

622.235

К 33

МИНИСТЕРСТВО УГОЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ СССР
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА им. А. А. СКОЧИНСКОГО

Н. Д. КЕЙСЕР.
Ш. Г. ГАМСАХУРДИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ВЗРЫВОМ
В ПРИЛОЖЕНИИ
К ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ
ГОРНОГО ДЕЛА

Методы решения инженерно-технологических
задач при разрушении горных пород взрывом

*горные породы
взрывом*

Москва
1972

Большинство работ, посвященных исследованию физической сущности и основных закономерностей лавинного разрушения горных пород взрывом, носят экспериментальный характер.

Предлагаемая теоретическая работа ставит перед собой задачу исследования, нахождения и анализа функциональных зависимостей между основными параметрами, характеризующими явление разрушения горных пород взрывом.

Используемые при этом физические предпосылки носят приближенный характер. Этот недостаток вполне компенсируется простотой результатов, а точность получаемых соотношений может быть достигнута в результате экспериментального определения физических констант, входящих в формулы.

Наум Давидович Кейсер,
Шота Григорьевич Гамсахурдия

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ВЗРЫВОМ
В ПРИЛОЖЕНИИ К ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ГОРНОГО ДЕЛА

Методика решения инженерно-технологических задач при разрушении
горных пород взрывом

Редактор А.Ф.Кустова

Т 20299

Тираж 1000 Изд. № 5969

Заказ № 7149

Типография Института горного дела им.А.А.Скочинского

2,0 уч.-изд.л.

Подписано к печати 28/1 1972 г.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что процесс разрушения горных пород взрывом — явление многоэтапное, причем, каждая стадия характеризуется своими физическими закономерностями. Аботрагируем процесс разрушения, разбив его на несколько стадий: детонация ВВ, распространение волн напряжений, трещинообразование, интенсивное истечение через образовавшиеся трещины газообразных продуктов детонации и разгон отдельных массовых, разлет кусков взорванной массы, вторичное дробление в результате соударений. Подчеркиваем, что принятое деление условно, так как разные стадии процесса могут протекать одновременно (например, детонация ВВ и распространение волн напряжений).

В настоящей работе не рассматривается детонация ВВ. Предполагается, что в начальный момент времени во взрывной полости объемом V_0 находятся продукты детонации при начальном давлении p_0 . Для большинства штатных ВВ эта величина известна или может быть определена с достаточной степенью точности по формуле

$$p_0 = \rho \frac{D^2}{8},$$

где ρ — плотность ВВ;

D — скорость детонации.

Анализ поля напряжений широко проводился многими авторами. В большинстве теоретических работ предполагается, что среда линейно-упругая. Это позволяет решать простейшую задачу — взрыв сферического заряда в неограниченном пространстве [1] но рассмотрение зарядов другой формы значительно усложняется и становится практически неприемлемым. Трудности усугубляются наличием свободных поверхностей, что всегда имеет место в реальных ситуациях [2]. Успех в этом направлении может быть достигнут, по-видимому при использовании ЭЦМ. Дополнительное упрощение — учет ква-

зистатического приближения — сразу расширяет возможности анализа и позволяет решать многие задачи. Именно в такой постановке решаются нами далее задачи о действии взрыва в неограниченной области.

Экспериментальный анализ поля напряжений проводился многими исследователями. Основные результаты достаточно широко представлены в монографиях М.Ф. Друкованого, А.Н. Ханукаева и др. [3, 4].

Опыты на оптически активных материалах позволили зафиксировать зону воздействия падающей и отраженной частей импульса и момент, когда растягивающие напряжения превысили предел упругости материала. Выяснилось, что для образования взрывной воронки длина импульса должна быть не меньше двойной величины $\lambda_{н.с.}$, а его амплитуда достаточной для образования растягивающих сил, превышающих предел прочности материала на разрыв.

Съемки камерой ФП-22 при освещении объекта точечным источником света позволили наблюдать ряд последовательных фронтов воздушных волн. Вслед за фронтом воздушной волны от поверхности массива отрываются мельчайшие частицы породы.

Скоростная киносъемка на прозрачных материалах позволяет с некоторым приближением описать процесс разрушения и подойти к качественному определению взаимосвязи между параметрами волны напряжения и скоростью распространения трещин. Известно, что, в свою очередь, скорость распространения трещин зависит от величины заряда, глубины кпура и свойств взрываемой среды.

Отмечая преимущества изложенного метода анализа процесса разрушения (прежде всего наглядность и удобство), следует сказать о его серьезном недостатке. Хотя поле напряжений поддается количественному определению, получаемых данных недостаточно для установления параметров дробления реальных горных пород. Это обусловлено тем, что до настоящего времени не выяснены критерии подобия, характеризующие процесс разрушения.

Целый ряд практических задач взрывного дела порождает реальную методику моделирования и расчета действия взрыва в твердой среде, разработанная под руководством проф., докт. техн. наук О.Е. Бласова.

В монографии Э.О. Минделюх [5] так описывается предложение О.Е. Бласовым теоретические основы метода ЭГДА: согласно упрощенной модели действия взрыва по О.Е. Бласову, "процесс взрыва рассматривается как мгновенная передача энергии взрывных газов окружающей среде в виде кинетической, причем среда в момент ко-

редачи ей энергии может быть принята за идеальную несжимаемую жидкость. Эта модель позволила применить при расчетах методы классической механики и метод электрогидродинамической аналогии?

При помощи прибора ЭГДА находятся эквипотенциальные кривые, а по ним рассчитываются величины скоростей смещения среды. Поле потенциала скорости, снятое на установке через одинаковые интервалы значений потенциала, дает диаграмму распределения плотности энергии взрыва в окружающей среде, что позволяет определить зону разрушения среды. Границы разрушения для сред различной прочности неодинаковы. О.Е.Власов [6] указал на возможность определения по этим диаграммам характера деформаций среды: дробление, выброс, уплотнение, пластические деформации и т.п. Границы между зонами дробления, выброса, уплотнения определяются по направлению вектора скорости.

По начальному скоростному полю можно рассчитать также крупность дробления среды. На основе метода ЭГДА можно получать приближенные решения практических задач, связанных с учетом влияния геометрических факторов на результат действия взрыва.

При помощи этого метода можно оценить лишь конечные результаты действия взрыва, но нельзя рассматривать процессы, происходящие в среде, последовательно во времени. Сам по себе этот факт не является решающим недостатком, поскольку для практики важны результаты взрыва. Существенным недостатком является невозможность учета временных факторов и касательных напряжений (а следовательно, и разрушений от трещин тангенциального разрыва), что может привести в некоторых ситуациях к серьезным ошибкам. По-видимому, важной завершающей задачей в доработке метода ЭГДА является определение границ его использования.

Исследования трещинообразования при взрыве проводились многими авторами. В.Ч.Филиппов проводил анализ направления трещин при одиночном взрыве на свободную поверхность. Г.мимо подробного описания характера трещинообразования, в работе В.К.Филиппова [7] приводятся объяснения картин разрушения, основанные на следующих соображениях: при распространении ударных волн от заряда порода сжимается в радиальных и растягивается в тангенциальных направлениях, что создает условия для образования радиальных трещин, распространяющихся от заряда; такое напряженное состояние соответствует статическому полю напряжений и фактическому направлению первичных трещин вблизи заряда. При достижении волной скатия

свободной границе порода испытывает растяжение вдоль поверхности, в результате чего создаются условия для образования трещин, распространяющихся от поверхности в глубь массива. Возникновение этих трещин описывается, в частности, А.Н.Ханукаевым [4].

В связи с изучением трещинообразования кратко изложим основные теории хрупкого разрушения.

Теория максимального напряжения сдвига утверждает, что разрушение происходит в том месте, где максимальное напряжение сдвига становится равным критической величине, называемой сопротивлением материала скалыванию. Если $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{33}$ являются главными напряжениями внутри материала в какой-либо его точке и $\bar{\sigma}_{11} \geq \bar{\sigma}_{22} \geq \bar{\sigma}_{33}$, то максимальное напряжение сдвига равно $1/2 (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33})$. Это напряжение возникает в плоскости, нормалью к которой является биссектриса угла между осями $\bar{\sigma}_{11}$ и $\bar{\sigma}_{33}$. По теории максимального напряжения сдвига, плоскость разрушения, независимо от вида напряженного состояния, наклонена под углом 45° к максимальному главному напряжению сжатия $\bar{\sigma}_{11}$. Наблюдаемый угол обычно меньше 45° , и в связи с этим следует указать на основной недостаток этой теории, заключающийся в том, что прочность на разрыв и сжатие принимается одинаковой, т.е. кривые "напряжение-деформация" при растяжении и сжатии должны быть идентичными. Известно, что лишь эластические материалы (например, металлы) хорошо соответствуют этому условию.

Прочность большинства горных пород зависит от их напряженно-деформационного состояния и возрастает, если увеличивается всестороннее сжатие.

Кроме того, прочность на разрыв значительно меньше прочности на сжатие, а плоскости разрушения, как правило, наклонены под углом, меньшим 45° (30°), к направлению максимального напряжения сжатия. С увеличением всестороннего сжатия этот угол несколько возрастает. Следовательно, эта теория не может быть применена для описания разрушения материалов типа горных пород.

Естественное соображение, что прочность на сдвиг растет с увеличением напряжения сжатия, нормально предпологаемой плоскости разрушения, было учтено Навье, который ввел еще один параметр - коэффициент внутреннего трения. Навье постулировал, что разрушение происходит тогда, когда величина напряжения сдвига становится равной сумме сил сцепления частиц материала и сопротивления трения скольжению вдоль плоскости разрушения:

$$|\tau^*| = \tau_0 + \mu \bar{\sigma}_n$$

где μ - коэффициент внутреннего трения;

σ_n - нормальное напряжение;

τ_0 - силы сцепления частиц.

Таким образом, в соответствии с этой теорией сопротивление скалыванию материала определяется двумя величинами, а именно: сцеплением частиц, присущим материалу и не зависящим от напряжения, и величиной трения, зависящей от напряжения.

Гриффитс [8] выдвинул теорию разрушения хрупких пород на основе существования большого числа трещин внутри тела. Эта теория основана на том, что при распространении трещины снижение упругой энергии деформации компенсируется за счет увеличения потенциальной поверхностной энергии образующихся трещин.

Общее же соображение таково: если увеличению размеров трещины приводит к уменьшению общей свободной энергии, то такая система становится неустойчивой, и трещина распространяется.

В случае плоского напряженного состояния, как показал Гриффитс, трещина будет распространяться, если растягивающее напряжение, приложенное нормально к плоскости трещины, превышает критическую величину:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2\tau E}{\pi l}}$$

где τ - удельная поверхностная энергия;

E - модуль упругости;

l - полудлина трещины.

Достоинства теории Гриффитса заключаются в том, что на ее основе можно определить прочность на разрыв хрупкого материала в зависимости от длины трещины, упругих постоянных и поверхностной энергии, а также установить предельные напряжения для разрушения в материале, подверженном плоскому напряженному состоянию.

Применение теории Гриффитса в обычном виде сопряжено с существенной трудностью - отсутствием данных о распределении трещин в горном массиве. Кроме того, необходимо разработать усовершенствованный энергетический метод, учитывающий параметры плотности распределения трещин.

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЗРЫВЕ ЗАРЯДОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ В ГОРНОЙ СРЕДЕ

В настоящее время нет четкого разграничения между хрупким и пластичным (квасихрупким) разрушением тела. Принято, что если энергия пластических деформаций при разрушении сравнима или больше поверхностной энергии тела, то необходимо учитывать пластический характер разрушения, если намного меньше, то разрушение следует считать хрупким. Горные породы, обыкновенно, разрушаются как хрупкие тела, т.е. упругая энергия тела при разрушении полностью переходит в энергию вновь образовавшейся поверхности. Упруго-хрупкая модель горной среды позволяет использовать для расчета поля напряжений, возникающих в среде при взрыве зарядов той или иной формы, как мощный аппарат теории упругости, так и теорию хрупкого разрушения, разработанную наиболее полно по сравнению с другими теориями разрушения.

В настоящем разделе в рамках динамической теории упругости мы приводим с использованием метода "упругих потенциалов" вывод основных закономерностей поля напряжений, возникающих от взрыва заряда той или иной формы.

Волновое уравнение относительно вектора смещений в однородной изотропной упругой среде может быть представлено в следующей форме:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\bar{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\bar{u} - \rho\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где λ, μ - параметры Ламэ;

ρ - плотность упругой среды;

\bar{u} - вектор смещения упругой среды;

∇ - "набла-оператор", в прямоугольной системе координат имеет вид

$$\nabla = \bar{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{i}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Динамические процессы, протекающие в упругой среде, обладающей плоской или осевой симметрией, удобно описывать с помощью так называемых "упругих потенциалов", связь которых с вектором смещений может быть выражена соотношениями:

в случае плоской симметрии

$$\bar{u} = \nabla\varphi + \nabla\times(\bar{i}_z\psi), \quad (1.3)$$

в случае осевой симметрии

$$\bar{u} = \nabla\varphi + \nabla\times(\bar{i}_\chi\psi); \quad (1.4)$$

\bar{i}_χ - единичный вектор к поверхности $\chi = const$.

Взрыв цилиндрического заряда. Предположим, что в упругой среде с параметрами μ , λ , ρ' имеется цилиндрическая полость и на границу этой полости в момент $t = 0$ подействовал импульс нагрузки, распределенный равномерно вдоль границы полости. Нашей задачей является математическое описание этого явления.

Упругие потенциалы, определяемые соотношением (1.2), удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\Delta \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \quad (1.4)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

где Δ — оператор Лапласа. В цилиндрических координатах он имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.5)$$

С учетом симметрии взрыва последний член правой части уравнения (1.5) отбрасываем. Скорости распространения продольных и поперечных возмущений определяются соотношениями:

$$a = \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\rho'} \right]^{1/2}, \quad b = \left(\frac{\mu}{\rho'} \right)^{1/2}.$$

Полезно здесь привести основные формулы теории упругости, связывающие напряжения со смещениями и потенциалами:

$$u_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{d\psi}{\partial \rho}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \lambda \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho};$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \right);$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \lambda \nabla^2 \psi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \right];$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \psi + 2\mu \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right).$$

В случае взрыва цилиндрического заряда в безграничной среде $u_r = 0$, $\psi = 0$, и основные соотношения существенно упростятся:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + 2\mu \frac{u_r}{r}; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + 2\mu \frac{u_r}{r}; \quad \sigma_{r\theta} = 0,$$

а упругий потенциал продольных возмущений будет удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Пусть в цилиндрической полости давление изменяется по закону: $p = f(t)$, где $f(t) = 0$ при $t < 0$. Удобнее перейти к безразмерным координатам. Для этого следует положить $\rho_0 = 1$ и $\tau = \frac{at}{\rho_0}$, где ρ_0 — радиус цилиндрической полости. Соответственно уравнение (1.8) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (1.9)$$

с граничными условиями на поверхность цилиндрической полости:

а) $\sigma_{rr} = f(t), \quad \rho = 1;$

б) $\varphi(\rho, t) = 0, \quad t < 0.$

Условие а) с учетом формул (1.6) можно преобразовать:

$$\lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = f(t) = F(\tau), \quad \rho = 1.$$

Решение волнового уравнения (1.9) с краевыми условиями а) б) удобнее всего провести с использованием интегрального преобразования Лапласа по t :

$$\varphi^*(\rho, s) = \int_0^{\infty} \varphi(\rho, \tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (1.10)$$

После этого уравнение (1.9) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi^*}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi^*}{d\rho} + s^2 \varphi^*(\rho, s) = 0. \quad (1.11)$$

Граничное условие а) после применения к нему преобразования Лапласа запишется:

$$\lambda \left(\frac{d^2 \varphi^*}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi^*}{d\rho} \right) + 2\mu \frac{d^2 \varphi^*}{d\rho^2} = F^*(s), \quad \rho = 1 \quad (1.12)$$

если с использованием уравнения (I.II)

$$(\lambda + 2\mu)s^2\varphi + 2\mu \frac{d\varphi}{dp} = -F^*(s), \quad (I.I3)$$

где $F^*(s) = \int_0^\infty F(\tau)e^{-s\tau} d\tau$. (I.I4)

Решением уравнения (I.II), удовлетворяющим условию б), является модифицированная функция Бесселя 2-го рода:

$$\varphi^*(p, s) = cK_0(sp). \quad (I.I5)$$

Для определения c воспользуемся граничным условием (I.I3):

$$c = - \frac{F^*(s)}{(\lambda + 2\mu)s^2 K_0(s) + 2\mu s K_0'(s)}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа по S (см. уравнение (I.I4)), получим строгое решение поставленной задачи:

$$\varphi(p, \tau) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F^*(s)e^{st}K(sp)ds}{s^2(\lambda + 2\mu)K(s) + sK'(s)}. \quad (I.I6)$$

Дальнейшее исследование формулы (I.I6) может проводиться в трех направлениях.

Первое направление относится к асимптотическому анализу формулы (I.I6) в коротковолновой части спектра волны. Если предположить, что S — большой параметр, то, пользуясь асимптотическими разложениями для функции Бесселя, можно вычислить асимптотическое значение интеграла (I.I6), оправдываемое вблизи волнового фронта.

Второе направление относится к квазистатическому анализу формулы (I.I6) в длинноволновой части спектра. Пусть, начиная с \bar{S} , функция $F^*(S)$, определяемая формулой (I.I4), мала при $S = \bar{S}$ (\bar{S} — частота среза). Если выполняются условие

$$\frac{a}{S} \gg \rho_0, \quad (I.I7)$$

то справедливо квазистатическое приближение, и для функций Бесселя, входящих в формулу (I.I6), можно брать приближенные формулы в предположении, что аргумент мал.

Третье направление анализа формулы (I.I6) — непосредственное ее вычисление с помощью теории вычетов (по полюсам подынтегрального выражения) или с использованием какой-либо схемы численного интегрирования.

Перечисленные выше методы исследований задач динамической теории упругости проиллюстрированы на сравнительно несложной задаче определения поля напряжений при взрыве цилиндрического заряда. Тем не менее о подобном подходе и аналогичных трудностях приходится сталкиваться при решении большинства важных практических задач.

Взрыв сферического заряда. Анализ этой задачи более прост, в результате представимы в элементарных функциях.

Основные соотношения теории упругости применительно к сферическим координатам имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \\ \sigma_{rr} &= \frac{\lambda}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin \theta) \right] + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right).$$

Другие потенциалы, удовлетворяют волновым уравнениям (1.4), как и в предыдущем случае, с той лишь разницей, что лапласиан в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

В случае, когда нагрузка приложена равномерно по всей сферической поверхности, решение от координаты θ не зависит, и волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (1.19)$$

Решение этого уравнения хорошо известно — это решение Даламбера:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} [F_1(at - r) + F_2(at + r)]. \quad (1.20)$$

Второй член правой части уравнения (1.20) следует опустить, так как он соответствует предельной волне, которая в безграничной среде быть не может:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} F(at - r) \quad (1.21)$$

Смещения и напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{rr} &= \frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) + 2\mu \frac{d u_r}{dr}; \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\lambda}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_\theta) + 2\mu \frac{u_r}{r}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

2. РАСЧЕТ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЗРЫВЕ ЗАРЯДОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Исследуется поле напряжений при взрыве эллиптического заряда.

Предполагается, что заряд бесконечный, а среда, окружающая его, линейно-упругая (плоская упругая задача) и что скорости распространения возмущений бесконечны (квазистатическое приближение).

Уравнение эллипса в декартовой системе координат определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= R(1+m) \cos \theta; \\ y &= R(1+m) \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m — эксцентриситет эллипса; при $m = 0$ эллипс превращается в окружность; при $m = 1$ эллипс принимает вид отрезка

$$y = 0, \quad -2R \leq x \leq 2R.$$

Таким образом, при m , близких к единице, эллипс хорошо аппроксимирует плоский шпур.

Пусть теперь в эллиптической полости возникло давление, которое действует по известному закону

$$p = p(t). \quad (2.2)$$

При сделанных выше предположениях эта задача может быть решена с помощью метода Мусхелишвили [9].

Конформное отображение внешности эллипса на внутренность единичной окружности определяется формулой

$$x + iy = z = w(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right). \quad (2.3)$$

Введем упругие потенциалы $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, связанные с компонентами тензора напряжений соотношениями:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 [\varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta})]; \quad (2.4)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2\zeta^2}{r^2 \bar{w}'(\zeta)} \left[\overline{w'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + w'(\zeta) \psi(\zeta) \right], \quad (2.5)$$

здесь

$$\varphi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{w(\zeta)}; \quad \psi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)}; \quad \zeta = \xi e^{i\theta}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию двух аналитических функций: $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Последние определяются из двух интегральных уравнений, полученных Мусхелишвили:

$$\psi(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\sigma) \psi'(\sigma)}{w'(\sigma) \sigma - \xi} d\sigma + \bar{b}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1 + i f_2}{\sigma - \xi} d\sigma; \quad (2.6)$$

$$\psi(\xi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\sigma) \psi'(\sigma)}{w'(\sigma) \sigma - \xi} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_1 - i f_2}{\sigma - \xi} d\sigma. \quad (2.7)$$

Здесь Γ - контур эллипса,

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n; \quad \bar{\psi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n \xi^n;$$

$$f_1 = - \int_0^{\sigma} y_n d\sigma; \quad f_2 = \int_0^{\sigma} x_n d\sigma,$$

а y_n, x_n определяются из граничных условий на контуре эллипса (2.2):

$$x_n = \rho \cos \theta; \quad y_n = \rho \sin \theta.$$

Решая уравнения (2.6) и (2.7), получим следующие явные выражения для потенциалов:

$$\psi(\xi) = m \xi; \quad (2.8)$$

$$\bar{\psi}(\xi) = \frac{m \xi (\xi^2 + m)}{1 - m \xi^2} - 1 + \xi. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.8) и (2.9) совершен переход к безразмерному виду, т.е. принято $\bar{K}_p = 1$.

После подстановки выражений (2.8) и (2.9) в выражения (2.4) и (2.5) и сложных преобразований получим следующие соотношения для главных компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\pm} = \frac{A \pm \sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{2}; \quad (2.10)$$

$$\tau_{\max}^{\pm} = \pm \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{2};$$

$$A = 4m \frac{m \rho^2 - \rho^2 \cos 2\theta}{b}; \quad (2.11)$$

$$B_1 = \frac{a_1 + (a_2 + a_3) \rho^2 \cos 2\theta}{b^2};$$

$$B_2 = \frac{(a_2 - a_3) \rho^2 \sin 2\theta}{b^2};$$

$$b = m^2 \rho^4 - 2m \rho^2 \cos 2\theta + 1;$$

$$a_1 = m^2 \rho^6 (m-1)^2 - 2m^2 \rho^4 - (m^2 + 1) \rho^2;$$

$$a_2 = 2m - m(m-1)^2 \rho^2;$$

$$a_3 = m(m^2 + 1) \rho^2.$$

По формулам (2.10) и (2.11) были проведены расчеты на ЭЦМ "Раздан - 2" для значений $\theta = 0 \div 90^\circ (5^\circ)$; $\rho = 1 \div 0,1 (0,1)$; $m = 0 \div 0,9 (0,1)$. Результаты расчетов представлены на рис. 1, где показаны кривые главных нормальных и касательных напряжений при входе эллиптического заряда в упругое пространство.

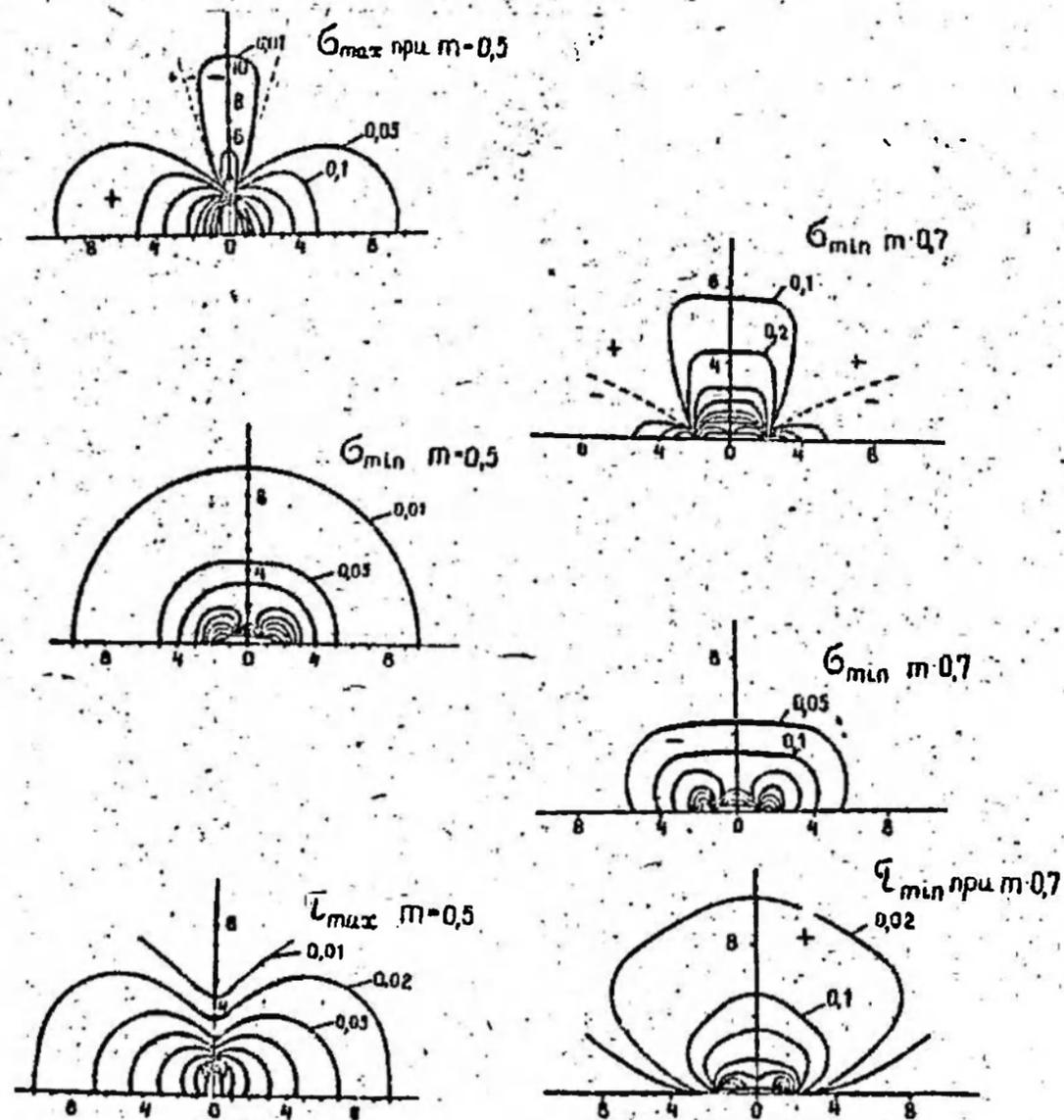


Рис. 1. Кривые постоянных напряжений при входе заряда эллиптической формы

В качестве второго примера приложения метода Мушкелшвили рассмотрим задачу о поле напряжений при взрыве цилиндрической зарядки в полуплоскости в квазистатическом приближении. Предполагается, что цилиндрическая полость нагружена изнутри равномерно по контуру давлением, и, кроме того, предполагается, что радиус полости много больше расстояния до свободной поверхности (рис. 2).

Следует заметить, что второе предположение несущественно, задача решается так же как и без него в биполярных координатах. Более того, цилиндрическая поверхность можно считать цилиндрической. Однако при этом вводится условие нулевой деформации полости (рис. 2), а это существенно упрощает решение задачи. К тому же это позволяет обобщить решение на случай взрыва зарядки в полуплоскости, когда можно пользоваться биполярными координатами, как это сделано в работе А. В. Беляева [10].

Задача решается в два этапа: сначала определяется поле напряжений под действием сил, приложенных к цилиндрической полости, а затем поле напряжений для полуплоскости с заданными на поверхности нагружения, причем последние выбираются из условия равенства нулю результирующей напряжений на поверхности.

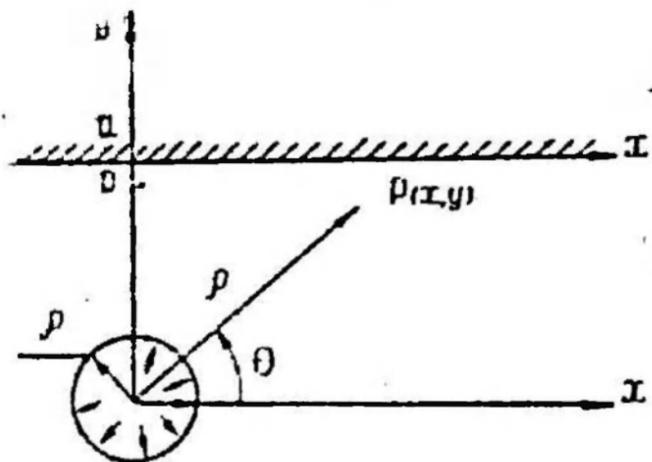


Рис. 2. Схема расположения зарядки в полуплоскости

Связь компонентов тензора напряжений в декартовых и полярных системах координат определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поле напряжений от давления, приложенного к цилиндрической полости, определяется общезвестными соотношениями:

$$\sigma_{rr} = -\rho \frac{r_0^2}{r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \rho \frac{r_0^2}{r^2} \quad (2.13)$$

здесь r_0 - радиус цилиндрической полости,
 ρ - давление внутри полости.

В прямоугольной системе координат для компонентов тензора напряжений получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\rho(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\rho(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2\rho xy}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

здесь $\rho = \frac{p r_0^2}{r^2}$.

Решая (2.13) на границе полуплоскости $y = 0$ для следующих значений:

$$\sigma_y = \frac{\rho(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{2\rho xa}{(x^2 + a^2)^2} \quad (2.15)$$

Так как граница полуплоскости свободна от напряжений, ищем решение для полуплоскости со следующими граничными условиями:

$$\sigma_y = -\frac{\rho(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{2\rho xa}{(x^2 + a^2)^2} \quad (2.16)$$

Эта задача также решается методом Мушкелшвили. Вводится комплексный потенциал $\varphi(z)$, связанный с компонентами тензора напряжений соотношениями:

$$\sigma_x + i\sigma_y = -2[\varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}] \quad (2.17)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[(\bar{z} - z) \varphi'(z) - \varphi(z) - \bar{\varphi}(z) \right];$$

здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= u(x, y) + i v(x, y); \\ \overline{\varphi(z)} &= u(x, y) - i v(x, y); \\ \bar{\varphi}(z) &= u(x, -y) - i v(x, -y). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Комплексный потенциал определяется через граничные значения компонентов тензора напряжений следующим соотношением [9]:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y - i\tau_{xy}}{t - z} dt. \quad (2.19)$$

Подставив значения напряжений на границе (2.16) в соотношение (2.19), получим

$$\varphi'(z) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t - ia)^2 (t - z)}. \quad (2.20)$$

Вычисление интеграла (2.20) проводится с помощью теории вычетов для двух областей: $\Im_{\bar{m}} - z < 0$, $\Im_{\bar{m}} - z > 0$.

Случай $\Im_{\bar{m}} - z < 0$. Подынтегральная функция имеет один простой полюс в точке $t = z$. При интегрировании область отсекается справа. Пользуясь формулой для вычета, имеем

$$\varphi'(z) = -\frac{\rho}{(z - ia)^2}. \quad (2.21)$$

Случай $\Im_{\bar{m}} - z > 0$. Имеется два полюса в точках $t = z$, $t = ia$. Подынтегральное выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\bar{f}(t, z) = \frac{1}{(t - ia)^2 (t - z)} = \frac{A t + B}{(t - ia)^2} + \frac{C}{t - z};$$

$$\text{Res}(i, a) = -\frac{1}{z - 2ia - a^2};$$

$$\text{Res}(z) = \frac{1}{z - 2ai - a^2}.$$

Таким образом,

$$\Phi(a, z) = \sum Res = 0. \quad (2.22)$$

Для расчета напряжений воспользуемся формулами (2.17). Введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= A_2 \cdot 2; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2B_2 + 2iC_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Используя соотношения (2.17) и (2.21-2.23), получаем

$$\begin{aligned} A_2 &= - \frac{2[x^2 - (a-y)^2]}{u^2}; \\ B_2 &= - \frac{4y(a-y)^3 - 12x^2y(a-y) + (a-y)^4 - x^4}{u^3}; \\ C_2 &= - \frac{4xy[x^2 - 3(a-y)^2] - 2x(a-y)u}{u^3}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $u = x^2 + (a-y)^2$.

Коэффициент ρ в этих формулах принят равным единице (без потерь общности в силу линейности задачи). Индекс 2 в обозначениях A_2, B_2, C_2 соответствует индексам в задаче для полуплоскости. В задаче взрыва цилиндрического заряда аналогично можно определить A_1, B_1, C_1 (2.14):

$$\begin{aligned} A_1 &= 0; \\ B_1 &= \frac{x^2 - (y+a)^2}{[x^2 + (y+a)^2]^2}; \\ C_1 &= - \frac{2x(y+a)}{[x^2 + (y+a)^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Тогда главные напряжения определяются соотношениями

$$W_{1,2} = A \pm \sqrt{B^2 + C^2};$$

$$T_{\max}^{\text{min}} = \sqrt{B^2 + C^2}; \quad (2.26)$$

где $A = A_1 + A_2$; $B = B_1 + B_2$; $C = C_1 + C_2$.

По формулам (2.24) - (2.27) был произведен расчет на ЭЦМ "Раздан-2", результаты которого представлены на рис. 3.

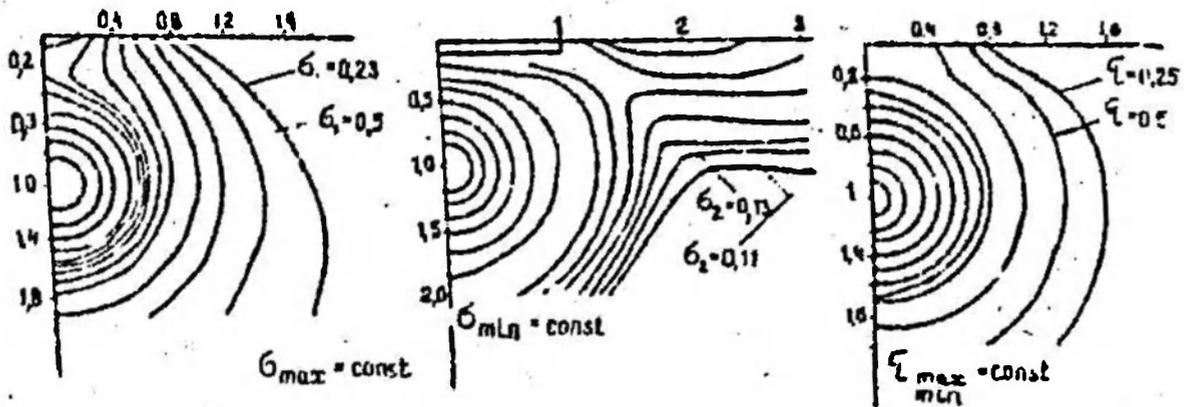


Рис. 3. Кривые главных напряжений

Следует отметить важный факт: семейство кривых, ортогональных линиям постоянных напряжений, совпадает с направлением трещинообразования.

3. РАДИАЛЬНОЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ ВЗРЫВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА. ИСТЕЧЕНИЕ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ

Рассмотрим следующую модель явления. В начальный момент имеется упругая среда в цилиндрической полости, в которой находятся продукты детонации под давлением P_0 . Таким образом, система характеризуется некоторым запасом упругой энергии и энергией сжатия продуктов детонации.

Далее начинается процесс трещинообразования, который сопровождается перераспределением энергии.

Приводим основные соотношения теории упругости, которые используются ниже.

Связь деформаций со смещениями в цилиндрической системе координат представляет собой

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_r) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned}$$

Закон Гука (плоская задача):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{rr}; \\ \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{\theta\theta}; \\ \tau_{r\theta} &= \mu \epsilon_{r\theta}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия упругой деформации:

$$2A = \lambda \Delta^2 + 2\mu \left(\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_{r\theta}^2 \right); \quad (3.3)$$

здесь

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{r\theta} &- \text{компоненты тензора деформаций}; \\ \Delta = \frac{1}{2} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) &- \text{дилатация}; \\ \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta} &- \text{компоненты тензора напряжений}; \\ \lambda, \mu &- \text{параметры Ламэ}; \\ A &- \text{удельная упругая энергия}. \end{aligned}$$

Предполагается, что произошла мгновенная детонация и среда находится в упругом состоянии в квазистатическом режиме.

Уравнение состояния продуктов детонации подчиняется адиабатическому закону

$$pV^\kappa = \text{const}; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4 \text{ (для воздуха)}. \quad (3.4)$$

В начальный момент разрушение отсутствует, и система характеризуется следующими параметрами:

p_0 — давление продуктов детонации в цилиндрической камере;

r_0 — радиус цилиндрической полости.

Для расчета упругой энергии в начальный момент воспользуемся решением (2.13):

$$A_0 = \frac{p_0^2 \cdot r_0^4}{2\mu r^4}; \quad (3.5)$$

$A_0(f)$ — удельная упругая энергия в начальный момент.

Пусть теперь на расстоянии τ от оси взрыва распространились трещины. Давление газов при этом спадет, а упругая энергия среды может быть приближенно определена следующим образом. Можно считать, что часть среды, охваченная трещинами, находится в состоянии сжатия ($\sigma_r = \sigma_\theta = -p$, где p — давление продуктов детонации, которое спадает с ростом трещин и выходом забойки).

Для расчета потенциальной энергии сжатой среды имеем

$$\sigma_x = \lambda(l_x + l_y) + 2\mu l_x = -p;$$

$$\sigma_y = \lambda(l_x + l_y) + 2\mu l_y = -p;$$

откуда

$$l_x = l_y = -\frac{p}{2(\lambda + \mu)}; \quad \Delta = -\frac{p}{\lambda + \mu}.$$

Подставляя эти результаты в формулу (3.3), получаем

$$2\bar{H}_1 = \frac{p}{\lambda + \mu}, \quad (3.5)$$

где \bar{H}_1 — удельная упругая энергия сжатия в области, по которой распространились трещины.

Величина полной энергии получается умножением \bar{H}_1 на объем среды, охваченной трещинами:

$$T = \bar{H}_1 \pi(\tau^2 - \rho_0^2) = \frac{\rho^2 \pi(\tau^2 - \rho_0^2)}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.7)$$

Нам понадобится также величина объемного сжатия среды за счет прохождения трещин:

$$D = \Delta \pi(\tau^2 - \rho_0^2) = -\frac{\rho \pi(\tau^2 - \rho_0^2)}{\lambda + \mu}. \quad (3.8)$$

Знак "минус" означает, что среда сжата. Формула (3.8) будет использоваться для определения расширения продуктов детонации в результате распространения трещин.

Для расчета параметров газа используется соотношение (3.4). При оценке расширения продуктов детонации мы не будем учитывать выход забойки. Это предположение основано на экспериментальных данных, которые показывают, что если забойка выполнена правильно, то после начального уплотнения имеется некоторый интервал времени, в течение которого забойка не выходит, причем период трещинообразования совпадает с этим интервалом.

Объем, занимаемый газом, определяется выражением

$$V = \pi r_0^2 \cdot l = \pi r_0^2 \left[1 + \frac{\rho(z^2 + r_0^2)}{\rho_0^2(\lambda + \mu)} \right] \quad (3.9)$$

В дальнейшем рассматриваем те моменты времени, когда $z \rightarrow r_0$. Это позволяет упростить уравнение (3.9):

$$V = \frac{\pi \rho z^2}{\lambda + \mu} \quad (3.10)$$

Решая совместно уравнения (3.4) и (3.10), получаем важные зависимости объема, давления и плотности продуктов детонации от роста трещин:

$$\frac{V}{V_0} = \left[\frac{\rho_0}{\lambda + \mu} \frac{z^2}{r_0^2} \right]^{\frac{1}{\kappa + 1}}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{\rho_0}{\lambda + \mu} \frac{z^2}{r_0^2} \right]^{\frac{1}{\kappa + 1}}; \quad (3.12)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{\rho_0}{\lambda + \mu} \frac{z^2}{r_0^2} \right]^{\frac{1}{\kappa + 1}} \quad (3.13)$$

На рис. 4, а, б представлены зависимости, рассчитанные по формуле (3.12). Можно отметить общую тенденцию к спаду давления, причем это происходит медленнее в более крепких породах.

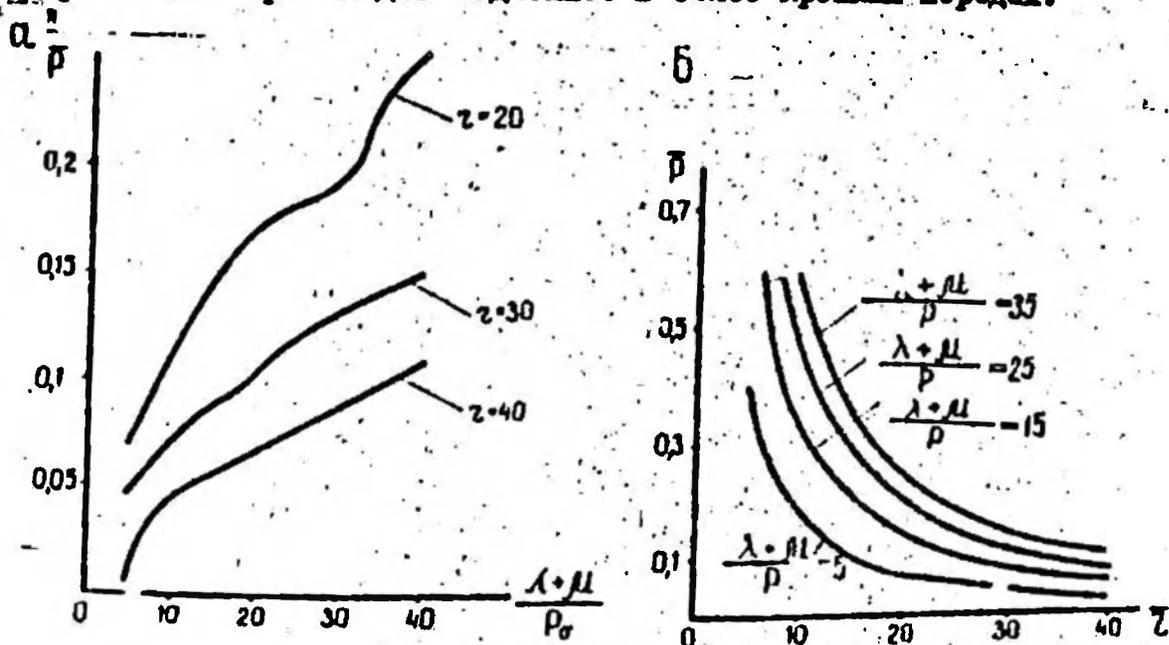


Рис. 4. Зависимости давления продуктов детонации от крепости породы (а) и радиуса трещинообразования (б)

Теперь мы можем определить работу продуктов детонации на расширение взрывной полости:

$$x(\tau) = \int_{V_0}^V \rho dV = \frac{\rho_0 V_0}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\kappa - 1} \right] = \frac{\rho_0 V_0}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \frac{\rho_0^2}{\tau^2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} \right].$$

Введем безразмерный радиус трещинообразования $\bar{z} = \frac{\tau}{\rho_0}$.

Тогда

$$x(\bar{z}) = \frac{\rho_0 V_0}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \bar{z}^{-2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} \right]. \quad (3.14)$$

Подставляя формулу (3.12) в соотношение (3.7), получим

$$T(\bar{z}) = \frac{\rho_0 V_0}{2} \left(\frac{\rho_0}{\mu + \lambda} \bar{z}^2 \right)^{-\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}. \quad (3.15)$$

Наконец, величина энергии в неразрушенной части массива

$$U = \int_{\bar{z}}^{\infty} A_0 \cdot 2\pi r dr = \frac{x \mu^2 \tau^2}{2\mu}$$

с учетом выражения (3.12) после интегрирования примет вид (для простоты здесь принято $\lambda = \mu$):

$$U(\bar{z}) = \rho_0 V_0 \left(\frac{\rho_0}{\lambda + \mu} \bar{z}^2 \right)^{-\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} \quad (3.16)$$

Приращение поверхностной энергии при увеличении длины трещины на $d\tau$ определяется следующим образом:

$$dw = \rho w d\tau, \quad (3.17)$$

На основании закона сохранения энергии получается условие распространения трещин

$$d\kappa + dU + dT + dW = 0 \quad (3.18)$$

или

$$\frac{d\kappa}{d\tau} + \frac{dU}{d\tau} + \frac{dT}{d\tau} + \frac{dW}{d\tau} = 0.$$

где n - число трещин, распространившихся на расстояние τ ;

w - удельная энергия образования единицы поверхности.

Вычисление производных из соотношений (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) дает:

$$n(\tau) \approx \frac{3\kappa - 1}{(\kappa - 1)w} \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \frac{f_0^2}{\tau^2} \right). \quad (3.19)$$

Введем понятие радиуса разрушения. Размер отдельности на расстоянии τ можно определять так:

$$d = \frac{2\kappa\tau}{n(\tau)}. \quad (3.20)$$

Предположим, что d_0 - максимально допустимый размер куска, т.е. при $d > d_0$ получается негабарит. Тогда радиус разрушения определяется как решение уравнения (3.20) относительно τ при $d = d_0$:

$$\frac{12}{5} = \frac{7}{10} \frac{d_0}{w} \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \right)^{1/5} \rho_0. \quad (3.21)$$

Этот результат находится в удовлетворительном соответствии с известным положением о том, что объем взорванной массы пропорционален энергии ВВ. Практическое затруднение вызывает определение w - удельной поверхностной энергии. На наш взгляд, целесообразно сделать это по результатам камуфлетного взрыва, организованного так, что можно определить радиус трещинообразования.

Перейдем к расчету истечения продуктов детонации через образовавшиеся трещины.

Введем обозначения:

r_0 - радиус зоны трещинообразования;

P_1, V_1, ρ - давление, занимаемый объем и плотность газа в конце трещинообразования;

V - скорость разлета взорванной массы.

Зависимость скорости разлета кусков от скорости увеличения газовой полости определяется следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r_0 \frac{dr_0}{dt} = 2\pi r_0 V. \quad (3.22)$$

С другой стороны, дифференцируя (3.21) по времени, мы установим связь dv/dt с dr/dt :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{\rho_0}{\lambda+\mu} \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} r_0^{-1} C_{тр} V_0, \quad (3.23)$$

где $C_{тр}$ — скорость распространения трещины.

Наконец, изменение сечения канала, по которому истекает газ, можно рассчитать по следующей формуле:

$$S = 2\pi(r - r_0) = 2\pi V t = \frac{1}{r_0} \frac{dV}{dt} \cdot t \quad (3.24)$$

или

$$S = \frac{2}{1+\kappa} \left(\frac{\rho_0}{\lambda+\mu} \frac{r_0^2}{\rho_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} V_0 C_{тр} \frac{t}{r_0^2}$$

С учетом большого трения о стенки трещины, а также для простоты выкладок предположим, что газ истекает в критическом режиме. Это позволяет написать следующие соотношения:

$$a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}; \quad (3.25)$$

$$a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \frac{2\kappa}{\kappa+1}}$$

Пусть $\bar{\rho}^*$, \bar{p}^* — критические параметры истечения газа в трещине; ρ , p , V — текущие параметры во взрывной камере.

Из соотношения (3.25) имеем

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho^*} = \frac{\rho}{p} \frac{2}{\kappa+1} \quad (3.26)$$

Решая совместно уравнение (3.26) с уравнением адиабаты (3.4) относительно ρ^* и p^* , получаем

$$\rho^* = \rho \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}; \quad p^* = p \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (3.27)$$

Так как в критическом режиме скорость истечения газа равна a^* , то для истекающей массы газа имеем уравнение

$$-\frac{dm}{dt} = a^* \rho^* S(\dot{t}) = \sqrt{\kappa} \rho \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} S(\dot{t}). \quad (3.28)$$

В камере

$$m = \rho V,$$

откуда

$$\frac{dm}{dt} = V \frac{d\rho}{dt};$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{2C_{тр}}{(1+\kappa)r_0^2} \sqrt{\kappa \frac{\rho_0 V_0^\kappa}{m^\kappa} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \rho^{\frac{1+\kappa}{2}} \cdot t}.$$

Решая уравнение (3.28), получим

$$\rho^{\frac{\kappa-1}{2}} = \frac{1}{b \frac{t^2}{4} (\kappa-1) + B} \quad (3.29)$$

где

$$b = \frac{2C_{тр}}{(1+\kappa)r_0^2} \sqrt{\kappa \frac{\rho_0 V_0^\kappa}{m^\kappa} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}};$$

$$B = \rho_1^{-\frac{\kappa-1}{2}}$$

На рис. 5 изображены зависимости плотности продуктов детонации от времени при различных значениях скорости распространения трещины, рассчитанные по формуле (3.29) при $K = 1,5$, $\gamma = 1$, $\frac{\lambda + \mu}{\rho} = 30$.

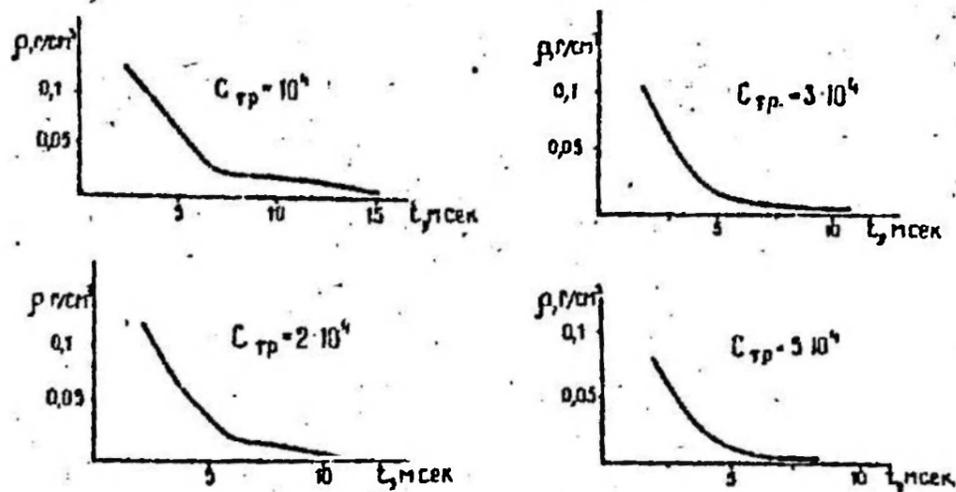


Рис. 5. Изменение плотности продуктов детонации в зависимости от времени, рассчитанное по формуле (3.29)

Анализ графического материала показывает, что сброс давления заканчивается через интервал до 7 мсек. Экспериментально установлено, что для рассматриваемого нами примера истечение газа заканчивается через 10 мсек. Расхождение можно объяснить тем, что мы не учли разгона кусков взорванной массы после того, как трещина проросла. Попробуем оценить этот эффект следующим образом.

Закон Ньютона для взорванной массы

$$\rho \ell = m \frac{dV}{dt} \quad (3.30)$$

Здесь ℓ — длина контура взорванной массы;

ρ — давление газов в конце фазы трещинообразования;

m — масса взорванной части породы;

$\frac{dV}{dt}$ — ускорение разлетающихся кусков.

При $K = 1,5$

$$\rho^* = \rho \left(\frac{4}{5}\right)^3 \approx \frac{\rho}{2} \quad (3.31)$$

В формулу (3.30) вместо ρ мы подставим ρ^* , так как часть контура, вдоль которой действует давление ρ , мала.

Подставляя формулу (3.27) в уравнение (3.30), получаем

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{2\rho}{\rho^0 z_0} \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (3.32)$$

здесь ρ^0 — плотность породы. Предположим, что при $t = 0$ начальная скорость тоже равна нулю. Ранее мы показали, что учет только скорости дает удовлетворительное по сравнению с экспериментальными данными значения времени истечения. Если учет времени разгона даст сравнение с экспериментальными данными величины, то этот фактор также следует учитывать.

Путь, пройденный отбитым куском, определяется по формуле

$$l = \frac{at^2}{2}$$

Тогда общее сечение щели вычисляется по формуле (все величины относятся к единице длины шнура)

$$S = 2\pi \ell = \pi a t^2 = \frac{2\pi \rho}{\rho^0 z_0} \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}} \frac{t^2}{2} \quad (3.33)$$

Подставив формулу (3.33) в соотношение (3.28) и учтя уравнение адиабаты, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho^{\frac{3K+1}{2}} \frac{1}{V_1 \rho^0 z_0} \sqrt{K \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{3K+1}{K-1}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^3 t^2}$$

Решение этого дифференциального уравнения дает

$$\rho^{\frac{3K-1}{2}} = \frac{1}{B \frac{t^3}{6} (3K-1) + B} \quad (3.34)$$

Здесь

$$B = \frac{\psi}{V_1 \rho^0 z_0} \sqrt{K \left(\frac{2}{K+1} \right)^{\frac{2K+1}{K-1}} \left(\frac{P_0}{\rho_0 K} \right)^3};$$

$$B = \rho_1 \frac{3K-1}{2}$$

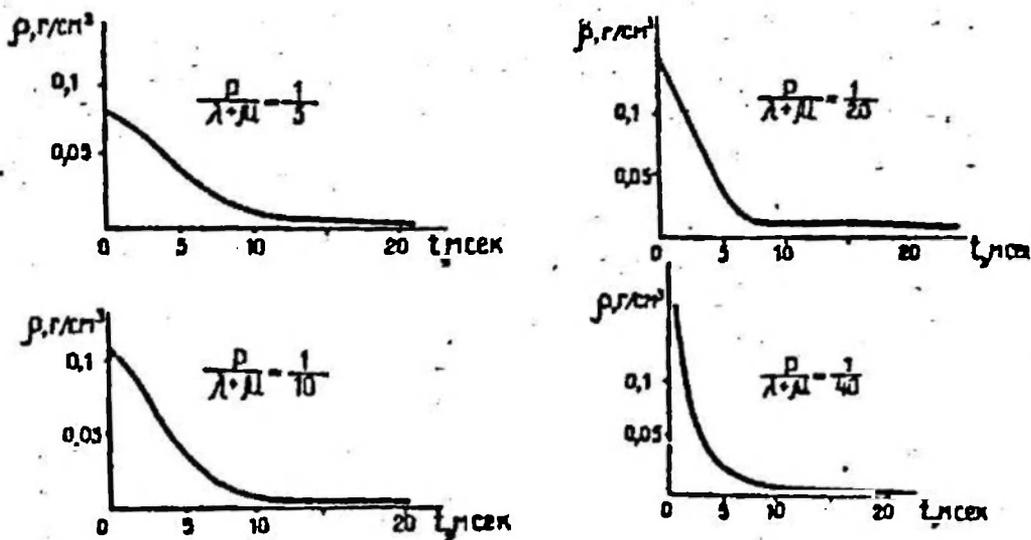


Рис. 6. Изменение плотности продуктов детонации в зависимости от времени, рассчитанное по формуле (3.34)

Сравнение расчетов по формулам (3.29) и (3.34), представленных в виде кривых на рис. 5 и 6, показывает, что оба фактора (начальная скорость разлета кусков и ускорение за счет давления продуктов детонации) могут оказывать решающее влияние на время снижения давления в массиве. Полученные результаты хорошо согласуются с оптимальными интервалами замедления. Это говорит о правильности построенной модели взрыва и возможности использования ее для расчета оптимальных интервалов замедления при различных условиях взрывания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алиев Х.М. Отражение сферической упругой волны от границы полупространства. - "ПМТФ", 1961, № 6.
2. Технический отчет лаборатории технологии взрывных работ ИГД им. А.А.Скочинского, М., ИГД им.А.А.Скочинского, 1968.
3. Друкованый М.Ф., Гаек Д.В., Милин В.В. Методики исследования скоростных процессов взрыва. - В сб. "Взрывное дело", 51/8, М., "Недра", 1962.
4. Ханукаев А.Н. О физической сущности процесса разрушения пород взрывом. - В кн. "Вопросы теории разрушения горных пород действием взрыва". М., АН СССР, 1958.
5. Миндели Э.О. Буровзрывные работы при подземной добыче полезных ископаемых. М., "Недра", 1966.
6. Власов О.Е., Смирнов С.А. Основы расчета дробления горных пород взрывом. М., АН СССР, 1962.
7. Филиппов В.К. О направлении распространения трещин, образующихся при взрыве. - В сб. "Взрывное дело", вып. 47/4. М., "Госгортехиздат, 1961.
8. *sziffith A.A. The theory of rupture. Proc. First Internat. Congress Appl. Mech. Delft., 1924, p. 55-53.*
9. Мухомелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.
10. Белаенко А.Ф. Исследование полей напряжений и процесса образования трещин при взрыве колонковых зарядов в скальных породах. - В кн. "Вопросы теории разрушения горных пород действием взрыва". М., АН СССР, 1958.