_\tau} &= -\frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},\ \ \frac{\partial \Psi_1(\zeta,\tau)}{\partial \nu_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|}\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},\end{aligned} \qquad (4.2.39''')$$

где производные по направлениям ортов $\vec{s}$ и $\vec{\nu}$ (4.2.36) в точке $\tau\in C'$ равны

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_\tau} &= \frac{1}{|P'(\tau)|}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial}{\partial l_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial}{\partial n_\tau}\right],\\ \frac{\partial}{\partial \nu_\tau} &= \frac{1}{|P'(\tau)|}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial}{\partial n_\tau} - P_2'(\tau)\frac{\partial}{\partial l_\tau}\right].\end{aligned}$$

Условия (4.2.39′) аналогичны условиям (3.1.15″).

Учитывая равенства (4.2.37″), формулу (4.2.15′) запишем

$$\int\limits_{C'} |P'(\tau)|\left[w_1^0(\zeta,\tau)\operatorname{Im}W(\tau) - w_2^0(\zeta,\tau)\operatorname{Re}W(\tau)\right]dl_\tau = \begin{cases} W(\zeta), & \zeta\in D',\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta), & z\in C',\\ 0, & \zeta\notin\overline{D'},\end{cases} \qquad (4.2.15'')$$

где

$$\operatorname{Re}W(\tau) = \varphi(\tau) + \frac{P_1'(\tau)\psi(\tau)}{|P'(\tau)|^2},\quad \operatorname{Im}W(\tau) = \frac{P_2'(\tau)\psi(\tau)}{|P'(\tau)|^2}.$$

Введём *комплексные обобщённые потенциалы двойных слоёв* с плотностями $\mu_k(\tau)$:

$$W_k(\zeta) = \int_{C'} \mu_k(\tau) w_k'(\zeta,\tau)\, dl_\tau\,, \quad k = 1,2\,. \tag{4.2.40}$$

Тогда формула ($4.2.15''$) показывает, что наложение комплексных потенциалов двойных слоёв $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$ с плотностями $\mu_1(\tau) = |P'(\tau)|\,\mathrm{Im}\,W(\tau)$ и $\mu_2(\tau) = -|P'(\tau)|\,\mathrm{Re}\,W(\tau)$ определяет комплексный потенциал течения в области D', а с плотностями $\mu_1(\tau) = 2\pi\alpha^{-1}|P'(\tau)|\,\mathrm{Im}\,W(\tau)$ и $\mu_2(\tau) = -2\pi\alpha^{-1}|P'(\tau)|\,\mathrm{Re}\,W(\tau)$ — течение на контуре C' этой области. Указанные плотности распределены по контуру C' так, что вне области $\overline{D'} = D'\cup C'$ комплекный потенциал равен нулю (жидкость покоится). В сказанном и состоит гидродинамический смысл обобщённой формулы Коши (4.2.15).

Преобразуем формулу ($4.2.15'$), введя в неё обобщённый потенциал простого слоя. Учитывая вытекающие из ($4.2.35'$) равенства

$$w_2^0(\zeta,\tau)\sin\delta_\tau - w_1^0(\zeta,\tau)\cos\delta_\tau = \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},\ |P'(\tau)|w_2^0(\zeta,\tau) = \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}, \tag{4.2.41}$$

интеграл в формуле ($4.2.15'$) (или ($4.2.15''$)) представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \left[\Omega_1^0(\zeta,\tau)W(\tau) - \Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{W}(\tau)\right] dl_\tau = \\ = -\int_{C'} \left[\psi(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} + \varphi(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right] dl_\tau. \tag{4.2.41$'$}$$

Выполняя интегрирование по частям

$$-\int_{C'} \left[\psi(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} + \varphi(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right] dl_\tau = \\ = \int_{C'} \left[\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau}F_1(\zeta,\tau) + \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}F_2(\zeta,\tau)\right] dl_\tau - \\ - \int_{C'} \frac{d}{dl_\tau}\left[\psi(\tau)F_1(\zeta,\tau) + \varphi(\tau)F_2(\zeta,\tau)\right] dl_\tau,$$

и учитывая, что контур C' замкнут (второй интеграл в равенстве справа обращается в нуль), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\left[\Omega_1^0(\zeta,\tau)W(\tau)-\Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{W}(\tau)\right]dl_\tau =$$

$$=\int\limits_{C'}\left[\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau}F_1(\zeta,\tau)+\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}F_2(\zeta,\tau)\right]dl_\tau.$$

Тогда формулу (4.2.15′) запишем

$$\int\limits_{C'}\left[F_1(\zeta,\tau)\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau}+F_2(\zeta,\tau)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}\right]dl_\tau=\begin{cases}W(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases}\qquad(4.2.42)$$

Учитывая вытекающие из формул (2.3.27) и (2.3.28) равенства для касательной и нормальной составляющих скорости

$$v_l=\frac{\partial\varphi}{\partial l},\quad Hv_n=P_1'V_n+P_2'V_l=-\frac{\partial\psi}{\partial l},$$

а также (θ — угол между ортом $\vec{l}$ касательной к кривой C' и осью $O\xi$)

$$V_l+iV_n=(V_\xi+iV_\eta)e^{-i\theta}=Ve^{-i\theta},$$

формулу (4.2.42) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\mathcal{F}_1(\zeta,\tau)\overline{V}(\tau)\,d\tau-\mathcal{F}_2(\zeta,\tau)V(\tau)\,d\bar{\tau}=\begin{cases}W(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}W(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,,\end{cases}\qquad(4.2.42')$$

где

$$\mathcal{F}_1(\zeta,\tau)=\pi[\overline{P'}(\tau)F_1(\zeta,\tau)+iF_2(\zeta,\tau)],\quad \mathcal{F}_2(\zeta,\tau)=\pi[\overline{P'}(\tau)F_1(\zeta,\tau)-iF_2(\zeta,\tau)].$$

Назовём $\mathcal{F}_1(\zeta,\tau)$ и $\mathcal{F}_2(\zeta,\tau)$ *ядрами* интеграла в формуле (4.2.42′). Согласно асимптотик фундаментальных решений (3.1.4) находим асимптотики ядер

$$\mathcal{F}_1(\zeta,\tau)\sim\frac{P_1'(\tau)}{P'(\tau)}\ln\frac{1}{\zeta-\tau},\quad \mathcal{F}_2(\zeta,\tau)\sim 0\quad\text{при}\quad\zeta\to\tau.$$

Видно, что ядро $\mathcal{F}_1(\zeta, \tau)$ имеет в точке $\zeta = \tau$ особенность логарифмического типа, а ядро $\mathcal{F}_2(\zeta, \tau)$ стремится к нулю при $\zeta \to \tau$.

Заметим, что если в формуле (4.2.42$'$) выполнить Σ-дифференцирование по переменной ζ и учесть равенства (2.5.11) и (4.2.30), то получим обобщённую формулу Коши (4.2.29) для скорости $\overline{V}(\zeta)$.

Введём *комплексные обобщённые потенциалы простых слоёв* с плотностями $\nu_k(\tau)$:

$$U_k(\zeta) = \int\limits_{C'} \nu_k(\tau) F_k(\zeta, \tau)\, dl_\tau\,, \quad k = 1, 2\,, \tag{4.2.43}$$

где $F_k(\zeta, \tau)$ — фундаментальные решения — нормированные комплексные потенциалы стока ($k = 1$) и вихря ($k = 2$). Тогда из формулы (4.2.42) с учётом (4.2.43) следует, что наложение комплексных потенциалов $U_1(\zeta)$ и $U_2(\zeta)$ простых слоёв с плотностями $\nu_1(\tau) = \partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$ и $\nu_2(\tau) = \partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$ определяет комплексный потенциал течения в области D', а с плотностями $\nu_1(\tau) = 2\pi\alpha^{-1}\partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$ и $\nu_2(\tau) = 2\pi\alpha^{-1}\partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$ — на контуре C' этой области. Причём, суммарная плотность каждого из слоёв, характеризуемая раздельно суммарной интенсивностью стоков (источников) при $k = 1$ и вихрей при $k = 2$, равна нулю:

$$\int\limits_{C'} \nu_k(\tau)\, dl_\tau = 0\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{4.2.44}$$

Действительно, так как $V_l(\tau) = \partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$ и $v_n(\tau) = -H^{-1}(\tau)\partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$, $\tau \in C'$ — касательная и нормальная составляющие к контуру C' векторов приведённой скорости $\vec{V}(\tau)$ и скорости $\vec{v}(\tau)$, то равенства (4.2.44) с учётом $\nu_1(\tau) = -H(\tau)v_n(\tau)$, $\nu_2(\tau) = V_l(\tau)$, когда $\zeta \in D'$ и $\nu_1(\tau) = -2\pi\alpha^{-1}H(\tau)v_n(\tau)$, $\nu_2(\tau) = 2\pi\alpha^{-1}V_l(\tau)$, когда $\zeta \in C'$, согласно формул (2.1.9) означают, что поток вектора $\vec{v}(\tau)$ (при $k = 1$) и циркуляция вектора $\vec{V}(\tau)$ (при $k = 2$), вычисленные для замкнутого контура C', равны нулю. Это приводит к тому, что вне области $\overline{D'}$ согласно формуле (4.2.42) комплексный потенциал $W = 0$ (жидкость покоится).

Введём *комплексно сопряжённые скорости* $\overline{v}_k(\zeta)$, $k = 1, 2$ *обобщённых потенциалов* $U_k(\zeta)$, $k = 1, 2$ путём Σ-дифференцирования по ζ этих потенциалов. Имеем:

$$\overline{v}_k(\zeta) = \int\limits_{C'} \nu_k(\tau) \overline{V}_k(\zeta, \tau)\, dl_\tau\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{4.2.45}$$

Причём согласно формуле (3.1.17)

$$\overline{v}_k(\zeta,\tau) = \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma U_k(\zeta,\tau)}{d\zeta},$$

$$\overline{V}_k(\zeta,\tau) = \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma F_k(\zeta,\tau)}{d\zeta}, \quad k=1,2,$$

где $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$ — главные решения уравнения (4.1.4), которые представляют собой скорости нормированного стока ($k=1$) и вихря ($k=2$). $\nu_k(\tau)$ — плотности простых слоёв удовлетворяют условию (4.2.44). Выражение (4.2.45) представляет собой комплексно сопряжённую скорость течения, вызванного слоем стоков плотности $\nu_1(\tau)$ (при $k=1$) и вихревым слоем плотности $\nu_2(\tau)$ (при $k=2$).

Выясним теперь гидродинамический смысл формулы (4.2.29). На основании равенств (2.5.12) и (2.5.18) имеем Σ-дифференциал комплексного потенциала $W(\tau)$:

$$d_\Sigma W(\tau) = d\varphi(\tau) + i\frac{d\psi(\tau)}{P'(\tau)} = \frac{P_1'(\tau)\overline{V}(\tau)\,d\tau}{P'(\tau)}.$$

Тогда, обозначая через $g(\zeta,\tau)$ подынтегральное выражение формулы (4.2.29), имеем

$$g(\zeta,\tau) = \omega_1(\zeta,\tau)\overline{V}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)\overline{V}(\tau)\,d\bar{\tau} =$$
$$= \frac{1}{P_1(\tau)}\left\{\left[P'(\tau)\omega_1(\zeta,\tau) - \overline{P'}(\tau)\omega_2(\zeta,\tau)\right]d\varphi(\tau) + i\left[\omega_1(\zeta,\tau)+\omega_2(\zeta,\tau)\right]d\psi(\tau)\right\},$$
$$\tau\in C'.$$

Учитывая выражения ядер (4.2.28), находим

$$g(\zeta,\tau) = 2\pi i\left[\overline{V}_1(\zeta,\tau)\,d\psi(\tau) + \overline{V}_2(\zeta,\tau)\,d\varphi(\tau)\right], \quad \tau\in C'$$

или

$$g(\zeta,\tau) = 2\pi i\left[\overline{V}_1(\zeta,\tau)\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau} + \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}\right]dl_\tau\,, \quad \tau\in C'\,.$$

Следовательно, формула (4.2.29) принимает вид

$$\int\limits_{C'}\left[\overline{V_1}(\zeta,\tau)\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau} + \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}\right]dl_\tau = \begin{cases}\overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,,\\ \dfrac{\alpha}{2\pi}\overline{V}(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,,\\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,.\end{cases} \qquad (4.2.29')$$

Замечаем, что формула (4.2.29′) непосредственно следует из формулы (4.2.42), если от её левой и правой частей взять Σ-производную по ζ и учесть, что согласно равенств (2.5.11) и (3.1.17)

$$\begin{aligned} \overline{V}(\zeta) &= \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma W(\zeta)}{d\zeta}\,, \\ \overline{V}_k(\zeta,\tau) &= \frac{2P'(\zeta)}{P'(\zeta)+\overline{P'}(\zeta)}\frac{d_\Sigma F_k(\zeta,\tau)}{d\zeta}\,, \quad k=1,2\,. \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

Воспользуемся векторами приведённой скорости течения $\vec{V}(\zeta)=V_\xi(\zeta)\vec{\imath}+ + V_\eta(\zeta)\vec{\jmath}$ и нормированных стока $\vec{V}_1(\zeta,\tau)$ и вихря $\vec{V}_2(\zeta,\tau)$ $(\vec{V}_k(\zeta,\tau) = = V_{k\xi}(\zeta,\tau)\vec{\imath}+V_{k\eta}(\zeta,\tau)\vec{\jmath},\ k=1,2)$. Тогда принимая во внимание, что $\overline{V}(\zeta)=V_\xi(\zeta)-iV_\eta(\zeta)$, $\overline{V}_k(\zeta,\tau)=V_{k\xi}(\zeta,\tau)-iV_{k\eta}(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ формулу (4.2.29′) запишем для поля векторов скорости

$$\int\limits_{C'}\left[\vec{V}_1(\zeta,\tau)\frac{\partial\psi(\tau)}{\partial l_\tau}+\vec{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial l_\tau}\right]dl_\tau = \begin{cases} \vec{V}(\zeta)\,, & \zeta\in D'\,, \\ \dfrac{\alpha}{2\pi}\vec{V}(\zeta)\,, & \zeta\in C'\,, \\ 0\,, & \zeta\notin\overline{D'}\,. \end{cases} \tag{4.2.29″}$$

Видно, что формулы (4.2.29′) и (4.2.29″) по форме записи аналогичны, а по содержанию идентичны.

Используем понятие комплексной скорости обобщённого потенциала простого слоя (4.2.45) для придания гидродинамического смысла формуле (4.2.29′). Из этой формулы следует, что наложение комплексных скоростей $\overline{v}_1(\zeta)$ и $\overline{v}_2(\zeta)$ от простых слоёв с плотностями $\nu_1(\tau)=\partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$ и $\nu_2(\tau)=\partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$ определяют скорость $\overline{V}(\zeta)$ течения в области D', а с плотностями $\nu_1(\tau)=2\pi\alpha^{-1}\partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$ и $\nu_2(\tau)=2\pi\alpha^{-1}\partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$ — на контуре C' этой области. Скорость вне области $\overline{D'}$ равна нулю (жидкость покоится). Указанные плотности удовлетворяют условию (4.2.44), поскольку они с учётом составляющих скоростей $v_n(\tau)=H^{-1}(\tau)\partial\psi(\tau)/\partial l_\tau$ и $V_l(\tau)=\partial\varphi(\tau)/\partial l_\tau$, как отмечалось выше, выражаются через $v_n(\tau)$ и $V_l(\tau)$, для которых имеет место формулы (2.1.9).

§ 4.3. Представление комплексных потенциалов и скоростей обобщёнными интегралами типа Коши

Обобщённый интеграл типа Коши для комплексного потенциала

Пусть $f(\zeta)$ — непрерывная функция, которая определена на произвольной замкнутой или разомкнутой кусочно-гладкой кривой L', лежащей в односвязной области D'. *Обобщённым интегралом типа Коши* назовём интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\zeta,\tau)f(\tau)\,d\tau-\Omega_2(\zeta,\tau)\bar f(\tau)\,d\bar\tau\,, \tag{4.3.1}$$

где $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ — ядра, которые согласно формулам (4.2.14) и (4.2.16) выражаются через главные $w_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ и фундаментальные $F_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ решения уравнения (4.1.3).

Когда линия L' — замкнутый контур и $f(\zeta)$ — обобщённая аналитическая функция на этом контуре и внутри его (то есть удовлетворяет уравнению (4.1.3)), то интеграл (4.3.1) принимает вид обобщённого интеграла Коши.

Покажем, что определяемая интегралом (4.3.1) функция

$$W(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\zeta,\tau)f(\tau)\,d\tau-\Omega_2(\zeta,\tau)\bar f(\tau)\,d\bar\tau\,,\qquad \zeta\notin L' \tag{4.3.2}$$

является комплексным потенциалом течения всюду в области D' за исключением кривой L'. Действительно, подставим $W(\zeta)$ в уравнение (4.1.3). Получим тождество

$$\int\limits_{L'}\left[\frac{\partial\Omega_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar\zeta}+A(\zeta)\left(\Omega_1(\zeta,\tau)-\overline{\Omega}_2(\zeta,\tau)\right)\right]f(\tau)\,d\tau-$$
$$-\left[\frac{\partial\Omega_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar\zeta}+A(\zeta)\left(\Omega_2(\zeta,\tau)-\overline{\Omega}_1(\zeta,\tau)\right)\right]\bar f(\tau)\,d\bar\tau\equiv 0\,,\quad \zeta\notin L'\,,$$

так как стоящие в квадратных скобках выражения равны нулю поскольку ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ удовлетворяют системе уравнений (4.2.19), которая, напоминаем, следует из того, что $w_k(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$ — главные решения уравнения (4.1.3). Значит, $W(\zeta)$ — решение уравнения (4.1.3) и, следовательно, комплексный потенциал течения.

Исследуем поведение комплексного потенциала (4.3.2) на бесконечности при $|\zeta| \to \infty$. Пусть кривая L' конечной длины L'_0. Так как $d\tau = e^{i\theta_\tau} dl_\tau$, $d\overline{\tau} = e^{-i\theta_\tau} dl_\tau$ (dl_τ — элемент длины кривой L', θ_τ — угол орта касательной кривой L' с осью $O\xi$), то

$$|W(\zeta)| \leqslant \frac{ML'_0}{2\pi}, \zeta \notin L',$$

где

$$M = \max \left| \frac{1}{i} [\Omega_1(\zeta, \tau) f(\tau) e^{i\theta_\tau} - \Omega_2(\zeta, \tau) \overline{f}(\tau) e^{-i\theta_\tau}] \right|, \tau \in L'.$$

Учитывая равенства (4.2.14), а затем асимптотики (3.1.14), находим

$$M = 2\pi \max \left\{ |P'(\tau)| w_1(\zeta, \tau) \operatorname{Im}(f(\tau) e^{i\theta_\tau}) - w_2(\zeta, \tau) \operatorname{Re}(f(\tau) e^{i\theta_\tau})| \right\} \leqslant \frac{M_0}{|\zeta - \tau|},$$

где

$$M_0 = \max |\operatorname{Re}(f(\tau) e^{i\theta_\tau}) + \operatorname{Im}(f(\tau) e^{i\theta_\tau})|, \tau \in L'.$$

Следовательно,

$$|W(\zeta)| \leqslant \frac{M_0 L'_0}{2\pi |\zeta - \tau|}, \zeta \notin L', \tau \in L'.$$

Отсюда комплексный потенциал $W(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$W(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty. \tag{4.3.3}$$

Он обращается в ноль на бесконечности ($W(\infty) = 0$).

Комплексный потенциал (4.3.2) представим иначе в виде

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} [\Omega_1^0(\zeta, \tau) f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta, \tau) \overline{f}(\tau)] dl_\tau, \zeta \notin L', \tag{4.3.2$'$}$$

где ядра $\Omega_k^0(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$ выражаются через главные $w_k^0(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$ и фундаментальные $F_k(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$ решения формулами (4.2.37$''$) и (4.2.35$'$).

Обобщённый интеграл типа Коши для комплексной скорости

Пусть $g(\zeta)$ — функция, непрерывная на кусочно-гладкой (замкнутой или разомкнутой) кривой L', расположенной в односвязной области D'. *Обобщённым интегралом типа Коши* для комплексно сопряжённой скорости $\overline{V}(\zeta)$ назовём интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\omega_1(\zeta,\tau)g(\tau)\,d\tau-\omega_2(\zeta,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau}\,, \tag{4.3.4}$$

где $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ — ядра, которые выражаются по формулам (4.2.28) через главные решения $\overline{V}(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ уравнения (4.1.4).

Если L' — замкнутый контур и $g(\tau)=\overline{V}(\tau)$ ($\overline{V}(\tau)$ — комплексно сопряжённая скорость), то (4.3.4) принимает вид обобщённого интеграла Коши для комплексно сопряжённой скорости.

Покажем, что определяемая интегралом (4.3.4) функция

$$\overline{V}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\omega_1(\zeta,\tau)g(\tau)\,d\tau-\omega_2(\zeta,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau}\,,\quad \zeta\notin L' \tag{4.3.5}$$

представляет собой комплексно сопряжённую скорость течения в области D' и потому удовлетворяет уравнению (4.1.4). Подставим эту скорость $\overline{V}(\zeta)$ в уравнение (4.1.4). Получим тождество

$$\int\limits_{L'}\left[\frac{\partial\omega_1(\zeta,\tau)}{\partial\bar{\zeta}}+\overline{B}(\zeta)\omega_1(\zeta,\tau)+B(\zeta)\overline{\omega}_2(\zeta,\tau)\right]g(\tau)\,d\tau-$$
$$-\left[\frac{\partial\omega_2(\zeta,\tau)}{\partial\bar{\zeta}}+\overline{B}(\zeta)\omega_2(\zeta,\tau)+B(\zeta)\overline{\omega}_1(\zeta,\tau)\right]\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau}\equiv 0\,,\quad \zeta\notin L'\,,$$

так как стоящие в квадратных скобках выражения равны нулю поскольку ядра $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ удовлетворяют системе уравнений (4.2.31), которые являются следствием того, что $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ — главные решения уравнения (4.1.4).

Таким образом, обобщённый интеграл типа Коши определяет согласно формуле (4.3.5) скорость $\overline{V}(\zeta)$ течения в области D'.

Аналогично тому, как было получено для комплексного потенциала $W(\zeta)$ условие (4.3.3), нетрудно показать с учётом равенств для $\overline{V}_k(\zeta,\tau)$,

$k = 1, 2$ (4.2.28) и асимптотик (3.1.19), что скорость (4.3.5) удовлетворяет на бесконечности условию[1]

$$\overline{V}(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to 0. \tag{4.3.6}$$

Скорость $\overline{V}(\zeta)$ обращается в ноль на бесконечности ($\overline{V}(\infty) = 0$).

Отметим, что обобщённые интегралы типа Коши (как и обобщённые интегралы Коши) для комплексного потенциала и комплексной скорости конформно ковариантны.

Гидродинамический смысл обобщённых интегралов типа Коши

Выясним гидродинамический смысл обобщённых интегралов Коши для комплексного потенциала $W(\zeta)$ и скорости $\overline{V}(\zeta)$. Проводя рассуждения аналогичные тому, как была получена формула (4.2.15′) имеем

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \left[\Omega_1^0(\zeta,\tau) f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta,\tau)\bar{f}(\tau)\right] dl_\tau\,, \quad \zeta \notin L'\,.$$

Учитывая ядра (4.2.38), запишем

$$W(\zeta) = \int\limits_{L'} |P'(\tau)| \left[w_1^0(\zeta,\tau)\,\mathrm{Im}\, f(\tau) - w_2^0(\zeta,\tau)\,\mathrm{Re}\, f(\tau)\right] dl_\tau\,, \quad \zeta \notin L'\,. \tag{4.3.7}$$

Здесь $w_1^0(\zeta,\tau)$ и $w_2^0(\zeta,\tau)$ — нормированные комплексные потенциалы диполей, моменты которых ориентированы по ортам касательной $\vec{l}$ и нормали $\vec{n}$ к кривой L'.

Примем во внимание выражения (4.2.40) комплексных обобщённых потенциалов двойных слоёв, распределённых с плотностями $\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$ в данном случае вдоль контура L'. Тогда определяемый согласно (4.3.7) обобщённым интегралом типа Коши комплексный потенциал $W(\zeta)$ представляет собой наложение комплексных потенциалов $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$ двойных слоёв с плотностями $\mu_1(\tau) = |P'(\tau)|\,\mathrm{Im}\, f(\tau)$ и $\mu_2(\tau) = -|P'(\tau)|\,\mathrm{Re}\, f(\tau)$, распределённых вдоль контура L'. Причём эти $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$ — плотности распределения диполей с моментами, направленными по ортам $\vec{l}$ и $\vec{n}$ кривой L'.

[1]Условие (4.3.6) (а также условие (4.3.3)) имеет место для обобщённой формулы Коши (4.2.29) (а также (4.2.15)) в случае области D', содержащей точку $\zeta = \infty$.

Если контур L' замкнут, то комплексный потенциал (4.3.7) можно также представить через обобщённые потенциалы простых слоёв. Действительно, учитывая равенства (4.2.41), формулу (4.3.7) запишем

$$W(\zeta) = -\int\limits_{L'} \left[a_1(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} + a_2(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right] dl_\tau\,, \quad \zeta \notin L'\,, \qquad (4.3.8)$$

где

$$a_1(\tau) = \frac{|P'(\tau)|^2 \operatorname{Im} f(\tau)}{P_1'(\tau)}, \quad a_2(\tau) = \frac{\operatorname{Re}[P'(\tau)f(\tau)]}{P_1'(\tau)}.$$

Интегрируя по частям (подобно тому, как это сделано с интегралом в формуле (4.2.41′)) и учитывая, что контур L' замкнут, имеем

$$W(\zeta) = \int\limits_{L'} \left[\frac{\partial a_1(\tau)}{\partial l_\tau}F_1(\zeta,\tau) + \frac{\partial a_2(\tau)}{\partial l_\tau}F_2(\zeta,\tau)\right] dl_\tau,\, \zeta \notin L'. \qquad (4.3.9)$$

Используя понятие комплексных обобщённых потенциалов $U_k(\zeta)$ простых слоёв (см. формулу (4.2.43)), распределённых с плотностями $\nu_k(\tau)$, ($k = 1, 2$) в данном случае вдоль контура L'. Тогда согласно формуле (4.3.9) комплексный потенциал $W(\zeta)$ представляет собой наложение комплексных потенциалов $U_1(\zeta)$ и $U_2(\zeta)$ простых слоёв, распределённых с плотностями $\nu_1(\tau) = \partial a_1(\tau)/\partial l_\tau$ (плотность источников (стоков)) и $\nu_2(\tau) = \partial a_2(\tau)/\partial l_\tau$ (плотность вихрей) вдоль замкнутого контура L'. Причём в силу замкнутости контура L' суммарная плотность (имнтенсивность источников и стоков при $k = 1$ и вихрей при $k = 2$) равна нулю:

$$\int\limits_{L'} \nu_k(\tau)\, dl_\tau = 0\,, \quad k = 1, 2\,,$$

что идентично равенству (4.2.44).

Выясним теперь гидродинамический смысл интеграла типа Коши для скорости. Учитывая выражения ядер (4.2.28) и полагая $d\tau = dl_\tau e^{i\theta_\tau}$ (dl_τ — элемент длины кривой L', θ_τ — угол между ортом касательной к кривой L' и осью $O\xi$), формулу (4.3.5) запишем

$$\overline{V}(\zeta) = \int\limits_{L'} \left[\overline{V}_1(\zeta,\tau)\alpha_1(\tau) + \overline{V}_2(\zeta,\tau)\alpha_2(\tau)\right] dl_\tau\,, \qquad (4.3.10)$$

где

$$\alpha_1(\tau) = \mathrm{Im}[\overline{P'}(\tau)g(\tau)e^{i\theta_\tau}],\ \alpha_2(\tau) = \mathrm{Re}[g(\tau)e^{i\theta_\tau}].$$

Воспользуемся понятием комплексных скоростей $\bar{v}_k(\zeta,\tau)$ обобщённых потенциалов простых слоёв, выраженных формулами (4.2.45). Согласно формуле (4.3.10) комплексная скорость $\overline{V}(\zeta)$ представляет собой наложение скоростей $\bar{v}_1(\zeta)$ и $\bar{v}_2(\zeta)$ от распределённых стоков плотности $\nu_1(\tau) = \alpha_1(\tau)$ и вихрей плотности $\alpha_2(\tau)$.

Σ-дифференцирование комплексного потенциала, представленного интегралом типа Коши

Если точка ζ лежит вне контура L', то комплексный потенциал (4.3.2) можно дифференцировать по ζ. Представляет интерес Σ-дифференцирование комплексного потенциала (4.3.2) по ζ. Выполняя nкратное Σ-дифференцирование, получаем

$$\frac{d^n_\Sigma W(\zeta)}{d\zeta^n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{d^n_\Sigma \Omega_1(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} f(\tau)\,d\tau - \frac{d^n_\Sigma \Omega_2(\zeta,\tau)}{d\zeta^n}\bar{f}(\tau)\,d\bar{\tau}\,,$$

$$n = 1,2,3,\ldots, \quad \zeta \notin L'. \quad (4.3.11)$$

Здесь согласно равенствам (4.2.16)

$$\frac{d^n_\Sigma \Omega_1(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} = -2\pi P'(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{d^n_\Sigma F_1(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} = -2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{d^n_\Sigma F_2(\zeta,\tau)}{d\zeta^n}\,,$$

$$\frac{d^n_\Sigma \Omega_2(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} = -2\pi \overline{P'}(\tau)\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\frac{d^n_\Sigma F_1(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} = 2\pi i\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}\frac{d^n_\Sigma F_2(\zeta,\tau)}{d\zeta^n}\,,$$

$d^n_\Sigma F_k(\zeta,\tau)/d\zeta^n$ — Σ-производные n-ого порядка от фундаментальных решений $F_k(\zeta,\tau)$ ($k=1,2$).

Таким образом, нахождение по формуле (4.3.11) Σ-производной от комплексного потенциала сводится к вычислению Σ-производных от фундаментальных решений $F_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$.

В частности, из (4.3.11) при $n=1$ и учёте равенств (4.2.46) имеем выраженную через главные решения $\overline{V}(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ скорость течения

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{d_\Sigma \Omega_1(\zeta,\tau)}{d\zeta} f(\tau)\,d\tau - \frac{d_\Sigma \Omega_2(\zeta,\tau)}{d\zeta}\bar{f}(\tau)\,d\bar{\tau}\,,$$

где

$$\frac{d_\Sigma \Omega_1(\zeta,\tau)}{d\zeta} = -2\pi P'(\tau)\frac{\partial \overline{V}_1(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = -2\pi i \frac{\partial \overline{V}_2(\zeta,\tau)}{\partial \tau}\,,$$

$$\frac{d_\Sigma \Omega_2(\zeta,\tau)}{d\zeta} = -2\pi \overline{P'}(\tau)\frac{\partial \overline{V}_1(\zeta,\tau)}{\partial \bar\tau} = 2\pi i \frac{\partial \overline{V}_2(\zeta,\tau)}{\partial \bar\tau}\,.$$

В этом случае скорость $\overline{V}(\zeta)$ вне кривой L' ($\zeta \notin L'$) выражается интегралом, ядра которого $d_\Sigma \Omega_1/d\zeta$ и $d_\Sigma \Omega_2/d\zeta$ согласно асимптотикам (3.1.19) имеют на этой кривой ($\tau = \zeta \in L'$) изолированную особую точку второго порядка.

Если n-кратно Σ-дифференцировать комплексный потенциал, представленный в виде (4.3.8), то получаем

$$\frac{d^n_\Sigma W(\zeta)}{d\zeta^n} = -\int\limits_{L'} \left[a_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial l_\tau}\frac{d^n_\Sigma F_1(\zeta,\tau)}{d\zeta^n} + a_2(\tau)\frac{\partial}{\partial l_\tau}\frac{d^n_\Sigma F_2(\zeta,\tau)}{d\zeta^n}\right] dl_\tau\,,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \zeta \notin L'. \quad (4.3.12)$$

В частности, при $n = 1$ с учётом равенств (4.2.46) имеем комплексно сопряжённую скорость течения

$$\overline{V}(\zeta) = -\int\limits_{L'} \left[a_1(\tau)\frac{\partial \overline{V_2}(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} + a_2(\tau)\frac{\partial \overline{V_1}(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right] dl_\tau\,.$$

Если контур L' замкнут, то интегрируя по частям и учитывая

$$\int\limits_{L'} \frac{\partial}{\partial l_\tau}\left[a_1(\tau)\overline{V_2}(\zeta,\tau) + a_2(\tau)\overline{V}_1(\zeta,\tau)\right] dl_\tau = 0\,, \zeta \notin L',$$

имеем скорость течения в виде

$$\overline{V}(\zeta) = \int\limits_{L'} \left[\frac{\partial a_2(\tau)}{\partial l_\tau}\overline{V_1}(\zeta,\tau) + \frac{\partial a_1(\tau)}{\partial l_\tau}\overline{V_2}(\zeta,\tau)\right] dl_\tau \ \zeta \notin L'.$$

В частности, если проводимость слоя P' моделируется функцией одного вещественного переменного (например, $P' = P'(\eta)$), то Σ-производная от $W(\zeta)$ есть решение уравнения (4.1.3). Поэтому выражения (4.3.11) и (4.3.12) — комплексные потенциалы течений в таком слое.

§ 4.4. Предельные значения обобщённого интеграла типа Коши

Интеграл в смысле главного значения по Коши для комплексного потенциала

Введённые выше для комплексного потенциала и комплексной скорости обобщённые интегралы типа Коши (4.3.1) и (4.3.4) существуют, когда точка ζ не лежит на кривой L'. Естественно, возникает вопрос имеют ли смысл значения этих интегралов на кривой L'. В силу математической аналогии этих интегралов (их ядра $\Omega_k(\zeta,\tau)$ и $\omega_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$ обладают при $\zeta\to\tau$ одинаковой асимптотикой (4.2.32))достаточно исследовать этот вопрос подробно для одного из них, например, для интеграла (4.3.1).

Пусть L' — замкнутая кусочно-гладкая кривая, а $f(\tau)$ — заданная на ней непрерывная функция. Интеграл (4.3.1) в каждой точке $\zeta\notin L'$ определяет согласно (4.3.2) комплексный потенциал $W(\zeta)$. Когда точка $\zeta\in L'$, то интеграл (4.3.1) в точке $\zeta=\tau_0\in L'$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\tau_0,\tau)f(\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\bar f(\tau)\,d\bar\tau\,,\quad \tau_0\in L' \tag{4.4.1}$$

в обычном понимании не существует.

Это связано с тем, что в выражении

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{L'}\Omega_1(\tau_0,\tau)f(\tau)\,d\tau-\int\limits_{L'}\Omega_2(\tau_0,\tau)\bar f(\tau)\,d\bar\tau\right]$$

не существует первый интеграл в силу асимптотики (4.2.32) при $\tau\to\tau_0$ (второй интеграл в этом выражении понимается в обычном смысле). Однако при некоторых предположениях относительно функции $f(\tau)$ интегралу (4.3.1) в точке $\zeta\in L'$ (то есть выражению (4.4.1)) можно придать определённый смысл.

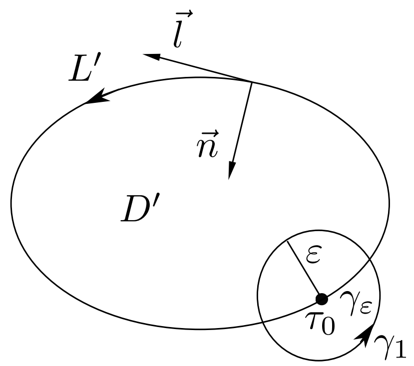

Рис. 4.4.1. Контуры интегрирования.

Пусть $\tau_0\in L'$, γ — окружность $|\zeta-\tau_0|=\varepsilon$ достаточно малого радиуса ε, вырезающая часть γ_ε кривой L', а L'_ε — оставшаяся часть кривой L' ($L_\varepsilon=L'\backslash\gamma_\varepsilon$), лежащая вне замкнутого круга $|\zeta-\tau_0|\leqslant\varepsilon$ (рис. 4.4.1).

Интеграл

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'_\varepsilon} \Omega_1(\tau_0, \tau) f(\tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau) \bar{f}(\tau)\, d\bar{\tau} \tag{4.4.2}$$

имеет смысл в обычном понимании. Если существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon(\tau_0) = \mathcal{I}(\tau_0)$, то этот предел назовём интегралом в смысле *главного значения по Коши* или *обобщённым сингулярным интегралом типа Коши для комплексного потенциала* и его обозначим обычным символом интеграла

$$\mathcal{I}(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\tau_0, \tau) f(\tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau) \bar{f}(\tau)\, d\bar{\tau}\,,$$

то есть положим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\tau_0, \tau) f(\tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau) \bar{f}(\tau)\, d\bar{\tau} = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'_\varepsilon} \Omega_1(\tau_0, \tau) f(\tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau) \bar{f}(\tau)\, d\bar{\tau}\,. \tag{4.4.3}$$

Для существования интеграла (4.4.1) в смысле главного значения по Коши при любом $\tau_0 \in L'$ достаточно потребовать, чтобы функция $f(\tau)$ удовлетворяла всюду на L' условию Гёльдера [93] (условию $H(\mu)$). А именно, для любых точек τ_1 и τ_2 кривой L':

$$|f(\tau_1) - f(\tau_2)| \leqslant A|\tau_1 - \tau_2|^\mu \quad (\,A,\ \mu \text{— константы}, \mu \in (0,1]\,). \tag{4.4.4}$$

Действительно, интеграл (4.4.2) представим в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'_\varepsilon} \Omega_1(\tau_0, \tau)\, [f(\tau) - f(\tau_0)]\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau) [\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\, d\bar{\tau} + \\ + \frac{f(\tau_0)}{2\pi i} \int\limits_{L'_\varepsilon} \Omega_1(\tau_0, \tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0, \tau)\, d\bar{\tau}\,. \tag{4.4.5}$$

Второй интеграл в равенстве (4.4.5) представим в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon\cup\gamma_1}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau\,,$$

где γ_1 — часть окружности γ, лежащая вне области D' (см. рис. 4.4.1).

Интеграл по контуру $L'_\varepsilon\cup\gamma_1$ находим на основании обобщённой формулы Коши (4.2.15) для комплексного потенциала $W(\zeta)$ в виде постоянной: $W(\zeta)=1$ ($\varphi(\zeta)=1$, $\psi(\zeta)=0$), очевидно удовлетворяющего уравнению (4.1.3). Полагая в формуле (4.2.15) $W(\tau)=1$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon\cup\gamma_1}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau=1\,,$$

так как точка τ_0 лежит в области, ограниченной контуром $L'_\varepsilon\cup\gamma_1$ (рис. 4.4.1).

Тогда равенство (4.4.5) примет вид

$$\mathfrak{I}_\varepsilon(\tau_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,[f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\bar\tau+f(\tau_0)-$$
$$-\frac{f(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau\,. \quad (4.4.6)$$

В равенстве (4.4.6) перейдём к пределу при $\tau\to\tau_0$ ($\varepsilon\to0$). Согласно формул (4.2.32) имеем для ядер $\Omega_k(\tau_0,\tau)$, $k=1,2$ асимптотики

$$\Omega_1(\tau_0,\tau)\sim\frac{1}{\tau-\tau_0}\,,\qquad \Omega_2(\tau_0,\tau)\sim0\quad\text{при}\quad\tau\to\tau_0\,. \quad (4.4.7)$$

Тогда с учётом $H(\mu)$ условия (4.4.4) находим

$$|\Omega_1(\tau_0,\tau)[f(\tau)-f(\tau_0)]|\lesssim|\tau-\tau_0|^{\mu-1},\;\; |\Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar f(\tau)-f(\tau_0)]|\sim0 \quad (4.4.8)$$

при $\tau\to\tau_0$ ($\varepsilon\to0$).

Учитывая (4.4.8), заключаем, что особый интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\tau_0,\tau)[f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\bar\tau=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon}\Omega_1(\tau_0,\tau)[f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\bar\tau \tag{4.4.9}$$

сходится равномерно и представляет собой непрерывную функцию $\tau_0\in L'$.

Если τ_0 — точка гладкости кривой L', а γ_1 — отрезок окружности: $\tau-\tau_0=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,\pi]$, $d\tau=i\varepsilon e^{i\vartheta}d\vartheta=i(\tau-\tau_0)\,d\vartheta$, то с учётом асимптотики ядер (4.4.7) имеем

$$\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau\sim i\,d\vartheta\,,\qquad \Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau\sim 0\quad\text{при}\quad \tau\to\tau_0\quad(\varepsilon\to 0)\,.$$

Следовательно, интеграл по γ_1 в пределе принимает значение:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\Omega_1(\tau_0,\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\,d\bar\tau\sim\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}d\vartheta=\frac{1}{2}\,. \tag{4.4.10}$$

Переходим в равенстве (4.4.6) к пределу при $\tau\to\tau_0$ ($\varepsilon\to 0$). Учитывая равенства (4.4.3), (4.4.9) и (4.4.10), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathfrak{I}_\varepsilon(\tau_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\tau_0,\tau)f(\tau)\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)\bar f(\tau)\,d\bar\tau=$$
$$=\frac{f(\tau_0)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\Omega_1(\tau_0,\tau)[f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\tau-\Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar f(\tau)-f(\tau_0)]\,d\bar\tau\,,$$
$$\tau_0\in L'\,. \tag{4.4.11}$$

В случае разомкнутой гладкой кривой L' в предположении, что точка τ_0 не является концевой, интеграл в смысле главного значения по Коши определяется опять-таки как предел выражения (4.4.5) при $\varepsilon\to 0$. Этот предел всегда существует, если функция $f(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Предельные значения обобщённого интеграла типа Коши и обобщённые формулы Сохоцкого—Племеля для комплексного потенциала

Найдём предельные значения обобщённого интеграла типа Коши на контуре интегрирования, а также установим связь между ним и обобщённым сингулярным интегралом типа Коши.

Пусть функция $f(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера ($f(\tau)$ — функция класса $H(\mu)$) на контуре L', который считаем замкнутым и гладким. В случае, если контур не замкнут, то дополним его какой-нибудь кривой до замкнутого, положив на этой дополнительной кривой $f(\tau) = 0$. Обозначим через D'_+ и D'_- — области, ограниченные этим контуром L' и лежащие внутри и вне этого контура (рис. 4.4.2).

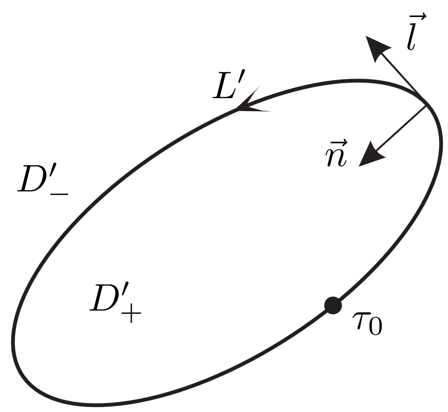

Рис. 4.4.2. Контур интегрирования L' и области D'_+ и D'_-.

Обозначим через τ_0 произвольно фиксированную точку на L' и запишем выражение (4.3.2) в виде

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)[f(\tau) - f(\tau_0)]\,d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)[\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\,d\bar{\tau} + \\ + \frac{f(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)\,d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\,d\bar{\tau}\,, \quad \zeta \notin L'\,. \quad (4.4.12)$$

Согласно обобщённой формуле Коши (4.2.15) в случае $W(\tau) = 1$ имеем

$$\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)\,d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\,d\bar{\tau} = \begin{cases} 1\,, & \zeta \in D'_+\,, \\ 0\,, & \zeta \in D'_-\,. \end{cases} \quad (4.4.13)$$

Принимая во внимание (4.4.13), из равенства (4.4.12) находим

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)[f(\tau) - f(\tau_0)]\,d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)[\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\,d\bar{\tau} + f(\tau_0)\,, \\ \zeta \in D'_+\,, \quad (4.4.14)$$

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)[f(\tau) - f(\tau_0)]\, d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)[\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\, d\bar{\tau}\,,$$
$$\zeta \in D'_- \,. \quad (4.4.15)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)[f(\tau) - f(\tau_0)]\, d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)[\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\, d\bar{\tau}\,.$$

Так как $f(\tau)$ — функция класса Гёльдера и контур L' гладкий, то при переходе через этот контур (при $\zeta \to \tau_0$ по любому пути) поведение функции $\Psi(\zeta)$ аналогично как в случае интеграла типа Коши [37, с. 34], то есть $\Psi(\zeta)$ непрерывна при переходе через L' по любому пути и принимает значение

$$\lim_{\zeta\to\tau_0} \Psi(\zeta) = \Psi(\tau_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\tau_0,\tau)[f(\tau) - f(\tau_0)]\, d\tau - \Omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{f}(\tau) - f(\tau_0)]\, d\bar{\tau}\,. \quad (4.4.16)$$

Следовательно, существуют предельные значения выражений (4.4.14) и (4.4.15), которые обозначим[1]

$$W^+(\tau_0) = \lim_{\substack{\zeta\to\tau_0\\ \zeta\in D'_+}} W(\zeta) \quad \text{и} \quad W^-(\tau_0) = \lim_{\substack{\zeta\to\tau_0\\ \zeta\in D'_-}} W(\zeta)\,, \quad \tau_0 \in L'\,.$$

Совершая в (4.4.14) и (4.4.15) предельный переход с учётом равенства (4.4.16), получаем

$$W^+(\tau_0) = \Psi(\tau_0) + f(\tau_0)\,, \quad W^-(\tau_0) = \Psi(\tau_0)\,, \quad \tau_0 \in L'\,. \quad (4.4.17)$$

Значение $\Psi(\tau_0)$ согласно формулам (4.4.11) и (4.4.16) представим через обобщённый сингулярный интеграл Коши в виде

$$\Psi(\tau_0) = W(\tau_0) - \frac{f(\tau_0)}{2}\,, \quad \tau_0 \in L'\,,$$

где

$$W(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \Omega_1(\tau_0,\tau) f(\tau)\, d\tau - \Omega_2(\tau_0,\tau)\bar{f}(\tau)\, d\bar{\tau}\,, \quad \tau_0 \in L' \quad (4.4.18)$$

[1] В случае незамкнутого контура L' точка τ_0 не совпадает ни с одним из его концов. $W^+(\tau_0)$ и $W^-(\tau_0)$ соответствуют предельным значениям $W(\zeta)$ при $\zeta \to \tau_0$ слева и справа от этого контура.

назовём *прямым значением* в точке τ_0 контура L' обобщённого сингулярного интеграла типа Коши, понимаемого в смысле его главного значения.

Тогда предельные значения (4.4.17) запишем в виде

$$W^+(\tau_0) = W(\tau_0) + \frac{f(\tau_0)}{2}, \quad W^-(\tau_0) = W(\tau_0) - \frac{f(\tau_0)}{2}, \quad \tau_0 \in L'$$

или кратко

$$W^\pm(\tau_0) = W(\tau_0) \pm \frac{f(\tau_0)}{2}, \quad \tau_0 \in L', \tag{4.4.19}$$

где $W(\tau_0)$ имеет вид (4.4.18).

Формулы (4.4.19) по форме записи аналогичны формулам Сохоцкого—Племеля для аналитических функций [93] и переходят в них для случая течения в анизотропном однородном слое, когда его проводимость P' — комплексная постоянная. Поэтому назовём (4.4.19) *обобщёнными* формулами Сохоцкого—Племеля для комплексного потенциала.

Вычитая и складывая формулы (4.4.19), получаем пару равносильных им формул

$$W^+(\tau_0) - W^-(\tau_0) = f(\tau_0), \quad W^+(\tau_0) + W^-(\tau_0) = 2W(\tau_0), \quad \tau_0 \in L', \tag{4.4.20}$$

где $W(\tau_0)$ имеет вид (4.4.18).

Формулы (4.4.19) и (4.4.20) выражают предельные значения комплексного потенциала $W(\zeta)$ на кривой L' через определяющего его функцию $f(\zeta)$ в обобщённом интеграле типа Коши. Видно, что $W(\zeta)$ терпит разрыв на L', который связан с $f(\zeta)$. Далее будем исследовать задачи (см. ч. II) с заданными физическими условиями для обобщённого потенциала $\varphi(\zeta)$ (давления) и функции тока $\psi(\zeta)$ на границах. Поэтому изучим как зависит представление комплексного потенциала течения $W(\zeta)$ от условий для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на кривой L'. Для этого из первой формулы (4.4.20) согласно равенствам (2.3.20), в которых полагаем непрерывность $P'(\zeta), \zeta \in L'$, находим разности предельных значений обобщённого потенциала и функции тока на L':

$$\begin{aligned} \varphi^+(\tau_0) - \varphi^-(\tau_0) &= \frac{\operatorname{Re}[P'(\tau_0) f(\tau_0)]}{\operatorname{Re} P'(\tau_0)}, \\ \psi^+(\tau_0) - \psi^-(\tau_0) &= \frac{|P'(\tau_0)|^2 \operatorname{Im} f(\tau_0)}{\operatorname{Re} P'(\tau_0)}, \quad \tau_0 \in L'. \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

Рассмотрим два физически возможных случая. В первом из них полагаем непрерывным поток жидкости через кривую L', то есть функция тока на L' непрерывна: $\psi^+(\tau_0) = \psi^-(\tau_0)\,, \tau_0 \in L'$.

Из равенств (4.4.21) следует, что $f(\tau_0)$ — вещественная функция ($\operatorname{Im} f(\tau_0) = 0,\ \tau_0 \in L'$), которая определяет скачок на L' обобщённого потенциала: $\varphi^+(\tau_0) - \varphi^-(\tau_0) = f(\tau_0), \tau_0 \in L'$. Тогда согласно равенствам (4.3.2$'$) и (4.2.37$''$) имеем выражения комплексного потенциала и его предельных значений через главное решение $w_2^0(\tau_0,\tau)$ (а при учёте (4.2.35$'$) через фундаментальные решения $F_1(\tau_0,\tau)$ и $F_2(\tau_0,\tau)$):

$$\begin{aligned} W(\tau_0) &= -\int\limits_{L'} \Omega(\tau_0,\tau) f(\tau)\, dl_\tau,\ \tau_0 \notin L', \\ W^\pm(\tau_0) &= -\int\limits_{L'} \Omega(\tau_0,\tau) f(\tau)\, dl_\tau \pm \frac{f(\tau_0)}{2},\ \tau_0 \in L', \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

где

$$\Omega(\tau_0,\tau) = |P'(\tau)| w_2^0(\tau_0,\tau)$$

$$\left(\Omega(\tau_0,\tau) = -P_1'(\tau) \frac{\partial F_1(\tau_0,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2' \frac{\partial F_1(\tau_0,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial F_2(\tau_0,\tau)}{\partial l_\tau} \right).$$

Во втором случае полагаем, что на L' непрерывно давление однородной жидкости, то есть непрерывен обобщённый потенциал: $\varphi^+(\tau_0) = \varphi^-(\tau_0)$, $\tau_0 \in L'$. Из формул (4.4.21) имеем $\operatorname{Re}[P'(\tau_0) f(\tau_0)] = 0,\ \tau_0 \in L'$, то есть $P'(\tau_0) f(\tau_0) = ih(\tau_0),\ \tau_0 \in L'$. $h(\tau_0)$ — вещественная функция, которая определяет скачок на L' функции тока: $\psi^+(\tau_0) - \psi^-(\tau_0) = h(\tau_0)\,,\ \tau_0 \in L'$. Согласно равенствам (4.3.2$'$) и (4.2.37$''$) при учёте $f(\tau_0) = ih(\tau_0)/P'(\tau_0)$, $\tau_0 \in L'$ находим выражения комплексного потенциала и его предельных значений через главные решения $w_1^0(\tau_0,\tau)$ и $w_2^0(\tau_0,\tau)$ (а с учётом (4.2.35$'$) через фундаментальные решения $F_1(\tau_0,\tau)$ и $F_2(\tau_0,\tau)$):

$$\begin{aligned} W(\tau_0) &= \int\limits_{L'} \Omega^*(\tau_0,\tau) h(\tau)\, dl_\tau,\ \tau_0 \notin L', \\ W^\pm(\tau_0) &= \int\limits_{L'} \Omega^*(\tau_0,\tau) h(\tau)\, dl_\tau \pm \frac{ih(\tau_0)}{2P'(\tau_0)},\ \tau_0 \in L', \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

где

$$\Omega^*(\tau_0,\tau) = \frac{1}{|P'(\tau)|} [P_1'(\tau) w_1^0(\tau_0,\tau) - P_2'(\tau) w_2^0(\tau_0,\tau)]$$

$$\left(\Omega^*(\tau_0,\tau) = -\frac{\partial F_1(\tau_0,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|^2}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial F_2(\tau_0,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial F_2(\tau_0,\tau)}{\partial l_\tau}\right]\right).$$

Напомним, что в предельных выражениях (4.4.22) и (4.4.23) комплексного потенциала $W^{\pm}(\tau_0)$ интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Интеграл в смысле главного значения по Коши и обобщённые формулы Сохоцкого—Племеля для скорости

По аналогии с комплексным потенциалом введём понятие интеграла в смысле главного значения по Коши и найдём обобщённые формулы Сохоцкого—Племеля для комплексной скорости (4.3.5). Интеграл по контуру $L'_\varepsilon = L' \backslash \gamma_\varepsilon$ (рис. 4.4.1)

$$\mathcal{I}'_\varepsilon(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau} \tag{4.4.24}$$

имеет смысл в обычном понимании. Предел этого интеграла $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}'_\varepsilon(\tau_0) = \mathcal{I}'(\tau_0)$, где

$$\mathcal{I}'(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau}$$

называем интегралом в смысле *главного значения по Коши или обобщённым сингулярным интегралом типа Коши для комплексной скорости*. То есть полагаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau}\,, \quad \tau_0 \in L'\,. \tag{4.4.25}$$

Для существования интеграла (4.4.24) в смысле главного значения по Коши потребуем, чтобы функцию $g(\tau)$ можно было представить в виде

$$g(\tau) = u(\tau)\overline{V_0}(\tau),\ \tau \in L', \tag{4.4.26}$$

где $\overline{V}_0(\tau)$ — значение скорости течения на кривой L' — непрерывная функция, $u(\tau)$ — некоторая комплексная функция, удовлетворяющая всюду на L' условию Гёльдера

$$|u(\tau_1) - u(\tau_2)| \leqslant A|\tau_1 - \tau_2|^{\mu} \ \ (A = \mathrm{const},\ \mu \in (0,1]). \tag{4.4.27}$$

Действительно, запишем интеграл (4.4.24) в виде

$$\mathcal{I}'_{\varepsilon}(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_{\varepsilon}} \omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau) - u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau) - \omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{u}(\tau) - u(\tau_0)]V_0(\tau)d\bar{\tau} +$$
$$+ \frac{u(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{L'_{\varepsilon}} \omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)\, d\bar{\tau}.$$

Представим последний интеграл как разность интегралов по контурам $L'_{\varepsilon} \cup \gamma_1$ и γ_1 (γ_1 — отрезок окружности (рис. 4.2.1)), имеем

$$\mathcal{I}'_{\varepsilon}(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_{\varepsilon}} \omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau) - u(\tau_0)]\overline{V_0}\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{u}(\tau) - u(\tau_0)]V_0(\tau)\, d\bar{\tau} +$$
$$+ \frac{u(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{L'_{\varepsilon}\cup\gamma_1} \omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)\, d\bar{\tau} -$$
$$- \frac{u(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}(\tau)\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)\, d\bar{\tau}.$$

Согласно обобщённой формуле Коши для скорости (4.2.29) находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}(\tau)\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)\, d\bar{\tau} = \overline{V_0}(\tau_0),$$

так как точка τ_0 лежит в области D', ограниченной контуром $L'_{\varepsilon} \cup \gamma_1$ (рис. 4.2.1). Тогда

$$\mathcal{I}'_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_{\varepsilon}} \omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau) - u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{u}(\tau) - u(\tau_0)]V_0(\tau)\, d\bar{\tau} +$$
$$+ g(\tau_0) - \frac{u(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}(\tau)\, d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)\, d\bar{\tau}\,, \tag{4.4.28}$$

где согласно равенству (4.4.26) $g(\tau_0)=u(\tau_0)\overline{V_0}(\tau_0)$. Учитывая вытекающие из (4.2.32) асимптотики ядер

$$\omega_1(\tau_0,\tau)\sim\frac{1}{\tau-\tau_0},\ \omega_2(\tau_0,\tau)\sim 0 \text{ при } \tau\to\tau_0 \tag{4.4.29}$$

и условие (4.4.27), имеем оценки

$$\begin{gathered}|\omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)|\leqslant|\overline{V_0}(\tau_0)||\tau-\tau_0|^{\mu-1},\\ |\omega_2(\tau_0,\tau)[\bar u(\tau)-u(\tau_0)]V_0(\tau)|\sim 0 \text{ при } \tau\to\tau_0.\end{gathered} \tag{4.4.30}$$

Учитывая оценки (4.4.30) и ограниченность функции $|\overline{V_0}(\tau_0)|$ на L' заключаем, что особый интеграл

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau-\omega_2(\tau_0,\tau)[\bar u(\tau)-u(\tau)]V_0(\tau)d\bar\tau=\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'_\varepsilon}\omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau-\omega_2(\tau_0,\tau)[\bar u(\tau)-u(\tau_0)]V_0(\tau)\,d\bar\tau\end{gathered} \tag{4.4.31}$$

сходится равномерно и представляет собой непрерывную функцию $\tau_0\in L'$.

Если τ_0 — точка гладкости кривой L', а γ_1 — отрезок окружности: $\tau-\tau_0=\varepsilon e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in[0,\pi]$, $d\tau=i(\tau-\tau_0)d\vartheta$, то на основании асимптотик ядер (4.4.29) имеем

$$\omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}(\tau_0)d\tau\sim i\overline{V_0}(\tau_0)d\vartheta,\ \omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau_0)d\bar\tau\sim 0 \text{ при } \tau\to\tau_0.$$

Тогда интеграл по γ_1 в пределе принимает значение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\omega_1(\tau_0,\tau)\overline{V_0}(\tau_0)\,d\tau-\omega_2(\tau_0,\tau)V_0(\tau)d\bar\tau\sim\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overline{V_0}(\tau_0)}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}d\vartheta=\frac{\overline{V_0}(\tau_0)}{2}. \tag{4.4.32}$$

Переходя в равенстве (4.4.28) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая равенства (4.4.31), (4.4.32), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}'_\varepsilon(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau} =$$

$$= \frac{g(\tau_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0\,d\bar{\tau}\,,$$

$$\tau_0 \in L'\,. \quad (4.4.33)$$

Теперь укажем предельные значения обобщённого интеграла типа Коши для скорости на контуре интегрирования и их связь с этим интегралом. Пусть функция $g(\tau)$ представима по-прежнему, в виде (4.4.26), где $u(\tau)$ удовлетворяет условию (4.4.27). Контур L' замкнутый и гладкий и вдоль него сопрягаются области D'_+ и D'_- (рис. 4.4.2). Выражение (4.3.5) представим в виде

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0(\tau)\,d\bar{\tau} +$$

$$+ \frac{u(\tau_0)}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)V_0(\tau)\,d\bar{\tau}\,, \quad \zeta \notin L'\,. \quad (4.4.34)$$

Согласно формуле (4.2.29) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)V_0(\tau)\,d\bar{\tau} = \begin{cases} \overline{V_0}(\zeta)\,, & \zeta \in D'_+\,, \\ 0\,, & \zeta \in D'_-\,. \end{cases} \quad (4.4.35)$$

Тогда из выражения (4.4.34) с учётом формулы (4.4.35) находим

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0\,d\bar{\tau} +$$

$$+ u(\tau_0)\overline{V_0}(\zeta), \quad \zeta \in D'_+\,, \quad (4.4.36)$$

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0\,d\bar{\tau},$$

$$\zeta \in D'_-\,. \quad (4.4.37)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\zeta,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)d\tau - \omega_2(\zeta,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0(\tau)d\bar{\tau}\,.$$

Так как функция $u(\tau)$ — удовлетворяет условию (4.4.27), а функция $\overline{V_0}(\tau)$ непрерывна на контуре L' и контур L' гладкий, то при переходе через этот контур (при $\zeta \to \tau_0 \in L'$) функция $\Psi'(\zeta)$ ведёт себя аналогично интегралу типа Коши [37], то есть $\Psi'(\zeta)$ непрерывна при переходе через L' по любому пути и принимает значение

$$\lim_{\zeta\to\tau_0} \Psi'(\zeta) = \Psi'(\tau_0) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)[u(\tau)-u(\tau_0)]\overline{V_0}(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)[\bar{u}(\tau)-u(\tau_0)]V_0(\tau)\,d\bar{\tau}\,. \tag{4.4.38}$$

Кроме того

$$\lim_{\substack{\zeta\to\tau_0\\ \zeta\in D'_+}} [u(\tau_0)\overline{V_0}(\zeta)] = u(\tau_0)\overline{V_0}(\tau_0) = g(\tau_0), \quad \tau_0 \in L'. \tag{4.4.39}$$

Следовательно, существуют предельные значения выражений (4.4.36) и (4.4.37), которые обозначим

$$\overline{V}^{\,+}(\tau_0) = \lim_{\substack{\zeta\to\tau_0\\ \zeta\in D'_+}} \overline{V}(\zeta) \ \text{ и } \ \overline{V}^{\,-}(\tau_0) = \lim_{\substack{\zeta\to\tau_0\\ \zeta\in D'_-}} \overline{V}(\zeta)\,, \ \ \tau_0 \in L'\,.$$

Совершая в равенстве (4.4.36) и (4.4.37) предельный переход и учитывая выражения (4.4.38), (4.4.39), находим

$$\overline{V}^{\,+} = \Psi'(\tau_0) + g(\tau_0)\,, \ \ \overline{V}^{\,-} = \Psi'(\tau_0)\,, \ \ \tau_0 \in L'. \tag{4.4.40}$$

Значение $\Psi'(\tau_0)$ представим на основании равенств (4.4.33) и (4.4.38) через обобщённый интеграл типа Коши в виде

$$\Psi'(\tau_0) = \overline{V}(\tau_0) - \frac{g(\tau_0)}{2}, \ \ \tau_0 \in L'.$$

Здесь

$$\overline{V}(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \omega_1(\tau_0,\tau)g(\tau)\,d\tau - \omega_2(\tau_0,\tau)\bar{g}(\tau)\,d\bar{\tau} \tag{4.4.41}$$

назовём *прямым* значением в точке $\tau_0 \in L'$ обобщённого интеграла типа Коши для скорости, который понимается в смысле его главного значения.Тогда равенства (4.4.40) запишем

$$\overline{V}^{\,+}(\tau_0) = \overline{V}(\tau) + \frac{g(\tau_0)}{2},\ \ \overline{V}^{\,-}(\tau_0) = \overline{V}(\tau_0) - \frac{g(\tau_0)}{2}\,,\ \ \tau_0 \in L'$$

или кратко

$$\overline{V}^{\,\pm}(\tau_0) = \overline{V}(\tau_0) \pm \frac{g(\tau_0)}{2}\,, \quad \tau_0 \in L'\,, \tag{4.4.42}$$

где $\overline{V}(\tau_0)$ имеет вид (4.4.41).

Формулы (4.4.42) назовём *обобщёнными* формулами Сохоцкого—Племеля для приведённой комплексной скорости. Они аналогичны формулам для комплексного потенциала (4.4.19).

Вычитая и складывая формулы (4.4.42), получаем пару равносильных им формул

$$\overline{V}^{\,+}(\tau_0) - \overline{V}^{\,-}(\tau_0) = g(\tau_0)\,, \quad \overline{V}^{\,+}(\tau_0) + \overline{V}^{\,-}(\tau_0) = 2\overline{V}(\tau_0)\,, \quad \tau_0 \in L'\,, \tag{4.4.43}$$

где $\overline{V}(\tau_0)$ имеет прежний вид (4.4.41).

Так как согласно равенству (2.3.28) $v(\tau_0) = K'(\tau_0)V(\tau_0)$ ($K'(\tau_0) = \sqrt{D[K_s(\tau_0)]} - i\sqrt{D[K_a(\tau_0)]}$, $\tau_0 \in L'$), то формулы (4.4.42) и (4.4.43) запишем для комплексно сопряжённой скорости $\overline{v}(\tau_0)$:

$$\overline{v}^{\pm}(\tau_0) = \overline{K'}(\tau_0)\left[\overline{V}(\tau_0) \pm \frac{g(\tau_0)}{2}\right]\,, \quad \tau_0 \in L', \tag{4.4.44}$$

$$\overline{v}^{\,+}(\tau_0) - \overline{v}^{\,-}(\tau_0) = \overline{K'}(\tau_0)g(\tau_0)\,,\ \ \overline{v}^{\,+}(\tau_0) + \overline{v}^{\,-}(\tau_0) = 2\overline{K'}(\tau_0)\overline{V}(\tau_0)\,,\ \ \tau_0 \in L', \tag{4.4.45}$$

где $\overline{V}(\tau_0)$ имеет вид (4.4.41).

Видно, что скорости $\overline{V}(\tau_0)$ и $\overline{v}(\tau_0)$ терпят на кривой L' разрывы, которые связаны с функцией $g(\tau_0)$, входящей в обобщённый интеграл типа Коши для скорости $\overline{V}(\tau_0)$. Поэтому представление этим интегралом скорости зависит от её поведения на кривой L'. Рассмотрим физически возможные случаи поведения скорости на кривой L' в предположении её гладкости и непрерывности на ней проводимости слоя $P' = HK'$.

Воспользуемся представлением скорости (4.3.10), в котором $g(\tau)$ выразим через $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$. Имеем на кривой L' равенства

$$\overline{P'}ge^{i\theta} - P'\bar{g}e^{-i\theta} = 2i\alpha_1, \;\; g(\tau)e^{i\theta} + \bar{g}e^{-i\theta} = 2\alpha_2\,,$$

откуда

$$g(\tau) = \frac{2[P'(\tau)\alpha_2(\tau) + i\alpha_1(\tau)]e^{-i\theta_\tau}}{P'(\tau) + \overline{P'}(\tau)}, \;\; \tau \in L'\,. \tag{4.4.46}$$

Тогда скорость $\overline{V}(\tau_0)$ и её предельные значения (4.4.42) запишем

$$\begin{gathered}\overline{V}(\tau_0) = \int\limits_{L'} [\overline{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau) + \overline{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)]dl_\tau \quad \tau_0 \notin L'\,,\\ \overline{V}^{\,\pm}(\tau_0) = \overline{V}(\tau_0) \pm \frac{[P'(\tau_0)\alpha_2(\tau_0) + i\alpha_1(\tau_0)]e^{-i\theta_{\tau_0}}}{P'(\tau_0) + \overline{P'}(\tau_0)}, \;\; \tau_0 \in L'\,,\end{gathered} \tag{4.4.47}$$

где

$$\overline{V}(\tau_0) = \int\limits_{L'} [\overline{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau) + \overline{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)]dl_\tau\,, \;\; \tau_0 \in L'$$

прямое значение скорости $\overline{V}(\tau_0)$ на L', в котором интеграл понимается в смысле главного значения по Коши ($\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ — функции класса Гёльдера, поскольку таковой является $g(\tau)$, а $P'(\tau)$ — непрерывная функция на гладкой кривой L').

Для касательных и нормальных составляющих к кривой L' скоростей: $V = (V_l + iV_n)e^{i\theta}$, $v = (v_l + iv_n)e^{i\theta}$ (θ — угол между ортом касательной к кривой L' и осью $O\xi$) из формул (4.4.43) и (4.4.44) с учётом выражения (4.4.46) имеем

$$\begin{aligned} &V_l^+(\tau_0) - V_l^-(\tau_0) = \alpha_2(\tau_0)\,,\\ &V_n^+(\tau_0) - V_n^-(\tau_0) = -\frac{\alpha_1(\tau_0) + P_2'(\tau_0)\alpha_2(\tau_0)}{P_1'(\tau_0)}\,, \quad \tau_0 \in L'\,,\end{aligned} \tag{4.4.48}$$

$$\begin{aligned} &v_l^+(\tau_0) - v_l^-(\tau_0) = \frac{P_2'(\tau_0)\alpha_1(\tau_0) + |P'(\tau_0)|^2\alpha_2(\tau_0)}{H(\tau_0)P_1'(\tau_0)}\,,\\ &v_n^+(\tau_0) - v_n^-(\tau_0) = -\frac{\alpha_1(\tau_0)}{H(\tau_0)}\,, \quad \tau_0 \in L'\,.\end{aligned} \tag{4.4.49}$$

В случае, если $V_l(\tau_0)$ непрерывна на L': $V_l^+(\tau_0) = V_l^-(\tau_0)$, $\tau_0 \in L'$ (в частности, может быть $V_l(\tau_0) = 0$, когда обобщённый потенциал $\varphi(\tau_0) = \mathrm{const}$, $\tau_0 \in L'$), то из формул (4.4.48) следует $\alpha_2(\tau_0) = 0$, а $\alpha_1(\tau_0)$ определяет скачок нормальной составляющей скорости: $V_n^+(\tau_0) - V_n^-(\tau_0) = -\alpha_1(\tau_0)/P_1'(\tau_0)$, $\tau_0 \in L'$. В этом случае формулы (4.4.47) принимают вид

$$\begin{gathered} \overline{V}(\tau_0) = \int\limits_{L'} \overline{V}_1(\tau_0, \tau)\alpha_1(\tau)\, dl_\tau\,, \quad \tau_0 \notin L', \\ \overline{V}^{\,\pm}(\tau_0) = \int\limits_{L'} \overline{V}_1(\tau_0, \tau)\alpha_1(\tau)\, dl_\tau \pm \frac{i\alpha_1(\tau_0)e^{-i\theta_{\tau_0}}}{2P_1'(\tau_0)}\,, \quad \tau_0 \in L'. \end{gathered} \tag{4.4.50}$$

В другом случае, когда поток жидкости через кривую L' непрерывен (функция тока непрерывна на L'):

$$[H(\tau_0)v_n(\tau_0)]^+ = [H(\tau_0)v_n(\tau_0)]^-, \quad \tau_0 \in L',$$

то из формул (4.4.49) имеем $\alpha_1(\tau_0) = 0$, а $\alpha_2(\tau_0)$ определяет скачок касательной составляющей скорости:

$$v_l^+(\tau_0) - v_l^-(\tau_0) = \frac{|P'(\tau_0)|^2\alpha_2(\tau_0)}{H(\tau_0)P_1'(\tau_0)}\,, \quad \tau_0 \in L'.$$

В этом случае формулы (4.4.47) принимают вид

$$\begin{gathered} \overline{V}(\tau_0) = \int\limits_{L'} \overline{V}_2(\tau_0, \tau)\alpha_2(\tau)\, dl_\tau\,, \quad \tau_0 \notin L', \\ \overline{V}^{\,\pm}(\tau_0) = \int\limits_{L'} \overline{V}_2(\tau_0, \tau)\alpha_2(\tau)\, dl_\tau \pm \frac{P'(\tau_0)\alpha_2(\tau_0)e^{-i\theta_{\tau_0}}}{2P_1'(\tau_0)}\,, \quad \tau_0 \in L'. \end{gathered} \tag{4.4.51}$$

Формулы (4.4.51) остаются справедливыми в предельном случае, когда непрерывный поток жидкости через кривую L' стремится к нулю и в пределе кривая L' непроницаема для жидкости.

Обобщённый интеграл типа Коши для вектора скорости и его предельные значения

Введём понятие обобщённого интеграла типа Коши для вектора приведённой скорости $\vec{V} = (V_\xi, V_\eta)$ и укажем его предельные значения на кривой L'. Компоненты скорости V_ξ, V_η выражаются через функции $\varphi(\zeta)$

и $\psi(\zeta)$ формулами (2.3.30). Введём также векторы скорости $\vec{V}_k(\zeta,\tau) = (V_{k\xi}(\zeta,\tau), V_{k\eta}(\zeta,\tau))$ нормированного стока $(k=1)$ и вихря $(k=2)$ как векторное представление комплексных главных решений $V_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$, которые в соответствии с теми же формулами (2.3.30) выражаются по переменной $\zeta=\xi+i\eta$ через функции $\Phi_k(\zeta,\tau)$ и $\Psi_k(\zeta,\tau)$ в виде[1]

$$\begin{aligned}\vec{V}_k(\zeta,\tau) &= V_{k\xi}(\zeta,\tau)\vec{\imath} + V_{k\eta}(\zeta,\tau)\vec{\jmath} = \\ &= \nabla\Phi_k(\zeta,\tau) = \frac{P'^T}{D(P)}\cdot\left[\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\eta}\vec{\imath} - \frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\xi}\vec{\jmath}\right],\end{aligned} \tag{4.4.52}$$

где

$$V_{k\xi}(\zeta,\tau) = \frac{\partial\Phi_k(\zeta,\tau)}{\partial\xi} = \frac{1}{D(P)}\left[\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\eta} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\xi}\right],$$

$$V_{k\eta}(\zeta,\tau) = \frac{\partial\Phi_k(\zeta,\tau)}{\partial\eta} = \frac{1}{D(P)}\left[\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\eta} - \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial\Psi_k(\zeta,\tau)}{\partial\xi}\right], \quad k=1,2.$$

Тогда согласно формулам (4.4.47) при учёте (4.4.52) имеем интегральное представление вектора скорости

$$\vec{V}(\zeta) = \int\limits_{L'}\Big[\vec{V}_1(\zeta,\tau)\alpha_1(\tau) + \vec{V}_2(\zeta,\tau)\alpha_2(\tau)\Big]\,dl_\tau\,, \quad \zeta\notin L' \tag{4.4.53}$$

и его предельные значения на L':

$$\vec{V}^{\pm}(\tau_0) = \vec{V}(\tau_0) \pm \frac{1}{2}\left[\alpha_2(\tau_0)\vec{l} - \frac{\alpha_1(\tau_0) + P_2'(\tau_0)\alpha_2(\tau_0)}{P_1'(\tau_0)}\vec{n}\right], \quad \tau_0\in L'. \tag{4.4.54}$$

Здесь $\vec{l} = (\cos\theta, \sin\theta)$ и $\vec{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ — орты касательной и нормали к кривой L', $\vec{V}(\tau_0)$ — прямое значение вектора скорости :

$$\vec{V}(\tau_0) = \int\limits_{L'}\Big[\vec{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau) + \vec{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)\Big]\,dl_\tau\,,\ \ \tau_0\in L',$$

[1] P'^T — транспонированный тензор проводимости слоя в плоскости ζ: $P'^T = \begin{pmatrix} P_1' & -P_2' \\ P_2' & P_1' \end{pmatrix}$, где $P_1' = \sqrt{D(P_s)}$, $P_2' = \sqrt{D(P_a)}$.

в котором интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, то есть аналогично выражению (4.4.25) в смысле

$$\int\limits_{L'} \Big[\vec{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau) + \vec{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)\Big]\, dl_\tau =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{L'_\varepsilon} \Big[\vec{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau) + \vec{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)\Big]\, dl_\tau\,, \quad \tau_0\in L'\,.$$

Назовём интеграл в выражении (4.4.53) *обобщённым* интегралом типа Коши, а формулы (4.4.54) — *обобщёнными* формулами Сохоцкого—Племеля *для вектора скорости* $\vec{V}$.

Из формул (4.4.54) имеем две эквивалентные им формулы

$$\begin{aligned} &\vec{V}^+(\tau_0) - \vec{V}^-(\tau_0) = \alpha_2(\tau_0)\vec{l} - \frac{\alpha_1(\tau_0) + P_2'(\tau_0)\alpha_2(\tau_0)}{P_1'(\tau_0)}\vec{n}\,,\\ &\vec{V}^+(\tau_0) + \vec{V}^-(\tau_0) = 2\vec{V}(\tau_0)\,, \qquad \tau_0\in L'\,. \end{aligned} \tag{4.4.55}$$

Из формул (4.4.55) следует, что касательная $V_l = \vec{V}\cdot\vec{l}$ и нормальная $V_n = \vec{V}\cdot\vec{n}$ составляющие вектора $\vec{V}$ терпят разрывы на кривой L' в виде (4.4.48).

Используя равенство $\vec{v} = K'\cdot\vec{V}$ (K' — тензор проницаемости слоя), формулы (4.4.53)–(4.4.55) нетрудно записать для вектора скорости $\vec{v}$ и получить условия (4.4.49) на кривой L'.

Запишем скорость $\vec{V}$ и её предельные значения в случаях, рассмотренных выше для комплексной скорости $\overline{V}$. Если касательная составляющая скорости непрерывна на L': $V_l^+(\tau_0) = V_l^-(\tau_0)$, (в частности, $V_l(\tau_0) = 0$, $\tau_0\in L'$), и, следовательно, $\alpha_2(\tau_0) = 0$, $\tau_0\in L'$, то формулы (4.4.53) и (4.4.54) принимают вид

$$\begin{aligned} \vec{V}(\zeta) &= \int\limits_{L'} \vec{V}_1(\zeta,\tau)\alpha_1(\tau)\, dl_\tau\,, \quad \zeta\notin L'\,,\\ \vec{V}^\pm(\tau_0) &= \int\limits_{L'} \vec{V}_1(\tau_0,\tau)\alpha_1(\tau)\, dl_\tau \mp \frac{\alpha_1(\tau_0)}{2P_1'(\tau)}\vec{n}\,, \quad \tau_0\in L'\,. \end{aligned} \tag{4.4.56}$$

В случае, когда поток жидкости через кривую L' непрерывен:

$$[H(\tau_0)v_n(\tau_0)]^+ = [H(\tau_0)v_n(\tau_0)]^-, \quad \tau_0\in L'$$

и, следовательно,

$$\alpha_1(\tau_0) = 0, \quad \tau_0 \in L',$$

то формулы (4.4.53) и (4.4.54) запишем

$$\begin{aligned} \vec{V}(\zeta) &= \int\limits_{L'} \vec{V}_2(\zeta,\tau)\alpha_2(\tau)\,dl_\tau\,, \quad \zeta \notin L'\,, \\ \vec{V}^{\pm}(\tau_0) &= \int\limits_{L'} \vec{V}_2(\tau_0,\tau)\alpha_2(\tau)\,dl_\tau \pm \frac{\alpha_2(\tau_0)}{2}\left[\vec{l} - \frac{P_2'(\tau_0)\vec{n}}{P_1'(\tau_0)}\right], \quad \tau_0 \in L'\,. \end{aligned} \tag{4.4.57}$$

Указанные выше представления комплексного потенциала, комплексной скорости и вектора скорости обобщёнными интегралами типа Коши и их предельные значения позволяют решать граничные задачи (см. гл. 5, 6).

Часть II

Исследование граничных задач

Исследуются поставленные двумерные и трёхмерные граничные задачи фильтрации в пористой среде. Решения стационарных задач с каноническими границами находятся в конечном виде, а в случае произвольных гладких границ задачи редуцируются к системам сингулярных интегральных уравнений. Задача эволюции границы раздела жидкостей редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Исследуются задачи о работе скважин в пластах грунта сложной геологической структуры (анизотропных и неоднородных) с учётом подвижной границы раздела жидкостей, которые актуальны при эксплуатации нефтеносных (водоносных) пластов и мониторинге распространения в них загрязнений.

Глава 5

Стационарные двумерные граничные задачи

Основные стационарные граничные задачи формулируются для комплексного потенциала двумерных (в том числе осесимметричных) течений в анизотропной пористой среде. Решения этих задач представляются в конечном виде в случае канонических границ, а в общем случае гладких границ они редуцируются к сингулярным интегральным уравнениям.

§ 5.1. Формулировки граничных задач для комплексного потенциала

Постановка вопроса

Исследование конкретных проблем практики приводит к необходимости решения двумерных граничных задач фильтрации в анизотропном неоднородном слое (пласте) пористой среды (грунте). Рассмотрим в стационарном случае первую и вторую краевые задачи и задачу сопряжения. Границы моделируем простыми (без самопересечений) гладкими кривыми. К решению этих задач применим изложенный в § 2.5 метод. Воспользуемся тем, что граничные условия задач ковариантны (сохраняют форму записи) относительно гомеоморфного преобразования $\zeta = \zeta(z)$, и сформулируем эти задачи в плоскости ζ для комплексного потенциала $W(\zeta)$ (обобщённого потенциала $\varphi(\zeta)$ и функции тока $\psi(\zeta)$).

Первая и вторая краевые задачи

Воспользуемся введенным в плоскости ζ по формуле (2.3.20) комплексным потенциалом $W(\zeta)$ (обобщённым потенциалом $\varphi(\zeta)$ и функцией тока

$\psi(\zeta))$ течения в слое проводимости $P'(\zeta)$, который запишем

$$W(\zeta) = \varphi(\zeta) + i\frac{\psi(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in D'. \tag{5.1.1}$$

Область течения D' может быть ограничена линиями σ_1' и σ_2', а также, вообще говоря, сингулярной линией $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$ [1]. Линии σ_1', σ_2' и σ_0' — образы линий σ_1, σ_2 и $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ согласно гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ уравнения Бельтрами (2.3.10). Течение вызвано заданными источниками (стоками), которые моделируем в отсутствии границ σ_1' и σ_2' изолированными точками (сингулярностями) комплексного потенциала $W_0(\zeta)$ (обобщённого потенциала $\varphi_0(\zeta)$ и функцией тока $\psi_0(\zeta)$):

$$W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\frac{\psi_0(\zeta)}{P'(\zeta)}. \tag{5.1.2}$$

Учтем источники (стоки) течения и границы σ_1' и σ_2' и, вообще говоря, σ_0'. Представим комплексный потенциал $W(\zeta)$ (функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$) в виде

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D' \tag{5.1.3}$$

$$\bigl(\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_*(\zeta)\bigr).$$

Здесь $W_*(\zeta)$ — комплексный потенциал ($(\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ — обобщённый потенциал и функция тока) возмущений, обусловленных границами σ_1', и σ_2' и σ_0', который запишем

$$W_*(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + i\frac{\psi_*(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in D'. \tag{5.1.4}$$

Учитывая формулы (5.1.1)–(5.1.4) и равенства (2.3.21), запишем условия на границах σ_1', σ_2' и σ_0' и в бесконечности для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (функций $(\varphi_*(\zeta)$, $\psi_*(\zeta))$ возмущений. Для этого сначала представим условия (1.3.2), (1.3.7), (1.3.8), (1.3.13) на плоскости ζ для функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ (орты нормалей к границам направлены во внутрь области D'):

$$\varphi^+(\zeta) = f_0(\zeta) \quad \bigl(f_0(\zeta) = -(p_0(\zeta) + \rho\Pi(\zeta))/\mu\bigr), \quad \zeta \in \sigma_1',$$

[1] Сингулярная линия σ_0' обусловлена неоднородностью анизотропного слоя, характеризуемого проводимостью $P'(\zeta)$. Линия σ_0' отсутствует, если слой однородный (P' — комплексная постоянная).

$$\psi^+(\zeta) = C_0 \quad (C_0 = \mathrm{const}), \quad \zeta \in \sigma_2',$$
$$\varphi^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{01}'; \quad \psi^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{02}'.$$

Тогда находим для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (функций $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$) условия на σ_1' и σ_2':

$$\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = f_0(\zeta)\,\mathrm{Re}\,P'(\zeta) - \mathrm{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)] \tag{5.1.5}$$
$$\big(\varphi_0^+(\zeta) = f_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_1',$$
$$\mathrm{Im}\,W_*^+(\zeta) = \frac{C_0\,\mathrm{Re}\,P'(\zeta)}{|\,P'(\zeta)\,|} - \mathrm{Im}\,W_0(\zeta) \tag{5.1.6}$$
$$\big(\psi_*^+(\zeta) = C_0 - \psi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_2'.$$

В частности, в условии (5.1.5) можно положить $f_0(\zeta) = 0$ (случай напорной фильтрации, когда $|\,\nabla p\,| \gg \rho\,|\,\Pi\,|$), а в условии (5.1.6) выбрать $C_0 = 0$ и записать

$$\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = -\,\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)] \quad \big(\varphi_0^+(\zeta) = -\varphi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{5.1.5$'$}$$
$$\mathrm{Im}\,W_*^+(\zeta) = -\,\mathrm{Im}\,W_0(\zeta) \quad \big(\psi_*^+(\zeta) = -\psi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_2'. \tag{5.1.6$'$}$$

Так как полагаем, что $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют тем же условиям, что $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на границе $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$, то условия для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (функций $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$) на этой границе принимают вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]^+ = 0 \quad \big(\varphi_*^+(\zeta) = 0\big), \quad \zeta \in \sigma_{01}'; \\ &[|P'(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,W_*(\zeta)]^+ = 0 \quad \big(\psi_*^+(\zeta) = 0\big), \quad \zeta \in \sigma_{02}'. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Теперь запишем в плоскости ζ условия в бесконечности. Полагаем гомеоморфное преобразование $\zeta = \zeta(z)$ полным и точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = \infty$. Так как комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ (функции $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$) не содержат в бесконечности особых точек (заданные особые точки входят в $W_0(\zeta)$), то условия (1.3.15) запишем

$$\frac{\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)} = O(|\zeta|^{-1}), \quad \left|P'(\zeta)\cdot\nabla\left\{\frac{\mathrm{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)}\right\}\right| = O(|\zeta|^{-2})$$
$$\Big(\varphi_*(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad |P'(\zeta)\cdot\nabla\varphi_*(\zeta)| = O(|\zeta|^{-2})\Big) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty. \tag{5.1.8}$$

Условия (5.1.8) выражают затухание возмущений на бесконечности: обобщённый потенциал φ_* и поток скорости $\vec{v}_* = K' \cdot \nabla\varphi_*$ обращаются в нуль на бесконечности.

Первая и вторая краевые задачи формулируются на плоскости ζ следующим образом. Заданы источники (стоки) течения в слое проводимости $P'(\zeta)$ (задан комплексный потенциал $W_0(\zeta)$). Найти комплексный потенциал течения $W_*(\zeta)$, удовлетворяющий в области D' уравнению (2.3.22) и условию (5.1.5)(первая краевая задача) или условию (5.1.6) (вторая краевая задача). В этих задачах краевые условия могут также иметь вид (5.1.5′) или (5.1.6′). В случае, если область D' ограничена сингулярной линией σ_0', то комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ должен дополнительно удовлетворять на этой линии условиям (5.1.7).

В зависимости от того область D' содержит (или не содержит) точку $\zeta = \infty$ указанные задачи называют внешними (или внутренними) краевыми задачами. В случае второй внутренней краевой задачи в силу уравнения неразрывности (закона сохранения объемного расхода жидкости) алгебраическая сумма мощностей заданных источников и стоков, описываемых комплексным потенциалом $W_0(\zeta)$, должна быть равна нулю в области D'. В случае внешних краевых задач комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ помимо указанных краевых условий должен удовлетворять в бесконечности условиям (5.1.8).

По найденному комплексному потенциалу $W_*(\zeta)$ отыскиваем по формуле (5.1.3) комплексный потенциал $W(\zeta)$ (обобщённый потенциал $\varphi(\zeta)$ и функцию тока $\psi(\zeta)$) течения в области D'. Согласно гомеоморфному преобразованию $\zeta = \zeta(z)$ находим обобщённый потенциал $\varphi(z) = \varphi[\zeta(z)]$ и функцию тока $\psi(z) = \psi[z(\zeta])$ течения в области D физической плоскости z.

Задача сопряжения на границе раздела слоёв

Условия сопряжения (1.3.19) на границе Γ раздела слоёв запишем в плоскости ζ для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (функций $\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$). Пусть кусочно-анизотропный и, вообще говоря, неоднородный слой имеет в плоскости ζ границу Γ' сопряжения областей D_1' и D_2' ($D_1' \cup D_2' = D'$) проводимости слоя в которых P_1' и P_2', причём $P_\nu' = k_\nu P'(\zeta)$, $\nu = 1, 2$, $k_\nu > 0$ — вещественные постоянные, $P'(\zeta) = H(\zeta)K'(\zeta)$ (толщина слоя $H(\zeta)$ непрерывна на Γ'). Область $\bar{D}' = D' \cup \Gamma'$ — образы области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ согласно гомеоморфизму $\zeta = \zeta(z)$. Течение в областях D_1' и

D_2' описывают комплексные потенциалы $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$ (функции $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$, $\psi_2(\zeta)$) следующего вида

$$W_\nu(\zeta) = k_\nu \varphi_\nu(\zeta) + i\frac{\psi_\nu(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2. \tag{5.1.9}$$

Условия (1.3.19) записываем на границе Γ' (орт нормали к Γ' направлен внутрь области D_1'):

$$\varphi_1^+(\zeta) = \varphi_2^-(\zeta), \quad \psi_1^+(\zeta) = \psi_2^-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'. \tag{5.1.10}$$

Пусть источники (стоки) течения в анизотропном неоднородном слое проводимости $P'(\zeta)$ (граница Γ' отсутствует) описывает комплексный потенциал (5.1.2). Представим комплексные потенциалы $W_\nu(\zeta)$ (функции φ_ν и ψ_ν, $\nu = 1, 2$) в виде

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2 \tag{5.1.11}$$

$$\Big(k_\nu \varphi_\nu(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \psi_\nu(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_*(\zeta)\Big).$$

Здесь $W_*(\zeta)$ — комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ — обобщённый потенциал и функция тока) возмущений, обусловленных различием проводимостей слоя в областях D_1' и D_2' (наличием границы Γ'). $W_*(\zeta)$ имеет вид (5.1.4).

На основании формул (5.1.2), (5.1.4), и (5.1.9) при учёте непрерывности на Γ' комплексного потенциала $W_0(\zeta)$ и функций $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ и $P'(\zeta)$ ($W_0^+(\zeta) = W_0^-(\zeta) = W_0(\zeta)$, $\varphi_0^+(\zeta) = \varphi_0^-(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$, $\psi_0^+(\zeta) = \psi_0^-(\zeta) = \psi_0(\zeta)$ и $P'^+(\zeta) = P'^-(\zeta) = P'(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$) запишем условия (5.1.10) для $W_*(\zeta)$ ($\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$) следующим образом

$$\mathrm{Re}\Big\{P'(\zeta)\big[(1-\lambda_k)W_*^+(\zeta) - (1+\lambda_k)W_*^-(\zeta) - 2\lambda_k W_0(\zeta)\big]\Big\} = 0, \tag{5.1.12}$$

$$\mathrm{Im}[W_*^+(\zeta) - W_*^-(\zeta)] = 0$$

$$\big((1-\lambda_k)\varphi_*^+(\zeta) - (1+\lambda_k)\varphi_*^-(\zeta) = 2\lambda_k\varphi_0(\zeta), \quad \psi_*^+(\zeta) = \psi_*^-(\zeta)\big), \quad \zeta \in \Gamma',$$

где $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_k = (-1, 1)$.

Видно, что на границе Γ' обобщённый потенциал $\varphi_*(\zeta)$ терпит разрыв, а функция тока $\psi_*(\zeta)$ непрерывна.

Из условий (5.1.12) исключим $\overline{W}_*^-(\zeta)$. Тогда условия на Γ' запишем

$$\Big[(1-\lambda_k)P'(\zeta)+(1+\lambda_k)\overline{P}'(\zeta)\Big]W_*^+(\zeta)-2\lambda_k\overline{P}'(\zeta)\overline{W}_*^+(\zeta)- \qquad (5.1.12')$$

$$-(1+\lambda_k)\Big[P'(\zeta)+\overline{P}'(\zeta)\Big]W_*^-(\zeta)=2\lambda_k\Big[P'(\zeta)W_0(\zeta)+\overline{P}'(\zeta)\overline{W}_0(\zeta)\Big],\quad \zeta\in\Gamma',$$

Задача сопряжения на Γ' состоит в следующем. Заданы источники (стоки) течения в слое проводимости $P'(\zeta)$ (задан комплексный потенциал $W_0(\zeta)$). Найти комплексный потенциал $W_*(\zeta)$, удовлетворяющий в области $D'=D'_1\cup D'_2$ уравнению (2.3.22) и условиям (5.1.12) (или (5.1.12′)). Если область D' ограничена линиями σ'_0, σ'_1, σ'_2 и содержит точку $\zeta = \infty$, то помимо условий на Γ' комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ должен также удовлетворять указанным выше для него условиям на этих линиях и в бесконечности.

После того как найден комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ отыскиваются по формуле (5.1.11) комплексные потенциалы $W_\nu(\zeta)$ (функции φ_ν и ψ_ν), $\nu=1,2$. На основании преобразования $\zeta=\zeta(z)$ можно найти обобщённые потенциалы $\varphi_\nu(z)=\varphi_\nu[\zeta(z)]$ и функции тока $\psi_\nu(z)=\psi_\nu[\zeta(z)]$, ($\nu=1,2$) течения в области $D=D_1\cup D_2$ физической плоскости z.

Заметим, что параметр λ_k может в качестве предельных принимать значения $\lambda_k=-1$ и $\lambda_k=+1$. При этих значениях λ_k задача сопряжения для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ переходит соответственно в первую и вторую краевые задачи для $W_*(\zeta)$. Действительно, если область D'_1 (или D'_2) занята каверной: $k_1\to\infty$, $\lambda_k\to+1$, ($k_2\to\infty$, $\lambda_k\to-1$), то задача сопряжения с условием (5.1.12) принимает вид первой краевой задачи для области D'_1 (или D'_2) с условием вида (5.1.5′) для комплексного потенциала W_*^- (или W_*^+). Когда область D'_1 (или D'_2) занята непроницаемым грунтом: $k_1\to 0$, $\lambda_k\to-1$, (или $k_2\to 0$, $\lambda_k\to+1$), то задача сопряжения с условием (5.1.12) принимает вид второй краевой задачи для области D'_2 (или D'_1) с условием (5.1.6′) для комплексного потенциала W_*^- (или W_*^+). Это позволяет находить решения первой и второй краевых задач с условиями (5.1.5′) и (5.1.6′) как предельные случаи (при $\lambda_k\to\pm1$) решения задачи сопряжения.

Решение поставленных задач удаётся найти в конечном виде в случае канонических границ (прямая, эллипс), а в случае произвольных гладких границ редуцировать их к сингулярным интегральным уравнениям на этих границах. Отметим, что краевые задачи и задача сопряжения исследовались в работах [36, 40, 54, 86, 90, 91, 96, 117, 123, 137, 141, 150–153], главным образом для изотропных сред.

§ 5.2. Плоские задачи с каноническими границами

Задачи с прямолинейными границами

Пусть анизотропный (кусочно-анизотропный) слой таков, что его проводимость $P = (P_{ij})$ ($P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$) постоянная (кусочно-постоянная). На плоскости z каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ (граница σ_0, естественно, отсутствует) моделируем прямой. Уравнения прямой, проходящей через точку $z_0 = x_0 + iy_0$ под углом θ_0 к оси Ox представим в параметрическом виде ($t \in (-\infty, \infty)$ — параметр)

$$z = z_0 + te^{i\theta_0} \quad (x = x_0 + t\cos\theta_0, \quad y = y_0 + t\sin\theta_0). \tag{5.2.1}$$

Уравнение прямой (5.2.1) согласно равенству (2.4.13) преобразуется в уравнение прямой плоскости ζ, проходящей через точку $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$ под углом ϑ_0 к оси $O\xi$ (рис. 5.2.1):

$$\zeta = \zeta_0 + te^{i\vartheta_0} \quad (\xi = \xi_0 + t\cos\vartheta_0, \quad \eta = \eta_0 + t\sin\vartheta_0), \tag{5.2.2}$$

где

$$e^{i\vartheta_0} = e^{i\theta_0} + \mu e^{-i\theta_0}$$

$$(\cos\vartheta_0 = (1+a)\cos\theta_0 + b\sin\theta_0, \quad \sin\vartheta_0 = (1-a)\sin\theta_0 + b\cos\theta_0).$$

Перейдём на плоскость $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, используя преобразования переноса начала координат системы $O_1\xi_1\eta_1$ в точку ζ_0 и поворота системы $O_1\xi_1\eta_1$ вокруг точки ζ_0 на угол ϑ_0 против часовой стрелки:

$$\zeta_1 = (\zeta - \zeta_0)e^{-i\vartheta_0}$$

$$(\xi_1 = (\xi - \xi_0)\cos\vartheta_0 + (\eta - \eta_0)\sin\vartheta_0, \quad \eta_1 = -(\xi - \xi_0)\sin\vartheta_0 + (\eta - \eta_0)\cos\vartheta_0).$$

В результате получаем уравнение прямой: $\xi_1 \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$ (ось абсцисс $O_1\xi_1$ плоскости ζ_1, рис. 5.2.1).

Таким образом, уравнение прямой (5.2.1) на плоскости z переходит в прямую — ось абсцисс плоскости ζ_1 в результате преобразования (прямого и обратного)

$$\zeta_1 = [z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)]e^{-i\vartheta_0}, \quad z - z_0 = \frac{\zeta_1 e^{i\vartheta_0} - \mu\bar{\zeta}_1 e^{-i\vartheta_0}}{1 - |\mu|^2}, \tag{5.2.3}$$

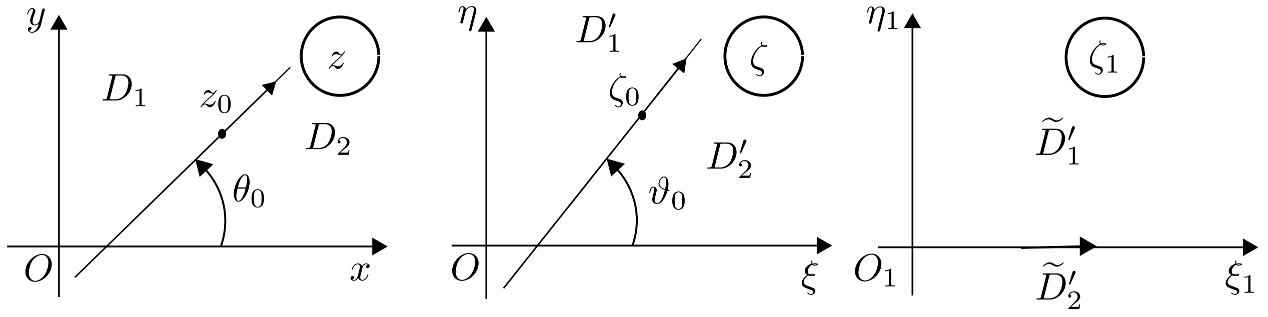

Рис. 5.2.1. Преобразование прямой линии.

где

$$e^{i\vartheta_0} = e^{i\theta_0} + \mu e^{-i\theta_0}, \quad e^{-i\vartheta_0} = e^{-i\theta_0} + \bar{\mu} e^{i\theta_0}.$$

Точки областей D_1', D_2' и $\widetilde{D}_1'$, $\widetilde{D}_2'$ на плоскостях z и ζ_1 взаимосвязаны преобразованиями (5.2.3).

Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 5.1 *(теорема сопряжения на прямой). Пусть течение в анизотропном однородном слое постоянной толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $D(K) > 0$ (постоянной проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$) описывает на плоскости z обобщённый потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, которые имеют изолированные особые точки всюду в этой плоскости за исключением прямой* (5.2.1), *делящей плоскость на области D_1 и D_2. Это течение описывает на плоскости ζ_1 комплексный потенциал $W_0(\zeta_1)$ вида* (5.1.2), *который имеет такие же изолированные особые точки в областях $\widetilde{D}_1'$ и $\widetilde{D}_2'$ (в полуплоскостях $\operatorname{Im}\zeta_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\zeta_1 < 0$). Пусть $W_0(\zeta_1)$ можно представить в виде $W_0(\zeta_1) = W_{01}(\zeta_1) + W_{02}(\zeta_1)$, где функции $W_{01}(\zeta_1)$ и $W_{02}(\zeta_1)$ имеют изолированные особые точки в $\widetilde{D}_1'$ и $\widetilde{D}_2'$, причём*

$$W_0(\zeta_1) = O(|\,\zeta_1\,|^{-1}) \quad \textit{при} \quad |\,\zeta_1\,| \to \infty. \tag{5.2.4}$$

Тогда течение в областях D_1 и D_2 плоскости z в случае слоя той же толщины H и постоянной проницаемости K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $k_\nu > 0$ — постоянные, $\nu = 1, 2$) описывают комплексные потенциалы

$$W_1(z) = W_0(\zeta_1) + \lambda[\overline{P}'\overline{W_{01}(\overline{\zeta_1})} + P' W_{02}(\zeta_1)], \quad z \in D_1, \tag{5.2.5}$$

$$W_2(z) = W_0(\zeta_1) - \overline{\lambda}[P' W_{01}(\zeta_1) + \overline{P}'\overline{W_{02}(\overline{\zeta_1})}], \quad z \in D_2,$$

где

$$\zeta_1 = [z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z_0})]e^{-i\vartheta_0}, \quad \lambda = \frac{2\lambda_k}{(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\overline{P}'}, \quad \lambda_k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},$$

$P' = H[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}]$ — *постоянная комплексная проводимость слоя, связь углов* ϑ_0 *и* θ_0 *такая же как в равенстве* (5.2.3).

Доказательство. По условию теоремы функции $W_{01}(\zeta_1)$ и $W_{02}(\zeta_1)$ имеют изолированные особые точки в областях $\widetilde{D}'_1$ и $\widetilde{D}'_2$ (в полуплоскостях $\operatorname{Im}\zeta_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\zeta_1 < 0$) и, следовательно, они являются аналитическими соответственно в областях $\widetilde{D}'_2$ и $\widetilde{D}'_1$. Продолжим $W_{01}(\zeta_1)$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}'_2$ и $W_{02}(\zeta_1)$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}'_1$ соответственно в области $\widetilde{D}'_1$ и $\widetilde{D}'_2$. Согласно принципу симметрии (точки $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ и $\bar{\zeta_1} = \xi_1 - i\eta_1$ симметричны относительно оси абсцисс $\operatorname{Im}\zeta_1 = 0$) получаем аналитические функции $\overline{W_{01}(\overline{\zeta_1})}$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}'_1$ и $\overline{W_{02}(\overline{\zeta_1})}$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}'_2$. Тогда комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta_1)$ в случае слоя постоянной толщины H и кусочно-постоянной проницаемости K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$, $k_\nu > 0$, $\nu = 1,2$) представим в областях $\widetilde{D}'_1$ и $\widetilde{D}'_2$ плоскости ζ_1 с учётом вида правой части условия (5.1.12′) следующим образом

$$W_*(\zeta_1) = \begin{cases} A_1\Omega_1(\zeta_1) \quad (\Omega_1(\zeta_1) = \overline{P}'\overline{W_{01}(\overline{\zeta}_1)} + P'W_{02}(\zeta_1)), & \zeta_1 \in \widetilde{D}'_1, \\ A_2\Omega_2(\zeta_2) \quad (\Omega_2(\zeta_1) = P'W_{01}(\zeta_1) + \bar{P}'\overline{W_{02}(\overline{\zeta}_1)}), & \zeta_1 \in \widetilde{D}'_2. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Стоящие в выражении (5.2.6) постоянные A_1 и A_2 (вообще говоря, комплексные) найдем, удовлетворив его условию (5.1.12′), которое имеет место на оси абсцисс: $\operatorname{Im}\zeta_1 = 0$ ($\xi \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$). Учтём, что на этой оси $\Omega_1^+(\zeta_1) = \Omega(\xi_1, 0)$ и $\overline{\Omega}_1^+(\zeta_1) = \Omega_2^-(\zeta_1) = \overline{\Omega}(\xi_1, 0)$ ($\Omega(\xi_1, 0) = \overline{P}'\overline{W}_{01}(\xi, 0) + P'W_{02}(\xi_1, 0)$, $\bar{\Omega}(\xi_1, 0) = P'W_{01}(\xi_1, 0) + \overline{P}'\overline{W}_{02}(\xi_1, 0)$). Находим равенство

$$\{[(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\overline{P}']A_1 - 2\lambda_k\}\Omega(\xi_1, 0) - \\ - \{2\lambda_k(\overline{P}_*\overline{A}_1 + 1) + (1+\lambda_k)(P' + \overline{P}')A_2\}\overline{\Omega}(\xi_1, 0) = 0,$$

которое должно выполняться во всех точках оси абсцисс ($\xi_1 \in (-\infty, \infty)$). Так как на этой оси $\Omega(\xi_1, 0)$ и $\overline{\Omega}(\xi_1, 0)$ не равны нулю, то это равенство обратится в тождество, если

$$A_1 = -\overline{A}_2 = \lambda, \quad \lambda = 2\lambda_k\big[(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\overline{P}'\big]^{-1}.$$

Тогда комплексный потенциал (5.2.6) принимает вид

$$W_*(\zeta_1) = \begin{cases} \lambda\big[\overline{P}'\overline{W_{01}(\overline{\zeta}_1)} + P'W_{02}(\zeta_1)\big], & \zeta_1 \in \widetilde{D}_1', \\ -\overline{\lambda}\big[P'W_{01}(\zeta_1) + \overline{P}'\overline{W_{02}(\overline{\zeta}_1)}\big], & \zeta_1 \in \widetilde{D}_2'. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

Так как имеет место условие (5.2.4), то комплексный потенциал (5.2.7) удовлетворяет условиям в бесконечности (5.1.8).

Подставляя комплексный потенциал (5.2.7) в равенство (5.1.3) и учитывая первое из равенств (5.2.3), имеем искомые комплексные потенциалы (5.2.5). ■

Решение первой и второй краевых задач в случае прямолинейной границы выражает

Теорема 5.2. *Пусть течение в анизотропном однородном слое постоянной толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$ $D(K) > 0$ описывают на всей плоскости z обобщённый потенциал $\varphi_0(z)$, и функция тока $\psi_0(z)$, изолированные особые точки которых располагаются в области D, ограниченной прямой* (5.2.1). *Это течение описывает на плоскости ζ_1 комплексный потенциал $W_0(\zeta_1)$ вида* (5.1.2) *с теми же изолированными особыми точками, располагающимися в области $\widetilde{D}'$, ограниченной прямой $\mathrm{Im}(\zeta_1) = 0$ (ось абсцисс), причём*

$$W_0(\zeta_1) = O(|\zeta_1|^{-1}) \quad \textit{при} \quad |\zeta_1| \to \infty.$$

Тогда течение в области D плоскости z для слоя той же толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$, ограниченной прямой (5.2.1), *являющейся границей σ_1 с условием $(1.3.3')$ или границей σ_2 с условием $(1.3.7')$ описывает комплексный потенциал*

$$W(z) = W_0(\zeta_1) - \frac{\bar{P}'}{P'}\overline{W_0(\overline{\zeta}_1)}, \quad z \in D \tag{5.2.8}$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta_1) + \overline{W_0(\overline{\zeta}_1)}, \quad z \in D, \tag{5.2.9}$$

где $\zeta_1 = [z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z_0})]e^{-i\vartheta_0}$, $P' = H\big[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}\big]$.

Доказательство. Пусть для определённости (не нарушая общности суждений) особые точки комплексного потенциала $W_0(\zeta_1)$ располагаются в области $\widetilde{D}_1'$ (в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta_1 > 0$). Функцию $W_0(\zeta_1)$ — аналитическую в области $\widetilde{D}_2'$ (в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta_1 < 0$) продолжим в область $\widetilde{D}_1'$

и получим в ней аналитическую функцию $\overline{W_{01}(\overline{\zeta}_1)}$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}_1'$. Комплексные потенциалы $W_*(\zeta_1) = -\overline{P}'\overline{W_0(\overline{\zeta}_1)}/P'$ и $W_*(\zeta_1) = \overline{W_0(\overline{\zeta}_1)}$, $\zeta_1 \in \widetilde{D}_1'$ — аналитические функции удовлетворяют на оси абсцисс: $\operatorname{Im}\zeta_1 = 0$ ($\xi \in (-\infty, \infty)$, $\eta_1 = 0$)соответственно условиям (5.1.5′) и (5.1.6′), а также с учётом заданного условия $W_0(\zeta_1) = O(|\zeta_1|^{-1})$ при $|\zeta_1| \to \infty$ отвечают условиям в бесконечности (5.1.8). Тогда с учётом (5.1.3) и первого из равенств (5.2.3) имеем искомые комплексные потенциалы (5.2.8) и (5.2.9). ■

Отметим, что в соответствии с высказанным выше замечанием, комплексные потенциалы (5.2.8) и (5.2.9) следуют как предельные случаи комплексного потенциала $W_1(z)$ из (5.2.5) соответственно при $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$) и при $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$).

Задачи с эллиптическими границами

Рассмотрим теперь случай, когда каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ на плоскости z можно моделировать эллипсом. Пусть в плоскости z задан эллипс с центром в начале координат с полуосями A и B, причём полуось A составляет угол α_1 с осью Ox. Далее выбираем $\alpha_1 = \alpha/2 = \frac{1}{2}\arg\mu$ ($\mu = |\mu|e^{i\alpha}$). Уравнение эллипса запишем в параметрическом виде
($t \in [0, 2\pi]$ — параметр)

$$z = e^{i\alpha_1}\Big(\frac{A+B}{2}e^{it} + \frac{A-B}{2}e^{-it}\Big) \quad (\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\mu). \tag{5.2.10}$$

В системе координат Ox_1y_1, повернутой на угол α_1 против часовой стрелки, в результате преобразования $z_1 = x_1 + iy_1 = ze^{-i\alpha_1}$ уравнение (5.2.10) принимает канонический вид (рис. 5.2.2)

$$z_1 = \frac{A+B}{2}e^{it} + \frac{A-B}{2}e^{-it} \quad (x_1 = A\cos t, \quad y_1 = B\sin t).$$

Применим к уравнению (5.2.10) преобразование (2.4.14), в котором положим $C =| C | e^{i\gamma_1}$, то есть имеем:

$$\zeta =| C | e^{i\gamma_1}(z + \mu\bar{z}), \quad \zeta = \frac{\zeta e^{-i\gamma_1} - \mu\bar{\zeta}e^{-i\gamma_1}}{| C | (1- | \mu |^2)}. \tag{5.2.11}$$

Тогда в плоскости ζ имеем уравнение эллипса

$$\zeta = e^{i\beta_1}\Big(\frac{A'+B'}{2}e^{it} + \frac{A'-B'}{2}e^{-it}\Big) \quad (\beta_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\arg\mu) \tag{5.2.12}$$

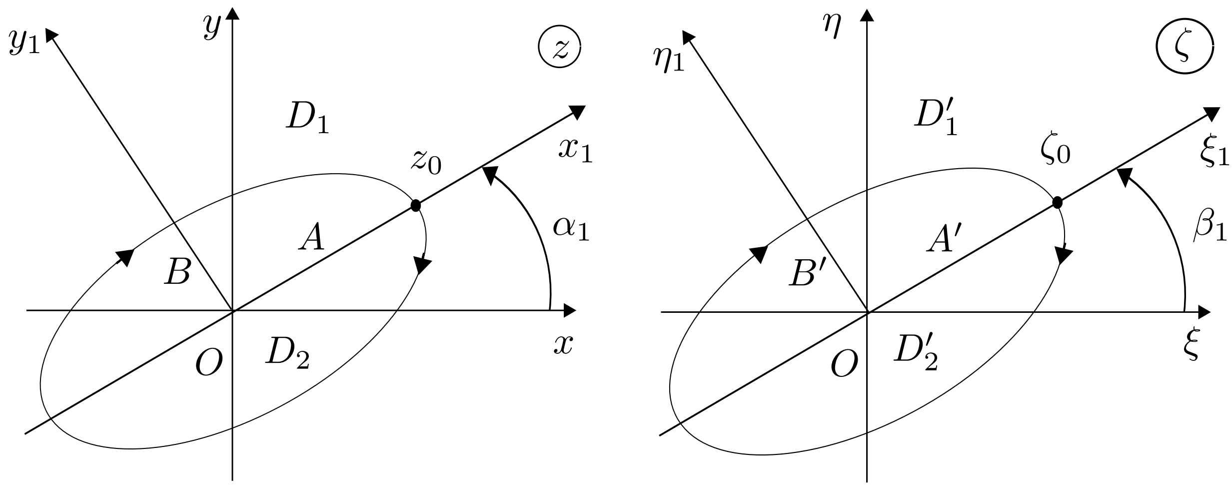

Рис. 5.2.2. Преобразование эллипса.

с полуосями

$$A' = |C|(1 + |\mu|)A, \quad B' = |C|(1 - |\mu|)B. \tag{5.2.12$'$}$$

Центр эллипса (5.2.12) в начале координат, а его полуось A' составляет угол β_1 с осью $O\xi$. В системе координат $O\xi_1\eta_1$, повернутой на угол β_1 против часовой стрелки, в результате преобразования $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = \zeta e^{-i\beta_1}$ имеем каноническое уравнение (рис. 5.2.2)

$$\zeta_1 = \frac{A' + B'}{2}e^{it} + \frac{A' - B'}{2}e^{-it} \quad (\xi_1 = A'\cos t, \quad \eta_1 = B'\sin t).$$

Заметим, если выбрать $\gamma_1 = -\frac{1}{2}\arg\mu$, то угол $\beta_1 = 0$.

Таким образом, уравнение эллипса (5.2.10) в плоскости z согласно преобразованию (5.2.11) переходит в уравнение эллипса (5.2.12) плоскости ζ. Центры эллипсов расположены в начале координат, а их полуоси взаимосвязаны равенствами (5.2.12$'$). Площади эллипсов $S = \pi AB$ и $S' = \pi A'B'$ связаны равенством $S' = |C|^2(1 - |\mu|^2)S$. Они будут равны ($S' = S$), если в преобразовании (5.2.11) выбрать масштабный множитель в виде $|C| = (1 - |\mu|^2)^{-1/2}$. В этом случае площадь эллипса — инвариант преобразований (5.2.11).

Эллипс плоскости z (плоскости ζ) делит её на области D_1 и D_2 (области D'_1 и D'_2), если обходить его от точки z_0 (точки ζ_0) по часовой стрелке (параметр $t \in [0, -2\pi]$, рис. 5.2.2).

На основаниии формул (5.2.10)–(5.2.12$'$) рассмотрим частные случаи преобразования уравнения эллипса. Уравнение эллипса (5.2.10) с полуосями

$$A = \frac{\rho_0}{|C|(1+|\mu|)}, \quad B = \frac{\rho_0}{|C|(1-|\mu|)}$$

преобразуется в окружность радиуса ρ_0, уравнение которой в плоскости ζ имеет вид

$$\zeta = \rho_0 e^{i(t+\beta_1)} \quad \left(\beta_1 = \gamma_1 + \frac{1}{2}\arg\mu\right). \tag{5.2.13}$$

Окружность радиуса r_0, уравнение которой в плоскости z имеет вид

$$z = r_0 e^{i(t+\alpha_1)} \quad \left(\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\mu\right) \tag{5.2.13$'$}$$

преобразуется в уравнение эллипса (5.2.11) плоскости ζ с полуосями

$$A' = |C|(1+|\mu|)r_0, \quad B' = |C|(1-|\mu|)r_0.$$

Если $|\mu| \to 1$, то окружность радиуса r_0 в пределе вырождается в отрезок $[-A', A']$ $(A' = 2|C|r_0)$ оси $O\xi_1$.

Площади указанных эллипсов и кругов одинаковы, если выбрать масштабный множитель $|C| = (1-|\mu|^2)^{-1/2}$.

Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 5.3 *(теорема сопряжения на эллипсе). Пусть течение в анизотропном однородном слое постоянной толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$, $D(K) > 0$ (постоянной проводимости $P = H(K_{ij})$) описывает на плоскости z обобщённый потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, которые имеют изолированные особые точки всюду в этой плоскости за исключением эллипса* (5.2.10)*, делящего плоскость на области D_1 и D_2. Это течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ вида* (5.1.2)*, который имеет те же изолированные особые точки в областях $D_1'(|\zeta| > \rho_0)$ и $D_2'(|\zeta| < \rho_0)$ — вне и внутри окружности радиуса ρ_0, уравнение которой* (5.2.13)*. Пусть $W_0(\zeta)$ можно представить в виде $W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta)$, где функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют изолированные особые точки в D_1' и D_2', причём*

$$W_{01}(\zeta) = O(\zeta) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to 0, \tag{5.2.14}$$

$$W_{02}(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty.$$

Тогда течение в областях D_1 и D_2 плскости z в случае слоя той же толщины H и кусочно-постоянной проницаемости K_1 и K_2 $(K_\nu = k_\nu K$,

$K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$, $k_\nu > 0$ — *постоянные,* $\nu = 1,2$) *описывают комплексные потенциалы*

$$W_1(z) = W_0(\zeta) + \lambda[\overline{P}'\overline{W_{01}(\rho_0^2/\overline{\zeta})} + P'W_{02}(\zeta)], \quad z \in D_1, \tag{5.2.15}$$

$$W_2(z) = W_0(\zeta) - \bar{\lambda}[P'W_{01}(\zeta) + \overline{P}'\overline{W_{02}(\rho_0^2/\overline{\zeta})}], \quad z \in D_2,$$

где

$$\zeta =| C | e^{i\gamma_1}(z + \mu\bar{z}), P' = H[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}],$$

$$\lambda = \frac{2\lambda_k}{(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\bar{P}'}, \quad \lambda_k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},$$

P' — *постоянная комплексная проводимость слоя.*

Доказательство. По условию теоремы функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют изолированные особые точки в областях D_1' и D_2' (вне и внутри окружности). Поэтому $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ — аналитические функции в областях D_2' и D_1'. К этим функциям применим принцип симметрии (преобразование инверсии) относительно окружности (5.2.13). Учитывая, что точке $\zeta \in D_1'$ соответствует точка $\rho_0^2/\overline{\zeta} \in D_2'$, продолжим аналитические функции $W_{01}(\zeta)$, $\zeta \in D_2'$ и $W_{02}(\zeta)$, $\zeta \in D_1'$ соответственно в области D_1' и D_2'. Получим аналитические функции $\overline{W_{01}(\rho_0^2/\overline{\zeta})}$, $\zeta \in D_1'$ и $\overline{W_{02}(\rho_0^2/\overline{\zeta})}$, $\zeta \in D_2'$. Комплексный потенциал возмущения $W_*(\zeta)$ в случае слоя постоянной толщины H и кусочно-постоянной проницаемости K_1 и K_2 ($K_\nu = k_\nu K$, $K = (K_{ij})$, $i,j = 1,2$, $k_\nu > 0$ $\nu = 1,2$) представим в областях D_1' и D_2' плоскости ζ в виде

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} B_1\Omega_1(\zeta) & (\Omega_1(\zeta) = \overline{P}'\overline{W_{01}(\rho_0^2/\overline{\zeta})} + P'W_{02}(\zeta)), \quad \zeta \in D_1', \\ B_2\Omega_2(\zeta) & (\Omega_2(\zeta) = P'W_{01}(\zeta) + \overline{P}'\overline{W_{02}(\rho_0^2/\overline{\zeta})}), \quad \zeta \in D_2'. \end{cases} \tag{5.2.16}$$

Входящие в выражение (5.2.16) постоянные B_1' и B_2' (вообще говоря комплексные) находим, удовлетворив его условию (5.1.12′), которое имеет место на окружности (5.2.13). Учтём. что на этой окружности: $\Omega_1^+(\zeta) = \Omega(\zeta)$ и $\overline{\Omega}_1^+(\zeta) = \Omega_2^-(\zeta) = \overline{\Omega}(\zeta)$ ($\Omega(\zeta) = \overline{P}'\overline{W}_{01}(\zeta) + P'W_{02}(\zeta)$, $\overline{\Omega}(\zeta) = P'W_{01}(\zeta) + \overline{P}'\overline{W}_{02}(\zeta)$). Имеем равенство

$$\{[(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\overline{P}']B_1 - 2\lambda_k\}\Omega(\zeta) -$$
$$- \{2\lambda_k(\overline{P}'\overline{B}_1 + 1) + (1+\lambda_k)(P' + \overline{P}')B_2\}\overline{\Omega}(\zeta) = 0,$$

которое выполняется во всех точках окружности (5.2.13). Так как на этой окружности $\Omega(\zeta)$ и $\overline{\Omega}(\zeta)$ не равны нулю, то это равенство обратится в тождество, если

$$B_1 = -\overline{B}_2 = \lambda, \quad \lambda = 2\lambda_k\big[(1-\lambda_k)P' + (1+\lambda_k)\overline{P}'\big]^{-1}.$$

Тогда комплексный потенциал (5.2.16) принимает вид

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} \lambda\big[\overline{P}'\overline{W_{01}(\rho_0^2/\overline{\zeta})} + P'W_{02}(\zeta)\big], & \zeta \in D_1', \\ -\overline{\lambda}\big[P'W_{01}(\zeta) + \overline{P}'\overline{W_{02}(\rho_0^2/\overline{\zeta})}\big], & \zeta \in D_2'. \end{cases} \tag{5.2.17}$$

Так как имеют место условия (5.2.14), то комплексный потенциал (5.2.17) удовлетворяет условиям в бесконечности (5.1.8).

Подставляя комплексный потенциал (5.2.17) в равенство (5.1.3) и учитывая первое из равенств (5.2.3), имеем искомые комплексные потенциалы (5.2.15). ■

Решение первой и второй краевых задач в случае эллиптической границы выражает

Теорема 5.4. *Пусть течение в анизотропном однородном слое постоянной толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $D(K) > 0$ описывают на всей плоскости z обобщённый потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, изолированные особые точки которых располагаются в области D (вне или внутри эллипса (5.2.10)). Это течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$, который имеет те же изолированные особые точки в области D' (вне или внутри окружности (5.2.13)). Причём этот комплексный потенциал удовлетворяет условию*

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|) \quad \textit{при} \quad |\zeta| \to 0, \tag{5.2.18}$$

когда его особые точки расположены вне окружности, и условию

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \textit{при} \quad |\zeta| \to \infty, \tag{5.2.19}$$

если его особые точки лежат внутри окружности.

Тогда течение в области D плоскости z в случае слоя той же толщины H и проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, ограниченной эллипсом (5.2.10), являющаяся границей σ_1 с условием (1.3.3′) или границей σ_2 с условием (1.3.7′) описывает комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(\zeta) - \frac{\overline{P'}}{P'}\overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}, \quad z \in D \tag{5.2.20}$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta) + \overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}, \quad z \in D, \tag{5.2.21}$$

где $\zeta =| C | e^{i\gamma_1}(z + \mu\bar{z})$, $P' = H[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}]$.

Доказательство. Если $W_0(\zeta)$ имеет особые точки в области D_1' ($|\zeta| > \rho_0$) (или в D_2' ($|\zeta| < \rho_0$)), то согласно преобразованию инверсии относительно оскружности (5.2.13) функция $\overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}$ — аналитическая в области D_2' (или D_1'). Комплексные потенциалы возмущений $W_*(\zeta) = -\overline{P}_* P_*^{-1}\overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}$ и $W_*(\zeta) = \overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}$ — аналитические функции, соответственно в областях D_2' и D_1', и они удовлетворяют условиям (5.1.5′) и (5.1.6′) на окружности (5.2.13), а в силу условий (5.2.18) и (5.2.19) — условиям в бесконечности (5.1.8). Тогда с учётом (5.1.3) и первого из равенств (5.2.3) имеем искомые комплексные потенциалы (5.2.20) и (5.2.21). ■

Заметим, что комплексные потенциалы (5.2.20) и (5.2.21) для внешних задач следуют как предельные случаи комплексного потенциала $W_1(\zeta)$ из (5.2.15) при $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$) и при $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$). Комплексные потенциалы (5.2.20) и (5.2.21) для внутренних задач следуют как предельные случаи комплексного потенциала $W_2(\zeta)$ из (5.2.15) при $k_1 \to \infty$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$) и при $k_1 \to 0$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$).

Отметим, что в рассмотренных случаях прямолинейных и эллиптических границ найденные решения задач аналогичны. Это позволяет указать единый подход для применения этих решений к исследованию конкретных течений, используя их геометрическую интерпретацию.

Заметим, что теоремы 5.1–5.4 обобщают решения граничных задач, которые известны для плоскопараллельных течений в изотропной пористой среде [43, 117, 125] и течений идеальной жидкости [28, 89].

Геометрическая интерпретация теорем сопряжения (метод изображения особых точек)

Теоремам сопряжения на прямой и эллипсе дадим геометрическую интерпретацию. Рассмотрим сначала случай прямой линии, которая пусть (не нарушая общности суждений) проходит через начало координат (рис. 5.2.3). Уравнения (5.2.1), (5.2.2) и преобразования (5.2.3) при $z_0 = 0$ принимают вид

$$z = te^{i\theta_0}, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{5.2.1′}$$

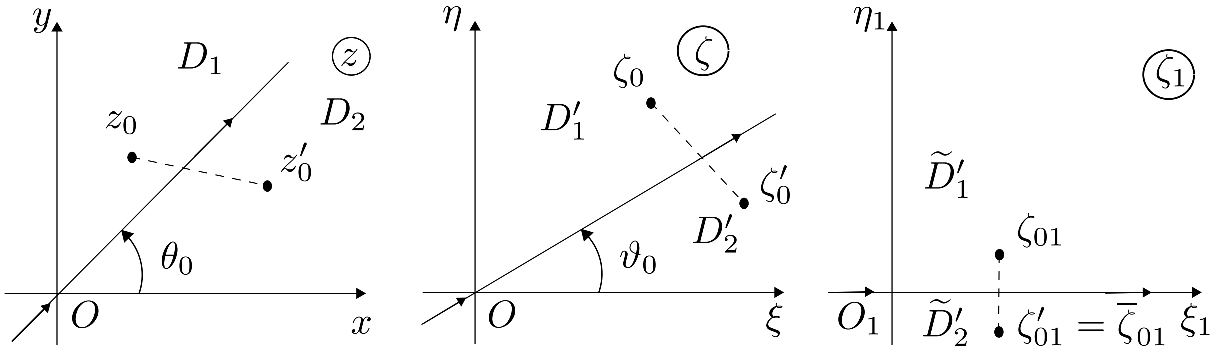

Рис. 5.2.3. Изображение особых точек в случае прямой линии.

$$\zeta = te^{i\vartheta_0}, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{5.2.2$'$}$$

$$\zeta_1 = (z + \mu\bar{z})e^{-i\vartheta_0}, \quad z = \frac{\zeta_1 e^{i\vartheta_0} - \mu\bar{\zeta}_1 e^{-i\vartheta_0}}{1- \mid \mu \mid^2}, \tag{5.2.3$'$}$$

где

$$e^{i\vartheta_0} = e^{i\theta_0} + \mu e^{-i\theta_0}, \quad e^{-i\vartheta_0} = e^{-i\theta_0} + \bar{\mu} e^{i\theta_0}.$$

Пусть комплексный потенциал $W_0(z)$ имеет изолированную особую точку мощности m (m — число, вообще говоря, комплексное)[1], расположенную в точке $z_0 \in D_1$ (рис. 5.2.3). Согласно преобразованию (5.2.3′) точке $z_0 \in D_1$ соответствует точка $\zeta_0 \in D_1'$ ($\zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$) плоскости ζ и точка $\zeta_{01} \in \widetilde{D}_1'$ ($\zeta_{01} = \zeta_0 e^{-i\vartheta_0} = (z_0 + \mu\bar{z}_0)e^{-i\vartheta_0}$) плоскости ζ_1. Обратно, точке $\zeta_{01} \in \widetilde{D}_1'$ на плоскости ζ_1 отвечает на плоскости z точка $z_0 \in D_1$:

$$z_0 = \frac{\zeta_{01} e^{i\vartheta_0} - \mu\bar{\zeta}_{01} e^{-i\vartheta_0}}{1 - |\mu|^2}.$$

Точке $\bar{\zeta}_{01} \in \widetilde{D}_2'$ (сопряженной точке ζ_{01}) плоскости ζ_1 соответствует точка $\zeta_0' \in D_2'$ ($\zeta_0' = \bar{\zeta}_{01} e^{i\vartheta_0}$) плоскости ζ и точка $z_0' \in D_2$ плоскости z:

$$z_0' = \frac{\bar{\zeta}_{01} e^{i\vartheta_0} - \mu\zeta_{01} e^{-i\vartheta_0}}{1 - |\mu|^2}.$$

Так как точки плоскостей ζ и ζ_1 взаимосвязаны преобразованием поворота, то сопряженные точки ζ_0 и ζ_0', располагаются симметрично относительно прямой $\zeta = te^{i\vartheta_0}$, ($t \in (-\infty, \infty)$), поскольку точки ζ_{01} и $\bar{\zeta}_{01}$

[1]Здесь и далее число m входит в комплексный потенциал $W_0(z)$ сомножителем: $W_0(z) = mF(z)$, где функция $F(z)$ имеет заданную изолированную особую точку.

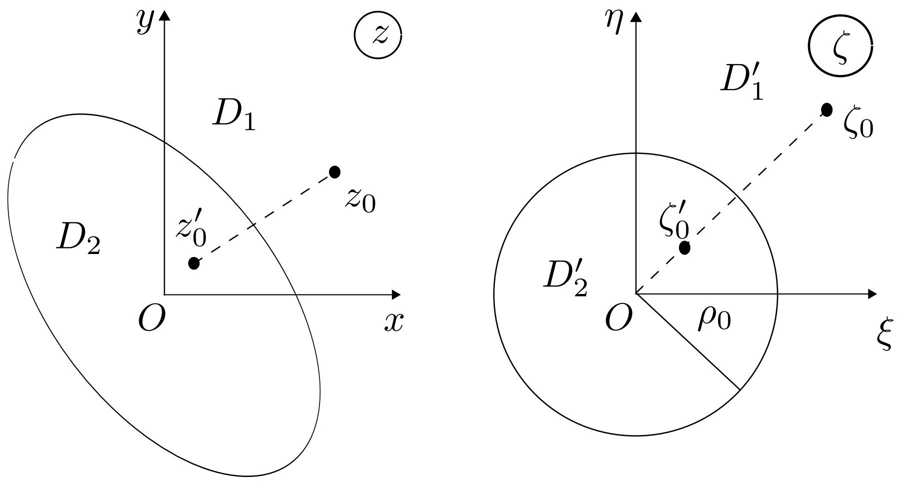

Рис. 5.2.4. Изображение особых точек в случае эллипса (окружности).

симметричны относительно оси абсцисс $O\xi_1$. Расстояния между указанными точками на плоскостях ζ и ζ_1 равны:

$$|\zeta_0 - \zeta_0'| = |\zeta_{01} - \bar{\zeta}_{01}| = \eta_{01}.$$

Точки z_0 и z_0' плоскости z располагаются не симметрично относительно прямой (5.2.1′) и расстояние между ними не равно η_{01}. При преобразовании (5.2.3′) прямая $z_0 z_0'$ (не ортогональная прямой (5.2.1′)) переходит в прямую $\zeta_{01}\bar{\zeta}_{01}$ (ортогональную оси $O\xi_1$) и обратно.

Полагая в формулах (5.2.5) $W_0 = W_{01}$ ($W_{02} = 0$), комплексные потенциалы запишем

$$W_1(z) = W_0(\zeta_1) + \lambda\bar{P}'\overline{W_0(\overline{\zeta}_1)}, \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = (1 - \overline{\lambda}P')W_0(\zeta_1), \quad z \in D_2,$$

где $\zeta_1 = (z + \mu\bar{z})e^{-i\vartheta_0}$. Отсюда видно, что течение в области D_1 определяется как наложение течений от заданной особой точки мощности m, расположенной в точке $z_0 \in D_1$, так и особой точки того же типа мощности $\overline{m}\lambda\overline{P}'$, расположенной в точке $z_0' \in D_2$ (отвечающей точке $\overline{\zeta}_{01} \in D_2'$ плоскости ζ_1). Течения в области D_2 определяются особой точкой такого же типа мощности $m(1 - \overline{\lambda}P')$, расположенной в точке $\zeta_0 \in D_1$. Аналогично нетрудно дать геометрическую интерпретацию решению (5.2.5), когда изолированная особая точка $W_0(z)$ расположена в точке $z_0 \in D_2$ ($W_0 = W_{02}$, $W_{01} = 0$).

Пусть комплексный потенциал $W_0(z)$ имеет изолированную особую точку мощности m, расположенную вне эллипса в точке $z_0 \in D_1$ (рис. 5.2.4).

Согласно преобразованию (2.4.13) точке $z_0 \in D_1$ отвечает точка $\zeta_0 \in D_1'$ ($\zeta_0 = (z_0 + \mu\overline{z}_0)$), расположенная вне окружности радиуса ρ_0. Этой точке ζ_0 соответствует внутри окружности точка $\zeta_0' \in D_2'$ ($\zeta_0' = \rho_0^2/\bar{\zeta}_0'$), инверсная относительно окружности. Согласно преобразованию (2.4.13) точке $\zeta_0' \in D_2'$ соответствует внутри эллипса точка $z_0' \in D_2'$ ($z_0' = (\zeta_0' - \mu\bar{\zeta}_0)/(1 - |\mu|^2)$).

При преобразовании (2.4.13) прямая $z_0 z_0'$, не ортогональная эллипсу, переходит в прямую $\zeta_0\zeta_0'$, ортогональную окружности и её продолжение проходит через центр окружности.

Полагая в формулах (5.2.15) $W_0 = W_{01}$ ($W_{02} = 0$), имеем комплексные потенциалы

$$W_1(z) = W_0(\zeta) + \lambda\overline{P}'\overline{W_0(\rho_0^2/\overline{\zeta})}, \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = (1 - \overline{\lambda}P')W_0(\zeta), \quad z \in D_2,$$

где $\zeta = (z + \mu\bar{z})$. Отсюда видно, что течение в области D_1 определяется как наложение течений от заданной особой точки мощности m, расположенной в точке $z_0 \in D_1$, так и особой точкой того же типа мощности $\overline{m}\lambda\overline{P}'$, расположенной в точке $z_0' \in D_2$ (отвечающей точке $\zeta_0' \in D_2'$). Течение в области D_2 определяется особой точкой такого же типа мощности $m(1 - \bar{\lambda}P')$, расположенной в точке $z_0 \in D_1$. Аналогично можно дать геометрическую интерпретацию решения (5.2.15) в другом случае, когда $W_0 = W_{02}$ ($W_{01} = 0$).

Указанный геометрический метод построения течений в случае задач сопряжения на прямой и эллипсе назовем *методом изображения* изолированных особых точек течения. Этот метод применим в случае произвольного конечного числа изолированных особых точек, которые располагаются произвольно как в области D_1 так и в области D_2. Он применим также в случаях, когда прямая и эллипс — границы постоянного давления (обобщённого потенциала) и непроницаемые границы (линии тока). Он удобен для построения конкретных течений.

Примеры комплексных потенциалов течений, построенных на основе теорем

Применим указанные теоремы сопряжения к нахождению комплексных потенциалов конкретных течений.

Пусть в задаче сопряжения на прямой, проходящей через начало координат (рис. 5.2.3), расположен в точке $z_0 \in D_1$ вихреисточник мощности

$m = \Pi/P' - i\Gamma$ (Π — полная мощность источника, $\Pi > 0$; Γ — мощность (интенсивность) вихря, $\Gamma > 0$). Течение описывает на плоскости ζ_1 комплексный потенциал

$$W_{01}(\zeta_1) = \frac{m}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \zeta_{01}),$$

где $\zeta_{01} \in D_1'$ — точка расположения вихреисточника на плоскости ζ_1, отвечающей точке z_0 согласно преобразованию (5.2.3′). Тогда на основании формул (5.2.5) находим комплексный потенциал течения в областях D_1 и D_2:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{m}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \zeta_{01}) + \frac{\overline{m}\lambda\overline{P}'}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \bar{\zeta}_{01}), \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= \frac{m(1-\overline{\lambda}P')}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \zeta_{01}), \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

где $\zeta_1 = (z + \mu\bar{z})e^{-i\vartheta_0}$, $\zeta_{01} = (z_0 + \mu\bar{z}_0)e^{-i\vartheta_0}$, $e^{-i\vartheta_0} = e^{-i\theta_0} + \bar{\mu}e^{i\theta_0}$.

Течение в области D_1 представляет собой наложение течений вихреисточников мощности m и $\overline{m}\lambda\overline{P}'$, расположенных соответственно в точках $z_0 \in D_1$ и $z_0' \in D_2$ (z_0' — соответствует точке $\bar{\zeta}_{01} \in D_2'$). Течение в области D_2 — течение от вихреисточника мощности $m(1-\overline{\lambda}P')$, расположенного в точке $z_0 \in D_1$.

Из решения (5.2.22), когда $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$) или $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$), имеем в пределе комплексные потенциалы течений в случаях, если граничная прямая — линия постоянного давления (линия обобщённого потенциала)[1]

$$W_1(z) = \frac{m}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \zeta_{01}) - \frac{\overline{m}\overline{P}'}{2\pi P'}\ln(\zeta_1 - \bar{\zeta}_{01}), \quad z \in D_1, \tag{5.2.22′}$$

или она непроницаемая (линия тока):

$$W_1(z) = \frac{m}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \zeta_{01}) + \frac{\overline{m}}{2\pi}\ln(\zeta_1 - \bar{\zeta}_{01}), \quad z \in D_1, \tag{5.2.22″}$$

где, по-прежнему, $\zeta_1 = (z+\mu\bar{z})e^{-i\vartheta_0}$, $\zeta_{01} = (z_0+\mu\bar{z}_0)e^{-i\vartheta_0}$, $e^{-i\vartheta_0} = e^{-i\theta_0} + \bar{\mu}e^{i\theta_0}$.

[1] Решения (5.2.22′)и (5.2.22″) следуют также из выражений (5.2.8) и (5.2.9) теоремы 5.2.

Так как согласно преобразованию $\zeta_1' = 1/(\zeta_1 - \zeta_{01})$ точке $\zeta_1 = \zeta_{01}$ соответствует точка $\zeta_1' = \infty$, то комплексный потенциал $W_0(\zeta_1') = -\frac{m}{2\pi}\ln\zeta_1'$ описывает вихреисточник мощности $-m$ ($\Pi < 0, \Gamma < 0$), который расположен в точке $\zeta_1' = \infty$, Поэтому условие (5.2.4) не выполняется. Вследствие чего указанные выше комплексные потенциалы точения от вихреисточника не удовлетворяют условиям в бесконечности (5.1.8). Для однозначности указанных комплексных потенциалов потребуем выполнения условия

$$W_0(\zeta_1) = O(\ln|\zeta_1|) \quad \text{при} \quad |\zeta_1| \to \infty,$$

которому удовлетворяют эти комплексные потенциалы.

Рассмотрим теперь задачу сопряжения на эллипсе для конкретных течений. Рассмотрим сначала случай поступательного потока. Этот поток описывает в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W_{01}(\zeta) = C\zeta,$$

где C — произвольная, вообще говоря, комплексная постоянная, характеризующая скорость потока. Согласно формулам (5.2.15) имеем комплексные потенциалы течения в областях D_1 и D_2 (вне и внутри эллипса):

$$\begin{aligned} W_1(z) &= C\zeta + \frac{\overline{C}\lambda\overline{P}'\rho_0^2}{\zeta}, \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= C(1 - \overline{\lambda}P')\zeta, \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

где $\zeta = (z + \mu\bar{z})$.

Видно, что течение в области D_1 представляет собой наложение поступательного потока и диполя с моментом $2\pi\overline{C}\lambda\overline{P}'\rho_0^2$, расположенного в начале координат. Течение в области D_2 — поступательный поток, скорость которого характеризует комплексная константа $C(1 - \bar{\lambda}P')$.

Из решения (5.2.23) при $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$) и при $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$) следуют в пределе комплексные потенциалы обтекания поступательным потоком эллиптической каверны (её контур — линия постоянного давления или обобщенного потенциала):

$$W_1(z) = C\zeta - \frac{\overline{C}\,\overline{P}'\rho_0^2}{P'\zeta} \quad (\zeta = z + \mu\bar{z}), \quad z \in D_1$$

и эллиптического непроницаемого включения (его контур — линия тока):

$$W_1(z) = C\zeta + \frac{\overline{C}\rho_0^2}{\zeta} \quad (\zeta = z + \mu\bar{z}), \quad z \in D_1.$$

Рассмотрим теперь случай вихреисточника. Пусть вихреисточник мощности m ($m = \Pi/P' - i\Gamma$) расположен вне эллипса в точке $z_0 \in D_1$. Течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал, удовлетворяющий условию (5.2.14) и имеющий вид

$$W_{01}(\zeta) = \frac{m}{2\pi}\ln\Big(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\Big),$$

где $\zeta_0 \in D_1'$ точка расположения вихреисточника (вне окружности).

Тогда на основании формул (5.2.15) имеем комплексные потенциалы течений в областях D_1 и D_2 (вне и внутри эллипса):

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{m}{2\pi}\ln\Big(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\Big) + \frac{\overline{m}\lambda\overline{P}'}{2\pi}\ln\Big(1 - \frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}_0\zeta}\Big), \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= \frac{m(1 - \bar{\lambda}P')}{2\pi}\ln\Big(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\Big), \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

где $\zeta = z + \mu\bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$.

Решение (5.2.24) имеет согласно методу изображения интерпретацию, если его представить в виде

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{m}{2\pi}\ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{\overline{m}\lambda P'}{2\pi}\ln\Big(\zeta - \frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}_0}\Big) - \frac{\overline{m}\lambda P'}{2\pi}\ln\zeta + C_1, \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= \frac{m(1 - \overline{\lambda}P')}{2\pi}\ln(\zeta - \zeta_0) + C_2, \quad z \in D_2, \end{aligned}$$

где

$$\zeta = z + \mu\bar{z}, \quad \zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0,$$

$$C_1 = -\frac{m}{2\pi}\ln(-\zeta_0), \quad C_2 = \frac{m(1 - \overline{\lambda}P')\ln(-\zeta_0)}{2\pi},$$

C_1 и C_2 — комплексные постоянные. Видно, что течение в области D_1 представляет собой наложение течений от вихреисточника мощности m, расположенного в точке $z_0 \in D_1$ и вихреисточника мощности $\overline{m}\lambda\overline{P}$, лежащего в точке $z_0' \in D_2$, отвечающей точке $\zeta_0' \in D_2'$ ($\zeta_0' = \rho_0^2/\overline{\zeta}_0$ — точка, инверсная точке ζ_0 относительно окружности радиуса ρ_0), а также от вихреисточника мощности $\overline{m}\lambda P'$, расположенного в начале координат ($z_0 = 0$). Течение в области D_2 — вихреисточник мощности $m(1 - \overline{\lambda}P')$, расположенный в точке $z_0 \in D_1$.

Из формул (5.2.24) при $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to -1/P'$) и при $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$) имеем в пределе комплексные потенциалы обтекания вихреисточником эллиптической каверны[1]

$$W_1(z) = \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\right) - \frac{\overline{m}\overline{P}'}{2\pi P'} \ln\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}_0 \zeta}\right), \quad z \in D_1,$$

и элиптического непроницаемого включения

$$W_1(z) = \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\right) + \frac{\overline{m}}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}_0 \zeta}\right), \quad z \in D_1,$$

в которых $\zeta = z + \mu\bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$.

Пусть теперь вихреисточник задан внутри эллипса. Полагаем, что течение описывает на плоскости ζ комплексный потенциал $W_{02}(\zeta)$, который удовлетворяет условию (5.2.14) и имеет вид

$$W_{02}(\zeta) = \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) = \frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) - \frac{m}{2\pi} \ln\zeta.$$

Видно, что течение вызвано двумя вихреисточниками мощности m (равных по величине и противоположных по знаку), расположенных внутри окружности в точках $\zeta = \zeta_0 \in D_2'$ и $\zeta = 0$. На плоскости z эти вихреисточники расположены внутри эллипса в точках $z = z_0 \in D_2'$ и $z = 0$. Вихреисточник в начале координат обусловлен преобразованием инверсии относительно окружности вихреисточника, расположенного в бесконечности.

На основании формул (5.2.15) находим комплексные потенциалы течения в областях D_1 и D_2 (вне и внутри эллипса)

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{m(1+\lambda P')}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right), \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= \frac{m}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) - \frac{\overline{m}\overline{\lambda}\,\overline{P}'}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\zeta\overline{\zeta_0}}{\rho_0^2}\right), \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

где $\zeta = z + \mu\bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$.

[1] Комплексные потенциалы $W_1(z)$ следуют также из выражений (5.2.20) и (5.2.21) теоремы 5.4.

Согласно методу изображения особых точек решение (5.2.25) имеет простую гидродинамическую интерпретацию, если его переписать в виде

$$W_1(z) = \frac{m(1+\lambda P')}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) - \frac{m(1+\lambda P')}{2\pi} \ln \zeta, \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) - \frac{m}{2\pi} \ln \zeta - \frac{\overline{m}\overline{\lambda}\,\overline{P}'}{2\pi} \ln\Big(\zeta - \frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}_0}\Big) + C_0, \quad z \in D_2,$$

где $\zeta = z + \mu \bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu \bar{z}_0$, $C_0 = -\frac{\overline{m}\overline{\lambda}}{2\pi} \ln\big(-\overline{\zeta_0}/\rho_0^2\big)$ — комплексная постоянная. Видно, что течение в области D_1 обусловлено наложением вихреисточников, один из которых мощности $m(1+\lambda P')$ расположен в точке $z = z_0 \in D_2$, а другой противоположный по знаку мощности — $m(1+\lambda P')$ находится в бесконечности $z = \infty$ (точкам $z \in D_2$ и $z = \infty$ отвечают точки $\zeta \in D_2'$ и $\zeta = \infty$). Течение в области D_2 представляет собой наложение вихреисточников одинаковой по величине и противоположной по знаку мощности m, расположенных в точках $z = z_0 \in D_2$ и $z = \infty$, и вихреисточника мощности $-\overline{m}\overline{\lambda}\,\overline{P}'$, расположенного вне эллипса в точке $z = z_0' \in D_1'$ (точка $z_0' \in D_1$ — образ точки $\zeta_0' \in D_1'$ ($\zeta_0' = \rho_0^2/\overline{\zeta}_0$), которая инверсна точке $\zeta_0 \in D_2'$ относительно окружности).

Из формул (5.2.25) при $k_1 \to \infty$ ($\lambda_k \to 1$, $\lambda \to 1/\overline{P}'$) и при $k_1 \to 0$ ($\lambda_k \to -1$, $\lambda \to -1/P'$) находим в пределе комплексные потенциалы течений в эллиптической области D_2, ограниченной линией постоянного давления (обобщённого потенциала)[1]

$$W_2(z) = \frac{m}{2\pi} \ln\Big(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\Big) - \frac{\overline{m}\overline{P}'}{2\pi P'} \ln\Big(1 - \frac{\zeta\bar{\zeta}_0}{\rho_0^2}\Big), \quad z \in D_2,$$

или непроницаемой границей (моделируемой линией тока):

$$W_2(z) = \frac{m}{2\pi} \ln\Big(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\Big) + \frac{\overline{m}}{2\pi} \ln\Big(1 - \frac{\zeta\bar{\zeta}_0}{\rho_0^2}\Big), \quad z \in D_2,$$

где, по-прежнему, $\zeta = z + \mu \bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu \bar{z}_0$.

Пусть источник полной мощности Π или вихрь интенсивности Γ расположен в точке $z_0 \in D$ внутри эллипса, который является границей σ_1

[1] Комплексные потенциалы $W_2(z)$ следуют также из выражений (5.2.20) и (5.2.21) теоремы 5.4.

с условием «нулевого» обобщённого потенциала или границей σ_2 — «нулевой» линией тока. На плоскости ζ область D' — круг, а σ_1' и σ_2' — окружности радиуса ρ_0 $(|\zeta| = \rho_0)$. В случае границы σ_1' с условием $(5.1.5')$ и границы σ_2' с условием $(5.1.6')$ имеем удовлетворяющие им комплексные потенциалы

$$W(z) = \frac{\Pi}{2\pi P'} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{\rho_0} - \frac{\Pi}{2\pi P'} \ln \Big(1 - \frac{\zeta\bar{\zeta}_0}{\rho_0^2}\Big), \quad z \in D, \tag{5.2.26}$$

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{\rho_0} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \Big(1 - \frac{\zeta\bar{\zeta}_0}{\rho_0^2}\Big), \quad z \in D, \tag{5.2.27}$$

где $\zeta = z + \mu\bar{z}$, $\zeta_0 = z_0 + \mu\bar{z}_0$.

Решения (5.2.26) и (5.2.27) имеют ясный гидродинамический смысл, если в них учесть $1 - \zeta\overline{\zeta_0}/\rho_0^2 = (\zeta - \rho_0^2/\overline{\zeta_0})(-\overline{\zeta_0}/\rho_0^2)$. А именно, комплексный потенциал (5.2.26) описывает течение от источника и стока одинаковой по величине мощности Π, которые расположены в инверсных относительно окружности $|\zeta| = \rho_0$ точках ζ_0 и $\rho_0^2/\overline{\zeta_0}$. Комплексный потенциал (5.2.27) характеризует течение от вихрей, интенсивности которых Γ равны по модулю, противоположны по знаку и они расположены в инверсных относительно окружности $|\zeta| = \rho_0$ точках ζ_0 и $\rho_0^2/\overline{\zeta_0}$. Точки ζ_0 и $\rho_0^2/\overline{\zeta}$ отвечают в плоскости z точкам z_0 и z_0', которые расположены внутри и вне эллипса.

В частности, если источник (сток) или вихрь расположены в начале координат ($z_0 = 0$), то согласно формулам (5.2.26) и (5.2.27) течения описывают комплексные потенциалы

$$W(z) = \frac{\Pi}{2\pi P'} \ln \frac{z + \mu\bar{z}}{\rho_0},$$

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z + \mu\bar{z}}{\rho_0}.$$

Заметим, что комплексные потенциалы (5.2.26) при $\Pi = -1$ и (5.2.27) при $\Gamma = -1$ можно рассматривать как комплексные функции Грина для «эллиптической» области D с «нулевыми» граничными условиями $(5.1.5')$ и $(5.1.6')$.

§ 5.3. Двумерные задачи с произвольными границами

Обобщенный интеграл типа Коши для комплексного потенциала возмущений

Теперь исследуем поставленные выше задачи в общем случае двумерной фильтрации в анизотропном и неоднородном слое, когда границы моделируются на плоскости z произвольными гладкими (без самопересечения) кривыми L. На плоскости ζ комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ представим согласно формулам (4.3.2) и (4.4.19) обобщённыи интегралом типа Коши по кривой L' (L' — образ кривой L):

$$W_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)f(\tau)d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar f(\tau)d\bar\tau, \quad \zeta \notin L' \tag{5.3.1}$$

с предельными значениями

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau)f(\tau)d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar f(\tau)d\bar\tau \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \tag{5.3.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Такое представление $W_*(\zeta)$ позволяет сразу удовлетворить на сингулярной линии σ_0' (σ_0' — образ сингулярной линии σ_0 на плоскости z) условиям (5.1.7), полагая, что им удовлетворяют фундаментальные решения $F_k(\zeta,\tau)$, $k = 1, 2$, а также условиям в бесконечности (5.1.8) поскольку согласно условию (4.3.3) $W_*(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$.

После того как найден комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ по формулам (5.1.3) (для краевых задач) и (5.1.9) (для задачи сопряжения) с последующим использованием гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ находим на плоскости z искомый комплексный потенциал $W(z) = W[\zeta(z)]$, обобщённый потенциал $\varphi(z) = \varphi[\zeta(z)]$ и функцию тока $\psi(z) = \psi[\zeta(z)]$.

Первая краевая задача

В случае первой краевой задачи с замкнутой граничной кривой σ_1 следует различать внутреннюю и внешнюю задачи. В обеих задачах непрерывен поток жидкости через границу σ_1' (σ_1' — образ σ_1), а значит непрерывна функция тока $\psi_*(\zeta)$ на σ_1': $\psi_*^+(\zeta) = \psi_*^-(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_1'$. Поэтому, как показано § 4.4, в выражениях (5.3.1) и (5.3.2) $f(\tau)$ — вещественная функция.

В случае внутренней задачи аналогично формулам (4.4.22) имеем комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ и его предельное значение (орт нормали направлен во внутрь σ_1'):

$$W_*(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \notin \sigma_1', \tag{5.3.3}$$

$$W_*^+(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau + \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{5.3.4}$$

где $\Omega(\zeta,\tau)$ выражается через фундаментальные решения $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$:

$$\Omega(\zeta,\tau) = -P_1'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}.$$

Подставляя предельное значение (5.3.4) в условие (5.1.5), на основании формулы (5.1.3) имеем решение первой внутренней задачи

$$W(z) = W_0(\zeta) - \int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta = \zeta(z), \quad z \in D. \tag{5.3.5}$$

Здесь функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) - 2\int\limits_{\sigma_1'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau = 2[f_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{5.3.6}$$

ядро которого $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ выражается через функции $\Phi_1(\zeta,\tau)$ и $\Phi_2(\zeta,\tau)$ (входящие в решения $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$) формулой

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P_1'(\tau)\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}.$$

В случае первой внешней задачи недостаточно принять комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ в виде (5.3.3) потому, что для него $W_*(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$ и, следовательно, $W_*(\infty) = 0$. В то время как для внешней задачи комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ только ограничен (не равен нулю) на бесконечности. Поэтому представим $W_*(\zeta)$ в виде суммы обобщенного интеграла типа Коши и некоторой постоянной:

$$W_*(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \notin \sigma_1'. \tag{5.3.7}$$

Предельное значение комплексного потенциала (5.3.7) равно (орт нормали направлен наружу кривой σ_1')

$$W_*^+(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) dl_\tau + \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \sigma_1'. \tag{5.3.8}$$

Подставим предельное значение (5.3.8) в условие (5.1.5) и на основании формул (5.1.3), (5.3.7) находим решение первой внешней краевой задачи в виде

$$W(z) = W_0(\zeta) - \int\limits_{\sigma_1'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta = \zeta(z), \quad z \in D, \tag{5.3.9}$$

где $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) - 2\int\limits_{\sigma_1'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) dl_\tau = 2[f_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_1'. \tag{5.3.10}$$

Здесь $\Omega(\zeta,\tau)$ и $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ имеют такой же вид как и в случае внутренней задачи.

Вторая краевая задача

Найдём теперь решение второй краевой задачи (внешней и внутренней). Поток жидкости через непроницаемую границу σ_2 отсутствует. Поэтому согласно § 4.4 давление жидкости на границе σ_2' (σ_2' — образ σ_2) непрерывно и, следовательно, на σ_2' непрерывен обобщённый потенциал $\varphi_*(\zeta)$ ($\varphi_*^+(\zeta) = \varphi_*^-(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$), а функция тока терпит разрыв ($\psi_*^+(\zeta) - \psi_*^-(\zeta) = h(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$). Причём в формулах (5.3.1) и (5.3.2) $f(\zeta) = ih(\zeta)/P'(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$. Тогда аналогично формулам (4.4.23) имеем комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ и его предельное значение (орт нормали направлен в область

D', ограниченную σ_2'):

$$W_*(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_2'} \Omega^*(\zeta, \tau) h(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \notin \sigma_2', \tag{5.3.11}$$

$$W_*^+(\zeta) = -\int\limits_{\sigma_2'} \Omega^*(\zeta, \tau) h(\tau) dl_\tau + \frac{ih(\zeta)}{2P'(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma_2', \tag{5.3.12}$$

где $\Omega^*(\zeta, \tau)$ выражается через фундаментальные решения $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$:

$$\Omega^*(\zeta, \tau) = -\frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{\mid P'(\tau) \mid^2} \left[P_1'(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right].$$

Подставляя предельное значение (5.3.12) в условие (5.1.6), на основании формул (5.1.3) и (5.3.11) находим решение задачи (внешней и внутренней)

$$W(z) = W_0(\zeta) - \int\limits_{\sigma_2'} \Omega^*(\zeta, \tau) h(\tau) dl_\tau, \quad \zeta = \zeta(z), \quad z \in D. \tag{5.3.13}$$

Здесь $h(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) - 2\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}^*(\zeta, \tau) h(\tau) dl_\tau = 2[C_0 - \psi_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_2', \tag{5.3.14}$$

ядро которого $\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)$ выражается через функции $\Psi_1(\zeta, \tau)$ и $\Psi_2(\zeta, \tau)$ (входящие в решения $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$) формулой

$$\mathcal{K}^*(\zeta, \tau) = \frac{\partial \Psi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \frac{1}{\mid P'(\tau) \mid^2} \left[P_1'(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right].$$

Заметим, что в случае внутренней задачи согласно уравнению неразрывности должна быть равна нулю сумма мощностей источников и стоков течения, характеризуемых изолированными особыми точками комплексного потенциала $W_0(\zeta)$.

Задача сопряжения

Укажем теперь решение задачи сопряжения на границе Γ. Согласно условий (5.1.12) на Γ' (Γ' — образ Γ) функция тока $\psi_*(\zeta)$ непрерывна. Входящая в комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ проводимость слоя $P'(\zeta)$ непрерывна при переходе через границу Γ'. Поэтому согласно § 4.4 функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$ вещественная и аналогично формулам (4.4.22) имеем комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ и его предельные значения (орт нормали к Γ' направлен внутрь области D_1'):

$$W_*(\zeta) = -\int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \notin \Gamma', \tag{5.3.15}$$

$$W_*^{\pm}(\zeta) = -\int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'. \tag{5.3.16}$$

Подставляя предельное значение (5.3.16) в условия (5.1.12), на основании формул (5.1.11) и (5.3.15) находим решение задачи сопряжения

$$W_\nu(z) = W_0(\zeta) - \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta = \zeta(z), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{5.3.17}$$

где функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) + 2\lambda_k \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau = 2\lambda_k \varphi_0(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma'. \tag{5.3.18}$$

В задаче сопряжения $\Omega(\zeta,\tau)$ и $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ имеют тот же вид, что и в первой краевой задаче.

Подведём итоги решения задач. Первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения редуцированы к интегральным уравнениям (5.3.6), (5.3.10), (5.3.14) и (5.3.18), которые являются сингулярными так как входящие в них интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши. Это неоднородные интегральные уравнения второго рода.

Частные случаи граничных задач

Рассмотрим частные случаи найденных решений задач. В случае изотропного неоднородного (либо однородного) слоя, когда его проводимость

P — вещественная скалярная функция координат (либо $P = \mathrm{const}$), полученные решения при $P = \overline{P}$ и $\zeta = z$ описывают в плоскости z течения, которые изучены в монографии [117].

Другой случай, когда анизотропный слой однородный (кусочно-однородный). В этом случае фундаментальные $F_k(\zeta,\tau)$, $k = 1,2$ и соответствующие им функции $\Phi_k(\zeta,\tau)$, $\Psi_k(\zeta,\tau)$, $k = 1,2$ согласно формулам (3.2.2)–(3.2.5) запишем

$$F_1(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi P'}\ln\frac{1}{\zeta-\tau}, \quad F_2(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\zeta-\tau}, \tag{5.3.19}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\zeta,\tau) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\,\zeta-\tau\,|},\\
\Psi_1(\zeta,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\,\zeta-\tau\,|} - \arg(\zeta-\tau)\right],\\
\Phi_2(\zeta,\tau) &= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D_a}}{\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\,\zeta-\tau\,|} + \arg(\zeta-\tau)\right],\\
\Psi_2(\zeta,\tau) &= -\frac{D}{2\pi\sqrt{D_s}}\ln\frac{1}{|\,\zeta-\tau\,|},
\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

где $P' = \sqrt{D_s} - i\sqrt{D_a}$, $D_s \equiv D(P_s)$, $D_a \equiv D(P_a)$, $D \equiv D(P)$.

Плоскости z и ζ взаимосвязаны гомеоморфизмом (2.4.13). Учитывая равенства (5.3.20) и (2.4.13), имеем в этом случае решения краевых задач: первой (5.3.5), (5.3.6) и (5.3.9), (5.3.10), второй (5.3.13), (5.3.14) и задачи сопряжения (5.3.17), (5.3.18).

Комплексные потенциалы этих задач представим интегралами типа Коши. Так как

$$\frac{\partial F_k(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}dl_\tau = \frac{\partial F_k(\zeta,\tau)}{\partial \tau}d\tau, \quad k = 1,2,$$

то, дифференцируя решения (5.3.19), по τ ($F_k(\zeta,\tau)$ — аналитические функции) находим

$$\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}dl_\tau = \frac{d\tau}{2\pi P'(\zeta-\tau)}, \quad \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}dl_\tau = \frac{d\tau}{2\pi i(\zeta-\tau)}.$$

Тогда комплексные потенциалы первой внутренней (5.3.5) и внешней (5.3.9) краевых задач принимают вид

$$W(z) = W_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1'}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} \quad (\zeta = z + \mu\bar{z}), \quad z \in D,$$

$$W(z) = W_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1'} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau)dl_\tau \quad (\zeta = z+\mu\bar{z}), \quad z \in D,$$

где $f(\zeta)$ — решения уравнений (5.3.6) и (5.3.10), в которых $\Phi_1(\zeta,\tau)$ и $\Phi_2(\zeta,\tau)$ имеют вид (5.3.20).

Комплексный потенциал второй внешней и внутренней краевой задачи (5.3.13) запишем

$$W(z) = W_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi P'}\int\limits_{\sigma_1'} \frac{h(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} \quad (\zeta = z+\mu\bar{z}), \quad z \in D,$$

где $h(\tau)$ — решение уравнения (5.3.14), в котором $\Psi_1(\zeta,\tau)$ и $\Psi_2(\zeta,\tau)$ следует взять из (5.3.20).

Комплексные потенциалы задачи сопряжения (5.3.17) принимают вид

$$W_\nu(z) = W_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta} \quad (\zeta = z+\mu\bar{z}), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1,2,$$

где $f(\zeta)$ — решение уравнения (5.3.18), в котором $\Phi_1(\zeta,\tau)$ и $\Phi_2(\zeta,\tau)$ вида (5.3.20).

§ 5.4. Осесимметричные граничные задачи

Основные уравнения

Осесимметричное течение (Ox — ось симметрии) описывает система уравнений (1.2.17), которую запишем

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{5.4.1}$$

где $P_{ij} = yK_{ij}$, $i,j = 1,2$. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения в слое проводимости $P = yK$, толщина которого $H = y$ и проницаемость $K = (K_{ij})$.

Условия эллиптичности системы уравнений (5.4.1)

$$yK_{11} > 0 \quad (yK_{22} > 0), \quad y^2 D(K_s) > 0$$

выполняются всюду за исключением линии $y = 0$ (ось Ox), которая является сингулярной и на ней выполняется условие (1.3.13), означающее «нулевую» линию тока[1]. В силу этого условия уравнения (5.4.1) описывают течение в полуплоскости $y = \operatorname{Im} z > 0$ и линия $y = 0$ является непроницаемой границей течения, скорость которого $\vec{v} = (v_x, 0)$ направлена вдоль этой линии.

Используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$, систему уравнений (1.2.17) запишем в плоскости ζ в виде ($y(\xi, \eta) > 0$):

$$\begin{aligned} v_\xi &= \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{y(\xi,\eta)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \\ v_\eta &= -\sqrt{D(K_a)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D(K_s)}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{y(\xi,\eta)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Сопоставляя системы (5.4.2) и (2.3.27), замечаем, что (5.4.2) — система уравнений для φ и ψ течения в слое толщины $H = y(\xi, \eta)$ и комплексной проницаемости $K' = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}$. Сингулярная линия $y(\xi, \eta) = 0$ — «нулевая» линия тока ($\psi(\xi, \eta) = 0$) служит непроницаемой границей области течения в плоскости ζ. В частности, если анизотропная среда однородная, то согласно преобразованиям (2.4.13$'$) слой толщины

$$H = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2} \quad (a^2 + b^2 < 1)$$

и сингулярная линия — прямая $(1+a)\eta - b\xi = 0$.

Интересен частный случай, когда среда ортотропная и однородная. В этом случае проницаемость среды (K_{ij}) — постоянная, причём $K_{11} \equiv K_1$, $K_{22} \equiv K_2$, $K_{12} \equiv K_{21} = 0$, координатные оси Ox и Oy выберем вдоль главных направлений анизотропии. Для осесимметричного течения в такой среде система (1.2.17) принимает вид

$$v_x = K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (y > 0). \tag{5.4.3}$$

Ось симметрии течения Ox является сингулярной. Если на ней отсутствуют источники (стоки) течения [2], то на ней согласно [117] выполняются

[1] Ось Ox принята за «нулевую» линию тока для простоты суждения.

[2] Если в некоторых точках оси Ox расположены источники (стоки) течения, то условия (5.4.4) выполняются всюду на Ox, исключая эти точки.

условия

$$\lim_{y\to 0}\left[y\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right]=0,\quad \lim_{y\to 0}\psi(x,y)=0,\quad x\in(-\infty,\infty). \tag{5.4.4}$$

Первое из этих условий, записанное для скорости течения в виде $\lim\limits_{y\to 0}[yv_y(x,y)]=0$, $x\in(-\infty,\infty)$, накладывает ограничение на составляющую $v_y(x,y)$ скорости при приближении к оси Ox. Второе из них означает, что ось симметрии Ox — «нулевая» линия тока.

Систему (5.4.3) приведём к виду, характерному для осесимметричного течения в изотропной среде. Воспользуемся преобразованием (2.4.14), которое с учётом ортотропности среды запишем

$$\zeta=C(z+\mu\bar z),\quad C=\frac{K_2+\sqrt{K_1K_2}}{2},\quad \mu=\frac{\sqrt{K_2}-\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_2}+\sqrt{K_1}},\quad (\mu\in(-1,1))$$
$$(\xi=K_2x,\quad \eta=\sqrt{K_1K_2}y). \tag{5.4.5}$$

Учитывая $\frac{\partial}{\partial x}=K_2\frac{\partial}{\partial\xi}$, $\frac{\partial}{\partial y}=\sqrt{K_1K_2}\frac{\partial}{\partial\eta}$ и вводя скорость $\vec V=(V_\xi,V_\eta)$, которая связана со скоростью $\vec v=(v_x,v_y)$ равенствами

$$V_\xi=\frac{v_x}{K_1K_2},\quad V_\eta=\frac{v_y}{K_2\sqrt{K_1K_2}}, \tag{5.4.6}$$

систему (5.4.3) запишем в плоскости ξ в виде

$$V_\xi=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad V_\eta=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\quad(\eta>0). \tag{5.4.7}$$

Из системы (5.4.7) находим уравнения для φ и ψ:

$$\nabla\cdot(\eta\nabla\varphi)=0, \tag{5.4.8}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\eta}\nabla\psi\right)=0, \tag{5.4.9}$$

где $\nabla=\frac{\partial}{\partial\xi}\vec\imath+\frac{\partial}{\partial\eta}\vec\jmath$, $\eta>0$.

Вводя в плоскости ζ комплексный потенциал осесимметричного течения

$$W=\varphi-\frac{2\psi}{\zeta-\bar\zeta}=\varphi+i\frac{\psi}{\eta}\quad(\eta>0), \tag{5.4.10}$$

из системы (5.4.7) имеем для него в полуплоскости $\eta = \operatorname{Im}\zeta > 0$ уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(W - \overline{W}) = 0 \quad \Big(A = -\frac{1}{2(\zeta - \bar{\zeta})} = \frac{i}{4\eta}\Big). \tag{5.4.11}$$

Так как ось симметрии течения $O\xi$ — сингулярная линия, то в отсутствии на ней источников (стоков) выполняются согласно (5.4.4) и (5.4.5) условия

$$\lim_{\eta\to 0}\Big[\eta\frac{\partial\varphi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\Big] = 0, \quad \lim_{\eta\to 0}\psi(\xi,\eta) = 0, \quad \xi\in(-\infty,\infty). \tag{5.4.12}$$

Замечаем, что уравнения (5.4.7)–(5.4.9), (5.4.11) и условия (5.4.12) имеют в полуплоскости $\eta = \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ вид, характерный для осесимметричного течения в изотропной однородной пористой среде [117].

Таким образом, изучение осесимметричных течений в ортотропной однородной среде сводится по существу к исследованию осесимметричных течений в изотропной однородной среде. Это позволяет использовать математический аппарат, развитый в монографиях [108, 117] для осесимметричных течений в однородной среде.

Фундаментальные решения. Мультиполи

Найдём фундаментальные решения $F_k(\zeta,\zeta_0) = \Phi_k(\zeta,\zeta_0) + i\Psi_k(\zeta,\zeta_0)/\eta$, $k = 1, 2$ уравнения (5.4.11). Учтём, что осесимметричное течение можно рассматривать как течение в слое проводимости $P' = \eta$, который является частным случаем степенного слоя, когда степень $s = 1$. Тогда согласно первой из формул (3.2.43) имеем фундаментальное решение уравнения (5.4.8) в виде

$$\Phi_1(\zeta,\zeta_0) = \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi\sqrt{\eta\eta_0}} \quad \Big(\omega = 1 + \frac{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}{2\eta\eta_0}\Big), \tag{5.4.13}$$

где $Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)$ — функция Лежандра второго рода степени $-1/2$ аргумента ω.

Из формулы (3.1.8) при учёте $\sqrt{D(P_s)} = \eta$, $\sqrt{D(P_a)} = 0$ находим функцию $\Psi_1(\zeta,\zeta_0)$, сопряжённую по переменной $\zeta = \xi + i\eta$ решению

(5.4.13), и, следовательно, имеем первое фундаментальное решение уравнения (5.4.11):

$$F_1(\zeta,\zeta_0) = \\ = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\sqrt{\eta\eta_0}} + \frac{i}{\eta}\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{(\xi,\eta)} \eta'\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega')}{\sqrt{\eta'\eta_0}}\right)d\eta' - \frac{\partial}{\partial\eta'}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega')}{\sqrt{\eta'\eta_0}}\right)d\xi'\right]\right\}, \tag{5.4.14}$$

где

$$\omega' = 1 + \frac{(\xi'-\xi_0)^2 + (\eta'-\eta_0)^2}{2\eta'\eta_0}.$$

Как показано в [117], решение вида (5.4.14) определяет комплексный потенциал осесимметричного течения, вызванного источником (стоком). В пространственных цилиндрических координатах ξ,η ($O\xi$ — ось симметрии, η — расстояние точки (ξ,η) до этой оси) это течение представляет собой источник (сток) в виде кольца радиуса η_0 с центром в точке $(\xi_0, 0)$ оси $O\xi$. Вдоль этого кольца равномерно с плотностью q распределены точечные источники (стоки). Суммарная мощность кольцевого источника (стока) $\Pi = q\eta_0$. Введя полный расход $Q = 2\pi\eta_0 q = 2\pi\Pi$ источника $(Q>0)$ или стока $(Q<0)$, на основании формулы (3.3.1) имеем для него комплексный потенциал

$$W = -\frac{Q}{4\pi^2}\left\{\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\sqrt{\eta\eta_0}} + \frac{i}{\eta}\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{(\xi,\eta)} \eta'\left[\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega')}{\sqrt{\eta'\eta_0}}\right)d\eta' - \frac{\partial}{\partial\eta'}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\omega')}{\sqrt{\eta'\eta_0}}\right)d\xi'\right]\right\}. \tag{5.4.15}$$

Рассмотрим случай, когда кольцевой источник (сток) стягивается $(\eta_0 \to 0)$ в точку $(\xi_0\,,\,0)$ оси $O\xi$. Учтём, что функция Лежандра $Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)$ выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ модуля k равенством [1]

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) = kK(k) \quad \left(K(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}},\ k = \frac{2\sqrt{\eta\eta_0}}{\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2}}\right).$$

Учтём, что при $\eta_0 = 0$ $(k = 0)$ $K(0) = \pi/2$, находим

$$\lim_{\eta_0 \to 0} \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\eta\eta_0}} = \lim_{\eta_0 \to 0} \frac{kK(k)}{\sqrt{\eta\eta_0}} = \frac{\pi}{\sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2}}.$$

Тогда из формулы (5.4.15)следует комплексный потенциал (обобщённый потенциал и функция тока) точечного источника (стока)

$$W = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho} + i\frac{\cos\vartheta}{\eta}\right) \quad \left(\varphi = -\frac{Q}{4\pi\rho}, \psi = -\frac{Q}{4\pi}\cos\vartheta\right), \tag{5.4.16}$$

где $\rho = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2}$, $\cos\vartheta = (\xi - \xi_0)/\rho$.

Используя преобразование (5.4.5), находим в координатах x, y:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r_1}, \quad \psi = -\frac{Q\cos\theta_1}{4\pi},$$

где $r_1 = \Big[K_2^2(x - x_0)^2 + K_1K_2y^2\Big]^{1/2}$, $\cos\theta_1 = K_2(x - x_0)/r_1$.

Согласно второй формуле из (3.2.43) имеем фундаментальное решение $\Psi_2(\zeta, \zeta_0)$ уравнения (5.4.9) в виде

$$\Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\sqrt{\eta\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega)}{2\pi} \quad \left(\omega = 1 + \frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{2\eta\eta_0}\right). \tag{5.4.17}$$

Из формулы (3.1.8) при учёте $\sqrt{D(P_s)} = \eta$, $\sqrt{D(P_a)} = 0$ находим функцию $\Phi_2(\zeta, \zeta_0)$, сопряжённую по переменной $\zeta = \xi + i\eta$ решению (5.4.17), и, следовательно, имеем второе фундаментальное решение уравнения (5.4.11):

$$F_2(\zeta, \zeta_0) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{(\xi,\eta)} \frac{1}{\eta'}\left[\frac{\partial}{\partial\eta'}(\sqrt{\eta'\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega'))d\xi' - \frac{\partial}{\partial\xi'}(\sqrt{\eta'\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega'))d\eta'\right] + i\sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}Q_{\frac{1}{2}}(\omega)\right\}, \tag{5.4.18}$$

где

$$\omega' = 1 + \frac{(\xi' - \xi_0)^2 + (\eta' - \eta_0)^2}{2\eta'\eta_0}.$$

Учитывая решение (5.4.18), на основании формулы (3.3.2) находим в координатах ξ, η комплексный потенциал вихря интенсивности Γ в виде кольца радиуса η_0 с центром в точке $(\xi_0, 0)$ оси $O\xi$:

$$W =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi}\left\{ \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{(\xi,\eta)} \frac{1}{\eta'}\left[\frac{\partial}{\partial\eta'}(\sqrt{\eta'\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega'))d\xi' - \frac{\partial}{\partial\xi'}(\sqrt{\eta'\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega'))d\eta'\right] + i\sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}Q_{\frac{1}{2}}(\omega)\right\}. \tag{5.4.19}$$

Отметим, что если кольцевой вихрь стягивать в точку $(\eta_0 \to 0)$, то согласно асимптотике для функции Лежандра (3.2.34) имеем $\lim\limits_{\eta_0\to 0} \Psi_2(\zeta, \zeta_0) = -\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{\eta_0\to 0}[\sqrt{\eta\eta_0}Q_{\frac{1}{2}}(\omega)] = 0$. Это означает, что модель осесимметричного точечного вихря не имеет физического смысла.

Заметим, что, используя равенства (3.2.41), фундаментальные решения $F_k(\zeta, \zeta_0)$, $k = 1, 2$ и комплексные потенциалы кольцевых источника (стока) и вихря нетрудно представить через полные эллиптические интегралы.

В цилиндрических координатах x, y физического пространства источник (сток) и вихрь согласно преобразованию (5.4.5) имеют кольца радиуса y_0 с центром в точке $(x_0, 0)$ оси Ox ($x_0 = \xi_0/K_2$, $y_0 = \eta_0/\sqrt{K_1K_2}$).

Наложение комплексных потенциалов (5.4.15) и (5.4.19) даёт комплексный потенциал вихреисточника. Он обладает в точке ζ_0 особенностью логарифмического типа поскольку таковую особенность имеют в этой точке источник (сток) и вихрь. При стягивании вихреисточника в точку $(\eta_0 \to 0)$ он вырождается в точечный источник (сток) на оси $O\xi$, комплексный потенциал которого (5.4.16).

Предельным сближением пары кольцевых источника-стока и пары кольцевых вихрей нетрудно получить кольцевой диполь подобно тому как это сделано в осесимметричном случае течений в изотропной среде. Следуя работе [117], сближением источника и стока одинаковой по величине мощности Q на основании (5.4.15) имеем комплексный потенциал кольцевого диполя (M_1^0 — момент диполя, направленный под углом θ_1 к оси $O\xi$):

$$W_1 = \frac{M_1^0}{8\pi^2\sqrt{\eta\eta_0}}\left\{\frac{\left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)\right]e^{i\theta_1}}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)\right]e^{-i\theta_1}}{\zeta - \bar{\zeta}_0}\right\}. \tag{5.4.20}$$

Комплексный потенциал W_1 имеет в точке ζ_0 полюс первого порядка. Как показано в [117],

$$Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) = 2kB(k), \quad Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) = 2kD(k), \tag{5.4.21}$$

где $B(k)$ и $D(k)$ — полные эллиптические интегралы модуля k:

$$B(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\beta d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}, \quad D(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\beta d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}.$$

Тогда комплексный потенциал (5.4.20) запишем

$$W_1 = -\frac{M_1^0 k}{4\pi^2\sqrt{\eta\eta_0}}\left[\frac{B(k)e^{i\theta_1}}{\zeta-\zeta_0} + \frac{D(k)e^{-i\theta_1}}{\zeta-\bar{\zeta_0}}\right]. \tag{5.4.20$'$}$$

Рассмотрим случай, когда кольцевой диполь стягивается ($\eta_0 \to 0$) в точку $(\xi_0, 0)$ оси $O\xi$. Учтём, что интегралы $B(k)$ и $D(k)$ при $\eta_0 = 0$ $(k = 0)$ принимают значения $B(k) = D(k) = \pi/4$ и

$$\lim_{\eta_0\to 0}\frac{k}{\sqrt{\eta\eta_0}} = \lim_{\eta_0\to 0}\frac{2}{\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta+\eta_0)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+\eta^2}}.$$

Тогда из выражения (5.4.20$'$) следует комплексный потенциал диполя, расположенного в точке $(\xi_0, 0)$ оси $O\xi$:

$$W_1 = -\frac{M_{1\xi}^0}{4\pi}\frac{\bar{\zeta}-\xi_0}{|\zeta-\xi_0|^3} = -\frac{M_{1\xi}^0}{4\pi}\frac{\xi-\xi_0-i\eta}{[(\xi-\xi_0)^2+\eta^2]^{3/2}}, \tag{5.4.22}$$

где $M_{1\xi}^0 = M_1^0\cos\theta_1$ — момент диполя, ориентированный вдоль оси $O\xi$.

Построение комплексных потенциалов осесимметричных течений, имеющих в точке ζ_0 полюс более высокого порядка чем диполь, то есть мультиполей любого порядка $2n$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$, можно продолжить подобно тому как это сделано в § 3.3 на основе предельного сближения сингулярностей или n-кратного дифференцирования решений $F_k(\zeta, \zeta_0)$ $k = 1, 2$. Поскольку в этом случае P' — функция одного переменного $(P' = \eta)$, то для построения мультиполей можно воспользоваться формулами, основанными на Σ-дифференцировании (3.4.3) и Σ-интегрировании (3.4.4). Это позволяет получить классы комплексных потенциалов осесимметричных течений в виде формальных степеней (положительных и отрицательных). Следуя монографии [117], находим мультиполи, расположенные в начале координат

$$Z^{(-n)}(\zeta) = \rho^{-n-1}\Big[P_n(\cos\vartheta) - i\frac{\sin\vartheta}{n}P'_n(\cos\vartheta)\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и в бесконечности

$$Z^{(-n)}(\zeta) = \rho^{n}\Big[P_n(\cos\vartheta) + \frac{i\sin\vartheta}{n+1}P'_n(\cos\vartheta)\Big], \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где $P_n(\cos\vartheta)$ — полиномы Лежандра степени n, $P'_n(\cos\vartheta) = \frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)}$. В частности, при $n = 1$ степени $Z^{(-1)}(\zeta)$ и $Z^{(1)}(\zeta)$ опрелеляют комплексные потенциалы диполей в начале координат (который совпадает с (5.4.20) при $M^0_{1\xi} = -4\pi$, $\xi_0 = 0$) и в бесконечности , который описывает поступательный поток.

Аналогично работе [117] нетрудно получить комплексные потенциалы осесимметричных течений в изотермических координатах, а также в виде усложнённых аналогов элементарных аналитических функций.

Постановки граничных задач

Как уже отмечалось выше, изучение осесимметричных течений в ортотропной среде аналогично исследованию на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ течения в слое проводимости $P = (P_{ij}) = y(K_{ij})$ ($K_{11} = K_1$, $K_{22} = K_2$, $K_{12} = K_{21} = 0$), которое сводится к исследованию на полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ течения в слое проводимости $P' = \eta$. Поэтому постановки граничных задач осесимметричных течений являются частными случаями постановок задач в анизотропно неоднородном слое проводимости общего вида.

Сформулируем на полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ первую и вторую краевые задачи и задачу сопряжения осесимметричных течений, имея в виду, что слой проводимости $P' = \eta$. Заданные источники (стоки) течения моделируем в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ изолированными особыми точками комплексного потенциала $W_0(\zeta)$ (обобщённым потенциалом $\varphi_0(\zeta)$ и функцией тока $\psi_0(\zeta)$):

$$W_0(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\frac{\psi_0(\zeta)}{\eta} \quad (\eta > 0), \tag{5.4.23}$$

который описывает течение в отсутствии границ.

В случае краевых задач комплексный потенциал $W(\zeta)$ вида (5.4.10) запишем

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D' \tag{5.4.24}$$

$$\big(\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_*(\zeta)\big),$$

где

$$W_*(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + i\frac{\psi_*(\zeta)}{\eta} \quad (\eta > 0) \tag{5.4.25}$$

комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$ — обобщённый потенциал и функция тока) возмущений, обусловленных границами.

Полагаем, что $W_0(\zeta)$ ($\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$) удовлетворяют на оси симметрии течения $O\xi$ условиям (5.4.12). Тогда этим же условиям на оси $O\xi$ удовлетворяют $W_*(\zeta)$ ($\varphi_*(\zeta)$ и $\psi_*(\zeta)$).

Условия (5.1.5) и (5.1.6),а также их частные случаи (5.1.5′) и (5.1.6′) запишем при $P' = \eta > 0$ в виде

$$\operatorname{Re} W_*^+(\zeta) = f_0(\zeta) - \operatorname{Re} W_0(\zeta) \quad \big(\varphi_*^+(\zeta) = f_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{5.4.26}$$

$$\operatorname{Im} W_*^+(\zeta) = \frac{C_0}{\eta} - \operatorname{Im} W_0(\zeta) \quad \big(\psi_*^+(\zeta) = C_0 - \psi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_2', \tag{5.4.27}$$

$$\operatorname{Re} W_*^+(\zeta) = -\operatorname{Re} W_0(\zeta) \quad \big(\varphi_*^+(\zeta) = -\varphi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{5.4.26′}$$

$$\operatorname{Im} W_*^+(\zeta) = -\operatorname{Im} W_0(\zeta) \quad \big(\psi_*^+(\zeta) = -\psi_0(\zeta)\big), \quad \zeta \in \sigma_2', \tag{5.4.27′}$$

Условия в бесконечности (5.1.8) в осесимметричном случае примут вид

$$\operatorname{Re} W_*^+(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad \eta|\nabla \operatorname{Re} W_*(\zeta)| = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty \tag{5.4.28}$$

$$\big(\varphi_*(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad \eta|\nabla\varphi_*(\zeta)| = O(|\zeta|^{-2})\big).$$

В случае задачи сопряжения на границе Γ' раздела областей D_1' и D_2', проницаемости сред в которых K_1^0 и K_2^0 ($K_\nu^0 = k_\nu(K_{ij})$ ($K_{11} \equiv K_1$, $K_{22} \equiv$ $\equiv K_2$, $K_{12} = K_{21} = 0$) $k_\nu > 0$ — константы, $\nu = 1, 2$), течение описывают комплексные потенциалы

$$W_\nu(\zeta) = k_\nu\varphi_\nu(\zeta) + i\frac{\psi_\nu(\zeta)}{\eta}, \quad (\eta > 0), \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2. \tag{5.4.29}$$

Представим эти комплексные потенциалы в виде

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2 \tag{5.4.30}$$

$$\big(k_\nu \varphi_\nu(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \psi_\nu(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_*(\zeta)\big).$$

Здесь $W_0(\zeta)$ — комплексный потенциал вида (5.4.23) описывает течение в отсутствии границы Γ', $W_*(\zeta)$ — комплексный потенциал вида (5.4.25), учитывает наличие границы Γ' (скачок проводимости слоя на ней). Условия непрерывности давления и расхода жидкости на Γ' (5.1.12) (или (5.1.12$'$)) в этом случае запишем

$$W_*^+(\zeta) - \lambda_k \overline{W}_*^+(\zeta) - (1+\lambda_k) W_*^-(\zeta) = \lambda_k [W_0(\zeta) + \overline{W}_0(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma' \quad (5.4.31)$$

$$\Big((1-\lambda_k)\varphi_*^+(\zeta) - (1+\lambda_k)\varphi_*^+(\zeta) = 2\lambda_k \varphi_0(\zeta), \quad \psi_*^+(\zeta) = \psi_*^-(\zeta)\Big).$$

Таким образом, постановки задач состоят в следующем. Заданы источники (стоки) осесимметричного течения (задан комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ в виде (5.4.23). Найти комплексный потенциал $W_*(\zeta)$, удовлетворяющий уравнению (5.4.11) и условию (5.4.26) (первая краевая задача) или (5.4.27) (вторая краевая задача) или (5.4.31) (задача сопряжения). В случае неограниченной области, содержащей бесконечноудаленную точку, $W_*(\zeta)$ должен отвечать условиям (5.4.28).

После того как найден комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ по формулам (5.4.24) и (5.4.30) и последующим применением преобразований (5.4.5) находим в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ искомый комплексный потенциал $W(z) = W[\zeta(z)]$, обобщённый потенциал $\varphi(z) = \varphi[z(\zeta)]$ и функцию тока $\psi(z) = \psi[\zeta(z)]$ осесимметричного течения.

Задачи с каноническими границами

Рассмотрим сначала осесимметричные граничные задачи, когда коэффициент проницаемости ортотропной среды постоянный либо кусочно-постоянный и границы имеют канонический вид. В этом случае решения задач удаётся получить в конечном виде подобно тому, как это сделано для осесимметричных течений в изотропной среде [117]. Продемонстрируем это на примерах, когда границы моделируются плоскостью и эллипсоидом вращения.

Пусть границами является плоскость, перпендикулярная оси симметрии течения Ox. На полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ моделируем полупрямой $x = 0$, $y \in [0, \infty)$, которой на полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$ отвечает согласно преобразованиям (5.4.5) полупрямая $\xi = 0$, $\eta \in [0, \infty)$. Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 5.5. *Пусть осесимметричное течение в ортотропной однородной среде постоянной проницаемости* K $(K_{11} \equiv K_1\,,\ K_{22} \equiv K_2\,,\ K_{12} = K_{21} = 0)$ *описывают на полуплоскости* $Imz > 0$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(z)$ *и функция тока* $\psi_0(z)$, *которые имеют изолированные особые точки всюду в этой полуплокскости за исключением полупрямой* $x = 0\,,\ y \in [0, \infty)$, *делящей полуплоскость на области* D_1 $(x > 0)$ *и* D_2 $(x < 0)$. *Это течение описывает на полуплоскости* $\operatorname{Im}\zeta > 0$ *комплексный потенциал* $W_0(\zeta)$, *который имеет те же особые точки в областях* D_1' $(\xi > 0)$ *и* D_2' $(\xi < 0)$. *Пусть* $W_0(\zeta)$ *можно представить в виде* $W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta)$, *где функции* $W_{01}(\zeta)$ *и* $W_{02}(\zeta)$ *имеют особые точки в* D_1' *и* D_2', *причём* $W_0(\zeta) = O(|\zeta^{-1}|)$ *при* $|\zeta| \to \infty$.

Тогда осесимметричное течение в областях D_1 *и* D_2 *среды проницаемости* K_1^0 *и* K_2^0 $(K_\nu^0 = k_\nu K\,,\ k_\nu > 0$ *— постоянные,* $\nu = 1, 2)$ *описывают комплексные потенциалы*

$$\begin{aligned} W_1(z) &= W_0(\zeta) + \lambda_k\big[\overline{W_{01}(-\bar{\zeta})} + W_{02}(\zeta)\big], \quad z \in D_1,\\ W_2(z) &= W_0(\zeta) - \lambda_k\big[W_{01}(\zeta) - \overline{W_{02}(-\bar{\zeta})}\big], \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.4.32}$$

где $\lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda_k \in (-1, 1)$, $\zeta = \zeta(z)$ *имеет вид* (5.4.5).

Доказательство. По условию теоремы функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют изолированные особые точки в областях D_1' $(\xi > 0)$ и D_2' $(\xi < 0)$ полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Поэтому $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ — обобщённо аналитические функции (удовлетворяют уравнению (5.4.11) всюду в областях D_2' и D_1'.

Воспользуемся обобщённым принципом симметрии [117] в данном случае относительно полупрямой $\xi = 0$, $\eta \in [0, \infty)$ (точки $\zeta = \xi + i\eta$ и $-\bar{\zeta} = -\xi + i\eta$ зеркально симметричны относительно этой полупрямой). Согласно этому принципу функции $W_{01}(\zeta)$, $\zeta \in D_2'$ и $W_{02}(\zeta)$, $\zeta \in D_1'$ продолжим соответственно в области D_1' и D_2'. Получим обобщённо аналитические функции $\overline{W_{01}(-\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D_1'$ и $\overline{W_{02}(-\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D_2'$. Тогда комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ в областях D_1' и D_2' ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} A\big[\overline{W_{01}(-\bar{\zeta})} + W_{02}(\zeta)\big], & \zeta \in D_1',\\ B\big[W_{01}(\zeta) + \overline{W_{02}(-\bar{\zeta})}\big], & \zeta \in D_2', \end{cases}$$

где A и B — постоянные. Эти постоянные найдём удовлетворив $W_*(\zeta)$ условию (5.4.31) на границе Γ': $\xi = 0$, $\eta \in [0, \infty)$. Учитывая, что на ней

$W_{0\nu}^{+}(\zeta) = W_{0\nu}^{-}(\zeta) = W_{0\nu}(\zeta)$, $\overline{W}_{0\nu}^{+}(\zeta) = \overline{W}_{0\nu}^{-}(\zeta) = \overline{W}_{0\nu}(\zeta)$, $\nu = 1, 2$, $\zeta \in \Gamma'$, имеем равенство

$$(A - \lambda_k)\big[\overline{W}_{01}(0,\eta) + W_{02}(0,\eta)\big] - \big[\lambda_k(1+\overline{A}) + (1+\lambda_k)B\big]\big[W_{01}(0,\eta)+$$

$$+\overline{W}_{02}(0,\eta)\big] = 0, \quad \eta \in (0,\infty).$$

Это равенство должно выполняться во всех точках границы Γ': $\xi = 0$, $\eta \in (0,\infty)$ при любых значениях параметра $\lambda_k \in (-1,1)$. Поскольку $W_{0\nu}(0,\eta) \neq 0$ и $\overline{W}_{0\nu}(0,\eta) \neq 0$, $\eta \in (0,\infty)$, $\nu = 1, 2$, то это возможно, если $A = \overline{A} = \lambda_k$ и $B = -\lambda_k$. Тогда комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ принимает вид

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} \lambda_k\big[\overline{W_{01}(-\bar{\zeta})} + W_{02}(\zeta)\big], & \zeta \in D_1', \\ -\lambda_k\big[W_{01}(\zeta) + \overline{W_{02}(-\bar{\zeta})}\big], & \zeta \in D_2'. \end{cases}$$

В силу условия $W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$ найденный комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ удовлетворяет условию в бесконечности (5.4.28). Тогда с учётом равенств (5.4.30) имеем искомые комплексные потенциалы (5.4.32). ■

Решение первой и второй краевых задач в случае заданного на полупрямой $\xi = 0$, $\eta \in [0,\infty)$ условия (5.4.26′) или (5.4.27′) выражает

Теорема 5.6. *Пусть осесимметричное течение в ортотропной однородной среде проницаемости* K $(K_{11} \equiv K_1$, $K_{22} \equiv K_2$, $K_{12} = K_{21} = 0)$ *описывают на полуплоскости* $Imz > 0$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(z)$ *и функция тока* $\psi_0(z)$, *которые имеют изолированные особые точки в области* D $(x > 0, y > 0)$ *этой полуплоскости. Это течение описывает на полуплоскости* $\operatorname{Im}\zeta > 0$ *комплексный потенциал* $W_0(\zeta)$, *который имеет те же особые точки в области* D' $(\xi > 0)$, *ограниченной полупрямой* $\xi = 0$, $\eta \in [0,\infty)$, *причём* $W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ *при* $|\zeta| \to \infty$. *Пусть полупрямая* $\xi = 0$, $\eta \in [0,\infty)$ *является границей* σ_1' *или* σ_2' *с заданными условиями* (5.4.26′) *или* (5.4.27′). *Тогда осесимметричное течение в области* D, *ограниченной полупрямой* $x = 0$, $y \in [0,\infty)$, *являющейся границей* σ_1 *или* σ_2 *описывает комплексный потенциал*

$$W(z) = W_0(\zeta) - \overline{W_0(-\bar{\zeta})}, \quad z \in D, \tag{5.4.33}$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta) + \overline{W_0(-\bar{\zeta})}, \quad z \in D, \tag{5.4.34}$$

где $\zeta = \zeta(z)$ *имеет вид* (5.4.5).

Доказательство. Так как $W_0(\zeta)$ имеет особые точки в области D' ($\xi > 0$), то $\overline{W_0(-\bar{\zeta})}$ — обобщённая аналитическая функция (удовлетворяющая уравнению (5.4.11) в этой области. Комплексные потенциалы возмущений $W_*(\zeta) = -\overline{W_0(-\bar{\zeta})}$ и $W_* = \overline{W_0(-\bar{\zeta})}$ удовлетворяют условиям (5.4.26$'$) или (5.4.27$'$) на границах σ_1' и σ_2', уравнение которых $\xi = 0$, $\eta \in [0, \infty)$, а также в силу условия $W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$ удовлетворяет условию в бесконечности (5.4.28). ■

Заметим, что комплексные потенциалы (5.4.33) и (5.4.34) можно рассматривать как предельные (при $\lambda_k \to \pm 1$) выражения коплексного потенциала $W_1(z)$ из решения (5.4.32). Действительно, полагая в $W_1(z)$ $k_1 = 1$, $W_{01}(\zeta) = W_0(\zeta)$, $W_{02}(\zeta) = 0$ и $k_2 \to \infty$ ($\lambda_k \to -1$) или $k_2 \to 0$ ($\lambda_k \to 1$) имеем в пределе комплексные потенциалы (5.4.33) и (5.4.34).

Рассмотрим теперь случай, когда каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ можно моделировать в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ полуэллипсом (в пространстве эллипсоидом вращения относительно оси Ox). Полуэллипсу ($A = \rho_0/K_2$, $B = \rho_0/\sqrt{K_1 K_2}$ — его полуоси)

$$z = \frac{A+B}{2}e^{it} + \frac{A-B}{2}e^{-it} \quad (x = A\cos t,\ y = B\sin t), \quad t \in [\pi, 0] \tag{5.4.35}$$

отвечает в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ согласно преобразованиям (5.4.5) полуокружность (в пространстве сфера радиуса ρ_0):

$$\zeta = \rho_0 e^{it} \quad (\xi = \rho_0\cos t,\ \eta = \rho_0 \sin t), \quad t \in [\pi, 0]. \tag{5.4.36}$$

Полуэллипс делит полуплоскость $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ на области D_1 и D_2 (вне и внутри полуэллипса), а полуокружность — полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$ на области D_1' и D_2' (вне и внутри полуокружности).

Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 5.7. *Пусть осесимметричное течение в ортотропной среде проницаемости K ($K_{11} \equiv K_1$, $K_{22} \equiv K_2$, $K_{12} = K_{21} = 0$) описывают на полуплоскости $Imz > 0$ обобщённый потенциал $\varphi_0(z)$ и функция тока $\psi_0(z)$, которые имеют изолированные особые точки всюду в этой полуплоскости за исключением полуэллипса* (5.4.35), *делящего полуплоскость на области D_1 и D_2 (вне и внутри полуэллипса). Это течение описывает на полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ комплексный потенциал $W_0(\zeta)$, который имеет те же особые точки в областях D_1' и D_2' (вне и внутри полуокружности* (5.4.36)*). Пусть $W_0(\zeta)$ можно представить в виде*

$W_0(\zeta) = W_{01}(\zeta) + W_{02}(\zeta)$, *где функции* $W_{01}(\zeta)$ *и* $W_{02}(\zeta)$ *имеют особые точки в* D_1' *и* D_2', *причём*

$$W_{01}(\zeta) = O(\zeta) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to 0, \quad W_{02}(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty. \tag{5.4.37}$$

Тогда осесимметричное течение в областях D_1 *и* D_2 *среды проницаемости* K_1^0 *и* K_2^0 ($K_\nu^0 = k_\nu K$, $k_\nu > 0$ — *постоянные*, $\nu = 1, 2$) *описывают комплексные потенциалы*

$$\begin{aligned} W_1(\zeta) &= W_{01}(\zeta) + \lambda_k \frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{01}\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right)} + G_1\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right) + \lambda_k \overline{G_1\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right)}\right] + \\ &\qquad + (1+\lambda_k)[W_{02}(\zeta) - \lambda_k G_2(\zeta)], \quad z \in D_1, \\ W_2(\zeta) &= W_{02}(\zeta) - \lambda_k \frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{02}\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right)} + G_2\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right) - \lambda_k \overline{G_2\left(\frac{\rho_0^2}{\bar\zeta}\right)}\right] + \\ &\qquad + (1-\lambda_k)[W_{01}(\zeta) + \lambda_k G_1(\zeta)], \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{5.4.38}$$

где

$$G_j(\zeta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{p_j}^{1} \tau^{\sigma_j - 1} W_{0j}(\zeta\tau)\,d\tau, \quad \sigma_j = \frac{1}{2}\big[1 + (-1)^{j+1}\lambda_k\big], \quad j = 1, 2,$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \infty, \quad \lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2), \quad \lambda_k \in (-1, 1),$$

$\zeta = \zeta(z)$ *имеет вид* (5.4.5).

Доказательство. По условию теоремы функции $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ имеют изолированные особые точки в областях D_1' и D_2' полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Поэтому $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ — обобщённо аналитические функции (удовлетворяют уравнению (5.4.11)) всюду в областях D_2' и D_1'. Тогда в областях D_1' и D_2' будут обобщённо аналитическими следующие функции [117]

$$G_1(\zeta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} \tau^{\sigma_1 - 1} W_{01}(\zeta\tau)\,d\tau, \quad \zeta \in D_2',$$

$$G_2(\zeta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{1} \tau^{\sigma_2 - 1} W_{02}(\zeta\tau)\,d\tau, \quad \zeta \in D_1',$$

где, как будет показано далее, коэффициенты $\sigma_1 = (1+\lambda_k)/2$ и $\sigma_2 = (1 - \lambda_k)/2$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in (0,1))$, а в силу условий (5.4.37) интегралы сходятся.

Применим к функциям $W_{01}(\zeta)$ и $W_{02}(\zeta)$ принцип зеркальной симметрии относительно полуокружности (5.4.36), согласно которому точке области D_1' (или D_2') соответствует точка $\rho_0^2/\bar{\zeta}$ области D_2' (или D_1'). Продолжим функции $W_{01}(\zeta)$, $\zeta \in D_2'$ и $W_{01}(\zeta)$, $\zeta \in D_1'$ в области D_1' и D_2' и, следуя [117], получим обобщённо аналитические функции

$$\frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{01}\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + G_1\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right) + (2\sigma_1 - 1)\overline{G_1\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)}\right], \quad \zeta \in D_1',$$

$$\frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{02}\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + G_2\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right) - (2\sigma_2 - 1)\overline{G_2\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)}\right], \quad \zeta \in D_2'.$$

Тогда комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ в областях D_1' и D_2' ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} A_1\dfrac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{01}\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + G_1\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right) + (2\sigma_1 - 1)\overline{G_1\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)}\right] + \\ +B_1 W_{02}(\zeta) + C_1 G_2(\zeta), \quad \zeta \in D_1', \\ A_2\dfrac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_{02}\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + G_2\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right) - (2\sigma_2 - 1)\overline{G_2\left(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)}\right] + \\ +B_2 W_{01}(\zeta) + C_2 G_1(\zeta), \quad \zeta \in D_2', \end{cases}$$

где A_j, B_j, C_j, σ_j $(j = 1, 2)$ — постоянные коэффициенты. Эти коэффициенты найдём, удовлетворяя $W_*(\zeta)$ условию (5.4.31) на полуокружности (5.4.36) и учитывая, что на ней $\zeta\bar{\zeta} = \rho_0^2$ и имеют место равенства $W_{0j}^+(\zeta) = W_{0j}^-(\zeta) = W_{0j}(\zeta)$, $\overline{W_{0j}^+(\zeta)} = \overline{W_{0j}^-(\zeta)} = \overline{W_{0j}(\zeta)}$, $j = 1, 2$. Находим на полуокружности равенство

$$[-\lambda_k\overline{A}_1 - (1+\lambda_k)B_2 - \lambda_k]W_0(\zeta) + [A_1 - \lambda_k]\overline{W}_{01}(\zeta) +$$

$$+[A_1 - \lambda_k(2\sigma_1 - 1)\overline{A}_1 - (1+\lambda_k)C_2]G_1(\zeta) + [(2\sigma_1 - 1)A_1 + \lambda_k\overline{A}_1]\overline{G}_1(\zeta) +$$

$$+[B_1 - \lambda_k]W_{02}(\zeta) + [-\lambda_k\overline{B}_1 - (1+\lambda_k)A_2 - \lambda_k]\overline{W}_{02}(\zeta) +$$

$$+[C_1 - (1+\lambda_k)A_2]G_2(\zeta) + [-\lambda_k\overline{C}_1 - (1+\lambda_k)(2\sigma_1 - 1)A_2]\overline{G}_2(\zeta) = 0.$$

Это равенство будет тождественно удовлетворяться, если будут равны нулю выражения в квадратных скобках, стоящие перед функциями

$W_{0j}(\zeta)$, $\overline{W_{0j}(\zeta)}$, $G_j(\zeta)$ и $\overline{G_j(\zeta)}$, $j=1,2$. Из этих выражений следует, что σ_j имеют указанный выше вид $\sigma_j = \frac{1}{2}[1+(-1)^{j+1}\lambda_k]$, $j=1,2$, а искомые коэффициенты A_j, B_j, C_j, $j=1,2$ вещественные и принимают значения: $A_1=B_1=\lambda_k$, $A_2=B_2=-\lambda_k$, $C_1=-\lambda_k(1+\lambda_k)$, $C_2=\lambda_k(1-\lambda_k)$.

Учитывая найденные коэффициенты, комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ запишем:

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} \lambda_k \dfrac{\rho_0}{|\zeta|}\Bigg[\overline{W_{01}\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big)} + G_1\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big) + \lambda_k \overline{G_1\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big)}\Bigg] + \\ +\lambda_k\Big[W_{02}(\zeta) - (1+\lambda_k)G_2(\zeta)\Big], \quad \zeta \in D_1', \\ -\lambda_k \dfrac{\rho_0}{|\zeta|}\Bigg[\overline{W_{02}\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big)} + G_2\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big) - \lambda_k \overline{G_2\Big(\dfrac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\Big)}\Bigg] - \\ -\lambda_k\Big[W_{01}(\zeta) - (1-\lambda_k)G_1(\zeta)\Big], \quad \zeta \in D_2'. \end{cases}$$

В силу условий (5.4.37) найденный комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ удовлетворяет в бесконечности условию (5.4.28). Тогда с учётом равенств (5.4.30) имеем искомые комплексные потенциалы (5.4.38). ■

Решение первой и второй краевых задач в случае полуэллипса (5.4.35) выражает

Теорема 5.8. *Пусть осесимметричное течение в ортотропной среде проницаемости* K *(*$K_{11}\equiv K_1$, $K_{22}\equiv K_2$, $K_{12}=K_{21}=0$*) описывают на полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(z)$ *и функция тока* $\psi_0(z)$*, которые имеют изолированные особые точки в области* D_1 *или* D_2 *(вне или внутри полуэллипса* (5.4.35)*.*[1] *Это течение описывает на полуплоскости* $\operatorname{Im}\zeta>0$ *комплексный потенциал* $W_0(\zeta)$*, который имеет те же изолированные особые точки в области* D_1' *и* D_2' *(вне или внутри полуокружности* (5.4.36)*). Пусть комплексный потенциал* $W_0(\zeta)$ *удовлетворяет условию*

$$W_0(\zeta) = O(\zeta) \quad \textit{при} \quad |\zeta| \to 0, \tag{5.4.39}$$

когда его особые точки лежат в D_1'*, и условию*

$$W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \textit{при} \quad |\zeta| \to \infty, \tag{5.4.40}$$

[1] В случае непроницаемой границы σ_2 суммарная мощность источников и стоков в области D_2 (внутри полуэллипса) должна быть равна нулю согласно уравнению неразрывности.

если его особые точки расположены в D_2', *а полуокружность* (5.4.36) *является границей* σ_1' *или* σ_2' *с заданными на ней условиями* (5.4.26′) *или* (5.4.27′). *Тогда осесимметричное течение в областях* D_1 *и* D_2, *для которых полуэллипс* (5.4.35) *является границей* σ_1 *или* σ_2 *(с теми же физическими условиями, что на* σ_1' *или* σ_2'*) описывают комплексные потенциалы*

$$W(z) = W_0(\zeta) - \frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_0\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + \frac{2}{\zeta - \bar{\zeta}}\left(\frac{|\zeta|}{\rho_0}\right)^2 \int\limits_p^1 \tau^{-2}\psi_0\left(\frac{\rho_0^2\tau}{\bar{\zeta}}\right)d\tau\right] \quad (5.4.41)$$

или

$$W(z) = W_0(\zeta) + \frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_0\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} - \int\limits_p^1 \varphi_0\left(\frac{\rho_0^2\tau}{\bar{\zeta}}\right)d\tau\right], \quad (5.4.42)$$

где $p = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z \in D_1, \\ \infty, & \text{если} \quad z \in D_2, \end{cases}$ $\quad \zeta = \zeta(z)$ *имеет вид* (5.4.5).

Доказательство. Комплексные потенциалы возмущений имеют вид

$$W_*(\zeta) = -\frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_0\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} + \frac{2}{\zeta - \bar{\zeta}}\left(\frac{|\zeta|}{\rho_0}\right)^2 \int\limits_p^1 \tau^{-2}\psi_0\left(\frac{\rho_0^2\tau}{\bar{\zeta}}\right)d\tau\right],$$

$$W_*(\zeta) = \frac{\rho_0}{|\zeta|}\left[\overline{W_0\left(\frac{\rho_0^2}{\bar{\zeta}}\right)} - \int\limits_p^1 \varphi_0\left(\frac{\rho_0^2\tau}{\bar{\zeta}}\right)d\tau\right].$$

В силу условий (5.4.39) и (5.4.40) интегралы, входящие в комплексные потенциалы $W_*(\zeta)$, сходятся и $W_*(\zeta)$ удовлетворяют в бесконечности условиям (5.4.28). $W_*(\zeta)$ удовлестворяют также на полуокружности (5.4.36) условию (5.4.26′) или (5.4.27′). Тогда, используя формулу (5.4.21), находим комплексные потенциалы (5.4.41) и (5.4.42). ■

В заключении отметим, что на основании формул (5.4.10), (5.4.23) и (5.4.29) нетрудно найти из комплексных потенциалов (5.4.32)–(5.4.34), (5.4.38), (5.4.41) и (5.4.42) обобщённые потенциалы $\varphi(z)$ и функции тока $\psi(z)$ осесимметричных течений.

Следуя работе [117], аналогично можно найти в конечном виде решения осесимметричных задач, известных в осесимметричных случаях аналогов цилиндрической, параболической и эллипсоидальной границ.

Заметим, что теоремы 5.5–5.8 обобщают решения граничных задач, известных в осесимметричном случае для течений в изотропной пористой среде [41, 68, 70, 71, 108, 117] и течений идеальной жидкости [51, 53, 89].

Задачи с произвольными гладкими границами

Теперь исследуем поставленные выше осесимметричные задачи в общем случае, когда на полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ границы моделируется произвольными гладкими (без самопересечений) кривыми L. На полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ представим согласно формулам (5.3.1) и (5.3.2) обобщённым интегралом типа Коши по кривой L' (L' — образ кривой L)

$$W_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau) f(\tau) d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar{f}(\tau) d\bar{\tau}, \quad \zeta \notin L' \tag{5.4.43}$$

с предельными значениями

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau) f(\tau) d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar{f}(\tau) d\bar{\tau} \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \tag{5.4.44}$$

в которых интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Выражения ядер $\Omega_1(\zeta,\tau)$, $\Omega_2(\zeta,\tau)$ следуют из формулы (4.2.14) при $P'(\tau) = (\tau - \bar{\tau})/2i = \operatorname{Im}\tau$ с учётом нормированных комплексных потенциалов диполей $w_1(\zeta,\tau)$ и $w_2(\zeta,\tau)$, вытекающих из комплексного потенциала (5.4.20) при $\theta_1 = 0$ и $\pi/2$, $M_1^0 = 2\pi$, и имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta,\tau) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\bar{\tau}}{\zeta-\bar{\zeta}}}\,\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta-\tau}, \\ \Omega_2(\zeta,\tau) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\bar{\tau}}{\zeta-\bar{\zeta}}}\,\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta-\bar{\tau}}, \end{aligned} \tag{5.4.45}$$

где $\omega = 1 - \left[2|\zeta-\tau|^2/(\zeta-\bar{\zeta})(\tau-\bar{\tau})\right]$.

Такое представление комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ позволяет сразу удовлетворить на оси симметрии $O\xi$ условиям (5.4.12) поскольку им удовлетворяют найденные выше фундаментальные решения (5.4.14) и (5.4.18), а также условиям в бесконечности (5.4.28) поскольку согласно условию (4.3.3) $W_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$.

В случае первой краевой задачи (внутренней и внешней) непрерывен поток жидкости через кривую σ_1' (σ_1' — образ кривой σ_1), которую полагаем замкнутой. Поэтому в выражениях (5.4.43) и (5.4.44) функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_1'$ — вещественная. Полагаем, что орт нормали направлен в область D', ограниченную кривой σ_1'. В случае внутренней задачи с учётом ядер (5.4.45) имеем:

$$W_*(\zeta) = \\ = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \tau} d\tau + \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right], \\ \zeta \notin \sigma_1', \quad (5.4.46)$$

$$W_*^+(\zeta) = \widetilde{W}_*(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \sigma_1', \qquad (5.4.47)$$

где $\widetilde{W}_*(\zeta)$ — прямое значение интеграла (5.4.46) на σ_1'.

Подставляя (5.4.47) в условие (5.4.26), на основании формул (5.1.3) и (5.4.43) имеем решение первой внутренней краевой задачи

$$W(z) = W_0(\zeta) + \\ + \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \tau} d\tau + \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right], \\ z \in D, \quad (5.4.48)$$

где $\zeta = \zeta(z)$ имеет вид (5.4.5), а функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_1'} f(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left\{ \left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) \right] \frac{\partial}{\partial l_\tau} \arg(\zeta - \tau) dl_\tau + \right. \\ \left. + \left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) \right] \frac{\partial}{\partial l_\tau} \arg(\zeta - \bar{\tau}) dl_{\bar{\tau}} \right\} = 2[f_0(\zeta) - \varphi_0(\zeta)], \\ \zeta \in \sigma_1'. \quad (5.4.49)$$

В случае первой внешней краевой задачи по аналогии с § 5.3 имеем решение

$$W(z) = W_0(\zeta) + \\ + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left[\frac{Q_{\frac12}(\omega)-Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\tau}d\tau + \frac{Q_{\frac12}(\omega)+Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\bar\tau}d\bar\tau\right] + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau)d\tau, \quad z\in D, \quad (5.4.50)$$

где $\zeta=\zeta(z)$ имеет вид (5.4.5), а функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left\{\left[Q_{\frac12}(\omega)-Q_{-\frac12}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_\tau}\arg(\zeta-\tau)dl_\tau + \right.\\ \left. + \left[Q_{\frac12}(\omega)+Q_{-\frac12}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_{\bar\tau}}\arg(\zeta-\bar\tau)dl_{\bar\tau}\right\} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma_1'} f(\tau)dl_\tau = \\ = 2[f_0(\zeta)-\varphi_0(\zeta)], \quad \zeta\in\sigma_1'. \quad (5.4.51)$$

В случае второй краевой задачи (внешней и внутренней) поток жидкости через непроницаемую границу σ_2' (σ_2' — образ σ_2) отсутствует. Следовательно, на σ_2' функция тока $\psi_*(z)$ терпит разрыв в то время как обобщённый потенциал $\varphi_*(z)$ непрерывен. Поэтому согласно равенств (4.4.21) при учёте $P'=(\zeta-\bar\zeta)/2i=\eta$ положим $f(\zeta)=ih(\zeta)$ ($h(\zeta)$ — вещественная функция), $\zeta\in\sigma_2'$. Тогда согласно формулам (5.4.43)–(5.4.45) имеем для комплексного потенциала возмущений выражения (орт нормали к σ_2' направлен в область D'):

$$W_*(\zeta) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma_2'} h(\tau)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left[\frac{Q_{\frac12}(\omega)-Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\tau}d\tau - \frac{Q_{\frac12}(\omega)+Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\bar\tau}d\bar\tau\right], \\ \zeta\notin\sigma_1', \quad (5.4.52)$$

$$W_*^+(\zeta) = \widetilde{W}_*(\zeta) + \frac{ih(\zeta)}{2}, \quad \zeta\in\sigma_2', \quad (5.4.53)$$

где $\widetilde{W}_*(\zeta)$ — прямое значение интеграла (5.4.52) на σ_2'.

Подставляя предельное значение (5.4.53) в условие (5.4.27), на основании формул (5.4.24) и (5.4.52) имеем решение второй краевой задачи (внешней и внутренней):

$$W(z) = W_0(\zeta) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma_2'} h(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \tau} d\tau - \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right], \\ z \in D, \quad (5.4.54)$$

где $\zeta = \zeta(z)$ имеет вид (5.4.5), а функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_2'} h(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left\{ \left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) \right] \frac{\partial}{\partial l_\tau} \arg(\zeta - \tau) dl_\tau - \\ - \left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega) \right] \frac{\partial}{\partial l_{\bar{\tau}}} \arg(\zeta - \bar{\tau}) dl_{\bar{\tau}} \right\} = 2\big[C_0 - \psi_0(\zeta) \big], \\ \zeta \in \sigma_2'. \quad (5.4.55)$$

Заметим, что в случае второй внутренней задаче согласно уравнению неразрывности должна быть равна нулю сумма интенсивностей (мощностей) источников и стоков течения, характеризуемых изолированными особыми токами комплексного потенциала $W_0(\zeta)$.

В случае задачи сопряжения поток жидкости непрерывен на границе Γ. Поэтому согласно условий (5.4.31) функция тока $\psi_*(z)$ непрерывна на границе Γ' (Γ' — образ Γ). Тогда на основании формул (5.4.43)–(5.4.45) имеем (орт нормали к Γ' направлен в область D_1'):

$$W_*(\zeta) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\Gamma'} f(\tau) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \tau} d\tau - \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right], \\ \zeta \notin \Gamma', \quad (5.4.56)$$

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \widetilde{W}_*(\zeta) \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma', \qquad (5.4.57)$$

где $\widetilde{W}_*(\zeta)$ — прямое значение интеграла (5.4.56) на Γ'.

Подставляя предельные значения (5.4.57) в условие (5.4.31), на основании формул (5.4.30) и (5.4.56) находим решение задачи сопряжения

$$W_\nu(z) = W_0(\zeta) + \\ + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma'} f(\tau)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left[\frac{Q_{\frac12}(\omega)-Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\tau}d\tau - \frac{Q_{\frac12}(\omega)+Q_{-\frac12}(\omega)}{\zeta-\bar\tau}d\bar\tau\right], \\ z\in D_\nu, \quad \nu=1,2,$$

где $\zeta=\zeta(z)$ имеет вид (5.4.5), а функция $f(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(\zeta) + \frac{\lambda_k}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'} f(\tau)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left\{\left[Q_{\frac12}(\omega)-Q_{-\frac12}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_\tau}\arg(\zeta-\tau)dl_\tau + \right. \\ \left. + \left[Q_{\frac12}(\omega)+Q_{-\frac12}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_{\bar\tau}}\arg(\zeta-\bar\tau)dl_{\bar\tau}\right\} = 2\lambda_k\varphi_0(\zeta), \\ \zeta\in\Gamma'. \quad (5.4.58)$$

Таким образом, первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения осесимметричных течений в случае произвольных гладких границ редуцированы к интегральным уравнениям (5.4.49), (5.4.51), (5.4.55) и (5.4.58), которые являются сингулярными, так как в них интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши. Это неоднородные интегральные уравнения второго рода. В решениях этих задач разности и суммы функций $Q_{1/2}(\omega)$ и $Q_{-1/2}(\omega)$ можно заменить используя равенства (5.4.21) на полные эллиптические интегралы $B(k)$ и $D(k)$.

Глава 6

Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей

Ставится двумерная (в том числе осесимметричная) задача эволюции границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости и плотности). Исследование задачи сводится к решению систем сингулярных интегральных уравнений и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

§ 6.1. Задача эволюции границы раздела жидкостей для комплексного потенциала

Постановка задачи эволюции границы на физической плоскости

Поставленную в § 1.4 для обобщенного потенциала задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t сформулируем на физической комплексной плоскости $z = x + iy$ для двумерного течения в анизотропном неоднородном тонком слое проводимости $P = HK$ (толщины H и проницаемости K) с плоским основанием. Течение жидкостей вязкостей μ_1 и μ_2, плотностей ρ_1 и ρ_2, занимающих области D_1 и D_2, описываем во всей области $D = D_1 \cup D_2$ плоскости z обобщённым потенциалом $\varphi(z,t)$ и функцией тока $\psi(z,t)$[1]. Функции $\varphi(z,t)$ и $\psi(z,t)$ всюду в области D за исключением их изолированных особых точек удовлетворяют системе уравнений (2.1.1).

На границе, моделируемой в каждый момент времени $t \geqslant 0$ гладкой кривой Γ_t, выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкостей (1.3.26), которые запишем (орт нормали к Γ_t направлен внутрь

---

[1]Функции φ и ψ зависят от $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и времени t. Однако для краткости пишем их как функции z и t.

области D_1):

$$\begin{aligned} &\mu_1\varphi^+(z,t) - \mu_2\varphi^-(z,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z,t), \\ &\psi^+(z,t) = \psi^-(z,t), \quad z \in \Gamma_t. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Видно, что на границе Γ_t обобщённый потенциал терпит разрыв, а функция тока непрерывна.

Если область D имеет сингулярную границу $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, то на ней имеем аналогичные (1.3.8) и (1.3.13) условия

$$\varphi^+(z,t) = 0, \quad z \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(z,t) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \tag{6.1.2}$$

Если обощённый потенциал $\varphi(z,t)$ (а значит и сопряжённая ему функция тока $\psi(z,t)$) не имеет сингулярностей в бесконечности, то аналогично (1.3.15) имеем условия регулярности для $\varphi(z,t)$:

$$\varphi(z,t) = O(|z|^{-1}), \quad |P(z)\cdot\nabla\varphi(z,t)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \tag{6.1.3}$$

где $P(z) = H(z)K(z)$ — тензор проводимости слоя в плоскости z.

Если функция $\varphi(z,t)$ (а значит и $\psi(z,t)$) имеет сингулярность в бесконечности, то представим её в виде

$$\varphi(z,t) = \varphi_0(z,t) + \Phi(z,t),$$

где $\varphi_0(z,t)$ имеет сингулярность в бесконечности, а $\Phi(z,t)$ — регулярная в бесконечности функция, для которой потребуем выполнения условий вида (6.1.3)

Положение границы раздела жидкостей Γ_t в каждый момент времени $t \geqslant 0$ описываем в плоскости z параметрическими уравнениями (s — параметр):

$$z = z(t,s) \quad (x = x(t,s),\ y = y(t,s)), \quad z \in \Gamma_t. \tag{6.1.4}$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ положение границы задано ($\Gamma_t = \Gamma_0$):

$$z_0 = z(0,s) \quad (x_0 = x(0,s),\ y_0 = y(0,s)), \quad z_0 \in \Gamma_0. \tag{6.1.5}$$

Согласно формуле (1.3.27) имеем дифференциальные уравнения границы Γ_t (напоминаем, орт нормали Γ_t направлен внутрь области D_1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x^+(x,y,t) + v_x^-(x,y,t)}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v_y^+(x,y,t) + v_y^-(x,y,t)}{2}, \quad (x,y) \in \Gamma_t. \tag{6.1.6}$$

Здесь $v_x^{\pm}(x,y,t)$ и $v_y^{\pm}(x,y,t)$ — предельные значения составляющих скорости $v_x(x,y,t)$ и $v_y(x,y,t)$, Причём эти составляющие вектора скорости выражаются через $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ формулами (2.1.1). Уравнения (6.1.6) запишем в комплексной форме

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v^+(z,t) + v^-(z,t)}{2}, \quad z \in \Gamma_t, \tag{6.1.7}$$

где $v^{\pm}(z,t)$ предельные значения комплексной скорости $v(z,t) = v_x(z,t) + iv_y(z,t)$. Скорость $v(z,t)$ выражается через $\varphi(z,t)$ и $\psi(z,t)$ формулами (2.1.12).

Таким образом, задача эволюции двумерной границы раздела жидкостей Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Заданы тензор проводимости слоя $P = HK$, потенциал массовой силы Π, вязкости и плотности жидкостей, начальное положение границы Γ_0. Найти положение границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$. Исследование задачи состоит в интегрировании системы уравнений (2.1.12), (6.1.7) (или (2.1.1), (6.1.6)) с учётом условий (6.1.1)–(6.1.3) и (6.1.5)

Формулировка задачи эволюции границы на вспомогательной плоскости

Чтобы решить поставленную задачу эволюции границы Γ_t, воспользуемся указанным в § 2.5 методом решения двумерных граничных задач и сформулируем её на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Используя гомеоморфизм $\zeta(z)$ уравнения Бельтрами (2.3.10), граничные условия (6.1.1), (6.1.2) запишем в плоскости ζ (Γ_t', $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$ — гладкие кривые — образы границ Γ_t, $\sigma = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$):

$$\begin{aligned} \mu_1\varphi^+(\zeta,t) - \mu_2\varphi^-(\zeta,t) &= (\rho_2 - \rho_1)\Pi(\zeta,t), \\ \psi^+(\zeta,t) &= \psi^-(\zeta,t), \quad \zeta \in \Gamma_t', \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

$$\varphi^+(\zeta,t) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{01}'; \qquad \psi^+(\zeta,t) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{02}'. \tag{6.1.9}$$

Так как полагаем, что для гомеоморфизма $\zeta(z)$ бесконечно удалённая точка неподвижна (точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = \infty$), то в случае отсутствия сингулярностей в этой точке запишем аналогичные (6.1.3) условия

$$\varphi(\zeta,t) = O(|\zeta|^{-1}), \quad |P'(\zeta) \cdot \nabla\varphi(\zeta,t)| = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty, \tag{6.1.10}$$

где $P'(\zeta) = H(\zeta)K'(\zeta)$ — комплексная проводимость слоя в плоскости ζ ($K'(\zeta) = \sqrt{D[K_s(\zeta)]} - i\sqrt{D[K_a(\zeta)]}$). Если в бесконечности имеются заданные сингулярности течения, то представим $\varphi(\zeta,t) = \varphi_0(\zeta,t) + \Phi(\zeta,t)$, где $\varphi_0(\zeta,t)$ имеет сингулярности в бесконечности, а $\Phi(\zeta,t)$ — функция, удовлетворяющая условиям вида (6.1.10).

Аналогично тому, как это сделано в § 5.1 для стационарных течений, сформулируем граничные условия для возмущений в рассматриваемом нестационарном случае. Учтём заданные источники (стоки) течения и введём на плоскости ζ комплексный потенциал $W_0(\zeta,t)$ ($\varphi_0(\zeta,t)$ и $\psi_0(\zeta,t)$ — обобщённый потенциал и функция тока)

$$W_0(\zeta,t) = \varphi(\zeta,t) + i\frac{\psi_0(\zeta,t)}{P'(\zeta)}. \tag{6.1.11}$$

Он описывает в плоскости ζ течение жидкости вязкости $\mu = 1$ и плотности $\rho = 1$ в слое проводимости $P'(\zeta)$ (граница Γ'_t отсутствует). Источники (стоки) течения моделируем изолированными особыми точками (сингулярностями) функций $\varphi_0(\zeta,t)$, $\psi_0(\zeta,t)$ (и, следовательно, $W_0(\zeta,t)$), которые располагаются произвольно в плоскости ζ, в том числе в бесконечно удалённой точке.

Течение в области $D' = D'_1 \cup D'_2$ с границей раздела Γ'_t, а также, вообще говоря, при наличии линии σ'_0, описываем комплексным потенциалом ($\varphi(\zeta,t)$ и $\psi(\zeta,t)$ — обобщённый потенциал функция тока):

$$W(\zeta,t) = \varphi(\zeta,t) + i\frac{\psi(\zeta,t)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in D'. \tag{6.1.12}$$

Комплексный потенциал $W(\zeta,t)$ (функции $\varphi(\zeta,t)$ и $\psi(\zeta,t)$) представим в виде

$$W(\zeta,t) = W_0(\zeta,t) + W_*(\zeta,t), \quad \zeta \in D' \tag{6.1.13}$$

$$(\varphi(\zeta,t) = \varphi_0(\zeta,t) + \varphi_*(\zeta,t), \quad \psi(\zeta,t) = \psi_0(\zeta,t) + \psi_*(\zeta,t)).$$

Здесь

$$W_*(\zeta,t) = \varphi_*(\zeta,t) + i\frac{\psi_*(\zeta,t)}{P'(\zeta)} \tag{6.1.14}$$

комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta,t)$ и $\psi_*(\zeta,t)$ — обобщённый потенциал и функция тока) возмущений, обусловленных различием физических свойств (вязкости и плотности) жидкостей.

Используя формулы (6.1.12)–(6.1.14) и выражения (2.3.21) обобщённого потенциала и функции тока через комплексный потенциал в нестационарном случае, запишем условия (6.1.8)–(6.1.10) для комплексного потенциала $W_*(\zeta,t)$ (функций $\varphi_*(\zeta,t)$, $\psi_*(\zeta,t)$) возмущений. Условия (6.1.8) принимают вид

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\bigl\{P'(\zeta)[\mu_1 W_*^+(\zeta,t)-\mu_2 W_*^-(\zeta,t)-\\ -(\mu_2-\mu_1)W_0(\zeta,t)-(\rho_2-\rho_1)\Pi(\zeta,t)]\bigr\}=0,\\ \operatorname{Im}[W_*^+(\zeta,t)-W_*^-(\zeta,t)]=0,\quad \zeta\in\Gamma_t'\end{gathered}\tag{6.1.15}$$

$$\left(\begin{gathered}\mu_1\varphi_*^+(\zeta,t)-\mu_2\varphi_*^-(\zeta,t)=(\mu_2-\mu_1)\varphi_0(\zeta,t)+(\rho_2-\rho_1)\Pi(\zeta,t),\\ \psi_*^+(\zeta,t)=\psi_*^-(\zeta,t)\end{gathered}\right).$$

Видно, что обобщённый потенциал терпит разрыв, а функция тока непрерывна на Γ_t'.

Условия для комплексного потенциала (6.1.15) содержат предельные значения $W_*^{\pm}(\zeta,t)$ и $\overline{W}_*^{\pm}(\zeta,t)$ на Γ_t'. Исключая из условий (6.1.15), например, $\overline{W}_*^{-}(\zeta,t)$, имеем условие

$$\begin{gathered}W_*^+(\zeta,t)-\lambda(\zeta)\overline{W}_*^+(\zeta,t)-\frac{(1+\lambda_\mu)[1-\lambda(\zeta)]}{1-\lambda_\mu}W_*^-(\zeta,t)=\\ =\frac{2\lambda(\zeta)}{\lambda_\mu P(\zeta)}\{\lambda_\mu\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)]+\alpha\Pi(\zeta,t)\operatorname{Re}P'(\zeta)\},\quad \zeta\in\Gamma_t',\end{gathered}\tag{6.1.16}$$

где

$$\lambda(\zeta)=\frac{(\mu_2-\mu_1)P'(\zeta)}{\mu_1P'(\zeta)+\mu_2\overline{P}'(\zeta)}=\frac{\lambda_\mu\left[\sqrt{D_s(\zeta)}+i\sqrt{D_a(\zeta)}\right]}{\sqrt{D_s(\zeta)}-i\lambda_\mu\sqrt{D_a(\zeta)}},$$

$$\alpha=\frac{\rho_2-\rho_1}{\mu_2+\mu_1}=\frac{\rho_1\lambda_\rho(1-\lambda_\mu)}{\mu_1(1-\lambda_\rho)},\quad \lambda_\mu=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1},\quad \lambda_\rho=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1},$$

$$\lambda_\mu,\lambda_\rho\in(-1,1),\ \ D_s(\zeta)\equiv D[K_s(\zeta)],\ \ D_a(\zeta)\equiv D[K_a(\zeta)].$$

Учитывая, что $D=D_s+D_a$ имеем на Γ_t':

$$|\lambda(\zeta)|^2=\frac{\lambda_\mu^2[D_s(\zeta)+D_a(\zeta)]}{D_s(\zeta)+\lambda_\mu^2D_a(\zeta)}=\frac{\lambda_\mu^2D(\zeta)}{\lambda_\mu^2D(\zeta)+(1-\lambda_\mu^2)D_s(\zeta)}\quad(|\lambda(\zeta)|<1).$$

Полагаем, что функции $\varphi_0(\zeta,t)$ и $\psi_0(\zeta,t)$ удовлетворяют тем же условиям, что функции $\varphi(\zeta,t)$ и $\psi(\zeta,t)$ на границе $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$. Тогда условия (6.1.9) для возмущений принимают вид

$$\left[\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0,\ \zeta\in\sigma_{01}';\quad \left[\frac{|P'(\zeta)|^2\operatorname{Im}W_*(\zeta,t)}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0,\ \zeta\in\sigma_{02}' \tag{6.1.17}$$
$$(\varphi_*^+(\zeta,t)=0,\zeta\in\sigma_{01}';\quad \psi_*^+(\zeta,t)=0,\zeta\in\sigma_{02}').$$

Если область D' имеет бесконечно удалённую точку, то комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta,t)$ не содержит там особых точек (заданные особые точки течения входят в $W_0(\zeta,t)$). Поэтому для $W_*(\zeta,t)$ (обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta,t)$) потребуем выполнение условий регулярности (аналогичных условиям (6.1.10))

$$\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P(\zeta)} = O(|\zeta|^{-1}),\quad \left|P'(\zeta)\cdot\nabla\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right| = O\left(|\zeta|^{-2}\right)$$
$$\big(\varphi_*(\zeta,t)=O(|\zeta|^{-1}),\quad |P'(\zeta)\cdot\nabla\varphi_*(\zeta,t)| = O(|\zeta|^{-2})\big)\quad \text{при}\quad |\zeta|\to\infty. \tag{6.1.18}$$

Условия (6.1.18) означают затухание возмущений на бесконечности: обобщённый потенциал φ_* и поток скорости $\vec{v}_* = K'\cdot\nabla\varphi_*$ возмущений обращаются в нуль на бесконечности.

Используя гомеоморфизм $\zeta(z)$, запишем в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ уравнение границы раздела жидкостей. Образами границ Γ_t и Γ_0 будут согласно формулам (6.1.4) и (6.1.5) границы Γ_t' и Γ_0' в плоскости ζ, уравнения которых

$$\zeta=\zeta(t,s)\qquad (\xi=\xi(t,s),\quad \eta=\eta(t,s)),\quad \zeta\in\Gamma_t', \tag{6.1.19}$$

$$\zeta_0=\zeta(0,s)\qquad (\xi_0=\xi(0,s),\quad \eta_0=\eta(0,s)),\quad \zeta_0\in\Gamma_0'. \tag{6.1.20}$$

Запишем теперь дифференциальное уравнение (6.1.7) границы Γ_t в плоскости ζ. Используя гомеоморфизм $z(\zeta)$, обратный $\zeta(z)$, находим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{d\bar\zeta}{dt}$$

и уравнение (6.1.7) запишем

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial\bar\zeta}\frac{d\bar\zeta}{dt} = v'(z,t),\quad z=z(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma_t',$$

где
$$v'(z,t) = \frac{v^+(z,t) + v^-(z,t)}{2}.$$
Присоединяя к этому уравнению комплексно сопряжённое ему уравнение
$$\frac{\partial \bar z}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial \bar z}{\partial \bar\zeta}\frac{d\bar\zeta}{dt} = \bar v'(z,t), \quad z = z(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'_t,$$
находим
$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\zeta}{dt} = v'(z,t)\frac{\partial \bar z}{\partial \bar\zeta} - \bar v'(z,t)\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}, \quad z = z(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'_t, \tag{6.1.21}$$
где $\mathcal{J}'(\zeta)$ — якобиан гомеоморфизма $z = z(\zeta)$ $\left(\mathcal{J}'(\zeta) = \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right|^2\right)$.

Якобианы $\mathcal{J}(z)$ и $\mathcal{J}'(\zeta)$ прямого $\zeta(z)$ и обратного $z(\zeta)$ гомеоморфизмов связаны согласно формуле (2.3.6) равенством $\mathcal{J}(z)\mathcal{J}'(\zeta) = 1$.

Выразим в уравнении (6.1.21) скорость $v'(z,t)$ через предельные значения скорости $v^{\pm}(\zeta,t)$ в плоскости ζ, используя формулу (2.3.25′), которая имеет место также в нестационарном случае поскольку время t — параметр. Учитывая, что на границе Γ_t:
$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^{\pm} = \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right)^{\pm} = \frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}, \quad \zeta \in \Gamma'_t,$$
имеем
$$v'(z,t) = \frac{1}{\mathcal{J}'(\zeta)}\left[v'(\zeta,t)\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \bar v'(\zeta,t)\frac{\partial z}{\partial \bar\zeta}\right], \quad z = z(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'_t,$$
где
$$v'(\zeta,t) = \frac{v^+(\zeta,t) + v^-(\zeta,t)}{2}.$$
Тогда с учётом выражения якобиана $\mathcal{J}'(\zeta)$ дифференциальное уравнение границы Γ'_t запишем
$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\zeta}{dt} = \frac{v^+(\zeta,t) + v^-(\zeta,t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t. \tag{6.1.22}$$
Это есть дифференциальное уравнение границы раздела жидкостей в плоскости ζ.

Представим скорость $v(\zeta, t)$ согласно формуле (6.1.13) в виде

$$v(\zeta, t) = v_0(\zeta, t) + v_*(\zeta, t), \tag{6.1.23}$$

где $v_0(\zeta, t)$ и $v_*(\zeta, t)$ — скорости невозмущённого и возмущённого течений, которые выражаются через функции $\varphi_0(\zeta, t)$, $\psi(\zeta, t)$ и $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$ формулой вида (2.3.26), имеющей место также в нестационарном случае. Учитывая формулу (6.1.23) и $v_0^{\pm}(\zeta, t) \equiv v_0(\zeta, t)$, $\zeta \in \Gamma_t'$, уравнение (6.1.22) запишем

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\zeta}{dt} = v_0(\zeta, t) + \frac{v_*^+(\zeta, t) + v_*^-(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma_t'. \tag{6.1.24}$$

Здесь

$$v_0(\zeta, t) = 2\left[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}\right]\frac{\partial\varphi_0(\zeta, t)}{\partial\bar{\zeta}} = -\frac{i2}{H}\frac{\partial\psi_0(\zeta, t)}{\partial\bar{\zeta}},$$

$$v_*^{\pm}(\zeta, t) = 2\left[\sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}\right]\left(\frac{\partial\varphi_*(\zeta, t)}{\partial\bar{\zeta}}\right)^{\pm} = -\frac{i2}{H}\left(\frac{\partial\psi_*(\zeta, t)}{\partial\bar{\zeta}}\right)^{\pm}.$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится в плоскости ζ к нахождению комплексного потенциала возмущений $W_*(\zeta, t)$ (функций $\varphi_*(\zeta, t)$, $\psi_*(\zeta, t)$) и её уравнения движения (6.1.19). Чтобы решить эту задачу, необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.3.22), (6.1.24) при условиях (6.1.16)–(6.1.18) и (6.1.20). По найденному уравнению границы (6.1.19) в плоскости ζ определяем её положение при $t > 0$ в физической плоскости z, используя преобразование $z = z(\zeta)$, обратное гомеоморфизму $\zeta(z)$. Получаем уравнение границы Γ_t в плоскости z: $z = z[\zeta(t, s)] = z(t, s)$, $t > 0$.

Интегральное и дифференциальное уравнения эволюции границы

Для решения задачи эволюции границы Γ_t воспользуемся обобщённым интегралом типа Коши. Учтём, что для комплексного потенциала $W_*(\zeta, t)$ условия (6.1.15) (или (6.1.16)) выражает скачок обобщённого потенциала и непрерывность функции тока возмущений на границе Γ_t. Поэтому полагая, что в любой момент времени $t \geqslant 0$ граница Γ_t гладкая кривая и

$f(\tau, t)$ вещественная функция класса Гёльдера:[1]

$$|f(\tau_1, t) - f(\tau_2, t)| < A|\tau_1 - \tau_2|^\mu \quad (\mu \in (0, 1], \quad A > 0) \quad \text{при} \quad t > 0,$$

запишем согласно формулам (4.4.22) комплексный потенциал $W_*(\zeta, t)$ и его предельные значения

$$W_*(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta, t) f(\tau, t) dl_\tau, \quad \zeta \notin \Gamma'_t, \tag{6.1.25}$$

$$W_*^\pm(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta, t) f(\tau, t) dl_\tau \pm \frac{f(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t, \tag{6.1.26}$$

где

$$\Omega(\zeta, t) = -P'_1(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}.$$

Интеграл в формуле (6.1.26) понимается в смысле главного значения по Коши.

Представление комплексного потенциала $W_*(\zeta, t)$ в виде (6.1.25) позволяет сразу удовлетворить его условиям на σ'_0 (6.1.17), полагая, что им удовлетворяет фундаментальное решение $F_1(\zeta, t)$ или $F_2(\zeta, t)$, а также условиям в бесконечности (6.1.18) поскольку согласно условию (4.3.3) $W_*(\zeta, t) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$. Подставим предельные значения (6.1.26) в условия (6.1.15). Второе из них тождественно удовлетворяется, а из первого получаем для $f(\zeta, t)$ интегральное уравнение[2]

$$f(\zeta, t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma'_t} \mathcal{K}(\zeta, \tau) f(\zeta, t) dl_\tau = 2[\lambda_\mu \varphi_0(\zeta, t) + \alpha \Pi(\zeta, t)], \quad \zeta \in \Gamma'_t. \tag{6.1.27}$$

$$\left(\alpha = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{\rho_1 \lambda_\rho (1 - \lambda_\mu)}{\mu_1 (1 - \lambda_\rho)}, \lambda_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \lambda_\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \lambda_\mu, \lambda_\rho \in (-1, 1)\right).$$

Здесь ядро $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ выражается через функции $\Phi_1(\zeta, \tau)$ и $\Phi_2(\zeta, \tau)$ (входящие в решения $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$) формулой

$$\mathcal{K}(\zeta, \tau) = -P'_1(\tau\frac{\partial \Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau)\frac{\partial \Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial \Phi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}.$$

[1] Далее при нахождении предельных значений скорости дополнительно потребуем, чтобы производная $\partial f(\tau, t)/\partial l_\tau$, $\tau \in \Gamma'_t$ также удовлетворяла условию Гёльдера.

[2] Прийдём к тому же самому интегральному уравнению (6.1.27), если подставим предельные значения (6.1.26) в условие (6.1.16).

Используя комплексный потенциал возмущений (6.1.25), найдём комплексную скорость возмущений. В соответствии с формулой (2.5.11) имеем комплексно сопряжённую приведённую скорость возмущений

$$\overline{V}_*(\zeta, t) = \frac{P'(\zeta)}{P_1'(\zeta)} \frac{d_\Sigma W_*(\zeta, t)}{d\zeta},$$

то есть

$$\overline{V}_*(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma_t'} \omega(\zeta, t) f(\tau, t) dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{6.1.28}$$

Здесь

$$\omega(\zeta, \tau) = P_2'(\tau) \frac{\partial \overline{V}_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} - P_1'(\tau) \frac{\partial \overline{V}_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} = \frac{\partial \overline{V}_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}, \tag{6.1.28$'$}$$

$\overline{V}_1(\zeta, \tau)$ и $\overline{V}_2(\zeta, \tau)$ — первое и второе главные решения уравнения (2.3.33), которые связаны с фундаментальными решениями $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$ равенствами (3.1.17). Так как согласно формуле (2.3.26) скорость $v_*(\zeta, t)$ и приведённая скорость $V_*(\zeta, t)$ связаны равенством

$$v_*(\zeta, t) = K'(\zeta) V_*(\zeta, t) \quad \left(K'(\zeta) = \sqrt{D[K_s(\zeta)]} - i\sqrt{D[K_a(\zeta)]}) \right),$$

то, учитывая формулы (6.1.28), находим

$$\overline{v}_*(\zeta, t) = \overline{K}'(\zeta) \overline{V}_*(\zeta, t) = -\overline{K}'(\zeta) \int\limits_{\Gamma_t'} \omega(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{6.1.29}$$

Скорость (6.1.29) представим относительно $\overline{V}_2(\zeta, \tau)$ следующим образом

$$\overline{v}_*(\zeta, t) = \overline{K}'(\zeta) \left\{ \int\limits_{\Gamma_t'} \overline{V}_2(\zeta, \tau) \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial l_\tau} dl_\tau - \int\limits_{\Gamma_t'} \frac{\partial}{\partial l_\tau} \left[\overline{V}_2(\zeta, \tau) f(\tau, t) \right] dl_\tau \right\}, \ \zeta \in D'.$$

Подынтегральная функция во втором интеграле непрерывно дифференцируемая. Полагая контур Γ_t' замкнутым, находим, что это интеграл равен нулю. Тогда имеем

$$\overline{v}_*(\zeta, t) = \overline{K}'(\zeta) \overline{V}_*(\zeta, t) = \overline{K}'(\zeta) \int\limits_{\Gamma_t'} \overline{V}_2(\zeta, \tau) \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial l_\tau} dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{6.1.30}$$

Учитывая скорость (6.1.30), уравнение границы Γ'_t (6.1.24) запишем

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \overline{v}_0(\zeta,t) + \frac{\overline{K}'(\zeta)}{2}\left[\overline{V}^{+}_{*}(\zeta,t) + \overline{V}^{-}_{*}(\zeta,t)\right], \quad \zeta \in \Gamma'_t, \tag{6.1.31}$$

где $\overline{V}^{\pm}_{*}(\zeta,t)$ — предельные значения скорости

$$\overline{V}_{*}(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau. \tag{6.1.32}$$

Для нахождения предельных значений скорости (6.1.32) воспользуемся тем, что согласно условию (6.1.15) функция тока $\psi_*(\zeta,t)$ непрерывна на границе Γ'_t. Это означает непрерывность потока жидкости на границе Γ'_t и, следовательно, можно применить в этом случае формулы (4.4.47). Полагая в них $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \partial f(\tau,t)/\partial l_\tau$, имеем

$$\overline{V}^{\pm}_{*}(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau \pm \frac{P'(\zeta)}{2P'_1(\zeta)}\frac{\partial f(\zeta,t)}{\partial l_\tau}e^{-i\theta_\zeta}, \quad \zeta \in \Gamma'_t,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя $\overline{V}^{\pm}_{*}$ в уравнение (6.1.31), находим дифференциальное уравнение границы в комплексной форме

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \overline{v}_0(\zeta,t) + \overline{K}'(\zeta)\int\limits_{\Gamma'_t} \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau, \quad \zeta \in \Gamma'_t. \tag{6.1.33}$$

Учитывая $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, $\overline{K}' = \sqrt{D(K_s)} + i\sqrt{D(K_a)}$ и $\overline{V}_2(\zeta,\tau) = V_{2\xi}(\zeta,\tau) - iV_{2\eta}(\zeta,\tau)$, выделим в уравнениии (6.1.33) действительную и мнимую части. Имеем уравнения

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\xi}{dt} = v_{0\xi}(\zeta,t) + \sqrt{D[K_s(\zeta)]}\int\limits_{\Gamma'_t} V_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau + \\ + \sqrt{D[K_a(\zeta)]}\int\limits_{\Gamma'_t} V_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau,$$

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\eta}{dt} = v_{0\eta}(\zeta,t) - \sqrt{D[K_a(\zeta)]}\int\limits_{\Gamma'_t} V_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau + \\ + \sqrt{D[K_s(\zeta)]}\int\limits_{\Gamma'_t} V_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Gamma'_t. \quad (6.1.34)$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ'_t сводится к решению системы уравнений (6.1.27) и (6.1.34) при условиях (6.1.20). Решая эту систему уравнений, находим в каждый момент времени $t > 0$ функцию $f(\tau, t)$, а значит уравнение границы Γ'_t (6.1.19) и (если это необходимо), на основании формул (6.1.13), (6.1.25) и (6.1.23), (6.1.30) — комплексный потенциал

$$W(\zeta,t) = W_0(\zeta,t) - \int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta,t) f(\tau,t)dl_\tau, \quad \zeta \in D' \quad (6.1.35)$$

и комплексную скорость

$$\overline{v}(\zeta,t) = \overline{v}_0(\zeta,t) + \overline{K}'(\zeta)\int\limits_{\Gamma'_t} \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \quad (6.1.36)$$

Тогда используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$, можно найти в плоскости z положение границы раздела жидкостей: $z = z(\zeta(t,s))$, комплексный потенциал $W(z,t) = W[\zeta(z),t]$ и скорость $v(z,t) = v[z(\zeta),t]$ течения.

Частные случаи задачи эволюции границы раздела жидкостей

Рассмотрим частные случаи задачи эволюции границы раздела жидкостей. В случае напорной фильтрации силы гидродинамического давления велики по сравнению с массовыми силами. Поэтому массовыми силами будем пренебрегать. Тогда интегральное уравнение (6.1.27) запишем

$$f(\zeta,t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma'_t} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau,t)dl_\tau = 2\lambda_\mu \varphi_0(\zeta,t), \quad \zeta \in \Gamma'_t.$$

Видно, что в этом случае различие плотностей жидкостей, характеризуемое параметром α, не влияет на течение (продвижение границы Γ_t).

В случае безнапорной фильтрации, определяющим течение является массовая сила (например, сила тяжести[1]). Полагая, что источники (стоки) течения отсутствуют ($\varphi_0(\zeta,t)=0$), уравнение (6.1.27) запишем

$$f(\zeta,t)-2\lambda_\mu\int\limits_{\Gamma'_t}\mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau=2\alpha\Pi(\zeta,t),\quad \zeta\in\Gamma'_t.$$

Отсюда, когда различием вязкостей жидкостей можно пренебречь ($\mu_1=\mu_2=\mu$, $\lambda_\mu=0$), а их плотности разные ($\rho_1\neq\rho_2$, $\alpha=(\rho_2-\rho_1)/2\mu$), имеем выражение функции $f(\zeta,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(\zeta,t)/\mu$, $\zeta\in\Gamma'_t$, которое следует положить в дифференциальных уравнениях границы Γ'_t (6.1.34).

Пусть вязкости и плотности жидкостей сильно различаются, например, $\mu_1\gg\mu_2$ и $\rho_1\gg\rho_2$. Полагаем, что источники (стоки) течения (особые точки комплексного потенциала $W_0(\zeta,t)$) расположены в области, занятой первой жидкостью. Совершим в уравнении (6.1.27) предельный переход $\lambda_\mu\to-1$, $\alpha\to-1/\nu_1$, $\nu_1=\mu_1/\rho_1$ — кинематическая вязкость первой жидкости. В пределе получаем уравнение

$$f(\zeta,t)+2\int\limits_{\Gamma'_t}\mathcal{K}(\zeta,t)f(\tau,t)dl_\tau=-2\left[\varphi_0(\zeta,t)+\frac{\Pi(\zeta,t)}{\nu_1}\right],\quad \zeta\in\Gamma'_t.$$

В рассмотренных выше случаях дифференциальные уравнения границы Γ'_t сохраняет свой прежний вид (6.1.33) или (6.1.34).

Эволюция границы раздела жидкостей зависит от проводимости слоя. В частности, если анизотропный слой однородный, его проводимость $P'=HK'$ ($H=1$, $K'=\sqrt{D(K_s)}-i\sqrt{D(K_a)}$) — комплексная постоянная, то согласно формулам (3.2.3) и (3.2.5) имеем фундаментальное решение $F_2(\zeta,\tau)$ (функцию $\Phi_2(\zeta,\tau)$):

$$F_2(\zeta,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\zeta-\tau}\quad\left(\Phi_2(\zeta,\tau)=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}}\ln\frac{1}{|\zeta-\tau|}+\arg(\zeta-\tau)\right]\right).$$

В этом случае на основании формул

$$\Omega(\zeta,\tau)=\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},\quad \overline{V}_2(\zeta,\tau)=\frac{2K'}{K'+\overline{K}'}\frac{dF_2(\zeta,\tau)}{d\zeta}$$

[1] В этом случае потенциал $\Pi(\zeta)=-\vec{g}\cdot\vec{\rho}+\mathrm{const}$ ($\vec{g}$ — ускорение свободного падения, $\vec{\rho}$ — радиус-вектор точки $\zeta=(\xi,\eta)$).

имеем

$$\Omega(\zeta,\tau)=\frac{e^{i\theta_\tau}}{2\pi i(\zeta-\tau)},\quad \overline{V}_2(\zeta,\tau)=-\frac{K'}{\pi i(K'+\overline{K}')(\zeta-\tau)},\tag{6.1.37}$$

а ядро $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ принимает вид

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial l_\tau}\left[\frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}}\ln|\zeta-\tau|-\arg(\zeta-\tau)\right].\tag{6.1.38}$$

Учитывая, что преобразование (2.4.13) имеет якобиан $\mathcal{J}=1-|\mu|^2$ ($\mathcal{J}'=1/\mathcal{J}$), дифференциальное уравнение границы Γ'_t (6.1.33) запишем

$$\frac{d\bar\zeta}{dt}=(1-|\mu|^2)\left[\overline{v}_0(\zeta,t)-\frac{D(K)}{2\pi i\sqrt{D(K_s)}}\int\limits_{\Gamma'_t}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}\frac{dl_\tau}{\zeta-\tau}\right],\quad \zeta\in\Gamma'_t,$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dt}=(1-|\mu|^2)\left[v_{0\xi}(\zeta,t)+\frac{D(K)}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\int\limits_{\Gamma'_t}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}\frac{\sin[\arg(\zeta-\tau)]dl_\tau}{|\zeta-\tau|}\right],$$

$$\frac{d\eta}{dt}=(1-|\mu|^2)\left[v_{0\eta}(\zeta,t)-\frac{D(K)}{2\pi\sqrt{D(K_s)}}\int\limits_{\Gamma'_t}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}\frac{\cos[\arg(\zeta-\tau)]dl_\tau}{|\zeta-\tau|}\right],$$

$$\zeta\in\Gamma'_t.\tag{6.1.39}$$

Итак, в случае однородного анизотропного слоя исследование эволюции границы Γ_t сводится к решению системы интегрального уравнения (6.1.27) (или указанных для него частных случаев) с ядром (6.1.38) и дифференциальных уравнений (6.1.39) при условиях (6.1.20), Комплексный потенциал и скорость течения находим согласно (6.1.35) и (6.1.36) при учёте (6.1.37) из формул

$$W(\zeta,t)=W_0(\zeta,t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_t}\frac{f(\tau,t)d\tau}{\tau-\zeta},\quad \zeta\in D',$$

$$\overline{v}(\zeta,t)=\overline{v}_0(\zeta,t)+\frac{D(K)}{2\pi i\sqrt{D(K_s)}}\int\limits_{\Gamma'_t}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}\frac{dl_\tau}{\tau-\zeta},\quad \zeta\in D'.$$

§ 6.2. Задача эволюции границы раздела жидкостей для поля скоростей

Постановка задачи эволюции границы для поля скоростей на вспомогательной плоскости

В том случае, когда необходимо изучить только движение границы раздела жидкостей, целесообразно поставить задачу эволюции границы для поля скоростей. Сформулируем задачу эволюции границы Γ'_t на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Двумерное нестационарное течение в анизотропном неоднородном слое проводимости $P' = HK'$ $(K' = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)})$ описываем вектором приведённой скорости $\vec{V} = (V_\xi, V_\eta)$, который согласно системе (2.3.32) удовлетворяет всюду в области D' за исключением особых точек $\vec{V}$ уравнениям

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} = 0, \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sqrt{D(P_a)}V_\xi + \sqrt{D(P_s)}V_\eta\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\sqrt{D(P_s)}V_\eta - \sqrt{D(P_a)}V_\xi\right] = 0.$$

Полагаем, что слой кусочно-анизотропный и разделён гладкой линией Γ' на области D'_1 и D'_2 $(D' = D'_1 \cup D'_2)$, проводимости слоя в которых $P'_1(\zeta)$ и $P'_2(\zeta)$, причём $P'_\nu = k_\nu P'(\zeta)$ $(P'(\zeta) = H(\zeta)K'(\zeta)$, $k_\nu > 0$ — константы, $\nu = 1, 2)$. Пусть в области D' имеется изменяющаяся с течением времени t область D'_t, занятая жидкостью вязкости μ_2 и плотности ρ_2, которая ограничена замкнутой гладкой линией Γ'_t. Вне этой области — жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1. Как и прежде, принимаем, что при фильтрации одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение). Линии Γ' и Γ'_t могут взаимно пересекаться, а также пересекаться с сингулярной линией σ'_0 $(\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02})$.

На границах Γ' и Γ'_t выполняются условия непрерывности давления (действием капиллярных сил на Γ'_t пренебрегаем) и расхода жидкостей. Эти условия следуют из условий (1.3.19) (в нестационарном случае) и (1.3.26) на границах Γ и Γ_t плоскости z, если в последних выполнить гомеоморфное преобразование $z = z(\zeta)$. В результате имеем (Γ' и Γ'_t — образы границ Γ и Γ_t):

$$\varphi^+(\zeta, t) = \varphi^-(\zeta, t), \;\; \psi^+(\zeta, t) = \psi^-(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma', \tag{6.2.2}$$

$$\mu_1\varphi^+(\zeta,t)-\mu_2\varphi^-(\zeta,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(\zeta,t),\;\; \psi^+(\zeta,t)=\psi^-(\zeta,t),\quad \zeta\in\Gamma_t'. \tag{6.2.3}$$

Знаками «+» («−») отмечены предельные выражения функций при подходе к границам Γ' и Γ_t' со стороны (противоположной стороны) ортов нормалей $\vec{n}_\zeta$ к ним. Орт $\vec{n}_\zeta\in\Gamma'$ направлен в область D_1', а $\vec{n}_\zeta\in\Gamma_t'$ в область, занятую первой жидкостью вязкости μ_1 и плотности ρ_1.

Условия (6.2.2), (6.2.3), а также (6.1.9) запишем для приведённой скорости $\vec{V}(\zeta,t)$. Для этого продифференцируем эти условия по касательной к границе $\Gamma'\cup\Gamma_t'\cup\sigma_0'$ и учтём непрерывность и конечность толщины слоя $H(\zeta)$ на ней[1], а также равенства

$$V_l(\zeta,t)=\frac{\partial\varphi(\zeta,t)}{\partial l_\zeta},\quad H(\zeta)v_n(\zeta,t)=\Big[P'(\zeta)\cdot\vec{V}(\zeta,t)\Big]_n=\frac{\partial\psi(\zeta,t)}{\partial l_\zeta},$$
$$P_\nu'(\zeta)=k_\nu P'(\zeta),\quad \nu=1,2.$$

Здесь $V_l(\zeta,t)$ и $v_n(\zeta,t)$ — касательная и нормальная составляющие векторов приведённой скорости $\vec{V}(\zeta,t)$ и скорости $\vec{v}(\zeta,t)$ к границе $\Gamma'\cup\Gamma_t'\cup\sigma_0'$, $P'(\zeta)=H(\zeta)K'(\zeta)$. Тогда находим ($\vec{l}_\zeta$ и $\vec{n}_\zeta$ — орты касательной и нормали к границе $\Gamma'\cup\Gamma_t'\cup\sigma_0'$)[2]:

$$\begin{gathered}\Big[\vec{V}^+(\zeta,t)-\vec{V}^-(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{l}_\zeta=0,\\ \Big[P'(\zeta)\cdot(k_1\vec{V}^+(\zeta,t)-k_2\vec{V}^-(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta=0,\quad \zeta\in\Gamma',\end{gathered} \tag{6.2.4}$$

$$\begin{gathered}\Big[\mu_1\vec{V}^+(\zeta,t)-\mu_2\vec{V}^-(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{l}_\zeta=(\rho_2-\rho_1)\nabla\Pi(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta,\\ \Big[P'(\zeta)\cdot(\vec{V}^+(\zeta,t)-\vec{V}^-(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta=0,\quad \zeta\in\Gamma_t',\end{gathered} \tag{6.2.5}$$

$$\vec{V}^+(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta=0,\quad \zeta\in\sigma_{01}';\quad \Big[P'(\zeta)\cdot\vec{V}(\zeta,t)\Big]^+\cdot\vec{n}_\zeta=0,\quad \zeta\in\sigma_{02}'. \tag{6.2.6}$$

Если область D' ограничена линией заданного обобщённого потенциала (давления) σ_1' и имеет непроницаемую границу (линию сброса) σ_2', то

---

[1] В случае границы σ_{02}' (когда на ней толщина слоя H обращается в ноль) выбираем кривую $\tilde{\sigma}_{02}'$, бесконечно близкую к σ_{02}'. Полагая, что на $\tilde{\sigma}_{02}'$ выполняется второе из условий (6.1.2), дифференцируем его по касательной к $\tilde{\sigma}_{02}'$. Затем совершаем предельный переход к кривой σ_{02}' и получаем условие (6.2.6).

[2] Орты нормалей $\vec{n_\zeta}$ к границе $\sigma_0'=\sigma_{01}'\cup\sigma_{02}'$, а также к границам σ_1' и σ_2' направлены во внутрь области D'.

условия на плоскости z вида (1.3.2) и (1.3.5) запишем в нестационарном случае на плоскости ζ:

$$\varphi^+(\zeta,t) = f_0(\zeta,t) \quad (f_0(\zeta,t) = -[p_0(\zeta,t) + \rho\Pi(\zeta,t)]/\mu), \quad \zeta \in \sigma_1',$$

$$H(\zeta)(\vec{v}(\zeta,t)\cdot\vec{n}_\zeta)^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_2'.$$

Здесь $f_0(\zeta,t)$ — заданная непрерывная на линии σ_1' функция, зависящая от распределения давления $p_0(\zeta,t)$, потенциала массовой силы $\Pi(\zeta,t)$ и характеристик (вязкости μ, плотности ρ) жидкостей, граничащих с σ_1'. $H(\zeta)$ — толщина слоя, непрерывная и неравная нулю на линии σ_2',($\vec{n}_\zeta$ — орт нормали к σ_2'). Линии σ_1 и σ_2 могут взаимно пересекаться, а также пересекаться с линиями Γ_t', Γ' и σ_0'.

Дифференцируем условие на границе σ_1' по касательной к ней ($\vec{l}_\zeta$ — орт касательной к σ_1'). Учтём $(\partial\varphi(\zeta,t)/\partial l_\zeta)^+ = \vec{V}^+(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta$ и обозначим $\partial f_0(\zeta,t)/\partial l_\zeta = f_0'(\zeta,t)$. В условии на границе σ_2' учтём $\vec{v}(\zeta,t) = K'(\zeta)\cdot\vec{V}(\zeta,t)$ и $P'(\zeta) = H(\zeta)K'(\zeta)$. Тогда имеем условия для приведённой скорости $\vec{V}(\zeta,t)$:

$$\vec{V}^+(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta = f_0'(\zeta,t), \quad \zeta \in \sigma_1', \tag{6.2.7}$$

$$\left[P'(\zeta)\cdot\vec{V}^+(\zeta,t)\right]\cdot\vec{n}_\zeta = 0, \quad \zeta \in \sigma_2'. \tag{6.2.8}$$

Пусть течение вызвано заданными источниками (стоками). Эти источники (стоки) моделируем изолированными особыми точками приведённой скорости $\vec{V}_0(\zeta,t)$ (скорость $\vec{v}_0 = K'\cdot\vec{V}_0$ имеет те же особые точки) течения однородной жидкости вязкости $\mu = 1$ и плотности $\rho = 1$ в слое проводимости P'. Учтём эти источники (стоки), представив искомую скорость в виде

$$\vec{V}(\zeta,t) = \vec{V}_0(\zeta,t) + \vec{V}_*(\zeta,t), \quad \zeta \in D'. \tag{6.2.9}$$

Здесь $\vec{V}_*(\zeta,t)$ — скорость возмущений, обусловленных различием вязкостей и жидкостей и кусочной анизотропией слоя (наличием границ Γ_t' и Γ'). Она удовлетворяет уравнениям (6.2.1).

Учтём, что скорость $\vec{V}_0(\zeta,t)$ непрерывна на границе $\Gamma'\cup\Gamma_t'$ ($\vec{V}_0^+(\zeta,t) = \vec{V}_0^-(\zeta,t) = \vec{V}_0(\zeta,t)$, $\zeta \in \Gamma'\cup\Gamma_t'$) и удовлетворяет условиям (6.2.6) на σ_0'. Тогда условия (6.2.4)–(6.2.6) запишем для скорости $\vec{V}_*(\zeta,t)$ в виде

$$\left[\vec{V}_*^+(\zeta,t) - \vec{V}_*^-(\zeta,t)\right]\cdot\vec{l}_\zeta = 0,$$

$$P'(\zeta)\cdot\Big[(1+\lambda_k)\vec{V}_*^{+}(\zeta,t)-(1-\lambda_k)\vec{V}_*^{-}(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta =$$
$$= -2\lambda_k\Big[P'(\zeta)\vec{V}_0(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta,\quad \zeta\in\Gamma',\quad (6.2.10)$$

$$\Big[(1-\lambda_\mu)\vec{V}_*^{+}(\zeta,t)-(1+\lambda_\mu)\vec{V}_*^{-}(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{l}_\zeta = 2\Big[\lambda_\mu\vec{V}_0(\zeta,t)+\alpha\nabla\Pi(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{l}_\zeta,$$
$$\Big[P'(\zeta)\cdot\Big(\vec{V}_*^{+}(\zeta,t)-\vec{V}_*^{-}(\zeta,t)\Big)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta = 0,\quad \zeta\in\Gamma'_t,\quad (6.2.11)$$

$$\vec{V}_*^{+}(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta = 0,\quad \zeta\in\sigma'_{01};\quad \Big[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_*(\zeta,t)\Big]^{+}\cdot\vec{n}_\zeta = 0,\quad \zeta\in\sigma'_{02},\quad (6.2.12)$$

в которых

$$\alpha=\frac{\rho_2-\rho_1}{\mu_2+\mu_1}=\frac{\rho_1\lambda_\rho(1-\lambda_\mu)}{\mu_1(1-\lambda_\rho)},\quad \lambda_\mu=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1},\quad \lambda_\rho=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1},\quad \lambda_k=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2},$$
$$\lambda_\mu,\lambda_\rho,\lambda_k\in(-1,1).$$

Условия (6.2.7) и (6.2.8) для $\vec{V}_*(\zeta,t)$ принимают вид

$$\vec{V}_*(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta = f_0'(\zeta,t)-\vec{V}_0,(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta\quad \zeta\in\sigma'_1,\quad (6.2.13)$$

$$\Big[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_*(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta = -\Big[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_0(\zeta,t)\Big]\cdot\vec{n}_\zeta,\quad \zeta\in\sigma'_2.\quad (6.2.14)$$

Если область D' содержит бесконечно удалённую точку, то скорость $\vec{V}_*(\zeta,t)$ должна удовлетворять условию затухания возмущений на бесконечности:

$$\vec{V}_*(\zeta,t)\to 0\quad \text{при}\quad |\zeta|\to\infty.\quad (6.2.15)$$

Границу Γ'_t описываем согласно формуле (6.1.19) параметрическим уравнением (s — параметр):

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(t,s)\quad (\xi=\xi(t,s),\eta=\eta(t,s)),\quad \vec{\rho}=(\xi,\eta)\in\Gamma'_t.\quad (6.2.16)$$

Полагаем, что в начальный момент времени $t=0$ эта граница задана ($\Gamma'_t=\Gamma'_0$):

$$\vec{\rho}_0=\vec{\rho}(0,s)\quad (\xi_0=\xi(0,s),\eta_0=\eta(0,s)),\quad \vec{\rho}_0=(\xi_0,\eta_0)\in\Gamma'_0.\quad (6.2.17)$$

Учитывая уравнение (6.2.16), дифференциальное уравнений границы Γ'_t (6.1.31) запишем в векторной форме

$$\mathcal{J}'(\zeta,t)\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_0(\zeta,t) + \frac{K'(\zeta)}{2}\cdot\left[\vec{V}_*^{+}(\zeta,t) + \vec{V}_*^{-}(\zeta,t)\right], \quad \vec{\rho} = (\zeta) = (\xi,\eta) \in \Gamma'_t. \tag{6.2.18}$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы Γ'_t в общем случае состоит в нахождении её положения в момент времени $t > 0$ по её начальному положению (6.2.17) и заданным источникам (стокам) течения (задана скорость $\vec{v}_0(\zeta,t)$), вязкостям и плотностям жидкостей, проводимости слоя P'. Чтобы найти решение этой задачи, нужно решить относительно скорости $\vec{V}_*(\zeta,t)$ и координат точек $\vec{\rho} = (\zeta) = (\xi,\eta)$ границы Γ'_t систему уравнений (6.2.1), (6.2.18) при условиях (6.2.10)–(6.2.15) и (6.2.17). После того как найдены в плоскости ζ координаты границы Γ'_t: $\vec{\rho} = (\zeta(t,s))$ и поле скоростей $\vec{V}_*(\zeta,t)$, то, используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$, можно отыскать в плоскости z координаты границы Γ_t: $z = z(\zeta(t,s)) = z(t,s)$ и с учётом (6.2.9) поле приведённой скорости $\vec{V}[\zeta(z),t] = \vec{V}(z,t)$ и скорости $\vec{v} = K\cdot\vec{V}$ (K — тензор проницаемости в плоскости z).

В силу того, что решение задачи должно удовлетворять большому числу условий, то целесообразно рассмотреть сначала её частные случаи, представляющие самостоятельный интерес, а затем указать её общее решение.

Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения в случае кусочно-анизотропного слоя

Рассмотрим сначала задачу эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-анизотропном и неоднородном слое при отсутствии границы $\sigma'_1 \cup \sigma'_2$. Учтём, что согласно условий (6.2.10) и (6.2.11) непрерывны для возмущений касательная составляющая вектора $\vec{V}_*(\zeta,t)$ на Γ' и нормальная составляющая вектора $P'(\zeta)\cdot\vec{V}_*(\zeta,t) = H(\zeta)\vec{v}_*(\zeta,t)$ на Γ'_t. Поэтому можно использовать для $\vec{V}(\zeta,t)$ представления (4.4.56) и (4.4.57) в нестационарных случаях на границах Γ' и Γ'_t, применив к ним принцип наложения. Имеем ($g(\tau,t)$ и $f(\tau,t)$ — непрерывные на Γ' и Γ'_t вещественные функции):

$$\vec{V}_*(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'} \vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{6.2.19}$$

Здесь $\vec{V}_k(\zeta,t)$ — скорости нормированного стока ($k=1$) и вихря ($k=2$), которые выражаются через $\Phi_k(\zeta,\tau)$ и $\Psi_k(\zeta,\tau)$ формулами (4.4.52).

В силу условия (4.3.6) $\vec{V}_*(\zeta,t)=O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta|\to\infty$. Поэтому скорость (6.2.19) удовлетворяет в бесконечности условию (6.2.15).

Полагаем, что $\vec{V}_k(\zeta,\tau), k=1,2$ удовлетворяют на сингулярной линии σ_0' условиям (6.2.12). Тогда этим же условиям удовлетворяет скорость (6.2.19).

Удовлетворим скорость (6.2.19) условиям (6.2.10) и (6.2.11) на границах Γ' и Γ_t'. На основании формул (4.4.56) и (4.4.57) имеем в нестационарном случае на границах Γ' и Γ_t' предельные значения скорости ($g(\tau,t)$ и $f(\tau,t)$ — функции класса Гёльдера):

$$\vec{V}_*^{\pm}=\int\limits_{\Gamma'}\vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau\mp\frac{g(\zeta,t)\vec{n}_\zeta}{2P_1'(\zeta)}+\int\limits_{\Gamma_t'}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau,\quad \zeta\in\Gamma',\ (6.2.20)$$

$$\vec{V}_*^{\pm}=\int\limits_{\Gamma'}\vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau+\int\limits_{\Gamma_t'}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau\pm\frac{f(\zeta,t)}{2}\left[\vec{l}_\zeta-\frac{P_2'(\zeta)\vec{n}_\zeta}{P_1'(\zeta)}\right],$$

$$\zeta\in\Gamma_t'.\quad (6.2.21)$$

В формулах (6.2.20) и (6.2.21) интегралы по Γ' и Γ_t' понимаются в смысле главных значений по Коши. Орт нормали $\vec{n}_\zeta\in\Gamma'$ направлен в область D_1', а орт $\vec{n}_\zeta\in\Gamma_t'$ — в область, занятую первой жидкостью вязкости μ_1 и плотности ρ_1. Орты нормалей остаются слева при обходе этих границ в направлении ортов касательных $\vec{l}_\zeta\in\Gamma'$ и $\vec{l}_\zeta\in\Gamma_t'$.

Предельные значения скорости (6.2.20) и (6.2.21) подставим в условия (6.2.10) и (6.2.11). Первое равенство из (6.2.10) и второе равенство из (6.2.11) тождественно удовлетворяются поскольку

$$\vec{l}_\zeta\cdot\vec{n}_\zeta\equiv0,\ \zeta\in\Gamma',\ \left[P'(\zeta)\cdot\left(\vec{l}_\zeta-\frac{P_2'(\zeta)\vec{n}_\zeta}{P_1'(\zeta)}\right)\right]\cdot\vec{n}_\zeta=P_2'(\zeta)-\frac{P_2'(\zeta)P_1'(\zeta)}{P_1'(\zeta)}\equiv0,\ \zeta\in\Gamma_t'.$$

Из второго и первого равенств условий (6.2.10) и (6.2.11) следуют интегральные уравнения для функции $g(\zeta, t)$:

$$g(\zeta,t) - \\ -2\lambda_k \left\{ \int\limits_{\Gamma'} \left[P'(\zeta)\cdot \vec V_1(\zeta,\tau)\right]\cdot \vec n_\zeta g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'_t} \left[P'(\zeta)\cdot \vec V_2(\zeta,\tau)\right]\cdot \vec n_\zeta f(\tau,t)dl_\tau \right\} = \\ = 2\lambda_k \left[P'(\zeta)\cdot \vec V_0(\zeta,t)\right]\cdot \vec n_\zeta, \quad \zeta\in\Gamma', \quad (6.2.22)$$

где

$$\begin{aligned} &\left[P'(\zeta)\cdot \vec V_\nu(\zeta,\tau)\right]\cdot \vec n_\zeta = \left[P'_1(\zeta)\vec n_\zeta + P'_2(\zeta)\vec l_\zeta\right]\cdot \vec V_\nu(\zeta,\tau), \quad \nu = 1,2, \\ &\left[P'(\zeta)\cdot \vec V_0(\zeta,t)\right]\cdot \vec n_\zeta = \left[P'_1(\zeta)\vec n_\zeta + P'_2(\zeta)\vec l_\zeta\right]\cdot \vec V_0(\zeta,t), \end{aligned} \quad (6.2.22')$$

и функции $f(\zeta,t)$:

$$f(\zeta,t) - 2\lambda_\mu \left[\int\limits_{\Gamma'} \vec V_1(\zeta,\tau)\cdot \vec l_\zeta g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'_t} \vec V_2(\zeta,\tau)\cdot \vec l_\zeta f(\tau,t)dl_\tau \right] = \\ = 2\left[\lambda_\mu \vec V_0(\zeta,t) + \alpha\nabla\Pi(\zeta,t)\right]\cdot \vec l_\zeta, \quad \zeta\in\Gamma'_t. \quad (6.2.23)$$

Предельные значения скорости (6.2.21) подставим в уравнение (6.2.18). Получим нелинейное векторное интегро-дифференциальное уравнение границы Γ'_t:

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\vec\rho}{dt} = \vec v_0(\zeta,t) + K'(\zeta)\cdot \left[\int\limits_{\Gamma'} \vec V_1(\zeta,\tau) g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'_t} \vec V_2(\zeta,\tau) f(\tau,t)dl_\tau \right], \\ \vec\rho = (\zeta)\in\Gamma'_t. \quad (6.2.24)$$

где, напоминаем, интеграл по Γ'_t понимается в смысле главного значения по Коши.

Так как $\vec\rho = \xi\vec\imath + \eta\vec\jmath$ и $\vec V_k(\zeta,\tau) = V_{k\xi}(\zeta,\tau)\vec\imath + V_{k\eta}(\zeta,\tau)\vec\jmath, k = 1,2$ ($V_{k\xi}(\zeta,\tau)$ и $V_{k\eta}(\zeta,\tau)$ выражаются через $\Phi_k(\zeta,\tau)$, $\Psi_k(\zeta,\tau)$ формулами (4.4.52)), то из уравнения (6.2.24) имеем скалярные нелинейные интегро-дифференциальные уравнения границы Γ'_t:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\xi}{dt} &= v_{0\xi}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma'}\Big[K'_1(\zeta)V_{1\xi}(\zeta,\tau) + K'_2(\zeta)V_{1\eta}(\zeta,\tau)\Big]g(\tau,t)dl_\tau + \\
&\quad + \int\limits_{\Gamma'_t}\Big[K'_1(\zeta)V_{2\xi}(\zeta,\tau) + K'_2(\zeta)V_{2\eta}(\zeta,\tau)\Big]f(\tau,t)dl_\tau, \\
\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\eta}{dt} &= v_{0\eta}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma'}\Big[K'_1(\zeta)V_{1\eta}(\zeta,\tau) - K'_2(\zeta)V_{1\xi}(\zeta,\tau)\Big]g(\tau,t)dl_\tau + \\
&\quad + \int\limits_{\Gamma'_t}\Big[K'_1(\zeta)V_{2\eta}(\zeta,\tau) - K'_2(\zeta)V_{2\xi}(\zeta,\tau)\Big]f(\tau,t)dl_\tau, \\
&\qquad \zeta = (\xi,\eta) \in \Gamma'_t, \quad (6.2.24')
\end{aligned}$$

где $K'_1(\zeta) = \sqrt{D[K_s(\zeta)]}$, $K'_2(\zeta) = -\sqrt{D[K_a(\zeta)]}$.

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы граничных уравнений (6.2.22), (6.2.23) и (6.2.24$'$) при начальных условиях (6.2.17). После того как решены эти уравнения можно найти согласно формулам (6.2.9) и (6.2.19) приведённую скорость течения

$$\vec{V}(\zeta,t) = \vec{V}_0(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma'}\vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau, \quad \zeta \in D'$$

и, следовательно, скорость $\vec{v}(\zeta,t) = K'(\zeta)\cdot\vec{V}(\zeta,t)$.

В том случае, когда нужно найти только положение границы раздела жидкостей при $t > 0$ (нет надобности в нахождении поля скоростей течения), то целесообразно уменьшить число уравнений полученной системы. Для этого из уравнений (6.2.23) и (6.2.24) исключим функцию $f(\zeta,t)$. Уравнение (6.2.24) умножим слева скалярно на тензор K'^{-1}, обратный тензору $K' = (K'_{ij})$ ($K'^{-1} = K'^T/D(K')$, $K'^T = (K'_{ji})$), $K'_{11} = K'_{22} = \sqrt{D(K_s)}$, $K'_{12} = -K'_{21} = \sqrt{D(K_a)}$, $D(K') = D(K)$.

Получим равенство

$$K'^{-1}\cdot\left[\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt}-\vec{v}_0(\zeta,t)\right]=\int\limits_{\Gamma'}\vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau+\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau,\ \zeta\in\Gamma'_t,$$

где $\vec{\rho}_\zeta$ — радиус-вектор точки $\zeta\in\Gamma'_t$.

Умножим это равенство на орт касательной $\vec{l}_\zeta\in\Gamma'_t$ и учтём уравнение (6.2.23). Тогда, принимая во внимание $\vec{V}_0=K'^{-1}\vec{v}_0$, находим

$$f(\zeta,t)=2\left[\lambda_\mu\mathcal{I}'(\zeta)K'^{-1}(\zeta)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt}+\alpha\nabla\Pi(\zeta,t)\right]\cdot\vec{l}_\zeta=$$
$$=\frac{2\lambda_\mu\mathcal{I}'(\zeta)}{D[K(\zeta)]}\left[K'_1(\zeta)\vec{l}_\zeta-K'_2(\zeta)\vec{n}_\zeta\right]\cdot\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt}+2\alpha\frac{\partial\Pi(\zeta,t)}{\partial l_\zeta},\quad\zeta\in\Gamma'_t,\quad(6.2.25)$$

где $K'_1(\zeta)=\sqrt{D[K_s(\zeta)]}$, $K'_2(\zeta)=-\sqrt{D[K_a(\zeta)]}$. Подставим функцию $f(\tau,t)$, $\tau\in\Gamma'_t$ из выражения (6.2.25) в уравнения (6.2.23) и (6.2.24). Тогда для функции $g(\zeta,t)$ и координат $\vec{\rho}_\zeta=(\zeta)=(\xi,\eta)$ точек границы Γ'_t имеем систему интегрального уравнения

$$g(\zeta,t)-2\lambda_k\left\{\int\limits_{\Gamma'}\left[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_1(\zeta,\tau)\right]\cdot\vec{n}_\zeta g(\tau,t)dl_\tau+\right.$$
$$\left.+2\int\limits_{\Gamma'_t}\left[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)\right]\cdot\vec{n}_\zeta\left[\lambda_\mu\mathcal{I}'(\tau)K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt}+\alpha\nabla\Pi(\tau,t)\right]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau\right\}=$$
$$=2\lambda_k\left[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_0(\zeta,t)\right]\cdot\vec{n}_\zeta,\quad\zeta\in\Gamma'\quad(6.2.26)$$

($[P'(\zeta)\vec{V}_\nu(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta$, $\nu=1,2$ и $[P'(\zeta)\vec{V}_0(\zeta,t)]\cdot\vec{n}_\zeta$ имеют вид (6.2.22$'$)) и нелинейного векторного интегро-дифференциального уравнения[1]

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt} - \int\limits_{\Gamma'} K'(\zeta)\cdot\vec{V}_1(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau -$$
$$- 2\int\limits_{\Gamma'_t} K'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)\left[\lambda_\mu \mathcal{J}'(\tau)K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt} + \alpha\nabla\Pi(\tau,t)\right]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau = \vec{v}_0(\zeta,t),$$
$$\vec{\rho}_\zeta = (\zeta) = (\xi,\eta)\in\Gamma'_t. \quad (6.2.27)$$

Систему уравнений (6.2.26), (6.2.27) надлежит решать с учётом начального условия (6.2.17).

В частности, если слой анизотропный неоднородный (граница Γ' отсутствует, $\lambda_k = 0$ и, следовательно, $g(\zeta,t) = 0$), то для нахождения границы Γ'_t необходимо решать только интегро-дифференциальное уравнение

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt} -$$
$$- 2\int\limits_{\Gamma'_t} K'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)\left[\lambda_\mu \mathcal{J}'(\tau)K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt} + \alpha\nabla\Pi(\tau,t)\right]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau = \vec{v}_0(\zeta,t),$$
$$\rho = (\zeta) = (\xi,\eta)\in\Gamma'_t$$

с начальным условием (6.2.17).

Интегральное и интегро-дифференциальное уравнения в случае границы $\sigma'_1 \cup \sigma'_2$

Пусть теперь неоднородный слой не является кусочно-анизотропным (граница Γ' отсутствует). Область D' течения имеет границами линию σ'_1 заданного обобщённого потенциала (давления) и непроницаемую линию σ'_2 (линию сброса), а также сингулярную линию $\sigma'_0 = \sigma'_{01}\cup\sigma'_{02}$. Скорость

[1]Здесь и далее векторному интегро-дифференциальному уравнению границы Γ'_t соответствуют два скалярных уравнения для её точек $\zeta = (\xi,\eta)\in\Gamma'_t$, если воспользоваться равенствами $\vec{\rho}_\zeta = \xi\vec{\imath} + \eta\vec{\jmath}$, $\vec{v}_0(\zeta,t) = v_{0\xi}(\zeta,t)\vec{\imath} + v_{0\eta}(\zeta,t)\vec{\jmath}$ и $K'(\zeta)\cdot\vec{V}_k(\zeta,t) = [K'_1(\zeta)V_{k\xi}(\zeta,\tau)+K'_2(\zeta)V_{k\eta}(\zeta,\tau)]\vec{\imath}+[K'_1(\zeta)V_{k\eta}(\zeta,\tau)-K'_2(\zeta)V_{k\xi}(\zeta\tau)]\vec{\jmath}$, $k = 1,2$, где $K'_1(\zeta) = \sqrt{D[K_s(\zeta)]}$, $K'_2(\zeta) = -\sqrt{D[K_a(\zeta)]}$, $V_{k\xi}(\zeta,\tau)$ и $V_{k\eta}(\zeta,\tau)$ выражаются через $\Phi_k(\zeta,\tau)$, $\Psi_k(\zeta,\tau)$ формулами (4.4.52).

возмущений $\vec{V}_*(\zeta,t)$ в этом случае представим в виде

$$\vec{V}_*(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{V}_2(\zeta,\tau) f(\tau,t) dl_\tau + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\sigma'_i} \vec{V}_2(\zeta,\tau) h_i(\tau,t) dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \quad (6.2.28)$$

Согласно условию (4.3.6) скорость (6.2.28) $\vec{V}_*(\zeta,t) = O(|\zeta|^{-1})$ при $|\zeta| \to \infty$ и поэтому $\vec{V}_*(\zeta,t)$ удовлетворяет условию (6.2.15), Пусть $\vec{V}_2(\zeta,\tau)$ удовлетворяет условиям (6.2.12). Тогда этим же условиям удовлетворяет скорость (6.2.28). Удовлетворим эту скорость условиям (6.2.11), (6.2.13) и (6.2.14). Согласно формуле (4.4.57) находим предельные значения скорости (6.2.28) на границах Γ'_t и $\sigma'_1 \cup \sigma'_2$:

$$\vec{V}_*^{\pm}(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{V}_2(\zeta,\tau) f(\tau,t) dl_\tau \pm \frac{f(\zeta,t)}{2} \left[\vec{l}_\zeta - \frac{P'_2(\zeta)\vec{n}_\zeta}{P'_1(\zeta)}\right] + \\ + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\sigma'_2} \vec{V}_2(\zeta,\tau) h_i(\tau,t) dl_\tau, \quad \zeta \in \Gamma'_t, \quad (6.2.29)$$

$$\vec{V}_*^{+}(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{V}_2(\zeta,\tau) f(\tau,t) dl_\tau + \sum_{i=1}^{2} \Biggl\{ \int\limits_{\sigma'_i} \vec{V}_2(\zeta,\tau) h_i(\tau,t) dl_\tau + \\ + \frac{h_i(\zeta,t)}{2} \left[\vec{l}_\zeta - \frac{P'_2(\zeta)\vec{n}_\zeta}{P'_1(\zeta)}\right] \Biggr\}, \quad \zeta \in \sigma'_i, \quad i = 1,2. \quad (6.2.30)$$

Здесь интегралы по Γ'_t в равенстве (6.2.29) и по σ'_i в первом ($i = 1$) и во втором ($i = 2$) равенствах (6.2.30) понимаются в смысле главных значений по Коши. В равенстве (6.2.29) следует взять $\vec{V}_*^{+}(\zeta,t)$ ($\vec{V}_*^{-}(\zeta,t)$) при подходе к границе Γ'_t со стороны (противоположной стороны) орта $\vec{n}_\zeta \in \Gamma'_t$, который направлен в область, занятую первой жидкостью вязкости μ_1 и плотности ρ_1. В равенстве (6.2.30) орт $\vec{n}_\zeta \in \sigma'_1 \cup \sigma'_2$ направлен во внутрь области D'.

Подставим предельные значения скорости (6.2.29) в условие (6.2.11) и уравнение (6.2.18), а (6.2.30) — в условия (6.2.13) и (6.2.14). Получаем для функций $f(\zeta,t)$ и $h_i(\zeta,t)$, $i = 1,2$ интегральные уравнения

$$f(\zeta,t)-2\lambda_\mu\left[\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta f(\tau,t)dl_\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta h_i(\tau,t)dl_\tau\right]=$$
$$=2\left[\lambda_\mu\vec{V}_0(\zeta,t)+\alpha\nabla\Pi(\zeta,t)\right],\quad \zeta\in\Gamma'_t,\quad (6.2.31)$$

$$\frac{h_1(\zeta,t)}{2}+\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta f(\tau,t)dl_\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta h_i(\tau,t)dl_\tau=$$
$$=f'_0(\zeta,t)-\vec{V}_0(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta,\quad \zeta\in\sigma'_1,\quad (6.2.32)$$

$$\frac{h_2(\zeta,t)}{2}\left[P'_1(\zeta)-P'_2(\zeta)\right]+\int\limits_{\Gamma'_t}[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta f(\tau,t)dl_\tau+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta h_i(\tau,t)dl_\tau=[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_0(\zeta,t)]\cdot\vec{n}_\zeta,\ \zeta\in\sigma'_2,\quad (6.2.33)$$

где
$$[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta=[P'_1(\zeta)\vec{n}_\zeta+P'_2(\zeta)\vec{l}_\zeta]\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau),$$
$$[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_0(\zeta,t)]\cdot\vec{n}_\zeta=[P'_1(\zeta)\vec{n}_\zeta+P'_2(\zeta)\vec{l}_\zeta]\cdot\vec{V}_0(\zeta,t).$$

Дифференциальное уравнение границы Γ'_t (6.2.18) принимает вид нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\mathcal{I}'(\zeta,t)\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\vec{v}_0(\zeta,t)+K'(\zeta)\cdot\left[\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)h_i(\tau,t)dl_\tau\right],$$
$$\vec{\rho}=(\zeta)\in\Gamma'_t.\quad (6.2.34)$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей в рассматриваемом случае сводится к решению системы граничных уравнений (6.2.31)–(6.2.34) при начальном условии (6.2.17), После того, как решена эта система уравнений, то на основании формул (6.2.9) и (6.2.28) можно найти приведённую скорость

$$\vec{V}(\zeta,t)=\vec{V}_0(\zeta,t)+\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)h_i(\tau,t)dl_\tau,\quad \zeta\in D'$$

и, следовательно, скорость $\vec{v}(\zeta,t) = K'(\zeta)\cdot\vec{V}(\zeta,t)$.

В том случае, когда необходимо отыскивать только положение границы Γ'_t (нет надобности в нахождении поля скоростей), то целесообразно уменьшить число уравнений системы (6.2.31)–(6.2.34) подобно тому как это сделано в случае кусочно-анизотропного слоя. Из уравнений (6.2.31) и (6.2.34) находим функцию $f(\zeta,t)$, которая, как нетрудно убедиться, определяется той же формулой (6.2.25). Подставляя эту функцию в уравнения (6.2.32)–(6.2.34), получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{h_1(\zeta,t)}{2} + 2\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta\left[\lambda_\mu K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt} + \alpha\nabla\Pi(\tau,t)\right]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau + \\ + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\zeta h_i(\tau,t)dl_\tau = f'_0(\zeta,t) - \vec{V}_0(\zeta,t)\cdot\vec{l}_\zeta, \quad \zeta\in\sigma'_1, \quad (6.2.35)$$

$$\frac{h_2(\zeta,t)}{2}\left[P'_1(\zeta) - P'_2(\zeta)\right] + \\ + 2\int\limits_{\Gamma'_t}[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta[\lambda_\mu K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt} + \alpha\nabla\Pi(\tau,t)]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau + \\ + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}[P'(\zeta)\cdot\vec{V}_2(\zeta,\tau)]\cdot\vec{n}_\zeta h_i(\tau,t)dl_\tau = [P'(\zeta)\cdot\vec{V}_0(\zeta,t)]\cdot\vec{n}_\zeta, \ \zeta\in\sigma'_2 \quad (6.2.36)$$

и нелинейного векторного интегро-дифференциального уравнения

$$\mathcal{J}'(\zeta)\frac{d\vec{\rho}_\zeta}{dt} - K'(\zeta)\cdot\left\{2\int\limits_{\Gamma'_t}\vec{V}_2(\zeta,\tau)[\lambda_\mu K'^{-1}(\tau)\cdot\frac{d\vec{\rho}_\tau}{dt} + \alpha\nabla\Pi(\tau,t)]\cdot\vec{l}_\tau dl_\tau + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\sigma'_i}\vec{V}_2(\zeta,\tau)h_i(\tau,t)dl_\tau\right\} = \vec{v}_0(\zeta,t), \quad \zeta\in\Gamma'_t. \quad (6.2.37)$$

Систему уравнений (6.2.35)–(6.2.37) надлежит решать при начальном условии (6.2.17).

Общий и некоторые частные случаи задачи эволюции границы

Рассмотрим теперь общий случай эволюции границы раздела жидкостей Γ'_t в кусочно-анизотропном слое (имеется граница Γ'). Область течения D' ограничена линией $\sigma'_1 \cup \sigma'_2 \cup \sigma'_0$. Полагаем, что $\vec{V}_1(\zeta,\tau)$ и $\vec{V}_2(\zeta,\tau)$ удовлетворяют на σ'_0 условиям (6.2.12), представим в этом случае скорость возмущений $\vec{V}_*(\zeta,t)$ согласно принципу наложения виде

$$\vec{V}_*(\zeta,t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{V}_2(\zeta,\tau) f(\tau,t)\,dl_\tau + \int\limits_{\Gamma'} \vec{V}_1(\zeta,\tau) g(\tau,t)\,dl_\tau + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\sigma'_i} \vec{V}_2(\zeta,\tau) h_i(\tau,t)\,dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \qquad (6.2.38)$$

Поступая аналогично тому, как это сделано в рассмотренных выше отдельных случаях, нетрудно найти предельные значения скорости (6.2.38) на границах Γ'_t, Γ' и σ'_i, $i=1,2$, записать интегральные уравнения на этих границах и интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ'_t.

Представляют интерес для практики следующие частные случаи исследуемой задачи. Если массовые силы пренебрежимо малы по сравнению с гидродинамическими силами (напорная фильтрация), то в полученных уравнениях можно положить $\Pi(\zeta,t)=0$. Если вязкости и плотности жидкостей сильно различаются (например, $\mu_1 \gg \mu_2$ и $\rho_1 \gg \rho_2$), то в этих уравнениях можно совершить предельный переход $\lambda_\mu \to -1$, $\alpha \to -1/\nu_1$ ($\nu_1 = \mu_1/\rho_1$ — кинематическая вязкость первой жидкости). В том случае, когда $\vec{V}_1(\zeta,\tau)$ и/или $\vec{V}_2(\zeta,\tau)$ удовлетворяют указанным условиям на одной из границ Γ', σ'_1 и σ'_2, то надобность в интегральном уравнении на этой границе отпадает. В случае нестационарной фильтрации однородной жидкости ($\mu_1=\mu_2$, $\rho_1=\rho_2$, следовательно, $\lambda_\mu=0$, $\alpha=0$) система полученных интегральных уравнений на Γ', σ'_1 и σ'_2 позволяет найти поле скоростей возмущений $\vec{v}_*(\zeta,t) = K' \cdot \vec{V}_*(\zeta,t)$ по заданной скорости $\vec{v}_0(\zeta,t)$, функции $f'_0(\zeta,t)$ и проводимости слоя. Тогда вытекающего из (6.2.18) дифференциального уравнения

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_0(\zeta,t) + \vec{v}_*(\zeta,t), \quad \vec{\rho} = (\zeta) \in \Gamma'_t$$

можно найти с учётом начального условия (6.2.17) положение границы Γ'_t при $t>0$.

§ 6.3. Задача эволюции осесимметричной границы раздела жидкостей

Постановка вопроса

Рассмотрим эволюцию осесимметричной границы раздела жидкостей, когда в каждый момент времени $t \geqslant 0$ эта граница моделируется осесимметричной поверхностью, а в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ — кривой Γ_t, которая может, вообще говоря, пересекать ось симметрии Ox. Пусть Γ_t' — образ этой кривой в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$. Полагаем, что пористая среда ортотропная и однородная. В этом случае, как показано в § 5.4, изучение осесимметричной задачи сводится в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta \geqslant 0$ к исследованию той же осесимметричной задачи в изотропной пористой среде. Это утверждение справедливо также для задачи эволюции осесимметричной границы раздела жидкостей.

Осесимметричную задачу эволюции границы можно рассматривать как частный случай двумерной задачи эволюции в слое проводимости $P' = \eta$ (точнее, толщины $H = \eta$) и поэтому для её исследования можно использовать полученные выше в этой главе результаты.

Интегральное и интегро-дифференциальное уравнения границы

Учитывая, что поток жидкости через границу Γ_t' непрерывен, аналогично формулам (5.4.43) и (5.4.44) имеем в осесимметричном случае комплексный потенциал возмущений

$$W_*(\zeta, t) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\Gamma_t'} f(\tau, t) \sqrt{\frac{\tau - \bar{\tau}}{\zeta - \bar{\zeta}}} \left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \tau} d\tau - \frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega) + Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta - \bar{\tau}} d\bar{\tau} \right],$$

$$\zeta \notin \Gamma_t' \quad (6.3.1)$$

и его предельные значения ($f(\zeta, t)$ — функция класса Гёльдера)

$$W_*^{\pm}(\zeta, t) = \widetilde{W}_*(\zeta, t) \pm \frac{f(\zeta, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma_t'. \qquad (6.3.2)$$

Здесь $\widetilde{W}_*(\zeta,t)$ — прямое значение интеграла (6.3.1), $Q_{\pm\frac{1}{2}}(\omega)$ — функции Лагранжа второго рода аргумента

$$\omega = 1 - \frac{2|\zeta-\tau|^2}{(\zeta-\overline{\zeta})(\tau-\overline{\tau})}.$$

Комплексный потенциал (6.3.1) удовлетворяет условиям (6.1.17) и (6.1.18). Удовлетворим его условиям (6.1.15), подставив в них предельные значения (6.3.2). Второе из этих условий тождественно удовлетворяется, а из первого следует для функции $f(\zeta,t)$ интегральное уравнение

$$f(\zeta,t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t'} f(\tau,t)\sqrt{\frac{\tau-\bar{\tau}}{\zeta-\bar{\zeta}}}\left\{\left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_\tau}\arg(\zeta-\tau)dl_\tau - \right.$$
$$\left. - \left[Q_{\frac{1}{2}}(\omega) - Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial l_{\bar{\tau}}}\arg(\zeta-\bar{\tau})dl_{\bar{\tau}}\right\} = 2\left[\lambda_\mu\varphi_0(\zeta,t) + \alpha\Pi(\zeta,t)\right],$$
$$\zeta \in \Gamma_t'. \quad (6.3.3)$$

Учтём, что якобиан преобразования (5.4.5) $\mathcal{J} = K_2\sqrt{K_1K_2}$ и, следовательно, обратного ему преобразования якобиан $\mathcal{J}' = 1/\mathcal{J} = (K_2\sqrt{K_1K_2})^{-1}$. Как следует из системы (5.4.7), коэффициент $K' = 1$ и, следовательно, скорости $v = v_\xi + iv_\eta$ и $V = V_\xi + iV_\eta$ совпадают: $v = V$. Тогда дифференциальное уравнение границы Γ_t' (6.1.33) в осесимметричном случае принимает вид нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\overline{\zeta}}{dt} = K_2\sqrt{K_1K_2}\left[\overline{V}_0(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma_t'} \overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\right], \quad \zeta\in\Gamma_t'$$

или в проекциях на координатные оси $O\xi$ и $O\eta$:

$$\frac{d\xi}{dt} = K_2\sqrt{K_1K_2}\left[V_{0\xi}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma_t'} V_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\right],$$
$$\frac{d\eta}{dt} = K_2\sqrt{K_1K_2}\left[V_{0\eta}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma_t'} V_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\right], \qquad (6.3.4)$$
$$\zeta = (\xi,\eta)\in\Gamma_t'.$$

Здесь, учитывая систему (5.4.7), выразим компоненты скорости

$$V_{0\xi}(\zeta,t)=\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\xi}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi_0(\zeta,t)}{\partial\eta},\quad V_{0\eta}(\zeta,t)=\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\eta}=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi_0(\zeta,t)}{\partial\xi}$$

через обобщённый потенциал $\varphi_0(\zeta,t)$ и функцию тока $\psi_0(\zeta,t)$ осесимметричного течения, вызванного заданными источниками (стоками). Далее, $\overline{V}_2(\zeta,\tau)=V_{2\xi}(\zeta,\tau)-iV_{2\eta}(\zeta,\tau)$ — второе главное решение уравнения (2.3.33) в осесимметричном случае, когда $\overline{A}=-B=i/4\eta$, которое представляет собой скорость осесимметричного вихря. Его компоненты выражаются согласно (5.4.7) через функцию тока $\Psi_2(\zeta,\tau)$ формулами

$$V_{2\xi}(\zeta,\tau)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial\eta},\quad V_{2\eta}(\zeta,\tau)=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial\xi},$$

в которых

$$\Psi_2(\zeta,\tau)=-\frac{\sqrt{(\zeta-\overline{\zeta})(\overline{\tau}-\tau)}\,Q_{\frac{1}{2}}(\omega)}{4\pi}.$$

Таким образом, исследование эволюции осесимметричной границы раздела жидкостей сводится к решению системы уравнений (6.3.3) и (6.3.4) при заданных начальных условиях (6.1.20). Решая эту систему уравнений и используя преобразования (5.4.5), находим в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ положение границы Γ_t при $t>0$ и, если это необходимо, согласно формулам (6.1.13) и (6.3.1) комплексный потенциал течения

$$W(z,t)=W_0(\zeta,t)+\\ +\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_t'} f(\tau,t)\sqrt{\frac{\tau-\bar\tau}{\zeta-\bar\zeta}}\left[\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega)-Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta-\tau}d\tau-\frac{Q_{\frac{1}{2}}(\omega)+Q_{-\frac{1}{2}}(\omega)}{\zeta-\bar\tau}d\bar\tau\right],$$

$$\zeta=C(z+\mu\bar z),\quad C=(K_2+\sqrt{K_1K_2})/2,\quad z\in D.$$

На основе результатов § 6.2 нетрудно получить в случае осесимметричной задачи эволюции границы раздела жидкостей интегральные и интегродифференциальные уравнения с использованием поля скоростей.

В заключении отметим, что из исследованных задач эволюции границы раздела жидкостей вытекают как частные случаи решения соответствующих задач эволюции границы в изотропном слое [55, 56, 78, 94, 114–117, 144, 171].

Глава 7

Трёхмерные граничные задачи

Формулируются основные граничные задачи трёхмерной фильтрации (стационарные задачи, задача эволюции границы раздела жидкостей) в ортотропной пористой среде, используя вспомогательные переменные. Это позволяет решения стационарных задач в случае канонических границ (плоскость, поверхность эллипсоида) получить в конечном виде, а в общем случае гладких границ свести эти задачи к интегральным уравнениям. Исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы интегрального и интегро-дифференциального уравнений.

§ 7.1. Формулировка граничных задач с использованием вспомогательных переменных

Основное уравнение в канонической форме

Трёхмерное течение несжимаемой жидкости в анизотропной неоднородной и недеформируемой пористой среде описываем обобщённым потенциалом φ, который как функция координат точки $M = (x_1, x_2, x_3)$, а в нестационарном случае времени t удовлетворяет уравнению (1.1.27) во всей области D за исключением изолированных особых точек φ[1]. Полагаем, что коэффициенты этого уравнения K_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ моделируются непрерывно дифференцируемыми (хотя бы один раз) функциями координат в области D и удовлетворяют условиям (1.1.26) в этой области. Поэтому это уравнение относится к эллиптическому типу в области D.

Согласно исследованиям [74, 98, 138] нельзя указать в общем трёхмерном случае неособое преобразование координат общего вида, которое

[1] Для простоты суждений часто будем ограничиваться (там где это возможно) стационарным случаем. Полученные результаты остаются в силе и для нестационарных течений, поскольку время t является параметром.

приводило бы уравнение (1.1.27) к каноническому виду подобно тому, как это сделано в § 2.2 для уравнений двумерных течений. Это обстоятельство принципиально усложняет исследование трёхмерных течений.

Исследование течений значительно упрощается, если пористая среда ортотропная, тензор её проницаемости симметричен: $K_{ij} = K_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. В этом случае выберем взаимно ортогональные координатные оси Ox_i, $i = 1, 2, 3$ вдоль главных направлений анизотропии и назовём их *главными осями* анизотропии. Тогда тензор (K_{ij}) принимает диагональный вид: $K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ (δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Коэффициенты K_i, $i = 1, 2, 3$ характеризуют среду вдоль главных осей. Ограничимся случаем, когда анизотропию и неоднородность среды можно характеризовать раздельно: $K_i = k_i\chi(M)$, $i = 1, 2, 3$, k_i — положительные константы, $\chi(M)$ — функция точки $M = (x_1, x_2, x_3)$, непрерывно дифференцируемая (хотя бы один раз) в области D.

Воспользуемся аффинными преобразованиями координат ($k_0 > 0$ — масштабный коэффициент)

$$\xi_i = \sqrt{\frac{k_0}{k_i}}x_i, \quad x_i = \sqrt{\frac{k_i}{k_0}}\xi_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.1.1}$$

Эти преобразования не изменяют взаимную ориентацию ортогональных координатных осей Ox_i и $O\xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) и сохраняют неподвижными точки пространства: начало координат и бесконечно удалённую точку (каждая из этих точек преобразуется сама в себя). Якобиан преобразований строго положителен:

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{k_0^{3/2}}{\sqrt{k_1k_2k_3}} > 0,$$

что обеспечивает сохранение ориентации поверхности при её преобразовании (в частности, нормаль, внешняя к замкнутой поверхности остаётся внешней при преобразованиях (7.1.1)).

Согласно преобразованиям (7.1.1) проекции $d\sigma_1 = dx_2dx_3$, $d\sigma_2 = dx_1dx_3$, $d\sigma_3 = dx_1dx_2$ элемента площади $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$ поверхности σ ($\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — орт к поверхности, $d\sigma_i = n_id\sigma$, $i = 1, 2, 3$) на координатные плоскости системы $Ox_1x_2x_3$ преобразуются по формуле

$$d\sigma_i = \frac{\sqrt{k_1k_2k_3}}{k_0}\frac{d\sigma_i'}{\sqrt{k_i}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.1.2}$$

Здесь $d\sigma'_1 = d\xi_2 d\xi_3$, $d\sigma'_2 = d\xi_1 d\xi_3$, $d\sigma'_3 = d\xi_1 d\xi_2$ — проекции элемента площади $d\vec{\sigma}' = \vec{n}' d\sigma'$ поверхности σ' ($\vec{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$ — орт к поверхности, $d\sigma'_i = n'_i d\sigma'$, $i = 1, 2, 3$) на координатные плоскости системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Из равенств (7.1.1) вытекают при учёте $\sum\limits_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{3} {n'}_i^2 = 1$ соотношения между площадками

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{k_0}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}} \Big(\sum_{j=1}^{3} k_j n_j^2 \Big)^{1/2} = \frac{k_0}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{{n'}_j^2}{k_j} \Big)^{-1/2} \tag{7.1.3}$$

и направляющими косинусами ортов $\vec{n}$ и $\vec{n}'$:

$$n'_i = n_i \sqrt{k_i} \Big(\sum_{j=1}^{3} k_j n_j^2 \Big)^{-1/2}, \quad n_i = \frac{n'_i}{\sqrt{k_i}} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{{n'}_j^2}{k_j} \Big)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.1.4}$$

причём

$$\Big(\sum_{j=1}^{3} k_j n_j^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{{n'}_j^2}{k_j} \Big) = 1. \tag{7.1.5}$$

В рассматриваемом случае ортотропной среды обобщённый закон Дарси (1.1.45) и основное уравнение для обобщённого потенциала (1.1.46) запишем

$$v_i(M) = \chi(M) k_i \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.1.6}$$

$$T\varphi(M) \equiv \sum_{i=1}^{3} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\chi(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial x_i} \Big) = 0. \tag{7.1.7}$$

Используя преобразования (7.1.1) и учитывая равенства

$$\varphi(M) = \varphi(M') \quad \left(\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi\Big(\sqrt{\frac{k_1}{k_0}} \xi_1, \sqrt{\frac{k_2}{k_0}} \xi_2, \sqrt{\frac{k_3}{k_0}} \xi_3 \Big) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right),$$

$$\chi(M) = \chi(M') \quad \left(\chi(x_1, x_2, x_3) = \chi\Big(\sqrt{\frac{k_1}{k_0}} \xi_1, \sqrt{\frac{k_2}{k_0}} \xi_2, \sqrt{\frac{k_3}{k_0}} \xi_3 \Big) = \chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right),$$

запишем выражения (7.1.6) и (7.1.7) в координатах точки $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ следующим образом

$$\vec{v}(M') = \chi(M') \nabla \varphi(M') \quad \left(v_i(M') = \chi(M') \frac{\partial \varphi(M')}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, 3 \right), \tag{7.1.8}$$

$$T'\varphi(M') \equiv \nabla \cdot \Big(\chi(M')\nabla\varphi(M')\Big) = 0 \tag{7.1.9}$$

$$\left(T'\varphi(M') \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Big(\chi(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial \xi_i}\Big) = 0\right),$$

где $\nabla = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}\vec{e}_i\,'$, $\vec{e}_i\,'$ — орты координатных осей $O\xi_i$, $i = 1,2,3$. Причём

$$T\varphi(M) = k_0 T'\varphi(M'), \tag{7.1.10}$$

а компоненты скорости $v_i(M)$ и $v_i(M')$ взаимосвязаны равенствами

$$v_i(M) = \sqrt{k_0 k_i}\, v_i(M'), \quad i = 1,2,3. \tag{7.1.11}$$

Видим, что (7.1.8) — закон Дарси, а (7.1.9) — основное уравнение для обобщённого потенциала, характерные для течения в изотропной неоднородной среде проницаемости $\chi(M')$. Уравнения (7.1.9) — каноническая форма записи в переменных ξ_i, $i = 1,2,3$ основного уравнения (7.1.7). Из формул (7.1.8) и (7.1.9) следует, что поле скорости $\vec{v}(M')$ (так же как и скорости $\vec{v}(M)$) соленоидально: $\nabla \cdot \vec{v}(M') = 0$.

В частности, если ортотропная среда однородная ($\chi(M') = 1$), то уравнение (7.1.9) принимает вид уравнения Лапласа ($\varphi(M')$ — гармоническая функция)

$$\Delta\varphi(M') = 0 \quad \left(\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\right). \tag{7.1.9$'$}$$

Граничные условия

Указанные в § 1.3 граничные условия запишем в переменных ξ_i, $i = 1,2,3$. Образами гладких (кусочно-гладких) границ σ_1, σ_2, $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, Γ и Γ_t относительно преобразований (7.1.1) являются соответственно гладкие (кусочно-гладкие) границы σ_1', σ_2', $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$, Γ' и Γ_t'. Учитывая, что $\varphi^+(M) = \varphi^+(M')$, $f_0(M) = f_0(M')$ ($p_0(M) = p_0(M')$, $\Pi(M) = \Pi(M')$), условие (1.3.2) принимает вид (условие первого рода для $\varphi(M')$)

$$\varphi^+(M') = f_0(M') \quad (f_0(M') = -[p_0(M') + \rho\Pi(M')]/\mu), \quad M' \in \sigma_1'. \tag{7.1.12}$$

В случае напорной фильтрации (массовая сила пренебрежимо мала по сравнению с гидродинамической силой) в предположении $p_0(M') = \mathrm{const}$ на σ_1' условие (7.1.12) можно записать

$$\varphi^+(M') = \mathrm{const}, \quad M' \in \sigma_1'. \tag{7.1.13}$$

Выбирая в условии (7.1.13) постоянную равную нулю, имеем

$$\varphi^+(M') = 0, \quad M' \in \sigma_1'. \tag{7.1.13$'$}$$

Условие (7.1.13) (или (7.1.13$'$)) означает, что вектор скорости $\vec{v}(M')$ коллинеарен орту нормали $\vec{n}'$ границы σ_1' (σ_1' — может быть границей водоёма).

Запишем условие на непроницаемой границе. Используем равенства (7.1.4), (7.1.5) и (7.1.11). Тогда нормальные составляющие скоростей на поверхностях σ_2 и σ_2':

$$v_n(M) = \vec{v}(M) \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^{3} v_i(M) n_i, \quad M \in \sigma_2,$$

$$v_{n'}(M') = \vec{v}(M') \cdot \vec{n}' = \sum_{i=1}^{3} v_i(M') n_i', \quad M' \in \sigma_2'$$

взаимосвязаны равенствами

$$v_n(M) = \sqrt{k_0} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{{n'}_j^2}{k_j} \right)^{-1/2} v_{n'}(M'), \tag{7.1.14}$$

$$v_{n'}(M') = \frac{1}{\sqrt{k_0}} \left(\sum_{j=1}^{3} k_j n_j^2 \right)^{-1/2} v_n(M).$$

Учитывая равенства (7.1.14), условие (1.3.5) запишем на границе σ_2':

$$v_{n'}(M') = 0, \quad M' \in \sigma_2'$$

или, так как $v_{n'}(M') = \chi(M') \dfrac{\partial \varphi(M')}{\partial n'}$ и $\chi(M') \neq 0$, $M' \in \sigma_2'$, то имеем для $\varphi(M')$ условие второго рода

$$\frac{\partial \varphi(M')}{\partial n'} = 0, \quad M' \in \sigma_2'. \tag{7.1.15}$$

Условия на сингулярной границе (1.3.8) и (1.3.9) при учёте равенств (7.1.14) и $v^{+}_{n'}(M') = \left(\chi(M')\dfrac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^{+}$ примут вид

$$\varphi^{+}(M') = 0, \quad M' \in \sigma'_{01}; \quad \left(\chi(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^{+} = 0, \quad M' \in \sigma'_{02}. \qquad (7.1.16)$$

Если область течения содержит бесконечно удалённую точку, в которой отсутствуют источники (стоки), то условия (1.3.14) с учётом вытекающих из выражений (7.1.8) и (7.1.11) равенств $v_i(M) = \sqrt{k_0}k_i\chi(M')\dfrac{\partial\varphi(M')}{\partial\xi'}$, $i = 1, 2, 3$ принимают вид

$$\varphi(M') = O\left(\frac{1}{\rho_{M'M'_0}}\right), \ \chi(M')|\nabla\varphi(M')| = O\left(\frac{1}{\rho^2_{M'M'_0}}\right) \text{ при } \quad \rho_{M'M'_0} \to \infty, \qquad (7.1.17)$$

где $\rho_{M'M'_0} = \left[\sum\limits_{i=1}^{3}\Big(\xi_i - \xi_{0i}\Big)^2\right]^{1/2}$ — расстояние между произвольной $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и фиксированной $M'_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})$ точками области D' (D' — образ области D относительно преобразований (7.1.1)).

Так как согласно формуле (1.1.20) $v_n(M) = K_n(M)\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu}$ и $v_{n'}(M') = \chi(M')\dfrac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}$, то из выражений (7.1.14) вытекает на гладкой (кусочно-гладкой) границе и её образе равенство

$$K_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu} = \sqrt{k_0}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{n'^2_j}{k_j}\right)^{-1/2}\chi(M')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}. \qquad (7.1.18)$$

Учитывая равенство (7.1.18), условия непрерывности давления и расхода жидкости (1.3.16) на границе Γ' запишем

$$\varphi^{+}(M') = \varphi^{-}(M'), \quad \chi^{+}(M')\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^{+} = \chi^{-}(M')\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^{-}, \quad M' \in \Gamma'. \qquad (7.1.19)$$

В частности, если $\chi^{+}(M') = k^0_1\chi(M')$, $\chi^{-}(M') = k^0_2\chi(M')$ (k^0_1 и k^0_2 — положительные константы), то

$$\varphi^+(M') = \varphi^-(M'), \quad k_1^0\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^+ = k_2^0\left(\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n'}\right)^-, \quad M' \in \Gamma'. \tag{7.1.19$'$}$$

Условия (7.1.19) (в частности, (7.1.19′)) — условия сопряжения на границе Γ' для обобщённого потенциала $\varphi(M')$.

Заметим, что условия (7.1.12), (7.1.15)–(7.1.17) и (7.1.19) справедливы и в нестационарном случае, так как в этом случае время t входит в обобщённый потенциал как параметр.

В случае нестационарной задачи эволюции границы раздела жидкостей условия непрерывности давлений и расходов жидкостей (1.3.24) запишем с учётом равенства (7.1.18) для обобщённого потенциала $\varphi(M', t)$ в виде

$$\mu_1\varphi^+(M', t) - \mu_2\varphi^-(M', t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(M', t), \tag{7.1.20}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi(M', t)}{\partial n'}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi(M', t)}{\partial n'}\right)^-, \quad M' \in \Gamma'_t.$$

Условия (7.1.20) — это условия сопряжения для $\varphi(M', t)$ на границе раздела жидкостей Γ'_t. Обобщённый потенциал $\varphi(M', t)$, где время t — параметр, удовлетворяет уравнению вида (7.1.9).

Формулировка граничных задач для обобщённого потенциала возмущений

Замечаем, что основное уравнение для обобщённого потенциала и граничные условия, указанные в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$, аналогичны соответствующим уравнениям и граничным условиям в случае изотропной пористой среды проницаемости $\chi(M')$. Это позволяет сформулировать основные граничные задачи в этих переменных подобно тому, как это сделано в случае изотропной пористой среды [117].

Рассмотрим сначала случай стационарного трёхмерного течения. Пусть течение происходит в области D' ортотропной, вообще говоря, неоднородной среды, которая в общем случае может иметь границей сингулярную поверхность σ'_0, ($\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$), поверхность σ'_1 заданного давления и непроницаемую поверхность σ'_2. Полагаем, что части D'_1 и D'_2 области D' ($D' = D'_1 \cup D'_2$) имеют среды проницаемости $\chi_1(M')$ и $\chi_2(M')$ ($\chi_\nu(M') = k_\nu^0\chi(M')$, k_ν^0 — положительный постоянные, $\nu = 1, 2$), которые сопрягаются на поверхности Γ'. Поверхности σ_0', σ_1', σ_2' и Γ' гладкие и могут в общем случае взаимно пересекаться.

Течение в областях D_1' и D_2' описываем обобщёнными потенциалами $\varphi_1(M')$ и $\varphi_2(M')$. Это течение обусловлено заданными источниками (стоками), которые расположены произвольно всюду в области D' за исключением границ σ_0', σ_1', σ_2' и Γ'. Источники (стоки) моделируем изолированными особыми точками обобщённого потенциала $\varphi_0(M')$, который описывает течение в среде проницаемости $\chi(M')$ в отсутствии границ σ_1', σ_2' и Γ' ($k_1^0 = k_2^0 = 1$) и удовлетворяет условиям (7.1.16) на сингулярной поверхности σ_0', если она ограничивает область D'.

Учтём эти источники (стоки) и представим обобщённые потенциалы течения в случае кусочно-ортотропной неоднородной среды следующим образом

$$\varphi_\nu(M') = \frac{\varphi_0(M') + \varphi_*(M')}{k_\nu^0}, \quad M' \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2, \tag{7.1.21}$$

где $\varphi_*(M')$ — обобщённый потенциал возмущений, обусловленных наличием границы Γ' и возможно границ σ_0', σ_1' и σ_2'.

Если среда ортотропная и граница Γ' отсутствует ($k_1^0 = k_2^0 = 1$), то обобщённый потенциал запишем

$$\varphi(M') = \varphi_0(M') + \varphi_*(M'), \quad M' \in D', \tag{7.1.21$'$}$$

где $\varphi_*(M')$ — обобщённый потенциал возмущений, обусловленный границами σ_1', σ_2' и σ_0'.

Указанные условия на границах σ_1', σ_2', σ_0', Γ' и в бесконечности сформулируем для $\varphi_*(M')$. Подставляя равенства (7.1.21) и (7.1.21$'$) в условие (7.1.12), получим для $\varphi_*(M')$ условие на σ_1', когда среда кусочно-ортотропная:

$$\varphi_*^+(M') = k_\nu^0 f_0(M') - \varphi_0(M'), \quad \nu = 1, 2, \quad M' \in \sigma_1' \tag{7.1.22}$$

и среда ортотропная (граница Γ' отсутствует: $k_1^0 = k_2^0 = 1$):

$$\varphi_*^+(M') = f_0(M') - \varphi_0(M'), \quad M' \in \sigma_1'. \tag{7.1.23}$$

В случае напорной фильтрации в условии (7.1.23) можно положить $f_0(M') = 0$.

Подставим равенства (7.1.21) и (7.1.21′) в условие (7.1.15), имеем для $\varphi_*(M')$ условия на σ_2':

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M')}{\partial n_{M'}}\right)^+ = -\frac{\partial\varphi_0(M')}{\partial n_{M'}}, \quad M' \in \sigma_2'. \tag{7.1.24}$$

Подставим равенства (7.1.21) (или (7.1.21′)) в условия (7.1.16) и учтём, что этим условиям удовлетворяет обобщённый потенциал $\varphi_0(M')$. Находим для $\varphi_*(M')$ условия на $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$:

$$\varphi_*^+(M') = 0, \quad M' \in \sigma_{01}'; \quad \left(\chi(M')\frac{\partial\varphi_*(M')}{\partial n_{M'}}\right)^+ = 0, \quad M' \in \sigma_{02}'. \tag{7.1.25}$$

Подставляя равенства (7.1.21) в условия (7.1.19′) и учитывая равенства

$$\varphi_0^+(M') = \varphi_0^-(M') = \varphi_0(M'), \quad \left(\frac{\partial\varphi_0(M')}{\partial n_{M'}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_0(M')}{\partial n_{M'}}\right)^-, \quad M' \in \Gamma',$$

имеем для $\varphi_*(M')$ условия сопряжения на Γ':

$$(1-\lambda_k)\varphi_*^+(M') - (1+\lambda_k)\varphi_*^-(M') = 2\lambda_k\varphi_0(M'),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M')}{\partial n_{M'}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_*(M')}{\partial n_{M'}}\right)^- \quad \left(\lambda_k = \frac{k_1^0 - k_2^0}{k_1^0 + k_2^0}\right), \quad M' \in \Gamma'. \tag{7.1.26}$$

Обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ не имеет особых точек в бесконечности, поскольку все заданные особые точки течения (в том числе и в бесконечности) входят в обобщённый потенциал $\varphi_0(M')$. Поэтому для $\varphi_*(M')$ можно потребовать выполнения условий (7.1.17), то есть

$$\varphi_*(M') = O\left(\frac{1}{\rho_{M'N'}}\right), \quad \chi(M')|\nabla\varphi_*(M')| = O\left(\frac{1}{\rho_{M'N'}^2}\right) \quad \text{при} \quad \rho_{M'N'} \to \infty, \tag{7.1.27}$$

где $\rho_{M'N'}$ — расстояние от точки $M' \in D'$ (в общем случае $D' = D_1' \cup D_2'$) до любой точки $N' \in \sigma_0' \cup \sigma_1' \cup \sigma_2' \cup \Gamma'$.

Условия (7.1.27) означают, что обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ и соответствующая ему скорость возмущений

$$v_*(M') = \chi(M')|\nabla\varphi_*(M')|$$

стремятся к нулю равномерно (одинаково по всем направлениям).

Постановки основных граничных задач стационарного течения заключаются в следующем. Заданы источники (стоки) течения в ортотропной пористой среде заданной проницаемости (задан обобщённый потенциал $\varphi_0(M'))$. Найти обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$, удовлетворяющий уравнению (7.1.9) в области D' и условию (7.1.22) (первая краевая задача, задача Дирихле) или условию (7.1.24) (вторая краевая задача, задача Неймана) или условию (7.1.26) (задача сопряжения).

Разрешимость и единственность решений поставленных задач указана в теоремах (1.5.1)–(1.5.4).

Заметим, что вторая внутренняя краевая задача (задача Неймана) разрешима, если согласно равенств (1.5.18$'$) и (7.1.24) выполняется условие отсутствия потока жидкости через непроницаемую поверхность σ_2':

$$\int\limits_{\sigma_2'} \chi(M') \frac{\partial \varphi_0(M')}{\partial n_{M'}} d\sigma_{M'} = 0. \tag{7.1.28}$$

Согласно уравнению неразрывности условие (7.1.28) означает, что суммарная мощность источников (стоков) в области D', ограниченной поверхностью σ_2', равна нулю.

Отметим, что если область D' ограничена частично или полностью сингулярной поверхностью $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$, то обобщённый потенциал $\varphi_*(M')$ должен удовлетворять условиям (7.1.25). Если же область D' содержит бесконечно удалённую точку (случай внешних задач), то помимо указанных условий обобщённый потенциал $\varphi_*(M')$ должен отвечать условиям (7.1.27).

Заметим также, что в задачах могут присутствовать сразу несколько из указанных границ σ_1', σ_2' и Γ'.

После того, как найден обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$, на основании соответствующих формул (7.1.21) и (7.1.21$'$) с применением преобразований (7.1.1) отыскиваются обобщённые потенциалы $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1, 2, 3$ (в задаче сопряжения) и $\varphi(M)$ (в первой и второй краевых задачах).

Теперь рассмотрим нестационарную трёхмерную задачу эволюции границы раздела жидкостей. Сформулируем её в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ для обобщённого потенциала возмущений. Пусть обобщённый потенциал $\varphi_0(M', t)$ описывает течение однородной жидкости ($\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\rho_1 =$

$= \rho_2 = 1$) в ортотропной, вообще говоря, неоднородной среде проницаемости $\chi(M')$, занимающую область D'.

Изолированные особые точки обобщённого потенциала $\varphi_0(M', t)$ моделируют заданные источники (стоки) течения, которые расположены произвольно в области D'. Полагаем, что $\varphi_0(M', t)$ удовлетворяет условиям (7.1.16) на сингулярной поверхности σ_0', если она ограничивает область D'. Жидкости вязкости, плотности μ_1, ρ_1 и μ_2, ρ_2 занимают области D_1' и D_2' ($D' = D_1' \cup D_2'$). Учтём источники (стоки) течения и представим искомый обобщённый потенциал $\varphi(M', t)$ в области D' следующим образом

$$\varphi(M', t) = \varphi_0(M', t) + \varphi_*(M', t), \quad M' \in D', \tag{7.1.29}$$

где $\varphi_*(M', t)$ — обобшённый потенциал возмущений, обусловленных различием вязкостей и плотностей жидкостей.

Подставим (7.1.29) в условия (7.1.20) и учтём, что на границе Γ_t' обобщённый потенциал $\varphi_0(M', t)$ и его производная по нормали к ней непрерывны:

$$\varphi_0^+(M', t) = \varphi_0^-(M', t) = \varphi_0(M', t),$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_0(M', t)}{\partial n_{M'}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_0(M', t)}{\partial n_{M'}}\right)^-, \quad M' \in \Gamma_t'.$$

Получим для обобщённого потенциала $\varphi_*(M', t)$ условия

$$\mu_1\varphi_*^+(M', t) - \mu_2\varphi_*^-(M, t) = (\mu_2 - \mu_1)\varphi_0(M', t) + (\rho_2 - \rho_1)\Pi(M', t),$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_*(M', t)}{\partial n_{M'}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_*(M', t)}{\partial n_{M'}}\right)^-, \quad M' \in \Gamma_t'. \tag{7.1.30}$$

Учитывая, что $\varphi_0(M', t)$ удовлетворяет условиям (7.1.16) на поверхности $\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$, имеем на этой поверхности условия для $\varphi_*(M', t)$:

$$\varphi_*^+(M', t) = 0, \quad M' \in \sigma_{01}'; \quad \left(\chi(M')\frac{\partial\varphi_*(M', t)}{\partial n_{M'}}\right)^+ = 0, \quad M' \in \sigma_{02}'. \tag{7.1.31}$$

В случае, когда область D' содержит бесконечно удалённую точку, то для единственности нахождения обобщённого потенциала $\varphi_*(M', t)$ потребуем выполнения условий (аналогичных (7.1.27))

$$\varphi_*(M, t) = O\left(\frac{1}{\rho_{M'N'}}\right), \; \chi(M')|\nabla\varphi_*(M, t)| = O\left(\frac{1}{\rho_{M'N'}^2}\right) \text{ при } \rho_{M'N'} \to \infty, \tag{7.1.32}$$

где $\rho_{M'N'}$ — расстояние между точками $M' \in D'$ и $N' \in \Gamma_t' \cup \sigma_0'$.

Учтём, что время t — параметр, на основании формул (7.1.8) и (7.1.29) имеем в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ поле скоростей течения

$$\vec{v}(M', t) = \chi(M')\big[\nabla\varphi_0(M', t) + \nabla\varphi_*(M', t)\big], \quad M' \in D'. \tag{7.1.33}$$

Границу Γ_t' представляем в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ параметрически (s_1, s_2 — параметры)

$$\vec{\rho}_{M'} = \vec{\rho}_{M'}(t, s_1, s_2) \quad (\xi_i = \xi_i(t, s_1, s_2), \quad i = 1, 2, 3), \quad M' \in \Gamma_t', \tag{7.1.34}$$

и полагаем её заданной в начальный момент $t = 0$ ($\Gamma_t' = \Gamma_0'$):

$$\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}_{M'}(0, s_1, s_2) \quad (\xi_{i0} = \xi_i(0, s_1, s_2), \quad i = 1, 2, 3), \quad M' \in \Gamma_0'. \tag{7.1.35}$$

Так как согласно преобразований (7.1.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{\frac{k_i}{k_0}}\frac{d\xi_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3,$$

то из уравнения (1.3.27) при учёте формул (7.1.11) и (7.1.33) следует дифференциальное уравнение движения границы Γ_t' в следующем виде: векторном

$$\frac{d\vec{\rho}_{M'}}{dt} = k_0\chi(M')\Bigg[\nabla\varphi_0(M', t) + \tag{7.1.36}$$
$$+ \frac{\big(\nabla\varphi_*(M', t)\big)^+ + \big(\nabla\varphi_*(M', t)\big)^-}{2}\Bigg], \quad M' \in \Gamma_t'$$

и координатном

$$\frac{d\xi_i}{dt} = k_0\chi(M')\Bigg\{\frac{\partial\varphi_0(M', t)}{\partial\xi_i} + \frac{1}{2}\Bigg[\Big(\frac{\partial\varphi_*(M', t)}{\partial\xi_i}\Big)^+ + \Big(\frac{\partial\varphi_*(M', t)}{\partial\xi_i}\Big)^-\Bigg]\Bigg\}, \tag{7.1.36$'$}$$
$$i = 1, 2, 3, \quad M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Gamma_t'.$$

Итак, задача эволюции границы раздела жидкостей формулируется в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ следующим образом. Заданы источники (стоки) течения в ортотропной среде заданной проницаемости (задан обобщённый потенциал $\varphi_0(M', t)$). Заданы вязкости и плотности жидкостей и начальное положение границы Γ_0' их раздела. Найти положение границы Γ_t' в последующие моменты времени $t > 0$.

Решение задачи состоит в отыскании обобщённого потенциала $\varphi_0(M', t)$ и координат $\vec{\rho}_{M'} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ границы Γ'_t при $t > 0$ из системы уравнений (7.1.9) для $\varphi_*(M', t)$ и (7.1.36) (или (7.1.36$'$))для Γ'_t, при выполнении условий (7.1.30), (7.1.35), а также условий (7.1.31) и/или (7.1.32), если область D' ограничена сингулярной поверхностью σ'_0 и/или содержит бесконечно удалённую точку.

Если область D' имеет границы σ'_1, σ'_2 и Γ', то решение задачи эволюции Γ'_t должно отвечать указанным выше условиям на них, которые пригодны также в нестационарном случае.

После того как найдено положение границы (7.1.34), а в случае надобности по формуле (7.1.29) — обобщённый потенциал $\varphi(M', t)$, то на основании преобразований (7.1.1) отыскиваем при $t > 0$ в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ границу Γ_t: $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t, s_1, s_2)$ ($x_i = x_i(t, s_1, s_2)$, $i = 1, 2, 3$) и обобщённый потенциал $\varphi(M', t)$.

Таким образом, расмотренные выше граничные задачи формулируются для обобщённого потенциала возмущений в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ аналогично тому, как это сделано в случае изотропной среды. Это позволяет для их решения использовать развитые в монографии [117] методы.

§ 7.2. Стационарные задачи с каноническими границами

Задачи с плоскими границами

Пусть пористая среда ортотропная (кусочно-ортотропная) и однородная. Её тензор проницаемости $K = (K_{i,j})$ постоянный (кусочно-постоянный). В переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ (граница σ_0, естественно, отсутствует) моделируем плоскостью, уравнение которой $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$. Согласно преобразованиям (7.1.1) в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ уравнение этой плоскости $\xi_1 = 0$, $\xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty)$.

Решение задачи сопряжения выражает

Теорема 7.2.1 *(теорема сопряжения на плоскости). Пусть трёхмерное течение в безграничной ортотропной однородной пористой среде постоянной проницаемости K ($K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$) описывает в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ обобщённый потенциал $\varphi_0(M)$, который имеет изолированные особые точки всюду в пространстве за исключением плоскости $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$,* *делящей пространство на области* $D_1(x_1 > 0)$ *и* $D_2(x_1 < 0)$. *Это течение описывает в переменных* ξ_i, $i = 1,2,3$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(M')$, *который имеет те же изолированные особые точки в областях* $D'_1(\xi_1 > 0)$ *и* $D'_2(\xi_1 < 0)$. *Пусть* $\varphi_0(M')$ *можно представить в виде* $\varphi_0(M') = \varphi_{01}(M') + \varphi_{02}(M')$, *где функции* $\varphi_{01}(M')$ *и* $\varphi_{02}(M')$ *имеют особые точки в* $D'_1(\xi_1 > 0)$ *и* $D'_2(\xi_1 < 0)$, *причём*

$$\varphi_0(M') = O\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \quad \textit{при} \quad \rho = \Big[\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2\Big]^{1/2} \to \infty. \tag{7.2.1}$$

Тогда течение в сопрягающихся на границе $\Gamma: x_1 = 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$ *областях* $D_1(x_1 > 0)$ *и* $D_2(x_1 < 0)$ *пористой среды постоянных проницаемостей* K_1^0 *и* K_2^0 ($K_\nu^0 = k_\nu^0 K$, $K_{ij} = K_i \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, $k_\nu^0 > 0$ — *постоянные* , $\nu = 1,2$) *описывают обобщённые потенциалы*

$$\begin{aligned} \varphi_1(M) &= \frac{1}{k_1^0}\Big\{\varphi_0(M') + \lambda_k\Big[\varphi_{01}(M'_*) + \varphi_{02}(M')\Big]\Big\}, \quad M \in D_1, \\ \varphi_2(M) &= \frac{1}{k_2^0}\Big\{\varphi_0(M') - \lambda_k\Big[\varphi_{01}(M') + \varphi_{02}(M'_*)\Big]\Big\}, \quad M \in D_2, \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

где $M = (x_1, x_2, x_3)$, $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M'_* = (-\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_i = \sqrt{k_0/k_i}\, x_i$, $i = 1,2,3$, $\lambda_k = (k_1^0 - k_2^0)/(k_1^0 + k_2^0)$, $\lambda_k \in (-1, 1)$.

Доказательство. По условию теоремы функции $\varphi_{01}(M')$ и $\varphi_{02}(M')$ имеют изолированные особые точки в областях $D'_1(\xi_1 > 0)$ и $D'_2(\xi_1 < 0)$ и, следовательно, они гармонические (удовлетворяют уравнению (7.1.9′)) в областях D'_2 и D'_1. Продолжим функции $\varphi_{01}(M')$, $M' \in D'_2$ и $\varphi_{02}(M')$, $M' \in D'_1$ соответственно в области D'_1 и D'_2. Согласно принципу симметрии (точки $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M'_* = (-\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ симметричны относительно плоскости $\xi_1 = 0$) получаем гармонические функции $\varphi_{01}(M'_*)$, $M' \in D'_1$ и $\varphi_{02}(M'_*)$, $M' \in D'_2$. Тогда обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ — гармоническая функция, которую представим в виде

$$\varphi_*(M') = \begin{cases} A\big[\varphi_{01}(M'_*) + \varphi_{02}(M')\big], & M' \in D'_1, \\ \\ B\big[\varphi_{01}(M') + \varphi_{02}(M'_*)\big], & M' \in D'_2, \end{cases} \tag{7.2.3}$$

где A и B — постоянные.

Подставим потенциал (7.2.3) в условия (7.1.26) и учтём, что на границе Γ': $\xi_1 = 0$, $\xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty)$ областей D'_1 и D'_2 орт нормали $\vec{n}_{M'}$

совпадает с осью $O\xi_1$. Учитывая

$$\frac{\partial\varphi_{0\nu}(M')}{\partial\xi_1} = -\frac{\partial\varphi_0(M'_*)}{\partial(-\xi_1)}, \quad \nu = 1, 2$$

и равенства на границе Γ':

$$\varphi^+_{0\nu}(M') = \varphi^-_{0\nu}(M') = \varphi_{0\nu}(M'),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{0\nu}(M')}{\partial\xi_1}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi_{0\nu}(M')}{\partial\xi_1}\right)^- = \frac{\partial\varphi_{0\nu}(M')}{\partial\xi_1}, \quad \nu = 1, 2,$$

находим, что условия (7.1.26) обращаются в тождества, если коэффициенты $A = \lambda_k$ и $B = -\lambda_k$. Подставим эти коэффициенты в выражение (7.2.3).

В силу условия (7.2.1) обобщённый потенциал возмущений (7.2.3) удовлетворяет условиям в бесконечности (7.1.27). Подставляя найденное $\varphi_*(M')$ в формулу (7.1.21), находим искомые обобщённые потенциалы (7.2.2). ■

Пусть теперь плоскость $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$ является границей водоёма σ_1 или непроницаемой границей σ_2 и трёхмерное течение происходит, например, в области D $(x_1 > 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty))$. Решения задач выражает

Теорема 7.2.2. *Пусть трёхмерное течение в безграничной ортотропной однородной среде постоянной проницаемости K ($K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$) описывает в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ обобщённый потенциал $\varphi_0(M)$, который имеет изолированные особые точки в полупространстве $x_1 > 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$. Это течение описывает в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ обобщённый потенциал $\varphi_0(M')$, который имеет те же изолированные особые точки в полупространстве $\xi_1 > 0$, $\xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty)$, причём*

$$\varphi_0(M') = O\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \quad \textit{при} \quad \rho = \left[\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2\right]^{1/2} \to \infty.$$

Тогда течение в области D пористой среды той же проницаемости K, ограниченной плоскостью $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \in (-\infty, \infty)$, являющейся границей водоёма σ_1 или непроницаемой границей σ_2, описывает обобщённый потенциал

$$\varphi(M) = \varphi_0(M') - \varphi_0(M'_*), \quad M \in D, \tag{7.2.4}$$

или

$$\varphi(M) = \varphi_0(M') + \varphi_0(M'_*), \quad M \in D, \tag{7.2.5}$$

где $M = (x_1, x_2, x_3)$, $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M'_* = (-\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_i = \sqrt{k_0/k_i}x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Функция $\varphi_0(M'_*)$ — гармоническая всюду в области D' $(\xi_1 > 0,\ \xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty))$, так как её изолированные особые точки располагаются в области $\widetilde{D}'$ $(\xi_1 < 0,\ \xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty))$, зеркально симметричной области D' относительно плоскости $\xi_1 = 0$, $\xi_2, \xi_3 \in (-\infty, \infty)$. Убеждаемся, что обобщённые потенциалы возмущений $\varphi_*(M') = -\varphi_0(M'_*)$ и $\varphi_*(M') = \varphi_0(M'_*)$ удовлетворяют соответственно условиям (7.1.23) при $f_0(M') = 0$ и (7.1.24) (орт $\vec{n}_{M'}$ совпадает с осью $O\xi_1$), а в силу $\varphi_0(M') = O(1/\rho)$ при $\rho \to \infty$ также условиям в бесконечности (7.1.27). ■

Заметим, что решения (7.2.4) и (7.2.5) следуют как предельные случаи из $\varphi_1(M)$ выражения (7.2.2), если в нём положить $\varphi_{02}(M') = 0$, $k_1^0 = 1$, $k_2^0 \to \infty$ $(\lambda_k \to -1)$ и $k_2^0 \to 0$ $(\lambda_k \to +1)$.

Задачи с эллипсоидальными границами

Пусть, по-прежнему, среда ортотропная (кусочно-ортотропная) и однородная и её тензор проницаемости K постоянный (кусочно-постоянный). Рассмотрим теперь случай, когда каждую из границ , σ_1, σ_2 и Γ можно моделировать в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ поверхностью эллипсоида с центром в начале координат и полуосями a_i, уравнение которой

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad \left(a_i = a\sqrt{\frac{k_i}{k_0}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad a = \mathrm{const} > 0\right). \tag{7.2.6}$$

Этой поверхности согласно преобразованиям (7.1.1) отвечает в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ сфера радиуса a с центром в начале координат :

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = a^2. \tag{7.2.7}$$

Решение задачи соряжения даёт

Теорема 7.2.3 *(теорема сопряжения на поверхности эллипсоида). Пусть трёхмерное течение в безграничной ортотропной и однородной* *пористой среде постоянной проницаемости* K $(K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, δ_{ij} — *символ Кронекера,* $i,j = 1,2,3)$ *описывает в переменных* x_i, $i = 1,2,3$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(M)$, *который имеет изолированные особые точки всюду в пространстве за исключением поверхности эллипсоида* (7.2.6), *делящей пространство на области* D_1 *(вне) и* D_2 *(внутри) поверхности эллипсоида. Это течение описывает в переменных* ξ_i, $i = 1,2,3$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(M')$, *который имеет те же изолированные особые точки в областях* D_1' *и* D_2' *(вне и внутри сферы* (7.2.7)*). Пусть* $\varphi_0(M')$ *можно представить в виде* $\varphi_0(M') = \varphi_{01}(M') + \varphi_{02}(M')$, *где функции* $\varphi_{01}(M')$ *и* $\varphi_{02}(M')$ *имеют особые точки в* D_1' *и* D_2', *причём* $\left(\rho = \Bigl[\sum\limits_{i=1}^{3}\xi_i^2\Bigr]^{1/2}\right)$

$$\varphi_{01}(M') = O(\rho) \quad \textit{при} \quad \rho \to 0, \quad \varphi_{02}(M') = O\Bigl(\frac{1}{\rho^2}\Bigr) \quad \textit{при} \quad \rho \to \infty. \tag{7.2.8}$$

Тогда течение в сопрягающихся на границе Γ (7.2.6) *областях* D_1 *и* D_2 *пористой среды постоянных проницаемостей* K_1^0 *и* K_2^0 $(K_\nu^0 = k_\nu^0 K$, $K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, $k_\nu^0 > 0$ — *постоянные* , $\nu = 1,2)$ *описывают обобщённые потенциалы* $\varphi_1(M)$ *и* $\varphi_2(M)$:

$$\begin{aligned} k_1^0\varphi_1(M) &= \varphi_{01}(M') + \frac{\lambda_k a}{\rho}\Bigl[\varphi_{01}(M_*') + (1+\lambda_k)\Phi_1(M_*')\Bigr] + \\ &\qquad + (1+\lambda_k)\Bigl[\varphi_{02}(M') - \lambda_k\Phi_2(M')\Bigr], \quad M \in D_1, \\ k_2^0\varphi_2(M) &= \varphi_{02}(M') - \frac{\lambda_k a}{\rho}\Bigl[\varphi_{02}(M_*') + (1-\lambda_k)\Phi_2(M_*')\Bigr] + \\ &\qquad + (1-\lambda_k)\Bigl[\varphi_{01}(M') + \lambda_k\Phi_1(M')\Bigr], \quad M \in D_2, \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

где

$$\Phi_\alpha(M') = -\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_\alpha}^{1} \tau^{\sigma_\alpha - 1}\varphi_{0\alpha}(M'\tau)d\tau,$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\bigl[1 + (-1)^{\alpha+1}\lambda_k\bigr], \quad \alpha = 1,2, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \infty,$$

$\lambda_k = (k_1^0 - k_2^0)/(k_1^0 + k_2^0)$, $M = (x_1,x_2,x_3)$, $M' = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $M'\tau = (\xi_1\tau,\xi_2\tau,\xi_3\tau)$, $M_*' = (\frac{a^2}{\rho^2}\xi_1, \frac{a^2}{\rho^2}\xi_2, \frac{a^2}{\rho^2}\xi_3)$, $\xi_i = \sqrt{(k_0)/(k_i)}x_i$, $i = 1,2,3$.

Доказательство. По условию теоремы функции $\varphi_{01}(M')$ и $\varphi_{02}(M')$ имеют особые точки в D_1' и D_2' и поэтому они гармонические (удовлетворяют уравнению Лапласа (7.1.9$'$)) всюду в областях D_2' и D_1' соответственно. Отсюда следует, что функции $\Phi_1(M')$ и $\Phi_2(M')$, определяемые сходящимися в силу условий (7.2.8) интегралами будут гармоническими в областях D_2' и D_1'.

Точки пространства $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M_*' = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*) = = (\frac{a^2}{\rho^2}\xi_1, \frac{a^2}{\rho^2}\xi_2, \frac{a^2}{\rho^2}\xi_3)$ взаимосвязаны преобразованиями инверсии относительно сферы Γ': (7.2.7), которые имеют вид

$$\xi_i^* = \frac{a^2\xi_i}{\rho^2} \quad \bigl(\rho^2 = \sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\bigr), \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.2.10}$$

На сфере Γ': $\rho = a$ функции $\varphi_{0\alpha}(M')$ и $\Phi_\alpha(M')$, $\alpha = 1, 2$ совпадают соответственно с функциями $\dfrac{a}{\rho}\varphi_{0\alpha}(M')$ и $\dfrac{a}{\rho}\Phi_\alpha(M')$, $\alpha = 1, 2$. Функции $\dfrac{a}{\rho}\varphi_{01}(M_*')$ и $\dfrac{a}{\rho}\Phi_1(M_*')$ ($\dfrac{a}{\rho}\varphi_{02}(M_*')$ и $\dfrac{a}{\rho}\Phi_2(M_*')$), являясь аналитическими продолжениями в область D_1' (D_2') функций $\varphi_{01}(M')$ и $\Phi_1(M')$ ($\varphi_{02}(M')$ и $\Phi_2(M')$) будут гармоническими согласно теореме Кельвина [34] всюду в области D_1' (D_2').

Обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ как гармоническую функцию ищем в виде

$$\varphi_*(M') = \begin{cases} A_1\Bigl\{\dfrac{a}{\rho}\bigl[\varphi_{01}(M_*') + 2\sigma_1\Phi_1(M_*')\bigr] + \varphi_{02}(M')\Bigr\} + C_1\Phi_2(M'), M' \in D_1', \\[2ex] A_2\Bigl\{\dfrac{a}{\rho}\bigl[\varphi_{02}(M_*') + 2\sigma_2\Phi_2(M_*')\bigr] + \varphi_{01}(M')\Bigr\} + C_2\Phi_1(M'), M' \in D_2', \end{cases} \tag{7.2.11}$$

где A_α, C_α ($\alpha = 1, 2$) — постоянные. Эти постоянные найдём, подставив обобщённый потенциал (7.2.11) в условия (7.1.26) (орт $\vec{n}_{M'}$ направлен по радиусу сферы наружу). Предварительно вычислим

$$\frac{\partial\Phi_\alpha(M')}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_\alpha}^{1} \tau^{\sigma_\alpha - 1}\frac{\partial}{\partial r}\varphi_{0\alpha}(M'\tau)d\tau, \quad \alpha = 1, 2.$$

Отсюда после интегрирования по частям с учётом условий (7.2.8) имеем равенства

$$2\rho\frac{\partial\Phi_\alpha(M')}{\partial\rho}+2\sigma_\alpha\Phi_\alpha(M')=-\varphi_{0\alpha}(M'),\quad \alpha=1,2. \tag{7.2.12}$$

В силу преобразований (7.2.10) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\rho_*}=-\frac{\rho^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\quad\left(\rho_*=\Big(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^{*2}\Big)^{1/2}=\frac{a^2}{\rho}\right).$$

Тогда на сфере Γ' $(\xi_i=\xi_i^*,\ i=1,2,3)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial\varphi_{0\alpha}(M')}{\partial\rho}=-\frac{\partial\varphi_{0\alpha}(M'_*)}{\partial\rho_*},\quad \frac{\partial\Phi_\alpha(M')}{\partial\rho}=-\frac{\partial\Phi_\alpha(M'_*)}{\partial\rho_*},\quad \alpha=1,2.$$

Учтём эти равенства, а также (7.2.12) и после подстановки обобщённого потенциала (7.2.11) в условия (7.1.26) имеем систему равенств

$$\big[(1-\lambda_k)A_1-(1+\lambda_k)A_2-2\lambda_k\big]\varphi_0(M')+\big[2\sigma_1(1-\lambda_k)A_1-(1+\lambda_k)C_2\big]\Phi_1(M')+$$

$$+\big[(1-\lambda_k)C_1-2\sigma_2(1+\lambda_k)A_2\big]\Phi_2(M')=0,$$

$$(A_1+A_2)\frac{\partial}{\partial\rho}\big[\varphi_{02}(M')-\varphi_{01}(M')\big]+\big[2A_1(1-\sigma_1)-C_2\big]\frac{\partial\Phi_1(M')}{\partial\rho}+$$

$$+\big[C_1-2A_2(1-\sigma_2)\big]\frac{\partial\Phi_2(M')}{\partial\rho}=0.$$

Эта система равенств будет выполняться в каждой точке границы Γ': $\rho=a$, если коэффициенты $A_1=\lambda_k$, $A_2=-\lambda_k$, $C_1=-\lambda_k(1+\lambda_k)$, $C_2=\lambda_k(1-\lambda_k)$. Подставим эти коэффициенты в обобщённый потенциал возмущений (7.2.11).

Обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ $M'\in D_1'$ отвечает условиям (7.1.27). Подставляя найденное $\varphi_*(M')$ в формулу (7.1.21), имеем искомые обобщённые потенциалы (7.2.9). ■

Пусть теперь поверхность эллипсоида (7.2.6) является границей водоёма σ_1 или непроницаемой границей σ_2. Трёхмерное течение может происходить вне либо внутри эллипсоида. Решение задач выражает

Теорема 7.2.4. *Пусть трёхмерное течение в безграничной ортотропной и однородной пористой среде постоянной проницаемости* K ($K_{ij} = K_i\delta_{ij}$, δ_{ij} *— символ Кронекера,* $i,j = 1,2,3$) *описывает в переменных* x_i, $i = 1,2,3$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(M)$, *который имеет изолированные особые точки вне или внутри эллипсоида. Это течение описывает в переменных* ξ_i, $i = 1,2,3$ *обобщённый потенциал* $\varphi_0(M')$, *который имеет те же изолированные особые точки и удовлетворяет условию* ($\rho = \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\xi_i^2\right)^{1/2}$)

$$\varphi_0(M') = O(\rho) \quad \textit{при} \quad \rho \to 0, \tag{7.2.13}$$

если его особые точки лежат на расстоянии $\rho > a$ *от начала координат и условию*

$$\varphi_0(M') = O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big) \quad \textit{при} \quad \rho \to \infty, \tag{7.2.14}$$

если его особые точки расположены на расстоянии $\rho < a$.

Тогда течение в области D *пористой среды той же проницаемости* K, *ограниченной поверхностью эллипсоида* (7.2.6), *являющейся границей водоёма* σ_1 *или непроницаемой границей* σ_2 [1] *описывает обобщённый потенциал*

$$\varphi_0(M) = \varphi_0(M') - \frac{a}{\rho}\varphi_0(M'_*) \quad M \in D \tag{7.2.15}$$

или

$$\varphi_0(M) = \varphi_0(M') + \frac{a}{\rho}\Big[\varphi_0(M'_*) - \int\limits_{p}^{1}\varphi_0(M'\tau)d\tau\Big], \quad M \in D, \tag{7.2.16}$$

где

$$p = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad M' \in D' \quad (\rho > a), \\ \infty, & \textit{если} \quad M' \in D' \quad (\rho < a), \end{cases}$$

$$M = (x_1, x_2, x_3), \quad M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$M'\tau = (\xi_1\tau, \xi_2\tau, \xi_3\tau), \quad M'_* = \Big(\frac{a^2\xi_1}{\rho^2}, \frac{a^2\xi_2}{\rho^2}, \frac{a^2\xi_3}{\rho^2}\Big).$$

[1] В случае, когда внутри непроницаемой поверхности эллипсоида расположены источники и стоки, то дополнительно к условию (7.2.14) необходимо потребовать, чтобы их суммарная мощность была равна нулю. Это обеспечивает отсутствие потока через поверхность эллипсоида.

Доказательство. Обозначим интегралы

$$\Phi_p(M') = \int\limits_p^1 \varphi_0(M'\tau)d\tau. \qquad (7.2.17)$$

Причём $\Phi_p(M') = \Phi_0(M')$ при $M' \in D'$ $(\rho > a)$, $p = 0$ и $\Phi_p(M') = \Phi_\infty(M')$ при $M' \in D'$ $(\rho < a)$, $p = \infty$. Эти интегралы сходятся в силу условий (7.2.13) и (7.2.14).

Если функция $\varphi_0(M')$ имеет особые точки вне (или внутри) сферы (7.2.7), то функции $\varphi_0(M')$, $\Phi_0(M')$ (или $\varphi_0(M')$, $\Phi_\infty(M')$) являются гармоническими всюду внутри (или вне) этой сферы. Тогда функции $\dfrac{a}{\rho}\varphi_0(M'_*)$, $\dfrac{a}{\rho}\Phi_0(M'_*)$ (или $\dfrac{a}{\rho}\varphi_0(M'_*)$, $\dfrac{a}{\rho}\Phi_\infty(M'_*)$) являясь аналитическими продолжениями вне (или внутрь) сферы функций $\varphi_0(M')$, $\Phi_0(M')$ (или $\varphi_0(M')$, $\Phi_\infty(M')$) будут гармоническими согласно теореме Кельвина [34] всюду вне (или внутри) этой сферы.

Следовательно, будут гармоническими всюду в области D' обобщённые потенциалы возмущений в случае границы σ'_1:

$$\varphi_*(M') = -\frac{a}{\rho}\varphi_0(M'_*) \qquad (7.2.18)$$

и границы σ'_2:

$$\varphi_*(M') = \frac{a}{\rho}\Big[\varphi_0(M'_*) - \Phi_p(M'_*)\Big]. \qquad (7.2.19)$$

Убеждаемся, что обобщённый потенциал (7.2.18) удовлетворяет на границе σ'_1: $\rho = a$ условию (7.1.12) при $f_0(M') = 0$.

Убедимся теперь, что обобщённый потенциал (7.2.19) удовлетворяет условию (7.1.24), в котором орт нормали $\vec{n}_{M'}$ направлен наружу сферы по её радиусу. Предварительно дифференцируем по ρ интеграл (7.2.17), находим

$$\frac{\partial \Phi_p(M')}{\partial \rho} = \int\limits_p^1 \frac{\partial}{\partial \rho}\varphi_0(M'\tau)d\tau.$$

Отсюда, после интегрирования по частям с учётом условий (7.2.13) и (7.2.14), имеем

$$\rho\frac{\partial \Phi_p(M')}{\partial \rho} + \Phi_p(M') = \varphi_0(M'). \qquad (7.2.20)$$

Согласно преобразованиям (7.2.10) $\dfrac{\partial}{\partial\rho_*} = \dfrac{\rho^2}{a^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ $\left(\rho_* = \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\xi_i^{*2}\right)^{1/2}\right)$ и, следовательно, на сфере ($\xi_i = \xi_i^*$, $i = 1, 2, 3$) имеют место равенства

$$\frac{\partial\varphi_0(M')}{\partial\rho} = -\frac{\partial\varphi_0(M'_*)}{\partial\rho_*}, \quad \frac{\partial\Phi_p(M')}{\partial\rho} = -\frac{\partial\Phi_p(M'_*)}{\partial\rho_*}.$$

Учитывая эти равенства, а также формулу (7.2.20), убеждаемся, что после подстановки обобщённого потенциала (7.2.19) в условие (7.1.24) оно обращается в тождество.

В силу условий (7.2.13) и (7.2.14) обобщённые потенциалы (7.2.18) и (7.2.19) отвечают условиям в бесконечности (7.1.27).

Подставляя обобщённые потенциалы (7.2.18) и (7.2.19) в формулу (7.1.21′), имеем искомые обобщённые потенциалы (7.2.15) и (7.2.16). ■

Формула (7.2.16) обобщает известное решение для обтекания непроницаемой сферы трёхмерным внешним потоком идеальной жидкости [89].

Заметим, что из теорем, доказанных для трёхмерных течений, следуют как частные случаи результаты для осесимметричных течений, полученных в § 5.4.

Отметим, что полученные решения трёхмерных задач нетрудно обобщить на случай, когда ортотропная (кусочно-ортотропная) пористая среда неоднородная, используя результаты, полученные в случае изотропной неоднородной среды [117].

§ 7.3. Интегральное представление обобщённого потенциала течения

Фундаментальное решение

Для исследования трёхмерных граничных задач течений в ортотропной пористой среде принципиальную значимость имеет фундаментальное решение основного уравнения (7.1.7). Поскольку это уравнение имеет канонический вид (7.1.9), характерный для трёхмерного течения в изотропной неоднородной пористой среде проницаемости $\chi(M')$, то укажем фундаментальное решение уравнения (7.1.9), а затем используя преобразования (7.1.1) запишем его для исходного основного уравнения (7.1.7).

Следуя [117], *фундаментальным* решением уравнения (7.1.9) в области D' назовём функцию $\Phi(M', M'_0)$, которая удовлетворяет условиям:

1) всюду в области D' по координатам точки $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ за исключением точки-параметра $M'_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})$ ($M' \neq M'_0$, M', $M'_0 \in D'$) функция $\Phi(M', M'_0)$ дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет уравнению (7.1.9);

2)функция $\Phi(M', M'_0)$ имеет в точке M'_0 изолированную сингулярность (особенность) определённого типа, а именно она имеет асимптотическое приближение

$$\Phi_(M', M'_0) \sim \frac{1}{4\pi\chi(M')R'} \quad \text{при} \quad R' \to 0, \tag{7.3.1}$$

где $R' = R_{M'_0 M'} = \Big[\sum\limits_{i=1}^{3} (\xi_i - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}$ — рассояние между точками M'_0 и M'.

В том случае, когда область D' ограничена (полностью либо частично) сингулярной поверхностью σ'_0 ($\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$), то можно (если это необходимо) дополнительно к указанным условиям 1 и 2 потребовать, чтобы решение $\Phi(M', M'_0)$ удовлетворяло на σ'_0 согласно формулам (7.1.16) следующим условиям

$$\Phi^+(M', M'_0) = 0, \quad M' \in \sigma'_{01}, \tag{7.3.2}$$

$$\left(\chi(M')\frac{\partial\Phi(M', M'_0)}{\partial n_{M'}}\right)^+ = 0, \quad M' \in \sigma'_{02}, \tag{7.3.3}$$

где производная берётся по направлению орта нормали к поверхности σ'_{02}.

Так как условия (7.3.2) и (7.3.3) имеют вид однородных условий первого и второго рода, то фундаментальное решение $\Phi(M', M'_0)$ в области $\overline{D}' = D' \cup \sigma'_0$ можно рассматривать как функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (7.1.9) в этой области.

Фундаментальное решение $\Phi(M', M'_0)$ имеет ясный гидродинамический смысл [117]. А именно, $\Phi(M', M'_0)$ — обобщённый потенциал точечного стока единичной мощности, который расположен в точке M'_0. Обобщённый потенциал $\varphi(M', M'_0)$ произвольной мощности Π источника ($\Pi > 0$) и стока ($\Pi < 0$) имеет вид

$$\varphi(M', M'_0) = -\Pi\Phi(M', M'_0). \tag{7.3.4}$$

Фундаментальное решение $\Phi(M', M'_0)$ обладает согласно [117] свойством симметрии ($\Phi(M', M'_0) = \Phi(M'_0, M')$) и вытекающим из него принципом взаимности, если оно дополнительно к названным выше условиям 1 и

2 удовлетворяет также условию[1]

$$\Phi(M', M_0') \to 0 \quad \text{при} \quad R' \to \infty. \tag{7.3.5}$$

Фундаментальное решение $\Phi(M', M_0')$ по переменным ξ_i, $i = 1, 2, 3$ имеет в точке M_0' согласно асимптотике (7.3.1) особенность $1/R'$. Выполняя в асимптотике (7.3.1) преобразования (7.1.1) и учитывая

$$\chi(M') = \chi(M)$$

$$(\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \chi(\sqrt{\frac{k_0}{k_1}}x_1, \sqrt{\frac{k_0}{k_2}}x_2, \sqrt{\frac{k_0}{k_3}}x_3) = \chi(x_1, x_2, x_3)),$$

находим в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ асимптотику фундаментального решения

$$\Phi(M, M_0) \sim \frac{1}{4\pi\chi(M)R} \quad \text{при} \quad R \to 0,$$

где $R = R_{M_0M} = \left[k_0 \sum \frac{(x_i - x_{0i})^2}{k_i}\right]^{1/2}$ — «расстояние» между точками $M_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ и $M = (x_1, x_2, x_3)$. Замечаем, что фундаментальное решение $\Phi(M, M_0)$ имеет в точке M_0 особенность $1/R$, то есть преобразования (7.1.1) не изменяют (оставляют прежним) порядок особенности фундаментального решения.

Фундаментальное решение $\Phi(M', M_0')$ определяется видом функции $\chi(M')$, характеризующей в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ неоднородность пористой среды. Воспользуемся, полученными в монографии [117] фундаментальными решениями в случаях классов изотропных неоднородных пористых сред, и найдём решения $\Phi(M', M_0')$ для классов ортотропных неоднородных пористых сред.

В случае, если коэффициент проницаемости среды K таков, что $\sqrt{\chi(M')}$ — гармоническая функция ($\Delta\sqrt{\chi(M')} = 0$), то

$$\Phi(M', M_0') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\chi(M')\chi(M_0')}R'} \quad \left(R' = \Big[\sum_{i=1}^{3}(\xi_i - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}\right). \tag{7.3.6}$$

Согласно преобразованиям (7.1.1) решению (7.3.6) отвечает в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ в случае среды проницаемости K ($K_{ij} = K_i\delta_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}$,

[1] Указанные далее решения $\Phi(M', M_0')$ удовлетворяют условию (7.3.5).

$i, j = 1, 2, 3$) фундаментальное решение

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\chi(M)\chi(M_0)}R} \quad \left(R = \left[k_0 \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - x_{0i})^2}{k_i}\right]^{1/2}\right). \qquad (7.3.7)$$

В частности, если ортотропная среда однородная $\chi(M) = \chi(M') = 1$, то

$$\Phi(M', M_0') = \frac{1}{4\pi R'} \quad \left(R' = \left[\sum_{i=1}^{3} (\xi_i - \xi_{0i})^2\right]^{1/2}\right), \qquad (7.3.6')$$

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} \quad \left(R = \left[k_0 \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - x_{0i})^2}{k_i}\right]^{1/2}\right). \qquad (7.3.7')$$

Когда область D' ограничена (полностью или частично) сингулярной поверхностью σ_0' ($\sigma_0' = \sigma_{01}' \cup \sigma_{02}'$), то можно потребовать, чтобы решение $\Phi(M', M_0')$ удовлетворяют на σ_0' условиям (7.3.2), (7.3.3) и его представляем в виде

$$\Phi(M', M_0') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\chi(M')\chi(M_0')}} \left[\frac{1}{R'} + g_1(M', M_0')\right]. \qquad (7.3.8)$$

Здесь $g_1(M', M_0')$ — гармоническая функция по координатам точки M' ($\Delta g_1(M', M_0') = 0$), вид которой определяется функцией $\chi(M')$ и, следовательно, условиями на σ_0'.

В качестве примера рассмотрим случай ортотропной среды проницаемости (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$K_{ij} = K_i \delta_{ij} = k_i x_3^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В этом случае функция $\chi(M) = x_3^2$ и плоскость $x_3 = 0$, $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ — сингулярная граница σ_{02}', на которой $K_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Течение может происходить в полупространстве D ($x_3 \geqslant 0$). Выбираем в преобразованиях (7.1.1) масштабный коэффициент $k_0 = k_3$. Находим, что плоскость $\xi_3 = 0$, $\xi_1, \xi_2 \in (-\infty, \infty)$ — сингулярная поверхность σ_{02}' и функция $\chi(M') = \xi_3^2$. Фундаментальное решение $\Phi(M', M_0')$ в области D' ($\xi_3 = 0$, $\xi_1, \xi_2 \in (-\infty, \infty)$) имеет согласно [117] вид

$$\Phi(M', M_0') = \frac{1}{4\pi\xi_3\xi_{03}} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_*'}\right), \qquad (7.3.9)$$

где $R' = \Big[\sum\limits_{i=1}^{3}(\xi_i - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}$, $R'_* = \big[(\xi_1-\xi_{01})^2+(\xi_2-\xi_{02})^2+(\xi_3+\xi_{03})^2\big]^{1/2}$, R'_* — расстояние между точками $M_0'^* = (\xi_{01},\xi_{02},-\xi_{03})$ и $M' = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, точка $M_0'^*$ — зеркально симметрична точке $M'_0 = (\xi_{01},\xi_{02},\xi_{03})$ относительно плоскости $\xi_3 = 0$.

Так как

$$\xi_3^2\frac{\partial\Phi(M',M'_0)}{\partial\xi_3} = \frac{1}{4\pi\xi_{03}}\left[\frac{1}{R'_*} - \frac{1}{R'} + \xi_3\Big(\frac{\xi_3+\xi_{03}}{R'^3_*} - \frac{\xi_3-\xi_{03}}{R'^3}\Big)\right],$$

то

$$\lim_{\xi_3\to 0}\left[\xi_3^2\frac{\partial\Phi(M',M'_0)}{\partial\xi_3}\right] = 0$$

и, следовательно, решение (7.3.9) удовлетворяет условию (7.3.3) на σ'_{02}: $\xi_3 = 0$, $\xi_1,\xi_2\in(-\infty,\infty)$.

Решение (7.3.9) согласно преобразованиям (7.1.1), в которых $k_0 = k_3$, принимает в переменных x_i, $i = 1,2,3$ следующий вид

$$\Phi(M,M_0) = \frac{1}{4\pi x_3 x_{03}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_*}\right),$$

где

$$R = \left[k_3\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i-x_{0i})^2}{k_i}\right]^{1/2},$$

$$R_* = \left[k_3\Big(\frac{(x_1-x_{01})^2}{k_1} + \frac{(x_2-x_{02})^2}{k_2} + \frac{(x_3+x_{03})^2}{k_3}\Big)\right]^{1/2}.$$

Пусть теперь коэффициент проницаемости среды K таков, что $\sqrt{\chi(M')}$ можно моделировать в переменных ξ_i, $i = 1,2,3$ метагармонической функцией, то есть $\sqrt{\chi(M')}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\sqrt{\chi(M')} - \mu^2\sqrt{\chi(M')} = 0, \qquad (7.3.10)$$

где μ — вещественная постоянная. Согласно [117] имеем в этом случае фундаментальное решение[1]

$$\Phi(M',M'_0) = \frac{e^{-\mu R'}}{4\pi\sqrt{\chi(M')\chi(M'_0)}R'} \quad \left(R' = \Big[\sum_{i=1}^{3}(\xi_i-\xi_{0i})^2\Big]^{1/2}\right). \qquad (7.3.11)$$

[1] Так как для отрицательных значений μ решение $\Phi(M',M'_0)$ неограничено возрастает при $R'\to\infty$, то далее полагаем $\mu > 0$.

Используя преобразования (7.1.1) и учитывая $\chi(M') = \chi(M)$, $\chi(M'_0) = \chi(M_0)$, находим в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ в случае среды проницаемости K ($K_{ij} = K_i\delta_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$) фундаментальное решение

$$\Phi(M, M_0) = \frac{e^{-\mu R}}{4\pi\sqrt{\chi(M)\chi(M_0)}R} \quad \left(R = \left[k_0\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i - x_{0i})^2}{k_i}\right]^{1/2}\right). \quad (7.3.12)$$

Если область D' ограничена сингулярной поверхностью $\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$, то фундаментальное решение $\Phi(M', M'_0)$ запишем

$$\Phi(M', M'_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\chi(M')\chi(M'_0)}}\left[\frac{e^{-\mu R'}}{R'} + g_2(M', M'_0)\right]. \qquad (7.3.13)$$

Здесь $g_2(M', M'_0)$ — метагармоническая функция, удовлетворяющая уравнению вида (7.3.10). Вид $g(M', M'_0)$ определяется функцией $\chi(M')$ и, следовательно, условиями на σ'_0.

В качестве примера рассмотрим случай среды проницаемости (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$K_{ij} = K_i\delta_{ij} = k_i\Big(a_1e^{\mu x_3} + a_2e^{-\mu x_3}\Big)^2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где a_1 и a_2 — вещественные постоянные. В этом случае функция

$$\chi(M) = \Big(a_1e^{\mu x_3} + a_2e^{-\mu x_3}\Big)^2.$$

Если a_1 и a_2 одинакового знака (одновременно положительные), то проницаемость K_{ij} принимает конечные не равные нулю значения во всех точках пространства, исключая бесконечно удалённую точку ($K_{ij} \to \infty$, $i, j = 1, 2, 3$ при $x_3 \to \infty$). Выберем в преобразованиях (7.1.1) масштабный коэффициент $k_0 = k_3$ и находим

$$\chi(M') = a_1e^{\mu\xi_3} + a_2e^{-\mu\xi_3}.$$

Тогда фундаментальное решение $\Phi(M', M'_0)$ имеет вид

$$\Phi(M', M'_0) = \frac{e^{-\mu R'}}{4\pi(a_1e^{\mu\xi_3} + a_2e^{-\mu\xi_3})(a_1e^{\mu\xi_{03}} + a_2e^{-\mu\xi_{03}})R'}, \qquad (7.3.14)$$

где

$$R' = \Big[\sum_{i=1}^{3}(\xi_i - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}.$$

Запишем решение (7.3.14) для некоторых частных случаев a_1 и a_2. При $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ имеем $\chi(M') = a_1 e^{2\mu\xi_3}$ и, следовательно,

$$\Phi(M', M'_0) = \frac{e^{-\mu R'}}{4\pi e^{\mu\xi_3} e^{\mu\xi_0} R'}. \tag{7.3.15}$$

Когда $a_1 = a_2 = 1/2$, то $\chi(M') = \operatorname{ch}^2 \mu\xi_3$ и, следовательно,

$$\Phi(M', M'_0) = \frac{e^{-\mu R'}}{4\pi \operatorname{ch} \mu\xi_3 \ \operatorname{ch} \mu\xi_{03} \ R'}. \tag{7.3.16}$$

Если a_1 и a_2 противоположны по знаку, то область D' будет иметь сингулярную границу σ'_{02} — плоскость: $\xi_3 = d$ $\left(d = \dfrac{1}{\mu} \ln \sqrt{-\dfrac{a_2}{a_1}}\right)$, на которой $\chi(M') = 0$. Не нарушая общности суждений, выберем начало координат на этой плоскости, положив $d = 0$. В частности, если $a_1 = -a_2 = 1/2$, то $\chi(M') = \operatorname{sh}^2 \mu\xi_0$ и решение (7.3.13) примет вид

$$\Phi(M', M'_0) = \frac{1}{4\pi \operatorname{sh} \mu\xi_3 \ \operatorname{sh} \mu\xi_{03}} \left[\frac{e^{-\mu R'}}{R'} - \frac{e^{-\mu R'_*}}{R'_*}\right], \tag{7.3.17}$$

где $R'_* = R_{M_0'^* M'} = \Big[(\xi_1 - \xi_{01})^2 + (\xi_2 - \xi_{02})^2 + (\xi_3 + \xi_{03})^2\Big]^{1/2}$ — расстояние между точками $M_0'^* = (\xi_{01}, \xi_{02}, -\xi_{03})$ и $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ (точка $M_0'^*$ — зеркально симметрична точке $M'_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})$ относительно плоскости $\xi_3 = 0$). Нетрудно убедиться, что решение (7.3.17) удовлетворяет на сингулярной плоскости σ'_{02}: $\xi_3 = 0$ согласно формуле (7.3.3) условию

$$\lim_{\xi_3 \to 0} \left[\operatorname{sh}^2 \mu\xi_3 \frac{\partial \Phi(M', M'_0)}{\partial \xi_3}\right] = 0.$$

Выполняя в решениях (7.3.14)–(7.3.17) преобразования (7.1.1), в которых $k_0 = k_3$, записываем их в переменных x_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\Phi(M, M_0) = \frac{e^{-\mu R}}{4\pi(a_1 e^{\mu x_3} + a_2 e^{-\mu x_3})(a_1 e^{\mu x_{03}} + a_2 e^{-\mu x_{03}})R},$$

$$\Phi(M, M_0) = \frac{e^{-\mu R}}{4\pi e^{\mu x_3} e^{\mu x_0} R},$$

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi \operatorname{ch} \mu x_3 \ \operatorname{ch} \mu x_{03} R},$$

$$\Phi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi \operatorname{sh} \mu x_3 \ \operatorname{sh} \mu x_{03}} \left[\frac{e^{-\mu R}}{R} - \frac{e^{-\mu R_*}}{R_*} \right],$$

где

$$R = \left[k_3 \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - x_{0i})^2}{k_i} \right]^{1/2},$$

$$R_* = \left[k_3 \Big(\frac{(x_1 - x_{01})^2}{k_1} + \frac{(x_2 - x_{02})^2}{k_2} + \frac{(x_3 + x_{03})^2}{k_3} \Big) \right]^{1/2}.$$

Заметим, что полученные в случае метагармонической проницаемости среды фундаментальные решения переходят при $\mu \to 0$ в пределе в соответствующие фундаментальные решения для случая гармонической проницаемости среды.

Анализ полученных выше фундаментальных решений $\Phi(M', M_0')$ показывает, что их можно представить единой формулой

$$\Phi(M', M_0') = \frac{1}{4\pi \sqrt{\chi(M')\chi(M_0')}} \left[\frac{f(M', M_0')}{R'} + g(M', M_0') \right]. \tag{7.3.18}$$

Здесь $R' = \Big[\sum\limits_{i=1}^{3} (\xi_i - \xi_{0i})^2 \Big]^{1/2}$ — расстояние между точками $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M_0' = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})$, $f(M', M_0')$ и $g(M', M_0')$ — регулярные в области D' функции, причём $f(M_0', M_0') = 1$. Решение $\Phi(M', M_0')$ имеет при $R' \to 0$ асимптотику (7.3.1), а при $R' \to \infty$ удовлетворяет условию (7.3.5).

Формула Грина. Интегральное представление обобщённого потенциала

Пусть функции $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$ дважды непрерывно дифференцируемые в области D и имеют непрерывные первые производные на замкнутой поверхности σ, ограничивающей область D. Полагаем, что среда ортотропная с раздельной анизотропией и неоднородностью. причём, как и прежде, её проницаемость $K_i(M) = k_i\chi(M)$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае вторая формула Грина (1.5.7′) принимает вид

$$\int\limits_D \big[\varphi_2(M)T\varphi_1(M) - \varphi_1(M)T\varphi_2(M)\big]\,d\tau =$$
$$= \int\limits_\sigma K_n(M)\big[\varphi_2(M)\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M} - \varphi_1(M)\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial\nu_M}\big]\,d\sigma, \quad (7.3.19)$$

где

$$K_n(M)\frac{\partial}{\partial\nu_M} = \chi(M)\sum_{i=1}^{3} n_i k_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Используя преобразования (7.1.1), находим для малых объёмов $d\tau = dx_1dx_2dx_3$ и $d\tau' = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ соотношение $d\tau = \sqrt{k_1k_2k_3/k_0^3}\,d\tau'$, а операторы $T\varphi(M)$ и $T'\varphi(M')$ уравнений (7.1.7) и (7.1.9) взаимосвязаны равенством (7.1.10). Учитывая также равенства (7.1.3) и (7.1.4), находим, что интегралы по области и ограничивающим их поверхностям преобразуются по формулам (D' и σ' — образы области D и поверхности σ относительно преобразований (7.1.1)):

$$\int\limits_D \big[\varphi_2(M)T\varphi_1(M) - \varphi_1(M)T\varphi_2(M)\big]\,d\tau =$$
$$= \sqrt{\frac{k_1k_2k_3}{k_0}} \int\limits_{D'} \big[\varphi_2(M')T'\varphi_1(M') - \varphi_1(M')T'\varphi_2(M')\big]\,d\tau',$$

$$\int\limits_\sigma K_n(M)\big[\varphi_2(M)\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_M} - \varphi_1(M)\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial\nu_M}\big]\,d\sigma =$$
$$= \sqrt{\frac{k_1k_2k_3}{k_0}} \int\limits_{\sigma'} \chi(M')\big[\varphi_2(M')\frac{\partial\varphi_1(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi_1(M')\frac{\partial\varphi_2(M')}{\partial n_{M'}}\big]\,d\sigma'. \quad (7.3.20)$$

Учитывая равенства (7.3.20), формулу (7.3.19) запишем в координатах точки $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$\int\limits_{D'} \big[\varphi_2(M')T'\varphi_1(M') - \varphi_1(M')T'\varphi_2(M')\big]d\tau' =$$

$$= \int\limits_{\sigma'} \chi(M')\big[\varphi_2(M')\frac{\partial\varphi_1(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi_1(M')\frac{\partial\varphi_2(M')}{\partial n_{M'}}\big]d\sigma'. \quad (7.3.21)$$

Формула (7.3.21) имеет вид, характерный для второй формулы Грина в случае изотропной неоднородной среды с коэффициентом проницаемости $\chi(M')$. Это позволяют свойства обобщённого потенциала $\varphi(M')$, установленные на основе формулы (7.3.21), распространить на обобщённый потенциал $\varphi(M)$ в случае ортотропной среды.

В формуле (7.3.21) обозначим $\varphi_1(M') \equiv \varphi(M')$, а в качестве функции $\varphi_2(M')$ выберем фундаментальное решение $\Phi(M', M_0')$ в виде (7.3.18) ($\varphi_2(M') \equiv \Phi(M', M_0')$). Следуя работе [117], рассмотрим три возможных случая, отвечающих различным положениям точки-параметра M_0': $M_0' \in D'$, $M_0' \in \sigma'$ и $M_0' \notin \overline{D}'$ ($\overline{D}' = D' \cup \sigma'$). В первом случае решение $\Phi(M', M_0')$ имеет в точке $M' = M_0' \in D'$ разрыв непрерывности и поэтому формулу (7.3.21) применять нельзя. Чтобы можно было применить эту формулу, исключим из области D' точку M_0', проведя из неё сферу σ_ε' малого радиуса ε, которая ограничивает шар Ω_ε'. Тогда $\Phi(M', M_0')$ — ограниченная функция всюду в области $D_\varepsilon' = D' \setminus \Omega_\varepsilon'$. Учитывая, что $T'\Phi(M', M_0') = 0$, $M' \in D_\varepsilon'$ запишем формулу (7.3.21) для области D_ε', ограниченной поверхностью $\sigma' \cup \sigma_\varepsilon'$:

$$\int\limits_{D_\varepsilon'} \Phi(M', M_0')T'\varphi(M')d\tau_{M'} =$$

$$= \int\limits_{\sigma'} \chi(M')\big[\Phi(M', M_0')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi(M')\frac{\partial\Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}}\big]d\sigma_{M'} +$$

$$+ \int\limits_{\sigma_\varepsilon'} \chi(M')\big[\Phi(M', M_0')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi(M')\frac{\partial\Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}}\big]d\sigma_{M'},$$

$$M' \in D_\varepsilon'. \quad (7.3.22)$$

Вычислим стоящий в равенстве (7.3.22) интеграл по поверхности σ_ε', обозначив его $I(\varepsilon)$. Учитывая представление фундаментального решения

$\Phi(M', M'_0)$ в виде (7.3.18), имеем

$$J(\varepsilon) = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon),$$

где

$$J_1(\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma'_\varepsilon} \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M'_0)}} \varphi(M') f(M', M'_0) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{1}{R'}\right) d\sigma_{M'},$$

$$J_2(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma'_\varepsilon} \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M'_0)}} \left\{ \left[f(M', M'_0) + R' g(M', M'_0) \right] \frac{\partial \varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\chi(M')} \varphi(M') \left[\frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{f(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}} \right) + R' \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{g(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}} \right) \right] \right\} d\sigma_{M'}.$$

$R' \equiv R_{M'_0 M_0}$ — расстояние между точками M'_0 и M', равное радиусу ε сферы σ'_ε.

Вычислим производную от $1/R'$ по направлению орта $\vec{n}_{M'}$ внешней нормали к области D'_ε. Так как на поверхности сферы σ'_ε орт $\vec{n}_{M'}$ направлен по её радиусу к центру M'_0, то

$$\frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{1}{R'}\right)\bigg|_{\sigma'_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial R'} \left(\frac{1}{R'}\right)\bigg|_{R'=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Учитывая это равенство, по теореме о среднем вычисляем интегралы

$$J_1(\varepsilon) = - < \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M'_0)}} \varphi(M') f(M', M'_0) >,$$

$$J_2(\varepsilon) = \varepsilon < \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M'_0)}} \left\{ f(M', M'_0) + \varepsilon g(M', M'_0) \frac{\partial \varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\chi(M')} \varphi(M') \left[\frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{f(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{g(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}} \right) \right] \right\} >, \quad M' \in \sigma'_\varepsilon,$$

где скобки $< \ldots >$ обозначают средние значения функций на поверхности σ'_ε.

Устремляем теперь радиус сферы σ'_ε к нулю ($\varepsilon \to 0$). Так как по условию функции $\varphi(M')$, $\sqrt{\chi(M')}$, $f(M', M'_0)$, $g(M', M'_0)$ и их первые производные по координатам точки M' непрерывны в области D', а значит внутри шара Ω'_ε, то будут также непрерывными в шаре Ω'_ε производные

$$\frac{\partial \varphi(M')}{\partial n_{M'}}, \quad \frac{\partial}{\partial n_{M'}}\left(\frac{f(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial n_{M'}}\left(\frac{g(M', M'_0)}{\sqrt{\chi(M')}}\right), \quad M' \in \Omega'_\varepsilon.$$

Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = -\varphi(M'_0)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_2(\varepsilon) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = -\varphi(M'_0)$.

По определению несобственного интеграла (см., например, [7]) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D'_\varepsilon} \Phi(M', M'_0) T'\varphi(M') d\tau_{M'} = \int\limits_{D'} \Phi(M', M'_0) T'\varphi(M') d\tau_{M'}.$$

Тогда в результате предельного перехода $\varepsilon \to 0$ в равенстве (7.3.22) приходим к интегральной формуле для обобщённого потенциала

$$\varphi(M'_0) = \int\limits_{\sigma'} \chi(M')\Big[\Phi(M', M'_0)\frac{\partial \varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi(M')\frac{\partial \Phi(M', M'_0)}{\partial n_{M'}}\Big] d\sigma_{M'} - \\ - \int\limits_{D'} \Phi(M', M'_0) T'\varphi(M') d\tau_{M'}, \quad M' \in D'. \quad (7.3.23)$$

Пусть теперь точка $M'_0 \in \sigma'$ является вершиной конуса с телесным углом α', образуемого касательными, проведёнными к поверхности σ' в точке M'_0. В этом случае $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = -\alpha'\varphi(M'_0)/4\pi$ и, по-прежнему, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_2(\varepsilon) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = -\alpha'\varphi(M'_0)/4\pi$ (Если M'_0 — точка гладкости поверхности σ', то $\alpha' = 2\pi$). В результате приходим к формуле, получающейся из (7.3.23) при замене $\varphi(M'_0)$ на $\alpha'\varphi(M'_0)/4\pi$.

Наконец, когда точка $M'_0 \neq\in \overline{D}'$ ($\overline{D}' = D' \cup \sigma'$), то функция $\Phi(M', M'_0)$ непрерывна всюду в области $\overline{D}'$ и, следовательно, $T'\Phi(M', M'_0) = 0$, $M' \in D'$. Поэтому слева в формуле (7.3.23) получим нуль.

Объединяя эти три случая, запишем интегральное представление обобщённого потенциала $\varphi(M_0')$ в виде

$$\int\limits_{\sigma'} \chi(M')\big[\Phi(M', M_0')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi(M')\frac{\partial\Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}}\big]d\sigma_{M'} -$$

$$-\int\limits_{D'} \Phi(M', M_0')T'\varphi(M')d\tau_{M'} = \begin{cases} \varphi(M_0'), & M_0' \in D', \\ \dfrac{\alpha'}{4\pi}\varphi(M_0'), & M_0' \in \sigma', \\ 0, & M_0' \notin \overline{D}'. \end{cases} \qquad (7.3.24)$$

Если $\varphi(M')$ — обобщённый потенциал в области D', особые точки которого расположены вне этой области, то есть $T'\varphi(M') = 0$, $M' \in D'$, то формула (7.3.24) принимает вид

$$\int\limits_{\sigma'} \chi(M')\big[\Phi(M', M_0')\frac{\partial\varphi(M')}{\partial n_{M'}} - \varphi(M')\frac{\partial\Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}}\big]d\sigma_{M'} =$$

$$= \begin{cases} \varphi(M_0'), & M_0' \in D', \\ \dfrac{\alpha'}{4\pi}\varphi(M_0'), & M_0' \in \sigma', \\ 0, & M_0' \notin \overline{D}'. \end{cases} \qquad (7.3.25)$$

Формулы (7.3.24) и (7.3.25) имеют вид, характерный для обобщённого потенциала $\varphi(M')$ течения в изотропной неоднородной пористой среде проницаемости $\chi(M')$ [117].

Обобщённые поверхностные потенциалы простого и двойного слоёв

Формуле (7.3.25) можно придать определённый гидродинамический смысл. Следуя монографии [117], введём *обобщённые поверхностные* потенциалы простого $U(M_0')$ и двойного $W(M_0')$ слоёв с непрерывными на σ' плотностями $\lambda(M')$ и $\mu(M')$:

$$U(M_0') = \int\limits_{\sigma'} \chi(M')\Phi(M', M_0')\lambda(M')d\sigma_{M'}, \qquad (7.3.26)$$

$$W(M_0') = \int_{\sigma'} \chi(M') \frac{\partial \Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}} \mu(M') d\sigma_{M'}. \tag{7.3.27}$$

Согласно формуле (7.3.25) наложение обобщённых потенциалов $U(M_0')$ и $W(M_0')$ с плотностями $\lambda(M') = \chi(M')\partial\varphi(M')/\partial n_{M'}$ и $\mu(M') = -\varphi(M')$ определит обобщённый потенциал течения $\varphi(M_0')$ в области D', а с плотностями $\lambda(M') = 4\pi\alpha'^{-1}\partial\varphi(M')/\partial n_M'$ и $\mu(M') = -4\pi\alpha'^{-1}\varphi(M')$ — обобщённый потенциал на поверхности σ', ограничивающей область D'. Вне области $\overline{D}'$ обобщённый потенциал равен нулю (жидкость покоится).

Обобщённые потенциалы (7.3.26) и (7.3.27) — решения уравнения (7.1.9) всюду вне поверхности σ' ($M' \neq M_0'$). Исследуем поведение потенциалов при непрерывном продолжении их на эту поверхность. Полагаем, что поверхность σ' гладкая, а $\lambda(M')$ и $\mu(M')$ непрерывные на ней функции. Представим эти потенциалы в виде

$$U(M_0') = \int_{\sigma'} \mathcal{K}_1(M', M_0')\lambda(M') d\sigma_{M'},$$

$$W(M_0') = \int_{\sigma'} \mathcal{K}_2(M', M_0')\mu(M') d\sigma_{M'}.$$

Здесь

$$\mathcal{K}_1(M', M_0') = \chi(M')\Phi(M', M_0'), \quad \mathcal{K}_2(M', M_0') = \chi(M') \frac{\partial \Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}}$$

ядра потенциалов, которые с учётом формулы (7.3.18) запишем

$$\mathcal{K}_1(M', M_0') = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M_0')}} \left[\frac{f(M', M_0')}{R'} + g(M', M_0') \right],$$

$$\mathcal{K}_2(M', M_0') = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\chi(M')}{\chi(M_0')}} \frac{f(M', M_0') \vec{R}' \cdot \vec{n}_{M'}}{R'^3} +$$
$$+ \frac{\chi(M')}{4\pi R'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{f(M', M_0')}{\sqrt{\chi(M')\chi(M_0')}} \right) + \frac{\chi(M')}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{g(M', M_0')}{\sqrt{\chi(M')\chi(M_0')}} \right).$$

Замечаем, что при $M' \to M_0'$ ($R' \to 0$) ядра имеют асимптотики

$$\mathcal{K}_1(M', M_0') \sim \frac{1}{R'}, \quad \mathcal{K}_2(M', M_0') \sim \frac{\vec{R}' \cdot \vec{n}_{M'}}{R'^3},$$

характерные для ядер потенциалов простого и двойного слоёв в случае уравнения Лапласа. Поэтому можно утверждать, что обобщённые потенциалы $U(M_0')$ и $W(M_0')$ ведут себя на поверхности σ' класса Ляпунова аналогично потенциалам для уравнения Лапласа. А именно, потенциал $U(M_0')$ и производная по нормали к поверхности σ' от потенциала $W(M_0')$ непрерывны на σ'. Производная по нормали к поверхности σ' от потенциала $U(M_0')$ терпит разрыв, принимая значения

$$\left(\frac{\partial U(M_0')}{\partial n_{M_0'}}\right)^{\pm} = \int\limits_{\sigma'} \chi(M') \frac{\partial \Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}} \lambda(M') d\sigma_{M'} \mp \frac{\lambda(M_0')}{2}, \quad M_0' \in \sigma'. \tag{7.3.28}$$

Потенциал двойного слоя $W(M_0')$ принимает предельные значения

$$W^{\pm}(M_0') = \int\limits_{\sigma'} \chi(M') \frac{\partial \Phi(M', M_0')}{\partial n_{M'}} \mu(M') d\sigma_{M'} \pm \frac{\mu(M_0')}{2}, \quad M_0' \in \sigma'. \tag{7.3.29}$$

Здесь « + » (« − ») отмечены предельные значения соответствующих функций при подходе со стороны (противоположной стороны) орта нормали $\vec{n}_{M'}$ к поверхности σ'. Интегралы существуют в смысле главного значения, аналогичному главному значению по Коши [138].

Заметим, что аналогичные результаты для предельных значений потенциалов простого и двойного слоёв имеют место для уравнений эллиптического типа общего вида [18], к которым относится уравнение (7.1.9).

Исследуем теперь поведение обобщённых потенциалов $U(M_0')$ и $W(M_0')$ в бесконечности, используя формулу (7.3.18) и её частные случаи (7.3.6) и (7.3.11) при $\mu = 1$. Полагая, что функция $\lambda(M')$ и $\mu(M')$ интегрируемые на σ' и учитывая непрерывность ядер $\mathcal{K}_1(M', M_0')$, $\mathcal{K}_2(M', M_0')$ при $M_0' \neq$ $\neq M' \in \sigma'$, по теореме о среднем [145] находим

$$U(M_0') = A\chi(M_*')\Phi(M_*', M_0'), \quad W(M_0') = B\chi(M_*')\frac{\partial \Phi(M_*', M_0')}{\partial n_{M_*'}}, \quad M_*' \in \sigma',$$

$$\Phi(M_*', M_0') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\chi(M_*')\chi(M_0')}}\left[\frac{f(M_*', M_0')}{R'} + g(M_*', M_0')\right],$$

где

$$R' = \Big[\sum_{i=1}^{3}(\xi_{*i} - \xi_{0i})^2\Big]^{1/2}, \quad A = \int\limits_{\sigma'} \lambda(M') d\sigma_{M'}, \quad B = \int\limits_{\sigma'} \mu(M') d\sigma_{M'},$$

R' — расстояние между точками $M'_* = (\xi_{*1}, \xi_{*2}, \xi_{*3}) \in \sigma'$ и $M'_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) \in D'$, A и B — постоянные. Видим, что поведение потенциалов в бесконечности определяется функцией $\chi(M'_0)$, характеризующей неоднородность среды. Если среда однородная: $\chi(M'_0) = \chi(M'_*) = 1$, то $f'(M'_*, M'_0) = 1$, $g'(M'_*, M'_0) = 0$ и, следовательно,

$$U(M'_0) = O\left(\frac{1}{R'}\right), \quad W(M'_0) = O\left(\frac{1}{R'^2}\right) \quad \text{при} \quad R' \to \infty.$$

Если среда характеризуется гармонической функцией такого вида, что $\sqrt{\chi(M'_0)} = O(R'^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ при $R' \to \infty$, то $f(M'_*, M'_0) = 1$, а $g(M'_*, M'_0)$ — ограниченная при $R' \to \infty$ функция, и, следовательно,

$$U(M'_0) = O\left(\frac{1}{R'^n}\right), \quad W(M'_0) = O\left(\frac{1}{R'^{n+1}}\right) \quad \text{при} \quad R' \to \infty.$$

Когда среда характеризуется метагармонической функцией, для которой $\sqrt{\chi(M'_0)} = O(e^{R'})$ при $R' \to \infty$, то $f(M'_*, M'_0) = O\big(e^{-R'}\big)$, а $g(M'_*, M'_0)$ — ограниченная при $R' \to \infty$ функция, и, следовательно,

$$U(M'_0) = O\big(\frac{e^{-2R'}}{R'}\big), \quad W(M'_0) = O\big(\frac{e^{-2R'}}{R'}\big) \quad \text{при} \quad R' \to \infty.$$

В последнем случае обобщённые потенциалы $U(M'_0)$ и $W(M'_0)$ убывают с расстоянием R' наиболее быстро.

Во всех рассмотренных случаях пористой среды обобщённые потенциалы $U(M'_0)$ и $W(M'_0)$ на бесконечности обращаются в ноль, что отвечает условиям (7.1.32).

§ 7.4. Интегральные уравнения стационарных задач с произвольными границами

Интегральное уравнение задачи сопряжения

Пусть граница Γ сопряжения областей D_1 и D_2 ортотропной, вообще говоря, неоднородной среды проницаемостей K_1^0 и K_2^0 ($K_\nu^0 = k_\nu^0(K_{ij})$, $K_{ij} = K_i\delta_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$, $k_\nu^0 > 0$ — постоянные, $\nu = 1, 2$) моделируется поверхностью класса Ляпунова. Согласно преобразованиям (7.1.1) в переменных ξ_i, $i = 1, 2, 3$ границей Γ'

областей D_1' и D_2' сред проницаемостей $\chi_1(M')$ и $\chi_2(M')$ ($\chi_\nu(M') = k_\nu^0 \chi(M')$, $\nu = 1, 2$) будет поверхность также класса Ляпунова.

Обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ ищем в виде потенциала двойного слоя (7.3.27), распределённого непрерывно с плотностью $f(N')$ на границе Γ':

$$\varphi_*(M') = \int\limits_{\Gamma'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f(N') d\sigma_{N'}, \quad M' \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2. \qquad (7.4.1)$$

Полагаем, что $\Phi(M', N')$ удовлетворяет на сингулярной поверхности σ_0' условиям (7.1.31). Тогда этим же условиям удовлетворяет обобщённый потенциал (7.4.1). Он же удовлетворяет в бесконечности условиям (7.1.32), так как им отвечает потенциал вдойного слоя. Непрерывно продолжим обобщённый потенциал (7.4.1) на границу Γ', получим согласно формуле (7.3.29) его предельные значения

$$\varphi_*^{\pm}(M') = \int\limits_{\Gamma'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f(N') d\sigma_{N'} \pm \frac{f(M')}{2}, \quad M' \in \Gamma', \qquad (7.4.2)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Подставляя предельные значения (7.4.2) в условие (7.1.26) и учитывая непрерывность производной по нормали от потенциала двойного слоя, получим для плотности $f(M')$ интегральное уравнение

$$f(M') - 2\lambda_k \int\limits_{\Gamma'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f(N') d\sigma_{N'} = 2\lambda_k f_0(M'), \quad M' \in \Gamma', \ (7.4.3)$$

где $\lambda_k = (k_1^0 - k_2^0)/(k_1^0 + k_2^0)$, $\lambda_k = (-1, 1)$.

Таким образом, если известно фундаментальное решение $\Phi(M', N')$, то исследование задачи сопряжения сводится к отысканию решения $f(M')$ интегрального уравнения (7.4.3). Тогда согласно (7.1.21) и (7.4.1) находим обобщённые потенциалы

$$\varphi_\nu(M') = \frac{1}{k_\nu^0} \left[\varphi_0(M') + \int\limits_{\Gamma'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} f(N') d\sigma_{N'} \right], \ M' \in D_\nu', \ \nu = 1, 2. \qquad (7.4.4)$$

Используя преобразования (7.1.1), имеем искомые обобщённые потенциалы $\varphi_\nu(M)$, $M \in D_\nu$, $\nu = 1, 2$.

Интегральные уравнения первой и второй краевых задач

Пусть область D течения в ортотропной, вообще говоря, неоднородной среде проницаемости $K = (K_{i,j})$ ($K_{ij} = k_i\chi(M)\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3$) органичена поверхностью σ_1 заданного давления или непроницаемой поверхностью σ_2, которые моделируются поверхностями класса Ляпунова. Согласно преобразованиям (7.1.1) в переменных ξ_i, $i = 1,2,3$ течение будет происходить в области D' среды проницаемости $\chi(M')$, которая ограничена поверхностью σ_1' или σ_2' также класса Ляпунова.

Обобщённые потенциалы возмущений $\varphi_{*1}(M')$ и $\varphi_{*2}(M')$ в случае границ σ_1' и σ_2' ищем в виде потенциалов двойных слоёв (7.3.27) с непрерывными плотностями $f_1(N')$ и $f_2(N')$, распределёнными на σ_1' и σ_2':

$$\varphi_{*\alpha}(M') = \int\limits_{\sigma_\alpha'} \chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}} f_\alpha(N')d\sigma_{N'}, \quad \alpha = 1,2, \quad M' \in D'. \quad (7.4.5)$$

Полагаем, что $\Phi(M',N')$ удовлетворяет на сингулярной поверхности σ_0' условиям (7.1.31). Тогда этим же условиям удовлетворяют обобщённые потенциалы (7.4.5). Обобщённые потенциалы (7.4.5) удовлетворяют в бесконечности условиям (7.1.32), так как это потенциалы двойных слоёв.

Непрерывно продолжим обобщённый потенциал $\varphi_{*1}(M')$ на границу σ_1' и согласно формуле (7.3.29) находим его предельное значение

$$\varphi_{*1}^+(M') = \int\limits_{\sigma_1'} \chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}} f_1(N')d\sigma_{N'} + \frac{f_1(M')}{2}, \quad M' \in \sigma_1', \quad (7.4.5')$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Подставим $\varphi_*^+(M')$ в условие (7.1.23) и получим для $f_1(M')$ интегральное уравнение

$$f_1(M') - 2\int\limits_{\sigma_1'} \chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}} f_1(N')d\sigma_{N'} = 2[f_0(M') - \varphi_0(M')], \quad M' \in \sigma_1'. \quad (7.4.6)$$

Учтём непрерывность производной по нормали к границе σ_2' от $\varphi_{*2}(M')$. Тогда из условия (7.1.24) имеем для $f_2(M')$ интегральное уравнение

$$\int\limits_{\sigma_2'} \chi(N')\frac{\partial^2\Phi(M',N')}{\partial n_{M'}\partial n_{N'}} f_2(N')d\sigma_{N'} = -\frac{\partial\varphi_0(M')}{\partial n_{M'}} \quad M' \in \sigma_2'. \qquad (7.4.7)$$

Итак, если известно фундаментальное решение $\Phi(M',N')$, то исследование первой и второй краевых задач сводится к отысканию решений $f_1(M')$ и $f_2(M')$ уравнений (7.4.6) и (7.4.7). Используя формулы (7.1.21$'$) и (7.4.5), находим обобщённые потенциалы $\varphi_1'(M')$ и $\varphi_2'(M')$ этих задач:

$$\varphi_\alpha(M') = \varphi_0(M') + \int\limits_{\sigma_\alpha'} \chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}} f_\alpha(N')d\sigma_{N'}, \quad \alpha = 1,2, \quad M' \in D'.$$

Учитывая преобразования (7.1.1), имеем искомые обобщённые потенциалы $\varphi_\alpha(M)$, $\alpha = 1, 2$, $M \in D$.

Исследование интегральных уравнений

Исследуем полученные интегральные уравнения (7.4.3) ,(7.4.6) и (7.4.7). Воспользуемся тем, что они аналогичны уравнениям, полученным в работе [117]. Замечаем, что в уравнениях (7.4.3) и (7.4.6) ядра одинакового вида

$$\mathcal{K}(M',N') = \chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n_{N'}}. \qquad (7.4.8)$$

Так как поверхность σ' класса Ляпунова, то, следуя [117], находим

$$\mathcal{K}(M',N') = O(R^{\alpha-2}_{M'N'}) \quad (\alpha \in (0,1]) \quad \text{при} \quad R_{M'N'} \to 0.$$

Это ядро имеет в точке $M' = N'$ особенность вида $R^{2-\alpha}_{M'N'}$, ($\alpha \in (0,1]$) и поэтому его можно согласно [62, 92] отнести к слабо сингулярным ядрам. Интегральное уравнение с таким ядром является слабо сингулярным интегральным уравнением типа Фредгольма.

Итак, уравнения (7.4.3) и (7.4.6) — неоднородные интегральные уравнения второго рода типа Фредгольма.

Уравнение (7.4.7) имеет ядро

$$\mathcal{K}(M',N') = \chi(N')\frac{\partial^2\Phi(M',N')}{\partial n_{M'}\partial n_{N'}}.$$

Следуя монографии [117], находим

$$\mathcal{K}(M', N') = O(\frac{1}{R^3_{M'N'}}) \quad \text{при} \quad R_{M'N'} \to 0.$$

Видно, что ядро $\mathcal{K}(M', N')$ сильно сингулярное (гиперсингулярное). Поэтому интеграл в уравнении (7.4.7) является гиперсингулярным и его надо понимать в смысле конечной части по Адамару [2]. Это уравнение следует отнести к неоднородным гиперсингулярным интегральным уравнениям первого рода.

Исследуем теперь принципиальный вопрос о разрешимости полученных интегральных уравнений. Разрешимость интегральных уравнений означает существование решений рассмотренных выше граничных задач, которые на основе потенциала двойного слоя редуцируются к этим уравнениям.

В силу математической идентичности уравнений (7.4.3) и (7.4.6) представим их относительно искомой плотности $g(M')$ двойного слоя в единой форме

$$g(M') - \lambda \int\limits_{\sigma'} \mathcal{K}(M', N') g(N') d\sigma_{N'} = F(M'), \quad M' \in \sigma'. \tag{7.4.9}$$

Здесь ядро $\mathcal{K}(M', N') = -2\chi(N')\partial\Phi(M', N')/\partial n_{N'}$, $\Phi(M', N')$ — фундаментальное решение уравнения (7.1.9), $F(M')$ — заданная функция, λ — параметр, принимающий значения: в случае внутренней ($\lambda = -1$) и внешней ($\lambda = 1$) краевых задач Дирихле, а в случае задачи сопряжения ($\lambda = -\lambda_k$, $\lambda_k \in (-1, 1)$).

Уравнения (7.4.9) имеет вид, характерный для случая изотропной среды проницаемости $\chi(M')$. Оно имеет слабую сингулярность и поэтому к нему применима теория Фредгольма. Как показано в работе [117], такое уравнение разрешимо при $\lambda = -1$ и $\lambda = -\lambda_k$, ($\lambda_k \in (-1, 1)$) и любой правой части $F(M')$. В случае $\lambda = 1$ (внешняя задача Дирихле) решение этого уравнения не существует.

Чтобы найти решение внешней задачи Дирихле, представим искомый обобщённый потенциал возмущений $\varphi_*(M')$ в виде суммы обобщённого потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $g(M')$ и функции

$$\Phi(M', M'_0) \int\limits_{\sigma'} g(N') d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'.$$

Здесь $\Phi(M', M'_0)$ — фундаментальное решение по координатам точки M' уравнения (7.1.9), точка M'_0 лежит вне области D', ограниченной поверхностью σ'. Имеем

$$\varphi_*(M') = \int\limits_{\sigma'} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} g(N') d\sigma_{N'} + \Phi(M', M'_0) \int\limits_{\sigma'} g(N') d\sigma_{N'}, \; M' \in D'. \tag{7.4.10}$$

Полагаем, что на границе σ' задано условие (7.1.23) для внешней задачи Дирихле. Удовлетворим обобщённый потенциал (7.4.10) этому условию. Непрерывно продолжим $\varphi_*(M')$ на σ' в соответствии с формулой (7.3.29). Находим для $g(M')$ интегральное уравнение

$$g(M') + 2 \int\limits_{\sigma'} \left[\chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} + \Phi(M', M'_0) \right] g(N') d\sigma_{N'} = \\ = 2[f_0(M') - \varphi_0(M')], \quad M' \in \sigma'. \tag{7.4.11}$$

Ядро уравнения (7.4.11) имеет слабую сингулярность, поскольку таковую сингулярность имеет первое слагаемое в этом ядре (второе слагаемое — непрерывная функция поскольку $M' \neq M'_0$). Как показано в работе [117], уравнение вида(7.4.11) разрешимо при любой его правой части.

Решая уравнение (7.4.11), находим $g(M')$. Тогда согласно формул (7.1.21) и (7.4.10) имеем обобщённый потенциал $\varphi(M')$, $M' \in D'$, применяя к которому преобразования (7.1.1), находим искомый обобщённый потенциал $\varphi(M)$, $M \in D$ для внешней задачи Дирихле.

Таким образом, первая краевая задача (задача Дирихле) и задача сопряжения имеют указанные выше решения, которые представлены потенциалами двойных слоёв. Вторая краевая задача (задача Неймана) редуцирована на основе потенциала двойного слоя к гиперсингулярному интегральному уравнению (7.4.7), при решении которого необходимо учитывать условие резрешимости (7.1.22).

Отметим, что развитый для задач фильтрации метод интегральных уравнений можно использовать также для исследования задач электродинамики [60, 61, 131] в случае анизотропных сред.

§ 7.5. Интегральное и интегро-дифференциальное уравнения эволюции границы раздела жидкостей

Задача эволюции границы в ортотропной неоднородной среде

Для решения поставленной выше задачи эволюции границы раздела жидкостей Γ'_t используем представление обобщённого потенциала возмущений $\varphi_*(M', t)$ в виде обобщённого потенциала двойного слоя. Аналогично обобщённому потенциалу (7.3.27) непрерывно распределим с плотностью $g(N', t)$ двойной слой на граничной поверхности Γ'_t и запишем

$$\varphi_*(M', t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} g(N', t) d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \tag{7.5.1}$$

Здесь, напоминаем, время t — параметр, $\Phi(M', N')$ — фундаментальное решение уравнения (7.1.9). Полагаем, что $\Phi(M', N')$ удовлетворяет условиям (7.1.25) на сингулярной поверхности σ'_0. Тогда $\varphi_*(M', t)$ также удовлетворяет этим условиям. $\varphi_*(M', t)$ отвечает также условиям в бесконечности (7.1.27). Удовлетворим $\varphi_*(M', t)$ условиям (7.1.30) на Γ'_t. Для этого в соответствии с формулой (7.3.29) имеем для $\varphi_*(M', t)$ предельные значения

$$\varphi_*^{\pm}(M', t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} g(N', t) d\sigma_{N'} \pm \frac{g(M', t)}{2}, \quad M \in \Gamma'_t. \tag{7.5.2}$$

Подставим значения $\varphi_*^{\pm}(M', t)$ (7.5.2) в условия (7.1.30) и учтём непрерывность производной по нормали к Γ'_t потенциала двойного слоя. Получаем для $g(M', t)$ интегральное уравнение

$$g(M', t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma'_t} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} g(N', t) d\sigma_{N'} =$$

$$= 2[\lambda_\mu \varphi_0(M', t) + \alpha \Pi(M', t)], \quad M \in \Gamma'_t, \tag{7.5.3}$$

где $\lambda_\mu = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\alpha = (\rho_2 - \rho_1)/(\mu_2 + \mu_1)$.

Ядро уравнения (7.5.3) такое же как исследованное выше ядро $\mathcal{K}(M', N')$ вида (7.4.8). Поэтому в предположении, что граница Γ'_t — поверхность Ляпунова в любой момент времени $t \geqslant 0$, имеем слабо сингулярное ядро $\mathcal{K}(M', N')$. Следовательно, уравнение (7.5.3) является слабо сингулярным интегральным уравнением типа Фредгольма.

Чтобы записать дифференциальное уравнение границы (7.1.36), необходимо знать предельные значения $(\nabla\varphi_*(M', t))^{\pm}$ на Γ'_t. Эти значения можно указать в рассмотренных выше случаях, когда $\sqrt{\chi(M')}$ моделируется гармонической и метагармонической функциями координат. Для этого воспользуемся равенством

$$\nabla\left[\sqrt{\chi(M')}\varphi_*(M', t)\right] = \sqrt{\chi(M')}\nabla\varphi_*(M', t) + \varphi_*(M', t)\nabla\sqrt{\chi(M')},$$

откуда

$$\nabla\varphi_*(M', t) = \frac{1}{\sqrt{\chi(M')}}\left\{\nabla\left[\sqrt{\chi(M')}\varphi_*(M', t)\right] - \varphi_*(M', t)\nabla\sqrt{\chi(M')}\right\}. \quad (7.5.4)$$

Согласно формуле (7.3.18) фундаментальное решение $\Phi(M', N')$ запишем

$$\Phi(M', N') = \frac{F(M', N') + G(M', N')}{\sqrt{\chi(M')\chi(N')}}. \quad (7.5.5)$$

Здесь $G(M', N')$ — функция, непрерывно дифференцируемая дважды по координатам точки M' и хотя бы один раз по точке N'; $F(M', N') = F(R')$ — сингулярная функция расстояния $R' = \left[\sum\limits_{i=1}^{3}(\xi_i^* - \xi_i)^2\right]^{1/2}$ между точками $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $N' = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$. Причём

$$F(M', N') = \frac{1}{4\pi R'}, \quad (7.5.6)$$

если $\sqrt{\chi(M')}$ — гармоническая функция, и

$$F(M', N') = \frac{e^{-\beta R'}}{4\pi R'}, \quad (\beta = \mathrm{const} > 0), \quad (7.5.7)$$

когда $\sqrt{\chi(M')}$ — метагармоническая функция. Функция (7.5.7) принимает вид (7.5.6) при $\beta = 0$.

Подставляя фундаментальное решение (7.5.5) в обобщённый потенциал (7.5.1), находим

$$\sqrt{\chi(M')}\varphi_*(M',t) = W(M',t) - U(M',t) + H(M',t), \quad M' \in D'. \qquad (7.5.8)$$

Здесь $W(M',t)$ — обобщённый потенциал двойного слоя с плотностью $g(N',t)\sqrt{\chi(M')}$:

$$W(M',t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \frac{\partial F(M',N')}{\partial n_{N'}} g(N',t)\sqrt{\chi(N')}d\sigma_{N'}, \qquad (7.5.9)$$

$U(M',t)$ — обобщённый потенциал простого слоя с плотностью $g(N',t)\partial\chi(N')/\partial n_{N'}$:

$$U(M',t) = \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(N')}}{\partial n_{N'}}d\sigma_{N'}, \qquad (7.5.10)$$

$H(M',t)$ — непрерывная в области D' и на границе Γ'_t функция:

$$H(M',t) = \int\limits_{\Gamma'_t} g(N',t)\chi(N')\frac{\partial}{\partial n_{N'}}\left[\frac{G(M',N')}{\sqrt{\chi(N')}}\right]d\sigma_{N'}. \qquad (7.5.11)$$

Рассмотрим обобщённый потенциал $W(M',t)$. Учтём, что $F(M',N')$ — функция только расстояния R': $F(M',N') = F(R')$. Имеем

$$\nabla_{M'}F(M',N') = \frac{dF(R')}{dR'}\nabla_{M'}R',$$

причём $\nabla_{M'}R' = -\nabla_{N'}R'$. Следовательно,

$$\nabla_{M'}F(M',N') = -\nabla_{N'}F(M',N'). \qquad (7.5.12)$$

Тогда

$$\frac{\partial F(M',t)}{\partial n_{N'}} = \nabla_{N'}F(M',N')\cdot\vec{n}_{N'} =$$
$$= -\nabla_{M'}F(M',N')\cdot\vec{n}_{N'} = -\operatorname{div}_{M'}[F(M',N')\vec{n}_{N'}]$$

и обобщённый потенциал (7.5.9) запишем

$$W(M',t) = -\operatorname{div}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'.$$

Воспользуемся тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$ ($\vec{A}$ — дважды непрерывно дифференцируемый вектор). Находим

$$\nabla_{M'}W(M',t) = -\Delta_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} -$$
$$- \operatorname{rot}_{M'}\operatorname{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \quad (7.5.13)$$

Рассмотрим случай, когда $\sqrt{\chi(N')}$ — метагармоническая функция и $F(M',N')$ имеет вид (7.5.7). В этом случае $F(M',N')$ при $M' \neq N'$ решение уравнения $\Delta_{M'}F(M',N') - \beta^2 F(M',N') = 0$ и равенство (7.5.13) запишем

$$\nabla_{M'}W(M',t) = -\beta^2 \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} -$$
$$- \operatorname{rot}_{M'}\operatorname{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \quad (7.5.14)$$

В равенстве (7.5.14) преобразуем последнее слагаемое. С учётом равенства (7.5.12) находим

$$\operatorname{rot}_{M'}[F(M',N')\cdot\vec{n}_{N'}] = \nabla_M F(M',N') \times \vec{n}_{N'} = \vec{n}_{N'} \times \nabla_{N'}F(M',N').$$

Используем поверхностный оператор Гамильтона $\widetilde{\nabla}_{N'}$ — вектор, лежащий в касательной плоскости и проходящий через точку N' поверхности Γ'_t:

$$\widetilde{\nabla}_{N'} = \frac{\partial}{\partial\tau_{1N'}}\vec{\tau}_{1N'} + \frac{\partial}{\partial\tau_{2N'}}\vec{\tau}_{2N'},$$

где $\vec{\tau}_{1N'}$ и $\vec{\tau}_{2N'}$ — взаимно ортогональные орты, лежащие в касательной плоскости и образующие с ортом нормали $\vec{n}_{N'}$ в этой точке правую тройку

$(\vec{\tau}_{1N'} \times \vec{\tau}_{2N'} = \vec{n}_{N'}\,,\ N' \in \Gamma'_t\,)$. Тогда

$$\nabla_{N'} F(M', N') = \widetilde{\nabla}_{N'} F(M', N') + \frac{\partial F(M', N')}{\partial n_{N'}} \vec{n}_{N'}, \quad N' \in \Gamma'_t$$

и, следовательно,

$$\mathrm{rot}_{M'} [F(M', N') \cdot \vec{n}_{N'}] = \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'} F(M', N'), \quad N' \in \Gamma'_t.$$

Учитывая последнее равенство, находим

$$\mathrm{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M', N') g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \vec{n}_{N'} d\sigma_{N'} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma'_t} g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'} F(M', N') d\sigma_{N'}$$

или, так как

$$g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'} F(M', N') = \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla} \big[g(N', t) \sqrt{\chi(N')} F(M', N') \big] -$$

$$- F(M', N') \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'} \big[g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \big],$$

то

$$\mathrm{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M', N') g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \vec{n}_{N'} d\sigma_{N'} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma'_t} \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla} \big[g(N', t) \sqrt{\chi(N')} F(M', N') \big] d\sigma_{N'} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma'_t} F(M', N') \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla} \big[g(N', t) \sqrt{\chi(N')} \big] d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \quad (7.5.15)$$

Рассмотрим случай, имеющий место на практике, когда поверхность Γ'_t замкнутая. Покажем, что в этом случае обращается в нуль слагаемое, стоящее первым справа в равенстве (7.5.15). Для малого односвязного элемента $\Delta\Gamma'_t$ поверхности Γ'_t, ограниченного гладким замкнутым контуром

$\Delta l'_t$, имеем согласно формуле (2.2) монографии [67] для непрерывно дифференцируемой на $\Delta\Gamma'_t$ и непрерывной на $\Delta l'_t$ функции $\varphi(N',t)$ равенство (аналог выражения теоремы Стокса [19])

$$\int\limits_{\Delta\Gamma'_t} \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\varphi(N',t)d\sigma_{N'} = \int\limits_{\Delta l'_t} \varphi(N',t)\vec{\tau}_{N'}dl_{N'}, \tag{7.5.16}$$

где время t — параметр, $\vec{\tau}_{N'}$ — орт, лежащий в касательной плоскости, проведённой через точку $N' \in \Delta\Gamma'_t$ ($\vec{\tau}_{N'} = \vec{\tau}_{1N'} + \vec{\tau}_{2N'}$). Разобъём всю поверхность Γ'_t на малые элементы $\Delta\Gamma'_t$, ограниченные контурами $\Delta l'_t$ и применим к каждому из них формулу (7.5.16). Полученные равенства почленно сложим и учтём, что интегралы по границе $\Delta l'_t$ соседних элементов $\Delta\Gamma'_t$ взаимно уничтожаются. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma'_t} \vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\varphi(N',t)d\sigma_{N'} = 0.$$

В этой формуле полагая $\varphi(N',t) = g(N',t)\sqrt{\chi(N')}F(M',N')$ (M' — точка-параметр), убеждаемся, что в равенстве (7.5.15) стоящее первым справа слагаемое равно нулю. Следовательно, равенство (7.5.15) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} &= \\ = -\int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\big[g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big]d\sigma_{N'}, &\quad M' \in D'.\end{aligned}$$

Тогда, учитывая равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_{M'}\Big[F(M',N')\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big] &= \\ = \nabla_{M'}F(M',N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big],\end{aligned}$$

находим

$$\operatorname{rot}_{M'} \operatorname{rot}_{M'} \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big]d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'.$$

Следовательно, равенство (7.5.14) принимает вид

$$\nabla_{M'}W(M',t) = -\beta^2 \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{N'}F(M',N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}_{N'}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big]d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \tag{7.5.17}$$

Подставляя выражение (7.5.8) в формулу (7.5.4), находим

$$\nabla\varphi_*(M',t) = \frac{1}{\sqrt{\chi(M')}}\Big[\nabla W(M',t) - \nabla U(M',t) +$$
$$+ \nabla H(M',t) - \varphi_*(M',t)\nabla\sqrt{\chi(M')}\Big], \tag{7.5.18}$$

где $\nabla W(M',t)$ имеет вид (7.5.17), а

$$\begin{gathered}\nabla_{M'}U(M',t) = \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N')g(N',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(N')}}{\partial n'_N}d\sigma_{N'},\\ \nabla_{M'}H(M',t) = \int\limits_{\Gamma'_t} g(N',t)\chi(N')\frac{\partial}{\partial n'_N}\left[\frac{\nabla_{M'}G(M',N')}{\sqrt{\chi(N')}}\right]d\sigma_{N'}.\end{gathered} \tag{7.5.19}$$

Непрерывно продолжим равенство (7.5.18) на границу Γ'_t, учитывая, что на ней непрерывны $\chi(M')$, $\nabla\chi(M')$ и $\nabla H(M',t)$. Получим равенство

$$\big(\nabla\varphi_*(M',t)\big)^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\chi(M')}}\Big[\big(\nabla W(M',t)\big)^{\pm} - \big(\nabla U(M',t)\big)^{\pm} +$$
$$+ \nabla H(M',t) - \varphi_*^{\pm}(M',t)\nabla\sqrt{\chi(M')}\Big], \quad M' \in \Gamma'_t.$$

Входящие в это равенство предельные значения градиентов от обобщённых потенциалов двойного (7.5.17) и простого (7.5.19) слоёв находим, используя формулы (2.62) и (2.50) из монографии [67]. Имеем

$$\big(\nabla W(M',t)\big)^{\pm} = -\beta^2 \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} + \\ + \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big]d\sigma_{N'} \mp \\ \mp \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}\big(g(M',t)\sqrt{\chi(M')}\big), \quad M' \in \Gamma'_t,$$

$$\big(\nabla U(M',t)\big)^{\pm} = \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N')g(N',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(N')}}{\partial n'_N}d\sigma_{N'} \mp \\ \mp \frac{1}{2}\vec{n}_{M'}g(M',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(M')}}{\partial n'_M}, \quad M' \in \Gamma'_t.$$

Тогда с учётом для $\varphi_*^{\pm}(M',t)$ предельных значений (7.5.2) и равенства

$$\nabla\sqrt{\chi(M')} = \widetilde{\nabla}\sqrt{\chi(M')} + \frac{\partial\sqrt{\chi(M')}}{\partial n'_M}\vec{n}_{M'}$$

находим

$$\big(\nabla\varphi_*(M',t)\big)^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\chi(M')}}\Bigg\{ -\beta^2 \int\limits_{\Gamma'_t} F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'} + \\ + \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big]d\sigma_{N'} - \\ - \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'}F(M',N')g(N',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(N')}}{\partial n'_N}d\sigma_{N'} + \\ + \int\limits_{\Gamma'_t} g(N',t)\chi(N')\frac{\partial}{\partial n'_N}\left(\frac{\nabla_{M'}G(M',N')}{\sqrt{\chi(N')}}\right)d\sigma_{N'} -$$

$$-\nabla\sqrt{\chi(M')}\int\limits_{\Gamma'_t}\chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n'_N}g(N',t)d\sigma_{N'}\Bigg\}\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\big[g(M',t)\widetilde{\nabla}\ln\chi(M')+\widetilde{\nabla}g(M',t)\big],\quad M'\in\Gamma'_t.$$

Учтём найденные значения $\big(\nabla\varphi_*(M',t)\big)^{\pm}$ и векторное дифференциальное уравнение границы Γ'_t (7.1.36) запишем в виде нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{\rho}_{M'}}{dt}=k_0\chi(M')\nabla\varphi_0(M',t)+$$

$$+k_0\sqrt{\chi(M')}\Bigg\{\int\limits_{\Gamma'_t}g(N',t)\chi(N')\frac{\partial}{\partial n'_N}\left(\frac{\nabla_{M'}G(M',N')}{\sqrt{\chi(N')}}\right)d\sigma_{N'}-$$

$$-\beta^2\int\limits_{\Gamma'_t}F(M',N')g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\vec{n}_{N'}d\sigma_{N'}+$$

$$+\int\limits_{\Gamma'_t}\nabla_{M'}F(M',N')\times\Big[\vec{n}_{N'}\times\widetilde{\nabla}\big(g(N',t)\sqrt{\chi(N')}\big)\Big]d\sigma_{N'}-$$

$$-\int\limits_{\Gamma'_t}\nabla_{M'}F(M',N')g(N',t)\frac{\partial\sqrt{\chi(N')}}{\partial n'_N}d\sigma_{N'}-$$

$$-\nabla\sqrt{\chi(M')}\int\limits_{\Gamma'_t}\chi(N')\frac{\partial\Phi(M',N')}{\partial n'_N}g(N',t)d\sigma_{N'}\Bigg\},\quad M'\in\Gamma'_t.\qquad(7.5.20)$$

В уравнении (7.5.20) последние три интеграла существуют в смысле главного значения и фундаментальное решение $\Phi(M',N')$ представимо в виде (7.5.5), где $F(M',N')$ определяется формулой (7.5.7), если $\sqrt{\chi(M')}$ — метагармоническая функция. Если $\sqrt{\chi(M')}$ — гармоническая функция, то в этом уравнении следует положить $\beta=0$ и выбрать $F(M',N')$ в виде (7.5.6). Масштабный коэффициент k_0 произвольный. Его можно выбрать, положив, например, $k_0=1$.

Таким образом, исследование эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы, состоящей из интегрального уравнения

(7.5.3) и нелинейного интегро-дифференциального уравнения (7.5.20) при начальном условии (7.1.35).

Если необходимо найти обобщённый потенциал $\varphi(M', t)$ течения, то согласно (7.1.29) имеем

$$\varphi(M', t) = \varphi_0(M', t) + \int\limits_{\Gamma'_t} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n'_N} g(N', t) d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'. \quad (7.5.21)$$

Используя преобразования (7.1.1), можно в любой момент времени $t > 0$ найти в переменных $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ положение границы Γ_t: $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t, s_1, s_2)$, $M \in \Gamma_t$ и обобщённый потенциал $\varphi(M, t)$, $M \in D$.

Рассмотрим частные случаи. При напорной фильтрации, когда действием массовых сил можно пренебречь $(\Pi(M', t) = 0)$, интегральное уравнение (7.5.3) запишем

$$g(M', t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma'_t} \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n'_N} g(N', t) d\sigma_{N'} = 2\lambda_\mu \varphi_0(M', t), \quad M' \in \Gamma'_t,$$

а интегро-дифференциальное уравнение границы Γ'_t сохраняет прежний вид (7.5.20).

В другом случае, когда течение обусловлено, главным образом, действием массовых сил и вязкости жидкости можно считать одинаковыми $(\mu_1 = \mu_2 = \mu,\ \lambda_\mu = 0)$, то уравнение (7.5.3) имеет решение

$$g(M', t) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)\Pi(M', t)}{\mu}, \quad M' \in \Gamma'_t.$$

Учитывая это выражение $g(M', t)$, из уравнения (7.5.20) можно найти при начальном условии (7.1.35) положение границы Γ'_t в любой момент времени $t > 0$.

Задача эволюции границы в ортотропной однородной среде

Решение задачи эволюции границы раздела жидкостей Γ'_t, как видим, определяется проницаемостью пористой среды, характеризуемой функцией $\chi(M')$.

Рассмотрим простейший случай, когда ортотропная среда однородная $(\chi(M') = 1)$. В этом случае $\varphi_*(M', t)$ — потенциал возмущений и фундаментальное решение $\Phi(M', N')$ при $M' \neq N'$ — гармонические функции (удовлетворяют уравнению Лапласа). Причём в соответствии с формулами (7.5.5) и (7.5.6) $(R' = R_{M'N'})$:

$$\Phi(M', N') = F(M', N') = \frac{1}{4\pi R_{M'N'}} \quad \left(R_{M'N'} = \Big[\sum_{i=1}^{3} (\xi_i^* - \xi_i)^2 \Big]^{1/2} \right), \tag{7.5.22}$$

где $R_{M'N'}$ — расстояние между точками $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $N' = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$. Находим

$$\frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n_{N'}} = \vec{n}_{N'} \cdot \nabla_{N'} \Phi(M', N') = -\frac{\vec{n}_{N'} \cdot \vec{R}_{M'N'}}{4\pi R^3_{M'N'}} \quad \left(\vec{R}_{M'N'} = \sum_{i=1}^{3} (\xi_i^* - \xi_i) \vec{e}_i \right).$$

Тогда потенциал возмущений (7.5.1) примет вид

$$\varphi_*(M', t) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma'_t} \frac{\vec{n}_{N'} \cdot \vec{R}_{M'N'}}{R^3_{M'N'}} g(N', t) d\sigma_{N'}, \quad M' \in D', \tag{7.5.23}$$

а интегральное уравнение (7.5.3) запишем

$$g(M', t) + \frac{\lambda_\mu}{4\pi} \int\limits_{\Gamma'_t} \frac{\vec{n}_{N'} \cdot \vec{R}_{M'N'}}{R^3_{M'N'}} g(N', t) d\sigma_{N'} = 2\lambda_\mu \big[\varphi_0(M', t) + \alpha \Pi(M', t) \big],$$
$$M' \in \Gamma'_t. \tag{7.5.24}$$

В этом случае интегро-дифференциальное уравнение границы Γ'_t (7.5.20) принимает вид

$$\frac{d\vec{\rho}_{M'}}{dt} = k_0 \nabla \varphi_0(M', t) + k_0 \int\limits_{\Gamma'_t} \nabla_{M'} F(M', N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla} \big(g(N', t) \big) \Big] d\sigma_{N'},$$
$$M' \in \Gamma'_t.$$

Раскрывая стоящее под интегралом двойное векторное произведение

$$\nabla_{M'} F(M', N') \times \Big[\vec{n}_{N'} \times \widetilde{\nabla} g(N', t) \Big] =$$
$$= \vec{n}_{N'} \Big(\nabla_{M'} F(M', N') \cdot \widetilde{\nabla} g(N', t) \Big) - \widetilde{\nabla} g(N', t) \big(\nabla_{M'} F(M', N') \cdot \vec{n}_{N'} \big)$$

и учитывая вытекающее из (7.5.22) равенство $\nabla_{M'}F(M',N') = \vec{R}_{M'N'}/(4\pi R^3_{M'N'})$, а также

$$\widetilde{\nabla} g(N',t) = \frac{\partial g(N',t)}{\partial \tau_1}\vec{\tau}_{1N'} + \frac{\partial g(N',t)}{\partial \tau_2}\vec{\tau}_{2N'},$$

это уравнение запишем

$$\frac{d\vec{\rho}_{M'}}{dt} = k_0 \nabla \varphi_0(M',t) + \\ + k_0 \int\limits_{\Gamma'_t} \left[\vec{B}_1(M',N')\frac{\partial g(N',t)}{\partial \tau_1} + \vec{B}_2(M',N')\frac{\partial g(N',t)}{\partial \tau_2}\right] d\sigma_{N'}, \\ M' \in \Gamma'_t, \quad (7.5.25)$$

где

$$\vec{B}_k(M',N') = \frac{\vec{n}_{N'}(\vec{R}_{M'N'}\cdot\vec{\tau}_k) - \vec{\tau}_k(\vec{R}_{M'N'}\cdot\vec{n}_{N'})}{4\pi R^3_{M'N'}}, \quad k = 1,2.$$

Таким образом, исследование эволюции границы Γ'_t в ортотропной однородной среде сводится к решению системы уравнений (7.5.24) и (7.5.25) при начальном условии (7.1.35).

Если необходимо найти потенциал течения, то согласно формулам (7.1.29) и (7.5.23) имеем

$$\varphi(M',t) = \varphi_0(M',t) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma'_t} \frac{\vec{n}_{N'}\cdot\vec{R}_{M'N'}}{R^3_{M'N'}} g(N',t)d\sigma_{N'}, \quad M' \in D'.$$

Используя преобразования (7.1.1), можно найти при $t > 0$ в переменных $\vec{r} = (x_1,x_2,x_3)$ положение границы Γ_t: $\vec{r}_M = \vec{r}_M(t,s_1,s_2)$ $M \in \Gamma_t$ и потенциал $\varphi(M,t)$, $M \in D$.

В частности, при напорной фильтрации, когда можно принять $\Pi(M',t) = 0$, то интегральное уравнение (7.5.24) запишем

$$g(M',t) + \frac{\lambda_\mu}{4\pi}\int\limits_{\Gamma'_t} \frac{\vec{n}_{N'}\cdot\vec{R}_{M'N'}}{R^3_{M'N'}} g(N',t)d\sigma_{N'} = 2\lambda_\mu \varphi_0(M',t), \quad M' \in \Gamma'_t,$$

а интегро-дифференциальное уравнение (7.5.25) остаётся прежним.

В другом случае, когда массовые силы велики и вязкости жидкостей можно принять равными $(\mu_1 = \mu_2 = \mu,\ \lambda_\mu = 0)$, то интегральное уравнение (7.5.24) имеет решение $g(M', t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(M', t)/\mu$ и, следовательно, интегро-дифференциальное уравнение границы (7.5.25) принимает вид

$$\frac{d\vec{\rho}_{M'}}{dt} = k_0 \nabla \varphi_0(M', t) + \frac{k_0(\rho_2 - \rho_1)}{\mu} \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma'_t} \left[\vec{B}_1(M', N') \frac{\partial \Pi(N', t)}{\partial \tau_{1N'}} + \vec{B}_2(M', N') \frac{\partial \Pi(N', t)}{\partial \tau_{2N'}} \right] d\sigma_{N'},\ M' \in \Gamma'_t,$$

которое необходимо интегрировать при начальном условии (7.1.35).

В заключении заметим, что задачу эволюции границы Γ_t нетрудно обобщить на случай, когда наряду с Γ_t имеются граница σ_1 заданного давления, непроницаемая граница σ_2 и граница раздела сред Γ, используя потенциалы двойных слоёв с плотностями, распределёнными вдоль этих границ. В результате получим систему интегральных уравнений на границах Γ'_t, σ'_1, σ'_2 и Γ', а также, интегро-дифференциального уравнения границы Γ'_t, которое необходимо решать при начальном условии (7.1.35).

Глава 8

Задачи о работе скважин и эволюции границы раздела жидкостей

Ставятся двумерная и трёхмерная стационарные задачи о работе скважин в анизотропных и неоднородных пластах грунта, исследование которых на основе потенциалов двойных слоёв сводится к решению системы интегральных уравнений и интегральных соотношений. Ставится двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей к скважине в анизотропном пласте грунта, которая сводится к решению системы интегральных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Исследуется влияние анизотропии грунта на дебиты скважин и продвижение границы раздела жидкостей.

§ 8.1. Двумерная задача о работе скважин

Постановка задачи

Пусть в областях D_1 и D_2 кусочно-анизотропного и неоднородного пласта грунта проводимости P_1 и P_2 ($P_m = k_m P\,, P = (P_{ij})\,, P_{ij} = HK_{ij}\,,$ $i, j = 1, 2\,,$ k_m — положительные постоянные, $m = 1, 2$) расположено число n_1 и n_2 совершенных (по степени вскрытия пласта) скважин с дебитами (полными расходами) $Q_\nu\,,$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ($n = n_1 + n_2$). Области D_1 и D_2 сопрягаются на границе Γ. На физической плоскости $z = x + iy$ положения скважин характеризуется точками $z_{0\nu} = x_{0\nu} + iy_{0\nu}\,,$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$, которые являются центрами круговых одинаково малого радиуса R_c контуров $\sigma_\nu\,,$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$ скважин. Область D ($D = D_1 \cup D_2$) имеет границу Σ, состоящую из контуров питания σ_Π и скважин $\sigma_\nu\,,$ $\nu = 1, 2, \ldots, n$, сингулярной линии σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$) и линии сопряжения Γ ($\Sigma = \sigma_\Pi \cup \sigma_0 \cup \Gamma \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu$).

Полагаем, что граница Σ (каждая её составляющая часть) не самопересекается[1]. Область D может содержать бесконечно удалённую точку.

Воспользуемся гомеоморфизмом $\zeta=\zeta(z)$ уравнения Бельтрами (2.3.10) и перейдём на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi+i\eta$. На этой плоскости область D' ($D' = D'_1 \cup D'_2$) имеет границу $\Sigma' = \sigma'_\Pi \cup \sigma'_0 \cup \Gamma' \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu$, которая является образом границы Σ. Контуры скважин σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ — малые эллипсы с центрами в точках $\zeta_{0\nu} = \zeta(z_{0\nu})$ ($\zeta_{0\nu} = \xi_{0\nu}+i\eta_{0\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Работу эксплуатационной (нагнетательной) скважины моделируем стоками (источниками) той же по величине мощности Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, что и дебиты скважин, причём $Q_\nu < 0$ — для эксплуатационной и $Q_\nu > 0$ — для нагнетательной скважины.

На плоскости ζ течение описываем комплексным потенциалом (5.1.9), который представим в виде (5.1.11). Комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ (обобщённый потенциал $\varphi_0(\zeta)$), который описывает течение в пласте проводимости P' ($P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$) в отсутствии границы Σ', представим в виде

$$W_0(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu F_1(\zeta, \zeta_{0\nu}) \quad \Big(\varphi_0(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu \Phi_1(\zeta, \zeta_{0\nu})\Big). \tag{8.1.1}$$

Здесь $F_1(\zeta, \zeta_{0\nu}) = \Phi_1(\zeta, \zeta_{0\nu}) + i\Psi_1(\zeta, \zeta_{0\nu})/P'(\zeta)$ — первое фундаментальное решение уравнения (3.1.3) с особенностью в точке $\zeta_{0\nu}$.

Полагаем, что на границах Γ', σ'_0 и в бесконечно удалённой точке (если её содержит область D') для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta)$) возмущений имеют место условия (5.1.12), (5.1.7) и (5.1.8). На контуре $\sigma'_\Pi \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu$ задаётся (либо подлежит определению) давление, то есть для $W_*(\zeta)$ ($\varphi_*(\zeta)$) справедливы условия (аналогичные (5.1.5))[2]

$$\left(\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re} P'(\zeta)}\right)^+ = \alpha_\Pi(\zeta) - \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)]}{\operatorname{Re} P'(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma'_\Pi$$
$$(\varphi_*(\zeta) = \alpha_\Pi(\zeta) - \varphi_0(\zeta)), \tag{8.1.2}$$

[1] Случай самопересечения Σ требует отдельного рассмотрения.

[2] Орт нормали $\vec{n}$ направлен в условиях (5.1.12) в область D'_1, а в условиях (5.1.7) и (8.1.2) — в область $D' = D'_1 \cup D'_2$.

$$\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)} = \alpha_\nu(\zeta) - \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}, \quad \zeta = \zeta_{*\nu} =\in \sigma'_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n$$
$$(\varphi_*(\zeta) = \alpha_\nu(\zeta) - \varphi_0(\zeta)). \tag{8.1.3}$$

Здесь $\alpha_\Pi(\zeta)$ — периодическая функция, если контур σ'_Π замкнут, $\varphi_0(\zeta)$ имеет вид (8.1.1), $\zeta_{*\nu}$ — какая-либо точка контура σ'_ν, которую можно выбрать произвольно в силу его малости (его длина порядка диаметра скважины)[1].

Для практики представляют интерес два случая работы системы скважин в пласте грунта заданной проводимости. В первом из них определяются дебиты скважин Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ по заданным на контурах питания и скважин давлениям (заданы $\alpha_\Pi(\zeta)$ и $\alpha_\nu(\zeta)$ на σ'_Π и σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Во втором случае находятся давления на контурах скважин (находятся $\alpha_\nu(\zeta)$, $\zeta = \zeta_{*\nu} \in \sigma'_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$) по заданным дебитам Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и давлению на контуре питания (задано $\alpha_\Pi(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_\Pi$).

В обоих случаях решение задачи о работе системы скважин состоит в отыскании комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ (или обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta)$), удовлетворяющего уравнению (2.3.22) (или (2.3.17)) с условиями (5.1.7), (5.1.8), (5.1.12) и (8.1.2), (8.1.3).

Сведение задачи к интегральным уравнениям и интегральным соотношениям

Комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ ищем согласно равенствам (5.3.3) и (5.3.15) в виде ($g(\tau)$ и $f(\tau)$ — вещественные функции)

$$W_* = -\int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) g(\tau) dl_\tau - \int\limits_{\sigma'_\Pi} \Omega(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D', \tag{8.1.4}$$

где

$$\Omega(\zeta,\tau) = -P'_1(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}.$$

[1] Контуры скважин σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, как показано далее в этом параграфе, можно моделировать окружностями эффективного малого радиуса $(R'_c)_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, который вычисляется по формуле (8.1.16), где следует положить проницаемость пласта K (значения коэффициента $|\mu|$) в точках $\zeta_{0\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Это позволяет уменьшить влияние на искомые величины (дебит, давление) выбора точки $\zeta_{*\nu}$ на контурах σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть фундаментальные решения $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$ удовлетворяют на σ_0' условиям (5.1.7). Тогда этим же условиям удовлетворяет комплексный потенциал (8.1.4). Комплексный потенциал (8.1.4) удовлетворяет в бесконечности условиям (5.1.8). Удовлетворим (8.1.4) условиям (5.1.12), (8.1.2) и (8.1.3). Пусть функции $g(\tau)$, $\tau\in\Gamma'$ и $f(\tau)$, $\tau\in\sigma_\Pi'$ принадлежат классу Гёльдера. Тогда согласно равенствам (5.3.16) и (5.3.3) имеем предельные значения (напоминаем, орт нормали направлен на Γ' в область D_1', а на σ_Π' — в область $D'=D_1'\cup D_2'$):

$$W_*^{\pm}=-\int\limits_{\Gamma'}\Omega(\zeta,\tau)g(\tau)dl_\tau-\int\limits_{\sigma_\Pi'}\Omega(\zeta,\tau)f(\tau)dl_\tau\pm\frac{g(\zeta)}{2},\quad \zeta\in\Gamma',\qquad(8.1.5)$$

$$W_*^{+}=-\int\limits_{\Gamma'}\Omega(\zeta,\tau)g(\tau)dl_\tau-\int\limits_{\sigma_\Pi'}\Omega(\zeta,\tau)f(\tau)dl_\tau+\frac{f(\zeta)}{2},\quad \zeta\in\sigma_\Pi'.\qquad(8.1.6)$$

Интегралы по Γ' в (8.1.5) и по σ_Π' в (8.1.6) понимаются в смысле главных значений по Коши.

Подставим равенства (8.1.5), (8.1.6) и (8.1.4) в условия (5.1.12), (8.1.2) и (8.1.3). Получим интегральные уравнения

$$g(\zeta)-2\lambda_k\Bigg[\int\limits_{\Gamma'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau)dl_\tau+\int\limits_{\sigma_\Pi'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau)dl_\tau\Bigg]=2\lambda_k\varphi_0(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma',\ (8.1.7)$$

$$\frac{f(\zeta)}{2}+\int\limits_{\Gamma'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau)dl_\tau+\int\limits_{\sigma_\Pi'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau)dl_\tau=\alpha_\Pi(\zeta)-\varphi_0(\zeta),\quad \zeta\in\sigma_\Pi'\ (8.1.8)$$

и число n интегральных соотношений

$$\int\limits_{\Gamma'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau)dl_\tau+\int\limits_{\sigma_\Pi'}\mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau)dl_\tau=\alpha_\nu(\zeta)-\varphi_0(\zeta),$$

$$\zeta=\zeta_{*\nu}\in\sigma_\nu',\quad \nu=1,2,\ldots,n,\quad(8.1.9)$$

где

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau)=-P_1'(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau}+P_2'(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}=\frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},$$

$\varphi_0(\zeta)$ имеет вид (8.1.1).

Таким образом, исследование задачи о работе системы скважин сводится к решению системы граничных интегральных уравнений (8.1.7), (8.1.8) и интегральных соотношений (8.1.9). Интегральные уравнения сингулярные (в смысле Коши) неоднородные второго рода. Эта система является полной (замкнутой). Её предлагается решить численно на основе метода дискретных особенностей [29, 79], который принципиально отличается от сеточных методов [87, 127, 128].

Представление интегральных уравнений и интегральных соотношений системой алгебраических уравнений

К решению системы интегральных уравнений и интегральных соотношений (8.1.7)–(8.1.9) применим метод дискретных особенностей. Контуры границ Γ' и σ'_Π разобьём на число m_1 и m_2 равных отрезков (длины отрезков на Γ' и σ'_Π, вообще говоря, различны) с учётом выбранных направлений обхода этих границ. Тогда границы Γ' и σ'_Π задаются множествами точек $E_1 = \{\xi_i, \eta_i, i = 0, 1, \ldots, m_1\}$ и $E_2 = \{\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k, k = 0, 1, \ldots, m_2\}$. В случае замкнутых границ Γ' и σ'_Π полагаем $\xi_0 = \xi_{m_1}$, $\eta_0 = \eta_{m_1}$ и $\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_{m_2}$, $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_{m_2}$.

Используем орты касательной $\vec{l}_\tau$ и нормали $\vec{n}_\tau$ границ Γ' и σ'_Π (ϑ — угол между ортом $\vec{l}_\tau$ и осью $O\xi$):

$$\vec{l}_\tau = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \left(\frac{\partial \xi_\tau}{\partial l_\tau}, \frac{\partial \eta_\tau}{\partial l_\tau}\right), \quad \vec{n}_\tau = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) = \left(-\frac{\partial \eta_\tau}{\partial l_\tau}, \frac{\partial \xi_\tau}{\partial l_\tau}\right)$$

и учтём $\partial/\partial l_\tau = \vec{l}_\tau \cdot \nabla_\tau$, $\partial/\partial n_\tau = \vec{n}_\tau \cdot \nabla_\tau$ (∇_τ — оператор Гамильтона).

Ядро $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ в системе (8.1.7)–(8.1.9) запишем

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P'_1(\tau)\vec{n}_\tau \cdot \nabla_\tau \Phi_1(\zeta,\tau) + P'_2(\tau)\vec{l}_\tau \cdot \nabla_\tau \Phi_2(\zeta,\tau) = \vec{l}_\tau \cdot \nabla_\tau \Phi_2(\zeta,\tau)$$

или

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P'_1(\tau)\left[\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial \xi_\tau}\frac{\partial \eta_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial \eta_\tau}\frac{\partial \xi_\tau}{\partial l_\tau}\right] +$$
$$+ P'_2(\tau)\left[\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial \xi_\tau}\frac{\partial \xi_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial \eta_\tau}\frac{\partial \eta_\tau}{\partial l_\tau}\right] = \frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial \xi_\tau}\frac{\partial \xi_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial \eta_\tau}\frac{\partial \eta_\tau}{\partial l_\tau}.$$

В системе (8.1.7)–(8.1.9) заменяем производные по координатам центральными разностями, а интегралы — на суммы согласно квадратурной формуле прямоугольников. Учтём, что интегралы по Γ' в уравнении (8.1.7) и по σ'_Π в уравнении (8.1.8) понимаются в смысле главных значений по Коши и в каждой сумме слагаемых, аппроксимирующей эти интегралы, выкидываем точку, в которой записывается соответствующее уравнение.

Систему (8.1.7)–(8.1.9) записываем в виде

$$\frac{g_\nu}{2} - \lambda_k \Bigl[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m_1} g_i \mathcal{K}_i(\xi_\nu, \eta_\nu; \xi_i, \eta_i) + \sum_{k=1}^{m_2} f_k \mathcal{K}_k(\xi_\nu, \eta_\nu; \xi_k, \eta_k)\Bigr] = \lambda_k \varphi_0(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$\frac{f_\nu}{2} + \sum_{i=1}^{m_1} g_i \mathcal{K}_i(\tilde{\xi}_\nu, \tilde{\eta}_\nu; \xi_i, \eta_i) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\nu}}^{m_2} f_k \mathcal{K}_k(\tilde{\xi}_\nu, \tilde{\eta}_\nu; \tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k) = \alpha_\Pi(\tilde{\xi}_\nu, \tilde{\eta}_\nu) - \varphi_0(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m_2,$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} g_i \mathcal{K}_i(\xi_*, \eta_*; \xi_i, \eta_i) + \sum_{k=1}^{m_2} f_k \mathcal{K}_k(\xi_*, \eta_*; \tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k) = \alpha_i(\xi_*, \eta_*) - \varphi_0(\xi_*, \eta_*),$$

$$(\xi_*, \eta_*) \in \sigma'_i, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1.9$'$}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_\delta(a, b; \alpha, \beta) = \\
&= \frac{P'_1(\alpha,\beta)}{2}\Bigl[\frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\beta_{\delta+1} - \beta_{\delta-1}) - \frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\alpha_{\delta+1} - \alpha_{\delta-1})\Bigr] + \\
&+ \frac{P'_2(\alpha,\beta)}{2}\Bigl[\frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\alpha_{\delta+1} - \alpha_{\delta-1}) + \frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\beta_{\delta+1} - \beta_{\delta-1})\Bigr] = \\
&= \frac{\partial\Phi_2(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\alpha_{\delta+1} - \alpha_{\delta-1}) + \frac{\partial\Phi_2(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\beta_{\delta+1} - \beta_{\delta-1}),
\end{aligned}$$

a, b; α, β — переменные ядра $\mathcal{K}$ (функции Φ_1 и Φ_2 — обобщённые потенциалы первого и второго фундаментальных решений), индекс δ принимает значения индексов i и k ($\delta = i, k$). В качестве точки $(\xi_*, \eta_*) \in \sigma'_i$ можно выбрать любую точку контура σ'_i i-ой скважины в силу малости её эффективного радиуса R'_c (контур каждой скважины σ'_i можно моделировать, как отмечалось выше, окружностью радиуса R'_c).

Таким образом, исследование задачи о работе системы скважин (указанных в постановке двух случаях) сводится к решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (8.1.9′) (всего $m_1 + m_2 + n$ уравнений). Систему этих уравнений можно решить численно методом Гаусса для конкретных задач о работе скважин. При этом для интерполяции границ Γ' и σ'_Π можно использовать линейные или кубические сплайны.

Дебит скважины с прямолинейным контуром питания

В том случае, когда анизотропный пласт однородный (его проводимость $P = HK$ — постоянный тензор), а контур питания — прямолинейный, удаётся найти в конечном виде формулу для дебита скважины.

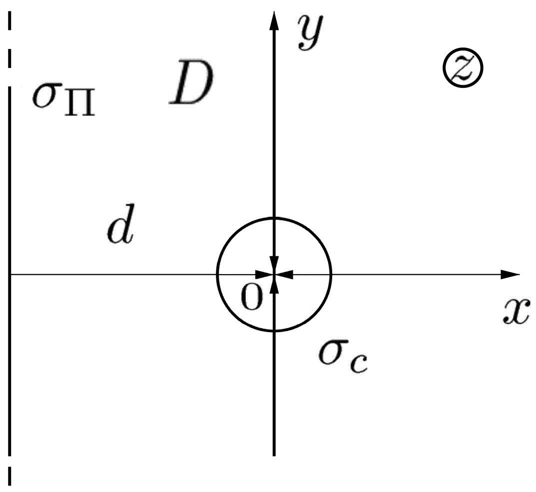

Рис. 8.1.1. Скважина на физической плоскости.

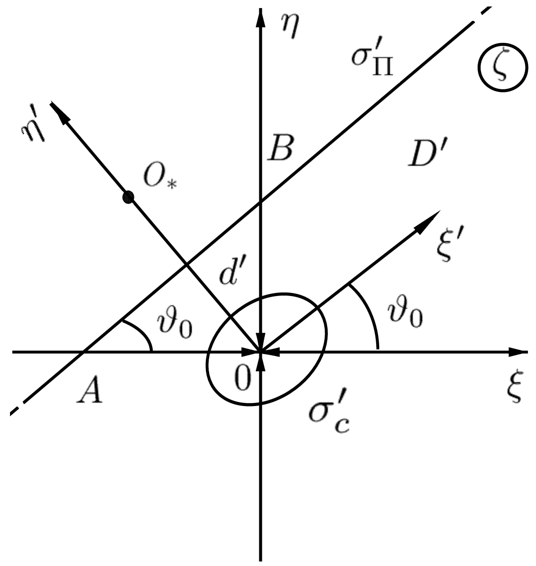

Рис. 8.1.2. Скважина на вспомогательной плоскости.

Пусть на физической плоскости $z = x + iy$ область течения D ограничена прямолинейным контуром питания $\sigma_\Pi : x = -d, y \in (-\infty, \infty)$ и контуром круговой скважины σ_c (R_c — радиус скважины рис. 8.1.1). Напорная фильтрация жидкости к скважине происходит под действием разности давлений, заданных на контурах σ_Π и σ_c (действием силы тяжести пренебрегаем). Полагаем, что на этих контурах давления постоянны. Течение описываем обобщённым потенциалом $\varphi(z)$, для которого на контуре

$\sigma_\Pi \cup \sigma_c$ имеем условия

$$\varphi(z) = \varphi_\Pi, \quad z \in \sigma_\Pi, \tag{8.1.10}$$

$$\varphi(z) = \varphi_c, \quad z \in \sigma_c, \tag{8.1.11}$$

где φ_Π и φ_c — константы ($\varphi_\Pi \neq \varphi_c$). Используя гомеоморфизм (2.4.13), переходим на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. На ней область течения D' ограничена контуром $\sigma'_\Pi \cup \sigma'_c$ рис. 8.1.2. Согласно формуле (5.2.2) после исключения параметра t находим уравнение контура питания σ'_Π. Это прямая, уравнение которой

$$(1-a)\xi - b\eta + d(1-|\mu|^2) = 0 \quad (|\mu|^2 = a^2 + b^2), \tag{8.1.12}$$

наклонена под углом ϑ_0 к оси $O\xi$ ($\operatorname{tg}\vartheta_0 = (1-a)/b$ при $b \neq 0$; $\vartheta_0 = \pi/2$ при $b = 0$). Прямая σ'_Π пересекает оси $O\xi$ и $O\eta$ в точках $A\left(-\frac{d(1-|\mu|^2)}{1-a}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{d(1-|\mu|^2)}{b}\right)$ (рис. 8.1.2, где принято $a < 1$ и $b > 0$) и её кратчайшее расстояние до начала координат равно $d' = OA\sin\vartheta_0$ или

$$d' = \frac{d[1-(a^2+b^2)]}{\sqrt{(1-a)^2+b^2}}. \tag{8.1.13}$$

Уравнение прямой (8.1.12) запишем в виде

$$\operatorname{Im}(\zeta \exp^{-i\vartheta_0}) = d'. \tag{8.1.12$'$}$$

Контур скважины σ_c — окружность радиуса R_c, уравнение которой в плоскости z запишем согласно (5.2.13$'$) в параметрическом виде ($t \in [0, 2\pi]$ — параметр):

$$z = R_c e^{i(t+\alpha_1)} \quad \left(\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\mu\right).$$

Контур σ_c преобразуется в соответствии с формулами (2.4.14) в эллипс σ'_c, уравнение которого согласно формуле (5.2.12) запишем

$$\zeta = e^{i\beta_1}\left(\frac{A'+B'}{2}e^{it} + \frac{A'-B'}{2}e^{-it}\right) \quad \left(\beta_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\arg\mu\right), \tag{8.1.14}$$

где полуоси эллипса

$$A' = |C|(1+|\mu|)R_c, \quad B' = |C|(1-|\mu|)R_c. \tag{8.1.14$'$}$$

Так как контур σ_c' малой длины (R_c — мало, $|\mu| < 1$), то его можно моделировать окружностью некоторого «эффективного» радиуса R_c' (σ_c' : $\xi^2 + \eta^2 = R_c'^2$) такого, что площадь круга радиуса R_c' и эллипса с полуосями A' и B' равны (равновеликие): $\pi R_c'^2 = \pi A'B'$, откуда $R_c' = \sqrt{A'B'}$ или

$$R_c' = R_c|C|\sqrt{1 - |\mu|^2}. \tag{8.1.15}$$

Если в преобразованиях (2.4.14) выбрать масштабный коэффициент $|C| = [1 - |\mu|^2]^{-1/2}$, то $R_c' = R_c$. Если в этих преобразованиях положить $C = \overline{C} = 1$ (они принимают вид (2.4.13)), то

$$R_c' = R_c\sqrt{1 - |\mu|^2}. \tag{8.1.16}$$

В последнем случае $R_c' < R_c$, так как $|\mu| < 1$. $R_c' = R_c$, если среда изотропная ($\mu = 0$).

На плоскости ζ потенциал течения $\varphi(\zeta)$ — гармоническая функция (удовлетворяет уравнению Лапласа: $\triangle\varphi(\zeta) = 0$). Для $\varphi(\zeta)$ условия (8.1.10) и (8.1.11) принимают вид

$$\varphi(\zeta) = \varphi_\Pi, \quad \zeta \in \sigma_\Pi', \tag{8.1.17}$$

$$\varphi(\zeta) = \varphi_c, \quad \zeta \in \sigma_c', \tag{8.1.18}$$

где σ_Π' — прямая (8.1.12), σ_c' — окружность радиуса R_c' , который вычисляется по формуле (8.1.16).

Таким образом, вычисление дебита скважины сводится в плоскости ζ к нахождению гармонической в области D' функции $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (8.1.17) и (8.1.18).

Задачу о дебите скважины удобно решать в системе координат $O\xi'\eta'$, повёрнутой против часовой стрелки на угол ϑ_0 относительно системы $O\xi\eta$:

$$\zeta' = \xi' + i\eta' = e^{-i\vartheta_0}\zeta \qquad (\xi' = \xi\cos\vartheta_0 + \eta\sin\vartheta_0, \eta' = -\xi\sin\vartheta_0 + \eta\cos\vartheta_0).$$

В этом случае уравнение контура питания σ_Π' (8.1.12′) принимает канонический вид $\eta' = d'$, $\xi \in (-\infty, \infty)$. Введём приведённый дебит скважины $q = Q/H$ (q — дебит, приходящийся на единицу толщины пласта, Q — полный дебит). Работу скважины моделируем стоком мощности q . В отсутствии границы $L_\Pi' \cup L_c'$ течение описывает согласно формулам (3.2.4) и (3.3.1) потенциал

$$\varphi_0(\zeta') = \frac{q}{2\pi K_1'}\ln\frac{1}{R'} + C$$

$$\left(K_1' = \sqrt{D(K_s)} = \sqrt{K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12}+K_{21}}{2}\right)^2}\right),$$

где $R' = |\zeta'| = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$, C — произвольная постоянная. На основании теоремы о прямой $(5.2.22')$ находим искомый потенциал

$$\varphi(\zeta') = \frac{q}{2\pi K_1'} \ln \frac{1}{R'} - \frac{q}{2\pi K_1'} \ln \frac{1}{R_*'} + C. \tag{8.1.19}$$

Здесь $R_*' = |\zeta' - i2d'| = \sqrt{\xi'^2 + (\eta' - 2d')^2}$ — расстояние от произвольной точки $(\xi', \eta') \in D'$ до точки $O_*(O, 2d')$, зеркально симметричной началу координат O относительно прямой σ_Π' (рис. 8.1.2). Второе слагаемое-потенциал течения от источника мощности q, расположенного в точке O_*.

Удовлетворим потенциал (8.1.19) условиям (8.1.17) и (8.1.18). Учтём, что $R' = R_*'$ на прямой $\sigma_\Pi' : \eta' = d', \eta' \in (-\infty, \infty)$ и $R_c' \ll d'$. Получаем равенства

$$\varphi_\Pi = C, \quad \varphi_c = \frac{q}{2\pi K_1'} \ln \frac{2d'}{R_c'} + C,$$

откуда

$$q = \frac{2\pi K_1'(\varphi_c - \varphi_\Pi)}{\ln \frac{2d'}{R_c'}}$$

или, учитывая равенства (8.1.13) и (8.1.16), имеем

$$q = \frac{2\pi K_1'(\varphi_c - \varphi_\Pi)}{\ln \left[\frac{2d}{R_c}\sqrt{\frac{1-(a^2+b^2)}{(1-a)^2+b^2}}\right]}. \tag{8.1.20}$$

В случае изотропной среды ($a = b = 0$, $K_1' = 1$) формула (8.1.20) принимает известный вид [43]

$$q_0 = \frac{2\pi(\varphi_c - \varphi_\Pi)}{\ln \frac{2d}{R_c}}. \tag{8.1.21}$$

С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введём величину $\varepsilon = \frac{q}{q_0} - 1$, которая согласно формулам (8.1.20) и (8.1.21) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{K_1' \ln \frac{2d}{R_c}}{\ln \left[\frac{2d}{R_c}\sqrt{\frac{1-(a^2+b^2)}{(1-a)^2+b^2}}\right]} - 1.$$

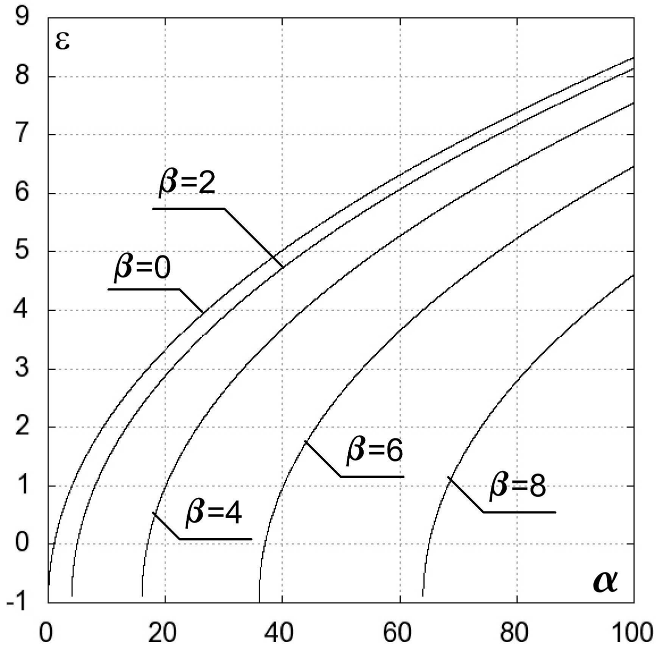

Рис. 8.1.3. Зависимость ε от параметров α и β, $d/R_c = 10^3$.

Представим в этой формуле коэффициенты a, b и K_1' в виде

$$a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \; b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \; K_1' = K_{11}\sqrt{\alpha - \beta^2}$$

$$\left(\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}}, \beta = \frac{K_{12} + K_{21}}{2K_{11}}, \beta^2 < \alpha\right).$$

Построим[1] зависимость ε от параметров α и β, характеризующих соответственно соотношение диагональных компонентов и отношение недиагональных к диагональным компонентам тензора проницаемости грунта (K_{ij}), $i,j = 1,2$ (рис. 8.1.3). Здесь и далее выбираем $K_{11} = 1$. Видно, что анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите q (может увеличивать или уменьшать его по отношению к q_0). С увеличением параметра β (параметр α фиксирован) влияние анизотропии на дебит уменьшается. При некоторых соотношениях между компонентами тензора (K_{ij}) (коэффициентами α и β) влиянием анизотропии грунта на дебит q можно пренебречь $(|\varepsilon| \ll 1)$. На рис. 8.1.4 представлен график, отвечающий случаю $\varepsilon = 0$, когда для расчёта дебита скважины в анизотропном грунте с

[1]Представленные на рис. 8.1.3, 8.1.4 и рис. 8.1.6 графики рассчитал и построил Д.Г. Лекомцев.

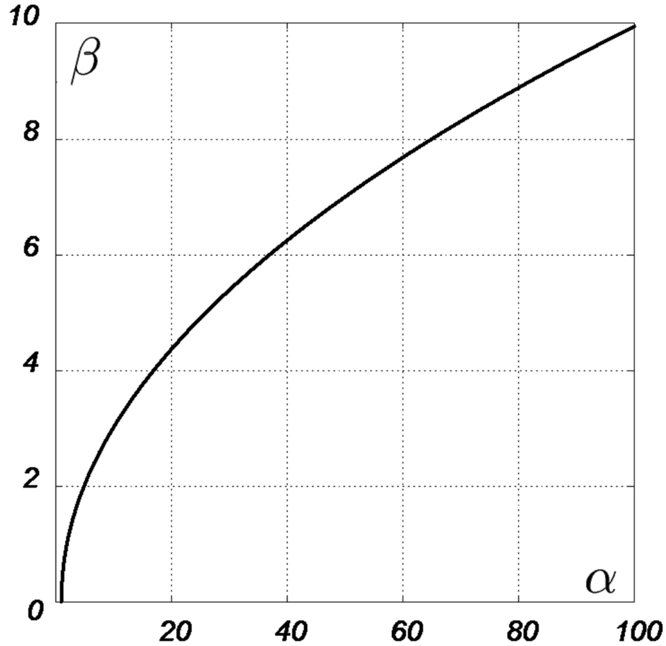

Рис. 8.1.4. Соотношение параметров α и β в случае $\varepsilon = 0$.

определёнными компонентами тензора (K_{ij}) (параметрами α и β) можно воспользоваться простой формулой (8.1.21).

Дебит скважины с круговым контуром питания

Пусть теперь контур питания скважины σ_Π — окружность радиуса R_Π, параметрическое уравнение которой ($t \in [0, 2\pi]$ — параметр):

$$z = R_\Pi e^{i(t+\alpha_1)} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg \mu).$$

Это уравнение согласно гомеоморфизму (2.4.13) преобразуется в эллипс (8.1.14), в котором $\beta_1 = \alpha_1$ и полуоси $A' = R_\Pi(1 + |\mu|)$, $B' = R_\Pi(1 - |\mu|)$. Уравнение эллипса

$$\zeta = R_\Pi e^{i\alpha_1}(e^{it} + |\mu| e^{-it})$$

$$\begin{pmatrix} \xi = R_\Pi[\cos(t + \alpha_1) + |\mu| \cos(t - \alpha_1)], \\ \eta = R_\Pi[\sin(t + \alpha_1) - |\mu| \sin(t - \alpha_1)] \end{pmatrix}.$$

Контур скважины σ_c — окружность радиуса R_c, преобразуется в эллипс σ'_c, который, по-прежнему, моделируем окружностью «эффективного» радиуса R'_c, вычисляемого по формуле (8.1.16). Скважина

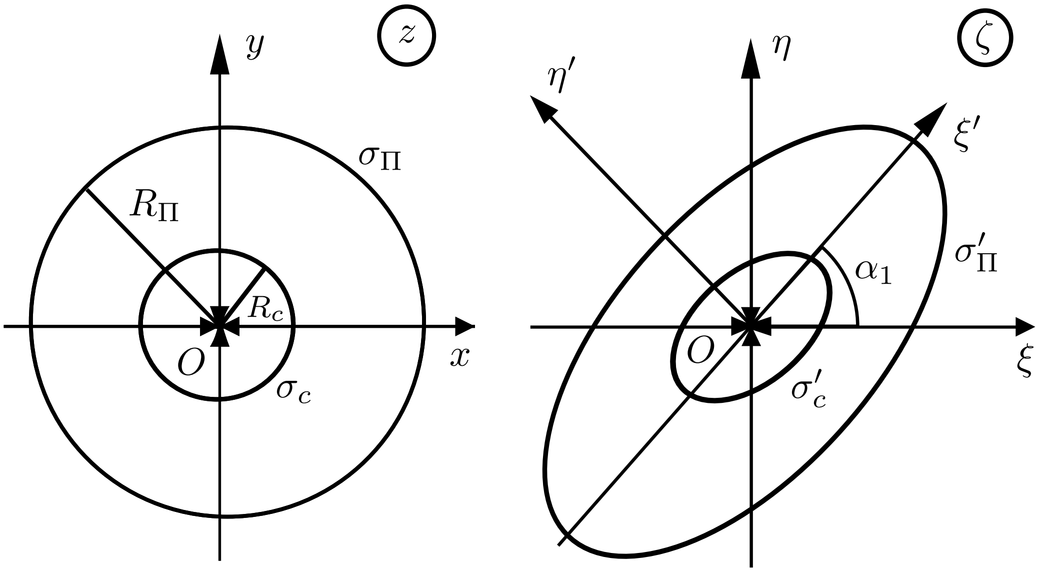

Рис. 8.1.5. Скважина на плоскостях z и ζ.

приведённого дебита q ($q = Q/H$, Q — полный дебит) располагается в начале координат (рис. 8.1.5). Её работу моделируем стоком мощности q.

Согласно формулам (8.1.8) и (8.1.9) исследование задачи о дебите скважины сводится к решению системы интегрального уравнения

$$f(\zeta) - 2\int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau = 2[\alpha_\Pi - q\Phi_1(\zeta,0)] \quad \zeta \in \sigma'_\Pi \tag{8.1.22}$$

и интегрального соотношения

$$\int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(\zeta,\tau) f(\tau) dl_\tau = q\Phi_1(\zeta,0) - \alpha_c, \quad \zeta = \zeta_* \in \sigma'_c, \tag{8.1.23}$$

в которых

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -K'_1 \frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + K'_2 \frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial \Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},$$

$$\Phi_1(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi K'_1} \ln|\zeta-\tau|, \quad \Phi_2(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{K'_2}{K'_1}\ln|\zeta-\tau| + \arg(\zeta-\tau)\right],$$

где $K'_1 = \sqrt{D(K_s)}$, $K'_2 = -\sqrt{D(K_a)}$ — постоянные.

Систему уравнений (8.1.22), (8.1.23) решим численно на основе метода дискретных особенностей и найдём дебит q. Замечаем, что эта система является частным случаем системы (8.1.7)–(8.1.9) при $g(\zeta) = 0$. Разностный

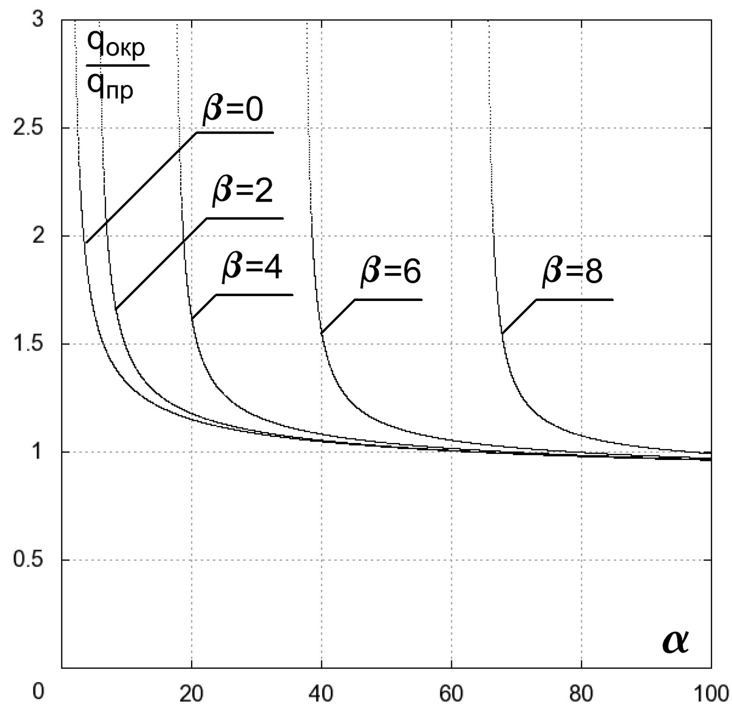

Рис. 8.1.6. Зависимость отношения $q_{\text{окр}}/q_{\text{пр}}$ от параметров α и β.

аналог системы (8.1.7)–(8.1.9) имеет вид (8.1.9′). Воспользуемся разностной системой (8.1.9′), в которой положим $g_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Введём величину ε, характеризующую влияние анизотропии грунта на дебит q:

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} - 1.$$

Здесь q_0 — дебит скважины радиуса R_c и круговым контуром питания радиуса R_Π, на которых заданы постоянные давления (потенциалы): $\varphi_c = \alpha_c$ и $\varphi_\Pi = \alpha_\Pi$, который в случае изотропного грунта определяется формулой Дюпюи [155]

$$q_0 = \frac{2\pi(\alpha_c - \alpha_\Pi)}{\ln \frac{R_\Pi}{R_c}}.$$

Построение зависимостей ε от параметров α и β при $K_{12} = K_{21}$ ($K_2' = 0$), $R_\Pi/R_c = 10^3$ и $\alpha_c = 1$, $\alpha_\Pi = 0$ показывает, что они аналогичны зависимостям, построенным в случае прямолинейного контура питания. На рис. 8.1.6 показаны зависимости отношений дебитов скважин с круговым $q_{\text{окр}}$ и прямолинейным $q_{\text{пр}}$ контуром питания от параметров α и β при $K_{12} = K_{21}$, $R_\Pi/R_c = 10^3$, $\alpha_c = 1$, $\alpha_\Pi = 0$. Видно, что анизотропия грунта (значения α и β) может сильно влиять на это отношение, но как и в изотропном случае ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) $q_{\text{окр}}/q_{\text{пр}} > 1$ [9].

§ 8.2. Трёхмерная задача о работе скважин

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из числа n несовершенных (по степени вскрытия пласта грунта) эксплуатационных или нагнетательных скважин с поверхностью питания σ_Π в ортотропном и, вообще говоря, неоднородном пласте проницаемости $K = (K_{ij})$ ($K_{ij} = k_{ij}\chi(M)\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$). Поверхность σ_Π моделируем поверхностью класса Ляпунова. Скважина дебита Q_ν имеет фильтр в виде кругового цилиндра малого радиуса r_ν и длиной L_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), через который жидкость поступает в скважину или покидает её. Полагая $r_\nu \ll L_\nu$, фильтр скважины будем моделировать прямолинейным отрезком длиной L_ν, который назовём *осью фильтра*. Область течения D ограничена поверхностью питания σ_Π и, вообще говоря, сингулярной поверхностью σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$), которые могут взаимно пересекаться. Ось фильтра не пересекается с поверхностью $\sigma_\Pi \cup \sigma_0$, а может лишь её касаться.

Используя преобразования (7.1.1), находим, что для скважины дебита Q_ν ось фильтра — прямая длиной L'_ν, а область течения D' ограничена поверхностью $\sigma'_\Pi \cup \sigma'_0$ ($\sigma'_0 = \sigma'_{01} \cup \sigma'_{02}$). В координатах точки $M' = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ обобщённый потенциал $\varphi(M')$ описывает течение в изотропном неоднородном пласте проницаемости $\chi(M')$. Как известно [117, 123], поверхность постоянного давления (обобщённого потенциала $\varphi(M')$), тесно охватывающий фильтр ν-ой скважины, близка к поверхности σ'_ν эллипсоида вращения вокруг оси, совпадающей с осью фильтра. Поперечное сечение этой поверхности, образованное плоскостью, проходящей через середину оси фильтра и перпендикулярно ей, можно принять за окружность малого радиуса. Пусть $M'_{*\nu}$ какая-либо точка этой окружности. Работу скважины дебита Q_ν моделируем точечными стоками (если скважина эксплуатационная, $Q_\nu < 0$)или источниками (если скважина нагнетательная, $Q_\nu > 0$), которые равномерно распределены с постоянной плотностью q'_ν вдоль оси фильтра длиной L'_ν ($Q_\nu = q'_\nu L'_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Пусть $\varphi_0(M')$ — обобщённый потенциал течения, обусловленного стоками (источниками) всех скважин в пласте проницаемости $\chi(M')$ в отсутствии поверхностей $\sigma'_\Pi \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu$:

$$\varphi_0(M') = \sum_{\nu=1}^{n} q'_\nu \int\limits_0^{L_\nu} \Phi(M', M'_\nu) dl_{M'_\nu}, \tag{8.2.1}$$

где $\Phi(M', M'_\nu)$ — фундаментальное решение уравнения (7.1.9). Полагаем, что $\Phi(M', M'_\nu)$ удовлетворяет на сингулярной поверхности σ'_0 условиям (7.1.16). Тогда этим же условиям удовлетворяет обобщённый потенциал (8.2.1).

Искомый обобщённый потенциал течения $\varphi(M')$ представим аналогично равенству (7.1.21) как наложение обобщённого потенциала (8.2.1) и обобщённого потенциала возмущений $\varphi_*(M')$, обусловленных наличием поверхностей σ'_Π и σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. По аналогии с указанными в § 7.1 и § 8.1 условиями запишем условия на поверхностях σ'_0, σ'_Π и σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. для $\varphi_*(M')$. Учтём, что обобщённый потенциал (8.2.1) удовлетворяет на σ'_0 условиям (7.1.16). Имеем

$$\varphi_*^+(M') = 0, \quad M' \in \sigma'_{01}; \quad \left(\chi(M') \frac{\partial \varphi_*(M')}{\partial n_{M'}}\right)^+ = 0,\; M' \in \sigma'_{02}, \tag{8.2.2}$$

$$\varphi_*^+(M') = \alpha_\Pi(M') - \varphi_0(M'), \quad M' \in \sigma'_\Pi, \tag{8.2.3}$$

$$\varphi_*(M') = \alpha_\nu(M') - \varphi_0(M'), \quad M' = M'_{*\nu} \in \sigma'_\nu,\; \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.2.4}$$

В условиях (8.2.3) и (8.2.4) $\varphi_0(M')$ имеет вид (8.2.1).

Для практики важны два случая задачи о работе скважин в пласте заданной проницаемости K. В первом из них определяются дебиты Q_ν по заданным на σ'_Π и σ'_ν давлениям (заданы $\alpha_\Pi(M')$ и $\alpha'_\nu(M')$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Во втором случае находятся давления на поверхностях σ'_ν ($\alpha_\nu(M')$, $M' = M'_* \in \sigma_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$) по заданным дебитам Q_ν и давлению на σ'_Π (заданы $\alpha'_\Pi(M')$, $M' \in \sigma'_\Pi$). В обоих случаях предстоит решать задачу для $\varphi_*(M')$, удовлетворяющего уравнению (7.1.9) с условиями (8.2.2)–(8.2.4).

Сведение задачи к интегральному уравнению и интегральным соотношениям

Следуя § 7.4, обощённый потенциал возмущений $\varphi_*(M)$ ищем в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределённого с плотностью $f(N')$ на поверхности σ'_Π, которая принадлежит классу Ляпунова. Имеем

$$\varphi_*(M') = \int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(M', N') f(N')\, d\sigma'_N\,, \quad M' \in D'\,. \tag{8.2.5}$$

Здесь

$$\mathcal{K}(M', N') = \chi(N') \frac{\partial \Phi(M', N')}{\partial n'_N},$$

$\Phi(M', N')$ — фундаментальное решение уравнения (7.1.9), которое полагаем удовлетворяет условиям (7.1.16). Тогда условиям (8.2.2) удовлетворяет обобщённый потенциал (8.2.5).

Удовлетворим обобщённый потенциал (8.2.5) условиям (8.2.3) и (8.2.4). Продолжим его непрерывно на σ'_Π и аналогично (7.4.5′) получим предельное значение

$$\varphi_*^+(M') = \int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(M', N') f(N')\, d\sigma_{N'} + \frac{f(M')}{2}, \quad M' \in \sigma'_\Pi,$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения. Подставим $\varphi_*^+(M')$ в условие (8.2.3), получим для $f(M')$ интегральное уравнение

$$f(M') - 2\int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(M', N') f(N') d\sigma_{N'} = 2[\alpha_\Pi(M') - \varphi_0(M')], \quad M' \in \sigma'_\Pi. \tag{8.2.6}$$

Теперь подставим обобщённый потенциал (8.2.5) в условие (8.2.4). Получим число n интегральных соотношений

$$\int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(M', N') f(N')\, d\sigma_{N'} = \alpha_\nu(M') - \varphi_0(M'), \quad M' = M'_{*\nu} \in \sigma'_\nu,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.2.7}$$

В уравнении (8.2.6) и соотношениях (8.2.7) $\varphi_0(M')$ имеет вид (8.2.1).

Таким образом, исследование трёмерной задачи о работе скважин сводится к решению системы интегрального уравнения (8.2.6) и соотношений (8.2.7). Эта система полная (замкнутая). Как показано в § 7.4, уравнение вида (8.2.6) типа Фредгольма и оно разрешимо. Система (8.2.6), (8.2.7) позволяет находить дебиты Q_ν по заданным на σ'_Π и σ'_ν давлениям или находить давления на скважинах σ'_ν по заданным дебитам Q_ν и давлению на σ_Π. В частности, эта система имеет место, когда пласт грунта изотропный. В этом случае решены конкретные задачи о дебите скважин [3, 80, 117, 121, 136, 170].

§ 8.3. Двумерная задача о работе скважин с подвижной границей раздела жидкостей

Постановка задачи

Поставим двумерную нестационарную задачу о работе системы n совершенных скважин (эксплуатационных и нагнетательных), которые расположены в области D анизотропного неоднородного пласта грунта проводимости $P = (P_{ij})$ ($P_{ij} = HK_{ij}, i, j = 1, 2$). Пусть эта область имеет границами контур питания σ_Π и, возможно, сингулярную линию σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$). Резкая подвижная граница раздела жидкостей Γ_t (контур нефтеносности или граница загрязнения) делит область D на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$), которые заняты жидкостями вязкости, плотности μ_1, ρ_1 и μ_2, ρ_2. Полагаем, что дебиты (полные расходы) скважин могут, вообще говоря, изменяться со временем: $Q_\nu = Q_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Контуры скважин σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ — окружности одинаково малого радиуса R_c, которые служат границами области D. Используя гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$ уравнения (2.3.10), находим, что на плоскости ζ область течения D' ($D' = D'_1 \cup D'_2$) ограничена контуром $\sigma'_\Pi \cup \sigma'_0 \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu$ и жидкости имеют границу раздела Γ'_t, которые являются образами контура $\sigma_\Pi \cup \sigma_0 \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu$ и границы Γ_t. Контуры скважин σ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ — малые эллипсы, которые моделируем окружностями малого эффективного радиуса $(R'_c)_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, вычисляемые по формуле (8.1.16),где нужно положить значения проницаемости грунта (K_{ij}) (значения коэффициента $|\mu|$)в точках забоев скважин. Работу эксплуатационных (нагнетательных)скважин моделируем стоками (источниками) той же по величине мощности Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, что и дебиты скважин. На плоскости ζ течение описываем потенциалом (6.1.12), который представляем в виде (6.1.13). Комплексный потенциал $W_0(\zeta, t)$ (обобщённый потенциал $\varphi_0(\zeta, t)$), который описывает течение однородной жидкости вязкости $\mu = 1$ и плотности $\rho = 1$ в пласте проводимости P' ($P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$) в отсутствии границ $\sigma'_\Pi \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu \cup \Gamma'_t$, представим в виде

$$W_0(\zeta, t) = \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu(t) F_1(\zeta, \zeta_{0\nu}) \quad (\varphi_0(\zeta, t) = \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu(t) \Phi_1(\zeta, \zeta_{0\nu}). \qquad (8.3.1)$$

Здесь $F_1(\zeta,\zeta_{0\nu})=\Phi_1(\zeta,\zeta_{0\nu})+i\Psi_1(\zeta,\zeta_{0\nu})/P'(\zeta)$ — первое фундаментальное решение с особенностью в точке $\zeta_{0\nu}$. Полагаем, что на границах Γ'_t, σ'_0 и в бесконечно удалённой точке (если её содержит область D') для комплексного потенциала $W_*(\zeta,t)$ (обобщённого потенциала $\varphi_*(\zeta,t)$) возмущений имеют место условия (6.1.16)–(6.1.18). На контуре $\sigma_\Pi \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \sigma'_\nu$ задаётся (либо подлежит определению)давление, то есть для $W_*(\zeta,t)$ ($\varphi_*(\zeta,t)$) справедливы условия (аналогичные (8.1.2), (8.1.3)):

$$\left(\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right)^+ = \alpha_\Pi(\zeta,t) - \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}, \quad \zeta\in\sigma'_\Pi \tag{8.3.2}$$

$$(\varphi_*(\zeta,t)=\alpha_\Pi(\zeta,t)-\varphi_0(\zeta,t)),$$

$$\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)} = \alpha_\nu(\zeta,t) - \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta,t)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)},\ \ \zeta=\zeta_*\in\sigma'_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,n \tag{8.3.3}$$

$$(\varphi_*(\zeta,t)=\alpha_\nu(\zeta,t)-\varphi_0(\zeta,t)).$$

Здесь $\alpha_\Pi(\zeta,t)$ — периодическая функция координат, если контур σ'_Π замкнут; ζ_* — какая-либо точка контура σ'_ν; $\varphi_0(\zeta,t)$ имеет вид (8.3.1). Движение границы Γ'_t описывает дифференциальное уравнение (6.1.24) с начальным условием (6.1.20).

Представляют интерес для практики два случая работы системы скважин с подвижной границей раздела жидкостей, заданных вязкостей и плотностей в пласте грунта заданной проводимости (толщины и проницаемости) и заданной массовой силе. А именно,

1. Заданы дебиты скважин Q_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, давление (обобщённый потенциал) на контуре питания σ_Π и первоначальная граница раздела жидкостей Γ_0. Найти в каждый момент времени положение границы Γ_t и давление (обобщённый потенциал) на контурах скважин σ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$. Этот случай задачи назовём *задачей с заданными дебитами.*

2. Заданы давления (обобщённые потенциалы) на контурах скважин σ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$ и питания σ_Π, а также первоначальное положение границы раздела жидкостей Γ_0. Найти в каждый момент времени положение границы раздела жидкостей Γ_t и дебиты скважин Q_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$. Этот случай задачи назовём *задачей с заданными давлениями (обобщёнными потенциалами).* Чтобы решить эту задачу в этих двух случаях

необходимо в плоскости ζ решить систему уравнений (2.3.21), (6.1.24) при условиях (6.1.16)–(6.1.18), (6.1.20), (8.3.2) и (8.3.3).

Отметим, что поставленную задачу нетрудно обобщить на случай, когда область течения D кроме указанных границ может иметь непроницаемую границу (линию сброса) σ_1 и границу Γ раздела пластов различной проводимости.

Граничные интегральные и дифференциальные уравнения, интегральные соотношения

Комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta, t)$ ищем согласно формуле (6.1.25) в виде ($g(\tau, t)$ и $f(\tau, t)$ — вещественные функции)

$$W_*(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau - \int\limits_{\sigma'_\Pi} \Omega(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau, \quad \zeta \in D', \tag{8.3.4}$$

где

$$\Omega(\zeta, \tau) = -P'_1(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}.$$

Пусть фундаментальные решения $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$ удовлетворяют на σ'_0 условиям (6.1.17). Тогда этим же условиям удовлетворяют комплексные потенциалы (8.3.1) и (8.3.4). Комплексный потенциал (8.3.4) удовлетворяет также в бесконечности условиям (6.1.18).

Удовлетворим комплексный потенциал (8.3.4) условиям (6.1.16), (8.3.2) и (8.3.3). Пусть функции $g(\tau, t)$, $\tau \in \Gamma'_t$ и $f(\tau, t)$, $\tau \in \sigma'_\Pi$ в каждый момент времени $t \geqslant 0$ принадлежат классу Гёльдера. Тогда согласно (6.1.26) имеем предельные значения (орты нормали направлены на Γ'_t в область D'_1, а на σ'_Π — в область $D' = D'_1 \cup D'_2$):

$$W_*^{\pm}(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau - \int\limits_{\sigma'_\Pi} \Omega(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau \pm \frac{g(\tau, t)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma'_t, \tag{8.3.5}$$

$$W_*^{+}(\zeta, t) = -\int\limits_{\Gamma'_t} \Omega(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau - \int\limits_{\sigma'_\Pi} \Omega(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau + \frac{f(\tau, t)}{2}, \quad \zeta \in \sigma'_\Pi. \tag{8.3.6}$$

Интегралы по Γ'_t в (8.3.5) и по σ'_Π в (8.3.6) понимаются в смысле главных значений по Коши. Подставим выражения (8.3.5), (8.3.6) и (8.3.4) в условия (6.1.16), (8.3.2) и (8.3.3). Получим интегральные уравнения

$$g(\zeta,t) - 2\lambda_\mu\left[\int\limits_{\Gamma'_t} \mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau\right] = \\ = 2[\lambda_\mu\varphi_0(\zeta,t) + \alpha\Pi(\zeta,t)], \quad \zeta\in\Gamma'_t, \quad (8.3.7)$$

$$f(\zeta,t) + 2\left[\int\limits_{\Gamma'_t} \mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau\right] = \\ = 2[\alpha\Pi(\zeta,t) - \varphi_0(\zeta,t)], \quad \zeta\in\sigma'_\Pi \quad (8.3.8)$$

и число n интегральных соотношений

$$\int\limits_{\Gamma'_t} \mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau + \int\limits_{\sigma'_\Pi} \mathcal{K}(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau = \alpha_\nu(\zeta,t) - \varphi_0(\zeta,t), \\ \zeta=\zeta_{*\nu}\in\sigma'_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,n. \quad (8.3.9)$$

Здесь $\varphi_0(\zeta,\tau)$ имеет вид (8.3.1),

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P'_1(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},$$

$$\alpha = \frac{\rho_2-\rho_1}{\mu_2+\mu_1} = \frac{\rho_1\lambda_\rho(1-\lambda_\mu)}{\mu_1(1-\lambda_\rho)}, \quad \lambda_\mu = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}, \quad \lambda_\rho = \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}, \\ \lambda_\mu,\ \lambda_\rho\in(-1,1).$$

Запишем дифференциальное уравнение границы Γ'_t (6.1.31) с учётом представления комплексного потенциала $W_*(\zeta,t)$ в виде (8.3.4). В соответствии с формулами (6.1.28) и (8.3.4) находим комплексно сопряжённую приведённую скорость

$$\overline{V}_*(\zeta,t) = -\int\limits_{\Gamma'_t}\omega(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau - \int\limits_{\sigma'_\Pi}\omega(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau, \quad \zeta\in D', \quad (8.3.10)$$

где

$$\omega(\zeta,\tau)=\frac{P'(\zeta)}{P_1'(\zeta)}\frac{d_\Sigma\Omega(\zeta,\tau)}{d\zeta}=-P_1'(\tau)\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau}+P_2'(\tau)\frac{\partial\overline{V}_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}=\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau},$$

$\overline{V}_1(\zeta,\tau)$ и $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$ — главные решения уравнения (2.3.33), связанные с фундаментальными решениями $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$ равенствами (3.1.17). Используя решение $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$, интегралы в выражении скорости (8.3.10) преобразуем

$$\int\limits_{\Gamma_t'}\omega(\zeta,\tau)g(\tau,t)dl_\tau=\int\limits_{\Gamma_t'}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}g(\tau,t)dl_\tau=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_t'}\frac{\partial}{\partial l_\tau}[\overline{V}_2(\zeta,\tau)g(\tau,t)]dl_\tau-\int\limits_{\Gamma_t'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau,$$
$$\int\limits_{\sigma_\Pi'}\omega(\zeta,\tau)f(\tau,t)dl_\tau=\int\limits_{\sigma_\Pi'}\frac{\partial\overline{V}_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}f(\tau,t)dl_\tau=$$
$$=\int\limits_{\sigma_\Pi'}\frac{\partial}{\partial l_\tau}[\overline{V}_2(\zeta,\tau)f(\tau,t)]dl_\tau-\int\limits_{\sigma_\Pi'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau.$$

Если контуры Γ_t' и σ_Π' замкнуты, то стоящие в этих равенствах первыми справа интегралы равны нулю в силу непрерывности подынтегральных выражений. Эти интегралы будут также равны нулю в случаях, когда сингулярная линия σ_0 пересекает границу Γ_t' (это возможно в случае линии $\sigma_0'=\sigma_{01}'$, где проводимость $P'(\zeta)=\infty$) и границу σ_Π', если эти границы замкнуть соответствующими отрезками линии σ_0', полагая на этих отрезках $g(\tau,t=0)$ и $f(\tau,t)=0$. Учитывая равенство нулю указанных интегралов, скорость (8.3.10) представим в виде

$$\overline{V}_*(\zeta,t)=\int\limits_{\Gamma_t'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau+\int\limits_{\sigma_\Pi'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\,,\quad \zeta\in D'. \quad (8.3.11)$$

Найдём предельные значения скорости (8.3.11) на Γ_t'. Воспользуемся формулой (4.4.47), в котрой положим $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\partial g(\tau,t)/\partial l_\tau$. Имеем

$$\overline{V}_*^{\pm}(\zeta,t)=\int\limits_{\Gamma'_t}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau+\int\limits_{\sigma'_{\Pi}}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\pm\frac{P'(\zeta)e^{-i\theta_\zeta}}{2P'_1(\zeta)}\frac{\partial g(\zeta,t)}{\partial l_\tau},$$

$$\zeta\in\Gamma'_t,$$

где интеграл по Γ'_t понимается в смысле главного значения по Коши. Тогда дифференциальное уравнение границы Γ'_t (6.1.31) принимает вид нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\overline{v}_0(\zeta,t)+\overline{K'}(\zeta)\Bigg[\int\limits_{\Gamma'_t}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau+\int\limits_{\sigma'_{\Pi}}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau\Bigg],$$

$$\zeta\in\Gamma'_t. \quad (8.3.12)$$

Здесь $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$ выражается формулой (3.1.17) через решение $F_2(\zeta,\tau)$ либо согласно равенству (2.3.29) через $\Phi_2(\zeta,\tau)$ и $\Psi_2(\zeta,\tau)$:

$$\overline{V}_2(\zeta,\tau)=2\frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}=\frac{i2}{\overline{P}'}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}.$$

Обозначим через $\overline{v}_2(\zeta,\tau)=v_{2\xi}(\zeta,\tau)-iv_{2\eta}(\zeta,\tau)$ — комплексно сопряжённую скорость вихря интенсивности -1, которая связана с главным решением $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$ согласно формуле (2.3.28) равенством $\overline{v}_2(\zeta,\tau)=\overline{K}'(\zeta)\overline{V}_2(\zeta,\tau)$. Учитывая $\zeta=\xi+i\eta$ и $\overline{v}_0=v_{0\xi}-iv_{0\eta}$, находим составляющие уравнения (8.3.12) по координатным осям $O\xi$ и $O\eta$:

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\xi}{dt}=v_{0\xi}(\zeta,t)+\int\limits_{\Gamma'_t}v_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau+\int\limits_{\sigma'_{\Pi}}v_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau,$$

$$\mathcal{I}'(\zeta)\frac{d\eta}{dt}=v_{0\eta}(\zeta,t)+\int\limits_{\Gamma'_t}v_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau+\int\limits_{\sigma'_{\Pi}}v_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl_\tau,$$

$$\zeta=\xi+i\eta\in\Gamma'_t. \quad (8.3.12')$$

Здесь

$$v_{0\xi}(\zeta,\tau) = K_1'\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\xi} - K_2'\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\eta} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi_0(\zeta,t)}{\partial\eta},$$

$$v_{0\eta}(\zeta,\tau) = K_2'\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\xi} + K_1'\frac{\partial\varphi_0(\zeta,t)}{\partial\eta} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi_0(\zeta,t)}{\partial\xi},$$

$$v_{2\xi}(\zeta,\tau) = K_1'\frac{\partial\Phi_2(\zeta,t)}{\partial\xi} - K_2'\frac{\partial\Phi_2(\zeta,t)}{\partial\eta} = \frac{1}{H}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,t)}{\partial\eta},$$

$$v_{2\eta}(\zeta,\tau) = K_2'\frac{\partial\Phi_2(\zeta,t)}{\partial\xi} + K_1'\frac{\partial\Phi_2(\zeta,t)}{\partial\eta} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\Psi_2(\zeta,t)}{\partial\xi},$$

$K_1' = \sqrt{D(K_s)}$, $K_2' = -\sqrt{D(K_a)}$ и H, вообще говоря, функции $\zeta = \xi + i\eta$.

Таким образом, для решения задачи о работе скважин в указанных двух случаях имеем систему интегральных уравнений (8.3.7), (8.3.8), интегральных соотношений (8.3.9) и интегро-дифференциальных уравнений (8.3.12′) с начальным условием (6.1.20).

Представление граничных уравнений и соотношений системой алгебраических уравнений

Для численного решения системы уравнений и соотношений (8.3.7)–(8.3.9) и (8.3.12′) применим метод дискретных особенностей [79]. В момент времени t_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ контуры границ Γ_t' и σ_Π' разобьём на число m_1^j и m_2^j равных отрезков (длины этих отрезков для Γ_t' и σ_Π' различны). Причём число m_1^j может быть, вообще говоря, переменным в зависимости от времени t_j. Тогда граница Γ_t' (в каждый момент времени t_j) и σ_Π' задаются множествами точек $E_1^j = \{\xi_i^j, \eta_i^j,\, i = 0, 1, \ldots, m_1^j\}$ и $E_2 = \{\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k,\, k = 0, 1, \ldots, m_2\}$. Границы разбиваются с учётом выбранных направлений их обхода. В случае замкнутой границы Γ_t' (σ_Π') полагаем $\xi_0^j = \xi_{m_1}^j$, $\eta_0^j = \eta_{m_1}^j$ ($\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_{m_2}$, $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_{m_2}$). Начальное условие (6.1.20) принимает вид

$$\text{при}\quad t = 0,\quad \Gamma_0' = E_1^0 = \{\xi_i^0, \eta_i^0,\, i = 0, 1, \ldots, m_1^0\}. \tag{8.3.13}$$

Воспользуемся ортами касательной $\vec{l_\tau}$ и нормали $\vec{n}_\tau$ границ Γ_t' и σ_Π' (ϑ — угол между ортом $\vec{l_\tau}$ и осью $O\xi$):

$$\vec{l_\tau} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \left(\frac{\partial\xi_\tau}{\partial l_\tau}, \frac{\partial\eta_\tau}{\partial l_\tau}\right), \quad \vec{n_\tau} = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) = \left(-\frac{\partial\eta_\tau}{\partial l_\tau}, \frac{\partial\xi_\tau}{\partial l_\tau}\right).$$

Тогда ядро $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ в равенствах (8.3.7)–(8.3.9), принимая во внимание $\partial/\partial l_\tau = \vec{l_\tau}\cdot\nabla_\tau$, $\partial/\partial n_\tau = \vec{n_\tau}\cdot\nabla_\tau$ (∇_τ — оператор Гамильтона), запишем

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P_1'(\tau)\vec{n_\tau}\cdot\nabla_\tau\Phi_1(\zeta,\tau) + P_2'(\tau)\vec{l_\tau}\cdot\nabla_\tau\Phi_2(\zeta,\tau) = \vec{l_\tau}\cdot\nabla_\tau\Phi_2(\zeta,\tau)$$

или

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -P_1'(\tau)\left[-\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial\xi_\tau}\frac{\partial\eta_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial\eta_\tau}\frac{\partial\xi_\tau}{\partial l_\tau}\right] +$$
$$+ P_2'(\tau)\left[\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial\xi_\tau}\frac{\partial\xi_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial\eta_\tau}\frac{\partial\eta_\tau}{\partial l_\tau}\right] = \frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial\xi_\tau}\frac{\partial\xi_\tau}{\partial l_\tau} + \frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial\eta_\tau}\frac{\partial\eta_\tau}{\partial l_\tau}.$$

В системе (8.3.7)–(8.3.9), (8.3.12′) заменяем производные по координатам центральными разностями, по времени — правыми разностями, а интегралы — на суммы согласно квадратурной формуле прямоугольников. Учтём, что интегралы по Γ_t' в уравнениях (8.3.7), (8.3.12′) и по σ_Π' в уравнении (8.3.12) понимаются в смысле главных значений по Коши и в каждой сумме слагаемых, аппроксимирующей эти интегралы, выкидываем точку, в которой записывается соответствующее уравнение. Тогда (8.3.7)–(8.3.9) записываем в виде

$$\frac{g_\nu^j}{2} - \lambda_\mu\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m_1^j} g_i^j\mathcal{K}_i(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j;\xi_i^j,\eta_i^j) + \sum_{k=1}^{m_2} f_k^j\mathcal{K}_k(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j;\tilde\xi_k,\tilde\eta_k)\right] =$$
$$= \lambda_\mu\varphi_0^j(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j) + \alpha\Pi^j(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j),\quad \nu=1,2,\ldots,m_1^j,\ j=0,1,2,\ldots,$$

$$\frac{f_\nu^j}{2} + \sum_{i=1}^{m_1^j} g_i^j\mathcal{K}_i(\tilde\xi_\nu,\tilde\eta_\nu;\xi_i^j,\eta_i^j) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\nu}}^{m_2} f_k^j\mathcal{K}_k(\tilde\xi_\nu,\tilde\eta_\nu;\tilde\xi_k,\tilde\eta_k) = \alpha_\Pi^j(\tilde\xi_\nu,\tilde\eta_\nu) - \varphi_0^j(\xi_\nu,\eta_\nu),$$
$$\nu=1,2,\ldots,m_2,\ j=0,1,2,\ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{m_1^j} g_i^j\mathcal{K}_i(\xi_*,\eta_*;\xi_i^j,\eta_i^j) + \sum_{k=1}^{m_2} f_k^j\mathcal{K}_k(\xi_*,\eta_*;\tilde\xi_k,\tilde\eta_k) = \alpha_i^j(\xi_*,\eta_*) - \varphi_0^j(\xi_*,\eta_*),$$
$$(\xi_*,\eta_*)\in\sigma_i',\quad i=1,2,\ldots,n,\ j=0,1,2,\ldots. \tag{8.3.14}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_\delta(a,b;\alpha,\beta) = \\
&= \frac{P_1'(\alpha,\beta)}{2}\left[\frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\beta_{\delta+1}-\beta_{\delta-1}) - \frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\alpha_{\delta+1}-\alpha_{\delta-1})\right] + \\
&+ \frac{P_2'(\alpha,\beta)}{2}\left[\frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\alpha_{\delta+1}-\alpha_{\delta-1}) + \frac{\partial\Phi_1(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\beta_{\delta+1}-\beta_{\delta-1})\right] = \\
&\qquad = \frac{\partial\Phi_2(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(\alpha_{\delta+1}-\alpha_{\delta-1}) + \frac{\partial\Phi_2(a,b;\alpha,\beta)}{\partial\beta}(\beta_{\delta+1}-\beta_{\delta-1}),
\end{aligned}
$$

a, b; α, β — переменные ядра $\mathcal{K}$ (функций Φ_1 и Φ_2 — обобщённых потенциалов первого и второго фундаментальных решений), индекс δ принимает значения индексов i и k ($\delta = i, k$). В качестве точки $(\xi_*, \eta_*) \in \sigma_i'$ можно выбрать любую точку контура σ_i' i-ой скважины в силу малости её радиуса R_c',

Уравнения (8.3.13) представляем следующим образом

$$
\begin{gathered}
\mathcal{J}'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\xi_\nu^{j+1}-\xi_\nu^j}{\triangle t_j} = v_{0\xi}(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m_1^j} v_{2\xi\nu i}^j \triangle g_i^j + \sum_{k=1}^{m_2} v_{2\xi\nu k}^j \triangle f_i^j, \\
\mathcal{J}'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\eta_\nu^{j+1}-\eta_\nu^j}{\triangle t_j} = v_{0\eta}(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m_1^j} v_{2\eta\nu i}^j \triangle g_i^j + \sum_{k=1}^{m_2} v_{2\eta\nu k}^j \triangle f_i^j, \\
\nu = 1,2,\ldots,m_1^j, \quad \triangle t_j = t_{j+1}-t_j, \quad j = 0,1,2,\ldots\ .
\end{gathered}
\tag{8.3.15}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
v_{0\xi}(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j) = K_1'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\partial\varphi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\xi_\nu^j} - K_2'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\partial\varphi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\eta_\nu^j} = \\
= \frac{1}{H(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}\frac{\partial\psi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\eta_\nu^j}, \\
v_{0\eta}(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j) = K_2'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\partial\varphi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\xi_\nu^j} + K_1'(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)\frac{\partial\varphi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\eta_\nu^j} = \\
= -\frac{1}{H(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}\frac{\partial\psi_0(\xi_\nu^j,\eta_\nu^j)}{\partial\xi_\nu^j},
\end{gathered}
$$

$$v_{2\xi\nu\delta} = K_1'(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)\frac{\partial\Phi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\xi_\nu^j} - K_2'(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)\frac{\partial\Phi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\eta_\nu^j} =$$

$$= \frac{1}{H(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)}\frac{\partial\Psi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\eta_\nu^j},$$

$$v_{2\eta\nu\delta} = K_2'(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)\frac{\partial\Phi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\xi_\nu^j} + K_1'(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)\frac{\partial\Phi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\eta_\nu^j} =$$

$$= -\frac{1}{H(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)}\frac{\partial\Psi_2(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j; \xi_\delta^j, \eta_\delta^j)}{\partial\xi_\nu^j},$$

$$\delta = i, k, \quad \triangle g_i^j = \frac{g_{i+1}^j - g_i^j}{2}, \quad \triangle f_i^j = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{2}.$$

В уравнениях (8.3.13)–(8.3.15) $g_i^j = g(\xi_i^j, \eta_i^j, t_j)$, $f_k^j = f(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k, t_j)$, верхний индекс j над соответствующими функциями означает, что их значения нужно брать в момент времени t_j.

Таким образом, исследование задачи о работе системы скважин (в указанных в постановке двух случаях)с подвижной границей раздела жидкостей сводится к последовательному по времени решению системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (8.3.14), (8.3.15) (всего $3m_1^j + m_2 + n$ уравнений) при начальном условии (8.3.13). Из этой системы уравнений в каждый момент времени t_j находим g_ν^j $(\nu = 1, 2, \ldots, m_1^j)$, f_ν^j $(\nu = 1, 2, \ldots, m_2)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ и координаты точек границы $\Gamma_t'(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m_1^j;\ j = 1, 2, \ldots)$, а в зависимости от постановки задачи обобщённые потенциалы (давления) α_i^j на контурах скважин σ_i' либо их дебиты Q_i^j $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, 3, \ldots)$.

Систему этих уравнений можно решить численно методом Гаусса для конкретных задач о работе скважин. При этом для интерполяции границ Γ_t' и σ_Π' можно использовать линейные или кубические сплайны. Используя гомеоморфизм $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ $(x_\nu^j = x_\nu^j(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)$, $y_\nu^j = y_\nu^j(\xi_\nu^j, \eta_\nu^j)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m_1^j$, $j = 1, 2, \ldots)$, отвечающий уравнению Бельтрами (2.3.10), можно найти в моменты времени t_j, $j = 1, 2, \ldots$ положение границы Γ_t на физической плоскости $z = x + iy$.

Эволюция границы «разноцветных» жидкостей к скважине

Исследуем эволюцию границы раздела «разноцветных» жидкостей (их вязкости и плотности одинаковы) к эксплуатационной скважине дебита Q в анизотропном однородном пласте проводимости $P = (P_{ij})$ (компоненты $P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$ — постоянные). Контур питания скважины расположен в бесконечности[1]. В этом случае удаётся найти в конечном виде уравнения движения границы. Это позволяет при заданном дебите Q и произвольном начальном положении границы находить её положение в любой момент времени.

Используем приведённый дебит скважины $q = Q/H$. Работу скважины моделируем стоком мощности q. Течение к скважине описывает в плоскости ζ комплексный потенциал (начало координат выбрано в точке забоя скважины):

$$W(\zeta) = -\frac{q}{2\pi K'}\ln\zeta \quad (K' = K_1' + iK_2' = \sqrt{D(K_s)} - i\sqrt{D(K_a)}). \qquad (8.3.16)$$

Используя равенства (2.3.27), (2.3.31), находим поле скоростей течения

$$v_\xi + iv_\eta = \frac{|K'|^2}{K_1'}\frac{d\overline{W}(\zeta)}{d\overline{\zeta}}$$

или, учитывая комплексный потенциал (8.3.16), имеем

$$v_\xi + iv_\eta = -\frac{qK'}{2\pi K_1'\overline{\zeta}}. \qquad (8.3.16')$$

Введём в плоскости ζ полярные координаты ρ, ϑ ($\zeta = \rho e^{i\vartheta}$) и найдём радиальную v_ρ и трансверсальную v_ϑ составляющие скорости. Так как

$$v_\rho + iv_\vartheta = (v_\xi + iv_\eta)e^{-i\vartheta},$$

то

$$v_\rho + iv_\vartheta = -\frac{qK'}{2\pi K_1'\rho}.$$

[1] Результаты остаются в силе, если на плоскости ζ скважина центральная и её контур питания — окружность (на плоскости z контур питания — эллипс, определённого вида, см. § 5.2).

Отсюда

$$v_\rho = -\frac{q}{2\pi\rho}, \quad v_\vartheta = -\frac{qK_2'}{2\pi K_1'\rho}, \quad |v| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\vartheta^2} = \frac{q|K'|}{2\pi K_1'\rho}.$$

Видно, что поле скоростей убывает обратно пропорционально расстоянию до скважины. Причём v_ρ не зависит, а v_ϑ зависит от проницаемости пласта (K_{ij}) . Отношение $v_\vartheta/v_\rho = \operatorname{tg}\delta$ $(\operatorname{tg}\delta = K_2'/K_1')$ зависит от (K_{ij}).

Учитывая скорость (8.3.16′) и якобиан $\mathfrak{I} = 1/(1-|\mu|)$, дифференциальное уравнение границы Γ_t' (8.3.12) запишем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{q(1-|\mu|^2)K'}{2\pi K_1'\overline{\zeta}}.$$

Отсюда в полярных координатах следуют уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{q(1-|\mu|^2)}{2\pi\rho}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{qK_2'(1-|\mu|^2)}{2\pi K_1'\rho^2}.$$

Отметим в начальный момент времени $t=0$ какую-либо частицу жидкости на границе Γ_0' координатой (ρ_0, ϑ_0) . Проинтегрируем эти уравнения с начальным условием:

$$\text{при} \quad t = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Получим уравнение движения границы Γ_t' :

$$\rho = \rho_0\sqrt{1 - \frac{q(1-|\mu|^2)t}{\pi\rho_0^2}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{K_2'}{K_1'}\ln\sqrt{1 - \frac{q(1-|\mu|^2)t}{\pi\rho_0^2}}. \qquad (8.3.17)$$

Отсюда следует, что траектория отмеченной частицы жидкости границы Γ_t' будет при $K_2' \neq 0$ логарифмическая спираль, уравнение которой[1]

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{K_1'}{K_2'}(\vartheta - \vartheta_0)\right], \qquad (8.3.17')$$

а в случае ортотропной среды ($K_{12} = K_{21}$, $K_2' = 0$) — отрезок прямой $\vartheta = \vartheta_0$ $(\rho \in [0, \rho_0])$.

[1]Если скважина нагнетательная, то в уравнениях (8.3.17) следует заменит q на $-q$ (граница Γ_t' будет двигаться от скважины), а уравнение траектории жидкости прежнее (8.3.17′).

Найдём время продвижения границы Γ'_t к скважине. На плоскости ζ контур скважины — эллипс. Будем его моделировать контуром окружности σ'_c «эффективного» радиуса R'_c, который связан с радиусом скважины R_c формулой (8.1.16). Из формул (8.3.17) следует, что частица жидкости, расположенная при $t = 0$ в точке (ρ_0, ϑ_0) границы Γ'_0, через промежуток времни T достигнет контура σ'_c в точке (R'_c, ϑ_c):

$$R'_c = \rho_0 \sqrt{1 - \frac{q(1-|\mu|^2)T}{\pi\rho_0^2}}, \quad \vartheta'_c = \vartheta_0 + \frac{K'_2}{K'_1} \ln \sqrt{1 - \frac{q(1-|\mu|^2)T}{\pi\rho_0^2}}.$$

Отсюда с учётом формулы (8.1.16) имеем

$$T = \frac{\pi\rho_0^2}{q(1-|\mu|^2)} \left[1 - (1 - |\mu^2|) \left(\frac{R_c}{\rho_0}\right)^2\right], \tag{8.3.18}$$

$$\vartheta_c = \vartheta_0 + \frac{K'_2}{K'_1} \ln \frac{R_c\sqrt{1-|\mu|^2}}{\rho_0}. \tag{8.3.19}$$

Из формул (8.3.18) и (8.3.19) следует, что время T зависит от проницаемости среды (коэффициента $|\mu|$), дебита скважины q и расстояния ρ_0 точки первоначальной границы Γ'_0 в плоскости ζ до центра скважины и не зависит от угла ϑ_0, Последнее означает, что точки границы Γ'_0, находящиеся на одинаковом расстоянии ρ_0 от центра скважины и имеющие разные значения ϑ_0, попадут в разные точки контура скважины (ϑ_c — различные) в один и тот же момент времени T. В частности, если граница Γ'_0 — окружность радиуса ρ_0, уравнение которой (5.2.13) (а в плоскости z граница Γ_0 — эллипс, описывается уравнением (5.2.10)), то все точки этой границы одновременно в момент времени T достигнут контура скважины. Время T наименьшее для точки $(\rho_0, \vartheta_0) \in \Gamma'_0$, у которой расстояние ρ_0 до центра скважины в плоскости ζ минимальное.

В практике добычи флюидов (воды, нефти), мониторинга распространения загрязнения значимо время T, по истечении которого какая-либо точка (x_0^*, y_0^*) границы Γ_0 первой достигнет скважины. В случае одиночной скважины в безграничном анизотропно-однородном пласте в условиях модели «разноцветных» жидкостей время T_* определяется, как это отмечено выше, наименьшим расстоянием $\rho_0 = \rho_*$ точки (ξ_0^*, η_0^*) границы Γ'_0 до центра скважины (точки $(x_0^*, y_0^*) \in \Gamma_0$ и $(\xi_0^*, \eta_0^*) \in \Gamma'_0$ взаимосвязаны преобразованиями (2.4.13)). Это время находим по формуле (8.3.18), в которой следует положить $\rho_0 = \rho_*$ и в предположении ($\rho_* \gg R_c$) (что характерно для задач практики) с учётом $|\mu| < 1$ записать

$$T_* = \frac{\pi \rho_*^2}{q(1 - |\mu|^2)}. \tag{8.3.20}$$

В качестве примеров, когда можно указать простые выражения для ρ_*, рассмотрим границу Γ_0 «разноцветных» жидкостей в виде прямой и окружности. В случае прямолинейной границы Γ_0, отстоящей от центра скважины на расстоянии d (рис. 8.1.1), воспользуемся формулой (8.1.13), согласно которой

$$\rho_* = \frac{d[1 - (a^2 + b^2)]}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}}. \tag{8.3.21}$$

В случае границы Γ_0 в виде окружности радиуса R_0 расстояние ρ_* определяется в плоскости ζ малой полуосью эллипса, то есть согласно формуле (8.1.14′):

$$\rho_* = R_0(1 - |\mu|). \tag{8.3.22}$$

Подставляя выражения (8.3.21) и (8.3.22) в формулу (8.3.20), находим в случае границ Γ_0: прямолинейной

$$T_* = \frac{T_0[1 - (a^2 + b^2)]}{(1 - a^2) + b^2} \quad \left(T_0 = \frac{\pi d^2}{q}\right)$$

и круговой

$$T_* = \frac{T_0(1 - |\mu|)}{1 + |\mu|}, \quad |\mu| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \left(T_0 = \frac{\pi R_0^2}{q}\right), \tag{8.3.22′}$$

где T_0 — время достижения границей Γ_t скважины (в случае малости её радиуса: $R_c \ll d$ и $R_c \ll R_0$), расположенной в изотропном грунте ($|\mu| = 0$, $a = 0$, $b = 0$). Видно, что анизотропия грунта ($|\mu| \neq 0$) уменьшает время достижения границей Γ_t скважины ($T_* < T_0$). В рассматриваемых примерах это объясняется тем, что анизотропия грунта определяет направление прорыва границы раздела жидкостей к скважине по кратчайшему в плоскости ζ пути, которое не будет кратчайшим в плоскости z. Этот путь в плоскости ζ, как следует из формул (8.3.21) и (8.3.22), короче, чем на плоскости z ($\rho_* < d$, $\rho_* < R_0$).

Эволюция границы раздела жидкостей различных физических свойств к скважине

Теперь исследуем эволюцию границы раздела жидкостей различных физических свойств (вязкости, плотности) к эксплуатационной скважине, вообще говоря, переменного приведённого дебита $q(t)$ в анизотропном однородном пласте проводимости $P = (P_{ij})$ $(P_{ij}, i, j = 1, 2$ — постоянные). Область течения D ограничена контуром σ_Π и контуром скважины σ_c, на которых изменяются давления (обобщённые потенциалы). Работу скважины моделируем стоком мощности $q(t)$. Начало координат выберем в точке забоя скважины. В отсутствии контура питания (он расположен в бесконечности) и контура скважины течение описывают на плоскости ζ согласно формулам (8.3.16) и (8.3.16′) комплексный потенциал (обобщённый потенциал)

$$W_0(\zeta, t) = -\frac{q(t)}{2\pi K'} \ln \zeta \quad \left(\varphi_0(\zeta, t) = -\frac{q(t)}{2\pi K_1'} \ln |\zeta|\right) \tag{8.3.23}$$

и поле скорости

$$v_0(\zeta, t) = v_{0\xi}(\zeta, t) + iv_{0\eta} = -\frac{q(t)K'}{2\pi K_1' \overline{\zeta}}. \tag{8.3.24}$$

Тогда на основании формул (8.3.7)–(8.3.9) имеем на границах Γ_t' и σ_Π' интегральные уравнения

$$g(\zeta, t) - 2\lambda_\mu \left[\int\limits_{\Gamma_t'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau + \int\limits_{\sigma_\Pi'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau \right] = \\ = 2\lambda_\mu [\varphi_0(\zeta, t) + \alpha \Pi(\zeta, t)], \quad \zeta \in \Gamma_t', \tag{8.3.25}$$

$$f(\zeta, t) - 2 \left[\int\limits_{\Gamma_t'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau + \int\limits_{\sigma_\Pi'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau \right] = \\ = 2[\alpha_\Pi(\zeta, t) - \varphi_0(\zeta, t)], \quad \zeta \in \sigma_\Pi', \tag{8.3.26}$$

а на контуре скважины σ_c' — интегральное соотношение

$$\int\limits_{\Gamma_t'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau + \int\limits_{\sigma_\Pi'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) f(\tau, t) dl_\tau = \alpha_c(\zeta, t) - \varphi_0(\zeta, t), \quad \zeta = \zeta_* \in \sigma_c', \tag{8.3.27}$$

где согласно формуле (6.1.38)

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial l_\tau}\left[\frac{K_2'}{K_1'}\ln|\zeta-\tau| + \arg(\zeta-\tau)\right],$$

а $\varphi_0(\zeta,t)$ определяется формулой (8.3.23).

Интегро-дифференциальное уравнение границы Γ_t' (8.3.12) (границы Γ_t' и σ_Π' — замкнутые) при учёте $\mathcal{J}' = (1-|\mu|^2)^{-1}$ принимает вид

$$\frac{d\overline{\zeta}}{dt} = (1-|\mu|^2)\left[\overline{v}_0(\zeta,\tau) + \overline{K}'\int\limits_{\Gamma_t'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau + \overline{K}'\int\limits_{\sigma_\Pi'}\overline{V}_2(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau\right],$$
$$\zeta\in\Gamma_t'. \quad (8.3.28)$$

Здесь согласно формулам (8.3.24) и (6.1.37)

$$\overline{v}_0(\zeta,t) = \frac{q(t)\overline{K}'}{2\pi K_1'}\zeta, \quad \overline{V}_2(\zeta,\tau) = -\frac{K'}{2\pi i K_1'(\zeta-\tau)}.$$

Запишем уравнение (8.3.28) в проекциях на координатные оси $O\xi$ и $O\eta$, выделив в нём действительную и мнимую части. Воспользуемся комплексно сопряжённой скоростью вихря $\overline{v}_2(\zeta,\tau) = v_{2\xi}(\zeta,\tau) - iv_{2\eta}(\zeta,\tau)$, связанную с $\overline{V}_2(\zeta,\tau)$ равенством $\overline{v}_2(\zeta,\tau) = \overline{K}'\overline{V}_2(\zeta,\tau)$. Учитывая $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, находим

$$\frac{d\xi}{dt} = (1-|\mu|^2)\left[v_{0\xi}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma_t'}v_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau + \int\limits_{\sigma_\Pi'}v_{2\xi}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau\right],$$
$$\frac{d\eta}{dt} = (1-|\mu|^2)\left[v_{0\eta}(\zeta,t) + \int\limits_{\Gamma_t'}v_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial g(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau + \int\limits_{\sigma_\Pi'}v_{2\eta}(\zeta,\tau)\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial l_\tau}dl\tau\right],$$
$$\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma_t', \quad (8.3.29)$$

где

$$v_{0\xi}(\zeta,t) = \frac{q(t)(K_1'\xi - K_2'\eta)}{2\pi K_1'(\xi^2+\eta^2)}, \quad v_{0\eta}(\zeta,t) = \frac{q(t)(K_2'\xi + K_1'\eta)}{2\pi K_1'(\xi^2+\eta^2)},$$
$$v_{2\xi}(\zeta,\tau) = -\frac{|K'|^2(\eta'-\eta)}{2\pi K_1'|\zeta-\tau|^2}, \quad v_{2\eta}(\zeta,\tau) = \frac{|K'|^2(\xi'-\xi)}{2\pi K_1'|\zeta-\tau|^2},$$

$|\zeta-\tau|^2 = (\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2$ — квадрат расстояния между точками $\zeta = \xi+i\eta$ и $\tau = \xi' + i\eta'$.

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы интегральных уравнений (8.3.25), (8.3.26), интегрального соотношения (8.3.27) и интегро-дифференциальных уравнений (8.3.29) при начальных условиях (6.1.20). По найденным в плоскости ζ координатам границы $(\xi, \eta) \in \Gamma'_t$ отыскиваем на основании преобразований (2.4.13) координаты в плоскости z искомой границы $(x, y) \in \Gamma_t$ в моменты времени $t > 0$.

В качестве примера рассмотрим частный случай исследуемой задачи эволюции границы раздела жидкостей Γ_t, когда фильтрация напорная (массовой силой можно пренебречь, $\Pi = 0$), контур питания σ_Π удалён в бесконечность, а первоначальный контур границы Γ_0 — окружность радиуса R_0. Пусть скважина заданного дебита q и радиуса R_c расположена в центре этой окружности. Задана проницаемость грунта (K_{ij}). Используя параметры, характеризующие соотношение между компонентами тензора (K_{ij}):

$$\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}}, \quad \beta = \frac{K_{12}+K_{21}}{2K_{11}}, \quad \gamma = \frac{K_{12}-K_{21}}{2K_{11}},$$

входящий в преобразование (2.4.13) параметр μ запишем

$$|\mu| = \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2+4\beta^2}}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}} \quad (\beta^2 < \alpha), \quad \arg\mu = \operatorname{arctg}\frac{2\beta}{1-\alpha}.$$

Уравнение контура Γ_0 в плоскости z запишем (ϑ — параметр, $\vartheta \in [0, 2\pi]$):

$$z_0 = R_0 e^{i(\vartheta+\alpha_1)} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\mu)$$

Контур скважины в плоскости ζ, как и прежде, моделируем окружностью эффективного радиуса R'_c, который связан с радиусом скважины R_c формулой (8.1.16). Согласно преобразованию (2.4.13) контур первоначальной границы Γ'_0 на плоскости ζ — эллипс, уравнение которого следует из формулы (8.1.14), в которой следует положить $C = \overline{C} = 1$, $\beta_1 = \alpha_1$. Тогда в момент времени $t = 0$ уравнение границы Γ'_0 имеет вид

$$\zeta_0 = R_0 e^{i\alpha_1}(e^{i\vartheta} + |\mu| e^{-i\vartheta}) \quad (\alpha_1 = \frac{1}{2}\arg\mu)$$

или

$$\begin{aligned} &\xi_0 = R_0[\cos(\vartheta + \alpha_1) + |\mu| \cos(\vartheta - \alpha_1)], \\ &\eta_0 = R_0[\sin(\vartheta + \alpha_1) - |\mu| \sin(\vartheta - \alpha_1)], \quad (\xi_0, \eta_0) \in \Gamma_0'. \end{aligned} \tag{8.3.30}$$

В этом случае надобность в уравнении (8.3.26) отпадает (контур питания σ_Π' удалён в бесконечность), и система уравнений (8.3.25), (8.3.27) и (8.3.29) принимает более простой вид

$$g(\zeta, t) - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau = 2\lambda_\mu \varphi_0(\zeta, t), \quad \zeta \in \Gamma_t', \tag{8.3.31}$$

$$\int\limits_{\Gamma_t'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau, t) dl_\tau = \alpha_c(\zeta, t) - \varphi_0(\zeta, t), \quad \zeta = \zeta_* \in \sigma_c', \tag{8.3.32}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt} = (1 - |\mu|^2) \left\{ v_{0\xi}(\zeta, t) + \int\limits_{\Gamma_t'} v_{2\xi}(\zeta, \tau) \frac{\partial g(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} dl\tau \right\}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = (1 - |\mu|^2) \left\{ v_{0\eta}(\zeta, t) + \int\limits_{\Gamma_t'} v_{2\eta}(\zeta, \tau) \frac{\partial g(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} dl\tau \right\}, \\ &\qquad \zeta = (\xi, \eta) \in \Gamma_t'. \end{aligned} \tag{8.3.33}$$

Таким образом, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы уравнений (8.3.31), (8.3.33) и соотношения (8.3.32) при условиях (8.3.30). При заданном дебите $q = \mathrm{const}$ из уравнений (8.3.31), (8.3.33) находим в момент времени $t > 0$ положение (координаты ξ, η) границы Γ_t', а из соотношения (8.3.32) $\alpha_c(\zeta, t)$, $\zeta = \zeta_* \in \sigma_c'$ (если в этом есть надобность).

Систему уравнений (8.3.31)–(8.3.33) решаем численно методом дискретных особенностей [79]. Замечаем, что эта система следует как частный случай из системы (8.3.7)–(8.3.9), (8.3.12′) при $f(\zeta) = 0$ и $\Pi = 0$. Разностный аналог последней имеет вид (8.3.13)–(8.3.15). Воспользуемся системой (8.3.13)–(8.3.15), в которой положим $\Pi = 0$, $f_\nu^j = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, m_2$, $j = 1, 2, \ldots$. В качестве характерного размера выберем радиус окружности Γ_0 ($R_0 = 1$). За характерное время с учётом $R_c \ll R_0$ примем согласно

$(8.3.22')$ время[1] $T_0 = \pi R_0^2/q$, то есть $T_0 = 1$. Тогда $q = \pi$. В момент времени $t = 0$ жидкость вязкости μ_2 занимает в плоскости z область D_2 — круг радиуса $R_0 = 1$, центре которого расположена скважина дебита $q = \pi$. На плоскости z построим положения границы Γ_t через равные промежутки времени в моменты: $t = 0$, $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T, где T — время достижения границей Γ_t контура скважины в случае фиксированного параметра λ_μ.

В случае изотропного грунта ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) в каждый момент времени $t \in [0, 1]$ граница Γ_t — окружность, которая стягивается к контуру скважины за время $T_0 = 1$. Анизотропия грунта ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$) определяет направление и время T прорыва жидкости вязкости μ_1 в скважину. В случае модели «разноцветных» жидкостей ($\lambda_\mu = 0$) уравнения движения границы Γ_t' опишут вытекающие из (8.3.17) при $\rho_0 = 1$, $q = \pi$ уравнения

$$\rho = \sqrt{1-(1-|\mu|^2)t}, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha-\beta^2}} \ln\sqrt{1-(1-|\mu|^2)t}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

совместно с преобразованиями (2.4.13), а время T согласно $(8.3.22')$ находится из формулы

$$T = \frac{1-|\mu|}{1+|\mu|} \quad \left(|\mu| = \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2+4\beta^2}}{\alpha+1+2\sqrt{\alpha-\beta^2}}, \quad \beta^2 < \alpha\right).$$

Время $T < 1$, не зависит от параметра γ и при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ ($|\mu| = 0{,}45$) равно $0{,}38$.

В случаях $\lambda_\mu = 1/2$ и $-1/2$ (вязкости жидкостей различаются в три раза) время T существенно отлично от случая $\lambda_\mu = 0$. При $\lambda_\mu = 1/2$ прорыв Γ_t к скважине происходит быстрее ($T = 0{,}28$, рис. 8.3.1), а при $\lambda_\mu = -1/2$ — медленнее ($T = 0{,}64$, рис. 8.3.2)[2]. Процесс вытеснения жидкостей в последнем случае не устойчив, что имеет место также для эволюции границы в изотропном грунте [55, 94, 144]. Видно,что анизотропия грунта сильно изменяет картину эволюции границы Γ_t, ускоряет и замедляет процесс прорыва границы Γ_t к скважине.

---

[1] T_0 — время достижения скважины в изотропном грунте ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) частицей жидкости, находящейся на расстоянии R_0 от её центра, в модели «разноцветных» жидкостей.

[2] Представленные на рис. 8.3.1–8.3.4 результаты получил О.В. Костин.

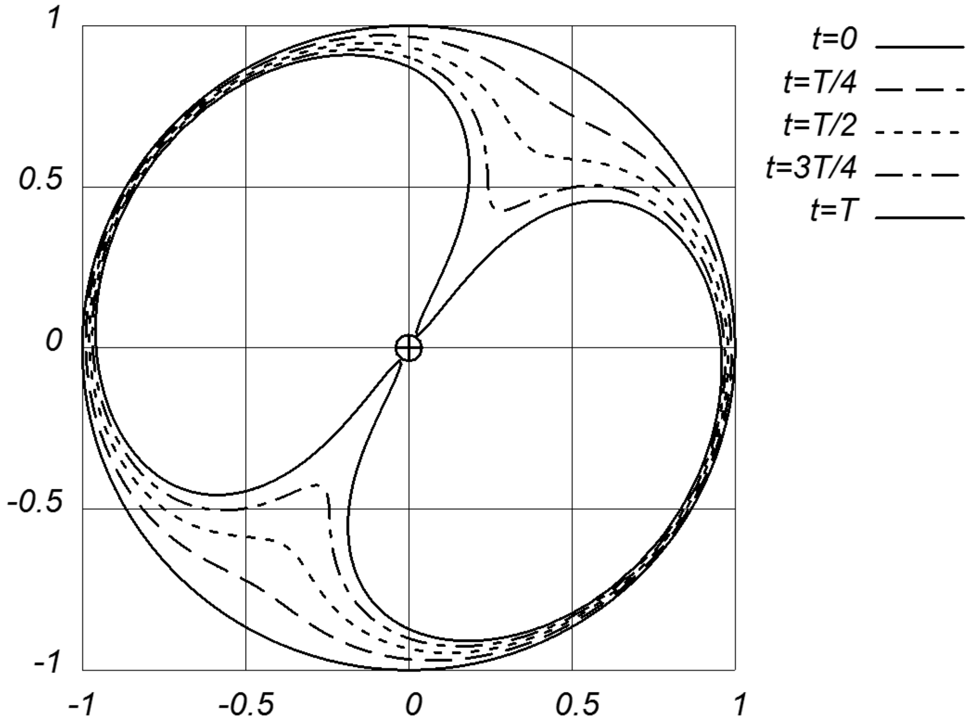

Рис. 8.3.1. Эволюция границы Γ_t ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\lambda_\mu = 1/2$, $T = 0{,}28$).

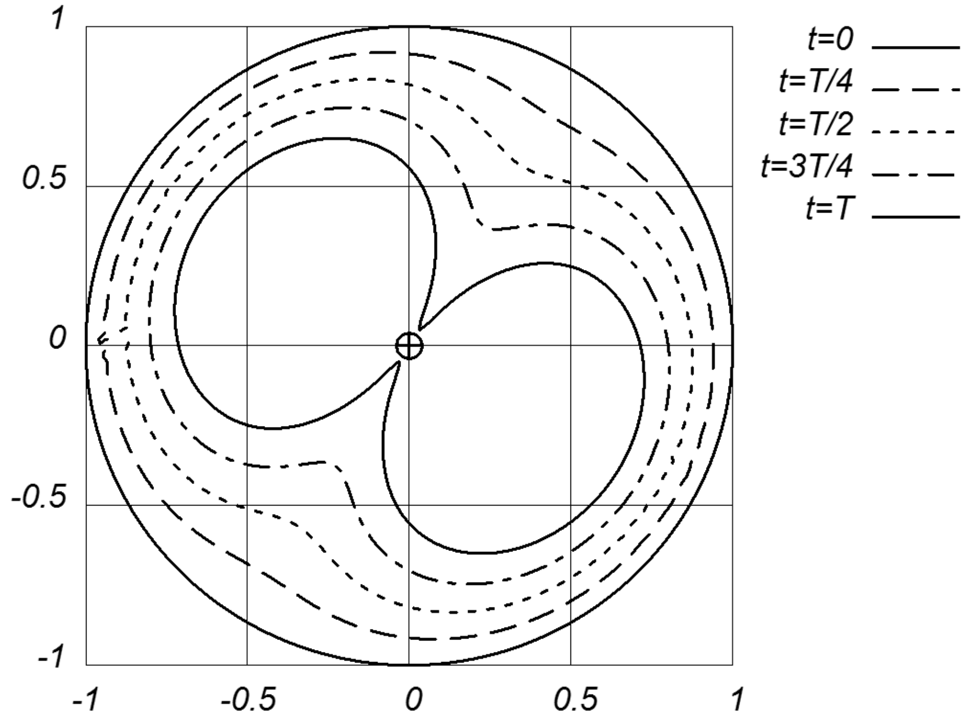

Рис. 8.3.2. Эволюция границы Γ_t ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\lambda_\mu = -1/2$, $T = 0{,}64$).

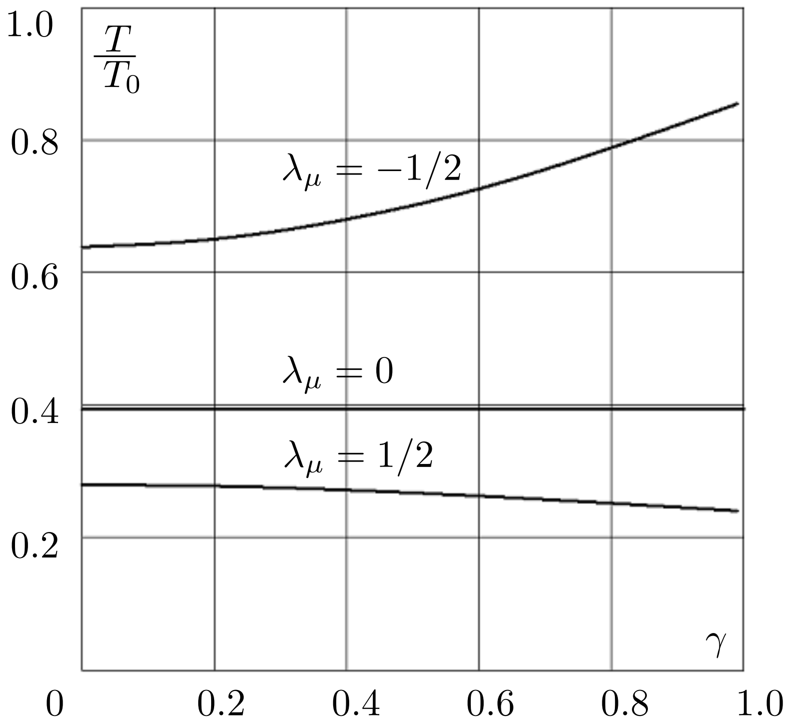

Рис. 8.3.3. Зависимость времени T от параметра γ ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda_\mu = 0, \pm 1/2$).

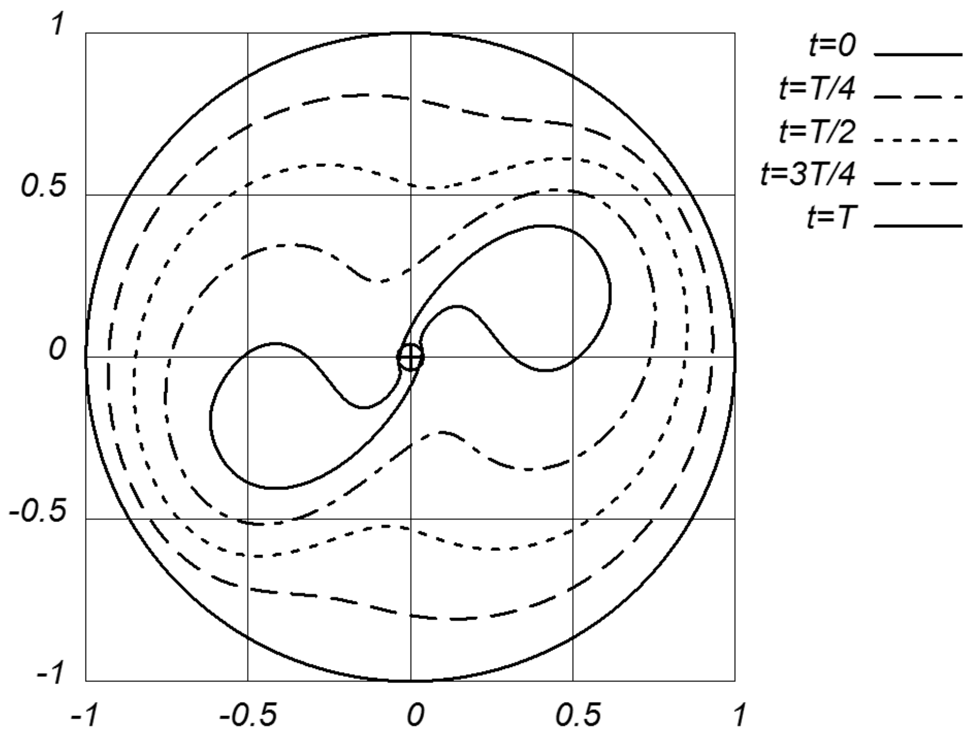

Рис. 8.3.4. Эволюция границы Γ_t ($\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\lambda_\mu = -1/2$, $T = 0{,}88$).

В случае «разноцветных» жидкостей время T не зависит, как выше отмечалось, от параметра γ, характеризующего различие компонент K_{12} и K_{21} тензора K. Когда вязкости жидкостей различны, то время T зависит от γ, особенно существенно при $\lambda_\mu = -1/2$ (рис. 8.3.3). На рис. 8.3.4 показана эволюция границы Γ_t в случае $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ и $\lambda_\mu = -1/2$, когда время $T = 0{,}88$. Видно «закручивание» границы Γ_t по мере её приближения к скважине.

В задачах практики добычи флюидов (нефти, воды) время T имеет принципиальное значение. В момент времени T граница раздела двух жидкостей (водонефтяной контакт или граница чистой воды и загрязнённой жидкости) достигает скважины и она начинает обводняться или загрязняться и её следует отключить. При этом остаётся целик (область) неизвлечённой нефти или чистой воды. Найдём этот целик, используя уравнение неразрывности (закон сохранения объёмного расхода жидкости). Пусть в момент времени $t = 0$ жидкость вязкости μ_2, ограниченная границей Γ_0 (вне её жидкость вязкости μ_1) занимала пласт грунта площади S_0, а в момент $t = T$ — площадь S_T. Тогда S_T — площадь целика неизвлечённой (остаточной) жидкости вязкости μ_2. Объём этого целика $V_T = HS_T$, H — толщина пласта ($H = \mathrm{const}$). Согласно уравнению неразрывности $S_T = S_0 - qT$ (q — дебит скважины). Тогда имеем относительную площадь целика

$$\frac{S_T}{S_0} = 1 - \frac{qT}{S_0}. \tag{8.3.34}$$

В рассматриваемой задаче $S_0 = \pi R_0^2 = \pi$, $q = \pi$ и, следовательно, согласно формуле (8.3.34), $S_T/S_0 = 1 - T$. Находим S_T/S_0 равным: 0,62 при $\lambda_\mu = 0$, 0,72 (рис. 8.3.1), 0,36 (рис. 8.3.2) и 0,12 (рис. 8.3.4). Видим, что в случае $\lambda_\mu = -1/2$ целик наименьший (более вязкая жидкость μ_1 как «поршень» вытесняет менее вязкую жидкость μ_2).

Исследованные граничные задачи не исчерпывают возможностей разработанного нами метода их решения. Представляют интерес для практики обобщения проблем, поставленных в работах [3, 48, 64, 65, 80, 94, 100–117, 130, 144, 146, 170, 171], на случай анизотропной пористой среды, к решению которых можно применить этот метод.

Заключение

Подводя итоги, отметим, что развитые в монографии методы и соответствующий им математический аппарат позволяют успешно решать поставленные граничные задачи фильтрации в анизотропной и неоднородной пористой среде. Однако возникают трудности, связанные с тем, что в общем случае пористой среды не известны фундаментальные решения основных уравнений фильтрации. Фундаментальные решения указаны в монографии для случаев, когда среда анизотропная однородная и ортотропная неоднородная, проницаемость (проводимость) которой моделируется широкими классами функций (гармоническими, метагармоническими и степенными функциями). Поскольку фундаментальные решения — основа предложенных методов, то их отыскание для общего случая анизотропной и неоднородной среды — важнейшая задача.

Отметим, что нами не исследован вопрос об адекватности построенных нами моделей численного решения сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений их аналитическим аналогам (мы ограничивались тестированием на изученных задачах и исследованием практической сходимости численного расчёта). Этот вопрос может составить предмет дальнейших исследований.

Нами исследованы некоторые конкретные задачи практики, главным образом для того, чтобы продемонстрировать возможности методов их решения. Расширение практических приложений — предмет дальнейших исследований.

Другое направление исследований, обобщающее и развивающее направление в книге — создание математических моделей нелинейной фильтрации в анизотропно-неоднородных пористых средах и их приложения к задачам практики.

Расширением приложений построенных в монографии математических моделей фильтрации жидкости может явиться использование заложенных в них идей для исследования физических процессов иной природы (теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), которые описываются уравнениями, математически аналогичными уравнениям фильтрации.

Литература

1. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.

3. Аксюхин А. А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважинам в неоднородных слоях грунта. Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Орёл. 2000. 153 с.

4. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.

5. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Изд-во «Лань», 2008. 912 с.

6. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 134 с.

7. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

8. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.

9. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. Москва—Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2006. 488 с.

10. Бабушкин В. Д., Плотников Н. Н., Чуйко В. М. Методы изучения фильтрационных свойств неоднородных пород. М.: Недра, 1974. 208 с.

11. Белинский П. П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974. 98 с.

12. Белов В. А. О построении течений в слоях переменной толщины // Уч. зап. каф. теорет. физики Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1968. Т. 200. Вып. 7. С. 19–31.

13. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.

14. Берс Л. Теоретико-функциональная точка зрения на эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными. Дополн. к гл. IV (с. 372–404) в кн. Р. Курант. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

15. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.

16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

18. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.

19. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966. 252 с.

20. Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е. Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979. 254 с.

21. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. 1957. Т. 43, № 4. С. 451–503.

22. Боярский Б. В. Общее представление решений эллиптической системы уравнений на плоскости // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 4. С. 543–546.

23. Боярский Б. В. Об обобщённой граничной задаче Гильберта // Сообщ. ГССР. 1960. Т. 25, № 4. С. 385–390.

24. Быстров К. Н. О течениях в искривленных слоях с изотермическим законом изменения толщины // Уч. зап. каф. теорет. физики Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1959. Т. 75. Вып. 4. С. 11–29.

25. Быстров К. Н. О непрерывных распределениях диполей, интегралах Коши и типа Коши для течений в слоях переменной толщины // Уч. зап. каф. теорет. физики Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1966. Т. 164. Вып. 6. С. 34–41.

26. Быстров К. Н. Инвариантная производная и инвариантный интеграл в классе квазианалитических функций комплексного переменного // Гидродинамика: Московское общество испытат. природы. М.: Изд-во МГУ, 1970. С. 3–6.

27. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 451 с.

28. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 757 с.

29. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: «Янус-К». 2001 508 с.

30. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений . М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 296 с.

31. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.

32. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1988. 512 с.

33. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 379 с.

34. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 3-е изд., М.: Наука, 1976. 527 с.

35. Волковыский Л. И. Квазиконформные отображения. Львов. 1955.

36. Гагаев Б. М. Единственность одной задачи сопряжения функций, удовлетворяющих эллиптическому уравнению // Уч. зап. Казанского ун-та, 1956. Т. 116, кн. 1. С. 33–35.

37. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.

38. Гайдуков Н. И. Осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости с особенностями на оси симметрии и в бесконечно удален-

ных точках // Уч. зап. Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1966. Т. 164. Вып. 6. С. 58–62.

39. Гладышев Ю. А. Об одном обобщении теоремы об окружности для случая двумерных фильтрационных течений в пласте с переменной проницаемостью и мощностью // Математическая физика и гидродинамика: Московское общество испытат. природы. М.: Изд-во МГУ, 1972. С. 133–137.

40. Гладышев Ю. А. Краевые задачи гидродинамики и метод функций формальных переменных // Специальные вопросы теоретической гидродинамики. Тула: Изд-во Тульского пединститута, 1976. Вып. 3. С. 15–74.

41. Гладышев Ю. А. Об одном новом методе построения осесимметричных полей в неоднородной среде // Теоретические основы гидродинамики. Тула: Изд-во Тульского пединститута, 1980. С. 96–111.

42. Голубев Г. В., Тумашев Г. Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань. Изд-во Казанского ун-та. 1972. 196 с.

43. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.

44. Голубева О. В. Метод расчета фильтрации в криволинейно анизотропных основаниях гидросооружений. Препринт № 118. ИПМ АН СССР. 1978. 58 с.

45. Голубева О. В. Фильтрация к скважинам и критерий их работы без загрязнения. Препринт № 182. М.: ИПМ АН СССР. 1981. 59 с.

46. Голубева О. В. Вопросы загрязнения скважин и окружающей среды фильтрационными потоками. Препринт № 315. М.: ИПМ АН СССР. 1988. 41 с.

47. Голубева О. В. Промывка загрязненных областей подземными водами // Задачи динамических процессов в сплошных средах. Свердловск: Изд-во Свердловского пединститута, 1991. С. 3–9.

48. Голубева О. В., Пивень В. Ф. О продвижении границы раздела жидкостей при нелинейной фильтрации // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 754–758.

49. Голубева О. В., Хмельник М. И. Динамические процессы, описываемые квазианалитическими функциями // Теория гидродинамических моделей технических задач. Свердловск: Изд-во Свердловского пединститута, 1988. С. 9–16.

50. Голубева О. В., Сапиянов Т. Н. Комплексные потенциалы временных процессов технических задач. Препринт № 517. М.: ИПМ РАН. 1992. 54 с.

51. Гоман О. Г., Карплюк В. И., Ништ М. И., Судаков А. Г. Численное моделирование осесимметричных отрывных течений несжимаемой жидкости. М.: Машиностроение, 1993. 288 с.

52. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

53. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука. 1979. 536 с.

54. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала // ПММ 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 103–108.

55. Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчёты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. М.: Недра. 1980. 264 с.

56. Данилов В. Л. Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 108 с.

57. Данилюк И. И. Об общем представлении осесимметричных полей // ПМТФ. 1960. № 2. С. 22–33.

58. Данилюк И. И. Обобщенная формула Коши для осесимметричных полей // Сибирский мат. журнал. 1963. Т. IV. № 1. С. 48–85.

59. Данилюк И. И. Исследование пространственных осесимметричных краевых задач // Сибирский мат. журнал. 1963. Т. IV. № 6. С. 1271–1310.

60. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ. 1987. 168 с.

61. Емец Ю. П. Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. Киев: Наук. думка. 1987. 254 с.

62. Забрейко П. П., Кошелев А. Н., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 448 с.

63. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л. Физматгиз. 1962. 708 с.

64. Квасов А. А. Математическое моделирование двумерных фильтрационных течений к водозабору в кусочно-неоднородных слоях, содержащих очаги загрязнения. Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Орёл. 2003. 200 с.

65. Квасов А. А., Пивень В. Ф. Исследование двумерного шлейфа загрязнения в неоднородном слое // Вісник Харківського національного університету. № 590. 2003. С. 139–144.

66. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир. 1964. 350 с.

67. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир. 1987. 311 с.

68. Копаев А. В., Радыгин В. М. Фильтрационные теоремы о сферах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 105–109.

69. Копенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: ИЛ, 1963. 406 с.

70. Корнеев М. Н., Шпилевой А. Я. Обобщенная сферическая теорема Бутлера и ее применение для построения осесимметричных фильтрационных течений в кусочно-однородных средах // Теоретические основы гидродинамики. Тула: Изд-во Тульского пединститута. 1981. С. 36–43.

71. Костицына Л. И. Обобщение сферической теоремы Вейса на фильтрационные течения в средах со сферической границей раздела зон однородности // Математическая физика и гидродинамика: Московское общество испытат. природы. М.: Изд-во МГУ, 1972. С. 19–22.

72. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1, 6-е изд. перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

73. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965. 427 с.

74. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

75. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 136 с.

76. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. 3-е изд. исправл. М.: Наука, 1965. 716 с.

77. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.

78. Лейбензон Л.С. Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 2. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. М.—Грозн.—Л.—Новосиб.: Горгеолнефтеиздат, 1934. 352 с.

79. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

80. Лифанов И. К., Пивень В. Ф., Ставцев С. Л. Математическое моделирование работы системы перфорированных скважин в пласте неоднородного грунта // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. Т. 9. № 7. С. 19–33.

81. Лопатинский Ю. Б. Об одном обобщении понятия аналитической функции // Укр. мат. журнал. 1950. Т. 2. № 2. С. 56–73.

82. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 3-е изд. перераб. и дополн. М.: Наука, 1970. 904 с.

83. Лукомская М. А. Об одном обобщении аналитических функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 885–888.

84. Лукомская М. А. О циклах систем линейных однородных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1951. Т. 29(71). С. 551–558.

85. Лукомская М. А. Решение некоторых систем уравнений с частными производными посредством включения в цикл // ПММ. 1953. Т. 17, № 6. С. 745–747.

86. Маркушевич А. И. Об одной граничной задаче аналитических функций // Уч. зап. Моск. ун-та. 1946. Т. 1, вып. 100. С. 20–30.

87. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1987. 456 с.

88. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 640 с.

89. Милн—Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.

90. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе. 1963. 183 с.

91. Михайлов Л. Г. Задачи с сопряжением для уравнений с частными производными // Науч. тр. Юбил. семинара по краевым задачам. Минск: Изд-во «Университетское». 1985. С. 77–85.

92. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947. 304 с.

93. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 512 с.

94. Никольский Д. Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Орёл. 2002. 191 с.

95. Никольский Д. Н., Сетуха А. В. О локальной разрешимости уравнений эволюции линии раздела двух фильтрующихся жидкостей в классе аналитических функций // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 9. С. 1193–1204.

96. Обносов Ю. В. Краевые задачи теории гетерогенных сред: многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка. Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. 205 с.

97. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

98. Петровский И. Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1. Вып. 3–4 (13–14). С. 44–70.

99. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 304 с.

100. Пивень В. Ф. Вытеснение несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации // Гидромеханика: Сб. трудов Московского областн. désinstitutа. М.: Изд-во МОПИ, 1974. Вып. 3. С. 152–157.

101. Пивень В. Ф. Одномерная нелинейная фильтрация жидкостей различной вязкости // Гидромеханика: Сб. трудов Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1974. Вып. 3. С. 157–163.

102. Пивень В. Ф. Нелинейная фильтрация несмешивающихся жидкостей в слоях, расположенных на различных стыкующихся поверхностях // Гидромеханика: Сб. трудов Московского областн. пединститута. М.: Изд-во МОПИ, 1974. Вып. 3. С. 163–168.

103. Пивень В. Ф. О течениях в кусочно-неоднородной пористой среде // Исследования по специальным задачам гидродинамики: Московское общество испытат. природы. М.: Наука, 1982. С. 85–88.

104. Пивень В. Ф. Точечный источник в неоднородной пористой среде // Некоторые модели сплошных сред и их приложения: Московское общество испытат. природы. М.: Наука, 1988. С. 48–54.

105. Пивень В. Ф. К теории осесимметричных обобщенных аналитических функций в динамических процессах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1424–1426.

106. Пивень В. Ф. Метод осесимметричных обобщенных аналитических функций в исследовании динамических процессов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 228–234.

107. Пивень В. Ф. О двумерной фильтрации в слоях с прерывно изменяющейся проводимостью вдоль кривых второго порядка // Известия РАН. МЖГ. № 1, 1993. С. 120–128.

108. Пивень В. Ф. Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел. Изд-во Орловского пединститута. 1994. 148 с.

109. Пивень В.Ф. Двумерная фильтрация в слоях переменной проводимости, моделируемой гармонической функцией координат // Известия РАН. МЖГ. № 3. 1995. С. 102–112.

110. Пивень В. Ф. О теории двумерных процессов в слоях переменной проводимости, характеризуемых степенью гармонической функции // Докл. АН. 1995. Т. 344, № 5. С. 627–629.

111. Пивень В. Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимостей // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 595–605.

112. Пивень В. Ф. Граничные задачи сопряжения двумерных процессов в слоях переменной проводимости, моделируемой степенным законом // Докл. АН. 1997. Т. 357, № 3. С. 343–345.

113. Пивень В. Ф. Сведение граничной задачи сопряжения обобщенных аналитических функций к интегральному уравнению // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 9. С. 1194–1198.

114. Пивень В. Ф. Интегральное уравнение задачи сопряжения обобщенных аналитических функций на нестационарной границе // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 10. С. 1405–1409.

115. Пивень В. Ф. Интегральное и интегро-дифференциальные уравнения двумерной задачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 12. С. 1705–1710.

116. Пивень В. Ф. Сингулярные интегралы с ядрами типа Коши и их применение к двумерной задаче эволюции границы раздела жидкостей в неоднородном слое // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1201–1213.

117. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орел. Изд-во Орловского госуниверситета. Полиграф. фирма «Картуш». 2006. 508 с.

118. Пивень В. Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений в анизотропной пористой среде // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 9. С. 1286–1297.

119. Пивень В. Ф. Обобщенный сингулярный интеграл Коши для граничных задач двумерных течений в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1292–1307.

120. Пивень В. Ф. Сингулярные интегралы с обобщёнными ядрами Коши для поля скоростей граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 9. С. 1196–1214.

121. Пивень В. Ф., Алехин Е. И. К задаче о несовершенной скважине в кусочно-однородной среде // Задачи гидродинамики при усложненных моделях среды: Московское общество испытат. природы. М.: Наука, 1985. С. 11–17.

122. Положий Г. Н. Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. 2-е изд., перераб. и дополн. Киев: Наукова думка, 1973. 423 с.

123. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. перераб. и дополн. М.: Наука, 1977. 664 с.

124. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 11-е изд. М.: Наука, 1967. 444 с.

125. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа. 1983. 160 с.

126. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.

127. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука. 1989. 432 с.

128. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит. 2001. 320 с.

129. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

130. Скворцов Э. В., Фарзан Б. Х., Чилап А. Я. Решение некоторых задач сопряжения сведением к обобщенной задаче Римана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 351–355.

131. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.

132. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2, 21-е изд. М.: Наука, 1974. 656 с.

133. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2. 6-е изд. М.: Наука, 1981. 551 с.

134. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука. 1966. 292 с.

135. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ. 1955. 668 с.

136. Ставцев С. Л. Исследование трёхмерных граничных задач о дебите системы несовершенных скважин в кусочно-неоднородных слоях. Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Москва. 2003. 173 с.

137. Стрежнев В. А. К решению задачи сопряжения функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа // Труды Казанского авиационного ин-та. 1962. Вып. 71. С. 73–77.

138. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука. 1966. 724 с.

139. Толпаев В. А. Фильтрация жидкости в анизотропных и неоднородных грунтах. Ставрополь. Изд-во Северокавказского государственного технического университета. 2000. 196 с.

140. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947. 192 с.

141. Тумашев Г. Г. Сведение некоторых задач сопряжения функций к интегральным уравнениям // Уч. записки Казанского ун-та. 1956. Т. 116, кн. 1. С. 31–32.

142. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит. 2007. 480 с.

143. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: ГИФМЛ. 1963. 735 с.

144. Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта // Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Орёл. 2005. 191 с.

145. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М.: Наука. 1970. 800 с.

146. Фролов М. А. Исследование двумерных граничных задач о дебите системы скважин в неоднородных слоях, проводимости которых моделируются гармоническими и метагармоническими функциями координат. Дисс. на соиск. учёной степени канд. ф.-м. наук. Орёл. 2001. 148 с.

147. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

148. Цицкишвили А. Р. Об одном частном решении пространственных осесимметричных задач теории фильтрации // Соврем. пробл. мат. физ. Труды Всес. симп. Тбилиси, 22–25 апр. 1987. Т. 2. Тбилиси: 1987. С. 367–373.

149. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.

150. Черняев А. П. Фильтрация в искривленных неоднородных пластах с проводимостью некоторого класса // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1047–1049.

151. Чилап А. Я. Об одной задаче сопряжения для секториальной области // Журнал выч. математика и матем. физика. 1962. Т. 2. № 6. С. 1054–1061.

152. Чилап А. Я. Определение поля давлений в полосообразном кусочно-неоднородном пласте // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1964. № 4. С. 185–189.

153. Чилап А. Я. Задача сопряжения для уравнений эллиптического типа // Изв. ВУЗов. Математика. № 9. 1968. С. 106–111.

154. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Изд. 2-е. М.: Наука. 1976. 320 с.

155. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.

156. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М.-Л.: Гостоптехиздат, 1949. 524 с.

157. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 344 с.

158. Янушаускас А. И. Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука, 1985. 262 с.

159. Agmon S., Bers L. The expansion theorem for pseudo-analytic functions // Proc. Amer. math. soc. 1952. V. 3. P. 757–764.

160. Beltrami E. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad unasse // Opere matematice. Milano. 1911. V. 3. P. 115–128.

161. Beltrami E. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. Jbid. P. 349–377.

162. Bergman S., Shiffer M. Kernel function and elleptic differentional equations in mathematical physics. New York. 1953.

163. Bers L. Theory of pseudo-analytic functions. Lecture notes (mimeographed). New-York University. 1953.

164. Bers L. A remark on an application of pseudo-analitic functions // Amer. J. math. 1956. V. 78, No 3. P. 486–496.

165. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua // Quart. of appl. math. 1943. V. 1. P. 168–188.

166. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. of the Amer. math. soc. 1944. V. 56. P. 67–93.

167. Bers L. , Gelbart A. On generalized Laplase transformations // Ann. of math. 1947, V. 48. P. 342–357.

168. Bers L., Nirenberg L. On a representation theorem for liner elleptic systems with discontinuous coefficients and its applications // Convegno internaz. equazioni lineary alle derivate parzially. Roma. 1954–1955. P. 111–140.

169. Carleman T. Sur les systems lineaires aux derivees partilles du premiere ordere a deux variables // Comptes Rendus. Paris. 1933. V. 193. P. 471–474.

170. Lifanov I. K., Piven V. F., Stavtsev S. L. Mathematical modelling of the three-dimensional boundary value problem of the discharge of the well system in a homogeneous layer // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. Vol. 17. No. 1, pp. 99–111 (2002).

171. Lifanov I. K., Nikolsky D. N., Piven V. F. Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. Vol. 17. No. 4, pp. 381–391 (2002).

172. Oroveanu T. Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene. Течение жидкостей в неоднородных пористых средах. Editura Academiei RPR. 1963.

173. Picard E. Sur une système d' équations dux dérivees partiells // Paris. C. R. Acad. Sei. 1891. V. 112. P. 685–688.

174. Picard E. Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Jbid. P. 1399-1403.

175. Sadowsky M. A., Sternberg E. Elleptic integral representation of axially symmetric flows // Quart. of Appl. Math. 1950. Vol. 8, No 2. P. 113–126.

176. Weinstein A. Discontionuous integrals and generalized theory of potential // Trans. of the Amer. math. soc. 1948. V. 3, No 2. P. 342–354.

177. Weinstein A. On axially simmetric flows // Quart. of appl. math. 1948. V. 5, No 4. P. 429–444.

178. Weinstein A. Generalized axially simmetric potential theory // Bull. Amer. math. soc. 1953. V. 59. P. 20–38.

179. Weinstein A. Some applications of generalized axially simmetric potential theory to continuum mechanics // Механика жидкости и газа, математические методы: Труды Международ. симпозиума в Тбилиси 17–23 сентября 1963. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 440–453.

Коротко об авторе книги

Пивень Владимир Федотович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Орловского государственного университета.

Области его научных интересов: математическое моделирование в гидродинамике и физике, аналитические и численные методы решения граничных задач математической физики. Имеет более 150 научных публикаций, в их числе монографии и учебники: «Функции комплексного переменного в динамических процессах», «Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости», «Математические модели фильтрации жидкости», «Теоретическая механика».

Является сопредседателем Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики».

Пивень Владимир Федотович

Математические модели фильтрации жидкости

Оригинал-макет: Ю. С. Федяев

Подписано в печать 20.03.2015 г. Формат $60 \times 90/16$
Печать ризография. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern.
Объем 25,5 усл. печ. л. Тираж 50 экз.
Заказ № 80 от 20.03.2015 г.

Редакционно-издательский отдел
ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026 г. Орёл, ул. Комсомольская, 95
Тел. (4862) 74-45-08

Лицензия ПД № 8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орел, ул. 2-я Посадская, 26. Тел./факс (4862) 445-145