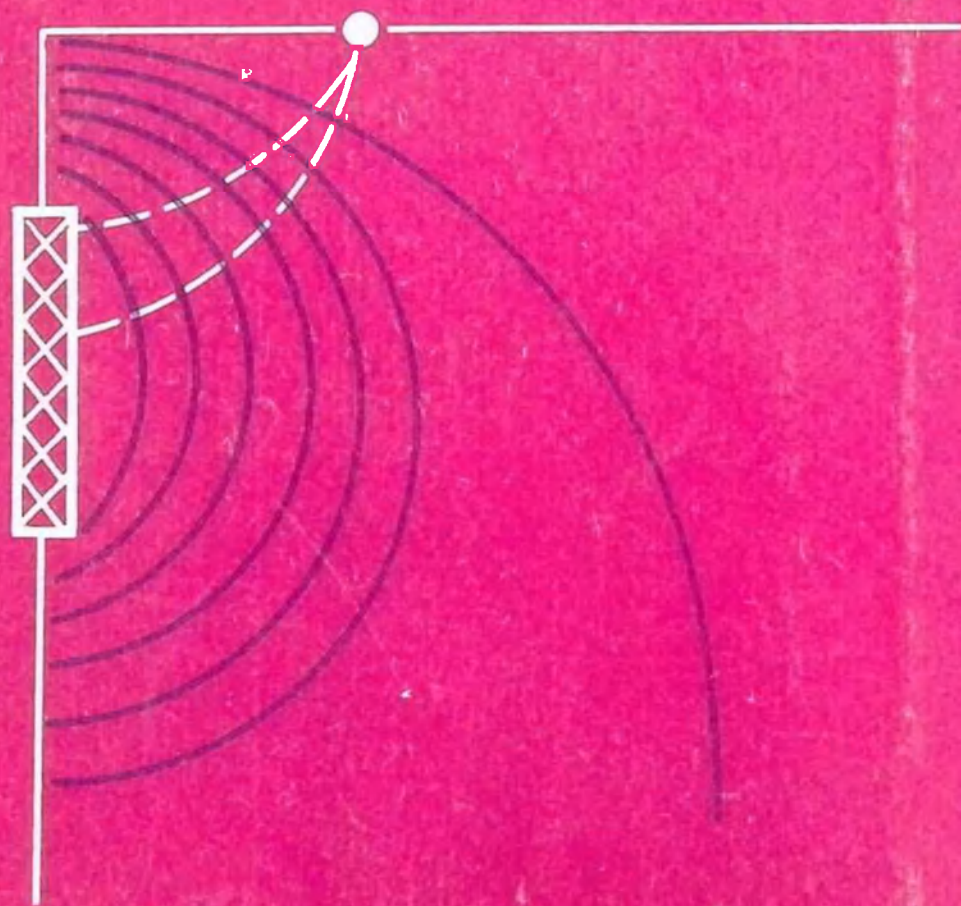


622.235

Б-83

В.А.Боровиков
И.Ф.Ванягин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА при разрушении горных пород

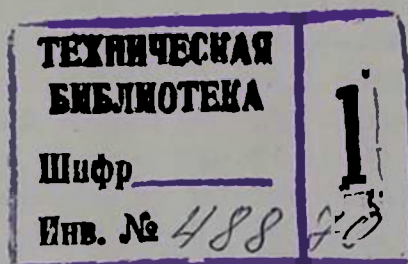


2005

622.235
Б-83

В. А. Боровиков
И. Ф. Ванягин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА при разрушении горных пород



МОСКВА „НЕДРА” 1990

УДК 622.235.5.001.57

Боровиков В. А., Ванягин И. Ф. Моделирование действия взрыва при разрушении горных пород.- М.: Недра, 1990.-231 с.: ил.-ISBN 5-247-01525-8

Рассмотрены теоретические основы моделирования действия взрыва в упругих и упругопластических средах. Описаны традиционные и новые методы моделирования процессов разрушения горных пород взрывом. Изложены современные способы регистрации быстропротекающих процессов. Приведены примеры физического и математического моделирования основных явлений взрыва на открытых и подземных разработках месторождений.

Для научных работников, занимающихся исследованием и использованием энергии взрыва в народном хозяйстве.

Табл. 2, ил. 57, список лит.- 14 назв.

2502010300-243
Б-----221-90
043(01)-90

© В. А. Боровиков, И. Ф. Ванягин, 1990

ISBN 5-247-01525-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы горнодобывающая промышленность получила значительное развитие благодаря широкому применению достижений как фундаментальных, так и ряда прикладных наук. Среди прикладных наук моделирование, основанное на теории подобия и размерности, имеет особо важное значение, так как позволяет при минимальных затратах и в кратчайшие сроки получить искомый результат.

Физические процессы, изучаемые горной наукой, характеризуются большой сложностью, связанной с определенными трудностями как при теоретических исследованиях, так и при непосредственных наблюдениях в натуральных условиях.

Процесс разрушения горных пород, являющийся при добыче полезных ископаемых определяющим, теоретически изучен недостаточно. Многие явления, сопровождающие его, решаются на основе накопленного опыта или качественных экспериментов, проводимых как в лабораторных, так и натуральных условиях. Это объясняется главным образом большой сложностью математического описания ряда явлений, сопровождающих взрыв в горных породах, а также многообразием самих горных пород, их неоднородностью и трещиноватостью.

Со сложностью математического описания обычно сталкиваются уже при приближенном подходе к теоретическому изучению горных пород как идеально твердых тел. Действительно, основное механическое свойство твердых сред — сопротивляться как объемным, так и сдвиговым деформациям, приводит в общем случае напряженного состояния к рассмотрению тензора напряжений (деформаций), характеризующегося минимум девятью компонентами.

Неоднородность и трещиноватость реальных горных пород существенно осложняют математическое описание процессов разрушения в них из-за невозможности создания единой математической модели.

К упомянутым трудностям математического описания следует добавить также недостаточную изученность поведения реальных горных пород при сильных динамических нагружениях, создаваемых взрывом, и процессов, протекающих в самих взрывчатых веществах. Поэтому многие явления, сопровождающие взрыв в горных породах, и сам процесс разрушения их взрывом в настоящее время изучаются путем постановки модельных экспериментов с использованием различных методов моделирования, основанных на теории подобия и размерности.

В науке и технике под моделированием понимается замена изучения явления исследованием на модели большого или меньшего масштаба в специальных, обычно лабораторных, условиях. Цель моделирования заключается в том, что по результатам опытов с моделями можно получить необходимые сведения о физических явлениях и параметрах процессов, протекающих в природе. Иначе говоря, изучение

интересующего явления заменяется изучением физически подобного, которое удобнее и выгоднее осуществить.

Следовательно, моделирование явлений опирается на понятие о подобии явлений, т.е. на теорию подобия, являющуюся основой моделирования. Поэтому теория подобия является в известной мере также и теоретической основой постановки модельных экспериментов, основой методики моделирования. На базе теории подобия формируются требования к модели, необходимые и достаточные условия моделирования. При этом появляется возможность разработать методики как обработки полученных опытных данных, так и обобщения и распространения полученных результатов на другие натурные объекты или инженерные конструкции и сооружения. Отсюда ясна важность в науке и технике теоретической основы моделирования – теории подобия и размерности. Теория подобия и размерности исходит из тех же предпосылок, что и чисто теоретические, аналитические исследования, т.е. в ней также учитываются начальные и граничные условия, параметры и координаты исследуемого процесса или отдельного явления. Поэтому она служит как бы связующим звеном между теоретическими и экспериментальными исследованиями, мостом между теорией и практикой.

Однако надо отметить, что теория подобия и размерностей хотя и вскрывает ряд связей и соотношений, давая рациональную форму обработки опытных данных, но все же не может дать больше того, что содержится в уравнениях, описывающих явление, т.е. она не является «универсальной теорией», пригодной для любого случая. Общего решения она не дает, но позволяет обобщить опытные данные в области, ограниченной условиями подобия. Вместе с тем задача постановки эксперимента на основе теории подобия и размерности существенно упрощается и облегчается благодаря тому, что в этом случае можно определить функциональную связь между целыми комплексами параметров, определяющих явление.

Это дает возможность в ряде случаев исключить исследование явления по рассматриваемый процесс каждого параметра в отдельности и тем самым уменьшить число опытов или значительно упростить постановку опытов. Кроме того, при этом, в известных границах, имеется возможность распространить результаты экспериментов на подобные системы.

Говоря о моделировании, надо иметь в виду два взаимосвязанных понятия: модель и моделирование. Под термином моделирование понимается сам процесс, прием или метод. Понятие модель отражает средство, при помощи которого осуществляется познание исследуемого явления, процесса, объекта. Отличительной особенностью модели является то, что она непосредственно не взаимодействует с исследуемым объектом, а замещает его, находясь с ним в определенных условиях соответствия или сходства. При этом допускается построение так называемых логических, воображаемых моделей, участвующих в так называемых мысленных экспериментах, роль которых в познании, осо-

бенно недоступных для непосредственных измерений явлений, весьма велика.

При сопоставлении модели с теорией и аппаратурой используются первые два условия: сходства и репрезентации (замещения). Очевидно, отсутствие сходства превратит модель в некоторый символ или знак. Третье условие, свидетельствующее о возможности экстраполяции, превращает модель и моделирование в научный метод, сознательно и целенаправленно применяемый в исследованиях, в отличие от случайных наблюдений, индуктивных обобщений и вообще всякого стихийного отображения.

Заметим, что нельзя смешивать модельный эксперимент с обычным физическим экспериментом. В обычном эксперименте средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с изучаемым объектом (натурой), в модельном эксперименте — только с моделью, как заместителем природы.

В настоящее время в научных исследованиях помимо «мысленных экспериментов» применяют в основном три вида моделирования: физическое, математическое и функциональное. Наиболее широкое распространение имеют первые два вида моделирования, которые и будут рассмотрены в дальнейшем более подробно.

Физическое моделирование применяют обычно для изучения явлений, механизм которых еще недостаточно ясен. Например, процесс разрушения горных пород взрывом. В этом случае либо на основании самых общих уравнений, описывающих процесс, либо из анализа и учета основных параметров и факторов, характеризующих этот процесс, составляются уравнения связи между параметрами, определяется структура безразмерных определяющих критериев и подготавливается модель для проведения опытов. В наиболее простом случае обычно модель воспроизводит изучаемое явление с сохранением геометрического подобия и физической природы и отличается от природы размерами и скоростью протекания процесса. В ряде случаев бывает удобнее модель изготавливать из среды, отличной от природы (оригинала), при обязательном соблюдении условий подобия, т.е. производить моделирование на аналогичных моделях или сходных явлениях.

Математическое моделирование используется для всех явлений, имеющих математическое описание. В этом случае исследование производят на моделях — аналогах, имеющих иное физическое содержание, но с аналогичными дифференциальными уравнениями, описывающими процесс в модели и натуре. В настоящее время известны аналогии между электрическими, механическими, тепловыми, гидродинамическими, акустическими, диффузионными и другими физическими явлениями. Наиболее широко используются электрические модели, составленные из активных, индуктивных и емкостных сопротивлений и электронных ламп.

Дальнейшее развитие как техники, так и науки в целом, в том числе и теории, немислимо без эксперимента, а значит и без учения о моделировании. Причем, чем сложнее изучаемое явление и чем меньше мы

о нем знаем, тем больше обращаемся к опыту, эксперименту, основанному на законах подобия и моделирования.

В данной монографии дается систематизированное изложение общих принципов теории подобия и размерности; их применение к явлениям, вызванным взрывом, с целью получения необходимых критериев подобия и условий моделирования; рассматривается физическое и математическое моделирование различных явлений и процессов, вызванных взрывом в горных породах. Изложение материалов производится в определенной логической последовательности, начиная с элементов теории размерности и подобия и кончая выводом критериев подобия, условий моделирования и необходимых требований к модельным экспериментам.

Большое место уделено физическому моделированию различных явлений и процесса разрушения горных пород взрывом. При этом рассмотрены возможности применения для процессов разрушения горных пород взрывом ранее разработанных в горном деле методов моделирования. Предложены новые методы моделирования, разработанные авторами для изучения закономерностей формирования и распространения ударной волны в ближней зоне взрыва, волн напряжений и сейсмозрывных волн в средней и дальней зонах взрыва, а также процессов расширения камуфлетной полости и квазистатического действия продуктов взрыва, вызывающего дополнительное квазистатическое поле напряжений, движение горной массы, формирование навала и разлет осколков породы. Приведен новый комбинированный метод моделирования перемещения горной массы, который с успехом использовался в сложных горно-геологических условиях отбойки на выработанное пространство, заполненное водой.

По математическому моделированию проведена систематизация существующих методов и даны примеры использования их для моделирования закономерностей распространения волн напряжений в упругих и упругопластических средах, прохождения их через трещины, характера разрушения и дробления горных пород взрывом, а также показаны дальнейшие перспективы использования рассмотренных методов математического моделирования.

В книге достаточно подробно описаны современные методы регистрации быстротекущих процессов, используемые при проведении модельных экспериментов.

Введение, раздел 3 написаны авторами совместно, разделы 1, 2, 4 написаны И. Ф. Ванягиным.

1. Теоретические основы моделирования действия взрыва в различных средах

1.1. Элементы теории размерности

Физические величины, с которыми приходится встречаться в научных исследованиях и в производственной деятельности, характеризуются и в количественном отношении, т.е. имеют количественную меру или измеряются в определенных единицах. Причем под мерой физической величины понимают число, которое характеризует эту величину в количественном отношении независимо от способов ее введения: экспериментальным измерением (например, мера длины, времени, массы) или математическим способом (например, мера скорости, ускорения, площади, объема и т.д.).

Все физические величины в теории размерности условно разделяются на основные и производные, размерные и безразмерные. Основными величинами называются величины, имеющие независимые размерности, т.е. величины, численное значение которых не меняется при изменении единиц измерения другой основной величины (например, длина, время, масса). Производные величины – это такие, численное значение которых зависит от единиц измерения основных величин (например, скорость, ускорение, сила и т.п.). Такое разделение физических величин на основные и производные всецело зависит от выбора мер измерения этих величин, а не от их природы, и поэтому является условным. На практике число основных величин ограничивают. Так, в механике берут три основные величины (обычно длину, время и массу или силу), в электротехнике, теплотехнике и оптике – четыре, добавляя к трем механическим величинам по одной наиболее характерной для данной области науки. Для принятых основных величин устанавливают для единообразия (в масштабе страны, континента, всего земного шара) определенные значения единиц измерения этих основных величин – систему единиц измерения основных величин.

В нашей стране долгое время большое распространение в механике имели так называемые техническая и физическая система единиц измерения. В технической за основные величины приняты длина l , сила F и время t , измеряемое соответственно в метрах, килограмм – силах и секундах (MKS). В физической системе за основные величины приняты длина l , масса m и время t , измеряемые соответственно в сантиметрах, граммах и секундах (CGS).

С 1 января 1968 г. Государственным стандартом мер введена Единая Международная система единиц (СИ). В этой системе за основные величины приняты – длина l , измеряемая в метрах, масса m – в килограммах, время t – в секундах, единица сила тока I – в амперах, единица температуры в градусах Кельвина и единица силы света в канделах.

Величины, численное значение которых зависит от принятых масштабов, мер измерения, называются размерными или именованными

величинами. Величины же, численное значение которых не зависит от единиц измерения, называются безразмерными или отвлеченными. Длина, масса, время, скорость, ускорение, сила, энергия, момент силы и т. д. служат примерами размерных величин. Отношение двух длин, отношение энергии к моменту силы, углы – примеры безразмерных величин.

Однако такое разделение является до некоторой степени условным. Действительно, возьмем к примеру угол. Мы его только что назвали безразмерным. Вместе с тем мы знаем, что его измеряют в радианах, градусах, долях прямого угла, т. е. в различных единицах. Следовательно, число, определяющее угол, зависит от единицы измерения, а значит, угол можно считать и размерной величиной. Вместе с тем, если угол измерять отношением длины дуги к радиусу, т. е. в радианах, и во всех системах принять эту меру угла, то тогда его численное значение не будет меняться с переходом от одной системы единиц измерения к другой и в этом смысле угол будет безразмерной величиной. Точно так же можно сделать безразмерной величиной и длину, условившись измерять ее единой фиксированной единицей. Однако, если введение фиксированной единицы измерения для угла удобно и целесообразно, так как ее величина от изменения масштаба объекта не зависит, то для длины такая фиксация единицы измерения явно нецелесообразна, так как при исследовании существенно различных по масштабам явлений (процессы в микромире и макромире) лучше проводить в собственных единицах измерения длины, которые могут отличаться друг от друга до сотен порядков.

Понятия размерных и безразмерных величин относительно и сформулированы Л. И. Седовым так: «Величины, численное значение которых зависит от выбора конкретной системы единиц измерения из допускаемой совокупности систем единиц измерений, называются размерными. Величины, численное значение которых одно и то же во всех системах единиц измерения этой совокупности систем, называются безразмерными или отвлеченными».

Отметим также, что число основных величин можно увеличить или уменьшить, но при этом мы должны соответственно увеличить или уменьшить и число размерных постоянных или физических констант. Увеличение числа основных величин приводит к необходимости введения новых размерных физических констант, уменьшение числа основных величин приводит к абсолютизации физических констант, приведению их к абсолютным безразмерным величинам. Следовательно, физические константы могут быть как размерными, так и безразмерными в зависимости от принятого числа основных единиц измерения. Причем такое деление их тоже является условным, не связанным с самой природой этих констант.

После того, как установлены единицы измерения основных величин, единицы измерения производных величин получаются автоматически из их определения. При этом выражения для единиц измерения производных величин, записанные через единицы измерения основных величин, называются размерностями этих физических величин. Размер-

ность записывается символически в виде формул, в которых символ единицы длины обозначается буквой L , символ единицы времени – буквой T , символ единицы массы – буквой M , символ единицы силы (в технической системе единиц) – буквой K , символ силы тока – буквой I и т.д. Для обозначения размерности какой-либо величины P принят символ $[P]$.

В общем случае можно дать следующее определение размерности. Пусть имеются три основные величины A, B, C и некоторая производная величина P . Изменим масштабы, которыми измеряются величины A, B, C соответственно в α, β, γ раз. Тогда числовое значение величины P изменится в π раз. Если при этом $\pi = \alpha^k \beta^m \gamma^n$, то величина P имеет размерность $[A]^k [B]^m [C]^n$, т.е.

$$[P] = [A]^k [B]^m [C]^n.$$

Эта формула показывает, как мера величины P зависит от основных величин A, B и C . Она называется формулой размерности. Можно доказать, что если π является однозначной функцией α, β, γ , то эта функция обязательно является степенной, а величина будет иметь определенную размерность, тоже выражаемую выше приведенной степенной функцией.

Заметим, что введенное общее понятие о размерности позволяет нам безошибочно в вычислениях легко переходить из одной системы единиц измерения (мер) к другой, а понятием об однородности физических формул – проверять правильность полученных соотношений.

Для примера возьмем ускорение свободного падения g , размерность которого будет $[a] = \overline{L} \overline{T}^{-2}$ и $\pi(\alpha, \beta) = \alpha \beta^{-2}$. В системе CGS (г, см, с) $g = 981 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Определим ее величину в системе MTS (м, т, с). В этом случае мы берем $l' = 1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 100l$, так как изменяем ее на величину $\alpha = 1 \text{ см}/100 \text{ см} = 10^{-2}$ раз. Величина t остается неизменной, $\beta = 1$. Тогда

$$\pi(\alpha, \beta) = \alpha \beta^{-2} = 10^{-2} \cdot 1 = 10^{-2}$$

и $g' = \pi(\alpha, \beta) \cdot g = 10^{-2} \cdot 981 = 9,81 \text{ м/с}^2$.

В системе, где $l'' = 1 \text{ км} = 10^5 \text{ см} = 10^5 l$ и $t'' = 1 \text{ ч} = 3600 \text{ с} = 3600 t$.

$$\alpha = \frac{l}{l''} = \frac{1 \text{ см}}{10^5 \text{ см}} = 10^{-5}; \quad \beta = \frac{1 \text{ с}}{3600 \text{ с}} = \frac{1}{3600},$$

$$\pi(\alpha, \beta) = \alpha \beta^{-2} = 10^{-5} (1/3600)^{-2} = 36^2 \cdot 10^{-5},$$

$$g'' = \pi(\alpha, \beta) g = 36^2 \cdot 10^{-5} \cdot 981 = 137 \cdot 10^3 \text{ км/ч}^2.$$

Из приведенного примера легко вывести правило перехода из одной системы мер в другую. Для этого необходимо:

1. По виду размерности величины $P - [P] = [A]^k [B]^m [C]^n$ записать выражение для $\pi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^k \beta^m \gamma^n$.

2. Определить значения α, β и γ , как отношения соответствующих единиц измерения основных величин в старой системе мер к таковым в новой системе мер, выраженных через единицы измерения в старой системе мер.

$$\alpha = A/A'; \quad \beta = \overline{B/B'}; \quad \gamma = C/C'.$$

3. Вычислить значение $\pi(\alpha, \beta, \gamma)$ в соответствии с его выражением, т.е.

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma) = (A/A')^k (B/B')^m (C/C')^n.$$

4. Зная $\pi(\alpha, \beta, \gamma)$, вычислить значение производной величины P' в новой системе единиц измерения по формуле

$$P' = \pi(\alpha, \beta, \gamma) P,$$

где P — значение производной величины в старой системе единиц измерения.

1.2. Основные теоремы и дополнительные условия подобия

1.2.1. Параметры, определяющие класс, группу явлений и единичное явление

Под классом физических явлений понимается совокупность явлений, описываемых одной общей системой основных уравнений, обычно дифференциальных уравнений с одним и тем же физическим смыслом входящих в них параметров. Различные классы явлений объединяются в группу явлений, характеризующихся только общностью основных, дифференциальных уравнений, описывающих их. Единичное явление — член класса явлений, отличающийся от других определенными численными значениями задаваемых величин или параметров.

Примером группы явлений служат явления, описываемые эллиптическим дифференциальным уравнением, характеризующим в общем случае закономерности стационарного перемещения частиц среды в пространстве как при наличии действия внешних сил (неоднородное уравнение — уравнение Пуассона), так и без них (однородное уравнение — уравнение Лапласа). Из этой группы явлений можно выделить класс явлений, например, явления движения частиц воды или воздуха, характеризуемые потенциалом скорости ϕ . Из этого класса можно выделить какое-то единичное явление, характеризуемое и отличное от других явлений этого класса условиями однозначности.

К условиям однозначности относят следующие:

1) физические условия однозначности — конкретные свойства рабочего вещества, движение и изменение которого изучается (уравнение состояния вещества либо его характеристики);

2) пространственные или геометрические — геометрическая форма и размеры пространства, в которых протекает явление. Они определяют мерность явления и вместе с граничными условиями выбор системы координат;

3) временные — условия, при которых данное явление возникает и протекает, т.е. начальные условия и стационарность или нестационарность процесса;

4) граничные – условия взаимодействия с окружающей средой, т.е. условия на границах пространства, занимаемого веществом, в котором протекает исследуемое явление или процесс.

В качестве примера единичного явления из класса явлений, описываемых уравнением гиперболического типа, можно привести, например, движение ударной волны в воде или движение газового пузыря при взрыве взрывчатых веществ (ВВ) в воде.

Каждое явление, класс и группа явлений помимо общности описывающих их уравнений характеризуется определенным числом основных параметров или факторов, вскрывающих сущность процессов, протекающих в этих явлениях. Поэтому одной из главных задач исследователей является определение этих параметров, факторов. Для выделения основных параметров, определяющих единичное рассматриваемое явление, обычно сначала схематизируют это явление путем построения его модели с использованием простейших образов и понятий, уже хорошо известных раньше. Правильная схематизация всегда представляет довольно трудную задачу, требующую от исследователя большого опыта, интуиции и предварительного качественного выяснения механизма изучаемых процессов. Выявление при этом определяющих параметров, а также глубокое проникновение в сущность закономерностей и связей между ними – неперенное условие успешного решения задачи.

При перечислении параметров, определяющих явление, необходимо указывать все его параметры, независимо от того, сохраняют или нет они постоянное значение. Так, при рассмотрении процессов, в которых вес тела существенен, мы должны обязательно учитывать в качестве физической размерной постоянной ускорение свободного падения g , хотя она и является постоянной для большинства реальных явлений.

Система параметров, определяющих явление, легко выписывается, если задача сформулирована математически. В этом случае берутся все размерные и безразмерные величины, необходимые и достаточные для определения численных значений искомых, непосредственно из математических уравнений. В остальных случаях устанавливают интуитивно, из опыта или схематизации явления те факторы, которые необходимы для полного получения искомой величины. В этом случае численные значения параметров можно получить лишь экспериментально.

Среди определяющих параметров должны быть обязательно и величины с размерностями, через которые могут выразиться размерности этих величин. В число определяющих параметров включаются также и физические размерные константы.

В ряде случаев физические величины, определяющие явление, разделяют на параметры и обобщенные координаты, т.е. из всех параметров выделяют обобщенные координаты, понимая под ними величины, описывающие поведение, движение, изменение среды, системы. Их число обычно равно числу степеней свободы. Это перемещения точек среды, их скорость движения или ускорение и т. д.

1.2.2. Понятие подобия

Возьмем две системы одной физической природы, состоящие из равного числа аналогичных элементов, играющих в обеих системах одинаковую роль. При этом под системой будем понимать совокупность физических объектов или элементов, объединенных на основе некоторого признака, который определяет набор этих элементов и сообщает системе определенные качества. Примерами систем являются различные машины, конструкции, магнитное поле с его источником, поле напряжений в грунте при взрывах или других источниках возмущений т. д.

Параметрами системы называют величины, характеризующие ее элементы и воздействующие на эти элементы внешние объекты, т. е. величины, индивидуализирующие ее из совокупности других той же физической природы.

Обобщенными координатами среды называют величины, описывающие поведение, движение системы. В общем случае обобщенные координаты могут изменяться со временем и при переходе от точки к точке системы.

Рассматривают только такие системы, состояние которых является однозначной функцией состояний отдельных их элементов. Следовательно, из множества параметров системы выделяют минимально возможное число определяющих параметров, достаточное для однозначного определения системы и ее элементов.

Одну из таких систем назовем модель, другую — натура, а относящиеся к ним величины будем обозначать соответствующими индексами m и n .

Пусть система определяется m независимыми параметрами P_k и имеет n обобщенных координат q_i . В число параметров включим время и условия однозначности (начальные и граничные условия размеры системы и т. п.). Условимся, что индекс i имеет значение $1, 2, \dots, n$, индекс $k - (n + 1), \dots, (n + m)$.

Обобщенные координаты этих систем являются одинаковыми функциями параметров в силу идентичности физической природы систем, т. е.

$$\begin{aligned} q_{mi} &= f_i(P_{m(n+1)}, \dots, P_{m(n+m)}), \\ q_{ni} &= f_i(P_{n(n+1)}, \dots, P_{n(n+m)}), \end{aligned}$$

однако, в общем случае $P_{mk} \neq P_{nk}$ и $q_{mi} \neq q_{ni}$.

Две системы называют подобными, если их любые две соответствующие обобщенные координаты для любых сходственных моментов времени и сходственных точек пространства пропорциональны, т. е. если

$$\begin{aligned} q_{ni}(t_n, r_n) &= q_{ci} q_{mi}(t_m, r_m), \\ r_n &= l_c r_m, \quad t_n = l_c t_m, \end{aligned}$$

где r_n, r_m — вектор сходственных точек пространства; t_n, t_m — сходственные моменты времени; l_c, l_c, q_{ci} — коэффициенты подобия.

Если известно, что две системы подобны и можно определить коэффициенты подобия, то зная поведение одной системы (модели), можно определить поведение другой системы (натуры).

Наиболее простым примером подобия систем является геометрическое подобие (пространственное подобие), которое выражается равенством всех соответствующих углов и соответственной пропорциональностью всех линейных размеров, т. е. выполнением соотношений:

$$\varphi_{ni} = \varphi_{mi}; \quad x_{ni} = x_c x_{mi} = l_c x_{mi},$$

где $x_c = l_c$ — масштаб (коэффициент) геометрического подобия; φ_{ni} , φ_{mi} — соответствующие углы в натуре и в модели; x_{ni} , x_{mi} — соответственные линейные размеры (пространственные координаты) в натуре и модели.

Отметим, что геометрическое подобие является частным случаем физического подобия и по форме любое физическое подобие сводится к геометрическому подобию соответствующих физических параметров.

Примеры простого подобия — временное (гомохронность явлений, процессов), кинематическое (геометрическое подобие полей скоростей и полей ускорений), динамическое подобие (геометрическое подобие силовых полей).

Временное подобие выражается пропорциональностью интервалов между соответственными моментами времени, т. е.

$$t_{ni} = t_c t_{mi}.$$

Кинематическое подобие выражается соответственным направлением и пропорциональностью всех скоростей или ускорений, т. е.

$$(v_{xi})_n = v_{xc} (v_{xi})_m; \quad (a_{xi})_n = a_c (a_{xi})_m$$

или

$$(v_{xi})_n = \frac{l_c}{t_c} (v_{xi})_m; \quad (a_{xi})_n = \frac{l_c}{t_c^2} (a_{xi})_m. \quad (1.1)$$

Динамическое подобие выражается направлениями и пропорциональностью всех действующих сил, работы сил и их мощностей:

$$\begin{aligned} F_{ni} &= m_{ni} a_{ni} = F_c F_{mi} = m_c a_c a_{mi} m_{mi}, \\ F_{ni} &= a_c m_c F_{mi} = (m_c l_c / t_c^2) F_{mi}, \\ A_{ni} &= F_{ni} l_{ni} = F_c l_c A_{mi} = (m_c l_c^2 / t_c^2) A_{mi}, \\ N_{ni} &= A_{ni} / t_{ni} = (A_c / t_c) \bar{N}_{mi} = (m_c l_c^2 / t_c^3) N_{mi}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где m_c — масштаб масс (материальное подобие);

$$F_c = m_c l_c / t_c^2; \quad A_c = m_c l_c^2 / t_c^2; \quad \bar{N}_c = m_c l_c^2 / t_c^3 \quad (1.3)$$

— выражения соответственно для масштабов подобия силы, работы и мощности.

Из выражений (1.1)–(1.3) нетрудно заключить, что при кинематическом и динамическом подобиях коэффициенты подобия входящих в них величин выражаются через коэффициенты подобия исходных основ-

ных величин $m_c l_c$, t_c в соответствии с формулой размерности этих величин.

Часто коэффициенты подобия одних производных величин удобно выражать через коэффициенты подобия других производных величин. Так, при исследовании сил, действующих на машины при различных скоростных режимах работы этих машин, целесообразно масштаб сил $F_c = m_c l_c / t_c^2$ представить в другом виде. Учитывая, что обе машины изготовлены из одних материалов (одинаковая плотность $\rho_c = \rho_m / \rho_m = 1$), а значит $m_c = \rho_c l_c^3 = l_c^3$, можно написать:

$$F_c = m_c l_c / t_c^2 = l_c^3 l_c / t_c^2 = l_c^2 l_c^2 / t_c^2 = l_c^2 v_c^2.$$

Если при этом машины имеют одинаковые размеры, т.е. $l_c = 1$, то $F_c = v_c^2$.

Это значит, например, что при испытании машины при различных ее режимах работы силы, действующие на машину, будут изменяться пропорционально квадрату скорости и это надо учитывать при обработке результатов испытания.

1.2.3. Основные теоремы подобия и дополнительные условия подобия

Первая теорема подобия в общем виде сформулирована акад. М. В. Кирпичевым так: если совокупность явлений, определяемых системами дифференциальных уравнений и условиями однозначности, образует группу подобных явлений, то величины, входящие в эти системы уравнений и условия однозначности, должны образовывать комплексы, сохраняющие одно и то же численное значение для подобной совокупности явлений. Эти комплексы называются инвариантами подобия или критериями подобия. Иначе говоря, необходимым условием подобия двух систем является численное равенство соответствующих комплексов или критериев подобия, составленных из обобщенных координат и параметров этих систем.

Эта теорема для случая твердых тел впервые была сформулирована Ньютоном. Строгое доказательство для общего случая основано на теории групп Ли.

Поясним эту теорему следующим примером. Пусть имеется система материальных точек, массы которых находятся в определенном постоянном соотношении m_c с соответственными массами другой системы. При этом расстояние и времена в этих системах подобны.

На основании второго закона Ньютона силы, действующие в этих системах, будут равны:

$$(F_l)_1 = (m_l) \left(\frac{dl_l}{dt_l^2} \right)_1; \quad (F_l)_2 = (m_l)_2 \left(\frac{dl_l}{dt_l^2} \right)_2;$$

$$(m_l)_1 / (m_l)_2 = m_c; \quad (l_l)_1 / (l_l)_2 = l_c; \quad (t_l)_1 / (t_l)_2 = t_c.$$

Тогда $(F_l)_1 = m_c \frac{l_c}{t_c^2} (m_l)_2 \left(\frac{dl_l}{dt_l^2} \right)_2 = \frac{m_c l_c}{t_c^2} (\vec{r}_l)_2 = \vec{r}_2 (\vec{r}_l)_2$, т.е. имеет место динамическое подобие систем и при этом можно записать

$$F_c = m_c \ddot{l}_c / l_c^2 \text{ или } m_c l_c / (F_c t_c^2) = 1.$$

Следовательно, из величин F , m , l , t можно составить комплекс, числовое значение которого будет одинаковым для обеих систем, т. е.

$$\frac{(m_l)_1 (l_l)_1}{(F_l)_1 (t_l^2)_1} = \frac{(m_l)_2 (l_l)_2}{(F_l)_2 (t_l^2)_2} = \frac{ml}{Ft^2} = N.$$

Получена безразмерная комбинация из определяющих величин, одинаковая для рассматриваемых подобных систем, называемая критерием динамического подобия. Ее иногда называют критерием Ньютона.

Вторая теорема подобия (π -теорема) является общей теоремой теории размерности (методом размерности) и формулируется так: во всяком явлении можно найти функциональную связь не только непосредственно между реальными именованными величинами, характеризующими данное явление, но и между некоторыми их безразмерными комбинациями, которые и являются необходимыми для подобия этих явлений критериями подобия. Доказательство этой теоремы было выполнено акад. Л. И. Седовым. Раскроем лишь физическую сущность ее и некоторые важные следствия этой теоремы, подкрепленные различными примерами.

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или экспериментально, представляют собой функциональные зависимости между величинами, характеризующими рассматриваемый процесс или явление. Численные же значения этих величин зависят от выбора системы единиц измерения, физически не связанной с существом исследуемого процесса или явления. Поэтому сами функциональные зависимости, не зависящие от системы единиц измерения, должны обладать определенной структурой.

Допустим некоторая величина u находится в функциональной зависимости от некоторой совокупности независимых друг от друга величин x_1, x_2, \dots, x_n , в число которых входят также размерные и безразмерные постоянные, т. е.

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.4)$$

Полагаем, что величины u, x_1, x_2, \dots, x_n имеют определенные размерности, а равенство (1.4) не зависит от выбора системы единиц измерения и выражает собой только одно существенное физическое соотношение (свойство), что оно определяет величину u в некоторой зависимости от не зависящих между собой определяющих параметров x_1, x_2, \dots, x_n и не является общим видом мыслимой математической связи между этими величинами в любой системе единиц измерения. Иначе говоря, это выражение не дает математического описания функциональной зависимости и она может быть произвольной, но должна быть такой, чтобы выполнялось равенство

$$[u] = [f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (1.5)$$

* При этом, в общем случае, функция (1.4) может быть и многозначной и содержать так называемые «паразитные» зависимости, например $F = ma$.

Тем не менее условие (1.5) заметно сужает класс возможных функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и позволяет в какой-то степени предсказать структуру этой физической функциональной зависимости.

Проиллюстрируем сказанное на двух примерах.

1. Точка начинает движение из состояния покоя и движется с постоянным ускорением a . Тогда пройденный ею путь l будет некоторой функцией a и времени t , т. е. $l = f(a, t)$.

Согласно равенству (1.5) имеем

$$[l] = L = [f(a, t)] = LT^{-2}T.$$

Представим функцию $l = f(a, t)$ в виде степенной зависимости $l = Ca^n t^m$. Учитывая последние два выражения, можно написать

$$L = (LT^{-2})^n T^m = L^n T^{m-2n}.$$

Приравняв показатели степени при размерностях L и T в правой и левой частях, получим:

$$\left. \begin{aligned} 1 = n, \\ 0 = m - 2n, \end{aligned} \right\} \text{отсюда } n = 1, \quad m = 2n = 2$$

и окончательно структура функции будет следующей: $l = Cat^2$, где C — некоторая безразмерная константа.

2. Возьмем другой пример — математический маятник. Сообщим ему начальную скорость v_0 , он отклонится на угол φ . Установим зависимость значения угла φ от других параметров, определяющих движение маятника. Очевидно, помимо v_0 к ним надо отнести длину маятника l и ускорение свободного падения g , т. е.

$$\varphi = f(v_0, l, g).$$

Поступая аналогичным образом, будем иметь

$$[\varphi] = 1 = [f(v_0, l, g)], \quad (1.6)$$

$$f(v_0, l, g) = Cv_0^k l^n g^m \quad \text{или} \quad (1.7)$$

$$1 = L^0 T^0 = (LT^{-1})^k L^n (LT^{-2})^m = L^{k+n+m} T^{-k-2m}.$$

$$\text{Отсюда } \left. \begin{aligned} 0 = k + n + m, \\ 0 = -k - 2m. \end{aligned} \right\}$$

Получено два уравнения и три неизвестных. Значит задача становится неопределенной. Соотношению (1.6) может удовлетворять бесчисленное множество степенных безразмерных комбинаций, одной из которых будет $v_0^2/(gl)$, а остальные будут иметь вид

$$[v_0^2/(gl)]^p,$$

где p — произвольное число.

При этом вид функции (1.7) может быть и степенным, например,

$$\varphi = f(v_0, l, g) = C [v_0^2/(gl)]^p,$$

или более сложным, например,

$$\varphi = f(v_0, l, g) = v_0^2/(gl) + 2(v_0^2/(gl))^2 - 4(v_0^2/(gl))^4,$$

$$\varphi = \sin(v_0^2/(gl)) \quad \text{или} \quad \varphi = \lg(v_0^2/(gl)).$$

Из этих примеров наглядно видно, что анализ размерностей не дает общего математического описания явления, а может лишь дать предполагаемую структуру связей, как бы несколько сузить класс возможных функциональных связей и в какой-то мере предсказать физические зависимости.

Вернемся снова к общему случаю функциональной зависимости (1.4). Посмотрим, какое ограничение накладывает зависимость (1.5) на функ-

цию (1.4), выясним структуру этой функции, выражающей собой определенный физический закон, не зависящий от выбора системы единиц измерения.

Для этого в функциональной зависимости общего вида (1.4) из совокупности $n + 1$ независимых величин или параметров выбирают произвольно k основных величин x_1, x_2, \dots, x_k , а из оставшихся величин x_{k+1}, \dots, x_n , u по правилам формулы размерности строят комплексы вида

$$\frac{u}{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}, \quad \frac{x_{k+1}}{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}}, \quad \frac{x_n}{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_k^{q_k}},$$

где в знаменателе записано выражение для размерности соответствующей величины числителя. В результате функциональная зависимость (1.4) может быть представлена в виде

$$П = f(П_1, П_2, \dots, П_{n-k}), \quad (1.8)$$

где

$$П = \frac{u}{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}, \quad П_1 = \frac{x_{k+1}}{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}},$$

$$П_{n-k} = \frac{x_n}{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_k^{q_k}} \quad (1.9)$$

и являются безразмерными искомыми критериями подобия.

При этом могут представиться два случая:

1) величины x_1, x_2, \dots, x_n допускают безразмерные степенные комбинации вида (1.9). Тогда получим некоторую зависимость вида

$$u = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot f_2(П_1, П_2, \dots, П_{n-k}), \quad (1.10)$$

$$\text{где } f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

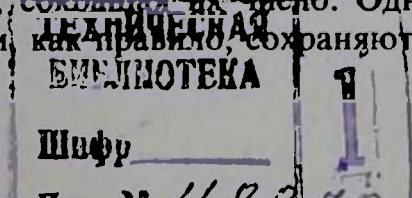
2) безразмерные степенные комбинации (1.9) невозможны. Тогда зависимость для искомой величины u будет иметь вид

$$u = C x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}, \quad (1.11)$$

где C — некоторая произвольная постоянная.

Причем во втором случае формула (1.11) дает наиболее полное представление о характере искомой зависимости.

Отметим также, что чем меньше число определяемых величин, тем больше ограничена функциональная связь и легче вести исследования. И в случае, когда $n \leq k$, как это показано формулой (1.11), метод размерностей определяет функциональную связь полностью, с точностью до произвольной постоянной. Это наиболее благоприятный случай. Но искусственное увеличение числа k при этом не поможет, так как с этим растет число параметров в виде размерных констант, а число безразмерных комбинаций остается неизменным. Можно в ряде случаев некоторые критерии подобия объединить, перемножая или деля их друг на друга и, тем самым, сокращая их число. Однако новые критерии, полученные таким путем, как правило, сохраняют все свойства старых,



но могут в какой-то степени упростить получение критериальных зависимостей экспериментально.

Проиллюстрируем случай $n \leq k$ простыми примерами, а именно специальными случаями моделирования.

Под специальными случаями моделирования понимают моделирование процессов, происходящих под действием или определяемых действием каких-либо сил одной природы (например, либо сил инерции, либо сил вязкости). При этом из определяющих процесс величин можно образовать не более одного критерия подобия.

Такие случаи моделирования часто встречаются на практике, когда явление исследуется в условиях, где малое число величин практически полностью определяет протекание процесса. Это имеет место в процессах или явлениях, где предполагается, что преобладающее значение по сравнению с другими силами, которые не учитываются, имеют силы определенной природы. В этом случае характеристиками процесса, обусловленного наличием этих сил, являются величины, которые определяют эти силы и величины, характеризующие объект воздействия этих сил. Из них и составляется единственный критерий подобия.

Пример 1. Сопротивление воды или воздуха движению твердых тел.

А. Сначала рассмотрим идеализированный случай, когда движение определяется только силами инерции $F = ma$.

В этом случае, представляя правую часть в виде $ma = \rho l^3 a = \rho l^3 \ddot{u} = \rho l^2 v^2$, получим

$$F = ma = \rho l^2 v^2. \quad (1.12)$$

Из этого равенства, приняв в качестве основных величин ρ , l , v , можно получить безразмерный критерий подобия, деля одну часть равенства на другую, т.е. получить критерий подобия Ньютона

$$F/(ma) = F/(\rho l^2 v^2) = N. \quad (1.13)$$

Из выражения (1.13) легко получается формула Ньютона для силы сопротивления движению твердых тел в жидкости с точностью до некоторой постоянной C , зависящей от формы геометрически подобных тел, а именно:

$$F = C \rho D^2 v^2,$$

где D — некоторый характерный размер тела. Согласуется с выражением (1.13) и зависимость для аэродинамической силы

$$F = R = C_R \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_R — коэффициент сопротивления, равный $2C$; S — площадь миделевого сечения, $S \approx l^2$.

Б. Пусть теперь жидкость не идеальная, а вязкая. В этом случае определяющей силой будет сила вязкости

$$F = \eta S d\phi/dl,$$

где ϕ — угол сдвига слоев жидкости; η — динамический коэффициент вязкости; S — площадь пластины (тела), обтекаемой потоком жидкости.

Это выражение можно записать, по аналогии с предыдущим примером, в виде

$$F = \eta l^2/t.$$

Приравняв это отношение к (1.12), полученному из закона Ньютона, т.е. к последнему выражению из формулы (1.12), имеем

$$\eta l^2 / t = \rho l^2 v^2, \quad \text{отсюда}$$

$$\rho v^2 t / \eta = \rho v l / \eta = v l / (\eta / \rho) = v l / \xi.$$

Полученная новая безразмерная комбинация является критерием подобия, называемая числом Рейнольдса, т.е.

$$Re = v l / \xi, \quad (1.14)$$

где $\xi = \eta / \rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Число Re характеризует соотношение между силами вязкости и инерционными силами. В зависимости от числа Re меняется характер движения жидкости, обтекающей твердое тело (ламинарное или турбулентное).

При моделировании в одной и той же среде, что и натура, при учете критерия Re имеем в масштабах подобия

$$v_c = v_n / v_m; \quad t_c = t_n / t_m; \quad \rho_c = \rho_n / \rho_m; \quad \xi_c = \xi_n / \xi_m; \\ \rho_c = \eta_c = 1; \quad v_c t_c = 1; \quad t_c = l_c^2,$$

что означает, что масштаб времени будет пропорционален квадрату линейного масштаба, т.е. процессы в модели должны протекать существенно быстрее, чем в натуре, примерно в t_c^2 раз.

Пример 2. Преобладающей силой является сила упругости.

А. Сначала рассмотрим колебание груза на пружине. Сила натяжения пружины $F = Kx$, где K — коэффициент пропорциональности, Н/м; x — линейный размер пружины, м.

Приравняв эту силу к инерционной силе, получим

$$Kx = m \ddot{x}.$$

Отсюда можно образовать безразмерную комбинацию, поделив одну часть на другую $m/(kt^2)$, а также выражение для времени t

$$t^2 = m/K \quad \text{или} \quad t = \sqrt{m/K}.$$

Из этого выражения легко получается зависимость для периода колебания пружины

$$T = C \sqrt{m/K} \quad \text{или} \quad T = 2\pi \sqrt{m/K},$$

где значение $C = 2\pi$ можно получить из опыта, наблюдая за периодом свободных колебаний груза на пружине.

Б. Рассмотрим теперь упругие колебания в твердом теле (распространение волны напряжения в твердых породах). Согласно закону Гука напряжения $\sigma = \epsilon E$, где ϵ — относительное смещение; E — модуль упругости.

Сила упругости $F = \sigma S = \epsilon E S$, где S — площадь сечения, перпендикулярного действующей силе.

В этом случае, сравнивая действующую силу с инерционной (1.12), получим соотношение

$$\epsilon E S = \rho v^2 l^2,$$

из которого — безразмерную комбинацию вида

$$\rho v^2 / (\epsilon E) = v^2 / (E \epsilon / \rho) = \text{idem}$$

и соответственно критерий подобия Коши, равный после извлечения корня из предыдущего равенства:

$$C_0 = v / \sqrt{E \epsilon / \rho}. \quad (1.15)$$

Он характеризует соотношение между упругими и инерционными силами.

Заметим, что при моделировании в одной и той же среде имеем: $\rho_c =$

$= E_c = \varepsilon_c = 1$, отсюда $v_c = l_c/t_c = 1$ и $l_c = t_c$, т.е. имеет место простое геометрическое подобие процессов распространения упругих волн в одних и тех же средах.

Пример 3. Рассмотрим моделирование гравитационной силы (силы тяготения)

$$F = \gamma m_1 m_2 / r^2, \quad (1.16)$$

где γ – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между центрами тел.

Для Солнечной системы масса m_2 состоит из m_i масс отдельных планет, тогда можно принять

$$m_1 \gamma = K = \text{const}.$$

Для взаимодействия планеты с Солнцем можно записать выражение (1.16) в виде

$$F = K m_i / r_i^2.$$

Сравнивая последнее выражение с равенством (1.12), получим

$$K m_i / r_i^2 = m_i l_i / t_i^2,$$

отсюда $t_i^2 = l_i^3 / K$, что позволяет для двух планет записать закономерность вида

$$t_1^2 / t_2^2 = a_1^3 / a_2^3, \quad (1.17)$$

где a_1 и a_2 – полуоси эллиптических орбит вращения планет вокруг солнца.

В этом случае равенство (1.17) выражает третий закон Кеплера.

Пример 4. Рассмотрим моделирование силы тяжести вблизи поверхности Земли. Сила тяжести $F = mg$. Сравнивая это выражение с равенством (1.12), получим

$$mg = ma, \quad g = a = l/t^2,$$

отсюда можно получить два выражения

$$t = \sqrt{l/g} \quad \text{и} \quad al = v^2. \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) приводит к известному критерию подобия – критерию Фруда

$$Fr = v^2 / (gl). \quad (1.19)$$

Он характеризует соотношение инерционных сил и сил тяжести.

Пример 5. Рассмотрим моделирование центробежных сил.

Центробежная сила $F = \omega^2 m R$, где $\omega^2 R$ – центробежное ускорение; ω – угловая скорость; R – радиус вращения.

Приравняем эту силу к силе тяжести $F = mg$, имеем $m\omega^2 R = mg$ или $\omega^2 R = g$, отсюда получим критерий подобия для центробежных сил

$$\omega^2 R / g = \text{idem},$$

используемый для центробежного моделирования.

Этот критерий подобия широко применяется при исследовании процесса разрушения горных пород взрывом на центрифуге при $l_c \neq 1$, т.е. при моделировании на моделях иных размеров, чем натура.

Рассмотренные случаи моделирования встречаются при моделировании физических явлений весьма часто. Поэтому целесообразно иметь таблицу временно-пространственных масштабов соотношений для рассмотренных специальных случаев моделирования в предположении одинаковости материалов природы и модели, т.е. при $\rho_c = 1$ (табл. 1).

В заключение рассмотрим примеры, иллюстрирующие более сложный случай применения теоремы размерности ($k < n$).

1. Рассмотрим путь точки, которая начала равноускоренное движение, имея уже начальную скорость v_0 . В этом случае путь

Таблица 1

Наименование характеристик	Обозначение характеристик	Преобладающие силы				
		вязкости $F = Sd\varphi/dt$	упругости $F = Kx$	тяжести $F = mg$	тяготения $F = \gamma m_1 m_2/r^2$	центробежные $F = m\omega^2/R$
Индикатор подобия (характеристическое число)	Λ	$\frac{v_c l_c}{\xi_c} = 1$	$\frac{v_c}{\sqrt{\frac{\xi_c E_c}{\rho}}} = 1$	$v_c^2/(l_c g_c) = 1$	$l_c v_c^2/(\gamma_c m_c) = 1$	$g_c/(\omega_c^2 R_c) = 1$
Критерий подобия	Π	$Re = v l/\xi$	$C_0 = v/\sqrt{\varepsilon E/\rho}$	$Fr = v^2/(lg)$	$lv^2/\gamma m = idem$	$g/(\omega^2 R) = idem$
Связь масштаба времени с линейным масштабом l_c	t_c	l_c^2	l_c	$l_c^{1/2}$	$l_c^{3/2}$	l_c^k
Связь масштаба скорости с линейным l_c	$v_c = l_c/t_c$	l_c^{-1}	1	$l_c^{1/2}$	$l_c^{-1/2}$	l_c^{1-x}
Связь масштаба e ил с линейным l_c при $\rho_c = 1$	$F_c = l_c^2 v_c^2$	1	l_c^2	l_c^3	l_c	l_c^{4-2x}
Связь масштаба напряжения с линейным l_c , ($\rho_c = 1$)	$\sigma_c = v_c^2$	l_c^{-2}	1	l_c	l_c^{-1}	$l_c^{2(1-x)}$
Связь масштаба работ с линейным l_c , ($\rho_c = 1$)	$A_c = l_c^3 v_c^2$	l_c	l_c^3	l_c^4	l_c^2	l_c^{5-2x}
Связь масштаба мощности с линейным l_c , ($\rho_c = 1$)	$N_c = l_c^2 v_c^3$	l_c^{-1}	l_c^2	$l_c^{1/2}$	$l_c^{1/2}$	l_c^{5-3x}

2 Примечание. Для центрального моделирования значение x меняется: $x = 1$ — для упругих сред, $1 < x < 2$ — упруговязких сред.

$$l = f(v_0, a, t). \quad (1.20)$$

Из трех определяющих путь величин v_0 , a , t — две независимых, допустим v_0 и t , и одна зависимая a . Применим метод размерностей для определения структуры функциональной связи зависимости (1.20).

Выберем систему единиц — M , L , T . Размерности всех величин в этой системе будут

$$[l] = L; [v_0] = LT^{-1}; [a] = LT^{-2}; [t] = T.$$

Составим безразмерные комбинации из основных величин и производных, имеем:

$$\Pi = l/(v_0^2 t^2), \quad \Pi_1 = a/(v_0^2 t^2).$$

Из условия безразмерности Π и Π_1 вытекает

$$[l] = [v_0^2 t^2], \quad [a] = [v_0^2 t^2]. \quad (1.21)$$

Для принятой системы единиц измерения равенства (1.21) можно переписать:

$$L = (LT^{-1})^2 T^2 = ET^{2-x}; \quad LT^{-2} = ET^{2-x}.$$

Приравнявая показатели при одинаковых символах единиц L и T , получим уравнения для их определения:

из первого соотношения получим

$$\left. \begin{array}{l} 1 - x, \\ 0 = y - x, \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1, \\ y = x = 1, \end{array} \quad \Pi = \frac{l}{v_0^2 t^2};$$

из второго соотношения имеем

$$\left. \begin{array}{l} 1 = x, \\ -2 = y - x, \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1, \\ y = x - 2 = -1, \end{array} \quad \Pi_1 = a/(v_0^2 t^2) = at/v_0.$$

Тогда соотношение для l можно записать в виде:

$$\Pi = f(\Pi_1) \text{ или } l/(v_0^2 t^2) = f(at/v_0).$$

или $l = v_0^2 f(at/v_0)$.

(1.22)

Полученная функциональная зависимость (1.22) не дает точного математического описания зависимости, которая получается из решения задачи, а именно:

$$l = v_0 t^2 + \frac{at^2}{2} = v_0 t^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{at}{v_0} \right). \quad (1.23)$$

Однако она определяет примерную структуру этой зависимости и дает ответ на вопрос, от какой комбинации параметров [см. выделенную зависимость в правой части уравнения (1.23)] она зависит или определяется. В данном случае она определяется комбинациями параметров $v_0 t$ и at/v_0 .

Эту зависимость легко получить, если провести эксперимент и данные его обработать по отношению к комбинациям Π и Π_1 . Тогда получим зависимость

$$\Pi = (1 + \Pi_1/2)$$

и отсюда зависимость (1.23).

Этот пример и является одним из простейших примеров отыскания функциональной связи методом размерности. Рассмотрим еще один пример.

2. Пусть математическому маятнику сообщили начальную скорость v_0 . Вследствие этого он отклонился на угол φ . Найдем зависимость угла отклонения φ от параметров, определяющих движение маятника. Очевидно

$$\varphi = f(v_0, l, g). \quad (1.24)$$

За независимые параметры примем v_0 и l (можно g и l). Система единиц — MLT . Безразмерные комбинации параметров

$$\Pi = \varphi/(v_0^x l^y), \quad \Pi_1 = g/(v_0^x l^y).$$

Размерности величин, входящих в (1.24), следующие:

$$[\varphi] = 1; [v_0] = LT^{-1}; [l] = L; [g] = LT^{-2}.$$

Из Π и Π_1 запишем равенства:

$$\begin{aligned} [\varphi] &= [v_0^x l^y]; 1 = L^{x+y} T^{-x}; \\ [g] &= [v_0^x l^y]; LT^{-2} = L^{x+y} T^{-x}. \end{aligned}$$

Из этих равенств получим необходимые уравнения для показателей x и y и окончательный вид безразмерных параметров Π и Π_1 :

$$\begin{aligned} \text{для } \Pi \quad & \left. \begin{aligned} 0 &= x + y, \\ 0 &= -x, \end{aligned} \right\} x = y = 0 \text{ и } \Pi = \varphi; \\ \text{для } \Pi_1 \quad & \left. \begin{aligned} 1 &= x + y, \\ -2 &= -x, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 2; \\ y &= 1 - x = -1; \end{aligned} \quad \Pi_1 = gl/v_0^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\varphi = f(gl/v_0^2). \quad (1.25)$$

Из этой формулы следует, что величина φ зависит от некоторой безразмерной комбинации $\Pi_1 = gl/v_0^2$. Она может быть и степенной функцией

$$\varphi = C(gl/v_0^2)^n,$$

где n — некоторый численный показатель.

Функцию (1.25) можно представить и другими более сложными функциями:

$$\varphi = gl/v_0^2 + 2(gl/v_0^2)^2 + \dots$$

или $\varphi = \sin(gl/v_0^2)$; $\varphi = \ln(gl/v_0^2)$ и др.

Многообразие возможных функций для φ получается потому, что φ сама является безразмерной, да и комбинация из определяющих показателей тоже. В этом случае метод размерности не дает определенного ответа, т.е. задача является более неопределенной, чем в первом примере.

Третья теорема подобия устанавливает достаточные условия подобия заданного множества явлений. Она впервые была доказана проф. В. Л. Кирпичевым и сформулирована им в виде: два тела, сделанные из одного и того же материала, которые были подобны до приложения к ним внешних сил, остаются подобны и после действия их, если силы распределены подобным образом по поверхностям обоих тел, а значения соответствующих сил на единицу поверхности одинаковы в обоих телах. Иначе говоря, в более общей формулировке третья теорема требует выполнения подобия в граничных условиях однозначности явлений, т.е. утверждает, что достаточным условием подобия двух систем является равенство определяющих критерия подобия, составленных из параметров, входящих в граничные условия однозначности явлений.

Доказательство теоремы сложно, построено на представлениях о непрерывных группах преобразований и здесь приводиться не будет.

Помимо этих трех теорем подобия большое значение играют *четыре дополнительных положения подобия систем*.

1. Сложные системы, составленные из нескольких систем, соот-

ветственно подобных в отдельности, подобны и в целом, если подобны и все элементы этих отдельных систем, являющиеся для них общими, т. е. если имеет место подобие в элементах связей этих систем.

2. Условия подобия, справедливые для линейных систем, могут быть распространены и на нелинейные системы при дополнительном условии, заключающемся в совпадении относительных характеристик этих нелинейностей, т. е. в совпадении соответствующих зависимостей от тех или иных переменных величин. Или иначе, условия подобия, справедливые для систем с постоянными параметрами, можно распространить на системы с переменными параметрами при условии совпадения относительных характеристик этих переменных параметров.

Например, при проектировании электромагнита на магнитную проницаемость η модели и нового образца (натуры) накладываются следующие ограничения:

$$\frac{\eta_n(H_n)}{\eta_m(H_m)} = \eta_c = \text{const при } \bar{H}_n / \bar{H}_m = H_c = \text{const},$$

где H — напряженность магнитного поля.

3. Условия подобия, справедливые для изотропных и в том или ином смысле однородных систем, могут быть распространены и на анизотропные и неоднородные системы, если только анизотропия и неоднородность в сравниваемых системах одинаковы.

4. Процессы, протекающие в геометрически не подобных системах, могут быть подобными, если каждой точке пространства в одной системе будет соответствовать вполне определенная точка пространства в другой физически подобной системе. Это подобие называют еще аффинным подобием.

1.3. Понятие о неполном и приближенном подобиях

При решении конкретной задачи на подобие явлений в природе и модели могут встретиться следующие трудности и факторы.

1. Не все определяющие параметры данного явления известны.

2. Среди определяющих параметров можно выделить круг параметров, слабо влияющих на исследуемые явления, и круг сильно влияющих параметров.

3. Невозможно подобрать параметры природы так, чтобы определяющие критерии природы были бы одинаковы таковым модели.

4. Наличие переменных параметров и анизотропии не позволяет удовлетворить дополнительным условиям подобия.

Могут быть и другие трудности, не предвиденные указанными признаками.

В этих случаях говорят о неполном, либо о приближенном подобии, т. е. ограничиваются известными параметрами, или только теми, чье влияние наиболее значительно; пренебрегают теми критериями подобия, которые невозможно удовлетворить в модели и природе одновременно;

прибегают к усреднению переменных параметров или условий анизотропии (неоднородности); удовлетворяют лишь часть критериев подобия.

Степень приближенности подобия характеризуется так называемым масштабным эффектом, величина которого обычно оценивается по результатам исследования значительности допущенных ограничений числа параметров, пренебрежений критериями подобия и принятыми усреднениями на процессы исследуемого явления. Оценка масштабного эффекта в большинстве случаев производится специальными экспериментальными исследованиями.

Отметим, что приближенное и неполное моделирование тоже являются достаточно ценными для дальнейшего изучения исследуемого явления, так как дает возможность в ряде случаев определить основные (главные) закономерности, характеризующие исследуемые явления и процессы. Более того, точное моделирование с сохранением полного подобия в модели изучаемого явления в натуре практически невозможно.

Неполным подобием называют такое подобие, когда установлено подобие относительно некоторой части (а не всех) величин, характеризующих исследуемое явление. Принципиальная возможность такого подобия обусловлена тем, что во многих случаях исследователей интересует не вся физическая картина явлений, а только ее часть.

Например, надо определить либо опорные реакции, либо только внутренние напряжения и деформации.

При неполном подобии надо правильно определить, какие из величин, входящие в условия однозначности, влияют на искомые результаты. Для этого, естественно, надо хорошо понимать физическую сущность задачи.

Приближенным подобием, в отличие от неполного подобия, является такое подобие, когда заведомо не учитывается ряд факторов, незначительно влияющих на рассматриваемое явление. В этом случае важно правильно оценить влияние неучитываемых факторов на рассматриваемое явление, чтобы достаточно обосновано пренебречь их влиянием. При этом надо также оценить погрешность от допущенного приближения, т. е. учесть масштабный эффект.

Физическую сущность неполного и приближенного подобия лучше всего выяснить на примерах.

Пример 1. В качестве примера неполного подобия рассмотрим систему кронштейнов 1, 2, и 3, на узел A_n которых (рис. 1, а) действует сила P_n . Надо определить продольные силы в стержнях.

Эта шарнирно-стержневая конструкция статически неопределима, так как продольные силы в стержнях зависят не только от силы P_n , углов α_n и β_n , но и от величины жесткости стержней на продольную деформацию $i = ES/l$, где E – модуль продольной упругости; S – площадь поперечного сечения стержня; l – длина стержня.

Таким образом, величины, однозначно определяющие задачу, будут: α , β , P , i_1 , i_2 , i_3 с размерностями $[\alpha] = [\beta] = 1$; $[P] = MLT^{-2}$; $[i_1] = [i_2] = [i_3] = MT^{-2}$.

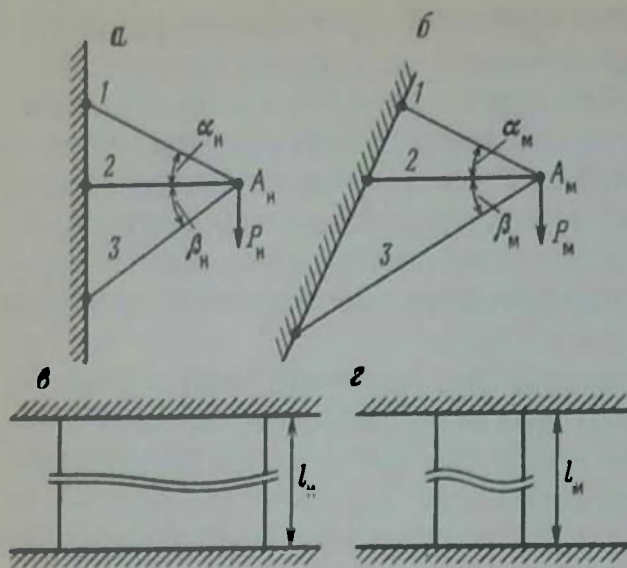


Рис. 1. Схемы неполного моделирования системы кронштейнов (а – натуры, б – модели) и приближенного моделирования зашечленной балки при ее нагревании (в – натуры, з – модели)

Углы $[\alpha]$ и $[\beta]$ безразмерны, а из оставшихся четырех величин можно образовать только две безразмерных комбинации, а именно симплексы

$$i_1/i_2 = idem, i_3/i_2 = idem.$$

Размерности P и i независимы, следовательно P не войдет ни в один из критериев подобия и ее масштаб может быть взят произвольно P_c . Масштаб величины жесткости тоже должен быть произвольным, но одинаковым для всех стержней, т. е.

$$(i_1)_c = (i_2)_c = (i_3)_c = i_c. \quad (1.26)$$

Отсюда следует, что модель (рис. 1, б) может быть изготовлена из различных материалов с различными значениями модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . Длины стержней не должны быть обязательно пропорциональны натурным длинам стержней. Важно лишь выполнить условие (1.26) и тогда усилия в стержнях определяются так:

$$(N_i)_m = (N_i)_m N_c = (N_i)_m P_c, \quad i = 1, 2, 3.$$

При этом необходимо помнить, что при моделировании нельзя выходить за пределы упругой стадии работы материала.

Пример 2. В качестве примера приближенного подобия рассмотрим задачу с зашечленным стержнем (рис. 1, в), а именно: определим нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при его равномерном нагреве на температуру $\Delta\theta$. При этом заведомо пренебрегаем малым весом стержня, т. е. рассматриваем приближенное моделирование.

Определяющими процесс величинами (из условия однозначности) будут: E – модуль упругости, $[E] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$; α – коэффициент линейного расширения $[\alpha] = \text{C}^{-1}$ и $\Delta\theta$ – температура $[\Delta\theta] = \theta$.

Из этих величин можно получить лишь один критерий подобия или безразмерную комбинацию определяющих величин $\Pi = \alpha\Delta\theta$, которому соответствует следующая связь между масштабами величин $\alpha_c\Delta\theta_c = 1$.

Отсюда вытекает, что для модели можно взять любой материал с любым значением E и не обязательно соблюдать геометрическое подобие (рис. 1, 2). Важно, чтобы модель имела постоянное по длине стержня поперечное сечение и кинематически тождественные опоры. Тогда напряжения будут моделироваться в масштабах

$$\sigma_c = E_c = \bar{E}_n / \bar{E}_m; \quad \sigma_n = \sigma_c \sigma_m.$$

При этом, очевидно, что погрешность будет зависеть от соотношения длин и весов стержней натуре и модели, т. е. от

$$l_c = l_n / l_m \quad \text{и} \quad \gamma_c = \gamma_n / \gamma_m,$$

где l — длина стержня; γ — удельный вес стержня.

Оценим эту погрешность. Для нижнего поперечного сечения стержня из точного решения задачи напряжение

$$\sigma'_n = \alpha_n E_n \Delta \theta_n + \gamma_n l_n / 2. \quad (1.27)$$

С другой стороны, $\sigma_n = \sigma_c \sigma_m$ и можно равенство (1.27) записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_c \sigma_m = \sigma_c (\alpha_n E_n \Delta \theta_n + 0,5 \gamma_n l_n) = \\ &= \sigma_c \left(\frac{\alpha_n E_n \Delta \theta_n}{\alpha_c E_c \Delta \theta_c} + \frac{\gamma_n l_n}{2 \gamma_c l_c} \right) = \frac{\alpha_n E_n \Delta \theta_n}{\alpha_c \Delta \theta_c} + \\ &+ \frac{E_c}{\gamma_c l_c} (\gamma_n l_n) = \alpha_n E_n \Delta \theta_n + \frac{E_c}{\gamma_c l_c} \left(\frac{\gamma_n l_n}{2} \right), \\ &\text{так как } \sigma_c = E_c \text{ и } \alpha_c \Delta \theta_c = 1. \end{aligned}$$

Погрешность напряжения

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_n &= \frac{\sigma_n - \sigma'_n}{\sigma'_n} = \frac{0,5 \gamma_n l_n \left(\frac{E_c}{\gamma_c l_c} - 1 \right)}{\alpha_n E_n \Delta \theta_n + \frac{\gamma_n l_n}{2}} = \\ &= \frac{0,5 \gamma_n l_n}{\alpha_n E_n \Delta \theta_n + 0,5 \gamma_n l_n} \left(\frac{E_c}{\gamma_c l_c} - 1 \right) = A(\Lambda - 1). \end{aligned}$$

Здесь A — характеризует степень пренебрежения весом; Λ — индикатор подобия, который для полного подобия, очевидно, равен 1. Отсюда следует, что чем больше Λ отличается от единицы, тем больше погрешность моделирования или масштабный эффект.

В качестве примера подобия при динамическом действии нагрузок рассмотрим общий прием установления условий подобия напряженного деформированного состояния при ударе.

Пусть очень жесткое тело A весом P , деформацией которого можно пренебречь, падая с некоторой высоты H , ударяет по неподвижно закрепленной конструкции (системе) B .

Перемещения $\delta_{д.н}$, напряжения $\sigma_{д.н}$ и реакция $R_{д.н}$ в ударяемом теле при этом определяются известными зависимостями:

$$\delta_{д.н} = K_{д.н} \delta_{ст}; \sigma_{д.н} = K_{д.н} \sigma_{ст}; R_{д.н} = K_{д.н} R_{ст},$$

где $K_{д.н}$ — динамический коэффициент; $\delta_{ст}$, $\sigma_{ст}$, $R_{ст}$ — соответственно статические перемещения, напряжения и реакция.

Размерность $[K_{д.н}] = 1$. Следовательно, для подобия надо рассмотреть подобие соответствующих статических величин, а динамический коэффициент для модели и натуре должен быть одинаков.

Коэффициент $K_{д.н}$ определяется, как известно, по различным формулам, например, по зависимостям:

$$K_{д.н} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}(1 + \beta Q/P)}}; \quad (1.28)$$

$$K_{д.н} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}(1 + \beta Q/P)}}, \quad (1.29)$$

где Q — вес ударяемого тела; β — безразмерный коэффициент, зависящий от статических деформаций и веса ударяемого тела; v — скорость падающего тела в момент удара.

Из равенства (1.28) следует, что для моделирования надо учитывать критерий подобия вида

$$H/\delta_{ст} = \text{idem или } H_c/(\delta_{ст})_c = \bar{H}_c/\bar{\delta}_{ст} = 1,$$

т.е. высота \bar{H}_c , с которой падает ударяющее тело, должна моделироваться в линейном масштабе l_c .

Из (1.29) вытекает другой критерий подобия

$$v^2/(g\delta_{ст}) = \text{idem или } v_c^2/[\bar{g}_c(\delta_{ст})_c] = 1.$$

Отсюда при $g_c = 1$ (что обычно имеет место)

$$v_c = \sqrt{(\delta_{ст})_c} = l_c^{1/2},$$

т.е. скорость падения должна быть пропорциональна квадратному корню из линейного масштаба l_c .

При соударении твердых тел в пределах упругости при моделировании необходимо, как уже отмечалось в специальных случаях моделирования, учесть критерий подобия Коши

$$\frac{n}{\sqrt{\varepsilon E/\rho}} = \text{idem или } \frac{v_c}{\sqrt{\varepsilon_c E_c/\rho_c}} = 1$$

при $E_c = \rho_c = \varepsilon_c = 1$, $v_c = l_c/\bar{t}_c = 1$,

если $l_c = \bar{t}_c$, т.е. отношение времен соударения пропорционально линейному масштабу.

В заключение отметим, что все рассмотренные примеры относятся к инерционным силам или равноускоренным процессам. В общем случае при нестационарном воздействии нагрузок вопрос о подобии будет значительно сложнее и потребует в каждом отдельном случае специального исследования.

1.4. Основные положения моделирования

Моделирование физических явлений основывается на теории подобия и является научным методом обобщения результатов исследования единичных явлений на другие подобные явления. Подобными физическими явлениями являются явления одного класса с подобными характерными величинами (прежде всего с подобными величинами условий однозначности), различающимися только масштабами этих величин.

Для подобных физических явлений необходимыми и достаточными условиями являются:

- 1) неизменность (инвариантность) системы основных уравнений при подобном преобразовании переменных;
- 2) подобие всех физических параметров системы основных уравнений;
- 3) геометрическое (пространственное) подобие;
- 4) стационарность процесса или подобие всех переменных в начальный момент процесса (для нестационарных процессов);
- 5) подобие граничных условий.

Все эти условия сводятся к равенству для соответственных точек пространства и соответственных моментов времени определенных безразмерных комплексов или критериев подобия. Причем, для подобия физических явлений достаточно неизменности только определяющих критериев подобия, т.е. критериев подобия, составленных из заданных величин условий однозначности (параметров системы). Остальные, неопределяющие критерии подобия, т.е. критерии подобия, составленные из искомых зависимых параметров (обобщенных координат системы), при этом будут автоматически совпадать.

Как известно из вывода π -теоремы, между этими категориями критериев подобия существует определенная причинная связь, математически выражающаяся в форме однозначной функциональной зависимости между ними. Эта связь и представляет собой интересующее нас конкретное, численное решение (интеграл) системы основных дифференциальных уравнений, которое в ряде случаев трудно получить непосредственным аналитическим путем. Она, в этом случае, обычно определяется экспериментально, т.е. путем изучения явления на модели с обязательным условием выполнения основных теорем подобия и дополнительных его положений, изложенных в предыдущем параграфе.

Причем, сам экспериментальный путь сводится к двум основным операциям.

1. Постановка эксперимента, осуществляемого таким образом, чтобы можно было измерить все величины, содержащиеся в критериях подобия.

2. Обработка экспериментальных данных, производимая в критериальной форме с представлением результатов в виде графиков для безразмерных параметров (критериев подобия). При этом подбираются приближенные экспериментальные формулы, наиболее удовле-

предельно описывающие полученные критериальные графики.

Однако этот путь — путь получения приближенных формул из эксперимента — имеет ряд существенных недостатков, а именно:

1) ограниченная возможность применения этого пути в целом, связанная с недостаточностью числа критериев (два, максимум три критерия), используемых для построения критериальных кривых и зависимостей,

2) ограниченность самих полученных приближенных зависимостей интервалами исследованного в эксперименте изменения определяющих критериев или параметров;

3) дискретность этих зависимостей, т.е. существование для одних и тех же критериев различных зависимостей для различных интервалов изменения определяющих параметров.

Существует также и приближенный аналитический путь определения этих критериальных зависимостей. В этом случае необходимо произвести некоторые предварительные исследования о роли отдельных критериев подобия в исследуемом явлении с целью выявления мало влияющих или не нарушающих подобия при их изменении в какой-то области значений, т.е. в области автомодельности явлений по отношению к этим критериям. Тогда эти критерии подобия могут быть исключены из критериальных уравнений, а упрощенные тем самым уравнения легко могут быть решены аналитически.

Можно в ряде случаев некоторые критерии подобия объединять, перемножая и деля их друг на друга, или прибавляя и отнимая от них безразмерные численные величины. Можно также умножать или делить их на безразмерные численные величины. Во всех этих случаях получаются новые критерии подобия, которые, как правило, сохраняют все свойства старых, но могут в какой-то степени упростить получение критериальных уравнений аналитически.

Определение самих критериев подобия можно производить двумя методами:

1) на основе анализа системы основных дифференциальных уравнений и условий однозначности;

2) на основе анализа размерностей определяющих независимых параметров.

Во втором случае возможен недоучет одного или нескольких факторов (параметров) явлений, в первом — больше гарантий в этом смысле.

Во втором случае определение критериев подобия производится, как указано выше, по правилам π -теоремы или метода размерности.

При этом отметим, что помимо основных единиц в системе СИ (длина — L , масса — M , время — T , ток — I и др.) можно выбрать любые другие величины x_1, x_2, \dots, x_n , если размерности этих величин являются независимыми функциями основных величин M, L, T, I и других в системе СИ, т.е. $[x_1] \neq [x_2]^a \dots [x_n]^b$ при любых значениях a, \dots, β и наоборот, если возможно однозначное обратное преобразование, т.е. размерности M, L, T, I и другие единственным образом можно выразить через $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$.

Рассмотрим, при каких условиях это выполняется. Для простоты рассмотрим явления в механике, где достаточно трех основных величин: массы — M , длины — L , времени — T .

Пусть размерности x_1, x_2, x_3 будут равны

$$[x_1] = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}; \quad [x_2] = M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}; \\ [x_3] = M^{\alpha_3} L^{\beta_3} T^{\gamma_3},$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — произвольные численные коэффициенты ($i = 1, 2, 3$). Прологарифмируем эти выражения:

$$\lg [x_1] = \alpha_1 \lg M + \beta_1 \lg L + \gamma_1 \lg T, \\ \lg [x_2] = \alpha_2 \lg M + \beta_2 \lg L + \gamma_2 \lg T, \\ \lg [x_3] = \alpha_3 \lg M + \beta_3 \lg L + \gamma_3 \lg T.$$

Эта система уравнений, как известно из курса алгебры, имеет единственное решение, если составленный из коэффициентов уравнения определитель отличен от нуля, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.30)$$

Действительно, если бы имелось равенство

$$[x_1] = [x_2]^\lambda [x_3]^\tau,$$

где λ, τ — произвольные численные значения, то логарифмируя его, получим

$$\lg [x_1] = \lambda \lg [x_2] + \tau \lg [x_3],$$

а значит будем иметь в первой строке определителя (1.30) линейные комбинации двух других

$$\alpha_1 = \lambda \alpha_2 + \tau \alpha_3; \quad \beta_1 = \lambda \beta_2 + \tau \beta_3; \quad \gamma_1 = \lambda \gamma_2 + \tau \gamma_3,$$

что приведет к равенству нулю определителя, противоречащего условию (1.30).

Таким образом, условием возможности выбора в качестве основных величин x_1, x_2, x_3 является условие (1.30). Это правило, очевидно, характерно и для большего числа основных единиц при условии, что число основных величин k не будет превышать числа основных единиц системы СИ ($k = 6$ в общем случае при рассмотрении задач, охватывающих механические, тепловые, электрические и световые явления). В этом случае порядок определителя (1.30) тоже будет равен k .

Заметим также, что число основных критериев подобия можно сократить, объединяя их путем сложения (вычитания), умножения (деления) и т. п., получая более сложные критерии, которые в ряде случаев могут упростить постановку модельных экспериментов.

В первом случае они получаются значительно легче и надежнее, так как при этом проще и надежнее устанавливаются определяющие явления параметры, да и сам процесс нахождения критериев подобия

сводится к анализу самой системы дифференциальных уравнений*. При этом различают два способа получения критериев подобия: способ подобных преобразований и способ интегральных аналогов.

Первый способ заключается в следующем:

выписывается система основных дифференциальных уравнений и условий однозначности;

все переменные, включая и параметры, заменяются подобными пропорциональными величинами, умножая их на соответствующие масштабы подобия;

полученные в результате этого масштабные комплексы всех членов уравнений, согласно однородности физических уравнений, приравниваются друг к другу, образуя систему определенных равенств;

делением одной части этих равенств на другую получают равные единице определенные безразмерные масштабные комплексы, представляющие собой индикаторы подобия искомым критериев подобия;

искомые критерии подобия будут иметь тот же вид, что и индикаторы подобия, если вместо масштабов подобия записать сами величины.

Второй способ более прост и поэтому более распространен. Он построен на правиле замещения, согласно которому в случае подобных явлений вместо производных любого порядка от характерных величин рассматривают отношения соответствующих величин, т.е. отношения их так называемых интегральных аналогов. Порядок применения способа следующий:

выписываются системы дифференциальных уравнений и уравнений однозначности;

одновременно все входящие компоненты векторов по осям координат заменяются их абсолютными значениями, координаты – характерным линейным размером системы, интеграл – подынтегральным выражением;

все знаки равенства сложения и вычитания заменяются знаком подобия или пропорциональности;

в результате получают комплексы, составленные уже из самих величин (а не масштабов), приравнивая которые друг к другу получают ряд равенств, из которых аналогично первому способу получают искомые безразмерные комплексы, являющиеся искомыми критериями подобия.

После того, как получены тем или иным путем критерии подобия, можно приступить к моделированию исследуемого физического явления. При этом, чтобы явление в модели было подобно явлению в натуре, необходимо и достаточно выполнить следующие основные требования:

- 1) модель должна быть геометрически подобна образцу (натуре);

* Отметим, что необходимость использования критериев подобия в этом случае связана с трудностью математического решения системы уравнений, получения интеграла решения.

2) явления в модели и натуре должны принадлежать к одной группе или классу явлений, т. е. описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями;

3) краевые условия (условия однозначности) в модели должны быть реализованы так, чтобы безразмерные краевые условия для модели и природы тождественно совпадали;

4) одноименные безразмерные параметры, входящие в дифференциальные уравнения, в модели и натуре должны быть соответственно равны.

Эти требования целиком относятся к физическому моделированию. Остановимся теперь более подробно на основных положениях физического моделирования, сущность которого сводится к решению задачи экспериментальным путем: постановкой и проведением модельного эксперимента, обработкой данных этого эксперимента и экстраполяцией их на изучаемое натурное явление. При этом надо различать модельный эксперимент от чисто физического. Эта разница заключается прежде всего в том, что в первом случае эксперимент проводится с моделью, как с заместителем исследуемого объекта в натуре, а во втором при эксперименте имеют дело с самим объектом исследования, подвергая его различным воздействиям с целью определения различных физико-механических характеристик этого объекта.

Любому физическому эксперименту должен предшествовать анализ уравнений исследуемого физического явления или анализ методом размерности параметров и обобщенных координат, характеризующих это явление, с целью установления безразмерных комбинаций из них, являющихся критериями подобия.

Далее записывают в общем виде зависимость между обобщенными координатами и параметрами в критериальной форме, т. е. в форме зависимости неопределяющих критериев (критериев, включающих обобщенные координаты или искомые величины) от определяющих критериев (критериев, составленных из параметров, характеризующих явления, или величин из условий однозначности).

Затем по изложенным выше условиям моделирования выбирают модель и вырабатывают необходимые для проведения эксперимента требования, включающие важные для практики диапазоны или интервалы изменения определяющих явление параметров, необходимую и достаточную точность задаваемых и получаемых величин. На основании этого разрабатывают методику эксперимента и выбирают измерительную аппаратуру. При этом необходимо всегда помнить, что в эксперименте обязательно должны измеряться все параметры, входящие во все критерии подобия, как исходные (задаваемые) величины, так и искомые, с заданной точностью.

После этого проводят экспериментальные работы. Опыты в одних и тех условиях повторяют минимум 2–3 раза для надежности от неизбежных случайных погрешностей измерения. По окончании экспериментов приступают к наиболее важному заключительному этапу экспериментального исследования – математической обработке эксперимен-

тальных данных и получению эмпирических экспериментальных зависимостей.

Таким образом, физическое моделирование условно можно разделить на четыре этапа:

1) анализ исследуемого физического явления, выбор основных параметров и обобщенных координат, определение необходимых и достаточных критериев подобия;

2) разработка требований к модели и схеме модельного эксперимента, измерительной аппаратуре;

3) подготовка, проведение модельного эксперимента;

4) обработка экспериментальных данных, их анализ и обобщение, экстраполяция полученных результатов на исследуемое явление.

Остановимся более подробно на последнем этапе моделирования, венчающем модельный эксперимент.

Для математической обработки экспериментальных данных следует конкретизировать форму уравнений связи между критериями подобия, найденные ранее методами теории подобия и размерности.

В качестве конкретной формы связи в первом приближении (при отсутствии каких-либо других соображений) принимается степенная зависимость, обладающая наибольшей простотой и гибкостью. Дальнейшая конкретизация этой связи проводится в процессе обработки экспериментальных данных.

Примерный порядок математической обработки экспериментальных данных сводится к следующему.

1. Пусть получены в результате анализа системы уравнений или методом размерностей определяющих явление параметров два критерия подобия Π_1 и Π_2 и один искомый критерий подобия Π_x , связанные некоторой функциональной зависимостью

$$\Pi_x = f(\Pi_1, \Pi_2).$$

В первом приближении принимаем функцию f в виде степенной, т.е.

$$\Pi_x = C \Pi_1^n \Pi_2^m, \quad (1.31)$$

где C — коэффициент пропорциональности.

2. Полученные экспериментальные данные представляем в критериальной форме, т.е. вычисляем по ним численные значения соответствующих критериев Π_x , Π_1 , Π_2 .

3. По полученным экспериментальным значениям этих критериев строим в логарифмической шкале графики зависимости Π_x от Π_1 при различных Π_2 (оси координат $\lg \Pi_x$, $\lg \Pi_1$) или Π_x от Π_2 при различных Π_1 (оси координат $\lg \Pi_x$, $\lg \Pi_2$).

4. Если между Π_x и Π_1 (или Π_x и Π_2) действительно существует степенная связь, то график зависимости в логарифмической шкале будет иметь вид прямой наклонной линии (рис. 2, а).

$$\begin{aligned} \lg \Pi_x &= \lg C_1 + n \lg \Pi_1; \\ C_1 &= C = \Pi_2^m. \end{aligned}$$

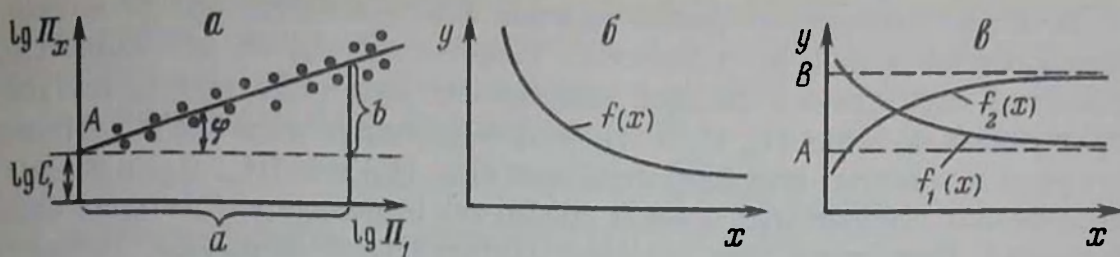


Рис. 2. Графики зависимости $\Pi_x = f(\Pi_1)$ в координатах с двойной логарифмической шкалой для аппроксимации ее степенной зависимостью (а), дробно-линейной функцией (б) и экспоненциальными зависимостями (в):

$y = f(x) = e^{-ax}$; $y = f_2(x) = B(1 - e^{-ax})$,
 где $y = \Pi_x$, $x = \Pi_1$

Значение $\lg C_1$ непосредственно снимается с графика на оси ординат в точке А пересечения прямой с этой осью. Значение показателя степени n определяется как тангенс угла наклона прямой с осью абсцисс, т. е.

$$n = \operatorname{tg} \varphi = b/a.$$

Можно также величину C_1 вычислять по экспериментальным данным Π_x и Π_1 как среднее значение целого ряда измерений Π_x и Π_1 , при $\Pi_2 = \text{const}$ по формуле

$$C_1 = C\Pi_2^m = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{p=N} \frac{\Pi_{x_p}}{\Pi_{1_p}}$$

где N – число измерений значений Π_x и Π_1 .

Заметим, что определение величин C_1 и n по приведенным выше формулам допускается, когда все экспериментальные точки очень плотно ложатся на прямую линию, что, вообще говоря, практически не имеет места. Обычно всегда наблюдается некоторый разброс экспериментальных точек и в этом случае трудно провести точно прямую линию.

Поэтому определение параметров зависимости (1.31) лучше проводить методом наименьших квадратов.

5. В дальнейшем проводится аналогичным образом построение серии таких графиков для различных постоянных значений критерия Π_2 . Полученные указанным выше методом различные значения величины C_1 для соответствующих значений Π_2

$$C_1 = C\Pi_2^m$$

используются для определения аналогичным способом постоянной C и показателя степени m [при параллельности графиков $\Pi_x = f(\Pi_1)$].

Отметим, что при этом может оказаться, что и показатель степени n будет меняться с изменением Π_2 (отсутствие параллельности графиков), т. е. $n = f(\Pi_2)$. Это значит, что принятая степенная форма зависимости (1.31) не подходит, и в этом случае имеет место в действительности более сложная связь между критериями Π_x , Π_1 и Π_2 .

6. Если экспериментальные данные при обработке их по методу, изложенному в п. 4, не ложатся на прямую линию, то это свидетельствует об отсутствии степенной зависимости вида (1.31) между взятыми критериями подобия Π_x , Π_1 и Π_2 . В этом случае целесообразно строить графики в обычных координатных осях (Π_x , Π_1) или (Π_x , Π_2) и по виду полученных усредненных кривых подбирать подходящую эмпирическую формулу. При этом, при подборе эмпирической формулы, рекомендуется руководствоваться следующими соображениями:

а) для зависимостей типа обратной пропорциональности (рис. 2, б)

$$y = f(x),$$

где $y = \bar{\Pi}_x$, $x = \Pi_1$ (или Π_2) выбирают зависимость в виде дробно-линейной функции, а именно:

$$\Pi_x = (A\Pi_1 + B)/(C\Pi_1 + D); \quad (1.32)$$

б) в случае резко меняющегося характера кривой (затухающей или возрастающей), стремящегося асимптотически к некоторой величине (сверху или снизу), как показано на рис. 2, в, следует попробовать экспоненциальные зависимости вида:

$$\text{для } y_1 = f_1(x) \quad \Pi_x = A + e^{-a\Pi_1^n}, \quad (1.33)$$

$$\text{для } y_2 = f_2(x) \quad \Pi_x = B(1 - e^{-a\Pi_1^n}), \quad (1.34)$$

где A и B — соответствующие асимптотические значения (f_1 и f_2 на рис. 2, в) искомого критерия $\Pi_x = y$; $x = \Pi_1$ — определяющий критерий подобия;

в) в случае, если кривая имеет колебательный характер с некоторым периодом T , то следует использовать тригонометрические зависимости вида

$$\Pi_x = A \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{T} \Pi_1 \right) \quad (1.35)$$

или ряд
$$\Pi_x = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} \Pi_1 + A_2 \cos \frac{4\pi}{T} \Pi_1 + \dots$$

$$\dots + B_1 \sin \frac{2\pi}{T} \Pi_1 + B_2 \sin \frac{4\pi}{T} \Pi_1 + \dots;$$

г) когда вид графика не дает оснований для выбора определенной формулы, следует применить формулу степенного многочлена вида:

$$\Pi_x = A + B\Pi_1 + C\Pi_1^2 + \dots + M\Pi_1^n.$$

При этом начинают с многочлена 2-й степени, проверяют зависимость и, в случае непригодности, повышают последовательно степень многочлена.

7. После подбора типа эмпирической зависимости определяют численные значения ее буквенных параметров A , B , C , D и показателей степени a , n , m по методу наименьших квадратов. При этом целесообразно придерживаться следующего определенного порядка расчета [5]:

а) если выбранная зависимость нелинейна относительно критериев, то ее сначала приводят к линейному виду путем соответствующего преобразования или разложения в ряд, а именно:

для дробно-линейной зависимости (1.32)

$$A\Pi_1 + B = (C\Pi_1 + D)\Pi_x;$$

для экспоненциальных зависимостей (1.33) и (1.34)

$$\ln [\ln (A/\Pi_x)] = m + n \ln \Pi_1;$$

$$\ln [\ln (\Pi_x/B) - 1] = m + n \ln \Pi_1,$$

где $m = \ln \alpha$;

для тригонометрической зависимости (1.35)

$$\Pi_x = D \cos (2\pi\Pi_1/T) + C \sin (2\pi\Pi_1/T),$$

$$D = A \cos \alpha, \quad C = A \sin \alpha;$$

б) подставляя в полученные линеаризованные зависимости все табличные экспериментальные значения критериев Π_x и Π_1 S -опытов получим для определения буквенных параметров A, B, C, D, \dots ряд линейных условных уравнений вида

$$f(\Pi_1, A, B, C, D, \dots) = \Pi_x, \quad (1.36)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, S$ (S — число опытов). Они могут быть представлены в виде зависимостей для нахождения буквенных параметров A, B, C, D, \dots в виде

$$a_i A + b_i B + c_i C + d_i D \dots = l_i,$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, \dots, l_i$ — коэффициенты условных уравнений, получаемые в результате подстановки в зависимость (1.36) табличных значений Π_1 и Π_x ; A, B, C, D — неизвестные буквенные параметры искомых эмпирических формул;

в) для определения неизвестных буквенных параметров составляются нормальные уравнения вида:

$$A \sum a_i^2 + B \sum a_i b_i + C \sum a_i c_i + \dots = \sum a_i l_i,$$

$$A \sum a_i b_i + B \sum b_i^2 + C \sum b_i c_i + \dots = \sum b_i l_i,$$

$$A \sum a_i c_i + B \sum b_i c_i + C \sum c_i^2 + \dots = \sum c_i l_i,$$

где $\sum a_i^2, \sum a_i b_i, \sum a_i l_i$ и т. д. — сумма соответствующих значений величин $a_i^2, a_i b_i, a_i l_i$ и т. д. для всех S опытов, т. е. суммирование производится от $i = 1$ до $i = S$.

Из этой системы уравнений и определяются искомые значения буквенных параметров A, B, C, D, α, n, m .

8. Правильность вычислений коэффициентов условных линейных уравнений желательно проверить перед вычислением самих коэффициентов следующим образом:

а) вычисляют суммы коэффициентов условных уравнений, т. е.

$$S_i = a_i + b_i + c_i + \dots + l_i; \quad (1.37)$$

б) проверяют равенства:

$$\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i b_i + \Sigma a_i c_i + \dots + \Sigma a_i l_i = \Sigma a_i S_i,$$

$$\Sigma a_i c_i + \Sigma b_i c_i + \Sigma c_i^2 + \dots + \Sigma c_i l_i = \Sigma c_i S_i. \quad (1.38)$$

При удовлетворении равенств (1.37) приступают к вычислению буквенных параметров системы (1.38).

9. После получения буквенных параметров, а, значит, и эмпирических формул, необходимо проверить их достоверность, для чего проводят следующие вычисления:

а) подставляя в полученные формулы табличные значения определяющих критериев Π_1 , получают расчетные значения искомых критериев Π_x ;

б) по этим данным вычисляют среднюю квадратическую погрешность на единицу веса

$$\delta = \sqrt{\Sigma (\Pi_x - \Pi_{xp})^2 / (S - k)},$$

или среднее абсолютное отклонение

$$\sigma = \Sigma (\Pi_x - \Pi_{xp}) / S,$$

где S — число табличных значений Π_x ; k — число параметров.

Если величины δ и σ находятся в пределах абсолютной величины допустимых ошибок Π_x , то формула считается удовлетворительной, т. е.

$$\Delta \Pi_x = \Pi_x - \Pi_{xp} \leq \sigma, \quad \delta \Pi_x = \Delta \Pi_x / \Pi_x \leq \delta.$$

2. Применение теории подобия и размерности к исследованию действия взрыва в различных средах

2.1. Критерии подобия в гидродинамике, при взрыве в воде и воздухе

2.1.1. Критерии подобия в гидродинамике

Для вывода критериев подобия в гидродинамике рассмотрим общий случай движения жидкости, описываемый уравнением Навье — Стокса, который в проекциях на координатные оси имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{v}) + \nu \Delta v_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ & = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{v}) + v \Delta v_z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$;

$$\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2};$$

$$i = x, y, z; X = g_x; Y = g_y; Z = g_z.$$

Из этих уравнений найдем критерии подобия двумя способами: способом подобных преобразований и способом интегральных аналогов.

В первом случае задаемся масштабами входящих в уравнения величин, записываем уравнения (2.1) для модели, выделив масштабные комплексы, и, приравнявая полученные масштабные комплексы друг к другу, находим индикаторы подобия. Прделаем это для первого уравнения системы (2.1), для остальных двух уравнений системы получатся аналогичные индикаторы подобия.

Введем следующие масштабы подобия:

$$\begin{aligned} l_n/l_m = l_c; t_n/t_m = t_c; v_n/v_m = v_c; p_n/p_m = p_c; \\ \rho_n/\rho_m = \rho_c; \nu_n/\nu_m = \nu_c; g_n/g_m = g_c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Преобразуем первое уравнение системы (2.1) в соответствии с (2.2)

$$\begin{aligned} & \frac{v_c}{l_c} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right)_m + \frac{v_c^2}{l_c} \left[\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_m + \dots + \left(v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_m \right] = \\ & = g_c X_m - \frac{p_c}{\rho_c l_c} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_m + \frac{v_c \nu_c}{l_c^2} \left[\frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) + v \Delta v_x \right]_m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приравняем масштабные комплексы всех членов уравнения (2.3)

$$v_c/t_c = v_c^2/l_c = g_c = p_c/(\rho_c l_c) = \nu_c \nu_c/l_c^2. \quad (2.4)$$

Поделив все члены равенства (2.4) на один из них, например на v_c^2/l_c , получим равные единице индикаторы подобия:

$$\begin{aligned} l_c/(v_c t_c) = 1; g_c l_c/v_c^2 = 1; \\ p_c/(\rho_c v_c^2) = 1; \nu_c/(v_c l_c) = 1, \end{aligned}$$

или, несколько видоизменив их:

$$\begin{aligned} v_c t_c/l_c = 1; v_c^2/(g_c l_c) = 1; \\ p_c/(\rho_c v_c^2); \nu_c l_c/\nu_c = 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда определяющие критерии подобия, учитывая (2.2), (2.5) будут:

$$v_n t_n/l_n = v_m t_m/l_m; \nu l/l = \text{idem} -$$

число гомохронности (H): (число Струхаля);

$$v_n^2/(g_n l_n) = v_m^2/(g_m l_m); v^2/(gl) = \text{idem} -$$

число Фруда (Fr);

$$\rho_n/(\rho_n v_n^2) = \rho_m/(\rho_m v_m^2); \rho/(\rho v^2) = \text{idem} -$$

число Эйлера (Э);

$$v_n l_n / \nu_n = v_m l_m / \nu_m; \nu / \nu = \text{idem} - \quad (2.6)$$

число Рейнольдса (Re).

Во втором случае, заменяя все величины членов уравнения их интегральными аналогами, сразу же записываем условия подобия комплексов, составленных из этих интегральных аналогов, т. е.

$$v/l \sim v^2/l \sim g \sim \rho/(\rho l) \sim \nu/l^2.$$

Приравнивая их друг к другу и деля на один из них, например на v^2/l , сразу же записываем в конечном виде те же самые критерии подобия (2.6).

Из полученных критериев подобия прежде всего следует, что движения сжимаемой вязкой жидкости в общем случае будут подобны, если в сходственных точках потоков и в соответствующие моменты времени будут равны значения чисел гомохронности, Эйлера, Фруда и Рейнольдса.

Известно, что закономерности течений жидкости и газа существенно зависят от того, с какими скоростями происходит движение частиц. В жидкости и, особенно, в газах существенное влияние имеет также и такая характеристика как скорость звука. Если скорости частиц превосходят скорость звука, то возникают скачки уплотнения и другие особенности. Поэтому в газовой динамике широко используется еще один критерий подобия — число Маха, симплекс вида

$$v/c = M,$$

где c — скорость звука.

Выясним теперь важность полученных критериев подобия и возможность одновременного их выполнения.

Возьмем, например, числа Фруда и Рейнольдса, имеющие важное прикладное значение, так как они обеспечивают подобие одновременно двух определяющих сил: объемных сил (силы тяжести) и силы вязкости. Из равенства этих критериев следует:

$$v_n l_n / \nu_n = v_m l_m / \nu_m, \text{ т. е. } v_{..} = v_{..} \nu_{..} l_{..} / \nu_{..}; \quad (2.7)$$

$$v_n^2 / (g_n l_n) = v_m^2 / (g_m l_m), \text{ т. е. } v_{..} = v_n \sqrt{l_{..} / l_c}, \quad (2.8)$$

здесь $a_{..} = a_n = g$.

Приравнивая правые части (2.7) и (2.8), имеем:

$$\nu_m / \nu_n = l_c^{-3/2}.$$

Обычно $l_c > 1$ и следовательно $\frac{v_n}{v_m} > 1$. Значит для одновременного выполнения критериев Fr и Re кинематическая вязкость жидкости модельного потока должна быть меньше кинематической вязкости жидкости натурального потока. Практически это выполнить не удастся, поэтому и нельзя одновременно удовлетворить оба критерия подобия Fr и Re .

Подобное положение часто встречается и при изучении других физических явлений. Поэтому во многих случаях моделирования встает вопрос о частичном выполнении условий подобия, т. е. о приближенном или неполном моделировании. При этом, естественно, возникает задача и о погрешности моделирования, называемая масштабным эффектом, которую надо учитывать при переносе (пересчете) данных модельных экспериментов на натуру. Учет этих погрешностей — довольно трудная задача и осуществляется дополнительным анализом параметров уравнения, а в ряде случаев — постановкой дополнительных специальных экспериментов.

Заметим, что иногда проводится моделирование заведомо неподобных явлений, когда некоторые критерии подобия Π_1 и Π_2 не одинаковы для модели и природы, но известен вид зависимости искомых безразмерных величин от них из каких-то других соображений. Тогда при моделировании выдерживается лишь постоянство тех критериев, зависимость от которых неизвестна.

В качестве примера такого моделирования рассмотрим моделирование вихревого движения жидкости в вертикальной трубе, вызванного вращением вблизи поверхности воды специальной крыльчатки.

Схематически рассматриваемое явление представлено на рис. 3.

Вращением крылатки с диаметром лопастей d придается жидкости (воде с частицами грунта — пульпе) вращательное движение в цилиндрической трубе диаметром \bar{D} , длиной H . В результате образуется вихревое движение — вихрь с вертикальной осью, совпадающей с осью крылатки и трубы. Это вихревое движение жидкости, как известно, приводит к образованию внутри вихря некоторого разрежения, которое увеличивается по мере приближения к источнику вихря (крыльчатке) и образует достаточно интенсивное течение жидкости вдоль оси трубы к источнику. Это движение жидкости увлекает за собой частицы грунта дна водоема и выносит их к крыльчатке. При этом в трубе, благодаря вращательно-поступательному движению жидкости, образуется пульпа.

Давление разрежения в данном сечении трубы (для случая несжимаемой и невязкой жидкости) [12]:

$$p_s = p_{os} - \rho \omega^2 D^2 / 4, \quad (2.9)$$

где $p_{os} = p_{atm} + \gamma H_s = p_{atm} + \rho g H_s$ — гидростатическое давление в данном сечении трубы s ; ρ — плотность пульпы; ω — угловая скорость вращения пульпы.

Из выражения (2.9) видно, что по мере приближения к источнику p_{os} уменьшается, а второй член правой части скорее всего растет за счет

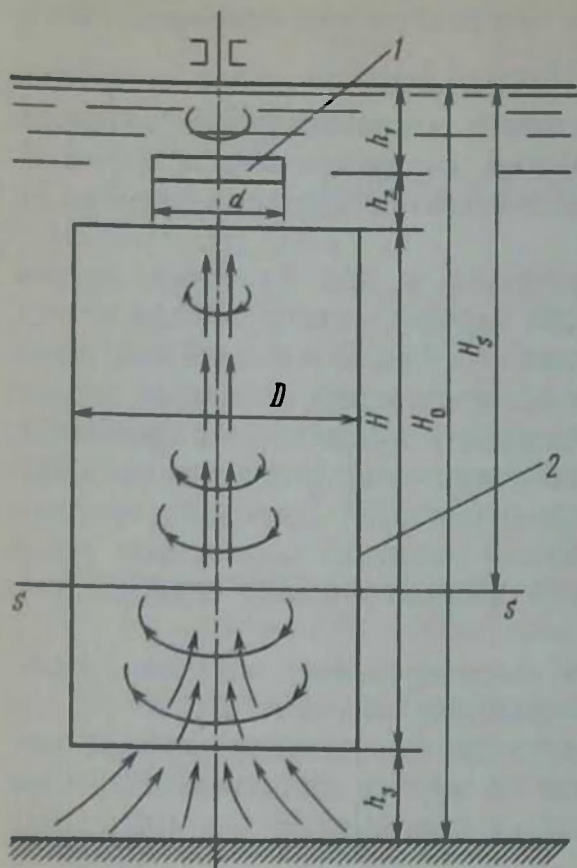


Рис. 3. Схема образования вихря и восходящего потока жидкости (пульпы) в трубе (2) при вращении крыльчатки (1)

некоторого роста ω с приближением к крылатке. Отсюда физически понятно направленное вертикально вверх движение жидкости по оси вихря (трубы) – восходящий поток жидкости. Это же уравнение указывает на основные параметры, определяющие рассматриваемое явление, а именно:

ρ – плотность пульпы, $[\rho] = ML^{-3}$; ω – угловая скорость движения жидкости, $[\omega] = T^{-1}$; D – диаметр рабочей трубы, $[D] = L$; $p_{атм}$ – атмосферное давление, $[p_{атм}] = \bar{M}L^{-1}T^{-2}$; g – ускорение свободного падения, $[g] = LT^{-2}$; H_s – переменная глубина погружения сечения, $[H_s] = L$, характеризуемая глубиной водоема H_0 , отстоянием конца трубы от дна h_3 , глубиной погружения крыльчатки h_1 и ее отстоянием от верхней кромки трубы h_2 , т.е. всеми линейными размерами устройства.

К линейным параметрам, очевидно, надо добавить также и диаметр крыльчатки d , определяющий заданную угловую скорость вращения жидкости ω .

Наконец, поскольку мы рассматриваем реальную жидкость, а именно пульпу – смесь морской воды с частицами грунта, то надо также учесть ее вязкость ν , $[\nu] = L^2T^{-1}$.

Как известно, вязкость весьма существенно влияет на движение жидкости, происходящее с большой скоростью вблизи стенок трубы и поверхностей тел.

Таким образом, объемный расход Q , $[Q] = L^3T^{-1}$, вертикального потока жидкости – пульпы будет определяться следующими параметрами, если рассматривать установившееся движение,

$$Q = f(\varphi, \omega, d, p_0, g, D, H_0, H_s, h_1, H, h_2, h_3, \nu) \quad (2.10)$$

Эту функциональную зависимость по π -теореме теории подобия и размерности можно заменить зависимостью между критериями подобия или безразмерными комплексами, составленными из параметров рассматриваемого процесса.

Взяв за основные параметры величины ρ , ω и D , легко можно получить искомые критерии подобия, пользуясь методом размерности. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= Q/(\omega D^3); \quad \Pi_2 = p_0/(\rho \omega^2 D^2); \quad \Pi_3 = g/(\omega^2 D); \quad \Pi_4 = \nu/(\omega D^2); \\ \Pi_5 &= H_0/D; \quad \Pi_6 = h_i/D; \quad \Pi_7 = H/D; \quad \Pi_8 = d/D; \quad \Pi_9 = \bar{H}_s/D. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сократим число критериев подобия (что допускается π -теоремой), объединив критерии Π_2 , Π_3 и Π_5 следующим образом:

$$\Pi'_2 = \Pi_2/(\Pi_3 \Pi_5) = p_0/(\rho g H_0) = p_0/(\gamma H_0).$$

Критерии подобия $\Pi_6 - \Pi_9$ являются симплексами (отношениями одноименных величин) линейных параметров и автоматически выполняются, если имеет место геометрическое подобие.

Таким образом, для моделирования рассматриваемого явления необходимо выполнение геометрического подобия и одинаковость на модели и натуре всего лишь двух определяющих критериев подобия

$$\Pi'_2 = p_0/(\gamma H_0) = p_0/(\gamma H_s) \quad \text{и} \quad \Pi_4 = \nu/(\omega D^2). \quad (2.12)$$

При этом функциональная зависимость (2.10) заменится следующей зависимостью между определяющими критериями подобия:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Phi(\Pi'_2, \Pi_4) \\ \text{или} \quad Q/(\omega D^3) &= \Phi(p_0/(\gamma H_0); \nu/(\omega D^2)). \end{aligned}$$

Заметим, что определяющие критерии подобия (2.11) могут быть получены непосредственно из уравнения Навье - Стокса для установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости в векторной форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v}_x \omega &= \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{r} \text{grad } \vec{v}^2 - \nu \text{rot } \vec{\omega}, \\ \vec{\omega}_x \vec{v} &= \underline{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{r} \text{grad } \vec{v}^2 - \nu \text{rot } \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Применяя к уравнению (2.13) метод интегральных аналогов, получим

$$\omega v \sim g \sim p/(\rho l) \sim v^2/l \sim \nu \omega/l, \quad (2.14)$$

где $l = r$ - характерный линейный размер.

Из уравнений (2.14) легко получить критерии подобия (2.13), поделив, например, все члены подобных равенств (2.14) на v^2/l , т. е.

$$\omega l/v = g l/v^2 = p/(\rho v^2) = \nu \omega/v^2 = 1. \quad (2.15)$$

Из этих равенств также легко получают определяющие критерии подобия Π'_2 и Π_4 , произведя следующие несложные преобразования.

Поделив третий член равенства (2.15) на второй и четвертый член на квадрат первого члена, получим:

$$\begin{aligned} [p/(\rho v^2)]/[gl/(v^2)] &= p/[l\rho/g] = p/(\gamma l) = \Pi_2'; \\ [v\omega/v^2]/[v^2/(\omega^2 l^2)] &= v/(\omega l^2) = \Pi_4. \end{aligned}$$

Расход вертикального движения жидкости по оси трубы будет определяться следующей критериальной зависимостью

$$Q = \omega D^3 \Phi(p_0/(\gamma H_0), v/(\omega D^2)).$$

Это означает, что моделирование рассматриваемого явления потребует геометрического подобия и равенства определяющих критериев подобия Π_2' и Π_4 .

Рассмотрим какие условия вытекают из отмеченных определяющих критериев подобия.

1. Из критерия подобия $\Pi_2' = p_0/(\gamma H_0)$ следует, что для модели и природы должно удовлетворяться условие

$$\begin{aligned} \frac{p_{0н}}{\gamma_n H_{0н}} &= \frac{p_{0м}}{\gamma_m H_{0м}} \\ \text{или } p_{0м} &= p_{0н} \frac{\gamma_m}{\gamma_n} \frac{H_{0м}}{H_{0н}} = p_{0н} \frac{\gamma_m}{\gamma_n} \frac{1}{l_c} \end{aligned} \quad (2.16)$$

поскольку в силу геометрического подобия

$$\begin{aligned} H_n/H_m &= \bar{D}_n/\bar{D}_m = h_{i_n}/h_{i_m} = \\ &= d_n/d_m = l_n/l_m = l_c, \end{aligned}$$

где l_c – масштаб геометрического подобия, n и m – индексы соответственно для природы и модели.

Условие (2.16) можно выполнить по-разному.

1. Если взять одну и ту же жидкость в природе и модели, т.е.

$$\gamma_n = \gamma_m,$$

то будем иметь $p_{0м} = p_{0н}/l_c$.

Это значит, что в этом случае атмосферное давление над водой надо снизить пропорционально масштабу геометрического подобия. Так, если $l_c = 10^3$, то $p_{0м} = 10^{-3} p_{0н}$, т.е. необходимо создать весьма большое разрежение (вакуум).

Если не менять атмосферное давление, т.е. $p_{0н} = p_{0м}$, тогда следует выбрать тяжелую жидкость, т.е.

$$\gamma_m = \gamma_n l_c \quad (2.17)$$

или, что то же, удельный вес жидкости в модели должен быть больше удельного веса жидкости в природе в l_c раз.

Последнее равенство (2.17) можно записать так

$$\gamma = \rho g \text{ и тогда } \rho_m g_m = \rho_n g_n l_c. \quad (2.18)$$

Если взять опять же одну и ту же жидкость, т.е. $\rho_n = \rho_m$, тогда условие (2.18) запишется в виде:

$$g_m = g_n l_c,$$

которое является основным условием центробежного моделирования. В этом случае модель должна быть размещена на центрифуге и раскручена так, чтобы центробежное ускорение было бы больше g_n в l_c раз.

Наконец, возможен вариант компромиссного решения, вытекающий непосредственно из условия (2.16), а именно:

$$\frac{\rho_{0m}}{\gamma_m} = \frac{\rho_{0n} l}{\gamma_n l_c}, \quad (2.19)$$

т.е. одновременно создавать разрежение и использовать более тяжелую жидкость, так чтобы удовлетворить условию (2.19). Это обычно используется когда l_c велико.

2. Из критерия подобия $\bar{\Pi}_4 = v/(\omega \bar{D}^2)$ следует, что для модели и природы должно выполняться условие

$$v_m/(\omega_m D_m^2) = v_n/(\omega_n D_n^2) \text{ или } v_m = v_n \omega_m / (\omega_n l_c^2). \quad (2.20)$$

Это условие весьма жесткое и трудно выполнимое. Если даже предположить, что $\omega_m/\omega_n = 1/\omega_c = t_c = l_c$, где ω_c и t_c — соответственно масштабы подобия ω и времени t , то это влечет к одновременному выполнению условия (2.11) (см. критерий Π_3) и к несколько более мягкому условию:

$$v_m = v_n/l_c.$$

Из этого условия следует, что надо подобрать тяжелую жидкость с $\gamma_m = \gamma_n l_c$, имеющую весьма малую вязкость, меньшую чем в природе на

$$v_m = v_n/l_c.$$

Это условие также является трудно выполнимым. Следовательно, точное моделирование рассматриваемого явления практически невозможно. В этом случае можно говорить лишь о приближенном моделировании. Для этого необходимо произвести некоторые предварительные исследования зависимости величины безразмерного расхода жидкости $Q/(\omega D^3)$ от определяющих критериев подобия Π_2 и Π_4 . Наиболее трудно выполнимым критерием является критерий подобия Π_4 . Поэтому, прежде всего, необходимо выяснить его влияние на рассматриваемый расход жидкости, т.е. исследовать зависимость

$$\frac{Q}{\omega D^3} \approx f_1 \left(\Pi_4 = \frac{v}{\omega D^2} \right). \quad (2.21)$$

Исследование зависимости (2.21) можно произвести на модели с использованием нескольких (порядка 5–6 видов жидкости, различающихся друг от друга коэффициентами кинематической вязкости). Например: нитробензол ($v = 0,0017$), ацетон ($v = 0,00408$), метиловый спирт ($v = 0,00742$), вода ($v = 0,0101$), льняное масло ($v = 0,038$), оливковое масло ($v = 0,094$) и глицерин ($v = 9,25$).

Необходимо произвести опыты при различных числах оборотов крылатки (различных ω), колеблющихся в одну и другую сторону от предполагаемого номинального значения

$$\omega_{\text{ном}_M} = \omega_{\text{ном}_H} l_c,$$

где $\omega_{\text{ном}_M}$ — номинальное значение ω в натуральных условиях; l_c — предполагаемый масштаб геометрического подобия.

Если при этом окажется, что значение $Q/(\omega D^3)$ при каждом постоянном ω беспорядочно отличаются друг от друга при изменении вида жидкости, так что максимальная относительная амплитуда ее изменения не превышает 15–20% при всех ω , как параметрах, то можно пренебречь влиянием вязкости на рассматриваемое явление и учитывать лишь первый критерий Π_2 .

Возможно, что такое положение будет иметь место лишь при определенном диапазоне изменения ω (по-видимому, при ω меньших $\omega_{\text{ном}}$). Следовательно, приближенное моделирование можно осуществить только в этом диапазоне изменения ω .

Если будет иметь место монотонный рост (падение) относительного расхода $Q/(\omega D^3)$ с изменением вязкости жидкости, то, следовательно, имеет место влияние вязкости и тогда надо подбирать жидкость из условия (2.20).

Что касается критерия подобия Π_2 , то влияние его не вызывает сомнения и поэтому не требует специального исследования. Выбор способа его удовлетворения, очевидно, будет зависеть от результатов исследования влияния критерия подобия Π_4 , рассмотренного выше, и технических возможностей лаборатории.

Следует отметить, что создание разрежения атмосферы над жидкостью будет способствовать не только выполнению критерия Π_2 , но и одновременно снижает значение кинематической вязкости взятой жидкости, так как вязкость жидкости, как известно, с уменьшением давления падает. В этой связи, при существенном влиянии критерия Π_4 (влияние вязкости) и невозможности подбора соответствующей жидкости, способ создания разреженной атмосферы может оказаться весьма полезным, а может быть и единственно возможным, для удовлетворения обоих определяющих критериев подобия при моделировании рассматриваемого явления.

2.1.2. Критерии подобия в теории взрыва в воде и воздухе

В теории взрыва в воде и воздухе [5], как известно, используются уравнения газовой динамики, в которых не учитываются силы вязкости и массовые силы (силы веса). В этом случае система уравнений Навье-Стокса (2.1) существенно упростится за счет правых частей уравнений, в которых останется лишь один член с давлением (второй член правой части). В результате из этих уравнений можно получить лишь два критерия подобия: число гомохронности и число Эйлера, связывающие кинематические и динамические параметры движения.

Из первого критерия подобия (числа гомохронности) вытекает [см. формулы (2.6)]:

$$v_H t_H / l_H = v_M t_M / l_M \rightarrow v_M = v_H t_c / l_c,$$

это означает, что скорости в подобных потоках будут одинаковы, если имеет место

$$t_c/l_c = 1 \text{ или } t_c = l_c, \quad (2.22)$$

т.е. если одинаковы масштабы линейных размеров и времени.

Из второго критерия (числа Эйлера) вытекает:

$$p_n / (\rho_n v_n^2) = p_m / (\rho_m v_m^2) \rightarrow p_m = p_n v_m^2 \rho_m / (v_n^2 \rho_n).$$

При соблюдении условия (2.22) и $v_m = v_n$ имеем:

$$p_n = p_m \rho_m / \rho_n.$$

Если взрыв происходит в одной и той же среде, т.е. $\rho_n = \rho_m$, то тогда имеет место также и равенство давлений $p_n = p_m$.

Таким образом, давление и скорость движения частиц жидкости (газа) при взрывах в одной и той же среде будут одинаковы в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени, если масштабы времени и линейных размеров одинаковы.

С другой стороны, из условий динамической совместимости, связывающих между собой параметры невозмущенной и возмущенной жидкости (газа) и общих положений теории детонации известно, что начальные значения давления и скорости частиц на фронте ударной волны определяются только видом взрывчатого вещества (ВВ) и свойствами окружающей среды.

Отсюда следует, что при взрывах зарядов одних и тех же ВВ в одной и той же среде давление и скорость частиц жидкости (газа) при соблюдении одинаковости масштабов времени и линейных размеров [условий (2.22)] в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени будут одинаковы.

В теории взрыва за характерный линейный размер принимается размер заряда, обычно радиус сферического или цилиндрического зарядов. Закон подобия при взрывах в воде и в воздухе формулируют так: параметры среды (давление и скорость частиц) при движении, вызванном взрывом одного и того же ВВ, не изменятся, если масштабы длины и времени, которыми эти параметры измеряются, изменятся в то же число раз, что и размеры заряда.

Так, давление в ударной волне, замеренное на расстоянии r от заряда сферической формы радиуса R_{03} , должно быть равно давлению в ударной волне на расстоянии $r' = \lambda' r$ от заряда с радиусом $R'_{03} = \lambda' R_{03}$.

При этом эпюры ударной волны (давление — время) будут иметь вид, приведенный на рис.4.

Здесь моменты времени t_1, t_2, t_3 и t_4 взяты через равные промежутки времени, т.е. $t_2 = 2t_1; t_3 = 3t_1; t_4 = 4t_1$, а $\lambda = (\lambda' - 1)\Delta t$, где $\Delta t = t_1$.

Из приведенного примера ясно, что сходственными точками пространства в теории взрыва являются точки, расстояния которых от зарядов находятся в равном отношении к соответствующим радиусам зарядов (r/R_{03}), а сходственными моментами времени, моменты времени, отнесенные к соответствующим радиусам заряда (t/R_{03}). В ряде случаев вместо отношения t/R_{03} , берут безразмерное отношение

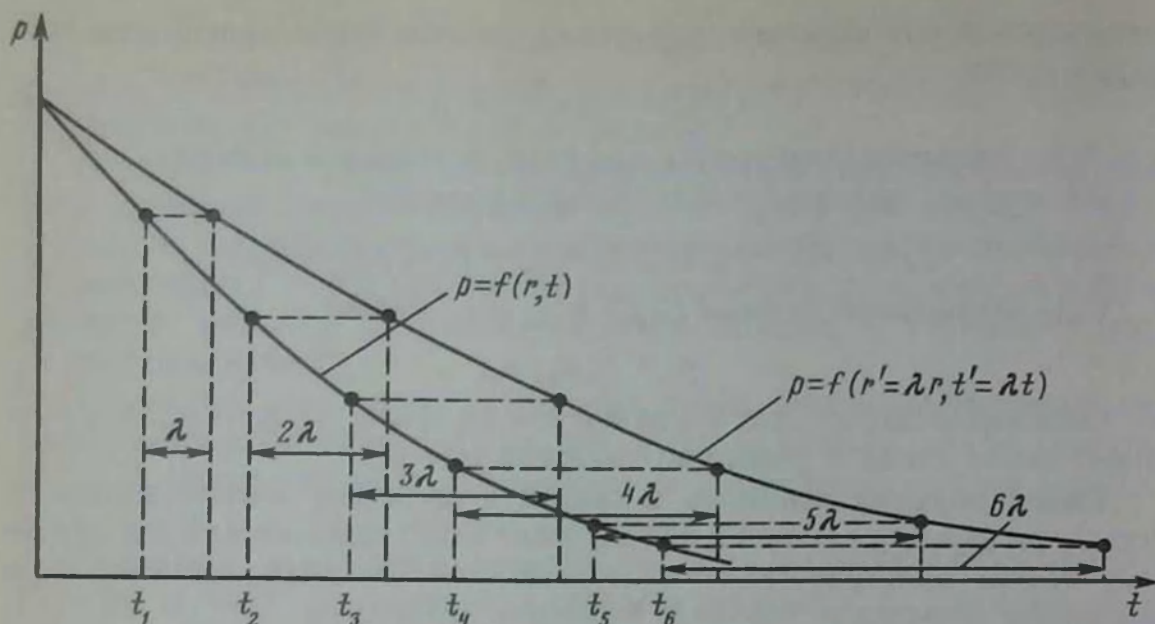


Рис. 4. Изменение давления во времени ударной волны на расстояниях r и $r' = \lambda r$ при взрыве зарядов радиусом соответственно R_{0_2} и $R_{0_1} = \lambda R_{0_2}$.

$$\bar{r} = t a_0 / R_{0_2},$$

где a_0 — скорость звука в жидкости или газе.

В ряде случаев для выражения сходственных точек пространства используют вместо радиуса заряда корень кубический из массы сферического или сосредоточенного заряда $\sqrt[3]{G}$ или квадратный корень из массы $1m$ удлинённого (цилиндрического) заряда \sqrt{q} , так как для одного и того же ВВ имеет место прямая пропорциональность между радиусом и массой заряда, а именно:

$$\text{для сферического заряда } \bar{R}_{0_2} = C_1 \sqrt[3]{G}; C_1 = \sqrt[3]{3/(4\pi\gamma_{\text{ВВ}})},$$

$$\text{для удлинённого заряда } \bar{R}_{0_2} = C_2 \sqrt{q}; C_2 = \sqrt{1/(\pi\gamma_{\text{ВВ}})}.$$

В этом случае вместо относительных расстояний $\bar{r} = r/R_{0_2}$ и относительных времен t/R_{0_2} , вводят так называемые приведенные расстояния $r/\sqrt[3]{G}$ или r/\sqrt{q} и приведенное время $t/\sqrt[3]{G}$ или t/\sqrt{q} .

Формулировка закона подобия несколько усложнится, если сопоставлять гидродинамические поля жидкости, возникающие при взрывах различных ВВ. В этом случае следует в основу подобия положить энергетический принцип, справедливый, начиная с некоторых определенных расстояний от заряда, где будет уже окончен, в основном, интенсивный процесс рассеивания энергии взрыва. Очевидно, в непосредственной близости от заряда подобия в полях, в таких случаях, наблюдаться не будет ввиду различия краевых условий.

Согласно этому принципу сходственные точки пространства и сходственные моменты времени будут определяться из соотношений:

$$r_1/\sqrt[3]{E_1} = r_2/\sqrt[3]{E_2}; t_1/\sqrt[3]{E_1} = t_2/\sqrt[3]{E_2}, \quad (2.23)$$

где \bar{E}_1 и \bar{E}_2 — энергия взрыва двух различных ВВ.

Энергия взрыва промьппленных ВВ пропорциональна массе заряда G и теплоте взрывчатого превращения \underline{Q} , т.е. $E = GQ$. Определяя массу заряда через его плотность ρ и объем V , энергия сферического и сосредоточенного зарядов запишется в виде

$$E = \rho_{\text{ВВ}} VQ = 4\pi R_{03}^3 \rho_{\text{ВВ}} Q/3. \quad (2.24)$$

Соответствующее выражение для энергии единицы длины удлиненного и цилиндрического зарядов будет

$$E_0 = \rho_{\text{ВВ}} V_0 Q = \pi R_{03}^2 \rho_{\text{ВВ}} Q. \quad (2.25)$$

При этом радиусы зарядов определяются из выражений (2.24) и (2.25) соответственно для зарядов сферической и цилиндрической форм, а для сосредоточенных зарядов произвольной формы, приведенных к сферическому, выражением

$$R_{03} = \sqrt[3]{3V/(4\pi)},$$

где R_{03} — будет определяться в м, если масса сферического заряда G взята в кг, удельная масса цилиндрического заряда q — в кг/м и объем сосредоточенного заряда V — в м³.

Соотношения (2.23) в соответствии с формулами (2.24) и (2.25) можно записать в виде:

для зарядов сферической формы

$$\begin{aligned} r_1/(R_{03_1} \sqrt[3]{\rho_{\text{ВВ}_1} Q_1}) &= r_2/(R_{03_2} \sqrt[3]{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2}); \\ t_1/(R_{03_1} \sqrt[3]{\rho_{\text{ВВ}_1} Q_1}) &= t_2/(R_{03_2} \sqrt[3]{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2}); \end{aligned} \quad (2.26)$$

для цилиндрических зарядов

$$\begin{aligned} r_1/(R_{03_1} \sqrt{\rho_{\text{ВВ}_1} Q_1}) &= r_2/R_{03_2} \sqrt{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2}; \\ t_1/(R_{03_1} \sqrt{Q_1 \rho_{\text{ВВ}_1}}) &= t_2/(R_{03_2} \sqrt{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Эти выражения можно записать в более простом виде, если ввести понятие о радиусе заряда, эквивалентном по энергии взрыва, а именно

$$r_1/R_{03_1} = r_2/R_{03_2}^*; t_1/R_{03_1} = t_2/R_{03_2}^*,$$

где $R_{03_2}^*$ — радиус заряда второго ВВ, эквивалентный по энергии взрыва заряду первого ВВ.

Эквивалентный радиус заряда в соответствии с формулами (2.26) и (2.27) равен:

для сферического заряда

$$R_{0_{3_2}}^* = R_{0_{3_2}} \sqrt[3]{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2 / (\rho_{\text{ВВ}_1} Q_1)}; \quad (2.28)$$

для цилиндрического заряда

$$R_{0_{3_2}}^* = R_{0_{3_2}} \sqrt{\rho_{\text{ВВ}_2} Q_2 / (\rho_{\text{ВВ}_1} Q_1)}. \quad (2.29)$$

В ряде случаев приведенные расстояния и приведенные времена определяются по эквивалентной энергии взрыва массе заряда G^* или q^* . По аналогии с предыдущими рассуждениями, исходя из выражения (2.23) будем иметь

$$r_1 / \sqrt[3]{G_1 Q_1} = r_2 / \sqrt[3]{G_2 Q_2} \text{ или } r_1 / \sqrt[3]{G_1} = r_2 / \sqrt[3]{G_2^*},$$

$$r_1 / \sqrt{Q_1 q_1} = r_2 / \sqrt{Q_2 q_2} \text{ или } r_1 / \sqrt{q_1} = r_2 / \sqrt{q_2^*}.$$

Отсюда, масса второго заряда, эквивалентная по энергии взрыва массе первого заряда, будет соответственно равна:

$$G_2^* = G_2 Q_2 / Q_1 \text{ или } q_2^* = q_2 Q_2 / Q_1.$$

В теории взрыва в качестве эталонного ВВ берут тротил с плотностью 1600 кг/м^3 и теплотой взрывчатого превращения $Q = 4440 \text{ кДж/кг}$. В этом случае говорят о тротиловой массе заряда, понимая под ней массу заряда тротила, взрыв которого даст такой же эффект, как и взрыв сравниваемого с ним заряда. Так, говорят о тротиловой массе по ударной волне (что и имеется в виду в нашем случае), а также по сейсмическому эффекту или другим эффектам взрыва.

Радиус заряда сферической формы (а также и сосредоточенного заряда) эталонного тротила вычисляется по приближенной формуле

$$R_{0_3} = 0,053 \sqrt[3]{G}, \quad (2.30)$$

где G — масса заряда, кг.

Радиус заряда любого другого ВВ, эквивалентный по энергии взрыва заряду тротила, можно определить по формулам (2.28) и (2.29), в которых $\rho_{\text{ВВ}_1} = 1600 \text{ кг/м}^3$ и $Q_1 = 4440 \text{ кДж/кг}$. Но можно его определить для сосредоточенного и сферического зарядов и по более простой зависимости, вводя в формулу (2.30) массу заряда, эквивалентную тротилу, т.е. по зависимости

$$R_{0_3}^* = 0,053 \sqrt[3]{G_{\text{ВВ}}^*} : G_{\text{ВВ}}^* = G_{\text{ВВ}} Q_{\text{ВВ}} / 4440. \quad (2.31)$$

Таким образом, введя понятие о радиусе заряда, эквивалентном по энергии взрыва, вновь возвращаемся к сформулированному раньше закону геометрического подобия для одинакового взрывчатого вещества, распространяя его на все виды взрывчатых веществ, т.е. к так называемому *расширенному закону геометрического подобия*. Его можно сформулировать так: параметры среды (давление, плотность и скорость

частиц) при движении, вызванном взрывом ВВ не изменятся, если масштабы длины и времени, которыми эти параметры измеряются, изменятся в то же число раз, что и радиусы зарядов, эквивалентных по энергии взрыва.

В соответствии с законом расширенного геометрического подобия формула для давления при взрыве в безграничной жидкости может быть записана в виде

$$p = C_1 f(r/R_{03}^*, t/R_{03}^*) \text{ или } p = C_2 f(r/R_{03}^*; t a_0/R_{03}^*).$$

Очевидно, для максимального давления на фронте ударной волны справедливы равенства:

$$p_{\max} = C_3 f(r/R_{03}^*); \quad p_{\max} = C_4 f(r/\sqrt[3]{G^*}). \quad (2.32)$$

В этих формулах C_1, C_2, C_3, C_4 — некоторые размерные постоянные.

Для импульса ударной волны, являющейся весьма важной характеристикой, определяющей в ряде случаев силовое воздействие ударной волны на преграду и конструкцию, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\tau} p dt = C_5 \int_0^{\tau} f(r/R_{03}^*; a_0 t/R_{03}^*) dt = \\ &= C_5 R_{03}^* / a_0 \int_0^{\tau} f(r/R_{03}^*; a_0 t/R_{03}^*) d(a_0 t/R_{03}^*), \end{aligned}$$

где C_5 — некоторая размерная постоянная; a_0 — скорость звука в жидкости.

В этом выражении под интегралом всюду стоят безразмерные параметры. Следовательно, на одинаковом относительном расстоянии величины импульсов ударной волны будут пропорциональны радиусам зарядов.

Заметим, что для скорости частиц жидкости на фронте ударной волны можно записать аналогичные давлению выражения, вытекающие из первого условия динамической совместности:

$$p_{\max} = \rho_0 a_0 v_{\max},$$

где ρ_0, a_0 — соответственно плотность невозмущенной среды и скорость звука в ней; v_{\max} — скорость части среды на фронте ударной волны.

Отметим, что выведенный закон подобия, часто называемый расширенным законом геометрического подобия, в сущности является законом энергетического подобия и справедлив практически во всей области пространства, за исключением области, непосредственно примыкающей к заряду, так как там, ввиду различия краевых условий для различных ВВ, подобия в полях наблюдаться не будет.

Для ближней зоны взрыва возможен более общий подход к выбору системы безразмерных параметров, характеризующих сильный взрыв, как взрыв, имеющий параметры на фронте ударной волны (в основном p и θ), существенно большие, чем в невозмущенной среде. Этот подход разработан на основании теории размерности акад. Л.И. Седовым для воздушных ударных волн.

2.2. Задача о сильном взрыве (задача Л.И. Седова)

Пусть в некоторый момент $t = 0$ в покоящемся газе в некоторой точке (в центре симметрии) происходит взрыв, т.е. мгновенно выделяется энергия E_0 . Массой и размерами вещества ВВ пренебрегаем, что характерно для атомного взрыва (безмассового взрыва) или электро-разряда.

Таким образом, полагая, что основным параметром, характеризующим заряд, является энергия взрыва E_0 , а свойства среды достаточно полно определяются начальными плотностью ρ_0 , давлением p_0 и коэффициентом адиабатического расширения k , Л. И. Седов остановился на следующих определяющих параметрах для оценки адиабатического движения газа: $E_0, \rho_0, p_0, k, r, t$, где r — расстояние от центра взрыва; t — время с момента взрыва.

Размерности указанных величин будут:

$$[E_0] = M L^{\nu-1} T^2, [\rho_0] = M L^{-3}, \\ [p_0] = M L^{-1} T^2, [k] = 1, [r] = L, [t] = T.$$

Здесь $\nu = 1; 2$ и 3 соответственно для движения с плоской, цилиндрической и сферической симметрий. При этом, при записи размерности энергии для движения с цилиндрической симметрией, величину энергии отнесли к единице длины, а для движения с плоской симметрией — к единице поверхности.

Из пяти размерных величин E_0, ρ_0, p_0, r и t три величины, например ρ_0, r, t , имеют независимые размерности. Согласно π = теореме можно составить лишь $(5 - 3) = 2$ безразмерные комбинации из основных величин и оставшихся E_0 и p_0 . Такими комбинациями будут

$$\Pi_1 = E_0 t^2 / (\rho_0 r^{\nu+2}), \Pi_2 = p_0 t^2 / (\rho_0 r^2).$$

Для полного подобия к ним надо добавить и третий критерий подобия, равный безразмерному коэффициенту адиабатического расширения k , т.е. $\Pi_3 = k$.

Эти критерии подобия полностью определяют процесс распространения фронта ударной волны точечного взрыва.

В критерии Π_1 и Π_2 входят две переменные величины r и t . π = теорема допускает, вообще говоря, неоднозначный выбор определяющих критериев подобия. Можно, например, потребовать, чтобы во втором критерии отсутствовала зависимость от r , т.е. чтобы он зависел только от переменной t .

Это легко сделать, если представить Π_2 в виде $\Pi_2' = t / \rho_0^x E_0^y p_0^z$ и тогда получим $\Pi_2' = t \rho_0^{1/2+1/x} / (E_0^{1/x} \rho_0^{1/2})$.

В таком виде и получен второй критерий Л. И. Седовым.

Таким образом, параметры среды на фронте распространяющейся ударной волны при сильном взрыве по Л. И. Седову определялся тремя критериями подобия

$$\Pi_1 = k, \Pi_2 = \lambda = E_0 t^2 / (\rho_0 r^{2+\nu}),$$

$$П_3 = \tau = t p_n^{1/2 + 1/\gamma} / (E_n^{1/2} \rho_0^{1/2}). \quad (2.33)$$

Поскольку изучается сильный взрыв, то в ближайшей зоне взрыва давление на фронте существенно (на три — четыре порядка и более) выше начального. Следовательно, начальным давлением газа в этом случае и, соответственно, переменной τ , можно пренебречь. Тогда движение будет определяться лишь одним безразмерным параметром λ . Из структуры переменной λ следует, что процесс в этом случае может рассматриваться как автомодельный (моделируемый автоматически), так как зависит только от простых переменных: расстояния r и времени t при известных E_0 и ρ_0 .

Рассмотрим гидродинамические параметры на фронте ударной волны сильного взрыва — давление p_ϕ , плотность ρ_ϕ и скорость частиц v_ϕ . Как известно, величины этих параметров на фронте ударной волны терпят разрыв, скачком возрастая от p_0, ρ_0, v_0 до $p_\phi, \rho_\phi, v_\phi$. Связь между ними определяется так называемыми условиями динамической совместности, являющимися ни чем иным, как математической формой записи на поверхности разрыва общих законов сохранения количества движения, неразрывности и энергии Н. Е. Кочиним эти условия получены в виде:

$$\begin{aligned} [\rho \theta] &= 0, \\ p \theta [\vec{v}] &= [p] \vec{n}, \\ \rho \theta [v^2/2 + u/A] &= [p v_n], \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $[p] = p_- - p_+ = p_\phi - p_0$; $\theta = N - v$ — скорость перемещения фронта ударной волны; N — скорость распространения фронта ударной волны; v — скорость перемещения частиц среды; A — термический эквивалент работы; u — внутренняя энергия.

Эти условия динамической совместности (2.34) для идеального газа после ряда преобразований могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_0} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_\phi}{p_0} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_\phi}{p_0}},$$

$$N = a_0 \sqrt{\frac{k+1}{2k} \frac{p_\phi}{p_0} + \frac{k-1}{2k}},$$

$$v_{\Phi} = \frac{a_0 \left(\frac{\rho_{\Phi}}{\rho_0} - 1 \right)}{k \sqrt{\frac{k+1}{2k} \frac{\rho_{\Phi}}{\rho_0} + \frac{k-1}{2k}}}, \quad (2.35)$$

где a_0 — скорость звука в невозмущенной среде.

Считая $\rho_{\Phi}/\rho_0 \gg 1$ из (2.35) получим:

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi} &= \frac{k+1}{k-1} \rho_0, \quad p_{\Phi} = \frac{2}{k+1} \rho_0 N^2, \\ v_{\Phi} &= N \frac{\frac{k+1}{k-1} \rho_0 - \rho_0}{\frac{k+1}{k-1} \rho_0} = \frac{2}{k+1} N. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из постоянства величины плотности на фронте волны [(см. первое равенство) из (2.36)] следует, что и параметр λ по (2.33) должен сохранять постоянное значение $\lambda = \lambda^*$. При этом закон движения ударной волны легко устанавливается непосредственно из критерия Π_2 по (2.33), положив в нем вместо r, t, ρ_0 соответственно $r_{\Phi}, t_{\Phi}, \rho_{\Phi}$, а именно:

$$r_{\Phi} = \left(\frac{E_0}{\rho_{\Phi} \lambda^*} \right)^{\frac{1}{2+v}} t_{\Phi}^{\frac{2}{2+v}}.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$\frac{dr_{\Phi}}{dt} = N = \frac{2}{2+v} \left(\frac{E_0}{\rho_{\Phi} \lambda^*} \right)^{\frac{1}{2+v}} t_{\Phi}^{-\frac{v}{2+v}} = \frac{2}{2+v} \frac{r_{\Phi}}{t_{\Phi}}. \quad (2.37)$$

Эта зависимость находится в хорошем соответствии с данными опытных атомных взрывов.

Используя (2.37), уравнения динамической совместности для сферической симметрии $v = 3$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \rho_{\Phi} &= \frac{k+1}{k-1} \rho_0; \\ p_{\Phi} &= \frac{8}{(2+v)^2 k+1} \rho_0 \left(\frac{r_{\Phi}}{t_{\Phi}} \right)^2 = \left| \frac{8}{25k+1} \rho_0 \left(\frac{r_{\Phi}}{t_{\Phi}} \right)^2 \right|_{v=3}; \\ v_{\Phi} &= \frac{4}{(2+v)(k+1)} \left(\frac{r_{\Phi}}{t_{\Phi}} \right) = \left| \frac{4}{5(k+1)} \left(\frac{r_{\Phi}}{t_{\Phi}} \right) \right|_{v=3}. \end{aligned}$$

По полученной системе уравнений могут быть полностью определены параметры на фронте сильной ударной волны, а именно: величины p_{Φ}, ρ_{Φ} и v_{Φ} .

Рассмотрим теперь параметры идеального газа за фронтом ударной волны. Они, как известно, определяются системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений движения (из закона сохранения

количества движения), уравнения неразрывности (из закона сохранения энергии) и уравнения состояния среды, в которой происходит взрыв. Эта система для случая одномерного адиабатического движения идеального газа будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + (v - i) \frac{\rho v}{r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Введем безразмерные функции скорости $V(\lambda)$, плотности $R(\lambda)$ и давления $P(\lambda)$, определив их следующими соотношениями:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda); \quad \rho = \rho_0 R(\lambda); \quad p = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda). \quad (2.39)$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 2 \frac{E_0}{\rho_0} \frac{t}{r^{2+v}} \frac{d}{d\lambda} = 2 \frac{\lambda}{t} \frac{d}{d\lambda}; \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = -(2+v) \frac{E_0}{\rho_0} \frac{t^2}{r^{3+v}} \frac{d}{d\lambda} = -(2+v) \frac{\lambda d}{2d\lambda}, \end{aligned}$$

после подстановки в уравнения (2.38) новых переменных V , P и R , получим для них некоторую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda \left[(m - V)V' + m \frac{P'}{R} \right] &= V^2 - V + \frac{2P}{R}, \\ \lambda \left[mV' + (mV - 2) \frac{R'}{R} \right] &= vV, \\ \lambda(mV - 2) \left[\frac{P'}{P} - k \frac{R'}{R} \right] &= 2(V - 1), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $m = 2 + v$.

Интегрирование этой системы уравнений с использованием в качестве начальных данных условий на фронте ударной волны позволяет определить функции V , R и P . Затем, легко оценить по зависимостям (2.39) и сами параметры за фронтом волны v , ρ и p . Однако, интегрирование (2.40) возможно лишь численными методами, так как его интегрирование в конечном виде невозможно.

Л. И. Седов предложил специальный прием решения, позволяющий с помощью соображений теории размерности найти алгебраический интеграл системы (2.40).

С этой целью рассматривается изменение полной энергии газа в

некотором объеме Q , ограниченном подвижной сферической (цилиндрической, плоской) поверхностью $\Sigma(\lambda = \text{const})$, т. е. выражение

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_Q \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dq,$$

где ε – внутренняя энергия газа

$$\varepsilon = p / [(k - 1)\rho]. \quad (2.41)$$

Пусть координата, характеризующая объем Q или окружающую ее поверхность Σ будет r . Расширяясь по закону (2.37), поверхность $\lambda = \text{const}$ в течение времени dt даст приращение объема $4\pi r^2 \bar{N} dt$, в котором заключен газ с энергией $4\pi r^2 \bar{N} dt \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = dE$. Эта энергия должна равняться энергии $4\pi r^2 v dt \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right)$, приносимой газом, протекающим за время dt через сферу радиуса r , и работе сил давления $4\pi r^2 p v dt$.

Таким образом имеем:

$$4\pi r^2 \bar{N} dt \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = 4\pi r^2 v dt \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + 4\pi r^2 p v dt$$

или, что то же $\bar{N} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right)$.

После подстановки значений N из (2.37) и ε из (2.41), получим

$$\frac{2r}{(2+v)t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{k+1} \right) = v \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{k}{k-1} p \right).$$

Заменив в последнем равенстве величины v , ρ и p через безразмерные величины V , R и P по формулам (2.39), окончательно получим интеграл системы (2.40)

$$RV^2 \left(V - \frac{2}{2+v} \right) + \frac{2}{k-1} P \left(kV - \frac{2}{2+v} \right) = 0.$$

Пользуясь этой зависимостью, можно получить в конечном виде решения для V , R и P , которые приведены в книге Седова Л. И. Теория подобия и размерности в механике (М., Недра, 1972).

2.3. Специфика критериев подобия при воздействии неконтактного взрыва на конструкции сооружений

Прочность той или иной конструкции при воздействии на нее неконтактного взрыва надо, очевидно, рассчитывать на воздействие на эту конструкцию ударной волны или волны напряжений, генерируемой взрывом. Она определяется, в конечном счете, распространением упругопластических волн, возникающих в конструкции в результате прелом-

ления и отражения падающих на нее и дифрагируемых вокруг нее указанных выше волн взрыва.

Процессы дифракции, отражения и преломления волны взрыва, а также процессы возникновения и распространения упругопластических волн в конструкции во многом зависят от самой конструкции, ее конфигурации и материала, узлов крепления и других факторов. При этом, благодаря податливости некоторых элементов конструкции, возникают дополнительные дифракционные поля, а в воде явления кавитации, еще более усложняющие волновую картину вокруг конструкции. В элементах самой конструкции упругопластические волны образуются трех типов: продольные, поперечные и поверхностные. Более того, имеют место многократные отражения и преломления, еще более усложняющие волновую картину. Поэтому изучение воздействия неконтактного взрыва на конструкции в точной волновой постановке даже при применении новейших математических методов становится практически невозможной.

Обычно при решении практических задач вводится ряд упрощающих предположений и допущений или производится исследование с помощью моделирования.

Все эти многообразные и сложные явления, сопровождающие воздействие неконтактного взрыва на конструкции, можно охарактеризовать следующими определяющими параметрами, например, для воздействия взрыва на пластину конечных размеров:

$$P, R_{03}, \rho_n, c_n, \rho_k, c_k, \sigma_k, \delta_k, E, \nu, y, y', y'', r, t,$$

где ρ_k, c_k — плотность и скорость звука в конструкции; δ_k — толщина пластины; y, y', y'' — линейная деформация пластины и ее производные; σ_k — возникающее в конструкции напряжение; P — некоторая результирующая нагрузка, пропорциональная квадрату модуля геометрического подобия (линейного масштаба).

Используя π -теорему, можно, например, для прогиба пластины получить следующую функциональную зависимость в критериальной форме

$$y/R_{03} = f(r/R_{03}, \delta_k/\bar{R}_{03}, \rho_n c_n / (\rho_k c_k), \sigma_k / (\rho_n c_n^2), \nu P / (E \delta_k^2), c_n t / R_{03}).$$

Критерии подобия $y/R_{03}, r/R_{03}, \delta_k/\bar{R}_{03}$, обеспечиваются при наличии геометрического подобия.

Критерий $\sigma_k / (\rho_n c_n^2)$ характеризует свойство окружающей конструкцию среды и автоматически обеспечивается, если взрыв производит в одной и той же среде, например, в воде или однородной горной породе.

Критерий $\rho_n c_n / (\rho_k c_k)$ обуславливает подобие преломления и отражения ударной волны в сходственных точках и выполняется автоматически, если среда и материал конструкций в модели и натуре одни и те же.

Критерий $\nu = \text{const}$ характеризует упругие свойства материала конструкции и, очевидно, тоже автоматически обеспечивается при одинаковости материалов обеих конструкций.

Критерий $P/(E\delta_x^2)$ обуславливает характер результирующей нагрузки, который обычно тоже автоматически выполняется при соблюдении одинаковости материалов в модели и натуре.

Критерий $c_n t/R_0$, обуславливает подобие временных характеристик и требует пропорциональности радиусам зарядов временных параметров: периодов собственных колебаний элементов конструкции, времени действия усилий, временной характер воздействия (эпюры давление – время, напряжение – время и т. п.).

Критерии подобия характеризуют общие условия подобия твердых деформируемых тел при динамических условиях действия внешних сил, не конкретизируя характера приложения этих сил.

Однако, на моделирование элементов деформаций конструкций и внутренних напряжений в них также большое влияние оказывает и характер приложения внешней нагрузки: объемная сила, сосредоточенная и т. д.

Внешняя нагрузка, действующая на ту или иную конструкцию, вообще говоря, может быть самой различной: сосредоточенной, распределенной по длине, по поверхности или по объему; моментом сосредоточенных сил и т. д.

Теория подобия, вообще говоря, не требует, чтобы между одноименными нагрузками двух подобных конструкций существовало соотношение, определяемое модулем геометрического подобия (линейным масштабом). Однако, отношение между элементами деформаций таких конструкций, очевидно, будет зависеть от характера прилагаемых нагрузок в сходственных точках конструкций. Например, для опор требуется кинематическая тождественность закрепления опор в натуре и модели. Проиллюстрируем это простым примером деформации подобных конструкций под действием их собственного веса, т. е. нагрузки, пропорциональной кубу линейного масштаба

$$G = \gamma l_c^3. \quad (2.42)$$

При этом под подобными конструкциями будем понимать конструкции, изготовленные из одних и тех же материалов и отвечающие закону геометрического подобия с некоторым линейным масштабом l_c .

При деформации таких конструкций от рассматриваемой внешней силы они подвергаются действию усилий, отношения которых друг к другу пропорциональны линейному масштабу l_c в некоторой степени. Показатель степени при l_c получается из отношения выражений внешней нагрузки к задаваемому усилию, записанных через линейный масштаб в виде формулы (2.42). Так, при рассматриваемой нагрузке, определяемой по (2.42), конструкций подвергаются действию усилий: пропорциональных линейному масштабу l_c в первой степени – для усилий, распределенных по площадям; пропорциональных l_c во второй – для усилий распределенных по длине и пропорциональных в третьей – для суммарных и сосредоточенных усилий.

Поясним это на примере двух подобных балок в соответствии с известными зависимостями для усилий и элементов деформации балки: срезающие силы

$$Q_1 = \int_0^{x_1} q_1 dx + \Sigma P_1 = \int_0^{x_2} l_c^2 q_2 d(l_c x_2) + l_c^3 \Sigma P_2 =$$

$$= l_c^3 \int_0^{x_2} q_2 dx_2 + l_c^3 \Sigma \bar{P}_2 = l_c^3 Q_2; \quad (2.43)$$

изгибающие моменты

$$M_1 = \int_0^{x_1} Q_1 dx_1 = \int_0^{x_2} Q_2 l_c^3 l_c dx_2 = l_c^4 \int_0^{x_2} Q_2 dx_2 = l_c^4 M_2. \quad (2.44)$$

Нормальные напряжения

$$\sigma_1 = M_1/W_1 = l_c^4 M_2/(l_c^3 W_2) = l_c M_2/\bar{W}_2 = l_c \sigma_2. \quad (2.45)$$

Кривизна линии изгиба балки

$$y_1'' = M_1/(EI_1) = l_c^4 M_2/(l_c^4 EI_2) = M_2/(EI_2) = y_2''. \quad (2.46)$$

Углы поворота сечений от нормальных напряжений

$$y_1' = \int_0^{x_1} y_1'' dx_1 = \int_0^{x_2} y_2'' l_c dx_2 = l_c \int_0^{x_2} y_2'' dx_2 = l_c y_2'. \quad (2.47)$$

Прогиб балки

$$y_1 = \int_0^{x_1} y_1' dx_1 = \int_0^{x_2} l_c y_2' l_c dx_2 = l_c^2 \int_0^{x_2} y_2' dx_2 = l_c^2 y_2. \quad (2.48)$$

Потенциальная энергия изогнутой балки

$$V_1 = \int_0^{x_1} \frac{M_1^2}{2EI_1} dx_1 = \int_0^{x_2} \frac{l_c^8 M_2^2}{2EI_c^4 I_2} l_c dx_2 = l_c^5 \int_0^{x_2} \frac{M_2^2}{2EI_2} dx_2 = l_c^5 V_2. \quad (2.49)$$

Из этого примера видно, что под действием собственного веса подобные конструкции будут иметь суммарные перемещения, пропорциональные l_c^2 , а напряжения, пропорциональные l_c .

Если внешние нагрузки (сосредоточенные нагрузки и суммарные величины распределенных нагрузок) пропорциональны квадрату линейного масштаба, то интенсивность усилий, распределенных по длине, будет пропорциональна l_c в первой степени, а интенсивность усилий, распределенных по площади, останется неизменной, т. е. не будет зависеть от масштаба конструкций. Тогда соотношения (2.42)–(2.48) для подобных балок запишутся в виде:

$$Q_1 = l_c^2 Q_2, M_1 = l_c^3 M_2, \sigma_1 = \sigma_2, \tau_1 = \tau_2,$$

$$y_1'' = y_2''/l_c, y_1' = y_2', y_1 = l_c y_2, V_1 = l_c^5 V_2. \quad (2.50)$$

Этим условиям, как известно, полностью удовлетворяют нагрузки, вызывающие потерю устойчивости упругих систем. Поэтому при рассматриваемом виде моделирования будет сохраняться одинаковым не только запас прочности конструкции по напряжениям σ , τ , но и соответствующие нагрузки и напряжения на устойчивость конструкций, например:

а) Эйлера сосредоточенная нагрузка при сжатии балки

$$P_{Э1} = K \pi^2 E I_1 / l_1^2 = K \pi^2 E l_c^4 I_2 / (l_c^2 l_2^2) = l_c^2 P_{Э2}$$

и соответствующее ему напряжение

$$\sigma_{Э1} = P_{Э1} / S_1 = l_c^2 P_{Э2} / (l_c^2 S_2) = P_{Э2} / S_2 = \sigma_{Э2};$$

б) Эйлера распределенная по длине нагрузки при сжатии кольца

$$q_{Э1} = 3EI_1/r_1^3 = 3E l_c^4 I_2 / (l_c^3 r_2^3) = l_c^3 E I_2 / r_2^3 = l_c q_{Э2}$$

и соответствующие ему напряжения

$$\sigma_{Э1} = q_{Э1} r_1 / S_1 = l_c q_{Э2} l_c r_2 / (l_c^2 S_2) = q_{Э2} r_2 / S_2 = \sigma_{Э2}.$$

В общем случае, если внешние нагрузки у двух подобных конструкций определяются некоторой произвольной функцией от линейного масштаба $f(l_c)$, то соответствующие зависимости между другими видами нагрузки или усилиями конструкции будут для усилий:

распределенных по длине $\frac{1}{l_c} f(l_c)$;

распределенных по площади $\frac{1}{l_c^2} f(l_c)$;

распределенных по объему $\frac{1}{l_c^3} f(l_c)$;

для сосредоточенных $f(l_c)$.

И тогда нагрузка и деформации балок выразятся по формулам:

$$Q = f(l_c) Q_2, M_1 = l_c f(l_c) M_2, \sigma_1 = \frac{1}{l_c} f(l_c) \sigma_2,$$

$$y_1'' = \frac{f(l_c)}{l_c^2} y_2'', y_1' = \frac{f(l_c)}{l_c} y_2', y_1 = \frac{f(l_c)}{l_c} y_2, V_1 = \frac{f^2(l_c)}{l_c} V_2.$$

Рассмотрим теперь моделирование равновесия упругих конструкций, построенных из различных материалов.

В число определяющих параметров надо ввести, очевидно, характеристики упругих свойств материалов — модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν . Для определения всех размеров модели достаточно задать некоторый его размер B (при этом предполагается, что геометрическое подобие имеет место). Если кроме заданных нагрузок P также существенен и вес конструкции, то следует обязательно учитывать удельный вес $\gamma = \rho g$. Тогда система определяющих параметров будет:

$$\nu, E, B, \rho, g, P. \quad (2.51)$$

Из них по π -теореме можно получить три критерия подобия:

$$\nu, E/(\rho g B), P/(EB^2). \quad (2.52)$$

При $E_n = E_m$ из второго критерия вытекает, что он выполняется если $g_c = 1/(\rho_c B_c)$, что достигается на практике с помощью центрифуги.

Из третьего критерия следует, что подобие, в строгом смысле слова,

при оценке равновесия конструкций существует тогда, когда значения нагрузок пропорциональны квадрату модуля геометрического подобия. Это полностью согласуется с ранее сказанным относительно влияния веса конструкции на деформацию ее элементов.

В заключение рассмотрим вопрос о моделировании деформаций конструкций с помощью конструкций малых масштабов.

Обозначим через l изменение длины при деформации некоторого элемента упругой системы. Определяющие параметры и критерии подобия в этом случае будут как и в предыдущем случае равны значениям (2.51) и (2.52).

Тогда для относительного удлинения можно записать зависимость:

$$l/B = f(v, \rho g B/E, P/(EB^2)).$$

Из этой зависимости видно, что l/B снижается с уменьшением удельного веса элементов конструкций, т. е. с уменьшением $\rho g B/E$. Пусть теперь имеем подобные конструкции разных размеров, но из одного материала, т. е. v и E одинаковые. Допустим, также, что внешние нагрузки изменяются в соответствии с третьим критерием, т. е. пропорционально квадратам размеров: $P = EB^2$.

В этом случае критерий $\rho g B/E$ снижается с уменьшением размеров конструкции, т. е. нарушается механическое подобие. На конструкциях меньших размеров относительные деформации меньше, поэтому конструкции малых размеров будут иметь большую прочность. Но этот вывод справедлив лишь в том случае, когда удельный вес материала $\gamma = \rho g$ играет существенную роль. Если же собственный вес несущественен, а $P/(EB^2) = \text{const}$, то относительные деформации имеют одинаковые значения для тел различных масштабов.

Можно указать на случай упрочнения при уменьшении конструкции даже и при несущественном влиянии веса. Это когда внешняя нагрузка пропорциональна кубу линейных размеров. В этом случае l/B для малых конструкций будет меньше, чем для больших, да и внешняя нагрузка будет падать с уменьшением размеров конструкции. Следовательно, в этом случае также увеличивается прочность с уменьшением размеров конструкций.

2.4. Приближенная оценка полей давлений при взрыве зарядов в воде и воздухе в условиях безграничной среды

Приведенные ранее законы теории подобия при взрыве в воздухе и в воде получили хорошее подтверждение в широко поставленных экспериментальных исследованиях ударных волн. Это позволило получить простые и удобные для практического использования расчетные формулы. Рассмотрим их.

2.4.1. Поле давлений при воздушном взрыве

Пользуясь общей функциональной зависимостью (2.32)

$$\Delta p_{\phi} = C_4 f(\sqrt[3]{G/r}),$$

где G – масса заряда, r – расстояние от центра взрыва. М. А. Садовский после тщательного анализа отечественных и зарубежных экспериментальных данных установил следующее соотношение для избыточного давления на фронте ударной волны при воздушном взрыве сосредоточенного заряда эталонного тротила (см. разд. 2.1.2).

$$\Delta p_{\phi} = (74,5\sqrt[3]{G/r} + 250\sqrt{G/r^2} + 637G/r^3)10^3, \quad (2.53)$$

где $\Delta p_{\phi} = p_{\phi} - p_0$ – избыточное давление на фронте ударной волны, Па; G – масса заряда, кг; r – расстояние от центра взрыва, м; p_{ϕ} – давление на фронте волны; p_0 – давление в невозмущенном воздухе.

Если выразить массу заряда через радиус эквивалентного сферического заряда в соответствии с зависимостью (2.30), то формулу (2.53) можно представить в виде:

$$\Delta p_{\phi} = 1,403/\bar{r} + 88,9/\bar{r}^2 + 4280/\bar{r}^3)10^6, \quad (2.54)$$

где $\bar{r} = r/R_{\phi}^*$.

Для максимального давления при взрыве других взрывчатых веществ можно использовать также зависимости (2.53) и (2.54), положив в них соответственно эквивалентные заряду тротила массу G^* или радиус R_{ϕ}^* заряда, которые в соответствии с энергетическим законом подобия вычисляются соответственно по формулам (2.28) и (2.31), где $Q_2 = Q_{\text{вв}}$, $Q_1 = Q_{\text{тр}}$ – теплота взрывчатого превращения взятого заряда и заряда тротила, $G_{\text{вв}}$ – фактическая масса взятого заряда ВВ.

Время действия положительной фазы эпюры давление – время для тротилового заряда характеризуется зависимостями (τ_+ , с)

$$\tau_+ = 1,5\sqrt[6]{G}\sqrt{\bar{r}}10^{-3}, \quad (2.55)$$

или через радиус заряда

$$\tau_+ = 6,5 R_{\phi}^* \sqrt{\bar{r}}10^{-3}. \quad (2.56)$$

Как следует непосредственно из формул (2.55) и (2.56) по мере распространения ударной волны длительность фазы сжатия возрастает. Этот факт также хорошо объясняется физическими соображениями, а именно, фронт волны движется со скоростью $N_{\phi} > a_0$ (где a_0 – скорость звука), а «хвост» волны, в котором избыточное давление близко к нулю, будет двигаться медленней, со скоростью звука a_0 , в результате волна во времени растягивается. Однако пространственная протяженность волны (длина волны) практически остается неизменной, так как увеличение времени действия происходит одновременно с падением скорости пере-

мещения N_ϕ . Некоторое небольшое возрастание длины волны, наблюдающееся все же при этом, можно оценить по М. А. Садовскому приближенной формулой

$$\lambda = \lambda_0 + a \ln r, \quad (2.57)$$

где λ – длина волны; a – некоторая постоянная.

Исследования М. А. Садовского показали, что в весьма широком диапазоне расстояний импульс давления зоны сжатия может быть оценен по следующей приближенной зависимости:

$$I_+ = \int_0^{\tau_+} p dt = AG^{2/3}/r = BR_{03}/\bar{r}, \quad (2.58)$$

где I_+ – импульс зоны сжатия, МПа·с; A, B – постоянные коэффициенты, соответственно равные для тротила приближенным значениям $3,33-3,53$ и $(1,18-1,26)10^3$.

Импульс волны в фазе разрежения определяется по эмпирической формуле:

$$I_- = I_+ (1 - 1/(2r)), \quad (2.59)$$

из которой видно, что по мере распространения волны (увеличения r) величина I_- приближается к величине I_+ .

Характер изменения давления во времени на фиксированном расстоянии r зависит от давления на фронте. Это хорошо видно из рис. 5, где представлена серия кривых $\Delta p/\Delta p_\phi$ для широкого диапазона Δp_ϕ в функции безразмерного времени t/τ_+ .

Часть кривых может быть аппроксимирована для $\Delta p_\phi < 10^5$ Па следующей зависимостью:

$$\Delta p(t) = \Delta p_\phi (1 - t/\tau_+). \quad (2.60)$$

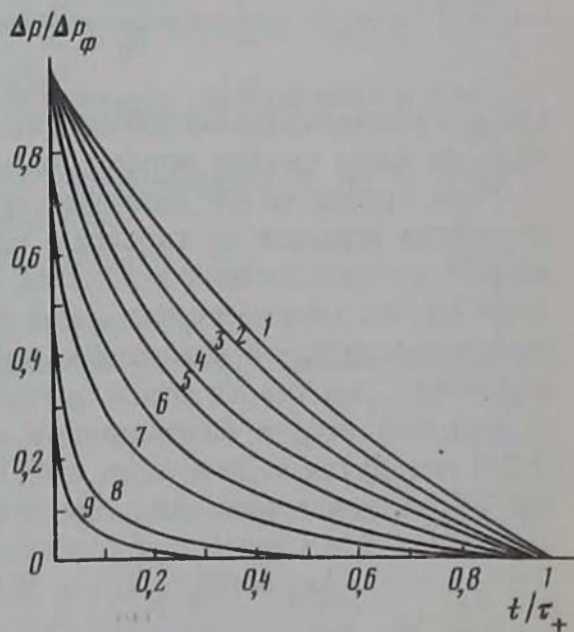


Рис. 5. Кривые изменения давления $\Delta p/\Delta p_\phi$ во времени t/τ_+ для воздушных ударных волн: 1-9 – соответственно при интенсивности давления на фронте $\Delta p_\phi = 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 1; 5; 20$ МПа

Все эти формулы для оценки τ_+ и $\Delta p(t)$ справедливы для взрыва заряда тротила. Для оценки τ_+ и построения эпюры $\Delta p(t)$ при взрыве зарядов других ВВ также можно пользоваться этими формулами, подставляя туда соответствующие эквивалентные по тротилу значения массы G^* или радиуса R_{0i}^* заряда. Тогда импульс фазы сжатия определится численным интегрированием эпюры, построенной по приведенным формулам и кривым (см. рис. 5), или по зависимостям:

$$I_+ = \int_0^{\tau_+} \Delta p(t) dt = \mu_i S; \quad (2.61)$$

$$\mu_i = \Delta p_{\phi} t_m / A_m, \quad (2.62)$$

где μ_i – размерный масштабный коэффициент, Па·с/мм²; Δp_{ϕ} – максимальное давление на фронте волны, Па; A_m – значение Δp_{ϕ} на осциллограмме, мм; t_m – масштаб времени на осциллограмме, с/мм; S – площадь эпюры зоны сжатия волны на осциллограмме, мм².

Часто для характеристики воздействия воздушного взрыва надо знать удельную энергию или плотность энергии волны. Она определяется по формуле

$$E_0 = \int_0^{\tau_+} \Delta p(t) v(t) dt = \frac{1}{\rho_0 a_0} \int_0^{\tau_+} \Delta p^2(t) dt.$$

Для ее вычисления может быть использована эпюра фазы сжатия волны или значение импульса фазы сжатия. В этом случае формула будет иметь вид:

$$E_0 = \mu_e S, \quad (2.63)$$

$$\mu_e = \frac{\Delta p_{\phi}^2 t_m}{\rho_0 a_0 A_m} = \frac{\Delta p_{\phi}}{\rho_0 a_0} \mu_i, \quad (2.64)$$

$$E_0 = \frac{\Delta p_{\phi}}{\rho_0 a_0} \mu_i S = \frac{\Delta p_{\phi}}{\rho_0 a_0} I, \quad (2.65)$$

где μ_e – размерный масштабный коэффициент, Дж/м²·мм²; E_0 – удельная энергия фазы сжатия волны, Дж/м².

При оценке полей давлений при наземном взрыве, что близко при массовых взрывах на карьерах, принимают породный массив приближенно, по сравнению с воздухом, как абсолютно жесткую преграду. В этом случае можно считать, что большая часть энергии взрыва будет распространяться в воздушном полупространстве. С этой точки зрения взрыв на поверхности земли оказывается эквивалентным взрыву заряда удвоенного веса в безграничной атмосфере. Тогда формулы (2.53) и (2.54) останутся в силе, если подставить туда удвоенную массу заряда $2G$. Тогда для истинной массы G формула (2.53) запишется в виде:

$$\Delta p_{\phi} = (93,2 \sqrt[3]{G/r} + 383 \sqrt{G/r^2} + 1470 G/r^3) 10^3, \quad (2.66)$$

или в радиусах заряда

$$\Delta p_{\phi} = (1,75/\bar{r} + 136/\bar{r}^2 + 8550/\bar{r}^3) 10^6. \quad (2.67)$$

Продолжительность положительной фазы волны и импульс соответственно будут равны:

$$\tau_+ = 1,7 \cdot \sqrt[6]{G} \sqrt{\bar{r}} 10^{-3}. \quad (2.68)$$

$$\tau_+ = 7 \cdot R_{03} \sqrt{\bar{r}} 10^{-3}; \quad (2.69)$$

$$I_+ = (5,1 \div 5,5) G^{2/3} / r = (1810 \div 1950) R_{03} / \bar{r}. \quad (2.70)$$

Эпюра давления и расчет энергии в этом случае производятся по тем же формулам, что и для безграничной атмосферы.

2.4.2. Поле давлений при подводном взрыве

В результате большого числа опытов Р. Коулом установлена следующая зависимость для давления (МПа) на фронте волны p_m от взрыва заряда эталонного тротила

$$p_m = 52,3 (\sqrt[3]{G/r})^{1,13}. \quad (2.71)$$

Эта зависимость для безразмерных расстояний $\bar{r} = r/R_{03}$ будет иметь вид

$$p_m = 1440 \gamma_i / \bar{r}^{1,13}, \quad (2.72)$$

где γ_i — переводной коэффициент для зарядов, отличных от заряда тротила

$$\gamma_i = (\rho_{ВВ} Q_{ВВ} / (\rho_{Тр} Q_{Тр}))^{1,13/3} = (\rho_{ВВ} Q_{ВВ} / (\rho_{Тр} Q_{Тр}))^{0,511}, \quad (2.73)$$

где $\rho_{ВВ}$, $\rho_{Тр}$ — плотность соответственно заряда ВВ и тротила; $Q_{ВВ}$, $Q_{Тр}$ — теплота взрывчатого превращения соответственно заряда ВВ и тротила.

Эти формулы справедливы для относительных расстояний \bar{r} в интервале $12 \leq \bar{r} \leq 240$.

Для более близких расстояний Б.В. Замыпляевым и Ю.С. Яковлевым приводится более точная зависимость

$$p_m = 44,1 (G^{1/3}/r)^{1,5} = 3610/\bar{r}^{1,5}, \quad (2.74)$$

справедливая для относительных расстояний $6 < \bar{r} \leq 12$.

Время прихода фронта ударной волны с момента взрыва или его относительное значение

$$t_{\phi} = t_{\phi} a_0 / R_{03},$$

где a_0 — скорость звука в воде ($a_0 = 1460$ м/с), для зарядов из тротила может быть определена для относительных расстояний $\bar{r} = 2 \div 12$.

\bar{r}	5	6	7	8	10	12
t_{ϕ}	2,3	3,1	3,9	4,6	6,4	8,2

Эпюра давления положительной фазы волны определяется зависимостями:

$$p(t) = p_m e^{-\frac{1}{\theta} \left(t - \frac{r}{a_0} \right)} \varepsilon \left(t - \frac{r}{a_0} \right);$$

$$\theta = (G^{1/3}/r)^{-0,24} G^{1/3} 10^{-4},$$

$$\text{или } \theta = 1,4 \frac{R_{03}}{a_0} \bar{r}^{-0,24}.$$

По данным Б. В. Замышляева и Ю. С. Яковлева эпюра ударной волны может быть вычислена при $p_0 < 10^6$ Па по следующим зависимостям:

$$p(t) = p_m \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{t}{\theta}} \text{ при } t \leq \theta; \\ \frac{0,368}{t/\theta} \text{ при } \theta < t < (5 \div 10)\theta. \end{array} \right\} \quad (2.75)$$

где θ – постоянная экспоненциального спада (с), определяемая формулой

$$\theta a_0 / R_{03} = 3,5 \sqrt{\lg \bar{r} - 0,9}, \text{ при } 30 < \bar{r} < 240.$$

Время действия положительной фазы ударной волны в воде $\tau_+ \approx 20 R_{03} / a_0$.

Импульс положительной фазы ударной волны при использовании формул (2.75) будет:

$$I_+ = \int_0^{\tau_+} p(t) dt = p_m \theta \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-t/\theta} \text{ при } t < \theta \\ 10,632 + 0,368 \ln \frac{t}{\theta} \text{ при } \theta < t < 10\theta. \end{array} \right\} \quad (2.76)$$

При использовании формулы (2.76) импульс ударной волны выражается зависимостью:

$$I_+ = \int_0^{\tau_+} p(t) dt = p_m \theta \left[1 - e^{-\frac{1}{\theta} \left(t - \frac{r}{a_0} \right)} \right] \varepsilon \left(t - \frac{r}{a_0} \right).$$

Плотность потока энергии ударной волны, определяемая зависимостью

$$E_0 = \int_0^t \rho v \Delta(u + v^2/2 + p/\rho) dt,$$

для давлений $p < 100$ МПа может быть приближенно вычислена по формуле:

$$E_0 = [p_m^2 \theta / (2\rho_0 a_0)] (C + D a_0 \theta / 2), \quad (2.77)$$

$$\text{где } C = \left\{ \begin{array}{l} (1 - e^{-\frac{2t}{\theta}}) \text{ при } t < \theta, \\ (1,135 - 0,27(t/\theta)) \text{ при } \theta < t < 10\theta; \end{array} \right.$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-t/\theta} (2 - e^{-t/\theta}) \text{ при } t \leq \theta; \\ (0,4 + 0,135 \ln(2t/\theta)) \text{ при } \theta < t \leq 10\theta. \end{array} \right.$$

Формулы (2.71)–(2.77) выведены для заряда из тротила плотностью $1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и теплотой взрывчатого превращения $\bar{Q}_{\text{тр}} = 4440 \text{ кДж/кг}$.

Для использования их для других взрывчатых веществ надо вводить в эти формулы эквивалентные массе заряда тротила массу заряда $ВВ G^*$ или радиус заряда $ВВ R_{\text{э.т.}}$, определяемые соответствующими формулами (2.28) и (2.31). При этом вычисление импульсов и энергии фаз сжатия ударной волны следует производить по приведенным выше зависимостям (2.76), (2.77).

2.5. Критерии подобия при взрыве в горных породах

Предварительно рассмотрим характеристику явлений, сопровождающих взрыв в горной породе. Схематически современное представление о развитии взрыва в горной породе сводится к следующему.

При инициировании заряда $ВВ$ образуется детонационная волна с ударным фронтом, за которым следует зона реакции и область расширяющихся газообразных продуктов взрыва. Детонационная волна и газообразные продукты взрыва, достигнув поверхности раздела, сильно сжимают окружающую заряд среду. В результате в горной породе возникает волна сжатия, распространяющаяся симметрично относительно заряда и область раздробленной и смятой породы вблизи заряда. Энергия волны сжатия при ее распространении в породе быстро диссипирует, а сама волна сжатия в силу характера зависимости деформации от напряжения горных пород быстро теряет вид ударной волны и трансформируется сначала в упругопластическую, затем в упругую волну с неударным фронтом. Действительно, как следует из рисунка 6, а, при преломлении детонационной волны в породу в ней образуется тоже ударная волна с максимальным давлением $p_{\text{пр}}$. При этом скорость распространения волны N , пропорциональная углу наклона $\alpha_{\text{пр}}$ секущей кривой нагрузки породы $\sigma = f(\epsilon)$, проведенной из начала координат (σ, ϵ) , будет больше скорости звука в породе $c_0 = c_1 \text{ tg } \alpha_0$. По мере распространения преломленной ударной волны в породе, благодаря диссипации энергии волны, ее амплитуда $p_{\text{пр}}$, а соответственно и скорость распространения N , будут уменьшаться и достигнут в конце участка 1 значений $p = \sigma_{\text{пр}}$ и $N = c_0$. Таким образом, на участке 1 ударный фронт волны будет сохраняться. При дальнейшем распространении волны на участке 2–3 фронт волны будет трансформироваться постепенно в неударный (рис. 6, б) за счет того, что частицы породы, через которые проходит участок волны с максимальными амплитудами σ_1 и σ_2 , будут распространяться с меньшими скоростями $c = c_1 \text{ tg } \alpha$, чем частицы породы, через которую проходит волна с малыми амплитудами $\sigma < \sigma_c$, движущимися со скоростью звука $c_0 \simeq \text{tg } \alpha_0 > c \simeq \text{tg } \alpha$ (см. рис. 6, а). При дальнейшем распространении на участке 4 эта волна окончательно приобретает форму волны напряжения с неударным фронтом и является упругопластической волной напряжения вплоть до падения максимальной амплитуды до напряжения, равного пределу упругости σ_c . При дальнейшем распространении на

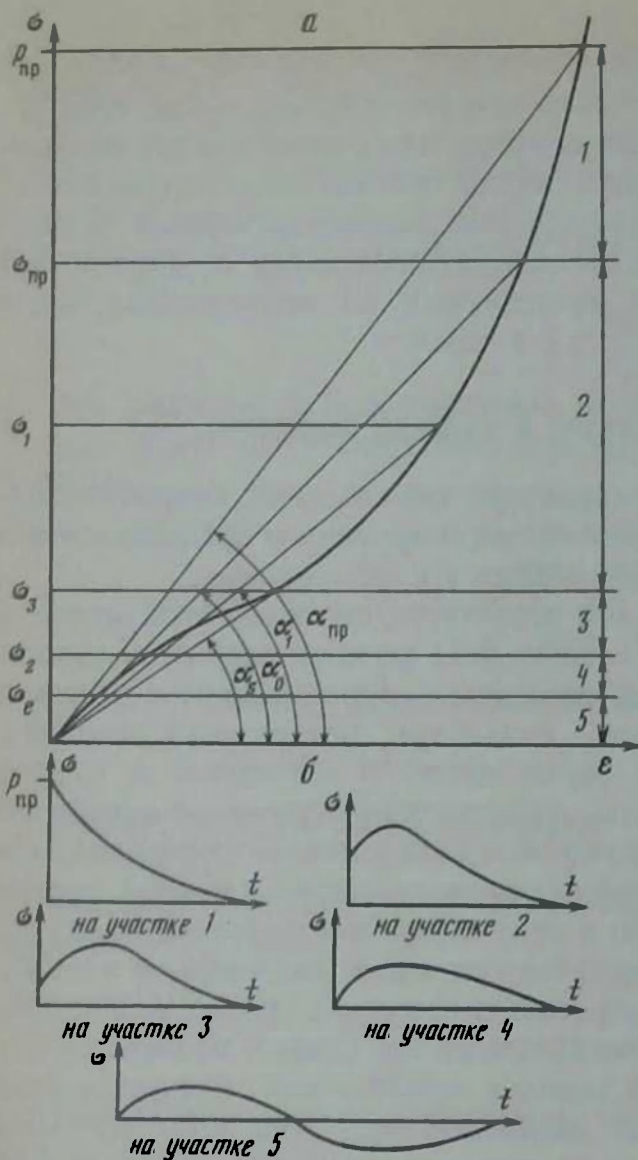


Рис. 6. Кривая динамического сжатия горных пород (а) и эпюры волны напряжений при ее распространении в горной породе (б)

участке 5 она обращается в упругую волну, которая на далеких расстояниях после ряда преломлений и отражений от различных слоев пород и грунта образует цуг всевозможных колебаний, называемых сейсмозрывными или просто сейсмическими волнами. При этом различают прямые, преломленные и отраженные объемные (продольные, поперечные) и различного рода поверхностные волны (Лява, Релея и др.).

Газообразные продукты взрыва, продолжая расширяться, сжимают раздробленную массу породы и формируют котловую полость, когда обнаженные поверхности находятся на достаточно большом удалении от заряда. Если взрыв происходит вблизи обнаженных поверхностей, а энергия газообразных продуктов достаточна для преодоления сил сопротивления разрушенной породы выбросу, образуется воронка взрыва. При этом определенную роль играет отраженная от поверхности волна разряжения, которая вызывает отколы породы с поверхности, способствует раскрытию трещин в районе воронки выброса при ее распространении вглубь породы к центру взрыва и отрыву разрушенной породы при подходе к образовавшейся трещине между зарядами.

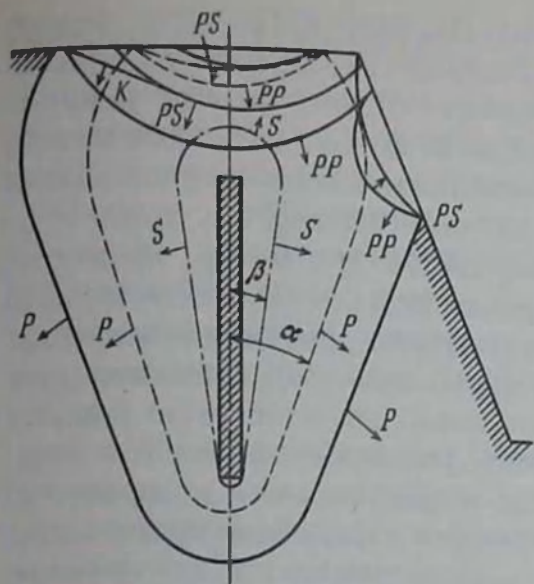
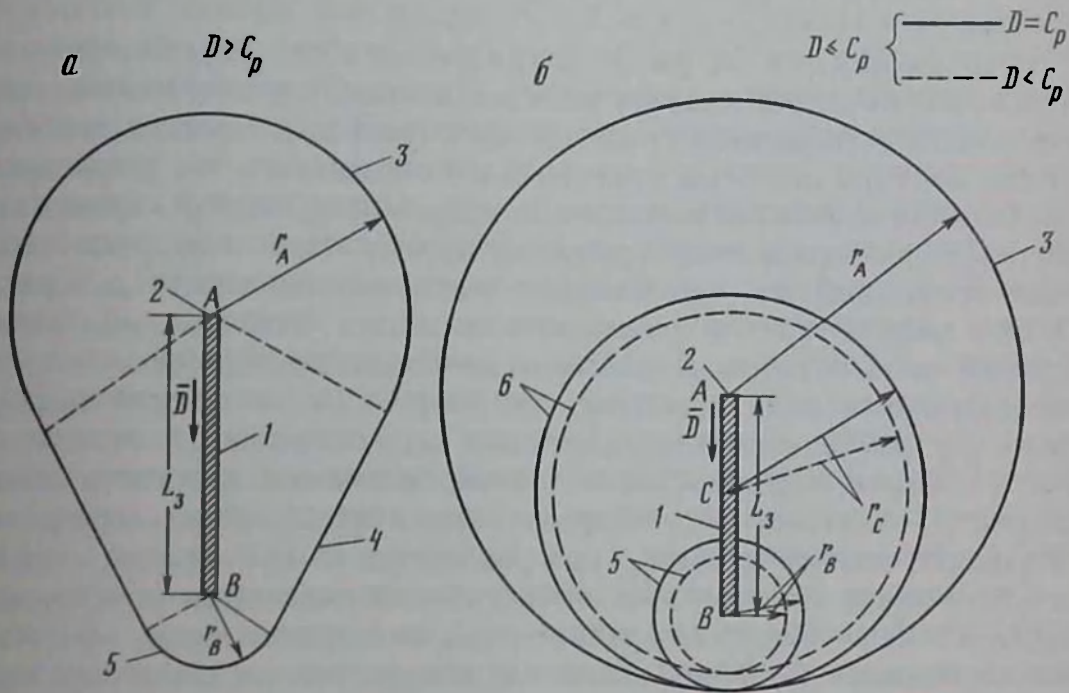


Рис. 7. Волновая картина при взрыве удлиненного заряда в горной породе: P – фронт продольной волны; S – фронт поперечной волны; PP и PS – отраженные от свободной поверхности продольная и поперечная соответственно волны при падении на нее продольной волны P ; K – коническая волна

Рис. 8. Форма фронтов волны напряжений при взрыве удлиненного заряда: 1 – заряд; 2 – детонатор; 3 – сферический фронт с центром в точке A инициирования заряда; 4 – конический фронт; 5 – сферический фронт от инициирования заряда в точке B ; 6 – сферический фронт от инициирования заряда в точке C



Такая картина характерна для взрыва сосредоточенных (сферических) зарядов. При взрыве удлиненного заряда волновая картина несколько усложняется. Прежде всего наряду с волной сжатия в этом случае возникает и волна сдвига, являющаяся следствием распространения детонационной волны вдоль стенки скважины в направлении оси заряда (рис. 7). Однако интенсивность этой волны существенно меньше волны сжатия ввиду незначительности сопротивления породы усилиям, направленным вдоль стенки скважины, из-за малости сил сцепления ВВ и породы в этом направлении. Поэтому, в большинстве случаев, для упрощения задачи ее влиянием пренебрегают и рассматривают только волну сжатия, являющуюся результатом деформации породы перпен-

дикулярно стенке скважины. В действительности ее влияние может сказаться на общей волновой картине нелинейно интерферируя с волной сжатия, ослабляя ее интенсивность и изменяя форму фронта волны с расстоянием. Однако форма фронта волны сжатия сама по себе может иметь как сферическую поверхность при скорости детонационной волны D , меньшей скорости распространения волны сжатия c_p , т. е. при $D < c_p$ (см. рис. 8, б), так и грушевидную поверхность при $D > c_p$, представляющую собой сочетание поверхности усеченного конуса с полусферами в торцевых его частях (рис. 8, а). Соответственно усложнится волновая картина отраженных от свободной поверхности волн, особенно при уступной отбойке породы, когда имеют место две свободные поверхности; стенка уступа и земная поверхность. Как видно из рис. 8, в этом случае от свободной поверхности стенки уступа и земной поверхности при падении на них волны сжатия P возникают отраженные продольные PP и поперечные PS волны, которые, в свою очередь, будут взаимодействовать друг с другом и создавать еще более сложную волновую картину.

При взрыве в горной породе можно выделить два процесса: излучение ударной волны или волны сжатия, вызывающее образование и раскрытие существующих трещин, и местное действие взрыва, понимая под этим окончательное образование зон разрушения породы и формирование полости или выброс разрушенной породы под действием расширяющихся продуктов взрыва. При этом ориентировочно предполагается, что большая часть энергии взрыва в горных породах расходуется на разрушение и нагрев близлежащей среды, меньшая часть остается в газообразных продуктах взрыва, а энергия сейсмических волн составляет не более 10% от полной энергии взрыва [1]. Диссипация энергии взрыва в горных породах, в отличие от воды и воздуха, определяется не столько величиной жесткости среды $\rho_n c_n^2$ (где ρ_n — плотность и c_n — скорость звука в среде), сколько прочностной характеристикой среды σ_* , которая обычно на три порядка меньше жесткости среды. Поэтому зона интенсивной диссипации энергии взрыва в горной породе будет, по крайней мере, на порядок выше, чем зона диссипации сильной ударной волны в воде и воздухе, так как радиус этой зоны будет определяться не величиной $r_0 = [E_0/(\rho_n c_n^2)]^{1/3}$, а величиной $r_* = (E_0/\sigma_*)^{1/3}$, где E_0 — энергия взрыва заряда ВВ. Кроме того, как следует из опыта исследования ударных адиабат различных твердых тел и пород, волна сжатия с ударным фронтом в горных породах может реализоваться лишь при давлениях порядка 10^4 МПа. Это значит, что размеры области, где фронт волны сжатия ударный, очень малы и для химических ВВ в скальных породах эта область не превышает двух-трех радиусов заряда.

Отмеченные выше обстоятельства взрыва в горной породе, отличные от взрыва в воде и в воздухе, существенно усложняют задачи моделирования всех явлений при взрыве в горной породе. Общих дифференциальных (интегродифференциальных) уравнений, описывающих одновременно всю совокупность явлений, сопровождающих взрыв в горной

породе, в настоящее время нет, да их и составить довольно трудно, так как многие явления ближней зоны взрыва еще не изучены в полной мере. Поэтому вывод критериев подобия произведем на основании теории размерности по определяющим параметрам и обобщенным координатам, характеризующим отмеченные явления взрыва в горных породах.

В число определяющих параметров, очевидно, должны входить величины, характеризующие заряд, зарядную камеру, условия взрыва, окружающую заряд среду — горную породу, а также координаты пространства, время, ускорение свободного падения g . К обобщенным координатам — параметры волны напряжений и размеры зон разрушений.

К величинам, характеризующим заряд, относятся, главным образом, плотность $\rho_{ВВ}$ или плотность заряжения $\gamma_{ВВ}$ заряда, эквивалентная по энергии взрыва масса G_{\mp} или радиус R_{03}^* заряда (энергия E_0 или теплота взрывчатого превращения $Q_{ВВ}$ заряда ВВ). К величинам, характеризующим зарядную камеру, следует отнести ее размеры: радиус R_x сферической камеры или радиус \bar{R}_{\dots} и длину l_{\dots} скважины и т. д., к условиям взрыва — глубину заложения заряда H или линию наименьшего сопротивления W , длину $l_{\text{заб}}$ и материал забойки, способ инициирования заряда и др. К величинам, характеризующим окружающую заряд среду, относят плотность среды ρ_n , скорость распространения продольных c_p и поперечных c_s волн, модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν , критические напряжения на сжатие $\sigma_{сж}$, на сдвиг $\sigma_{сдв}$ и отрыв $\sigma_{отр}$, величины относительных предельных деформаций объема ε_* и сдвига γ_* , величины, определяющие трещиноватость породы (среднее число трещин n , средняя длина $l_{тр}$, ширина $b_{тр}$ и глубина $h_{тр}$ трещин).

Параметры волны напряжений, очевидно, будут определяться амплитудами напряжения σ , массовой скорости v , смещения частиц среды u , временными параметрами (временем нарастания амплитуд до максимума τ_n , продолжительностью положительной τ_+ и отрицательной τ_- фаз, периодом колебаний T), а также некоторыми другими параметрами, определяющими форму эпюры волны напряжений. К размерам зон разрушений следует отнести радиус котловой полости R_0 (при камуфлетном взрыве) или радиус R_n и глубину воронки H_n (при выбросе), а также радиусы зоны сжатия \bar{R}_{\dots} , дробления $R_{др}$ и зоны трещинообразования $R_{тр}$.

Все вышеупомянутые параметры волны напряжения и разрушения будут зависеть от определяющих параметров, из которых можно составить некоторую функциональную зависимость

$$P_i = f_i(R_{03}^*, R_x, R_{\dots}, l_{\dots}, H, W, l_{\text{заб}}, \rho_{ВВ}, \rho_n, c_p, c_s, E, \nu, \sigma_{сж}, \sigma_{сдв}, \sigma_{отр}, \varepsilon_*, \gamma_*, l_{тр}, b_{тр}, h_{тр}, n, g, t, r(x, y, z)).$$

Преобразуем эту зависимость по π -теореме в зависимость между безразмерными комбинациями параметров или критериями подобия, взяв за основные величины, например, радиус заряда R_{03} , модуль упругости среды E и ускорение свободного падения g . После преобразования получим следующую критериальную зависимость:

$$P_i = f_i(R_{\text{в}}/R_{03}^*, R_{\text{сж}}/R_{03}^*, R_{\text{в}}/R_{03}^*, l_{\text{сж}}/R_{03}^*, H/R_{03}^*, W/R_{03}^*, l_{\text{заб}}/R_{03}^*, \\ l_{\text{тр}}/R_{03}^*, b_{\text{тр}}/R_{03}^*, \\ r/R_{03}^*, \rho_{\text{вв}} R_{03}^* g/E, \rho_0 R_{03}^* g/E, \sigma_{\text{сж}}/E, \sigma_{\text{сдв}}/E, \sigma_{\text{отр}}/E, c_p^2/(R_{03}^* g), c_s^2/(R_{03}^* g), \\ t^2 g/R_{03}^*, \nu, \varepsilon_*, \gamma_*, n).$$

В этом выражении первые десять симплексов являются критериями, вытекающими из условия геометрического подобия с характерным линейным размером, равным радиусу заряда, эквивалентного по энергии взрыва. Согласно этим критериям все линейные величины, характеризующие рассмотренные явления взрыва, отнесенные к соответствующим радиусам заряда, должны быть одинаковы для модели и природы.

Следующие пять комплексов типа $\rho_0 \bar{K}_{03}^* g/E$ и σ_*/E являются критериями подобия, связывающими упругие и прочностные характеристики среды (σ_*) с инерционными силами. Эти критерии легко можно свести к критерию подобия Коши, справедливому для упругих колебаний. Действительно, если разделить эти критерии на относительную деформацию ε_0 (безразмерную величину), то будем иметь

$$\frac{\rho_0 R_{03}^* g}{(E\varepsilon_*)} \rightarrow \frac{\rho l^2/t^2}{E\varepsilon_*} = \frac{\rho v^2}{E\varepsilon_*} = \frac{v^2}{\frac{\varepsilon_* E}{\rho}} \rightarrow \frac{v}{\sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\rho} E}} = \text{Co}$$

$$\frac{\sigma_*}{E\varepsilon_*} \rightarrow \frac{F_*}{l^2 E\varepsilon_*} = \frac{ml/t^2}{l^2 E\varepsilon_*} = \frac{\rho l^4/t^2}{l^2 E\varepsilon_*} = \frac{\rho v^2}{E\varepsilon_*} \rightarrow \frac{v}{\sqrt{\varepsilon_* E/\rho}} = \text{Co}.$$

Из этих критериев можно также получить и критерий динамического подобия — число Эйлера, если разделить $\rho g R_{03}^*/E$ на σ/E , а частное умножить на последующий критерий $c_p^2/(R_{03}^* g)$ или $v^2/(R_{03}^* g)$, отсюда $\sigma/(\rho v^2) = \text{Э}$.

Комплексы, в которые входят скорости распространения $c_p, c_s, -c_p^2/(R_{03}^* g)$ и $c_s^2/(R_{03}^* g)$, в сущности являются критериями подобия Фруда, связывающими инерционные силы с силами тяжести. Действительно

$$c_p^2/(R_{03}^* g) \rightarrow v^2/lg = \text{Fr}.$$

Эти критерии играют большую роль в явлениях, связанных с действием сил тяжести, например, в явлениях выброса и развала горной массы, разлета осколков, их навала, а также в явлениях распространения поверхностных волн при мощных массовых взрывах.

Последний комплекс $t^2 g/\bar{K}_{03}^*$ является фактически критерием кинематического подобия и сводится к числу гомохронности

$$t^2 g/R_{03}^* \rightarrow t^2 \frac{l}{l} = tw/l = H.$$

Критерии $\nu, \varepsilon_*, \gamma_*, n$ свидетельствуют о том, что моделирующая среда должна иметь одинаковые с моделируемой средой коэффициент Пуассона ν , величины предельных относительных деформаций ε_* и γ_* и

среднее число трещин. Причем, прочностные характеристики могут быть иными, но их отношение к модулю упругости $\sigma_{ср}/E$, $\sigma_{сдв}/E$, $\sigma_{сж}/E$ должны быть такими же, что и для среды природы.

В результате анализа размерностей определяющих параметров по π -теореме установлено, что для полного подобия процессов, возникающих при взрыве в горной породе, необходимо в первую очередь геометрическое подобие всех линейных размеров с масштабом, равным отношению радиусов зарядов природы и модели, эквивалентных по энергии взрыва. Затем, определены кинематическое и динамическое подобия или равенство чисел гомохронности и Эйлера, а также равенств чисел Фруда и Коши, характеризующих соответственно вес и упругость. Наконец, установлено равенство коэффициентов Пуассона, предельных относительных деформаций, отношений прочностных характеристик к модулю упругости и среднего числа трещин.

Соблюдение всех этих условий (критериев) подобия одновременно практически невозможно, так как имеются определенные трудности при их реализации на модели.

Так, при соблюдении геометрического подобия возникают проблемы моделирования размеров и среднего числа трещин в результате как ограниченности технических возможностей, так и недостоверного знания этих параметров для натурной среды. Это обстоятельство всегда надо иметь в виду при моделировании дробления горной массы, где естественная трещиноватость играет весьма важную роль.

Определенные трудности возникают также при соблюдении равенства числа Фруда, т. е. при моделировании влияния сил тяжести. В этом случае, как правило, необходимо утяжелять модельную среду либо с помощью центробежных сил (центробежное моделирование), либо с помощью гидродинамического давления, либо с помощью пресса или обычных грузов. При этом возникают различные сложности, связанные со спецификой каждого из способов, такие как ограниченность размеров модели (в первых двух случаях), необходимость учета влияния массы пресса и груза (в последних случаях), а также и другие особенности. В связи с этим целесообразно при исследовании различных явлений взрыва в горных породах общую задачу расчленить на ряд частных задач, т. е. изучать отдельные характерные явления, абстрагируясь от остальных.

Так, например, при изучении закономерностей распространения волн напряжений и их воздействия на среду, необходимо отвлечься от явлений местного действия взрыва. Существенно сокращается число определяющих параметров за счет параметров, характеризующих местное действие взрыва, а также ускорения свободного падения. В результате останутся критерии подобия, характеризующие геометрическое и кинематическое подобия, равенство прочностных и упругих свойств сред и критерий Коши. Наиболее трудным при этом являются выполнение подобия естественной и наведенной трещиноватости сред, неоднородности породного массива, т. е. возможность подобрать или изготовить модель, копирующую массив с учетом геометрического подобия. При моделировании явлений местного действия взрыва, на-

пример, выброса горной массы, можно отвлечься от явлений распространения волн, но при этом необходимо обязательно учитывать силы веса – параметр ускорения свободного падения g . Это приводит, как правило, к центробежному моделированию на центрифуге. В этом случае также сократится число определяющих параметров и соответствующих им критериев подобия, но останутся критерии геометрического и кинематического подобия, равенство прочностных свойств сред, критерий Фруда и подобие разрушенности сред. Последнее также трудно выполнимо, особенно при выборе одних и тех же сред в модели и натуре, так как в этом случае необходимо также и смоделировать гранулометрический состав горной массы, силы сопротивления ее движению, а в сложных гидрогеологических условиях, например при отбойке на выработанное пространство, заполненное водой, учесть и присоединенную массу воды, вовлеченную в движение.

2.6. Оценка полей напряжений при взрыве в горных породах в условиях безграничной среды

Для расчета параметров волн напряжений имеется весьма большое число приближенных эмпирических зависимостей, различающихся структурой построения этих зависимостей, и экспериментальными коэффициентами, неизменно присутствующими в этих зависимостях. Это объясняется, главным образом, многообразиями исследованных пород как монолитных, так и неоднородных с присущими им различными неоднородностями и разной трещиноватостью.

Общим для этих зависимостей является использование при построении закона расширенного геометрического подобия, указывающего на равенство основных параметров волн напряжений (напряжения, скорости, смещения частиц) в соответственных точках пространства $\bar{r} = r/R_0$, и соответственные моменты времени $\bar{t} = t/R_0$, или $tc_{\bar{r}}/R_0$ при учете радиусов заряда, эквивалентных по энергии взрыва.

Существует целый ряд таких зависимостей для крепких горных пород, полученных на основании лабораторных и натуральных экспериментальных данных сотрудниками кафедры РГП Ленинградского горного института В. А. Боровиковым, И. Ф. Ванягиным, А. Н. Ханукаевым и сотрудниками других организаций – В. М. Гоголевым, В. Г. Мыркиным, М. М. Павловым, Б. Д. Христофоровым и др.

При взрыве сосредоточенного заряда эпюра радиальной составляющей волны напряжений в диапазоне расстояний $r = (20 \div 100)R_0$, можно описать зависимостью [3]:

$$\sigma_2(r, t) = \sigma_{r_{max}}(r) e^{-\alpha(r-\tau_+)} \frac{\sin \beta \tau}{\sin \beta \tau_n} [\varepsilon_0(\tau) - \varepsilon_0(\tau - \tau_+)]. \quad (2.77)$$

В эту зависимость введены следующие величины. Время с момента прихода волны напряжения в заданную точку r $\tau = t - t_{пр}$, где t – текущее время с момента взрыва заряда ВВ; $t_{пр}$ – время прихода волны в заданную точку r с момента взрыва.

Максимальное напряжение (Па) в волне в заданной точке r

$$\sigma_{r_{\max}}(r) = \rho_n c_n 2,25 \cdot 10^3 / \bar{r}^2, \quad (2.78)$$

где $\rho_n c_n$ — акустическая жесткость породы, Н·с/м³; $\bar{r} = r/R_{03}$ — относительное расстояние.

Время (с) нарастания амплитуды напряжения до его максимального значения τ_n :

$$\tau_n = (a_1 + a_2 \bar{r}) R_{03}. \quad (2.79)$$

Коэффициент β , характеризующий продолжительность τ_+ положительной фазы волны напряжений (1/с)

$$\beta = \pi/\tau_+ = (b_1 + b_2 \bar{r})/R_{03}. \quad (2.80)$$

Коэффициент α , характеризующий крутизну нарастания и спада амплитуды волны напряжений во времени (1/с)

$$\alpha = \beta \operatorname{ctg}(\beta \tau_n). \quad (2.81)$$

В выражениях (2.79) и (2.80) величины a_1 (с/м), a_2 (с/м), b_1 (м/с), b_2 (м/с) представляют собой численные размерные коэффициенты, зависящие от типа породы в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,02 + 0,87 \cdot 10^{-8} \rho_n c_n) 10^{-3}, \\ a_2 &= (0,19 + 0,122 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n) 10^{-4}, \\ b_1 &= 150 + 27 \cdot 10^{-6} \rho_n c_n, \\ b_2 &= -0,2 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Тангенциальная составляющая эпюры волны напряжения может быть вычислена по зависимостям [3]

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(r, t) = \sigma_{\varphi_{\max}}(r) \left\{ \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi\tau}{\tau_n}\right) [\varepsilon_0(\tau) - \varepsilon_0(\tau - \tau_n)] - \right. \\ \left. - e^{-\alpha(\tau - 2\tau_n)} \frac{\sin[\beta(\tau - \tau_n)]}{\sin(\beta\tau_n)} \left[\varepsilon_0(\tau - \tau_n) - \varepsilon_0(\tau - \tau_n - \tau_+) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\sigma_{\varphi_{\max}}(r) = \left[1 - 2 \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \right] \sigma_{r_{\max}}(r) = \frac{v}{1 - v} \sigma_{r_{\max}}(r), \quad (2.84)$$

где c_s , c_p — соответственно скорости распространения поперечной и продольной волны в данной породе.

В приведенных выше выражениях $\varepsilon_0(\tau)$ является единичной разрывной функцией нулевого порядка

$$\varepsilon_0(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Массовая скорость или скорость смещения частиц породы

$$v(r, t) = \sigma(r, t) / (\rho_n c_n).$$

Максимальное значение смещения частиц породы в волне напря-

жения вычисляется интегрированием эпюры скорости смещения частиц породы по времени от $r = 0$ до $\tau = \tau_+$, т. е.

$$u_{r_{\max}}(r) = \int_0^{\tau_+} v_r(r, t) dt.$$

Приближенно она может быть оценена по формуле:

$$u_{r_{\max}}(r) \approx \frac{1}{2} v_{r_{\max}}(r) \tau_+.$$

Для взрыва удлиненного заряда можно использовать приближенно те же зависимости (2.77), (2.79)–(2.81), (2.83), но значения коэффициентов в формулах (2.82) будут иными, вычисляемыми по зависимостям [4]

$$a_1 = (0,325 + 0,161 \cdot 10^{-6} \rho_n c_n) 10^{-3},$$

$$a_2 = (0,47 + 0,113 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n) 10^{-4},$$

$$b_1 = 178 + 3,49 \cdot 10^{-6} \rho_n c_n,$$

$$b_2 = -0,125 - 0,218 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n.$$

Максимальные амплитуды $\sigma_{r_{\max}}$ и $\sigma_{\varphi_{\max}}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{r_{\max}}(r) = 545 \rho_n c_n / r^{2.5}; \quad (2.85)$$

$$\sigma_{\varphi_{\max}}(r) = (c_1 + c_2 r) \sigma_{r_{\max}}(r), \quad (2.86)$$

где c_1 и c_2 – безразмерные коэффициенты, определяемые зависимостями

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 0,09 + 0,228 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n, \\ c_2 &= -(0,07 - 0,224 \cdot 10^{-7} \rho_n c_n) 10^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

При этом надо иметь в виду, что указанные выше зависимости (2.78) и (2.84) получены при взрыве зарядов тротила с плотностью $1,6 \cdot 10^3$ кг/м³ и теплотой взрывчатого превращения 4440 кДж/кг. В этом случае при взрыве сосредоточенных зарядов других ВВ можно пользоваться этими же зависимостями, но для этого надо найти радиус заряда используемого ВВ, эквивалентного по энергии взрыва заряда тротила:

$$R_{03}^* = R_{03} \left(\frac{\rho_{\text{ВВ}} Q_{\text{ВВ}}}{\rho_{\text{тр}} Q_{\text{тр}}} \right)^{1/3}, \quad (2.88)$$

где $\rho_{\text{ВВ}}$, $Q_{\text{ВВ}}$ и $\rho_{\text{тр}}$, $Q_{\text{тр}}$ – плотность и теплота взрывчатого превращения используемого ВВ и тротила; R_{03} – радиус заряда используемого ВВ.

Полученный эквивалентный радиус заряда и вводится в приведенные зависимости при вычислении относительных расстояний и всех величин, определяющих параметры волны напряжений.

Аналогично надо поступать и с формулами, приведенными для удлиненного заряда, т. е. с зависимостями (2.85) и (2.86), полученными для зарядов тэна с $\rho_t = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $Q_t = 5860$ кДж/кг. Поэтому при расчете по этим формулам следует найти радиус заряда взятого ВВ, эквивалентного по энергии взрыва заряда тэна:

$$R_{03}^* = R_{03} [\rho_{\text{ВВ}} Q_{\text{ВВ}} / (\rho_t Q_t)]^{1/2}, \quad (2.89)$$

где ρ_t , Q_t и $\rho_{вв}$, $Q_{вв}$ — плотность и теплота взрывчатого превращения тена и используемого ВВ; R_{0z} — радиус заряда используемого ВВ.

Отметим, что приведенные выше зависимости получены экспериментально-теоретически [4] для средней зоны взрыва, т.е. для относительных расстояний $r = 20 \div 100$, а для удлиненных зарядов они к тому же справедливы на площадках, параллельных оси и расположенных примерно посередине длины этих зарядов. В остальных точках пространства, окружающих удлиненный заряд, максимальные амплитуды и вид эпюр напряжение–время будут иметь другие значения амплитуд и иной вид эпюр. Для качественной оценки действия волны напряжений в горных породах, вызванных взрывом удлиненных зарядов, приведенные зависимости вполне пригодны и дают удовлетворительные результаты по прогнозированию действия промышленных взрывов.

3. Физическое моделирование действия взрыва при разрушении горных пород

В научных исследованиях, при конструировании и создании машин в настоящее время широко применяется физическое моделирование, теоретической основой которого является теория подобия и размерностей. Физическое моделирование особенно широко применяется при изучении различных явлений, связанных с процессом разрушения горных пород взрывом.

Суть физического моделирования заключается в приеме или методе исследования с использованием физических (технических) моделей и в экстраполяции результатов этого исследования на натурное (изучаемое) явление с целью получения необходимых сведений о характере протекающих процессов и изменении различных величин интересующего явления в натуре. При этом физической моделью является предмет или специальное устройство, способное замещать натуральный объект, ее изучение дает новую информацию об этом объекте. В простейшем случае физическая модель воспроизводит изучаемое явление с сохранением геометрического подобия и физической природы, отличаясь от природы лишь размерами и скоростью протекания процесса. В более сложных случаях модель изготавливают из материалов, отличных от природы, но при обязательном соблюдении условий подобия при их подборе, т.е. используют модели из эквивалентных материалов.

3.1. Сущность методов физического моделирования, основанных на механическом подобии Ньютона, и примеры их использования

3.1.1. Теоретические основы методов механического моделирования

В основу рассматриваемых методов моделирования положена теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобия:

$$\begin{aligned} l_{n1}/l_{m1} &= l_{n2}/l_{m2} = \dots = l_{nn}/l_{mn} = l_c, \\ t_{n1}/t_{m1} &= t_{n2}/t_{m2} = \dots = t_{nn}/t_{mn} = t_c, \\ m_{n1}/m_{m1} &= m_{n2}/m_{m2} = \dots = m_{nn}/m_{mn} = m_c, \end{aligned}$$

где l_{n1} и l_{m1} ; t_{n1} и t_{m1} ; m_{n1} и m_{m1} — соответствующие линейные размеры, времена и массы для природы и модели; l_c , t_c и m_c — соответственно геометрический, временной и массовый масштабы подобия.

Как известно, механическое подобие по Ньютону сводится к равенству в модели и в природе критерия подобия Ньютона, который вытекает из второго закона Ньютона и имеет вид $F/(ma) = \text{idem}$, или в терминах модели и природы

$$F_n/(m_n a_n) = F_m/(m_m a_m). \quad (3.1)$$

Учитывая, что масса является произведением плотности на объем, соотношение (3.1) можно записать в виде

$$F_n/(\rho_n l_n^3 a_n) = F_m/(\rho_m l_m^3 a_m). \quad (3.2)$$

Если ограничиться решением задач, рассматривающих, в основном, веса и напряжения, возникающие в породе под действием внешних сил, то в критерии подобия Ньютона ускорение a будет иметь значение ускорения свободного падения g , т. е. $a = g$. Кроме того, вводя в формулу (3.2) обозначения удельного веса $\gamma = \rho g$ и напряжения $\sigma = F/l^2$, подразумевая под этим предельные напряжения материалов (пределы прочности на сжатие, растяжение, сдвиг, а также деформационные характеристики пород: модуль упругости, сдвига и т. п.), можно записать выражение (3.2) в виде

$$\sigma/(l\gamma) = \text{idem}; \quad \sigma_n/(l_n \gamma_n) = \sigma_m/(l_m \gamma_m). \quad (3.3)$$

Из полученного критерия (3.3) вытекают три случая.

1. Если модель и натура составлены из одного материала, тогда $\gamma_n = \gamma_m$, $\sigma_n = \sigma_m$, а значит, согласно (3.3), $l_n = l_m$ и, следовательно, не имеет места моделирование вообще, так как для моделирования предполагается условие $l_n \neq l_m$ и наличие геометрического масштаба $i_c = l_n/l_m$. В этом случае при моделировании рассматривают другие дополнительные критерии, например при наличии внешних сил критерий Фруда $v^2/lg = \text{idem}$. Из него следует, что при равенстве $g_n = g_m$ и произвольности геометрического масштаба $i_c = l_n/l_m$ необходимо в модели скорости протекания процессов уменьшить в $i_c^{1/2}$ раз, т. е.

$$v_n^2/(l_n g_n) = v_m^2/(l_m g_m); \quad v_m = v_n \sqrt{l_m/l_n} = v_n/l_c^{1/2}; \quad v_c = v_n/v_m = l_c^{1/2}. \quad (3.4)$$

Учитывая, что $v = l/t$, из предыдущего равенства вытекает масштаб для времени

$$v_n/v_m = l_c^{1/2} = l_n/l_m \cdot t_m/t_n = l_c/t_c; \quad t_c = l_c^{1/2}.$$

2. Если по-прежнему считать материал модели и природы одинаковым, т.е. $\sigma_n = \sigma_m$, а $l_n \neq l_m$, то для моделирования необходимо, чтобы в соответствии с равенством (3.3)

$$\gamma_m = \gamma_n l_n/l_m = \gamma_n l_c. \quad (3.5)$$

Следовательно, в этом случае модель необходимо каким-либо образом искусственно утяжелить. Обычно это достигается с помощью центробежных сил, т.е. при вращении на центрифуге или при линейном ускорении модели на специальных устройствах (линейных ускорителях).

3. Если все величины, входящие в критерий (3.3), не равны друг другу в модели и натуре, т.е. $\gamma_n \neq \sigma_m$, $\gamma_n \neq \gamma_m$ и $l_n \neq l_m$, что имеет место в случае применения в модели иного по сравнению с натурой материала, подобранного в соответствии с равенством

$$\sigma_m = \sigma_n l_m \gamma_m / (l_n \gamma_n) = \sigma_n / (l_c \gamma_c), \quad (3.6)$$

то говорят о моделировании методом эквивалентных материалов. В соответствии с вышеуказанными двумя последними случаями выполнения критерия подобия Ньютона при физическом моделировании явлений, связанных с учетом веса, используют метод эквивалентных материалов либо метод центробежного моделирования. В последние годы для этих целей стали использовать и другие методы: методы фотомеханики (фотоупругость, фотопластичность, фотоползучесть), различные методы моделирования с образцами горных пород (оптический и рентгеноимпульсный методы и др.). Методы фотомеханики при моделировании исходят из соотношений, вытекающих из метода эквивалентных материалов, так как имеют дело не с самими горными породами, а с оптически активными материалами, обладающими эффектом лучепреломления при их нагружении, но отличными по механическим характеристикам от горных пород. Методы моделирования с образцами пород будут рассмотрены отдельно в следующих параграфах. Здесь же остановимся более подробно на методах моделирования с помощью эквивалентных материалов, центробежного моделирования и фотоупругости, как наиболее хорошо разработанных в настоящее время из всех методов фотомеханики.

3.1.2. Моделирование волны напряжений с помощью метода эквивалентных материалов

Метод эквивалентных материалов применяется для исследования вопросов, связанных с проявлением горного давления, например, при исследовании действия горного давления в очистных и подготовитель-

ных выработках при разработке месторождений полезных ископаемых, изучении вопросов вспучивания пород, сдвижения массивов и других физических процессов в массивах. Впервые он разработан Г.И. Кузнецовым.

Как правило, изучение этих вопросов аналитически или практически связано с большими трудностями. Поэтому использование метода моделирования в этих случаях имеет большое значение.

Сущность метода моделирования заключается в том, что на физических моделях, копирующих с известными допущениями при соблюдении геометрических условий подобия геологическую структуру рассматриваемой естественной залежи, пласта или свиты пластов, где проходятся выработки, изучаются интересующие физические процессы, а результаты этих исследований используются для разработки практических рекомендаций для промышленности.

В основе метода лежит теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобия и сводится к условию (3.6). Отсюда следует, что, зная механические свойства материала природы σ_n и задавшись соотношениями $l_n/l_m = l_c$ и γ_m/γ_n , можно получить значения механических свойств материала модели σ_m , которые необходимы для выполнения критерия подобия (3.6), а значит и выбора эквивалентного материала. В этом и заключается суть рассматриваемого метода эквивалентных материалов.

Обычно при подборе эквивалентных материалов в качестве определяющих характеристик прочности пользуются совокупностью значений временного сопротивления на сжатие $\sigma_{сж}$, растяжение $\sigma_{отр}$ или же совокупностью значений коэффициента сцепления $\sigma_{сц}$ и угла φ внутреннего трения для пород и грунтов. В этом случае соблюдаются равенства

$$\begin{aligned}(\sigma_{сж})_m &= (\sigma_{сж})_n \frac{l_m \gamma_m}{l_n \gamma_n}, \\(\sigma_{отр})_m &= (\sigma_{отр})_n \frac{l_m \gamma_m}{l_n \gamma_n}, \\(\sigma_{сц})_m &= (\sigma_{сц})_n \frac{l_m \gamma_m}{l_n \gamma_n}, \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \operatorname{tg} \varphi_m.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Для подобия процессов упругих деформаций соблюдаются равенства

$$\begin{aligned}F_m &= F_n \frac{l_m \gamma_m}{l_n \gamma_n}, \\ v_n &= v_m,\end{aligned}\quad (3.8)$$

где E_n , E_m — модули упругости материалов соответственно природы и модели; v_n , v_m — соответственно коэффициенты Пуассона этих материалов.

Для подобия процессов пластических деформаций во всем диапазоне

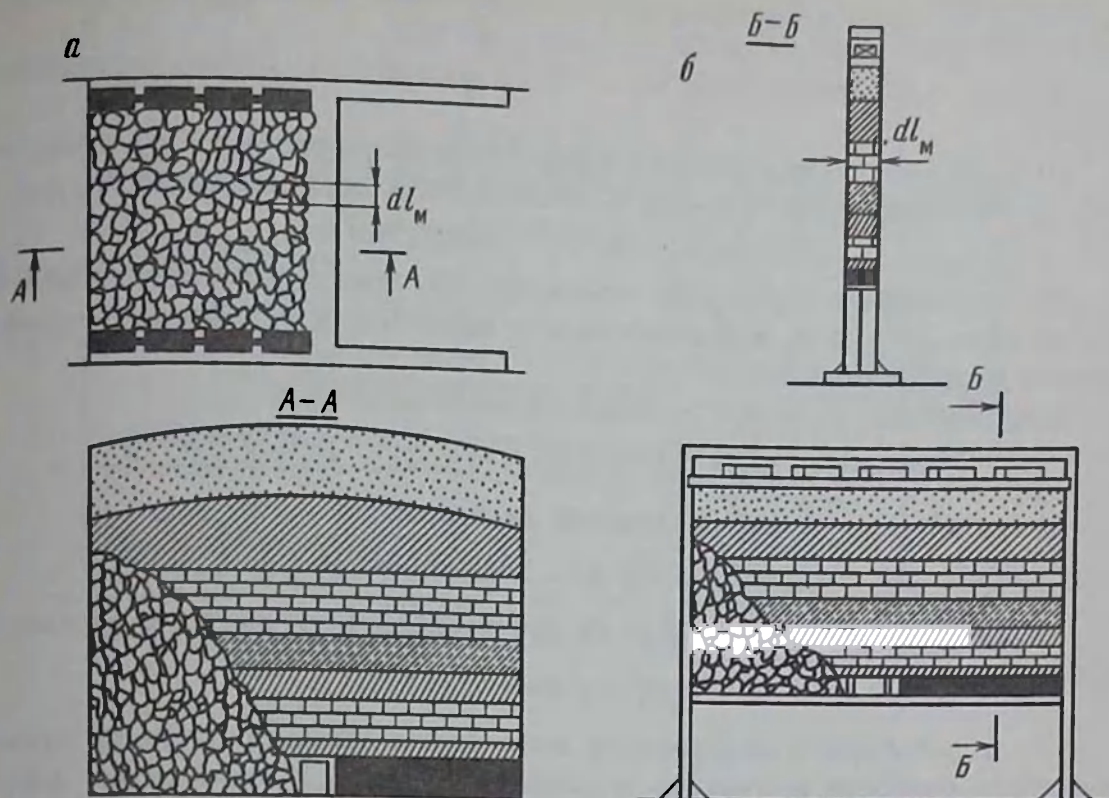


Рис. 9. Схема моделирования деформаций горных пород методом эквивалентных материалов:

a – структура натурального пласта; *б* – плоская модель этого пласта

напряжений от нулевых до разрушающих без учета влияния времени должно соблюдаться следующее условие

$$\frac{(\epsilon_n)_m}{(\epsilon_y)_m + (\epsilon_n)_m} = \frac{(\epsilon_n)_n}{(\epsilon_y)_m + (\epsilon_n)_n} \quad (3.9)$$

При этом имеет место равенство

$$\epsilon_y + \epsilon_n = f(\sigma), \quad (3.10)$$

где ϵ_y , ϵ_n – упругая и пластическая относительные деформации.

Помимо прочностных и упругопластических характеристик для отдельных слоев модели обеспечивается подобие начальных и граничных условий. Модель должна представлять копию уменьшенного геологического разреза пород в природе от поверхности земли до места заложения выработки (рис. 9). Если нельзя разместить в модели все пласты, встречающиеся в природе, то обязательно воспроизводят несколько пластов, непосредственно прилегающих к выработке. Вес остальных вышележащих пластов моделируется в соответствии с условием (3.6) с помощью специальной пригрузки модели сверху, т.е. выполняя для оставшегося слоя грунта $(h_{oc})_n$ условие

$$G_{np}/S_{np} = (\gamma_{oc} h_{oc})_n / (\gamma_c l_c), \quad (3.11)$$

где S_n и N_n — вес пригрузки и площадь, занимаемая ей; $(\gamma_{oc})_n$ — удельный вес оставшегося слоя грунта натурального пласта.

Кроме того, обеспечивается также и подобие скорости подвигания забоя.

При выборе и определении масштабов моделирования обычно исходят из исходных независимых, произвольно задаваемых масштабов

$$l_c = l_n/l_m; \quad g_c = 1; \quad \gamma_c = \gamma_n/\gamma_m.$$

Все остальные масштабы получают из этих трех произвольных масштабов l_c , g_c и γ_c в соответствии с известными уравнениями связи между их величинами.

Масштаб сил $F_c = m_c a_c = m_c g_c = m_c$;

$$g_c = 1; \quad m_c = \rho_c l_c^3 = \gamma_c l_c^3 / g_c = \gamma_c l_c^3; \quad F_c = \gamma_c l_c^3.$$

Масштаб напряжений и модулей упругости

$$\sigma_c = F_c / l_c^2 = \gamma_c l_c; \quad E_c = \sigma_c = \gamma_c l_c.$$

Масштаб времени для упругих деформаций получается из соотношения

$$g_c = l_c / t_c^2, \text{ откуда } t_c = l_c^{1/2}.$$

Для пластических деформаций напряжение пропорционально коэффициенту вязкости материала в единицу времени. В этом случае масштаб времени

$$t_c = t_n / t_m = \eta_n \sigma_m / (\eta_m \sigma_n) = \eta_n l_m \gamma_m / (\eta_m l_n \gamma_n) \text{ или } t_c = \eta_c / (l_c \gamma_c),$$

где η_c — масштаб коэффициента динамической вязкости.

При подборе эквивалентных материалов используются условия динамического подобия (3.6)–(3.11) в соответствии с изучаемой задачей. При этом в качестве исходных материалов для модели применяют кварцевый песок, молотую слюду, мел, глину и вяжущие вещества — гипс, парафин, вазелин, которые должны отвечать определенным требованиям и физическим свойствам. Процедура подбора весьма скрупулезна, требует специального оборудования, как минимум состоящего из следующей аппаратуры и приборов [9]: набора сит со встряхивающим прибором для определения гранулометрического состава; пневматического поверхностномера Т-3 для определения удельной поверхности порошкообразных материалов; встряхивающего столика и ручного копра для изготовления образцов для испытаний; бегунов для истирания материалов; конуса «Стройцнил» для определения консистенции материала; прибора ВИКа для определения сроков схватывания гипса; технических и аналитических весов; термостатов, термометров, электроплиток, набора посуды и др.

Для определения механических характеристик материалов необходимо иметь приборы с большой чувствительностью. При этом используются образцы непосредственно из слоев модели. В качестве силовых приборов используются маятниковые силоизмерители: на изгиб — прибор М. Ф. Шкляровского, на срез — прибор Г. Л. Фисенко, на сжатие — четырехтонный лабораторный пресс.

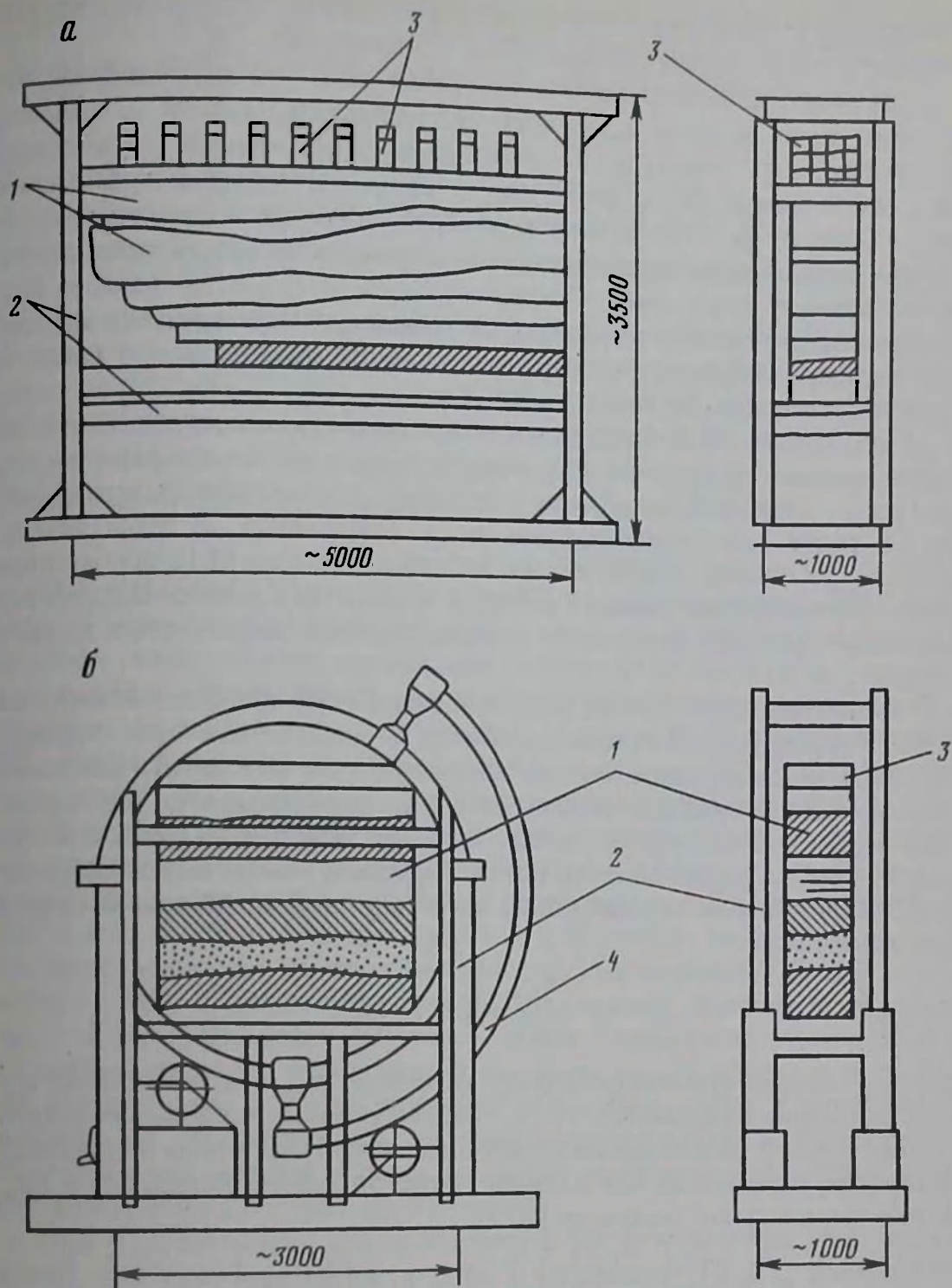


Рис. 10. Лабораторные стенды:
a – плоский неподвижный; *б* – плоский поворотный; 1 – модель пластов горных пород; 2 – рама стенда; 3 – дополнительная пригрузка модели; 4 – поворотное устройство

Модели размещаются в горизонтальных, плоскоповоротных стендах, а также в трех мерных лабораторных стендах (рис. 10).

При моделировании ведутся измерения абсолютных смещений отдельных точек модели и деформаций элементов модели. Смещения отдельных точек регистрируются спаренными шкаловыми микроскопами с увеличением от 20 до 80 раз, а также методами фотофиксации (периодическое фотографирование поверхности модели с марками-делениями). Деформация элементов модели измеряется двумя спаренными микроскопами.

Для определения напряженного состояния элементов модели используются микродинамометры с электрической (по мостовой схеме) регистрацией. Они предварительно тарируются.

В последние годы предпринимаются попытки использовать метод эквивалентных материалов для моделирования влияния взрыва на последующее поведение выработок и целиков, их устойчивость и разрушение, а также для моделирования волн напряжений. В этом случае, помимо требований механического подобия Ньютона (3.1), необходимо учесть условия динамического подобия воздействия взрыва, сводящиеся к выбору такого ВВ, которое бы вызвало такой же эффект, что и взрыв в натуре.

Рассмотрим особенности моделирования этим методом откольных явлений и разрушений стенок выработок от воздействия волн напряжений, вызванных взрывом, а также моделирование кинематики движения горной массы, вызванное поршневым действием продуктов детонации. Первые два явления определяются не только величиной максимального напряжения, но также длительностью и формой эпюры волны напряжений. Мощность откола может быть выражена следующей приближенной зависимостью

$$\delta = \frac{\sigma_{отр}}{2\sigma_{max}} c_p (\tau_+ - \tau_n),$$

где $\sigma_{отр}$ – предел прочности породы па отрыв; σ_{max} – максимальная амплитуда волны напряжений; τ_+ , τ_n – соответственно продолжительность положительной фазы и время нарастания амплитуды волны напряжений до максимума. Отсюда, при наличии геометрического подобия $\delta_n = l_c \delta_m$, можно получить соотношение [5, 7]

$$\left(\frac{\sigma_{отр}}{\sigma_{max}} \right)_n = (c_p \tau_+)_n \left[1 - \left(\frac{\tau_n}{\tau_+} \right)_n \right] = l_c (c_p \tau_+)_m \left(\frac{\sigma_{отр}}{\sigma_{max}} \right)_m \left[1 - \left(\frac{\tau_n}{\tau_+} \right)_m \right].$$

Из него вытекают следующие требования к моделированию параметров, определяющих максимальную амплитуду, форму и длительность волны напряжений

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{отр}}{\sigma_{max}} \right)_n &= \left(\frac{\sigma_{отр}}{\sigma_{max}} \right)_m, & \left(\frac{\tau_n}{\tau_+} \right)_n &= \left(\frac{\tau_n}{\tau_+} \right)_m, \\ (c_p \tau_+)_n &= l_c (c_p \tau_+)_m & \text{или} & \lambda_n = l_c \lambda_m. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Учитывая условия моделирования методом эквивалентных материалов (3.6) и $g_c = l_c/t_c^2 = 1$, из требований (3.12) легко получить и масштабы моделирования указанных параметров волны напряжений

$$\begin{aligned}(\sigma_{\max})_н / (\sigma_{\max})_м &= (\sigma_{\text{отр}})_н / (\sigma_{\text{отр}})_м = \sigma_c = \gamma_c l_c, \\ (\tau_н)_н / (\tau_н)_м &= (\tau_+)_н / (\tau_+)_м = t_c = l_c^{1/2}, \\ (c_p)_н / (c_p)_м &= l_c (\tau_+)_м / (\tau_+)_н = i_c / t_c = l_c^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Из этих соотношений следует, что масштаб амплитуды волны напряжений должен быть равен масштабу прочностных характеристик пород природы и модели, временной масштаб — меньше, чем при взрыве зарядов в одной и той же породе, где $t_c = i_c$, а масштаб скорости распространения волн должен быть одинаков с масштабом времени. При этом масштаб скорости смещения в волне напряжений получается из $\sigma_m = \rho_n c_p v_m$, раскрыв ее $(\rho_n c_p v_m)_н / (\rho_n c_p v_m)_м = (\gamma_c l_c v_m)_н / (\gamma_c l_c v_m)_м = \sigma_c = \gamma_c l_c$ и учитывая из (3.13) масштаб для $(c_p)_c = i_c^{1/2}$, имеем

$$\gamma_c l_c^{1/2} v_c = \gamma_c i_c; \quad v_c = l_c^{1/2}. \quad (3.14)$$

Из выражений (3.13) и (3.14) следует, что при моделировании параметров волны напряжений в явлениях откола и обрушений выработок методом эквивалентных материалов расширенный закон геометрического подобия, справедливый для моделирования волны напряжений в одной и той же среде, не выполняется. Задача состоит в выборе такого ВВ, чтобы параметры волны, вызванные его взрывом, удовлетворяли условиям (3.13) и (3.14), т.е. наряду с соблюдением геометрического подобия размеров выработок, геологического разреза пластов и зарядных камер необходимо подобрать такой источник взрыва, при котором волны распространялись с меньшей скоростью, а сама волна напряжений имела бы большую длительность и меньшую интенсивность, чем это имеет место при взрыве геометрически уменьшенного заряда в среде природы. Это, по-видимому, можно осуществить, используя в модели либо менее бризантные ВВ, либо заряды специальной конструкции с кольцевым зазором, заполненным воздухом или различными пористыми материалами, а также применяя новые ВВ в смеси с различными веществами, обеспечивающие условия моделирования. В этих случаях окончательное решение вопроса потребует дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

При моделировании закономерностей распространения волн напряжений, как показано выше в разд. 2 и работах [3, 4], необходимо равенство критериев подобия Эйлера, Коши и числа гомохронности

$$\sigma / (\rho v^2) = \text{Э}, \quad v / \sqrt{E\varepsilon/\rho} = C_0, \quad vt/l = \text{Н}.$$

Из критериев Эйлера и Ньютона вытекает критерий Фруда, после деления первого на второй,

$$\begin{aligned}[\sigma / (\rho v^2) / \sigma / (\gamma l)] &= \gamma l / (\rho v^2) = gl / (v^2) \quad \text{или} \\ v^2 / (gl) &= \text{Fr},\end{aligned}$$

из которого легко получить масштаб скорости, раскрыв его в соответствующих величинах для природы и модели

$$v_n^2/(g_n l_m) = v_m^2/(g_m l_m) \rightarrow v_n/v_m = v_c = \sqrt{l_n g_n / (l_m g_m)} = \sqrt{l_c g_c} = l_c^{1/2},$$

что совпадает с формулой (3.14) и не противоречит методу эквивалентных материалов для упругих деформаций, когда из условий $g_c = 1$, $l_c = l_c^{1/2}$ вытекает $v_c = l_c/l_c = l_c^{1/2}$.

Из критериев Коши и Ньютона (применительно к модулю упругости) можно получить, перемножая их, критерий

$$v^2 \rho E / (\epsilon E \gamma l) = v^2 \rho / (\epsilon l \gamma) = v^2 / (\epsilon l g) = \text{idem}.$$

Деля полученный критерий на критерий Фруда, получим

$$v^2 l g / (\epsilon l g v^2) = 1/\epsilon = \text{idem}, \text{ или } \epsilon_n = \epsilon_m. \quad (3.15)$$

Это значит, что относительные деформации в материалах модели и природы должны быть одинаковы. Полученное условие (3.15) согласуется с условием метода эквивалентных материалов.

Наконец, из равенства чисел гомохронности и, учитывая масштаб скорости $v_c = l_c^{1/2}$, легко получить масштаб времени, аналогичный (3.13):

$$vt/l = \text{idem}; \quad v_c t_c / l_c = 1; \quad t_c = l_c / v_c = l_c^{1/2}.$$

Таким образом, при моделировании закономерностей распространения волн напряжений методом эквивалентных материалов задача сводится также к выбору ВВ или конструкции заряда в соответствии с вышеизложенными соображениями.

В заключение остановимся коротко на моделировании зон разрушения и дробления этим методом. Эта задача является наиболее сложной из-за моделирования структурных неоднородностей и трещиноватости, что практически выполнить трудно как по техническим возможностям, так и в силу недостаточного знания этих характеристик в природе. Поэтому моделирование этих параметров воздействия взрыва всегда является приближенным и обладает некоторым масштабным эффектом.

Следует отметить, что процесс дробления определяется как воздействием волн напряжений и квазистатического давления продуктов взрыва, создающих сеть новых трещин и раскрывающих существующие микротрещины на первой стадии взрыва – стадии предварительного разрушения горных пород, так и поршневым действием продуктов детонации на второй и третьей стадиях взрыва при выталкивании разрушенной горной породы в сторону свободной поверхности и образовании навала. Моделирование первой стадии взрыва методом эквивалентных материалов было рассмотрено выше.

Рассмотрим моделирование этим методом второй и третьей стадий взрыва – выталкивание горной массы поршневым действием продуктов детонации и образование навала или воронки выброса. В этом случае помимо учета критериев подобия Эйлера, Коши и числа гомохронности необходимо выполнение критерия Фруда, который, как показано выше, вытекает из критериев Эйлера и Ньютона при моделировании волны напряжений методом эквивалентных материалов и сводится к выше-

изложенным условиям для волны напряжений, т. е. к задаче выбора ВВ, конструкции заряда или какого-то иного источника возмущения вместо взрыва.

Таким образом, при моделировании распространения и действия волн напряжений и поршневого действия продуктов детонации методом эквивалентных материалов нарушается закон расширенного геометрического (энергетического) подобия, справедливый для модели, изготовленной из материала натуры. Необходимо в обоих случаях производить исследования по выбору источника воздействия, имитирующего действие взрыва в натуре. При этом необходимо выполнение условий (3.13) и (3.14) как для волн напряжений, так и для остаточного давления в полости взрыва p_0 и времени его воздействия τ_p . В последнем случае эти зависимости примут вид

$$(p_0)_m = (p_0)_n \frac{1}{\gamma_c l_c} = \sigma_c (p_0)_n; \quad (\tau_p)_m = \frac{(\tau_p)_n}{l_c^{1/2}}.$$

При произвольности выбора i_c и γ_c (последний стремятся приблизить как можно ближе к единице $\gamma_c = 1$) параметры источника взрыва должны подчиняться следующим условиям:

$$\begin{aligned} (p_0)_c &= (\sigma_{\max})_c = \gamma_c l_c \approx i_c; & v_c &= l_c^{1/2}, \\ (\tau_p)_c &= (\tau_n)_c = (\tau_+)_c = t_c = l_c^{1/2}, \\ (I_+)_c &= \sigma_c t_c = \gamma_c l_c^{3/2} \approx l_c^{3/2}; & (E_+)_c &= \gamma_c l_c^2 \approx l_c^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что амплитуда волны напряжений должна быть как минимум меньше таковой в натуре на масштаб геометрического подобия, массовая скорость и все временные характеристики — меньше натуральных на величину, равную корню из геометрического масштаба $l_c^{1/2}$, импульс волны напряжений — меньше на величину $l_c^{3/2}$, а плотность потока энергии волны — на квадрат геометрического подобия. Выполнение этих условий при применении ВВ типа тэна, гексогена, тротила и т. п. затруднительно, так как экспериментально показано, что в этом случае амплитуды скорости для различных горных пород в средней и дальней зонах взрыва примерно равны и подчиняются единому закону распространения с расстоянием. Это свидетельствует о том, что $v_c \approx 1$, а $v_c \neq l_c^{1/2}$, как следует из условия (3.16). Следовательно, при применении взрыва надо проводить специальные исследования по изысканию новых типов ВВ или конструкций зарядов с кольцевым зазором, заполненных специальным рыхлым материалом, снижающим интенсивность и растягивающим импульс волны напряжений в эквивалентном материале.

3.1.3. Моделирование действия взрыва в горных породах с помощью центробежного моделирования

Метод центробежного моделирования, так же как и метод эквивалентных материалов, в основном применяется для изучения вопросов, связанных с горным давлением (исследование устойчивости откосов,

напряжения грунтов под фундаментами, осадки сооружений и др.). Сейчас он стал использоваться также и для изучения поля напряжений при взрывах, явлений выброса и разлета осколков.

Метод заключается в том, что при соблюдении геометрического подобия изготавливают модель из материала природы, которую затем помещают в центрифугу, и под действием центробежных сил в модели создается повышенное ускорение для выполнения механического подобия сил, действующих в натуре.

В этом случае обычно размеры модели определяются размерами центрифугирующей установки и поэтому практические возможности метода ограничены. Это связано с тем, что работа с мелкими моделями приводит к трудностям соблюдения геометрического подобия структуры породы, ее слоистости и т. д., а работа с крупными моделями встречает трудности по созданию больших конструкций центрифуг. В связи с этим метод центробежного моделирования в практике применяется редко. Иногда он используется в сочетании с методом эквивалентных материалов.

Метод центробежного моделирования, так же как и метод эквивалентных материалов, основывается на теории механического подобия Ньютона и сводится к выполнению условия (3.5), т. е. к условию, когда для соблюдения условий подобия удельный вес материала природы в модели должен быть больше, чем в натуре, во столько раз, во сколько размеры природы больше размеров самой модели. Не изменяя физико-механических свойств материала, величину γ_m в этом случае увеличивают за счет инерционных сил, подвергая модель движению с некоторым ускорением a . Тогда имеем $\gamma_m = \rho a$, $\gamma_n = \rho g$. Отсюда из равенства (3.5) получим

$$\gamma_m = \gamma_n i_c, \quad a = i_c g, \quad (3.17)$$

т. е. на модель должно действовать ускорение, превосходящее ускорение свободного падения на величину линейного масштаба i_c .

Скалярная величина полного ускорения модели, размещенной на центрифуге с вертикальной осью

$$a = \sqrt{g^2 + (\omega^2 R)^2}, \quad (3.18)$$

где g – ускорение свободного падения; ω – угловая скорость; R – расстояние от рассматриваемой точки модели до оси вращения центрифуги.

Из выражений (3.17) и (3.18) легко получить значения

$$\omega = \sqrt{g/R} \sqrt[4]{i_c^2 - 1},$$

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{g/n} \sqrt[4]{i_c^2 - 1}, \quad (3.19)$$

где n – число оборотов в минуту, равное $\frac{60}{2\pi} \omega$.

Из формулы (3.18) видно, что каждая точка модели, находящаяся на своем радиусе-векторе R , должна вращаться со своей угловой ско-

ростью ω , что практически неосуществимо на центрифуге. При этом погрешность будет определяться изменением ускорения a с изменением R . Из формулы (3.18) имеем

$$a_1 = \sqrt{g^2 + \omega^4 (R+h)^2}, \quad a = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2},$$

$$\Delta a/a = (a_1 - a)/a = a_1/a - 1 = (\sqrt{g^2 + \omega^4 (R+h)^2} / \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2}) - 1,$$

поскольку $\omega^2 \bar{R} \gg g$, приближенно погрешность

$$\delta a = \Delta a/a \approx \frac{\omega^2 (R+h)}{\omega^2 R} - 1 = \frac{R+h}{R} - 1 = h/R. \quad (3.20)$$

Следовательно, центробежное моделирование является приближенным, а погрешность будет тем меньше, чем меньше размер модели по сравнению с радиусом вращения.

Применение эквивалентных материалов в рассматриваемом методе центробежного моделирования может, с одной стороны, уменьшить и угловую скорость вращения центрифуги ω при $\gamma_{\text{м}} > \gamma_{\text{н}}$, а значит, и увеличить размеры центрифуги, снижая погрешность δa . Условие $\gamma_{\text{м}} < \gamma_{\text{н}}$ приводит к увеличению l_c на величину $\gamma_{\text{н}}/\gamma_{\text{м}} > 1$, а это связано с увеличением ω и уменьшением размеров центрифуги. Последнее снова приводит к увеличению погрешности δa . При этом в обоих случаях применение эквивалентных материалов является нежелательным при исследовании действия взрыва, так как оно связано с неисследованным вопросом выбора ВВ или конструкции заряда, вносящим дополнительные погрешности и технические трудности. Поэтому при взрыве целесообразно в качестве модели использовать образцы горных пород, уменьшенные на величину масштаба геометрического подобия l_c .

Из практических соображений и опыта использования метода для исследования действия взрыва считают, что реальный радиус вращения центрифуги $\bar{R}_{\text{н}}$ должен быть равен 2–3 м.

Г. И. Покровский считает, что погрешность наблюдений в результате принятых допущений (пренебрежения размерами модели по сравнению с $R_{\text{н}}$) будет расти пропорционально масштабу геометрического подобия, т. е.

$$\delta_{\text{наб}} = l_c \delta_{\text{изм}},$$

где $\delta_{\text{наб}}$ – средняя квадратическая погрешность наблюдений; l_c – геометрический масштаб подобия, $\delta_{\text{изм}}$ – средняя квадратическая погрешность принятого метода измерений.

Из приведенных оценок точности метода следует, что центробежное моделирование, говоря вообще, хорошо для статических задач распределения напряжений и деформаций, когда удастся существенно снизить погрешность измерений $\delta_{\text{изм}}$. Для быстротечных деформаций и обрушений модели этот метод может дать значительное искажение и требует специального исследования и обоснования. Центробежное моделирование дает хорошие результаты при моделировании задач, связанных с фильтрацией и вязкими деформациями, так как при этом скорость процесса в модели увеличивается в l_c раз, время в l_c^2 раз, т. е.

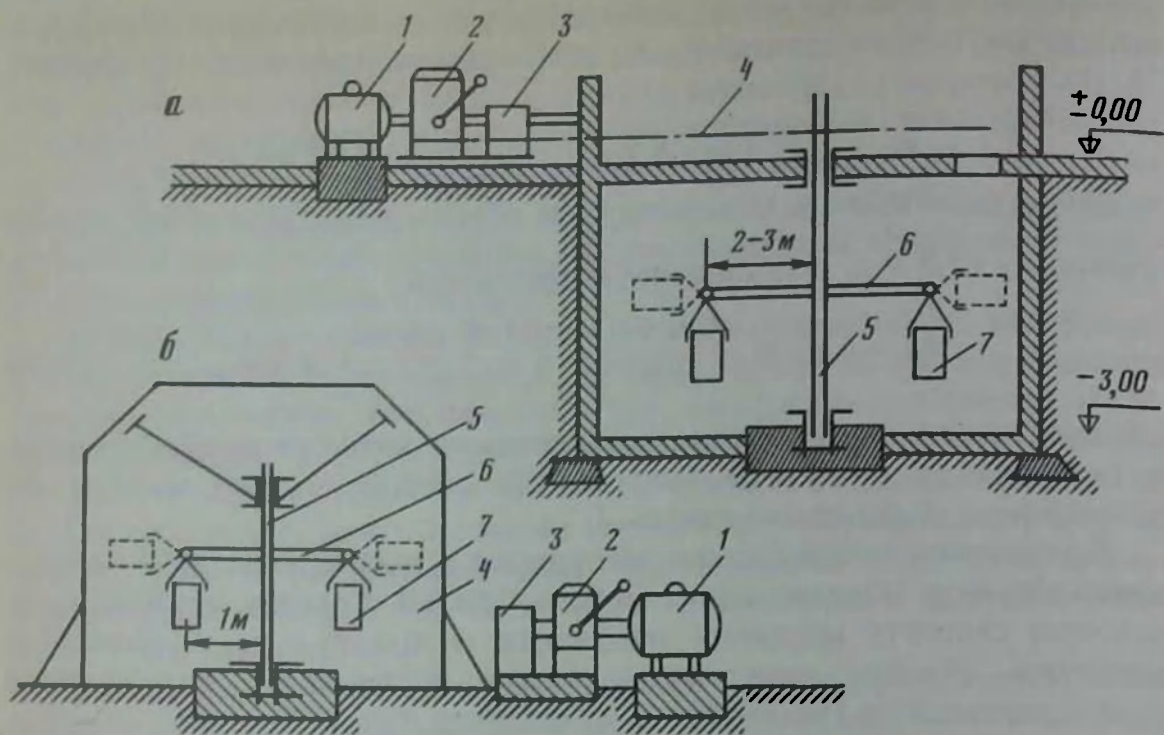


Рис. 11. Конструкция центрифуг:
 1 — двигатель; 2 — коробка скоростей; 3 — редуктор; 4 — передача вращения от двигателя на ось 5; 6 — коромысло; 7 — каретки моделей

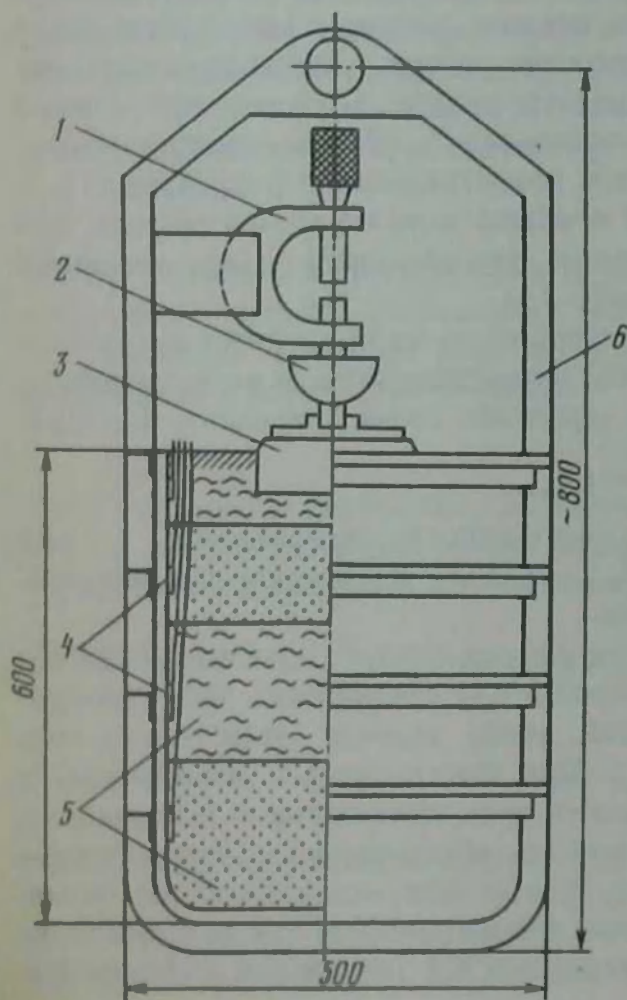


Рис. 12. Моделирование усадки фундамента (штампа) в грунте на центрифуге:
 1 — микрометр; 2 — сосуд для ртути; 3 — штамп; 4 — динамометры; 5 — модели пластов грунта; 6 — каретка центрифуги

имеет место довольно быстрая стабилизация увлажненных грунтов и вязких процессов.

В настоящее время используют центрифуги-коромысло, вращающиеся вокруг вертикальной оси. В перспективе можно использовать более современные центробежные машины иного типа, например кольцевого, когда модель помещена в лоток, движущийся в специальной кольцевой камере по замкнутому круговому рельсовому пути.

Заметим, что при центробежном моделировании имеет место так же, как и в методе эквивалентных материалов, использование пригрузок в том случае, если копия всех пластов над выработкой не размещается в каретке центрифуги или получается слишком большая высота модели. Тем самым уменьшается высота модели, что также благоприятно сказывается на погрешности моделирования. Наконец, на погрешности моделирования также сказывается трение породы о стенки каретки центрифуги. Для его некоторого ослабления вводят смазку внутренних стенок каретки, а саму каретку выполняют в виде усеченного конуса, чтобы при обжати породы образовывалась бы щель и тем самым исключался боковой распор, искажающий напряженное состояние породы.

В настоящее время различают две группы современных центрифуг: большие (рис. 11, а) и малые (рис. 11, б). Первые устанавливаются в специальных подвальных помещениях и имеют радиусы подвески модели 2–3 м от оси вращения. Малые центрифуги ставятся в ограждениях и имеют радиус подвески моделей до 1 м от оси вращения.

Схема моделирования усадки фундамента в грунте приведена на рис. 12.

Все современные центрифуги оснащены специальными коллекторами, позволяющими осуществлять передачу показаний десятков датчиков различных систем и назначений, а также управлять изменением нагрузок на модель.

Центрифуги оборудуются контрольно-измерительной аппаратурой, связанной с осью вращения центрифуги, а также аппаратурой и приборами, применяемыми при моделировании статических и динамических процессов в горной породе.

Простейший прибор для измерения усадки грунта – шпигемасштаб, состоящий из градуированного металлического стержня, перемещающегося в специальной обойме микровинтом. Он применяется для измерения профиля, объема, откоса модели. Используется также для этих целей профилемер (две пластины, круглые металлические стержни и зажимы). Им можно регистрировать приближенные деформации профиля с точностью около 0,2 мм.

Для измерения напряжений в грунтовой модели, давления грунта на подпорную модельную стенку или крепь применяют различные динамометры. Например, аэростатический динамометр, который состоит из коробки овальной формы, заполненной окрашенным глицерином, капилляра и диафрагмы. Давление подсчитывается с учетом закона

Клапейрона. Используют динамометры с различными тензодатчиками, а также мембранные проволочные тензодатчики.

Для измерения деформаций и перемещений применяют сельсины – самосинхронизирующиеся электрические микромашины для плавной синхронизации передачи на расстоянии угла поворота вала другой микромашины. Измерение осадки производится дистанционным автоматическим регистратором.

Для регистрации происходящих на моделях разрушений и времени их появления применяют десять электроимпульсных счетчиков, питаемых импульсами постоянного тока за счет включения и разрывов электроцепи прерывателя. Датчиками разрушения являются полоски оловянной перфорированной фольги шириной 2 мм, заложенные в месте ожидаемого разрушения.

Для измерения деформации на моделях используют также индукционные приборы различной конструкции, тензодатчики с малогабаритной базой (2–4 мм).

Принципиально все приборы можно разделить на две группы: к первой относят приборы, которые помещаются в породе, замещая какой-то ее объем, ко второй – приборы для измерения деформаций какого-либо элемента породы внутри массива.

Для визуального наблюдения применяют стробоскопы в сочетании с фотокиносъемочной и телевизионной аппаратурой. Стробоскоп – сравнительно простой прибор, позволяющий фиксировать по методу лупы времени быстропротекающие периодические процессы. С его помощью можно следить за вибрацией и деформацией моделей.

При центробежном моделировании явлений, вызванных взрывом в горных породах, выполнение критериев подобия Эйлера и числа гомохронности для одинаковых сред модели и природы приводит к сформулированному в работе [5] расширенному закону геометрического подобия для волн напряжений. При этом критерий Коши выполняется автоматически, а критерий Фруда, необходимый для явлений, связанных с поршневым действием взрыва, т.е. явлений образования котловой полости, выброса, разлета и навала горной массы, выполняется за счет ускорения (3.18), создаваемого вращением центрифуги.

Следовательно, в этом случае моделирование сводится к выбору масштаба геометрического подобия, при этом надо учитывать технические возможности центрифуги: ее радиус и диапазон изменения угловой скорости вращения, а также предельную массу заряда модели, при которой еще возможна его стабильная детонация.

Учет возможностей центрифуг можно производить по формуле (3.19), из которой легко получается зависимость для максимального масштаба геометрического подобия:

$$l_c \leq l_{c_{\max}} = \left(\frac{\omega_{\max}^4 R_{\max}^2}{g^2} + 1 \right)^{1/2} \approx \frac{\omega_{\max}^2 R_{\max}}{g} = \frac{\pi^2 n_{\max}^2 R_{\max}}{900g},$$

где ω_{\max} или n_{\max} – максимальная угловая скорость или число оборотов

вращения центрифуги; \bar{R}_{\max} – максимальное расстояние от оси вращения до модели.

Исходя из этой зависимости, можно определить необходимую угловую скорость при выбранном i_c и заданной величине \bar{R}_{\max} , а также максимальную величину радиуса центрифуги $R_{\text{н}} = \bar{R}_{\max} - \Delta R$ при заданных i_c , ω_{\max} и ΔR – расстояние от конца коромысла до исследуемой точки модели

$$R_{\text{н}} = (g/\omega^2) \sqrt{i_c^2 - 1} - \Delta R \simeq g i_c / \omega^2 - \Delta R.$$

3.1.4. Метод фотоупругости

Метод фотоупругости или оптико-поляризационный метод в основном применяется при изучении напряженного состояния в конструкциях, машинах, сооружениях и деталях. В последние годы он используется при изучении распределения напряжений вокруг горных выработок, исследованиях процесса разрушения горных пород буровым инструментом и взрывом.

Для изучения напряженного состояния пород изготавливают модель из оптически активного материала с соблюдением геометрического и силового подобий. Через эту модель пропускают лучи поляризованного света и на экране получают поле напряжений в виде линий различных цветов или оттенков. В настоящее время применяют как плоские (наиболее распространенные), так и объемные модели. Последние используются при изучении разрушения пород буровым инструментом и взрывом.

Теоретические основы метода фотоупругости базируются на использовании закона Гука о прямой пропорциональности между напряжением и деформацией и на явлении оптической анизотропии прозрачных изотропных тел, подвергнутых действию внешних сил или при наличии в них внутренних напряжений. При этом определяются не значения нормальных напряжений σ_1 и σ_2 , а разность между ними, или максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad (3.21)$$

являющиеся основной характеристикой прочности конструкции по теории Кулона.

Основы оптического метода вытекают из общей теории света и теории поляризации света. В поляризованном свете световой вектор колеблется в определенной плоскости (плоскополяризованный свет) или в эллиптической трубке (эллиптически поляризованный свет), а не по беспорядочным направлениям в плоскости, перпендикулярной к лучу света, как при обыкновенном свете. Так, при падении обыкновенного луча света на стекло под углом преломленный и отраженный лучи оказываются плоскополяризованными и их колебания будут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 13). Причем наибольшая поляризация в этом случае достигается, если преломленный

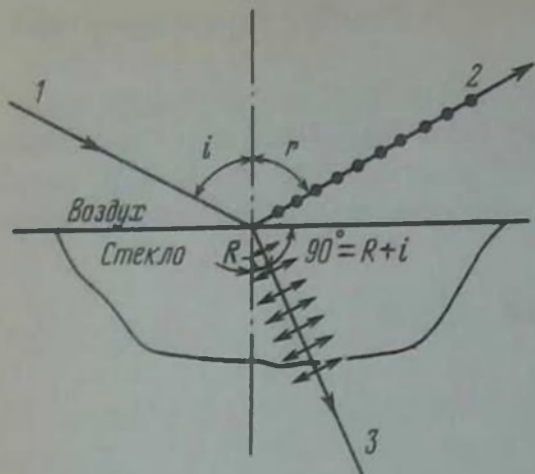


Рис. 13. Отражение и преломление световых лучей на границе воздух – стекло: i , r и R – соответственно углы падения, отражения и преломления; 1, 2, 3 – соответственно падающий, отраженный и преломленный лучи

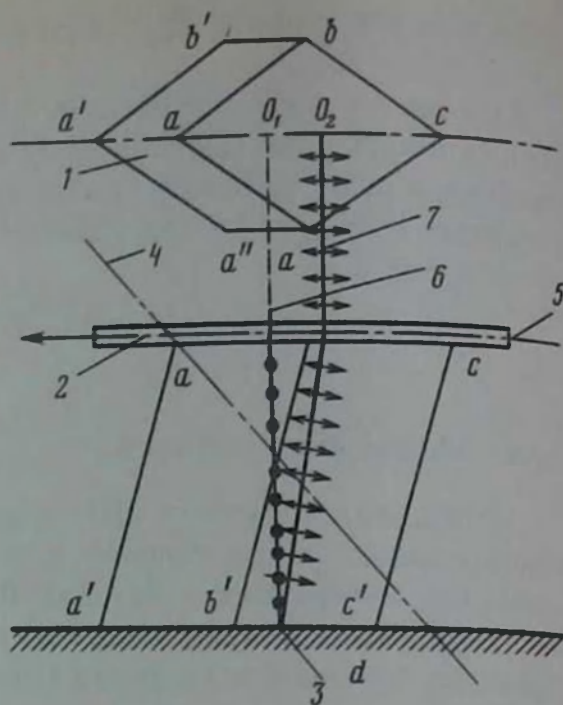


Рис. 14. Двойное лучепреломление через кристалл кальцита: 1 – кристалл кальцита; 2 – пластинка турмалина; 3 – метка; 4 – оптическая ось кристалла кальцита; 5 – ось поляризации пластинки турмалина; 6 – обыкновенный луч; 7 – необыкновенный луч

и отраженный лучи перпендикулярны друг другу. Ряд кристаллов (турмалин, слюда, кальцит) обладают свойством двойного лучепреломления (обыкновенный и необыкновенный лучи). Причем оба луча являются плоскополяризованными: колебания в обыкновенном луче перпендикулярны диагональной плоскости $aa'cc'$, а в необыкновенном лежат в этой плоскости (рис. 14). Такое явление также наблюдается и в изотропных веществах под действием нагрузки, что и используется в методе фотоупругости. Это имеет место в стекле, бакелите, целлулоиде и др. Данное свойство этих материалов временное и исчезает после снятия нагрузки.

Как известно, при плоском напряженном состоянии в каждой точке существует площадка, в которой отсутствуют касательные напряжения и действуют только главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 . Под их действием создаются соответствующие деформации, которые приводят к оптической анизотропии материала. В результате проходящий через такой материал луч разлагается на два плоскополяризованных луча, колебания в которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, параллельных направлению распространения луча и проходящих через соответствующие нормальные напряжения. Эти лучи распространяются с различными скоростями в соответствии с σ_1 и σ_2 , это приводит к оптическому сдвигу фаз и линейной разности хода, которая

на основании многочисленных опытов определяется по формуле [9]:

$$\Gamma = C_{\sigma} \delta (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (3.22)$$

где C_{σ} — оптический коэффициент напряжения; δ — толщина пластинки; σ_1, σ_2 — главные нормальные напряжения.

Выражение (3.21) можно представить с учетом формулы (3.22) в следующем виде.

$$\Gamma = 2C_{\sigma} \delta \tau_{\max}. \quad (3.23)$$

Определение разности хода Γ основывается на свойстве поляризованного света в зависимости от частоты колебания давать различные цвета (как частота звуковых колебаний определяет высоту звука).

Известно, что для каждого монохроматического (однородного по частоте) света имеется вполне определенная длина волны

$$\lambda = vT = v/p_{\kappa}; \quad \lambda = c^*/p_{\kappa},$$

где v и c^* — скорость распространения света в материале и в пустоте; T и p_{κ} — период и частота колебания волны. Поэтому, получая на экране разные цвета, можно, зная заранее соотношение между цветом и длиной волны, определить и разность хода $\Gamma = n\lambda$ (где n — порядок полосы, цвета) и τ_{\max} из выражения (3.23), т. е.

$$\tau_{\max} = n\lambda / (2C_{\sigma}\delta) = \tau_0^{1,0} n / \delta, \quad (3.24)$$

где $\tau_0^{1,0}$ — оптическая постоянная материала (цена полосы), которая представляет собой величину напряжения, необходимую для изменения порядка полосы n на единицу, и определяется предварительно на образце материала модели методом сопоставления цветов или полос и методом компенсаций.

При методе сопоставления цветов искомая разность хода определяется непосредственно по цветной картине изохром, полученной при обычном (белом) источнике света, путем сопоставления их с интерференционными цветами эталонных колец Ньютона, например, по таблице, приведенной в работе [9], где дается порядок полосы, порядковый номер цвета с его характеристикой и разность хода лучей (в ммк). Метод полос используется при применении монохроматического источника света. При этом определяется порядковый номер полос изохор и цена полосы материала, полученные предварительно при тарировке применяемых оптически чувствительных материалов.

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν определяют по измерениям деформаций при помощи механического тензометра на образцах материала в виде растягиваемой полосы. Нагрузка прилагается ступенями, вычисления проводятся по формулам

$$E = mS\sigma/\epsilon_y; \quad \nu = -\epsilon_x/\epsilon_y,$$

где m и S — масштаб и база тензометра; σ — напряжение в образцах; ϵ_x, ϵ_y — относительные деформации в направлении осей x и y .

Цену полосы материала определяют по порядку полосы в центре

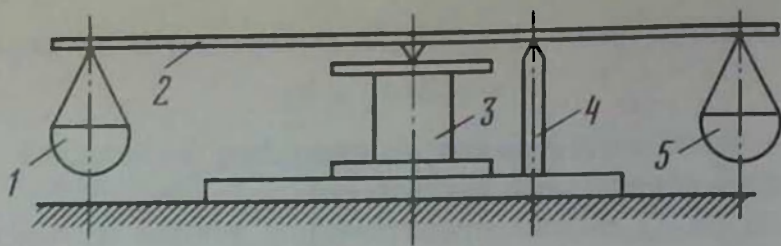


Рис. 15. Тарировочный пресс для оптических материалов

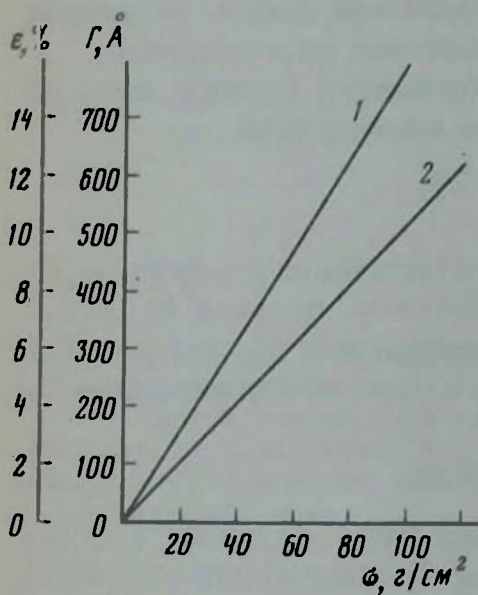
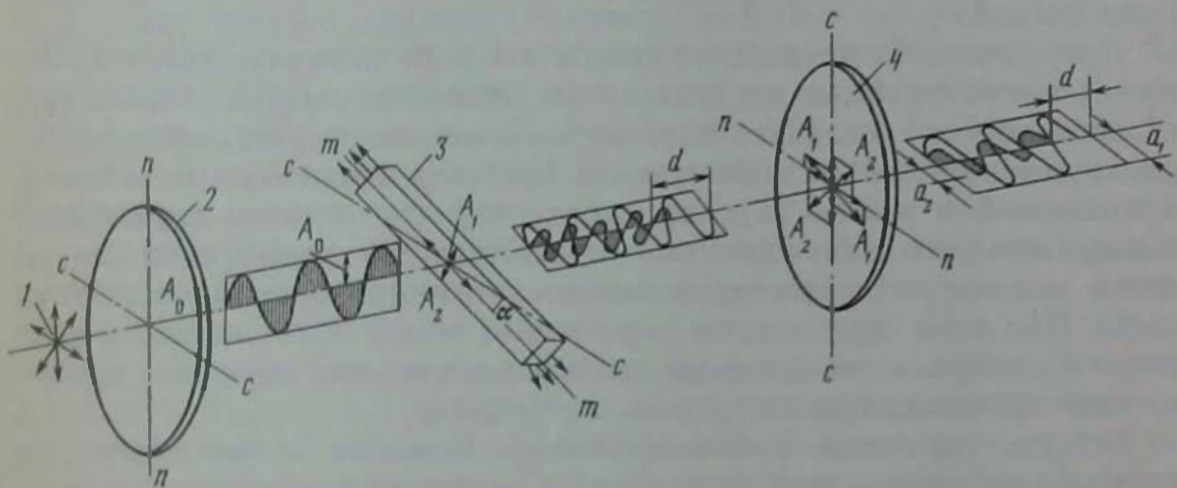


Рис. 16. Графики тарировочных зависимостей:

1 – разность хода $\Gamma = f_1(\sigma)$; 2 – деформации $\epsilon = f_2(\sigma)$

Рис. 17. Принципиальная схема оптико-поляризационной установки:

1 – источник света; 2 – поляризатор; 3 – образец (модель); 4 – анализатор; $c-c$ – горизонтальная ось поляризатора; $n-n$ – вертикальная ось поляризатора; $m-m$ – ось модели; δ – разность хода лучей; A_1 и A_2 – амплитуды поляризованных лучей



диска толщиной 1 см, сжимаемой диаметрально направленной силой P по формуле

$$C_{\sigma}^{1,0} = 8P/(\pi dn_c) \approx 2,548P/(dn_c),$$

где n_c – порядок полосы в центре диска; d – диаметр диска.

Качество материала модели характеризуется степенью деформации модели для получения необходимого оптического эффекта и оценивается показателем качества

$$K = (E/C_{\sigma}^{1,0})10^{-3}.$$

Чем выше K , тем меньшая деформация образца требуется, чтобы вызвать тот же оптический эффект.

Тарировка производится на специальном тарировочном прессе (рис. 15). Примерные тарировочные кривые приведены на рис. 16.

Тарировочный пресс позволяет создавать равномерную нагрузку на образец модели 3 наливанием воды в чашу 1 и соответствующую разгрузку наливанием воды в чашу 5, установленные на концах балансира 2, шарнирно опертого на стойку 4. По данным разности хода лучей Γ и замеренного напряжения σ_1 (деформации $\varepsilon = E/\sigma_1$) вычисляют оптический коэффициент напряжений

$$C_{\sigma} = \Gamma/(\sigma_1 \delta)$$

или оптическую постоянную $\tau_{\delta}^{1,0}$ по формуле (3.24) по замеренному числу полос n при пропускании через установку монохроматического света.

При методе компенсаций к полученной искомой разности хода в нагруженном образце модели добавляется компенсатором известная разность хода обратного знака так, чтобы при скрещенных поляроидах в измеряемой точке образца имело место затемнение, что свидетельствует о равенстве разности хода в нагруженном образце с разностью хода компенсатора.

После изложенных предварительных положений рассмотрим принцип действия оптико-поляризационной установки (рис. 17). В соответствии с этим рисунком результирующая амплитуда колебаний после анализатора

$$A_3 = a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha [\sin(\varphi - 2\pi n) - \sin \varphi], \quad (3.25)$$

где A_0 — амплитуда колебания луча после поляризатора; a_1 и a_2 — амплитуды колебаний лучей после анализатора; α — угол, составленный осью образца с горизонтальной осью, φ — угол сдвига фаз обыкновенного и необыкновенного лучей, образующийся после прохождения нагруженной модели 3 поляризованным лучом с амплитудой A_0 .

При $\varphi = -\pi n$

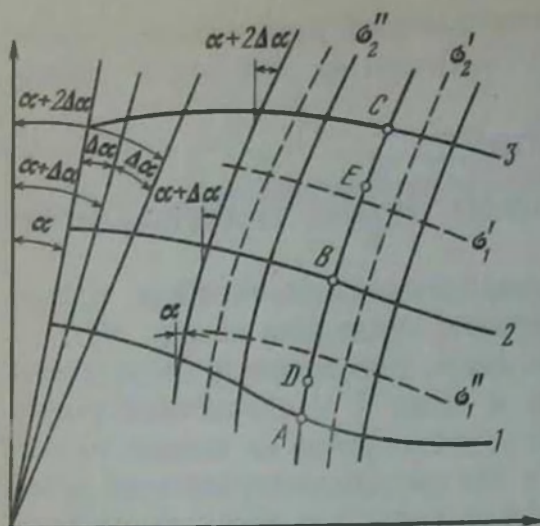
$$A_{\max} = A_0 \sin(2\alpha) \sin(\pi n).$$

Интенсивность света

$$I = A_{\max}^2 = A_0^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\pi n).$$

Максимальная интенсивность наблюдается при $\alpha = 45^\circ$. При этом имеет место яркая картина цветов (или светлые полосы при монохроматическом свете — изохоры). Кроме ярких цветов на экране возникают темные полосы и темные места, которые удовлетворяют одному из трех условий.

Рис. 18. Построение изостат:
 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma''_1, \sigma''_2$ — изостаты



1. Места, свободные от напряжений (анализатор гасит поляризатор), — это обычно все поле перед взрывом.

2. Точки, где $\sigma_1 = \sigma_2$, т.е. нет сдвига фаз, а значит, из формулы (3.25) следует

$$A_3 = a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi + (-A_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi) = 0.$$

3. Точки, для которых плоскости направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризатора и анализатора, т.е. при $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$ имеем $I = 0$, так как $\sin(2\alpha) = 0$.

Последний случай является весьма важным и используется для определения направления двух главных напряжений. Для этого вращают либо образец, либо систему анализатор — поляризатор и находят изоклины — системы темных точек, сливающиеся в темную полосу, которые меняются с изменением угла поворота анализатора (поляризатора). Таким образом, каждому углу поворота системы анализатор — поляризатор соответствует своя темная линия — изоклина. По ним строятся изостаты — кривые направления одной из главных сил напряжения σ_1, σ_2 . Они взаимно перпендикулярные, т.е. представляют собой ортогональное семейство кривых, касательные к которым совпадают с направлением главных нормальных напряжений. Принцип построения изостат показан на рис. 18.

На этом рисунке показаны изоклины 1, 2 и 3, соответствующие углам поворота $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ и $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\Delta\alpha$. Из точек A, B и C этих изоклин проведены линии под углами α_1, α_2 и α_3 к вертикали, которые пересекаются в точках D и E. Полученная ломаная линия ADBEC и представляют собой изостату — линию направления одного из главных напряжений, например σ_1 . В каждой точке изостаты под углом 90° к изолинии σ_1 направлено главное напряжение σ_2 . Таким образом, изостаты являются семейством кривых, касательные к которым совпадают с направлением главных нормальных напряжений. При этом надо помнить, что изоклины образуются меняющимися с поворотом системы анализатор — поляризатор темными точками в отличие от свободных от

напряжений мест или точек, где $\sigma_1 = \sigma_2$, которые не меняются с поворотом указанной системы.

Таким образом, при исследовании образца или модели на поляризованной установке получают значение τ_{\max} в области упругих деформаций (изохоры – светлые, цветные полосы), поле напряжений σ_1 и σ_2 и, следовательно, области пониженных и повышенных напряжений. В этом случае после изготовления плоскую модель устанавливают на пути лучей поляризованного света и наблюдают поле распределения цветов, соответствующих касательным напряжениям. При увеличении нагрузки картина распределения цветов на экране изменяется до определенных значений в зависимости от угла сдвига фаз, а затем снова повторяется в том же порядке. Так происходит несколько раз. Регистрируется картина цветных полос первого, второго, третьего, четвертого порядка и т. д. При этом порядок этих полос (число полос) прямо пропорционален увеличению касательных напряжений в соответствии с формулой (3.24).

Характер распределения цветов и их изменения под нагрузкой могут быть сфотографированы отдельными кадрами, сняты киноаппаратурой или вырисованы с указанием порядка полос.

При построении поля главных нормальных напряжений сначала строят поле изоклин при повороте поляризатора-анализатора от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90^\circ$ по отношению к осям образца или модели (при решении статических задач). Это поле снимается теми же способами, что и поле изопан (линии равных касательных напряжений), или изохор (линии главных напряжений).

Для определения главных напряжений надо еще знать их отношение, т.е. σ_1/σ_2 .

Для упругих волн за это отношение в первом приближении можно взять следующее выражение

$$\sigma_1/\sigma_2 = 1 - 2\gamma^2 = v/(1 - v), \quad (3.26)$$

где $\gamma = v_s/v_p = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}$; v_s – скорость распространения поперечных волн; v_p – скорость распространения продольных волн; ν – коэффициент Пуассона.

Все вышеизложенное относится к моделированию на плоских моделях. Используются также и объемные модели. Изучение напряженного состояния на этих моделях производится методом замораживания (наиболее распространенный метод) и методом рассеянного света со специальным оптическим оборудованием.

В методе замораживания используются специальные двухфазовые материалы. Модель сначала нагружается при высокой температуре, когда большая часть материала размягчается и не оказывает сопротивления, а скелет (оставшаяся твердая часть материала) полностью воспринимает эту нагрузку, деформируясь каким-либо образом. Затем происходит остывание без снятия нагрузки. Размягченная часть затвердевает и фиксирует состояние скелета, после чего модель распиливается на пластинки. С этими пластинками указанным выше для плоских

моделей путем производят исследования на плоскополяризованных установках с целью определения квазиглавных нормальных напряжений – главных напряжений в рассматриваемой пластинке.

Во втором случае нагруженная модель помещается в иммерсионную жидкость и просвечивается тонкой полоской плоскополяризованного монохроматического света большой яркости, которая освещает рассматриваемую плоскость модели. При наблюдении этой плоскости со стороны фиксируется картина полос интерференции света, связанная с коэффициентом преломления, а следовательно, и с деформацией в каждой точке модели. Направляя плоский пучок поляризованного света различным образом по отношению к модели, можно определить напряжение в любом сечении модели.

При изучении физических явлений методом фотоупругости необходимо, так же как и во всех других случаях моделирования, связанных с полем напряжений, соблюдать подобие соответствующих критериев (комплексов и симплексов), устанавливаемых либо методом размерности, либо из общих дифференциальных уравнений, описывающих это явление.

Для моделирования процесса распространения волн напряжений при взрыве надо, как было показано в работах [5, 6], соблюдать критерии подобия Эйлера, Коши и числа гомотронности. Поскольку при моделировании методом фотоупругости используются, как правило, другие материалы, то при этом надо также соблюдать и условия метода эквивалентных материалов для упругих деформаций. Кроме того, моделирование упругих динамических задач усложняется тем, что используемые обычно полимерные пьезооптические материалы обладают в той или иной мере вязкоупругими свойствами, которые могут существенно повлиять на интенсивность и закономерность распространения волн в модели, особенно при высокочастотных колебаниях, а также при наличии прямых и отраженных волн.

Заметим, что в настоящее время созданы новые материалы из полимеров, стекла и других веществ, обладающих пьезооптическими свойствами со сравнительно небольшими вязкими характеристиками. Применение их более точно обеспечивает подобие полей напряжений. В некоторых случаях используются исследования методом фотоупругих покрытий, когда сама модель изготовлена из непрозрачного материала природы и только материал покрытия является прозрачным и обладает пьезооптическими свойствами. Однако в этом случае распределение деформации по толщине покрытия связано со сложными процессами, и поэтому поле напряжений в нем получается неравномерным. В результате возникают погрешности, величина и характер которых пока еще изучены недостаточно, а связь между напряжениями в исследуемом объекте и фотоупругом покрытии определяется достаточно сложной зависимостью [9]

$$\sigma_{1;2} = \frac{E}{E_n(1 - \nu^2)} [(1 - \nu_n \nu)\sigma_{1n;2n} (\nu_n - \nu)\sigma_{2n;1n}]$$

При этом для отдельного получения главных напряжений σ_n и σ_{2n} (главных деформаций ε_{1n} , ε_{2n}) применяются известные в фотомеханике методы: косоугольного (наклонного) просвечивания покрытия, электроаналогии, интегрирования уравнений равновесия плоской задачи, а также способы измерения поперечных деформаций и абсолютных разностей хода с помощью квантовых оптических генераторов (лазеров).

При динамическом нагружении модели необходимо выполнение соответствующих условий моделирования и использование оптико-динамической установки.

Например, при моделировании процесса разрушения пород буровыми инструментами должно быть выполнено условие [9]

$$\frac{\Delta l_n}{\Delta l_m} = P_c l_c \frac{E_m \left(\sigma_{1n} - \frac{\sigma_{2n} + \sigma_{3n}}{\nu_n} \right)}{E_n \left(\sigma_{1m} - \frac{\sigma_{2m} + \sigma_{3m}}{\nu_m} \right)},$$

где Δl — деформация; l_c , P_c — геометрический и силовой множители подобия.

При этом условие подобия контактов при выборе множителей l_c и P_c обеспечивается подбором материала модели по формуле

$$\left(\frac{E_{1n}}{E_{1m}} + \frac{E_{2n}}{E_{2m}} \right)^2 l_c = \left(1 + \frac{E_{1n}}{E_{2n}} \right) P_c.$$

Индекс 1 относится к инструменту, индекс 2 — к материалу.

Для моделирования процесса распространения волн напряжений при взрыве необходимо соблюдать критерии подобия Эйлера, числа гомохронности и Коши ($\rho/\rho v^2$; $\nu l/i$ и $\nu/\sqrt{\varepsilon E/\rho}$), что сводится к подобию метода эквивалентных материалов для упругих деформаций [5].

Для оптического исследования также применяют прозрачные изотропные материалы, которые под действием внешних сил дают двойное лучепреломление. К таким материалам можно отнести стекло, целлюлоид, бакелит, ксилолит, материалы на желатиноглицериновой основе с бетанафтолом, эпоксидные смолы с отвердителем (молеиновый или фталиевый ангидрид) и различными добавками.

Предварительно образцы этих материалов подвергаются тарировочным испытаниям, где определяются модуль упругости, коэффициент Пуассона, оптический коэффициент напряжения $\bar{C}_\sigma = \bar{I}/(\sigma, \delta)$ и $\tau_0^{1,0}$ на поляризационной установке при одноосном сжатии, как это изложено выше.

Исследования чаще всего производятся на плоских моделях или рассматривается картина деформаций различных плоских сечений при использовании объемных моделей.

Переход от плоской деформации выбранных сечений к плоскому напряженному состоянию осуществляется по известным формулам теории упругости:

деформации плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_{xy};\end{aligned}\quad (3.27)$$

плоской деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1-\nu)\sigma_{yy}], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1-\nu)\sigma_{xx}], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy}\end{aligned}\quad (3.28)$$

и упругих постоянных в условиях плоской деформации

$$E' = E/(1-\nu^2); \quad \nu' = \nu(1-\nu). \quad (3.29)$$

При дешифровке результатов экспериментов используются известные соотношения теории распространения плоских волн, согласно которой напряжения в направлении распространения волн σ_r и в перпендикулярном ему направлении σ_φ определяются зависимостями:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{k^2}{4\pi} \left[\frac{1}{k^2 c_p^2 r} f'' \left(t - \frac{r}{c_p} \right) + \frac{4f' \left(t - \frac{r}{c_p} \right)}{c_p r^2} + \frac{4f \left(t - \frac{r}{c_p} \right)}{r^3} \right]; \\ \sigma_\varphi &= -\frac{k^2}{4\pi} \left[\frac{1-k^2}{k^2 c_p^2} f'' \left(t - \frac{r}{c_p} \right) - \frac{2f' \left(t - \frac{r}{c_p} \right)}{c_p r^2} - \frac{2}{r^3} f \left(t - \frac{r}{c_p} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.30)$$

или приближенно, удерживая первые члены уравнений (3.30)

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{1}{4\pi c_p^2 r} f'' \left(t - \frac{r}{c_p} \right), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{1-2k^2}{4\pi c_p^2 r} f'' \left(t - \frac{r}{c_p} \right),\end{aligned}$$

где $k = c_s/c_p$; c_p, c_s – скорости распространения соответственно продольной и поперечной волн; $f(t)$ – функция давления в источнике; r – расстояние от заряда ВВ.

Нестационарность процессов нагружения модели при взрыве обусловила создание специальной оптико-динамической поляризационной установки (рис. 19). Она состоит из сверхскоростной кинокамеры СФР, импульсной газоразрядной лампы различных типов (ИФК-2000, ИСШ-7, ИСШ-400) или импульсного лазера в качестве источника света и спе-

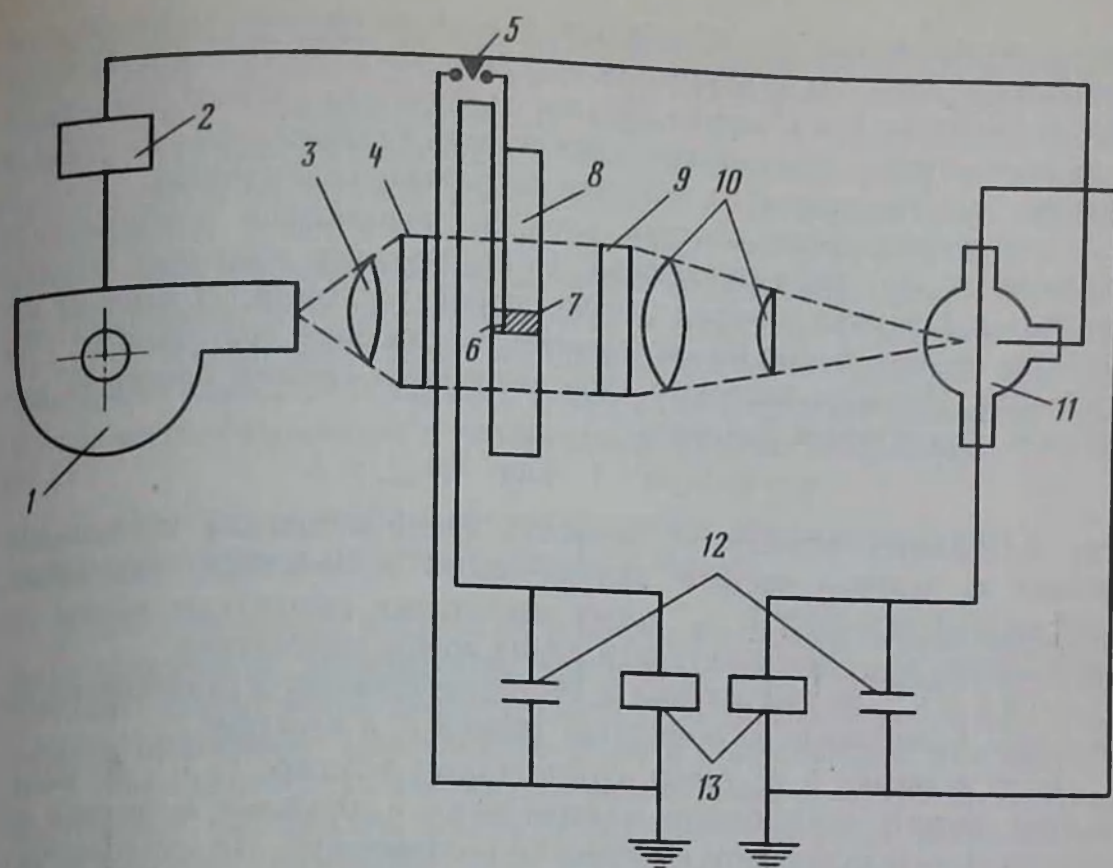


Рис. 19. Схема оптико-динамической поляризационной установки:
 1-фоторегистратор СФР; 2-блок задержки; 3, 10-линзы; 4, 9-поляриды;
 5-реле взрыва; 6-инициатор; 7-заряд; 8-модель; 11-импульсная лампа;
 12-импульсные конденсаторы лампы и разрядника; 13-зарядное устройство

цельных устройств для одновременного взрывания зарядов (обычно из азида свинца) и синхронизации взрыва, электровзрыва проводников или создания импульсного магнитного поля, освещения, запуска камеры СФР, осциллографа. Последний используется для регистрации в ряде случаев параметров волн напряжений другими способами (например, пьезодатчиками или тензодатчиками), что необходимо для установления и контроля количественных данных. Использование импульсного лазера ПДУ в сочетании с электронно-оптическим затвором позволяет получить излучение лазера в виде одиночных импульсов или целой серии через промежуток времени $\Delta t = 0,045$ мкс.

Регистрация напряженного состояния с помощью камеры СФР осуществляется в режиме покадровой съемки с частотой до $f = 2 \cdot 10^6$ 1/с и в режиме фоторегистрации с рядом различных значений скорости развертки (например, $v_{раз} = 750$ м/с и $v_{раз} = 3000$ м/с в зависимости от скорости распространения волны напряжений).

Первый режим используется для кадровой визуальной регистрации картины распространения и взаимодействия волн напряжений через время (с) $\Delta t = 1/f$, второй-для непрерывной регистрации фронтов исследуемых волн и определения скорости распространения, а также интенсивности волн (числа полос) вместе с покадровой съемкой. Кроме

того, исследования проводятся как с использованием плоскополяризованного света, так и циркуляционно поляризованного света. Последнее необходимо для удаления изоклин с картины полос изохром модели для возможности более четкого определения картины полос изохром, а значит, и количественного значения напряженного состояния.

При исследовании плоских моделей применяется приближенное подобие за счет ряда допущений: 1) напряженное состояние массива изучается в рамках плоской задачи теории упругости; 2) влияние неупругих свойств пород на исследуемое напряженное состояние не учитывается. Точность аппроксимации выбранных сечений плоскими моделями определяется условием

$$\kappa = \delta\omega/c_p \ll 1 \quad \text{или} \quad \delta/\lambda_{\text{дом}} \ll 1, \quad (3.31)$$

где δ — толщина модели; c_p — скорость распространения продольной волны; ω — угловая частота динамического воздействия, для волны напряжений $\omega \simeq \pi/(2\tau_n)$; τ_n — время нарастания амплитуды волны до максимума; $\lambda_{\text{дом}}$ — доминирующая длина волны напряжений.

При $\delta \approx \lambda_{\text{дом}}$ на расстоянии $r \leq 10\delta$ распространяется равномерное по толщине возмущение со скоростью, равной c_p в пластине.

Если величина κ не точно удовлетворяет условию (3.31), то желательно оценить погрешность экспериментов с плоскими моделями на объемной модели методом «вклеенного полярископа». По этому методу модель изготавливается из двух блоков полимера, между которыми вклеивается пластинка из того же материала. Между контактными плоскостями пластины и блоков устанавливаются пленочные поляроидные фильтры, оси которых ориентируются под углом 45° друг к другу.

Переход от плоской деформации выбранных сечений к плоскому напряженному состоянию осуществляется по известным формулам теории упругости. При дешифровке результатов экспериментов разность нормальных напряжений ($\sigma_r - \sigma_\varphi$) определяется из эксперимента по зависимости (3.24). Скорости распространения волн определяются по кадрам СФР в режиме регистрации по формуле

$$c_{p,s} = (v_{\text{раз}}/M) \operatorname{tg} \varphi_{p,s},$$

где $v_{\text{раз}}$ — скорость развертки щели фоторегистратора; M — масштаб изображения; $\varphi_{p,s}$ — угол наклона изохром.

Для определения напряженного состояния какого-либо элемента материала модели обычно используется графическая интерпретация напряженного состояния этого элемента с помощью кругов Мора. Однако для определения главных напряжений надо еще знать соотношение главных напряжений друг к другу, т. е. σ_φ/σ_r . Для упругих волн это отношение в первом приближении можно определить из выражения (3.26). Уточнение этой зависимости производится экспериментальным путем, т. е. непосредственным измерением величины одного из главных напряжений с помощью тензометрии или пьезометрии с одновременной регистрацией разности главных напряжений методом фотоупругости на динамической оптико-поляризованной установке.

В заключение отметим, что метод фотоупругости при моделировании явлений, вызванных взрывом в горных породах, обладает всеми недостатками, присущими методу эквивалентных материалов. Кроме того, существуют ограничения в выборе эквивалентных материалов требованиями оптической проницаемости и оптической анизотропии. Большинство таких материалов обладает значительной вязкостью, существенно искажающей динамическое воздействие взрыва. Поэтому моделирование методом фотоупругости может дать хорошие результаты при исследовании качественной картины взаимодействия волн при групповом взрыве ряда зарядов, варьируя их взаимным расположением, очередностью взрывания и интервалами времени замедления.

3.1.5. Решение методом фотоупругости некоторых задач, сопровождающих действие взрыва в породе

В качестве первого примера рассмотрим возможность моделирования волн напряжений, возникающих при взрыве двух удлиненных зарядов, методом динамической фотоупругости. При динамических нагружениях модели применение зависимостей (3.24) и (3.26) требует дополнительного обоснования, так как физико-механические свойства прозрачных изотропных материалов, используемых при этом, существенно зависят от параметров нагружения. Опыт показывает, что ряд материалов типа органическое стекло (ПММА), жесткий эпоксидный компаунд (ЭЖ) позволяют пользоваться этими соотношениями при динамических нагружениях с погрешностью, не превышающей 10–15%.

Нестационарность процессов нагружения модели при взрыве требует использования специальной оптико-динамической поляризационной установки, описанной выше. Исследовалось взаимодействие встречных волн напряжений, вызванных взрывом удлиненных зарядов, расположенных в двух соседних параллельных шпурах. Задача имеет плоскую симметрию относительно плоскостей, параллельных осям шпуров и проходящих как через оси шпуров, так и посередине между ними. Поэтому для исследования можно ограничиться двумя сечениями: первое – в плоскости расположения шпуров (модель второго типа) и второе – в плоскости, перпендикулярной к осям шпуров (модель первого типа). Модели изготовлены из листового органического стекла (ПММА) и жесткого эпоксидного компаунда (ЭЖ) толщиной $\delta = 3 \div 5$ мм. Эксперименты проводились для нескольких расстояний L между осями шпуров. Размеры моделей таковы, чтобы волны, отраженные от их границ, не оказывали существенного влияния на исследуемую зону.

На плоских моделях первого и второго типа исследовалось взаимодействие встречных волн, генерируемых взрывом ВВ в шпурах, а также распространение одиночной цилиндрической волны. При расшифровке результатов использовались известные соотношения теории распространения плоских волн [см. формулы (3.27)–(3.29)]. Для нагружения моделей второго типа применяли параллельное и встречное взрывание шпуровых зарядов флегматизированного тэна. Перенос полученных

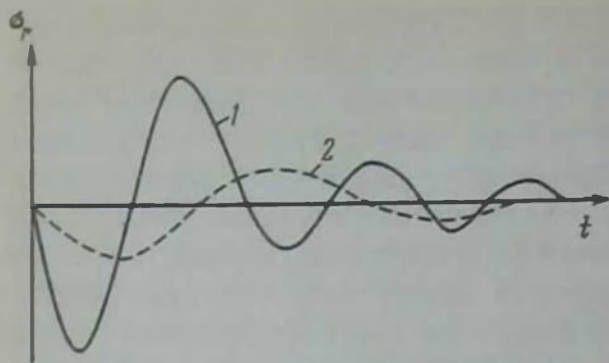
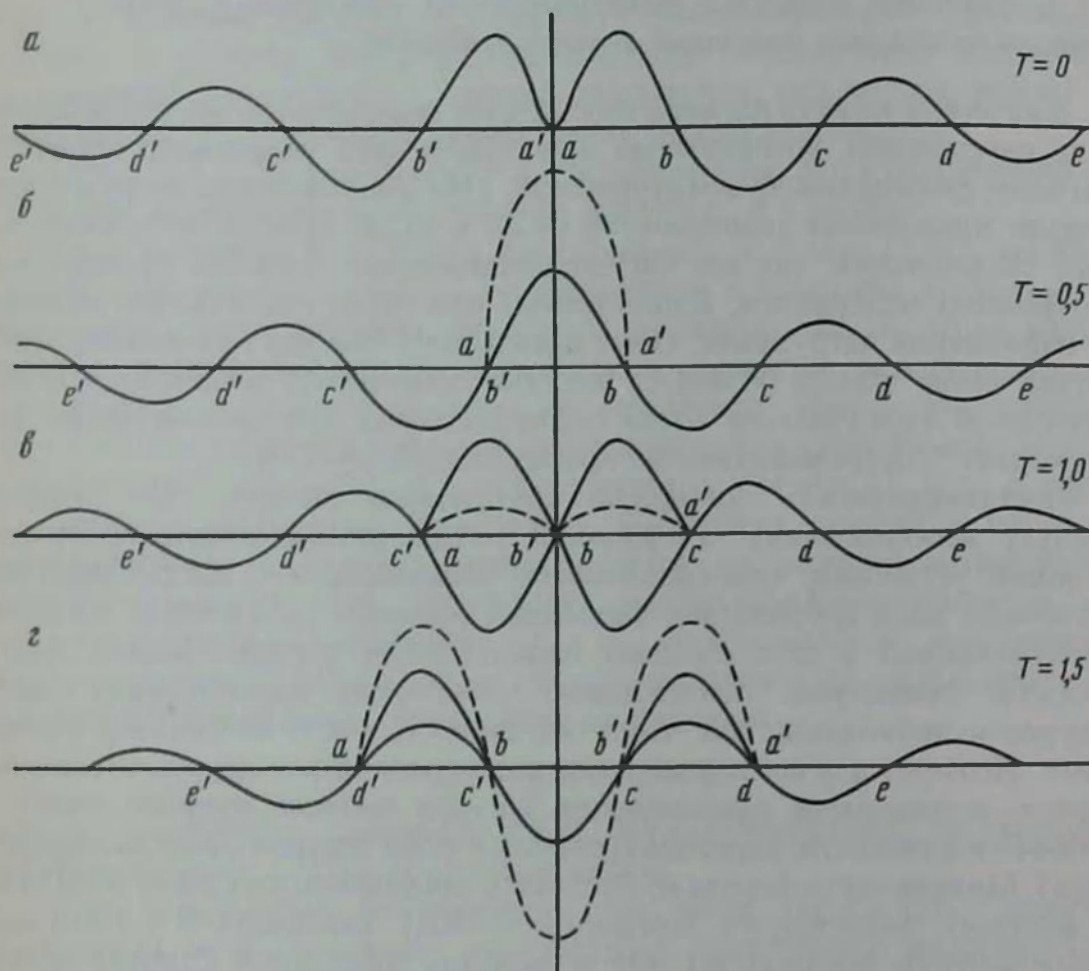


Рис. 20. Эпюры радиальной составляющей волны напряжений в пластине на расстояниях $20 R_0$ (1) и $40 R_0$ (2)

Рис. 21. Схематическая картина взаимодействия встречных волн в зависимости от относительного времени T



модельных результатов на натуре может быть выполнен в рамках принятой схематизации по формулам подобия динамических задач для упругих материалов. В результате проведенных экспериментов и их обработки получены эпюры радиальной составляющей продольной и поперечной волн напряжений.

Эпюры радиальной составляющей напряжений $(\sigma_r)_{xy}$ цилиндрической волны в пластине, полученные для двух различных расстояний, даны на рис. 20. Динамический коэффициент Пуассона при расчете этих эпюр

$v_{\text{лин}} = 0,25$. Возникающая при взрывном нагружении пластины поперечная волна наблюдалась на фотограммах на расстоянии $r \gg 30R_{03}$ на модели первого типа в виде совокупности изохор, распространяющихся со скоростью c_s . Присутствие поперечной волны было отмечено также по картине изоклин на кинограммах, полученных в режиме непрерывной регистрации, снятых в плоскополяризованном свете. Появление поперечной волны при симметричном нагружении, возможно, связано с воздействием сдвигающихся усилий вдоль контура цилиндрической зарядной полости при взаимодействии с нею детонационной волны ВВ.

Взаимодействие двух встречных цилиндрических волн в пластине (модель первого типа) представлено на кинограммах, полученных на расстоянии $r = 50R_{03}$. Их анализ показывает, что до момента встречи распространение каждой из волн происходит со скоростью $c_p = 2440$ м/с. После соприкосновения передних фронтов возникает напряженное состояние, характеризующее интерференцию первых фаз продольной волны. Это показано схематически на рис. 21, где представлены относительные положения эпюр продольных взаимодействующих встречных волн во времени. Обозначения на рисунке следующие: $ab, a'b'$ и $bc, b'c'$ — соответственно первые фазы сжатия и растяжений; $cd, c'd'$ и $de, d'e'$ — фазы вторичных сжатий и растяжений.

При этом использовалось безразмерное время $T = 2c_p/\lambda t^*$ (где λ — длина фазы сжатия; t^* — время, отсчитываемое от момента соприкосновения передних фронтов продольных волн). На рис. 21, *a* показан момент встречи волн, а на рис. 21, *b* — момент полной интерференции первых фаз сжатия продольных волн. Рис. 21, *в* соответствует взаимодействию первых фаз сжатия волн с последующими первыми фазами растяжения. Полная интерференция первых фаз растяжения приведена на рис. 21, *г*. В этот момент времени первые фазы сжатия волн взаимодействуют с вторичными фазами сжатия. Далее процесс протекает аналогичным образом.

Из приведенного рисунка можно видеть, что максимальные напряжения возникают при взаимодействии первых фаз сжатия и растяжения встречных волн. Поперечная волна, распространяясь с меньшей скоростью, располагается в области хвостовой части продольной волны. Интенсивность поперечных волн невелика, поэтому их интерференция не создает существенных напряжений в рассматриваемой зоне взаимодействия волн.

При уменьшении расстояния между осями зарядов интерференция поперечных волн может оказать существенное влияние на напряженное состояние. Это происходит вследствие того, что к моменту взаимодействия продольных волн на этих расстояниях поперечные волны не успевают отделиться от продольных волн, и будет иметь место влияние их на картину интерференции. На расстоянии $r = 20R_{03}$ вклад поперечных волн составляет 22% по амплитудному значению относительно амплитуды напряжений фазы сжатия продольной волны.

Рассмотрим характер разрушения в зависимости от изменения радиальной σ_r^{Σ} и тангенциальной σ_{ϕ}^{Σ} составляющих суммарных напря-

L	T	Значения напряжений σ , (в числителе) и		
		1	2	3
50	0	0/0	-995/-288	0/0
	0,5	-1200/-350	0/0	+510/+110
	1,0	0/0	-90/-25	0/0
	1,5	800/233	0/0	-780/-230
	2,0	0/0	300/58	-150/45
	2,5	-220/-83	90/38	450/185
30	0	0/0	-840/-320	0/0
	0,5	-1700/-615	0/0	950*/340*
	1,0	700/255	0/0	-70*/70*
	1,5	1650/600	0/0	-530*/-35*
	2,0	35*/35*	205*/77*	0/0
	2,5	-1030*/-38*	0/0	692*/68*
	3,0	25*/30*	-180*/175*	165*/-115*
20	0	0/0	-1200/-530	-105*/-105*
	0,5	-2400/-1060	-19*/18*	660*/470*
	1,0	0/0	660*/465*	0/0
	1,5	1400*/535*	0/0	-35*/35*
	2,0	220*/485*	350*/140*	140*/140*
	2,5	-840*/-350	175*/35*	475*/320*
	3,0	-125*/-50*	-100*/-48*	0/0

Примечания. 1. Знак (+) — для растягивающих напряжений, знак (-) — для сжимающих. продольных и поперечных волн.

жений по линии шпуров и перпендикулярно ей в зависимости от безразмерного времени интерференции $T = \frac{2c_p}{\lambda} t^*$ и расстояния между

шпурами L . Экспериментальные данные для σ_x^z и σ_y^z приведены в табл. 2 для относительных расстояний между шпурами $\bar{L} = L/R_0$, и для равноотстоящих от начала координат (x, y) точек 1, 2, 3, 4 (лежащих на оси x) и 6, 7, 8 (лежащих на оси y). Начало координат принято на линии шпуров посередине между ними, ось x направлена по линии шпуров, ось y — перпендикулярно к ней. Расстояние между точками взято равным $\Delta L = \lambda/4$, т.е. четверти длины продольной волны, которая в опытах мало менялась в пределах рассматриваемых расстояний между шпурами $L = (20 \div 50)R_0$.

Анализ данных табл. 2 показывает, что как в процессе распространения волн, так и при взаимном проникновении их имеет место взаимное знакопеременное нагружение материала модели по линии осей x и y . Причем характер нагружения, вызываемый обеими составляющими волны σ_r и σ_ϕ , в большинстве случаев имеют соизмеримые по величине амплитуды в сжимающей и растягивающей фазах эпюр этих волн. Соприкосновение фронтов продольных волн начинается на оси симметрии между шпурами и в дальнейшем охватывает всю эту область.

σ_p (в знаменателе), 10^{-5} Па, в точках

4	6	7	8
+ 550/+ 160 0/0 - 225/- 73 + 100/+ 30 - 40/- 115 0/0	0/0 - 1170/- 510 0/0 + 775/+ 350 0/0 - 210/- 88	0/0 - 1100/- 500 0/0 735/340 150/55 - 230/- 85	0/0 - 770/- 400 - 720/- 280 515/270 600/120 140/- 68
878*/485* 136*/136* - 330*/- 75* 85*/35* - 870*/- 140* 0/0 375*/135*	0/0 - 1550/- 750 - 250/- 90 1500/725 125/50 - 690/- 333 - 23/- 20	0/0 - 600/- 325 - 340/- 75 585/310 375/150 - 315/- 90 - 780/- 310	0/0 0/0 - 1550/- 915 120/85 750/470 - 55/- 40 - 175/- 405
— — — — — — — — — — — — — —	0/0 - 1100/- 910 0/0 750*/325* 305*/400* - 720*/- 315* - 205*/- 60*	0/0 - 800/- 525 - 1200/- 500 0/0 150*/200* - 280*/- 280* 800*/- 140*	0/0 0/0 - 1075/- 625 - 1400/- 225 75/30 110*/135* - 410*/- 160*

2. Цифры со звездочкой обозначают суммарное значение напряжений от интерференции

Напряженное состояние в области интерференции для последующих моментов времени аналогично рассмотренному и перемещается в направлении распространения детонации со скоростью $v = c_p/\sin \alpha_1$. При сближении осей шпуров качественная картина интерференции встречных волн остается неизменной. При этом несколько изменяется характер эпюр и увеличиваются амплитудные значения суммарных напряжений, а характер нагружения от σ_x и σ_y в большинстве случаев совпадает по знаку, т. е. имеет место одновременно либо сжатие (—), либо растяжение (+). Причем сначала наблюдается сжатие материала, затем растяжение и т. д., и первый цикл повторяется снова.

Визуальное наблюдение моделей после проведения опытов показывает, что наиболее нагруженными зонами модели явились сечения по линии шпуров (по оси x) и по линии симметрии (оси y).

При малых относительных расстояниях между шпурами ($\bar{L} \leq 30$) отмечено появление сквозных трещин между шпурами, а также трещин по линии симметрии, которые в ряде случаев достигали кромок модели в направлении ЛНС.

При больших относительных расстояниях ($\bar{L} > 30$) трещины между шпурами не раскрывались. Однако они имели большую протяженность по сравнению с остальными радиальными трещинами. В этом случае не

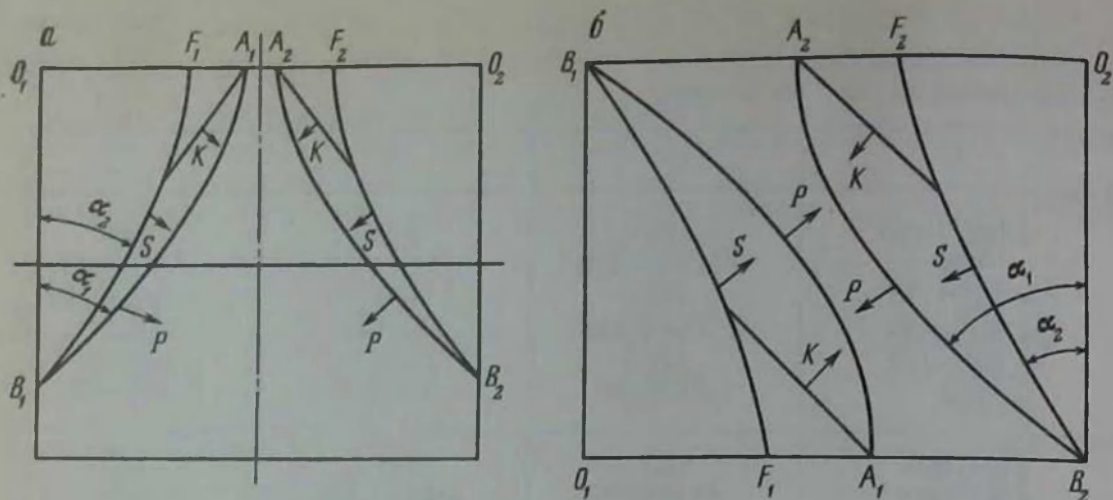


Рис. 22. Взаимодействие двух встречных волн в плоскости, проходящей через оси шпуров:

A_1, A_2 — точки встречи продольной P и конической K волн; B_1 и B_2 — точки встречи продольной P и поперечной S волн; O_1 и O_2 — точки инициирования зарядов 1 и 2 в соседних шпурах; F_1 и F_2 — пересечение фронта поперечной волны с верхней или нижней гранями блока

наблюдалось появление трещин и по оси симметрии модели.

Образование трещин между шпурами обусловлено главным образом действием растягивающих усилий от тангенциальной составляющей σ_φ , поскольку они направлены перпендикулярно к линии между шпурами. В появлении трещин по оси симметрии при малых относительных расстояниях между шпурами, очевидно, существенную роль играют возникающие в результате изгиба пластин большие растягивающие радиальные напряжения.

Действительно, при относительном расстоянии между шпурами (см. табл. 2) $L < 30$ эти напряжения превышают критическое значение прочности оргстекла $[\sigma_{\text{орг}}] = 50 \div 65$ МПа во всех точках, расположенных как на оси симметрии, так и на линии шпуров.

Взаимодействие двух встречных волн в плоскости осей шпуров (модель второго типа) представлено на рис. 22 в виде схемы фронтов волн, генерируемых от взрыва двух смежных зарядов, отстоящих друг от друга на расстоянии $L = 25R_0$. Фронты продольной и поперечной волн в средней части пластины имеют коническую форму и располагаются под некоторыми углами к направлению осевых линий шпуров, значения которых определяются соотношением скоростей распространения этих волн и скорости детонации $VB D$

$$\sin \alpha_1 = c_p/D, \quad \sin \alpha_2 = c_p/D.$$

Схематическое расположение фронтов продольной и поперечной волн до момента их встречи при прямом инициировании смежных зарядов и мгновенном их взрывании приведено на рис. 22, а. Картина интерференции волн вдоль оси симметрии (оси y) перемещается в направлении детонации со скоростью $v_\phi = c_p \sin \alpha_1$.

На рис. 22, б дана волновая картина, полученная при мгновенном встречном инициировании двух шпуровых зарядов, расположенных на тех же расстояниях, что и в предыдущем случае. В этом случае имеет место аналогичный характер расположения фронтов продольных и поперечных волн. Изменяется только направление распространения их в связи со встречным инициированием зарядов.

Отличие напряженного состояния при данном нагружении от прямого инициирования заключается в иной последовательности интерференции волн. В результате наибольшие напряжения, возникающие в момент полной интерференции, реализуются в зоне, расположенной на оси симметрии примерно на половине длины шпура.

В результате проведенных модельных экспериментов установлена качественная картина взаимодействия встречных полей напряжений для системы из двух шпуровых зарядов; получена волновая картина в основных плоскостях нагруженной модели; оценены напряжения, возникающие в зоне интерференции, и характер разрушения в зависимости от расстояния между источниками возмущения. При сближении зарядов ($L \leq 20R_0$) на суммарное значение напряжений при интерференции волн оказывает влияние также и поперечная волна, существенно увеличивая

Рис. 23. Схема оптико-динамической установки в виде V-образного отражательного полярископа, используемого при методе фотоупругости в варианте оптически чувствительных покрытий: 1—оптически чувствительное покрытие; 2—образец; 3—заряд; 4 и 5—поляризаторы; 6—импульсная лампа; 7—камера СФР; 8—пульт управления

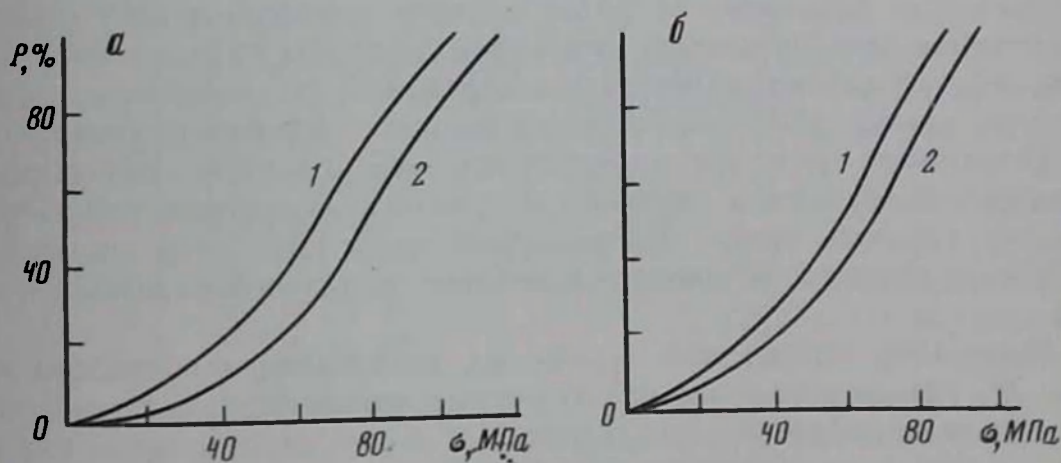
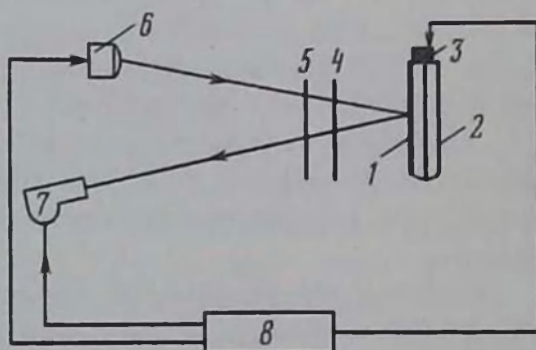


Рис. 24. Вероятностные графики зависимости динамической прочности на отрыв

его. Следовательно, расстояние между зарядами $L = 20R_0$, можно считать границей эффективного использования парносближенных зарядов. Установлено, что встречное инициирование обеспечивает равномерное нагружение взрываемого объекта с характерным отрывом по линии расположения зарядов, обусловленным действием тангенциальной составляющей волн напряжений σ_ϕ , и может быть с успехом использовано в целях получения профилей хорошего качества при заоткосах уступов и контурном взрывании.

Вторым примером использования фотоупругости при модельных экспериментах является оценка динамической прочности горных пород при отколе методом оптически чувствительных покрытий на оптико-динамической установке, представляющей собой отражательный полярископ с углом раствора 20° (рис. 23). Деформации в образцах определяются по кинограммам изохром съемкой в поляризованном свете сверхскоростной камерой СФР в режиме фоторегистрации со скоростью 750 м/с. В качестве покрытий используются пластинки из эпоксидного компаунда размерами $10 \times 70 \times 2$ мм, которые приклеиваются к образцам эпоксидным клеем холодного отверждения. Причем контактная грань пластинки покрывалась металлическим тонким зеркальным слоем.

Методом покрытий определялись значения максимальных растягивающих деформаций ϵ_{\max} и скорости распространения импульса в стержне $c_{пл}$, по которому вычислялся динамический модуль упругости $E_d = \rho_n c_{пл}^2$ (где ρ_n — плотность породы). Зная величины E_d и ϵ_{\max} , определяли максимальные растягивающие напряжения $\sigma_{\max} = E_d \epsilon_{\max}$. При этом погрешность определения ϵ_{\max} не превышала 9%, а $c_{пл}$ — 5%.

Динамическая прочность на отрыв определялась на стержневых образцах размерами $10 \times 10 \times 100$ мм, которые нагружались на одном из торцов взрывами накладных микрочарядов ВВ массой от 0,05 до 0,16 г.

Полученные результаты характеризуют прочность породы с ненарушенной структурой при высокочастотном импульсном воздействии отраженной от другого конца стержня волны разряжения длительностью до 10^{-5} с. Обычно разрушение в виде откола или трещины наступало на расстоянии 15–25 мм от торца, противоположного месту нагружения. Эти разрушения вызывались действием импульса растяжения, образующегося в результате отражения от свободного торца первоначального импульса сжатия, создаваемого взрывом микрочаряда.

Описанным методом определялись вероятностные разрушения образцов при различных значениях импульсов волны напряжений, вызываемых взрывом зарядов ВВ различной массы. При этом опыты со взрывами одинаковой массы взрываемого заряда проводились 15–20 раз.

Результаты проведенных модельных экспериментов приведены на рис. 24, где представлены вероятностные зависимости динамической прочности на отрыв двух видов гранитов: на рис. 24, а — крепких слабо-трещиноватых гранитов с $\rho_n = 2630$ кг/м³; $c_p = 4210 + 150$ м/с и $\sigma_{отр}^{ст} = 12,5$ МПа; на рис. 24, б — гранитов средней крепости с повышенной

трещиноватостью $\rho_n \approx 2610 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 4000 \pm 150 \text{ м/с}$ и $\sigma_{отр}^{ст} = 11 \text{ МПа}$. Каждый из видов гранита испытывался как в комнатных условиях (кривая 1), так и в условиях моделирования температурно-влажностного режима зоны вечной мерзлоты (кривая 2). Как видно из рис. 24, динамическая прочность мерзлых гранитов на 11% выше, чем обычных гранитов, а динамическая прочность на растяжение при 50% вероятности разрушения равна соответственно для первого случая (см. рис. 24, а) 68 и 80 МПа, для второго (см. рис. 24, б) – 60 и 70 МПа. При 20% вероятности разрушения динамическая прочность на растяжение будет соответственно равна: для первого случая – 40–55 МПа, для второго – 35–45 МПа. Последние данные подтверждаются экспериментальными результатами определения динамической прочности на растяжение этих гранитов в натуральных условиях при взрыве мощных шпуровых зарядов с воздушным радиальным зазором в скважинах различных диаметров (различной величины зазора) [4]. Поэтому данные с 20% вероятностью являются наиболее достоверными для определения динамической прочности пород описанным выше методом фотоупругости.

3.2. Моделирование действия взрыва, основанное на динамическом и энергетическом подобиях в лабораторных и натуральных условиях

При моделировании различных явлений, возникающих при взрыве зарядов в горных породах, широко применяются методы, в которых в качестве модели используются либо образцы горных пород различной формы, либо непосредственно массивы горных пород. В первом случае проводятся модельные эксперименты обычно в лабораторных условиях с применением различных устройств и методов регистрации параметров изучаемых явлений и процессов, во втором – непосредственно в условиях породного массива обычно с зарядами уменьшенной массы при специальных условиях взрывания одиночных или групповых зарядов.

В лабораторных условиях исследуются процессы развития взрыва в ближней зоне (например, развитие полости под действием газообразных продуктов взрыва, процесс формирования и развития волны сжатия) и в средней зоне взрыва (например, развитие зон дробления и трещинообразования, закономерности распространения волны напряжений, процессы взаимодействия смежных зарядов, отражения волны напряжений от свободной поверхности, взаимодействие падающей и отраженной волны напряжений и др.), а также процессы разрушения и дробления образцов при различных условиях взрывания и ряд других явлений (действие волны напряжений на горные выработки или действие сеймовзрывных волн на наземные и подземные сооружения). В зависимости от целей и задач эксперимента используются различные устройства и измерительная аппаратура в соответствии с методикой проведения модельного эксперимента, разрабатываемые и изготавливаемые в процессе подготовки каждого отдельного эксперимента.

В условиях натурального массива проводятся эксперименты по изуче-

нию параметров и закономерностей распространения ударных воздушных волн (УВВ), сейсмозрывных волн (СВВ), вызванных взрывом одиночных и групповых зарядов при различных условиях взрывания, а также процессы воздействия этих волн на здания и инженерные сооружения. В этих условиях также целесообразно исследовать такие явления взрыва, как разлет осколков взрыва, сдвигание горной массы и образование навала. Отметим, что указанные выше явления исследуются и при промышленных натуральных взрывах при условии обязательной синхронизации взрыва с включением измерительной аппаратуры.

Ниже будут рассмотрены различные методы проведения модельных экспериментов и необходимые условия моделирования для них при последовательном изучении процессов действия взрыва в горной породе, начиная с явлений в ближней зоне взрыва и кончая процессами воздействия взрыва на здания и инженерные сооружения и моделирования процесса дробления горных пород.

3.2.1. Способы регистрации процессов, протекающих в ближней зоне взрыва

Из явлений в ближней зоне взрыва наибольший интерес представляют: преломление детонационной волны в породе, которая приводит к образованию в ней волны сжатия с ударным фронтом; распространение ударной волны в породе, сопровождающееся развалом ударного фронта и трансформацией ее в волну напряжений; расширение под действием газообразных продуктов взрыва зарядной камеры (камуфлетной полости взрыва), создающей в окружающей породе квазистатическое поле напряжений. Регистрации этих быстропротекающих явлений, происходящих при весьма высоких давлениях, колеблющихся в пределах от 10^8 до $2 \cdot 10^{10}$ Па, с помощью различных датчиков (пьезодатчиков, тензодатчиков и т.п.), располагаемых вблизи зарядов цилиндрической и сферической формы, весьма сложно и ненадежно, так как помимо возможного разрушения их под действием высоких давлений имеют место сильные помехи, связанные с электромагнитным излучением, влиянием размеров датчиков и способов расположения и крепления их в породе вблизи заряда. В результате на записях давление-время в начальный период фиксируются электромагнитные помехи в виде предвестников, а сама запись давления в волне регистрируется до момента давления, при котором разрушается датчик. Поэтому в лучшем случае получают записи давления до максимального значения амплитуды волны (манганиновые датчики). При этом форма эпюры давления-время может быть искажена размерами датчика.

В этом случае наиболее надежными методами регистрации указанных явлений являются методы фотографирования движения стенки камеры и наружной кромки образца с помощью высокоскоростной киносъемки, например камерой СФР-2М, или рентгеноимпульсной съемкой. В первом случае, при оптической киносъемке, возможна регистрация смещения не только стенки камеры и наружной кромки

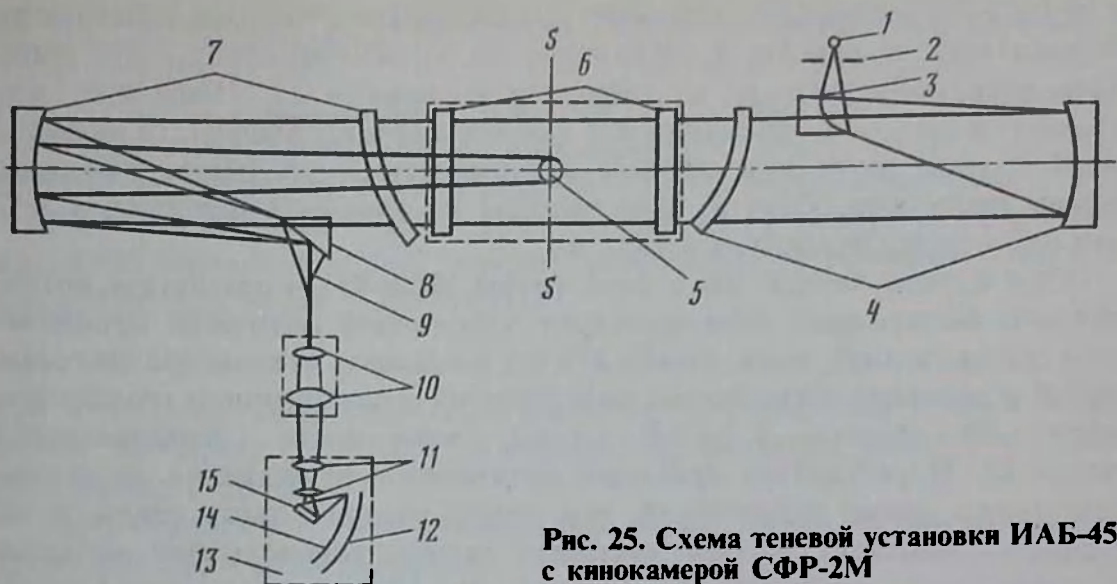


Рис. 25. Схема теневой установки ИАБ-451 с кинокамерой СФР-2М

образца, но и движение фронта волны сжатия на образцах из оптически прозрачных материалов типа стекла, бакелита и т.п. Во втором случае, при рентгеноимпульсной съемке, возможна регистрация движения стенки камеры и наружной кромки образцов из горных пород. Причем толщина образцов будет лимитироваться мощностью рентгеновских лучей.

Для оптической киносъемки используется теневая установка ИАБ-451 в сочетании со сверхскоростной кинокамерой СФР-2М.

Оптическая схема теневой установки ИАБ-451 с кинокамерой СФР-2М приведена на рис. 25. Она состоит из двух оптических систем: коллиматорной, создающей параллельный пучок света для просвечивания исследуемого образца; наблюдательной, служащей для наблюдения и фотографирования теневой картины. Коллиматорная часть, в свою очередь, состоит из зеркально-менискового объектива 4 диаметром 230 мм и фокусным расстоянием 1917 мм, отражательной призмы 3 для изменения направления лучей, закрепленной на одной каретке со щелью 2, которая устанавливается в фокусе объектива 4. Каретка снабжена механизмом поворота и изменения ширины щели. Наблюдательная часть состоит из такого же зеркально-менискового объектива 7, как и 4, отражательной призмы 8, закрепленной на каретке с ножом 9, которая устанавливается в фокальной плоскости объектива 7. Объектив 10 может перемещаться вдоль оптической оси для получения резкого изображения объектов, находящихся в плоскости $S-S$ на экране (пленке 12). Изменение ширины щели и перемещение ножа осуществляется микрометрическими винтами с точностью до сотых долей миллиметра. Высота щели может меняться с помощью вставной диафрагмы. Щель с помощью конденсора равномерно освещается источником света 1. Свет через щель 2 проходит на отражательную призму 3, попадает на зеркало объектива 4 и, отражаясь, идет к мениску объектива 4 в виде параллельного пучка света, проходит через образец 5

и зеркально-менисковый объектив 7, отражается от него и попадает на отражательную призму 8. Отражаясь от последней, пучок света попадает через объектив 10 на регистратор-камеру 13. Поскольку зеркально-менисковые объективы 4 и 7 совершенно идентичны, то размеры изображения щели или объекта в плоскости $S-S$ равны размерам самой щели или объекта. Для защиты от взрыва объективов 4 и 7 предусмотрены защитные стекла 6.

При взрыве заряда ВВ в поле трубы ИАБ-451 в результате интенсивного возмущения первоначально однородной оптически проницаемой среды (воздух, вода, стекло и т. п.) возникают отклонения световых лучей вследствие образования поверхностей с повышенным градиентом плотности (фронта ударной волны, поверхности расширяющейся полости). В результате проекция оптического возмущения на экране становится менее освещенной, чем невозмущенная часть среды, и на экране возникает система световых полос, конфигурация которых соответствует конфигурации скачков уплотнения продуктов взрыва, ударных волн и поверхности полости.

Для исследования кратковременных процессов с длительностью не более нескольких микросекунд, наилучшим способом регистрации является способ, основанный на вращении зеркала. В этом случае изображение может перемещаться по неподвижной пленке с большой скоростью. Для регистрации используется камера СФР, где частота вращения зеркала изменяется от $3 \cdot 10^3$ до $75 \cdot 10^3$ об./мин при линейной скорости развертки от 150 до 3750 м/с. Камера СФР может быть использована как фоторегистратор для получения непрерывной развертки процесса во времени и в варианте лупы времени для получения ряда последовательных фотографий исследуемого процесса с частотой съемки от $2,5 \cdot 10^4$ до $2,5 \cdot 10^6$ кадров в секунду (покадровая съемка).

В варианте лупы времени изображение снимаемого объекта строится двумя объективами 11 в плоскости, пересекающей середину отражающей грани зеркала 15. На некотором расстоянии от него по дуге окружности расположен ряд линз прямоугольной формы, собранных в виде линзовой вставки 14. Перед линзовой вставкой также по дуге окружности расположена диафрагма D_2 , а перед первым объективом 11 — четырехрядная или двухрядная прямоугольные диафрагмы D_1 , имеющие соответственно четыре отверстия, смещенных по горизонтали и вертикали, или два отверстия. Система диафрагм и линз действует как оптический затвор, позволяя получить на неподвижной пленке 12 ряд отдельных последовательных фотографий процесса. Синхронизация подсветки процесса с моментом инициирования и началом вращения зеркала осуществляется специально разработанным синхронизирующим устройством, позволяющим инициировать заряд в любом положении зеркала и осуществлять регистрацию с начального момента развития процесса.

Работа кинокамеры в варианте фоторегистрации позволяет исследовать протекание процесса в отдельном сечении поля модели, которое образуется узлом щели кинокамеры с шириной, изменяющейся

от 0,1 до 0,5 мм. В этом случае отсутствует линзовая вставка с диафрагмами D_1 и D_2 (оптический затвор), а изображение сечения передвигается вращающимся зеркалом вдоль фокальной поверхности, где располагается неподвижная киноплёнка. В результате исследуемый процесс регистрируется непрерывной кинограммой изменения его в течение времени. При этом скорость развертки регулируется скоростью вращения зеркала, что дает хорошее разрешение во времени. Скорость развертки ($v_{\text{разв}} = 250 \div 3750$ м/с)

$$v_{\text{разв}} = bv_{\phi}/(u_{\phi}M),$$

где b – ширина диафрагмы узла щели; u_{ϕ} – допускаемый смаз изображения на пленке; M – масштаб съемки; v_{ϕ} – скорость распространения исследуемого процесса.

При покадровой съемке возможно исследование развития расширения котловой полости, фронта ударной волны или волны напряжений, взаимодействие волн напряжений и ряд других вопросов, связанных с расширением полости и волны напряжений. При фоторегистрации очень четко прослеживается фронт волн и достаточно точно определяется скорость распространения фронта волны по углу α наклона фронта волны к горизонтальной плоскости:

$$v_{\phi} = v_{\text{разв}} \frac{\text{tg } \alpha}{M},$$

где $v_{\text{разв}}$ – скорость развертки фоторегистратора.

Метод импульсной рентгено съемки позволяет регистрировать процесс деформации в непрозрачных средах и развитие полости во времени, где применение других экспериментальных средств затруднено. Впервые в нашей стране исследования формирования котловых полостей при взрыве зарядов ВВ в средах, обладающих механической прочностью, проведены с помощью рентгенографического метода. Применительно к задачам разрушения горных пород этот метод впервые был применен и развит А. Н. Ханукаевым. Используемая импульсная рентгеновская установка (рис. 26) включает [7] генераторы импульсного напряжения (ГИН), рентгеновские трубки (РТ), вакуумную систему для создания и поддержания в них высокой степени разрежения, цепи задержки срабатывания рентгеновских трубок, зарядные цепи и устройства, а также другие вспомогательные узлы. Генераторы импульсного напряжения, заряженные через выпрямительное устройство, позволяют получать импульсы с амплитудой 800 кВ, которые подаются на электроды рентгеновских трубок. В начальной стадии вакуумного пробоя междуэлектродного промежутка возникает весьма кратковременное (0,15–0,25 мкс) рентгеновское излучение. Благодаря наличию цепи задержки в разрядных контурах генераторов импульсного напряжения рентгеновские трубки срабатывают поочередно с микросекундными интервалами. Длительность излучения каждой трубки не более $2 \cdot 10^{-7}$ с. Линии задержки в разрядных контурах обеспечивают запаздывание срабатывания каждой трубки относительно предыдущей на 2–7 мкс. Схема

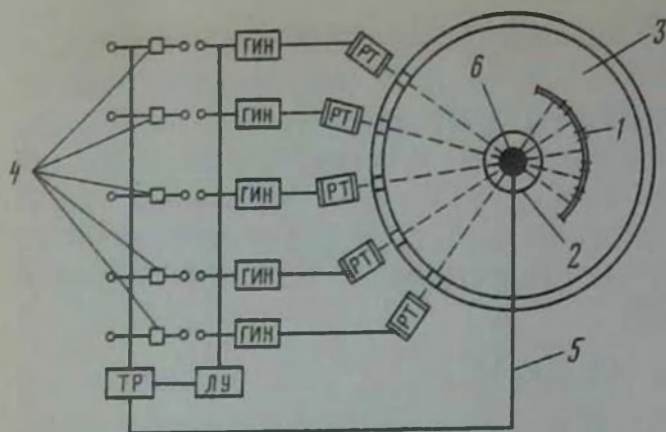


Рис. 26. Схема импульсной рентгеновской установки:

1 — кассеты с рентгеновской пленкой; 2 — исследуемая модель; 3 — взрывная камера; 4 — линия задержки; 5 — линия подрыва; 6 — заряд ВВ

измерения временных интервалов между моментами срабатывания трубок обеспечивает формирование и осциллографирование отметок, соответствующих каждой рентгеновской вспышке.

Исследуемый образец помещается в центре взрывной камеры, вокруг которой по дуге сектора 90° размещаются острофокусные рентгеновские трубки. Экспонирование ведется на рентгенопленки, помещенные в кассеты, расположенные во взрывной камере строго напротив взрываемого образца и рентгеновских трубок.

Расшифровка рентгенограмм сводится к измерению радиуса полости па фотоотпечатках и регистрации временных интервалов, соответствующих приращению радиуса полости. При этом учитывается коэффициент геометрического увеличения изображений, равный в условиях опыта 1,15.

В качестве модели используются образцы горных пород сферической или цилиндрической формы диаметром 35–55 мм. В центре сферического образца или по оси цилиндрического образца в шпурах устанавливается заряд ВВ. Для увеличения контрастности рентгенограмм внутренняя поверхность полости обкладывается свинцовой фольгой толщиной 0,1 мм. Запуск рентгеновской установки осуществляется замыканием ионизационным датчиком, расположенным на некотором расстоянии от точки инициирования заряда (азидовой капли). Зная это расстояние и скорость детонации заряда ВВ, можно определить время задержки инициирования всего заряда, которое и учитывается при синхронизации момента взрыва с пучком рентгеновских излучений (срабатывания рентгеновских трубок) и осциллографа ОК-17М, на котором фиксируются отметки, соответствующие каждой рентгеновской вспышке (на первом канале), и метки времени от генератора меток времени (на втором канале). Импульс разрядки тока снимается с шунта сопротивления $R_{ш}$ и через формирующее устройство подается на вертикальные отклоняющие пластины осциллографа ОК-17М [2].

При исследовании указанных выше явлений используются условия моделирования, вытекающие из расширенного закона геометрического подобия, в основу которого положено энергетическое подобие при взрывах [5, 6]. Дополнительные условия моделирования определяются задачами исследования.

3.2.2. Способы осуществления модельных экспериментов при изучении процессов, протекающих в средней зоне взрыва

В настоящее время существует много способов модельного экспериментального определения размеров зон сжатия, разрушения или дробления и трещинообразования, а также параметров волн напряжений и сейсмозрывных волн, вызванных взрывом в горной породе. Общим для них является использование взрывов зарядов меньших размеров, чем при натуральных взрывах, вплоть до весьма малых размеров (микрочарядов). Взрывы проводятся в натуральных средах либо непосредственно на монолитных участках естественного массива (в полигонных условиях), либо на блоках различных размеров из натуральных горных пород, а также из оптически прозрачных материалов (в лабораторных условиях). При этом для моделирования этих взрывов используется в основном расширенный закон геометрического подобия, где за линейный масштаб моделирования берется отношение эквивалентных по энергии взрыва размеров заряда природы и модели (обычно радиусов или пропорциональных им корней из эквивалентных масс зарядов, т.е. $\sqrt[3]{G_*}$ или $\sqrt{q_*}$) и предполагается одинаковость сред модели и природы.

Все эти методы различаются главным образом методологией проведения экспериментов и измерительной аппаратурой, используемой для определения параметров рассматриваемых явлений взрыва.

Обычно для определения зон разрушения используются блоки горных пород различных размеров и микрочаряды для их взрывания. Для регистрации искомых параметров используется разнообразная аппаратура, начиная с простейших приемов визуального наблюдения и фотографирования и кончая весьма сложной аппаратурой оптических съемок с использованием высокоскоростных кинокамер и специальных электронных устройств для синхронизации работы этой аппаратуры с момента взрыва.

Для исследования параметров волн напряжений в средней зоне взрыва наиболее надежным методом является так называемый метод преломленной волны. Сущность его заключается в том, что измеряется не само напряжение в породе, а преломившаяся в воду волна давления с помощью пьезодатчиков давления, установленных вблизи стенок блока в воде. Это вызвано тем, что непосредственное измерение аналогичными датчиками, помещенными в породу, связано с рядом факторов, приводящих к большой погрешности измерений. К ним относится прежде всего влияние размеров датчика и сделанного для его размещения шпура на измеряемое поле напряжений. Кроме того, имеет место трудность обеспечения строгого расположения датчика по отношению к взрыву и надежного контакта датчика с породой. Применение в этом случае различных связующих материалов (цемента, алебаstra и др.) также вносит определенные ошибки в измерения, так как акустические сопротивления этих материалов всегда отличаются от

акустической жесткости окружающей горной породы, а контакт датчика с породой не всегда бывает стабильным. Отсюда следует, что непосредственное измерение датчиком, расположенным в породе, может дать лишь сравнительную оценку поля напряжений. Ее количественная оценка достигается методом преломленной волны.

Согласно этому методу, производится измерение волны давления, преломленной из породы в воду, с помощью пьезоэлектрического датчика давления и специальной электронной аппаратуры. Параметры волны напряжений на стенке блока определяются расчетным путем, используя закономерности преломления упругих волн по формулам акустического приближения:

$$\sigma = p/k_{np}, k_{np} = (2\rho_w c_w)/(\rho_w c_w + \rho_n c_n), \quad (3.32)$$

где p – замеренное датчиком давление; k_{np} – коэффициент преломления; ρ_w, c_w – плотность и скорость звука в воде; ρ_n, c_n – плотность и скорость звука в породе блока. По этим формулам при взрыве сосредоточенного заряда определяется фактически нормальная к плоскости преломления (стенке блока) составляющая волны напряжений, которая для взрыва сосредоточенного или сферического заряда определяется зависимостью

$$\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_\phi \sin^2 \alpha, \quad (3.33)$$

где σ_r – радиальная составляющая волны напряжения; $\sigma_\phi = \sigma_0$ – тангенциальная составляющая волны напряжения; α – угол, составленный вектором \vec{r} , проведенным из центра взрыва в точку наблюдения с нормалью к стенке блока в точке преломления (наблюдения).

Очевидно, при $\alpha = 0$, т.е. при совпадении вектора \vec{r} с нормалью в точке наблюдения, будет регистрироваться только радиальная составляющая волны напряжения σ_r , нормальная составляющая к сферическому фронту волны напряжений.

Заметим, что этот метод был разработан первоначально для измерения волн, вызванных только сосредоточенными зарядами. При этом были приняты следующие допущения.

В формулах (3.32) величины ρ_w, c_w, ρ_n и c_n берутся для невозмущенных сред, что полностью справедливо для волн малой амплитуды (сейсмических и акустических волн). В действительности надо брать значения ρ_n и c_n для точек максимальной амплитуды напряжения. Погрешность этого допущения не превышает 8% при измерениях волны напряжений, начиная с расстояний $r = (10 \div 15)R_0$.

Измерение преломленной волны давления проводится пьезодатчиком, установленным строго напротив заряда, у стенки породы на расстоянии 3–5 мм от нее. Такой зазор может незначительно исказить форму волны напряжения за счет ее распространения в воде с погрешностью, не превышающей 1,5% [5].

Таким образом, общая погрешность измерения не превысит 10%, что вполне допустимо, если учесть, что суммарная погрешность измерения условий опытов и установочных данных измерительной аппаратуры тоже находится в этих пределах.

Из анализа допущений и погрешностей метода вытекает, что при проведении экспериментов необходимо обращать особое внимание на тщательность установки датчиков строго напротив заряда перпендикулярно к плоскости преломления и на расстоянии от стенки блока не более 5 мм. При этом стенка в районе установки датчика площадью (мм^2) $S = 10b$ (где b — ширина датчика) должна быть идеально гладкой (отшлифованной). Остальная площадь (поверхность) стенки должна быть ровной, без больших шероховатостей и выступов, особенно вблизи установки датчика. В противном случае регистрируемая осциллограмма будет искажена различными помехами дифракционного происхождения.

Модельные эксперименты по этому методу могут осуществляться двумя способами: на полигоне, в условиях естественного залегания породы, и в лабораторных условиях на блоках из исследуемой горной породы.

При использовании первого способа в естественных условиях в пласте породы выбирается монолитный участок без видимых трещин и неоднородностей с естественным или искусственным котлованом. Вертикальные стенки котлована выравниваются, а места вблизи установки датчиков шлифуются. Котлован с установленными датчиками заливается водой. Взрывы зарядов проводятся в шпурах, расположенных на линиях, перпендикулярных к стенке котлована, в точках установки датчиков.

Взрывные шпуры бурят на разных расстояниях от стенки котлована. Взрывы производят последовательно, начиная с далеких расстояний, чтобы не повредить породу между стенкой и последующим взрывом. Этот способ используется редко, так как требует наличия готового котлована и достаточно ровных вертикальных стенок. Изготовление искусственного котлована без нарушения сплошности окружающей породы трудновыполнимо.

Наиболее целесообразен второй способ — лабораторные эксперименты с блоками исследуемых горных пород. В этом случае обычно используются прямоугольные блоки с гладкими гранями. Они помещаются в прямоугольный бак с водой примерно в 2–3 раза больших размеров, чем размеры блоков. Взрыв производится в шпуре, пробуренном в блоке параллельно его боковым граням. Место для шпура выбирается так, чтобы можно было при взрыве в нем провести измерения преломленной волны на четырех различных расстояниях датчиками, установленными на четырех различных боковых гранях блока.

Увеличение размеров баков в 2–3 раза по сравнению с размерами блока необходимо для исключения влияния отраженных от стенок бака волн на регистрируемую преломленную волну (рис. 27).

Для измерения параметров преломленной в воду волны используются пьезодатчики давления (обычно турмалиновые, как обладающие меньшим пирозэффектом) и специальная регистрирующая аппаратура, состоящая из электронно-лучевого осциллографа, блока катодных повторителей, пульта управления и блоков питания (рис. 28). Принцип действия этой аппаратуры кратко заключается в следующем. Пере-

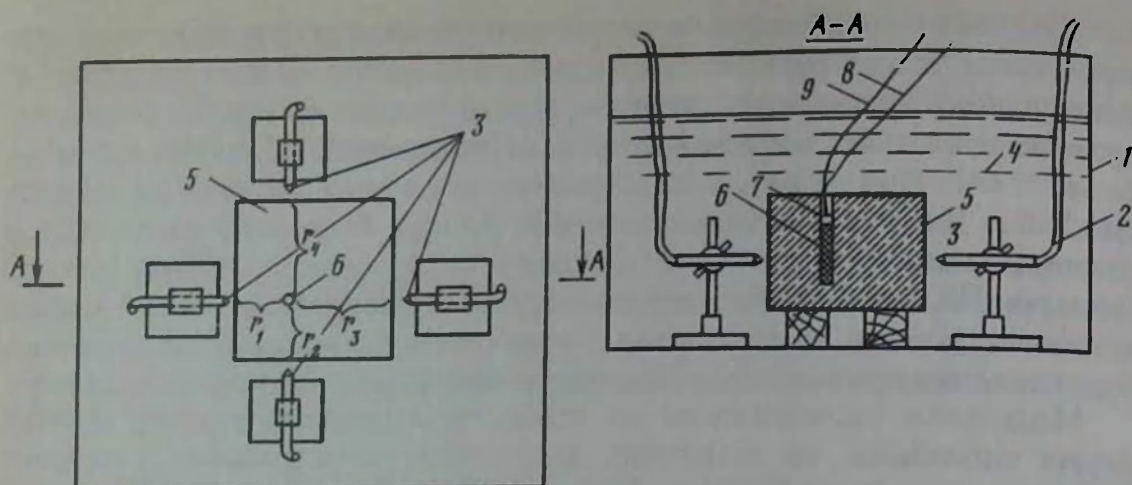


Рис. 27. Схема проведения опытов в лабораторных условиях методом преломленной волны:

1 – бак; 2 – измерительный кабель; 3 – датчики; 4 – вода; 5 – блок горной породы; 6 – заряд; 7 – детонатор; 8 – линия упредителя; 9 – линия подрыва

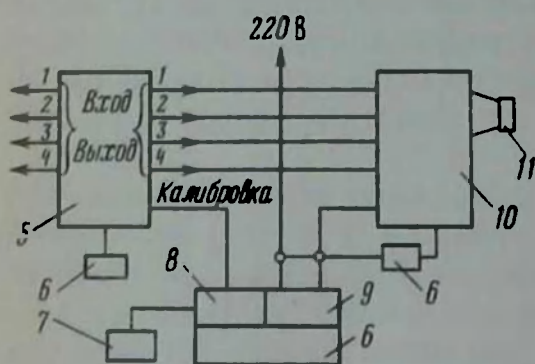


Рис. 28. Блок-схема измерительного тракта:

1–4 – пьезодатчики давления; 5 – блок катодных повторителей; 6 – блоки питания; 7 – милливольтметр для измерения калибровочного сигнала; 8 – генератор калибровочных импульсов; 9 – формирующий усилитель пусковых сигналов; 10 – катодный осциллограф; 11 – фотоаппарат

менное электрическое напряжение, вызванное обжатием пластин датчика при прохождении волны давления, поступает на блок катодных повторителей, который предназначен для согласования волнового сопротивления или напряжения сигнала с осциллографом. От катодных повторителей преобразованное напряжение по экранированному кабелю поступает на вход осциллографа и фиксируется электронно-лучевой трубкой на экране осциллографа в виде осциллограммы изменения напряжения во времени. Полученная запись расшифровывается в эпору изменения давления во времени по формуле

$$p = (A_{\max}/A_{\kappa})(C_{\kappa}U_{\kappa}/S_{\kappa}), \quad (3.34)$$

где p – давление в преломленной волне; A_{\max} – максимальная амплитуда осциллограммы; A_{κ} – амплитуда калибровочного сигнала на осциллограмме; C_{κ} , U_{κ} – емкость и напряжение калибровочного сигнала; S_{κ} – чувствительность пьезодатчика.

Пульт управления состоит в основном из двух блоков: генератора калибровочных импульсов ГКИ-3 и формирующего усилителя пусковых

сигналов ФУПС. Они служат для синхронизации пуска осциллографа, выдачи калибровочных импульсов и подачи меток времени, необходимых для расшифровки осциллограмм.

Временные характеристики регистрируемых волн расшифровываются по формуле

$$t = t_m t^{\circ},$$

где t — время; t_m — масштаб времени на осциллограмме; t° — время, снятое с осциллограммы.

Как уже отмечалось раньше, этот метод разработан для взрыва сосредоточенных зарядов, для определения радиальной составляющей волны напряжения при установке датчика строго напротив заряда так, чтобы угол α в формуле (3.33) был близок к нулю. При косом падении будет регистрироваться нормальная составляющая, определяемая зависимостью (3.33). Если использовать справедливое для упругой зоны взрыва соотношение между σ_r и σ_{φ} в виде

$$\sigma_{\varphi} = (1 - 2\gamma^2)\sigma_r = \frac{v}{1 - v}\sigma_r,$$

где $\gamma = c_{\perp}/c_p$ — отношение скоростей распространения поперечной и продольной волн; v — коэффициент Пуассона, то тогда можно определить радиальную составляющую и для случая косого падения ($\alpha \neq 0$) из зависимостей

$$\sigma_n = \sigma_r [\cos^2 \alpha + (1 - 2\gamma^2) \sin^2 \alpha] = p/k_{np},$$

$$\sigma_n = \sigma_r \left(\cos^2 \alpha + \frac{v}{1 - v} \sin^2 \alpha \right) = p/k_{np}$$

по формулам

$$\sigma_r = \frac{p}{k_{np}} \cdot \frac{1}{1 - 2\gamma^2 \sin^2 \alpha}, \quad \frac{p}{k_{np}} \cdot \frac{1 - v}{\cos^2 \alpha - v(2 \cos^2 \alpha - 1)} = \sigma_r.$$

Для определения параметров волны напряжения от взрыва удлиненного заряда изложенным выше методом преломленной волны следует учесть ряд факторов, которые существенно усложняют расшифровку экспериментальных данных и накладывают дополнительные условия, которые следует учитывать при проведении самих экспериментов.

Прежде всего отметим, что при взрыве удлиненных зарядов с инициированием его с одного конца, что обычно имеет место в действительности, форма фронта волны напряжений будет зависеть от отношения скоростей D детонации заряда и скорости c_p распространения продольной волны.

Если скорость детонации выше скорости распространения продольной волны ($D > c_p$), то фронт волны представляет поверхность тела вращения грушевидной формы, состоящей из двух полусфер, переходящих в сопряженный с ними конус. Угол α , составленный образующей конуса (см. рис. 8, а) с осью заряда, определяется из отношения

$$\sin \alpha = c_p/D.$$

Если $c_p > D$, то фронт волны имеет сферическую форму с центром в точке иницирования заряда (см. рис. 8, б).

При этом методом преломленной волны определяется нормальная к плоскости измерения составляющая волны напряжений, вызванной взрывом удлиненного заряда.

Надо иметь в виду, что при моделировании на блоках необходимо правильно выбрать размеры блока, руководствуясь не только масштабом геометрического подобия, но и условием минимального влияния боковых граней блока на регистрируемую эпюру волны напряжений.

Зная примерную длительность фазы сжатия волны по предварительным опытам или из литературы, выбирают размеры блока и положение заряда так, чтобы отраженные от близлежащей грани блока волны проходили в точку наблюдения после прохождения фазы сжатия волны. Время прихода прямых и отраженных волн вычисляют по правилам акустики с учетом геометрии взаимного расположения заряда и точки наблюдения в блоке и их удаления от граней и ребер блока.

Следует отметить, что метод преломленной волны позволяет определить достаточно точно только положительную фазу нормальной составляющей волны напряжений, что является весьма существенным его недостатком. Это объясняется тем, что вода не переносит разрежений, больших $(1-2) \cdot 10^5$ Па, и при преломлении в нее отрицательной фазы волны напряжений начинает кавитировать. Об этом свидетельствуют опытные осциллограммы, где после фазы сжатия обычно регистрируются беспорядочные высокочастотные колебания вблизи нулевой линии, характерные для явлений захлопывания кавитационных полостей.

Для получения полной эпюры напряжение-время, а также других составляющих волны напряжений (σ_+ , σ_-) в измеряемой плоскости, следует использовать другие методы измерений, например, метод непосредственного измерения параметров волны напряжений путем размещения пьезодатчиков давления в образце горной породы или в блоках из эквивалентных материалов типа эпоксидная смола, оргстекло, тиосульфат натрия, песчано-цементная смесь. В этом случае датчики устанавливаются в шпурах этих блоков, добиваясь надежного закрепления их заполнителями с близкой к материалу блока акустической жесткостью. Наиболее просто это осуществляется в вышеуказанных блоках из эквивалентных материалов. При этом закрепление датчиков в блоках из оргстекла и смол производится эпоксидной смолой, а в блоках из тиосульфата натрия и песчано-цементной смеси датчики устанавливаются в них в стадии полужидкого состояния этих блоков до момента их остывания и затвердевания.

Недостаток этого метода измерений - возможность получения лишь качественной картины эпюры волны напряжений в силу существенного отличия физико-механических свойств, особенно вязкости, этих материалов от таковых для горных пород. Преимущество - возможность получения полных эпюр напряжение-время всех составляю-

щих волны напряжений путем соответствующего расположения чувствительных плоскостей пьезодатчиков относительно центра или оси взрыва соответственно для зарядов сферической и цилиндрической формы. Так, при взрыве сферического заряда для регистрации радиальной составляющей волны σ_r , чувствительная плоскость датчика устанавливается перпендикулярно направлению на центр взрыва, а для тангенциальной составляющей $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ параллельно этому направлению.

Расшифровка амплитуды волны напряжений производится по формуле (3.34), т. е.

$$\sigma_{r,\varphi} = (A_{\max}/A_k)(c_k U_{\text{к}}/S_d),$$

где r, φ – индексы радиальной и тангенциальной составляющей волны напряжений.

Помимо измерения напряжений существует ряд методов измерения скорости смещения или ускорения смещения частиц породы в волне напряжений. Для измерения скорости смещения используются емкостные, электромагнитные и индукционные преобразователи, основанные соответственно на изменении напряжения в конденсаторе за счет движения воспринимающей обкладки относительно неподвижной, возникновении наведенного электрического сигнала в движущемся датчике (обычно проволоке) в постоянном магнитном поле и в возникновении индуктированной ЭДС в катушке при движении внутри ее зазора магнитного сердечника.

Наибольшее распространение в лабораторных условиях получили электромагнитные преобразователи [10], индукционные преобразователи используются широко для измерения массовой скорости и смещения породы и грунта в дальней зоне взрыва при регистрации сеймовзрывных и сейсмических волн.

При методе измерений с электромагнитными преобразователями в качестве датчика используются проволочные рамки, размещаемые непосредственно в образце и ориентированные соответствующим образом относительно направления постоянного магнитного поля. В качестве материала модели используются легкоплавкие среды (тиосульфат натрия, канифоль и различные смолы), в которых удается надежно закрепить проволочный датчик до момента остывания и затвердевания материала модели. В этом случае скорость перемещения среды (см/с)

$$v = U 10^5 / (lH),$$

где U – напряжение, измеряемое осциллографом; l – длина датчика; H – напряженность магнитного поля.

При помощи электромагнитных преобразователей возможно измерить несколько составляющих массовой скорости в широком диапазоне расстояний от 3 до 70 радиусов заряда с достаточной точностью измерений [10]. Основные недостатки методики:

- 1) невозможность использования их в образцах горных пород;
- 2) отсутствие прямой тарировки преобразователей;
- 3) невозможность использования ее в натуральных условиях.

Для измерения ускорений смещения частиц породы в волне напряжений используются акселерометры различных конструкций. Наиболее рациональными считаются пьезокварцевые акселерометры, обладающие большой прочностью и линейностью характеристик вплоть до напряжений, близких к разрушающим. Они являются высокочастотными и однонаправленными преобразователями, т.е. генерируемое ими электрическое напряжение пропорционально ускорению в одном направлении – оси преобразователя. Это весьма важно при измерениях в горных породах, особенно в натуральных условиях, где породы в сущности являются анизотропными средами.

М. А. Нефедовым разработаны пьезокварцевые акселерометры для измерения ускорения как в лабораторных, так и в натуральных условиях [10]. Конструкции обоих преобразователей одинаковы, отличаются они весом и размерами датчика, собственной частотой, механической прочностью и чувствительностью. В качестве регистраторов используются электронно-лучевые осциллографы ОК-17, С1-33, С8-12 (обычно для лабораторных экспериментов) и светолучевые осциллографы Н-105, Н-117 (для полигонных и промышленных экспериментов). Весьма перспективны электронно-лучевые осциллографы с механической разверткой изображения, например, девятиканальные осциллографы НО-23 и НО-40, выпускаемые в настоящее время промышленностью.

При использовании акселерометров, так же как и для датчиков давления, возникает проблема установки датчиков в образцы или массив горных пород и надежности их крепления. Требования к установке акселерометров аналогичны требованиям для пьезодатчиков давления. В работе [10] для крепления датчиков предлагается эпоксидный компаунд, состоящий из эпоксидной смолы ЭД-20 (100 весовых частей), дибуталфтолата (12–15 весовых частей), мелкозернистого кварцевого песка (80 весовых частей), полиаминполиэтилена (12 весовых частей) и позволяющий получить прочность на разрыв и акустическую жесткость, близкие для скальных пород ($\sigma_{орр} = 43$ МПа, $\rho c = 13 \cdot 10^6$ Па/с).

Расшифровка амплитуды ускорений производится по зависимости

$$a = (A_{max}/A_x)(C_x U_x/S_x),$$

где A_{max} , A_x , C_x , U_x – величины, аналогичные формуле (3.34); a – амплитуда ускорения в единицах ускорения свободного падения g ; S_x – чувствительность акселерометра, отнесенная к g .

Отметим, что применяемая измерительная аппаратура позволяет при включении в измерительный тракт интегрирующего контура получить также запись скорости смещения, что весьма важно для анализа одного из основных параметров, определяющих воздействие взрыва на породу и инженерные сооружения.

Графическое интегрирование записи ускорений является весьма трудоемким и недостаточно точным.

При проведении экспериментов условия моделирования волны напряжений вытекают из закона расширенного геометрического подобия, основанного на энергетическом подобии ВВ и одинаковости сред природы и модели.

3.2.3. Способы моделирования ударных воздушных и сейсмозрывных волн, вызванных массовыми взрывами в горных породах

В дальней зоне взрыва весьма важными факторами, определяющими действие взрыва на наземные сооружения, являются ударная воздушная (УВВ) и сейсмозрывная (СВВ) волны. Последние также воздействуют и на подземные сооружения. Поэтому исследование параметров этих волн необходимо. Для определения параметров (УВВ и СВВ) обычно проводят инструментальные наблюдения при осуществлении промышленных и полигонных экспериментальных взрывов.

При измерении параметров УВВ используются высокочувствительные пьезоэлектрические датчики давления, малогабаритные усилители мощности в сочетании с катодным повторителем и светолучевым осциллографом Н-117 с высокочастотными гальванометрами ($f_r = 600 \div 1200$ Гц). При выборе гальванометра руководствуются условием

$$f_r \gg f_{УВ} \approx 1/\tau_+,$$

где τ_+ – длительность положительной фазы УВВ, определенная по формуле М. П. Садовского.

$$\tau_+ = 1,5 \sqrt[6]{G} \sqrt{r} 10^3.$$

В качестве датчиков используются пьезодатчики давления ножевого или мембранного типов, рабочая частота которых соответственно равна 100 и 10 кГц. Усилитель мощности имеет полосу пропускания от 1 до 100 кГц. В целом, комплекс аппаратуры (датчик–усилитель с катодным повторителем – светолучевой осциллограф) позволяет регистрировать давления УВВ в широком диапазоне от 10 до 10^6 Па. Расшифровка данных измерений – амплитуды давления во времени проводится по формуле (3.34). При полигонных испытаниях используются заряды меньших размеров, а экстраполяция результатов измерений на натуре осуществляется по зависимостям, вытекающим из закона расширенного геометрического подобия. Этот же закон используется при проведении модельных экспериментов. В этом случае процесс изменения давления во времени регистрируется электронно-лучевыми осциллографами С1-33, так как длительность процессов в модели существенно меньше, чем при полигонных и промышленных взрывах.

Для определения параметров СВВ проводят серию инструментальных наблюдений по наиболее характерным и опасным сейсмическим профилям в трех–пяти точках, расположенных на различных расстояниях от места взрыва. Эти параметры регистрируют комплексом измерительной аппаратуры, состоящей из датчиков смещений, скоростей или ускорений смещений грунта (породы), измерительной линии и осциллографа, фиксирующего показания датчиков в виде сейсмограмм – запись соответствующих параметров колебания грунта во времени. В качестве датчиков (сейсмометров) обычно используют измерительные индукцион-

ные преобразователи и пьезоакселерометры. К первым относятся вибрографы типа ВИБ-А, ВЭГИК конструкции ИФЗ АН СССР, дифференциальные датчики скорости типа ДДС, ИДС и сейсмоприемники НС-3. Их обычно применяют при полигонных и промышленных взрывах. Пьезоакселерометры конструкции ЛГИ можно также использовать и в лабораторных условиях (датчики малых размеров с $d = 15$ мм и $L = 20$ мм), применяют светолучевые осциллографы Н-105, ОШ-9, Н-117, в которых индуцируемые датчиками колебания электрического сигнала с помощью гальванометра и зеркально-лучевой системы осциллографа фиксируются на светочувствительной бумаге, движущейся с определенной скоростью, что позволяет развернуть эти колебания во времени. При этом в зависимости от типа гальванометра – частоты собственных колебаний его $f_{\text{г}}$, частоты собственных колебаний датчика $f_{\text{д}}$ и частоты регистрируемых колебаний грунта $f_{\text{гр}}$ измерительная аппаратура дает запись колебаний, пропорциональную смещению или скорости смещения грунта во времени. Так, для регистрации скорости смещения или амплитуды смещения грунта необходимо выполнить следующие соответствующие условия:

$$f_{\text{г}} \gg f_{\text{д}} < f_{\text{гр}}, f_{\text{г}} \geq f_{\text{гр}}.$$

Расшифровка скорости смещения или амплитуды смещения по соответствующим сейсмограммам проводится по зависимостям:

$$v = A R_{\Sigma} / (S_{\text{д}} S_{\text{г}}), u = A R_{\Sigma} / (S'_{\text{д}} S_{\text{г}}),$$

где v и u – соответственно амплитуды скорости смещения (см/с) и смещения колебания (см) грунта; A – отклонение амплитуды на сейсмограмме, мм; K_{Σ} – сопротивление измерительной цепи (датчика, измерительной линии, гальванометра), Ом; $\bar{S}_{\text{г}}$ – чувствительность гальванометра, мм/мА; $S_{\text{д}}$, $S'_{\text{д}}$ – чувствительность датчика соответственно в мВ·с/см и мВ/см.

Для измерений ускорений смещений грунта обычно используют акселерометры, например, конструкции ЛГИ [10] больших размеров ($d = 40$ мм, $L = 45$ мм). Показания датчиков регистрируют на светолучевых осциллографах Н-117, данные расшифровывают по формуле (3.34). Условия моделирования для сейсмозрывных волн вытекают из закона расширенного геометрического подобия.

3.3. Моделирование ударной волны и волны напряжений в ближней зоне взрыва

Схематически развитие взрыва в горной породе в ближней зоне взрыва можно представить следующим образом. При инициировании заряда ВВ образуется детонационная волна с ударным фронтом, за которым следует зона реакции и область расширяющихся газообразных продуктов взрыва. На границе заряд ВВ – горная порода благодаря сильному сжатию породы в ней возникает волна сжатия с ударным

фронтом, распространяющаяся в глубь породы симметрично относительно заряда. Энергия волны сжатия при ее распространении в породе быстро диссипирует, волна сжатия в силу характера зависимости деформации от напряжения горных пород быстро теряет вид ударной волны и трансформируется сначала в упругопластическую, затем в упругую волну с неударным фронтом [5,6]. Газообразные продукты взрыва, продолжая расширяться, сжимают раздробленную массу породы и формируют котловую полость, если свободные поверхности находятся на достаточно большом удалении от заряда, или воронку выброса, если взрыв происходит вблизи свободных поверхностей и энергии газообразных продуктов достаточно для преодоления сил сопротивления разрушенной породы волной сжатия и квазистатическим действием продуктов взрыва.

Таким образом, для моделирования ударной волны и волны напряжений в ближней зоне взрыва необходимо установить условия моделирования преломленной на границе раздела заряд-порода ударной волны и упругопластической волны напряжений на некотором удалении от заряда. Очевидно, расширенный закон геометрического подобия, справедливый для зоны упругих деформаций, в ближней зоне взрыва не будет выполняться из-за различия краевых условий, обусловленных различием типов ВВ и пород.

Для моделирования преломленной ударной волны рассмотрим зависимости, полученные в работе [4] из условий преломления детонационной волны в породе, условий динамической совместности на фронтах отраженной и преломленной волн и ударной адиабаты для твердых пород в виде, предложенном В. М. Гоголевым. Максимальное давление в преломленной волне p_ϕ согласно [4] определяется из уравнений:

для случая, когда акустическая жесткость породы $\rho_n c_n$ больше импеданса ВВ $\rho_{ВВ} D$, т. е. $\rho_n c_n > \rho_{ВВ} D$,

$$\left\{ \frac{p_\phi}{\rho_n} \left[1 - \frac{1}{\left(A \frac{p_\phi}{\rho_n c_n^2} + 1 \right)^{1/m}} \right] \right\}^{1/2} = v_1 - \frac{(p_\phi - p_1) \sqrt{2k}}{\sqrt{\rho_{ВВ} (k-1) [(k+1)p_\phi + (k-1)p_1]}}; \quad (3.35)$$

для случая, когда имеет место обратное соотношение, т. е. $\rho_n c_n < \rho_{ВВ} D$,

$$\left\{ \frac{p_\phi}{\rho_n} \left[1 - \frac{1}{\left(A \frac{p_\phi}{\rho_n c_n^2} + 1 \right)^{1/m}} \right] \right\}^{1/2} = v_1 + \frac{2kD}{k^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_\phi}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \right], \quad (3.36)$$

где p_1 — максимальное давление в детонационной волне,

$$p_1 = \rho_{ВВ} D^2 / (k + 1);$$

A и m — безразмерные численные коэффициенты в выражении для ударной адиабаты; $A = 5,5$; $m = 5$ при $0,1 \leq p_\phi / (\rho_n c_n^2) \leq 35$, $A = 3,0$; $m = 3$ при $p_\phi / (\rho_n c_n^2) < 0,1$; k — показатель изэнтропы продуктов детонации ВВ; v_1 — скорость частиц продуктов взрыва в детонационной волне

$$v_1 = D/(k + 1); \quad (3.37)$$

$\rho_{\text{ВВ}}$ – плотность заряда ВВ; D – скорость детонации ВВ. Остальные параметры преломленной волны – плотность ρ_ϕ , скорость частиц v_ϕ и скорость фронта N_ϕ – определяются по формулам:

$$\rho_\phi = \rho_n \left(1 + \frac{A p_\phi}{\rho_n c_n^2} \right)^{1/m}, \quad (3.38)$$

$$v_\phi^2 = p_\phi \left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_\phi} \right), \quad (3.39)$$

$$N_\phi = \frac{D_\phi}{\rho_\phi v_\phi} = \sqrt{\frac{D_\phi}{p_\phi} \left(\frac{1}{\rho_\phi / (\rho_n - 1)} \right)}. \quad (3.40)$$

Из уравнений (3.35) и (3.36) следует, что для их идентичности в модели и натуре необходимо, чтобы масштабы давлений $(p_\phi)_c$ и $(D_\phi)_c$ были одинаковыми $(p_\phi)_c = (p_1)_c = p_c$ и удовлетворяли индикатору подобия

$$\frac{p_c}{(\rho_n)_c (c_n)_c^2} = 1; \quad (3.41)$$

масштабы скорости на фронте детонационной волны $(v_1)_c$, скорости детонации D_c и плотности ВВ $(\rho_{\text{ВВ}})_c$ связаны с масштабом давления p_c при $k_c = 1$ отношением

$$\frac{p_c}{(\rho_{\text{ВВ}})_c (v_1)_c^2} = 1. \quad (3.42)$$

Из зависимости (3.37) следует

$$(v_1)_c = D_c = v_c,$$

т.е. масштабы скорости продуктов взрыва на фронте детонационной волны и скорости детонации должны быть одинаковы. В этом случае индикатор подобия (3.42) запишется в виде

$$\frac{p_c}{(\rho_{\text{ВВ}})_c D_c^2} = 1. \quad (3.43)$$

Из формул (3.38)–(3.40) с учетом индикатора подобия (3.41) вытекает

$$(v_\phi)_c = (N_\phi)_c = (c_n)_c = c_c, \quad (3.44)$$

т.е. масштабы моделирования скорости частиц породы на фронте ударной волны, скорости распространения волны и звука в породе тоже должны быть одинаковы.

Сопоставляя (3.41) и (3.43), можно получить следующую критериальную зависимость

$$\rho_{\text{ВВ}} D^2 / (\rho_n^2 c_n^2) = \text{idem},$$

которая связывает жесткость породы $\rho_n c_n^2$ с аналогичной величиной $\rho_{ВВ} \bar{D}^2$ заряда ВВ и должна быть одинаковой для модели и природы, т. е.

$$\frac{(\rho_{ВВ})_n D_n^2}{(\rho_n)_n (c_n)_n^2} = \frac{(\rho_{ВВ})_m D_m^2}{(\rho_n)_m (c_n)_m^2} \quad (3.45)$$

Из критериев подобия (3.41) с учетом зависимостей (3.42) и (3.44) следует, что параметры движения среды (породы или ВВ) в преломленной и детонационной волнах должны удовлетворять критерию подобия Эйлера $\rho/(\rho v^2) = \text{idem}$, который связывает кинематические и динамические характеристики движения. Если при этом имеет место простое геометрическое подобие, когда масштабы линейных размеров l_c и времени t_c равны, т. е. $l_c = t_c$, а в качестве модели среды используется блок из горной породы, т. е. $(\rho_n)_n = (\rho_n)_m$; $(c_n)_n = (c_n)_m$, то равенство (3.45) сводится к равенству

$$(\rho_{ВВ})_m D_m^2 = (\rho_{ВВ})_n D_n^2. \quad (3.46)$$

Это равенство полностью выполняется, если в модели использовать такое же ВВ и с такой же плотностью заряжения, что и при натуральных взрывах. Однако в лабораторных условиях применение промышленных ВВ практически невозможно, так как весьма небольшие размеры зарядов в модели практически всегда будут меньше критических диаметров зарядов этих ВВ, при которых имеет место стабильная и надежная детонация их. Как правило, при лабораторных модельных экспериментах используются заряды из иных ВВ с весьма малыми размерами ($d_z = 3 \div 10$ мм), надежная детонация которых возможна при применении таких ВВ, как тэн, гексоген. В этом случае при известных параметрах моделируемого промышленного ВВ по зависимости (3.46) подбирается плотность и скорость детонации модельного ВВ, а значит, и тип модельного ВВ. При применении порошкообразного тэна и гексогена необходимо уменьшить плотность заряжения модельного заряда на величину

$$(\rho_{ВВ})_m = (\rho_{ВВ})_n \left(\frac{D_n}{D_m} \right)^2.$$

Так, если $D_n = 4000$ м/с, $(\rho_{ВВ})_n = 1$ г/см³, $D_m = 6000$ м/с, то $(\rho_{ВВ})_m = 1(4/6)^2 \approx 0,45$ г/см³. Но при такой малой плотности возможно снижение скорости детонации модельного заряда, которую можно приближенно оценить по зависимости, предложенной Куком

$$D = D_1 + 3500(\rho_{ВВ} - 1), \quad (3.47)$$

где D_1 – скорость детонации ВВ при $\rho_{ВВ} = 1$ г/см³. В этом случае плотность заряда определяется из уравнения

$$(\rho_{ВВ})_m^3 + 2 \left(\frac{D_n}{3500} - 1 \right) (\rho_{ВВ})_m^2 + \left(\frac{D_m}{3500} - 1 \right) (\rho_{ВВ})_m \times \frac{(\rho_{ВВ})_n D_n^2}{(3500)^2} = 0, \quad (3.48)$$

здесь $(\rho_{ВВ})_m = 0,66$ г/см³.

Моделирование параметров на фронте преломленной волны можно проводить на образцах горной породы сферической или цилиндрической формы, а в качестве ВВ принять порошкообразный тэн или гексоген с плотностью и скоростью детонации, рассчитанными по формулам (3.47) и (3.48). Модельные эксперименты целесообразно осуществлять на рентгеноимпульсной установке, описанной выше в разд. 3.2.1, с регистрацией скорости движения породы на фронте волны v_ϕ . Для этого производится регистрация движения стенки камеры в первый момент его развития при минимально возможной задержке срабатывания рентгеновских трубок от момента взрыва. Определяя по рентгеновским фотокадрам смещение стенки камеры в выбранном сечении $\Delta \bar{s}_c = (d_1 - d_n)/2$ (где \bar{a}_c — начальный диаметр камеры, d_1 — последующий диаметр его после сдвижения стенки) и зная промежуток времени между кадрами Δt , вычисляют среднюю скорость смещения стенки камеры в первый момент взрыва $v_{cp} = \Delta S_c / \Delta t$. Затем таким же образом определяется скорость движения внешней поверхности образца породы при выходе на нее ударной волны. Учитывая, что ударная волна в скальных породах существует на расстоянии до двух-пяти радиусов заряда, диаметр образца породы принимают равным трем-шести радиусам заряда, т. е.

$d_{об} = (3 \div 6) R_{оз}$. Среднее смещение поверхности образца $\Delta \bar{s}_c = \frac{1}{2} [(d_{об})_1 - (d_{об})_n]$ (где индексы n и 1 обозначают значение \bar{a}_c до взрыва и после выхода УВ на поверхность образца). Скорость смещения кромки $v_{кр} = \Delta \bar{s}_c / \Delta t$, скорость па фронте волны на рассматриваемой кромке образца $v_\phi = v_{кр} / \sqrt{2} = \Delta S_c / (2\Delta t)$. Для уточнения начальной скорости движения породы $(v_\phi)_0$ в ударной волне эксперименты проводят с образцами минимум трех размеров $d_{об} = 3 R_{оз}$, $4 R_{оз}$ и $6 R_{оз}$. В результате экспериментов получают четыре значения $v_\phi - v_\phi = v_{cp}$; $v_\phi = v_{кр}/2$ (при $d_{об} = 3 \div 6 R_{оз}$). По ним строят кривую изменения v_ϕ с расстоянием, откладывая значение $v_\phi = v_{cp}$ на расстоянии $r = \bar{R}_{оз} + \Delta S_c / 2$, $v_\phi = v_{кр} / \sqrt{2}$ соответственно на расстояниях $r = 3 \div 6 R_{оз}$. По этой кривой, экстраполируя ее на расстояние $r = \bar{R}_{оз}$, находят значение $(v_\phi)_0$ в преломленной волне и определяют закономерность затухания амплитуды фронта ударной волны.

Остальные параметры ударной волны p_ϕ , ρ_ϕ , \tilde{N}_ϕ вычисляют по зависимостям (3.38)–(3.40), принимая значение A и m , исходя из приближенного значения давления в преломленной ударной волне по формуле

$$p_\phi = p_i \frac{2\rho_n c_n}{\rho_n c_n + \rho_{ВВ} D}$$

Геометрический масштаб моделирования l_c назначают исходя из диаметра зарядов в модели и натуре $(\bar{R}_{оз})_м$ и $(R_{оз})_н$

$$l_c = \frac{(R_{оз})_н}{(R_{оз})_м} = \frac{(R_{оз})_н}{(R_{оз})_м} \left[\frac{(\rho_{ВВ})_н Q_n}{(\rho_{ВВ})_м Q_m} \right]^{1/2}$$

где $(R_{00})_m$ – фактический радиус модельного заряда; $(R_{00}^*)_m$ – эквивалентный радиус модельного заряда, определяемый по формулам (2.28) при $n = 2$ или (2.29) при $n = 3$.

Для волны напряжений в ближней зоне взрыва ($\bar{r} \leq 10$) имеют место упругопластические деформации и большие диссипативные потери, присущие явлениям с большими давлениями и температурой. Для моделирования волны напряжений в этом диапазоне расстояний от заряда, где имеют место упругие и пластические деформации, необходимо иметь подобие элементов вязкости и пластичности моделируемых сред. Так, в случае упруговязкой среды для плоской волны уравнение движения в направлении распространения (оси x) имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\lambda + 2\mu \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad (3.49)$$

где η – коэффициент динамической вязкости среды; u – смещение частиц породы; ρ – плотность породы; λ, μ – постоянные Ламе.

Это уравнение в отличие от уравнения для упругой среды имеет в правой части дополнительный член с вязкостью, который приводит к появлению нового критерия подобия – числа Рейнольдса. Действительно, если провести подобные преобразования уравнения (3.49), то получим тождественные равенства комплексов, составленных из масштабов подобия величин в виде

$$\rho_c l_c / t_c^2 = \lambda_c / l_c = \mu_c / l_c = \eta_c / (l_c t_c). \quad (3.50)$$

Из системы равенств (3.50) можно получить ряд индикаторов подобия. Если поделить второй или третий члены на первый, получим

$$\lambda_c / (\rho_c l_c^2 / t_c^2) = \mu_c / (\rho_c l_c^2 / t_c^2) = \lambda_c / (\rho_c v_c^2) = \mu_c / (\rho_c v_c^2) = 1,$$

что дает критерий Эйлера $\sigma / (\rho v^2) = \text{idem}$, так как постоянные Ламе λ и μ характеризуют упругие свойства породы, выражаются через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν :

$$\lambda = E\nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)], \quad \mu = E\nu / [2(1 + \nu)].$$

Из первого и последнего членов этих равенств получается индикатор подобия вида

$$\frac{\rho_c l_c}{t_c^2} \cdot \frac{\eta_c}{l_c t_c} = \frac{\rho_c l_c^2}{\eta_c t_c} = \frac{v_c l_c}{\eta_c / \rho_c} = \frac{v_c l_c}{\zeta_c} = 1,$$

являющийся индикатором подобия числа Рейнольдса $Re = vl/\zeta$, где ζ – кинематический коэффициент вязкости. Масштаб коэффициента кинематической вязкости определится из зависимости

$$\zeta_c = \nu_c l_c = c_c l_c. \quad (3.51)$$

К такому же результату можно прийти, рассматривая упругопластические среды или упругие среды с остаточными деформациями. Уравнение

движения в этих средах также для плоской волны описывается выражением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{4/3\eta} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad (3.52)$$

из которого аналогичным методом подобных преобразований можно получить индикатор подобия числа Рейнольдса и выражение (3.51) для масштаба коэффициента кинематической вязкости. При этом масштаб динамического коэффициента вязкости будет прямо пропорционален масштабу акустической жесткости сред $\rho_c c_c$ и масштабу геометрического подобия, т. е.

$$\eta_c = \rho_c c_c l_c. \quad (3.53)$$

Критерий Эйлера, как было показано в работах [5, 6], позволяет свести условия моделирования к условиям, вытекающим из расширенного закона геометрического подобия, когда масштаб времени и линейный масштаб одинаковы, т. е. $t_c = l_c$, и в качестве образца модели используется образец исследуемой породы ($\rho_c = 1$). В этом случае масштабы скорости v_c и напряжений σ_c тоже равны единице. Однако необходимость выполнения критерия подобия Рейнольдса требует выполнения условий (3.51) или (3.53). Отсюда следует, что при моделировании вязкоупругого движения следует проводить моделирование в менее вязкой среде, чем среда природы. Моделирование в среде природы в этом случае, строго говоря, сопряжено с большим масштабным эффектом или погрешностью. Такое моделирование возможно лишь для хрупких скальных пород, где вязкость практически отсутствует и последним членом уравнений (3.49) и (3.52) можно пренебречь. Для полускальных пород и пород с существенной вязкостью моделирование следует проводить на образцах из эквивалентных материалов, физико-механические свойства которых выбираются из условий (3.51) или (3.53), которые в развернутом виде запишутся равенствами:

$$\zeta_m = \zeta_n \frac{(c_n)_m}{(c_n)_n l_c}, \quad (3.54)$$

$$\eta_m = \eta_n \frac{(\rho_n)_m (c_n)_m}{(\rho_n)_n (c_n)_n l_c}. \quad (3.55)$$

Таким образом, для моделирования волны напряжений в ближней зоне взрыва ($\bar{r} \leq 10$), т. е. в зоне упругопластических деформаций, для полускальных пород и пород с существенной вязкостью необходимо использовать эквивалентные материалы, выбираемые из условия (3.54) или (3.55), при произвольно заданных масштабах геометрического подобия l_c , плотности ρ_c или скорости c_c . При этом можно использовать как метод преломленной волны, так и индукционный или метод измерения с

помощью акселерометров, а также и другие методы исследования процессов разрушения горных пород в ближней зоне взрыва (рентгенографический или оптико-динамический).

3.4. Моделирование развития котловой полости и зон разрушения при камуфлетном взрыве

Известно, что при образовании и развитии котловой полости основную роль играют газообразные продукты взрыва, а в разрушении горных пород и образовании зон разрушения — как волны сжатия и напряжения, так и квазистатическое давление продуктов взрыва.

Рассмотрим сначала развитие и образование котловой полости. Для этого воспользуемся решением задачи, предложенным акад. Е. И. Шемякиным для взрыва сферического заряда для модели несжимаемой упругопластической среды, где расширение полости происходит за счет сдвиговых деформаций, а объемные деформации отсутствуют. При этом не учитываются дополнительные объемы, связанные с образованием трещин, и влияние теплопередачи, полагая расширение полости процессом адиабатическим, происходящим под действием внутреннего давления продуктов взрыва p_0 , изменяющегося по закону

$$p_0 = p_{00} (R_{03}/R_0)^{3n},$$

где p_{00} — условное начальное усредненное давление в зарядной камере (для эталонного заряда тротила $\rho_{\text{ВВ}} = 1,6 \text{ г/см}^3$, $p_{00} = 8,5 \cdot 10^8 \text{ Па}$); R_{03} — радиус заряда (зарядной камеры); R_0 — текущий радиус полости; n — показатель адиабаты расширения продуктов взрыва ($n = 1,25$ для асимптотической ветви адиабаты, принимаемой в данной задаче).

Область деформации породы вокруг заряда разделена на две зоны (пластическую и упругую), разделенные условной сферой радиуса R^* . Движение породы характеризуется скоростью смещения частиц $v(r, t)$, деформации — сдвиговыми относительными деформациями γ , напряженное состояние — главными напряжениями σ_r и $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, которые в сферических координатах с началом в центре заряда (полости) являются соответственно радиальной и тангенциальной составляющими волны напряжений.

Главные сдвиговые деформации γ связаны с главным касательным напряжением τ законом Гука

$$\tau = \mu\gamma, \quad \mu = \rho c_s^2,$$

где μ — модуль сдвига; c_s — скорость распространения поперечных волн. Отсюда предельное значение главного сдвига

$$\gamma_e = \tau_s/\mu,$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге.

В области упругих деформаций разгрузка подчиняется закону Гука, т. е.

$$\tau = \mu\gamma, \quad \tau \leq \tau_s \text{ и } \gamma \leq \gamma_e.$$

В области пластических деформаций она определяется зависимостью

$$\tau_s - \tau = \mu(\gamma_e - \gamma).$$

Условие пластичности является условием идеальной текучести

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2\tau_s.$$

Для однозначности решения заданы следующие граничные и начальные условия.

На границе расширяющейся полости при $r = R_0(t)$

$$v_p(R_0) = \frac{dR_0}{dt}; \quad -\sigma_r(R_0) = p_0.$$

На сфере, разделяющей пластическую и упругую зоны, при $r = R_*(t)$

$$-p = \sigma_e + \frac{4}{3}\tau_s; \quad v_p(R_*) = v_e(R_*).$$

При $r \rightarrow \infty$ $p \rightarrow p_h$ (где $p_h = \rho g H$ – горное давление).

В начальный момент движения полости предполагается, что стенка полости получает некоторую начальную условную скорость v_0 , т.е. при $t = 0$ и $R_0 = R_{03}$ $dR_0/dt = v_0$. В такой постановке задачи после целого ряда преобразований Е. И. Шемякиным получена окончательная зависимость для закономерности движения радиуса полости во времени $R_0(t)$, которая может быть представлена для удобства определения критериев подобия в виде

$$\begin{aligned} dR_0/dt = & \left\{ \left\{ v_0^2 \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)^3 + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)^3 \left[\frac{p_{00}}{n-1} \times \left[1 - \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)^{3(n-1)} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + p_h \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_{03}} \right)^3 \right] \right] \right\} - \frac{8}{9} \frac{\tau_s}{\rho} \left[1 - \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)^3 \right] \times \left(\ln \frac{1}{\gamma_e} + 1 \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Если воспользоваться методом подобных преобразований и записать выражение (3.56) для модели с учетом масштабов подобия входящих в него величин, то получим

$$\begin{aligned} \frac{l_c}{l_c} \left(\frac{dR_0}{dt} \right)_m = & \left\{ \left\{ v_c^2 v_{0m}^2 \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)_m + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho_c \rho_m} \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)_m^3 \times \right. \right. \\ & \times \left. \left[\frac{(p_{00})_c (p_{00})_m}{n-1} \left[1 - \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)_m^{3(n-1)} \right] + (p_h)_c (p_h)_m \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_{03}} \right)_m^3 \right] - \frac{8}{9} \frac{(\tau_s)_c (\tau_s)_m}{\rho_c \rho_m} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \left[1 - \left(\frac{R_{03}}{R_0} \right)_m^3 \right] \left(\ln \frac{1}{\gamma_e} + 1 \right) \right] \right\} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Отсюда, чтобы выражения (3.56) и (3.57) были идентичны, необходимо приравнять друг к другу масштабные комплексы всех членов (3.57) в правой и левой частях. Имеем

$$l_c^2/t_c^2 = v_c^2 = (p_{00})_c/\rho_c = (\tau_s)_c/\rho_c = (g_n)_c/v_c = g_c h_c. \quad (3.58)$$

Отсюда легко получить индикаторы подобия, относя поочередно первый, третий, четвертый члены равенств (3.58) ко второму, имеем

$$v_c t_c/l_c = 1, (p_{00})_c/(\rho_c v_c^2) = 1, (\tau_s)_c/(\rho_c v_c^2) = 1, g_c h_c/(v_c^2) = g_c l_c/v_c^2 = 1 \quad (3.59)$$

При одинаковости сред в модели и натуре и выполнении геометрического подобия для линейных размеров и времени, т. е. равенства $i_c = t_c$ из (3.59) получаем

$$\rho_c = 1, v_c = 1, (\tau_s)_c = 1, (p_{00})_c = 1, \\ g_c h_c = 1 \text{ или } g_n h_n = g_m h_m. \quad (3.60)$$

Отсюда следует, что при выполнении закона расширенного геометрического подобия, одинаковости сред модели и натуре и соблюдения условия $(p_{00})_c = 1$, необходимого для выбора ВВ, а также условия (3.60), требующего утяжеления модели по зависимости $g_m = g_n l_c$; ($\gamma_m = \gamma_n l_c$) (например, методом центробежного моделирования), движение полости будет пропорционально масштабу линейных размеров ($(R_0)_n = (R_0)_m l_c$), а скорости движения полости будут равны друг другу, т. е. $(dR_0/dt)_n = (dR_0/dt)_m$.

В случае взрыва на небольшой глубине и выполнении при этом условия $\tau_s \gg p_h$ (что обычно выполняется для скальных пород) последним условием ($g_n h_n = g_m h_m$) из (3.60) можно пренебречь, и тогда возможно моделирование развития полости на образцах горных пород с учетом условий расширенного закона геометрического подобия и выбора ВВ из условия $(p_{00})_m = (p_{00})_n$, приводящего к выполнению условия (3.47) и решения уравнения (3.48).

Таким образом, моделирование развития котловой полости целесообразно проводить в образцах горных пород на рентгеноимпульсной установке по методике, изложенной в разд. 3.2.1. В этом случае при моделировании взрыва на большой глубине, где имеет место существенное влияние горного давления (p_h соизмеримо с τ_s), необходимо взрывную камеру нагружать статическим давлением газа $p_{ст} = (p_h)_n$ (взрыв производить в компрессионной камере). В обоих случаях при выборе линейного масштаба i_c и размеров заряда надо исходить из максимально возможной толщины образца породы $(d_{обр})_{max}$, позволяющей просветить его рентгеновскими лучами, а также из условия обеспечения отсутствия влияния отраженной от поверхности образца волны напряжений, т. е. время прихода отраженной волны напряжений к закончившей свое развитие стенки полости $t_{пр}$ должно быть больше времени развития полости $t_{пол}$. Т. е. $t_{пр} > t_{пол}$.

Время прохождения отраженной волны напряжений

$$t_{пр} \approx (d_{обр} - R_{03} - R_{0m})/c_n. \quad (3.61)$$

Время развития полости до максимальной его величины \bar{R}_{0m} равно

$$t_{пол} = (\bar{R}_{0m} - R_{03})/(v_{пол})_{ср} \approx (\bar{R}_{0m} - R_{03})/[(0,1 \div 0,2) c_n], \quad (3.62)$$

где $(v_{\text{пол}})_{\text{ср}}$ – средняя скорость развития полости, равная $0,1 c_n$ для скальных пород и $0,2 c_n$ – для нескальных пород [9].

Из формул (3.61) и (3.62) имеем: для скальных пород ($R_{0_m} \leq 1,5 R_{0_3}$)

$$(d_{\text{обр}})_{\text{max}} \geq 7,5 R_{0_3}, R_{0_3} \leq 0,13 (d_{\text{обр}})_{\text{max}},$$

для нескальных пород ($R_{0_m} \leq 3 R_{0_3}$)

$$(d_{\text{обр}})_{\text{max}} \geq 14 R_{0_3}, R_{0_3} \leq 0,07 (d_{\text{обр}})_{\text{max}}.$$

Рассмотрим моделирование зон разрушения при камуфлетном взрыве, понимая под зонами разрушения зону дробления или переизмельчения породы и зону трещинообразования, характеризующуюся в основном зоной радиальных трещин.

Зона дробления или переизмельчения непосредственно прилегает к зарядной камере, протяженность этой зоны $(5 \div 10) R_{0_3}$. Она вызвана действием, главным образом, ударной волны и сильной упруго-пластической волны сжатия. Поэтому условиями моделирования этой зоны являются условия моделирования ударной волны и волны напряжений, выведенные в разд. 3.3.

Остановимся более подробно на условии моделирования зоны трещинообразования, вызванной действием волны напряжений и квазистатическим давлением продуктов взрыва. Рассмотрим это для случая взрыва сферического (сосредоточенного) заряда.

Зона разрушений массива (зона трещинообразования), вызванная действием волны напряжений, определяется действием фазы разрежения тангенциальной составляющей волны σ_ϕ , раскрывающей и зарождающей вновь радиальные трещины, если выполняется условие

$$\sigma_{\phi \text{ max}} = [1 - 2(c_p/c_s)^2] \sigma_{r \text{ max}} = \frac{v}{1-v} \sigma_{r \text{ max}} \geq [\sigma_{\text{дин.отр}}], \quad (3.63)$$

где c_p и c_s – скорость распространения соответственно продольных и поперечных волн; v – коэффициент Пуассона ($v = \epsilon_x/\epsilon_y$) [$\sigma_{\text{дин.отр}}$ – динамическая прочность породы на отрыв].

Для моделирования волны напряжений при одинаковости сред натуры и модели, как уже показано в разд. 2, достаточно выполнения закона расширенного геометрического подобия (при разных ВВ, используемых в натуре и модели) или просто геометрического подобия (при одинаковых ВВ в натуре и модели). В этом случае $l_c = l_c$ выбирается либо из условия размеров заряда в модели, т.е. $l_c = (R_{0_3})_м / (R_{0_3})_н$, либо из размера, характерного модели, например, размеров блока породы в модели. Тогда интересующий нас масштаб напряжений в силу $v_c = 1$ при $l_c = l_c$ ($v_c = l_c/l_c = 1$), одинаковости сред ($\rho_c = 1$) и критерия Эйлера $\sigma/\rho v^2 = \text{idem}$ будет $\sigma_{\text{дин.отр}}(v_c) = \sigma_{\text{дин.отр}}(v_c)$, отсюда $\sigma_c = \sigma_н/\sigma_м = \rho_н/\rho_м (v_н/v_м)^2 = 1$.

Однако в этом случае для исключения влияния отраженной от граней блоков волны напряжений на зону трещинообразования необходимо, чтобы зона откольных разрушений $b_{\text{отр}}$ от грани блока не доходила до зоны трещинообразования $R_{\text{тр}}$ от центра (оси) заряда, т.е. соблюдалось условие для длины блока L :

$$L/2 \geq R_{\text{тр}} + b_{\text{отр}} \text{ или } b_{\text{отр}} \leq L/2 - R_{\text{тр}}. \quad (3.64)$$

Для сосредоточенных и сферических зарядов [6], учитывая выражение (3.63)

$$\sigma_{\varphi_{\text{max}}} = \frac{v}{1-v} \rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{R_{\text{тр}}^2} \geq \left[\sigma_{\text{дн.отр}} \right],$$

отсюда $\bar{R}_{\text{тр}} \leq \left(\frac{v}{1-v} \rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{[\sigma_{\text{дн.отр}}]} \right)^{0,5}$, $R_{\text{тр}} = R_{\text{тр}} R_{03}^*$.

Зона откольных разрушений определяется из условия превышения отраженной радиальной составляющей волны напряжений динамического предела прочности на отрыв, т.е. из условия

$$\sigma_{r_{\text{max}}} (R_{\text{отк}}) - \sigma_{r_{\text{max}}} \left(\frac{L}{2} + b_{\text{отк}} \right) = \frac{2,25 \cdot 10^3 \rho_n c_n}{\left(\frac{L}{2} + \bar{b}_{\text{отк}} \right)^2} \geq \left[\sigma_{\text{д.п.отр}} \right]. \quad (3.65)$$

Учитывая условие (3.64) и полагая, что для его выполнения достаточно соблюдению равенство

$$L/2 = R_{\text{тр}} + b_{\text{отр}} + 10 R_{03} \text{ или } b_{\text{отр}} = L/2 - 10 R_{03} - \bar{R}_{\text{тр}},$$

формула (3.65) запишется в виде

$$\sigma_{r_{\text{max}}} (\bar{L} - \bar{R}_{\text{тр}} - 10) = \frac{2,25 \cdot 10^3 \rho_n c_n}{(\bar{L} - \bar{R}_{\text{тр}} - 10)^2} = \left[\sigma_{\text{дн.отр}} \right],$$

отсюда $\bar{L} = \left[\left(\rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{[\sigma_{\text{дн.отр}}]} \right)^{0,5} + \bar{R}_{\text{тр}} + 10 \right]$.

Моделирование зоны разрушений, вызванное квазистатическим давлением газообразных продуктов взрыва, проанализируем по упрощенной идеализированной схеме действия взрыва на породу. Согласно этой схеме порода принимается несжимаемой, а деформации в ней как некоторые элементные перемещения.

Пусть в результате взрыва образовалась сферическая камуфлетная полость радиусом R_0 (R_{03} — первоначальный радиус камеры), а отдельные элементы породы сместились в радиальных направлениях на величину S_R на расстоянии R от центра взрыва.

Тогда для несжимаемой породы имеем

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 - \frac{4}{3} \pi R_{03}^3 = \frac{4}{3} \pi (R + S_R)^3 - \frac{4}{3} \pi R^3,$$

отсюда следует $\left(\frac{R_0}{R_{03}} \right)^3 - 1 = \left(\frac{R}{R_{03}} + \frac{S_R}{R_{03}} \right)^3 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^3$. (3.66)

При этом энергия, передаваемая породе при взрыве через радиус камуфлетной полости будет

$$\frac{4}{3}\pi(R_0^3 - R_{03}^3)\left(\sigma_* + \rho gH + p_a\right) = \frac{p_0 V}{\kappa - 1}, \quad (3.67)$$

где σ_* — напряжение, характеризующее прочность пород; H — высота породы над местом взрыва; ρ, g — плотность породы и ускорение свободного падения соответственно; p_a — атмосферное давление; p_0 — квазистатическое давление продуктов взрыва в образовавшейся полости, $p_0 = p_{00}(R_{03}/R_0)^{3\kappa}$; V — объем котловой полости, $V = 4\pi R_0^3/3$; κ — показатель адиабаты расширения продуктов взрыва, равный для конденсированных ВВ 1,25.

Правая часть уравнения (3.67) после подстановки в нее выражений для p_0 и V примет вид

$$\frac{p_0 V}{\kappa - 1} = \frac{4}{3}\pi \frac{p_{00}}{\kappa - 1} \left(\frac{R_{03}}{R_0}\right)^{3\kappa} R_0 = \frac{1\pi p_{00}}{3\kappa - 1} \frac{R_{03}^{3\kappa}}{R_0^{3(\kappa-1)}},$$

или с учетом $\kappa = 1,25$

$$\frac{p_0 V}{\kappa - 1} = \frac{4}{3}\pi \frac{p_{00}}{0,25} \frac{R_{03}^{3,75}}{R_0^{0,75}} = \frac{16}{3}\pi p_{00} \frac{R_{03}^3}{\bar{R}_0^{0,75}}.$$

Подставляя это выражение в (3.67), получим

$$\left(\frac{R_0^3}{R_{03}^3} - 1\right)\left(\sigma_* + \rho gH + p_a\right) = \frac{4p_{00}}{\bar{R}_0^{0,75}}. \quad (3.68)$$

Раскрывая равенство (3.66), имеем

$$\left(\frac{R_0}{R_{03}}\right)^3 - 1 = 3\left(\frac{R}{R_{03}}\right)^2 \frac{S_R}{S_{03}} + 3\left(\frac{R}{R_{03}}\right)\left(\frac{S_R}{R_{03}}\right)^2 + \left(\frac{S_R}{R_{03}}\right)^3.$$

Так как $\frac{S_R}{R_{03}} \ll 1$, то оно запишется в виде

$$\left(\frac{R_0}{R_{03}}\right)^3 - 1 = 3(R/R_{03})^2 (S_R/R_{03}). \quad (3.69)$$

Подставив: (3.69) в (3.68), получим

$$\left(\frac{R}{R_{03}}\right)^2 \frac{S_R}{R_{03}} = \frac{4p_{00} \bar{R}_0^{-0,75}}{3(\sigma_* + \rho gH + p_a)}.$$

Отсюда $S_R = \frac{4p_{00} R_{03}^3 \bar{R}_0^{-0,75}}{3(\sigma_* + \rho gH + p_a) R^2}$.

Полагаем, что разрушение породы наступит при $\delta = S_R/R \geq \delta_{*p}$. Тогда подставив $S_R = \delta_{*p} R$ и поделив обе части на R , получим

$$\delta_{*p} = \frac{4p_{00} \bar{R}_0^{-0,75} R_{03}^3}{3(\sigma_* + \rho gH + p_a) R^3} = \frac{4}{3} \frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0,75}}{(\sigma_* + \rho gH + p_a) R^3}$$

или

$$\bar{R}_p^3 = \frac{4}{3} \frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0.75}}{(\sigma_* + \rho g H + p_a) \delta_{кр}}$$

$$\bar{R}_p = \left[\frac{4}{3} \frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0.75}}{(\sigma_* + \rho g H + p_a) \delta_{кр}} \right]^{1/3}; R_p = \bar{R}_p R_{0з}. \quad (3.70)$$

При одинаковой среде и выполнении геометрического подобия

$$\rho_n = \rho_m; \sigma_{*n} = \sigma_{*m}; p_{an} = p_{am} \text{ и } (\delta_{кр})_n = (\delta_{кр})_m$$

для моделирования необходимы условия

$$(p_{00} \bar{R}_0^{-0.75})_n = (p_{00} \bar{R}_0^{-0.75})_m, \quad (3.71)$$

$$(gH)_n = (gH)_m. \quad (3.72)$$

Условие (3.71) при моделировании в образце из натурной породы с учетом закона расширенного геометрического подобия выполняется при условии $(p_{00})_n = (p_{00})_m$, так как по данным [4] можно представить \bar{R}_0 в виде

$$R_{0з} = \frac{1310}{(\rho c_s^2)^{0.292}}, \quad (3.73)$$

из которого видно, что $(R_0)_n = (R_0)_m$ при равенстве сред модели и природы ($\rho_n = \rho_m; c_{sн} = c_{sм}$).

Условие $(p_{00})_n = (p_{00})_m$ сводится к выбору ВВ по условию (3.47) и решению кубического уравнения (3.48).

Рассмотрим выполнение условия (3.72), имеем:

$$а) g_m = g_n \frac{H_n}{H_m} = g_n i_c,$$

т.е. условие (3.72) свелось к условию центробежного моделирования;

б) если $\sigma_* \gg \rho g H$ (пренебрегаем горным давлением), т.е. условием (3.72) можно пренебречь и тогда второе уравнение (3.70) можно записать в виде

$$\bar{R}_p = \left[\frac{4}{3} \frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0.75}}{(\sigma_* + p_a) \delta_{кр}} \right]^{1/3}$$

В этом случае моделирование возможно при применении закона расширенного геометрического подобия и условия (3.46).

В обоих случаях размеры модели должны быть такими, чтобы зона откольных явлений не касалась зоны разрушения, т.е. соблюдалось условие (3.64), которое в этом случае будет иметь вид

$$L/2 \geq R_p + b_{отк}; b_{отк} \leq L/2 - R_p.$$

Для горных пород обычно $\bar{R}_p \leq 30-40$. Если $\bar{R}_p = 40 \div 50$, учесть условие (3.66) и приравнять $\sigma_{\max}^{\text{отр}}$ пределу прочности породы на отрыв $[\sigma_{\text{дл.отр}}]$

$$\sigma_{r_{\max}}^{\text{отр}} (L/2 + b_{\text{отк}}) = \sigma_{r_{\max}}^{\text{отр}} (L - R_p) = [\sigma_{\text{дн}_{\text{отр}}}],$$

то можно определить длину блока породы L из зависимостей, описывающих $\sigma_{r_{\max}}^{\text{отр}} (L - R_p)$.

Для сферического заряда

$$\sigma_{r_{\max}}^{\text{отр}} = \rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{(\bar{L} - \bar{R}_p)^2} = \rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{(\bar{L} - 40)^2} = [\sigma_{\text{дн}_{\text{отр}}}],$$

$$\text{отсюда } \bar{L} = 40 + \left(\rho_n c_n \frac{2,25 \cdot 10^3}{[\sigma_{\text{дн}_{\text{отр}}}]} \right)^{0,5};$$

Для цилиндрического заряда

$$\sigma_{r_{\max}}^{\text{отр}} = \rho_n c_n \frac{545}{(L - \bar{R}_p)^{1,1}} = \frac{545 \rho_n c_n}{(\bar{L} - 50)^{1,1}} = [\sigma_{\text{дн}_{\text{отр}}}],$$

$$\text{Отсюда } L = 50 + \left(\rho_n c_n \frac{545}{[\sigma_{\text{дн}_{\text{отр}}}]} \right)^{0,91}.$$

Если воспользоваться при моделировании методом эквивалентных материалов в случае $\rho g H \gg \sigma_* + p_*$, то тогда второе уравнение (3.70) запишется приблизительно в виде

$$\bar{R}_p \approx \left[\frac{4 p_{00} \bar{R}_0^{-0,75}}{3 \rho g H \delta_{\text{кр}}} \right]^{1/3}, \quad (3.74)$$

или, полагая справедливым геометрическое подобие и учитывая условие метода эквивалентных материалов, т. е.

$$(\bar{R}_p)_n = (\bar{R}_p)_m; \quad \delta_{\text{кр}_n} = \delta_{\text{кр}_m}; \quad \sigma_m = \sigma_n / \gamma_c l_c,$$

получим из выражения (3.74)

$$\left(\frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0,75}}{\rho g H} \right)_n = \left(\frac{p_{00} \bar{R}_0^{-0,75}}{\rho g H} \right)_m$$

$$\left(\frac{p_{00}}{\gamma H} \right)_n (\bar{R}_0^{-0,75})_n = \left(\frac{p_{00}}{\gamma H} \right)_m (R_0^{-0,75})_m.$$

Из этого выражения с учетом геометрического подобия получим условия подобия

$$(p_{00})_m = (p_{00})_n \frac{(\gamma H)_m}{(\gamma H)_n} = (p_{00})_n \frac{1}{\gamma_c l_c}, \quad (3.75)$$

$$(R_{01})_n / (R_{01})_m = (R_0)_n / (R_0)_m = l_c. \quad (3.76)$$

Полученное условие (3.75) сводится к подбору ВВ с параметрами $(p_{00})_m \ll (p_{00})_n$ в сочетании с геометрическим подобием радиусов заряда и котловой полости (3.76), что весьма трудно и требует специальных

исследований по разработке и созданию таких ВВ. В связи с этим моделирование зон разрушения на эквивалентных материалах в настоящее время не применяется.

3.5. Моделирование закономерностей распространения волны напряжений и сейсмозрывных волн

Рассмотрим моделирование волн напряжений в упругой зоне взрыва, которая для горных пород практически начинается с расстояний 12–15 радиусов заряда от центра (оси) заряда и простирается до бесконечности, что характерно для волны напряжений в средней зоне взрыва и сейсмозрывных волн в дальней зоне взрыва. Массив горной породы и ее модель будем считать как две геометрически подобные кусочно-неоднородные упругие среды, каждая из которых состоит из n однородных изотропных кусков, имеющих в общем случае произвольные формы. Параметры волны напряжения (напряжение σ и смещение u) будем считать подобными, если для любой пары сходственных точек в сходственные моменты времени имеет место постоянство отношений

$$u_n/u_m = u_c, \quad \sigma_n/\sigma_m = \sigma_c.$$

Для отыскания критериев подобия и соответствующих масштабов моделирования воспользуемся уравнениями движения неоднородной упругой среды в форме Ламе, условиями однозначности (граничными и начальными условиями) и уравнениями связи между напряжениями и деформациями (обобщенным законом Гука).

Для простоты рассмотрим распространение одномерной волны напряжения. В этом случае уравнение Ламе в векторной форме для каждого куска (слоя) будет иметь вид

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda_i + \mu_i) \text{grad div } \vec{u}_i + \mu_i \Delta \vec{u}_i, \quad (3.77)$$

где i – индекс куска; \vec{u} – вектор смещения; λ_i, μ_i – постоянные Ламе,

$$\lambda_i = \rho_i (c_{p_i}^2 - c_{s_i}^2), \quad \mu_i = \rho_i c_{s_i}^2, \quad (3.78)$$

где c_{p_i}, c_{s_i} – скорости распространения продольных и поперечных волн.

Граничные условия запишутся в виде равенства векторов смещений и условий преломления напряжений на всех возможных границах рассматриваемой неоднородной среды

$$u_q = u_j, \quad \sigma_q = \sigma_j k_{qj}, \quad (q \neq j), \quad (3.79)$$

где q, j – промежуточные индексы кусков.

Начальные условия задаются в виде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } t < 0 \quad \vec{u}_i = 0 \quad \sigma_i = \sigma_{ст}, \\ \text{при } t = 0 \quad \vec{u}_p(r = R_*, t = 0) = \vec{u}(t). \end{array} \right\} \quad (3.80)$$

Здесь индекс r указывает на направление к источнику (взрыва) в p -ом куске рассматриваемой неоднородной среды.

Связь между напряжениями и смещениями в i -ом слое в векторной форме будет

$$\sigma_{ri} = (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_i}{\partial r}, \quad (3.81)$$

$$\sigma_{\theta i} = \left[1 - 2 \left(\frac{c_{s1}}{c_{p1}} \right)^2 \right] \sigma_{ri}. \quad (3.82)$$

Из уравнений (3.77), (3.78), (3.81), (3.82) легко найти отмеченные в разд. 2 критерии подобия, например, методом подобных преобразований. Действительно, если ввести для величин, входящих в эти уравнения и условия, соответствующие масштабы подобия ($l_c, u_c, \lambda_c, \mu_c, E_c$) и произвести подобные преобразования, то получим систему равенств комплексов и симплексов, составленных из этих масштабов, а именно из (3.77) $\rho_c u_c / l_c^2 = \lambda_c u_c / l_c^2 = \mu_c u_c / l_c^2$,

из (3.81) $\lambda_c = \mu_c = E_c, \quad \nu_c = 1,$

из (3.78) $\lambda_c = \mu_c = \rho_c \nu_c^2,$

из (3.82) $\sigma_c = \lambda_c u_c / l_c^2 = \mu_c u_c / l_c^2.$

Граничные условия (3.72) указывают на то, что коэффициенты преломления k_{rj} и масштабы смещения и напряжения должны быть одинаковы для всех кусков (слоев) рассматриваемой среды.

Из начальных условий (3.80) до взрыва, т. е. при $t < 0$ вытекает, что для подобия необходимо соблюдение идентичности напряженного состояния сред до взрыва, т. е. равенства условий

$$\begin{aligned} |\sigma_{i_n} = \sigma_{i_m}|_{t < 0} &= \sigma_{ст}, \\ |u_{i_n} = u_{i_m}|_{t < 0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Первое условие из (3.83) важно, когда моделируется взрыв на большой глубине, т. е. когда под действием большого горного давления имеет место предварительное напряженное состояние среды $\sigma_{ст}$. Для моделирования горного давления прибегают либо к центробежному моделированию, либо производят соответствующую пригрузку модели под прессом или в специальной компрессионной камере всесторонним давлением. В этом случае следует обратить внимание на выполнение соответствующих пространственных и граничных условий, лимитирующих размеры модели, так как эти условия часто противоречат размерам и возможностям упомянутых пригрузочных устройств: размеры каретки центрифуги, прессового устройства, герметичных камер для создания больших статических давлений и т. п.

Начальное условие (3.80) при $t = 0$ указывает на необходимость соблюдения идентичности вызванных взрывом смещений на некотором характерном расстоянии $\bar{R}_* > 5 \div 10 R_{0j}$, т. е. выполнения условий

$$\vec{u}_{p_n}(R_{*n}, t_n) = \vec{u}_0(t_n), \quad \vec{u}_{p_m}(R_{*m}, t_m) = \vec{u}_0(t_m),$$

$$R_{*n}/R_{*m} = \vec{u}_0(t_n)/\vec{u}_0(t_m) = l_c, \quad t_n/t_m = t_c.$$

При взрывной отбойке полезного ископаемого это условие должно выполняться на стенке зарядной камеры или скважины, размеры которой (радиус камеры R_n или скважины $R_{скв}$) должны удовлетворять условию геометрического подобия, т.е. условиям

$$(R_n)_n = l_c (R_n)_m, \quad (R_{скв})_n = l_c (R_{скв})_m.$$

Таким образом, для моделирования волны напряжений в упругой зоне, а также и моделирования сейсмозрывных волн, вызванных взрывом зарядов ВВ в кусочно-неоднородной идеально упругой среде, достаточно соблюдение равенства коэффициентов преломления $k_{гн}$. критериев подобия Эйлера, Коши, числа гомохронности и наличия геометрического подобия. При этом из совокупности масштабов подобия для величин, определяющих закономерности распространения рассматриваемых волн, можно выбрать три масштаба подобия произвольно. В качестве произвольных масштабов обычно берут: l_c – масштаб геометрического подобия, ρ_c – масштаб плотности сред и c_c – масштаб скоростей распространения волн. Остальные определяющие масштабы: времени t_c и напряжения σ_c получают из индикаторов подобия числа гомохронности и критерия Эйлера, а именно

$$t_c = l_c / c_c, \quad \sigma_c = \rho_c v_c c_c = \rho_c c_c,$$

так как известно из многочисленных экспериментов, что $\sigma = \rho v c_p$ и $v_c = 1$ в упругой зоне для горных пород в силу одинаковости закономерности затухания скорости смещения с относительным расстоянием в упругой зоне взрыва для пород и грунтов.

Масштаб геометрического подобия выбирают либо исходя из характерных линейных размеров модели и природы (например, длины скважин, ЛНС, высоты уступа и т.п.), либо исходя из характерных размеров заряда ВВ в модели и натуре (например, радиусов зарядов, эквивалентных по энергии взрыва). Масштаб плотности среды определяется плотностями среды природы и выбранной модели. Масштаб скорости обычно определяется по отношению скоростей распространения продольных волн c_p в средах природы и модели, т.е. $c_c = c_{p_n} / c_{p_m}$.

Из изложенных выше соображений и выведенных условий моделирования следует, что наиболее просто можно выполнить моделирование рассматриваемых волн, если при моделировании использовать среду природы и производить взрыв заряда такого же ВВ, что и в натуре. В этом случае имеет место простое геометрическое подобие. При использовании иного вида ВВ или иного источника взрыва расчет массы (радиуса) моделируемого заряда ВВ производят исходя из понятия эквивалентной по энергии взрыва массы (радиуса) заряда. При этом, как уже отмечалось в работах [5, 6], наибольшие трудности возникают при выборе

среды, имеющей геометрически подобную натуре неоднородность и трещиноватость.

Помимо этих трудностей имеют место (даже в упругой зоне взрыва) нелинейные эффекты при распространении волн напряжений в среде, связанные, главным образом, с нелинейной зависимостью напряжения от деформации (отклонением от закона Гука) и с явлениями поглощения и дисперсии волн, особенно четко проявляющимися при мелкомасштабных взрывах. В работе [5] впервые рассмотрено влияние этих факторов на моделирование упругих волн, на примере среды с упругим последствием (модель Больцмана), для которой зависимость напряжений от смещений выражается в виде

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \omega \int_0^t h(t - \zeta) \frac{\partial u}{\partial r} d\zeta \right], \quad (3.84)$$

где ω – некоторая постоянная, характеризующая затухание амплитуды напряжения с расстоянием и дисперсию распространения волн, c^{-1} ; $h(t)$ – функция наследственности данной среды, которая задается в виде $h(t) = e^{-\alpha t}$; α – некоторая постоянная, характеризующая наследственность среды, она также характеризует степень затухания амплитуды и продолжительность фазы сжатия волны напряжений, c^{-1} .

Из (3.84) нетрудно видеть, что для моделирования необходимо выполнение следующих соотношений

$$(R_{03} \omega)_n = (R_{03} \omega)_m, \quad (R_{03} \alpha)_n = (R_{03} \alpha)_m,$$

или $(\omega/\alpha)_n = (\omega/\alpha)_m$,

т. е. равенство отношений коэффициентов ω и α в натуре и модели. Это будет иметь место в том случае, если затухание волн, отнесенное к длине этих волн, в натуре и модели одинаково, а функции дисперсии скоростей от частоты волн, представленные в безразмерном виде, будут тождественно равны для модели и природы. Следовательно, при неизменной геологической структуре сред модели и природы, при выборе масштаба геометрического подобия надо руководствоваться тем верхним пределом частот волн, при которых начинают существенно сказываться структурные неоднородности и различные дефекты в материалах сред на процессы поглощения и дисперсии волн.

Для монолитных горных пород (гранит, мрамор) и материалов (бетон, цемент, парафин, воск и т. п.) по данным дефектоскопии верхний предел моделируемых частот соответственно равен примерно 1 и 0,5 МГц.

Если принять в качестве самой высокой моделируемой частоты $f_m = 0,5$ МГц, при которой монолитные горные породы проявляют себя с достаточной степенью точности однородной средой, то, как показано в работе [5], максимальный масштаб геометрического подобия i_{\sim} обратно пропорциональный масштабу частот f_{\sim} при взрыве заряда массой $G_{\sim} = 10^6$ кг и зарегистрированных в скальных породах колебаниях с периодом 0,03–0,05 с или частотой $f_n = 35 \div 20$ Гц будет равен

$G_m = \bar{G}_m / i_c^2 = 10^6 / 25^3 \cdot 10^9 \cdot 0,064 \cdot 10^{-6}$ кг = 0,064 мг. Отсюда минимальная масса модельного заряда одного и того же ВВ будет равна $G_m = 0,064$ мг.

Эта оценка массы модельного заряда справедлива лишь для волн малых амплитуд (звуковых и сейсмических волн в дальней зоне взрыва в монолитных материалах). Для волны напряжений в средней зоне взрыва и тех же породах на расстояниях $10 < \bar{r} < 100$ приведенная оценка будет не точной, так как в этом случае следует учесть также и эффекты, связанные с диссипативными процессами, процессами дробления и разрушения пород. Поэтому верхний предел моделируемых частот следует уменьшить примерно на порядок, т.е. $f_m = 5 \cdot 10^4$ Гц. Тогда минимальная масса моделируемого заряда будет еще достаточно мала и равна $l_c = 2,5 \cdot 10^3$; $\bar{G}_m = 0,064$ г.

При такой достаточно малой массе заряда возникают определенные трудности с измерениями параметров воли напряжений и условиями возбуждения взрыва (инициирования заряда). Поэтому обычно для моделирования используют заряды большей массы, начиная с 0,2–0,6 г и выше. При этом ошибка измерения массы заряда, а также разброс эффекта взрыва по ударной волне не превышает 10–15%.

Заметим, что наличие трещин в массиве пород может резко снизить верхний предел моделируемых частот и тем самым увеличить массу модельного заряда. Так, при $f_m = 5 \cdot 10^3$ Гц, масса заряда равна 64 г. Таким образом, уменьшение моделируемой частоты на порядок приводит к увеличению массы заряда в модели на три порядка.

Суммируя все вышеизложенное отметим, что моделирование волны напряжений в упругой зоне взрыва и сейсмозрывных волн проще и удобнее производить в среде природы. В этом случае становится справедливым так называемый закон геометрического подобия, при котором масштаб подобия i_c является единственным. Масштабы всех остальных величин выразятся через него, а именно: масштаб времени $t_c = l_c$, масштаб напряжений и скоростей смещений $\sigma_c = v_c = 1$ масштаб сил, мощности $\bar{F}_c = \dot{N}_c = l_c^2$; масштаб работы, энергии $A_c = \bar{E}_c = l_c^3$.

Для моделирования могут использоваться весьма малые заряды, до долей граммов, размеры которых будут лимитироваться условиями надежной и полной детонации их. Моделирование можно проводить как в лабораторных условиях, так и полигонных. Последнее используется обычно для исследования сейсмозрывных волн в дальней зоне взрыва, лабораторные – для исследования параметров волн напряжений в средней зоне взрыва $10 < \bar{r} < 100$.

При моделировании волны напряжений в средней зоне взрыва в лабораторных условиях целесообразно использовать метод преломленной в воду волны для исследования положительной фазы, нормальной к плоскости измерения составляющей волны напряжений, при взрыве удлиненных зарядов и той же фазы радиальной составляющей при взрыве сосредоточенных зарядов. Расчет нормальной составляющей волны напряжений по измеренному давлению в преломленной волне проводится по формулам (3.33) и (3.32).

Таким образом, методом преломленной волны при взрыве удлиненных зарядов можно измерить только нормальную к плоскости измерения составляющую волны напряжения. Причем, ее значение в общем случае переменное и только в районе выхода на плоскость, параллельную оси заряда, конической части фронта волны ($D > c_p$) на расстояниях, соизмеримых с длиной заряда, будет одинаково и определяться зависимостью

$$\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \alpha \sigma_\varphi \sin^2 \alpha,$$

где σ_r – составляющая напряжения, направленная по нормали к коническому фронту волны; α – угол, составленный нормалью к коническому фронту волны с нормалью к плоскости измерения, параллельной оси заряда и определяемый зависимостью $\sin \alpha = c_p/D$; σ_φ – составляющая напряжения, направленная вдоль образующей конического фронта волны.

Отмеченная переменность напряжения вдоль ее фронта ведет в процессе распространения волны к нелинейному перераспределению энергии волны вдоль ее фронта. В результате напряжение вдоль фронта постепенно уравнивается, а грушевидный фронт волны в случае $D > c_p$ трансформируется в сферический. В диапазоне относительных расстояний $\bar{r} = 20 \div 100$ отмечаемое перераспределение энергии волны и трансформация ее фронта еще не заканчивается. Поэтому при определении поля напряжений по всему фронту волны напряжений необходимо проводить измерения в нескольких точках по высоте боковых граней блока для уточнения закономерностей затухания волны с расстоянием и закономерностей распределения напряжений вокруг заряда. При этом, при наличии конического фронта волны для оценки поля напряжений, вызванного взрывом удлиненного заряда, следует провести измерение преломленной волны минимум в шести–семи точках по высоте блока: три – четыре точки в районе выхода конического фронта волны (причем, две точки должны совпадать с точками выхода сопряжений конического фронта со сферическим), остальные точки – в районе выхода сферических (нижнего и верхнего полусфер) фронтов волн.

Для получения полной эпюры волны (фазы сжатия и растяжения), а также соответствующих эпюр составляющих волн (радиальной σ_r , тангенциальной σ_φ и вертикальной σ_z) целесообразно провести измерения с помощью пьезодатчиков давления согласно методике, изложенной в разд. 3.2.2., на эквивалентных материалах типа оргстекло, песчано-цементная смесь, сульфат натрия и др. При этом для уточнения количественных данных по амплитуде и длительности волны необходимо проведение измерений нормальной и радиальной составляющей волны методом преломленной волны в блоках исследуемых горных пород на тех же относительных расстояниях от центра (оси) заряда, на которых были установлены пьезодатчики в блоках из эквивалентных материалов. По данным этих измерений в целях экстраполяции результатов эксперимента на натуру определяются коэффициенты пересчета по амплитуде k_1 и по длительности k_2 волны напряжений, равные соответственно

$$k_1 = \frac{\sigma_{r,n}^{r,n}}{\sigma_{r,n}^{z,m}}; \quad k_2 = \frac{\tau_+^{r,n}}{\tau_+^{z,m}}$$

где $\sigma_{r,n}^{r,n}$, $\tau_+^{r,n}$ — соответственно максимальная амплитуда и длительность положительной фазы r и n составляющих волны напряжений, определенные методом преломленной волны в блоке из горной породы; $\sigma_{r,n}^{z,m}$, $\tau_+^{z,m}$ — соответствующие величины, определенные для r и n составляющих волны напряжений в блоке из эквивалентных материалов.

Эти коэффициенты в силу отличия физико-механических свойств эквивалентных материалов от горных пород будут зависеть от расстояния от центра (оси) взрыва. Поэтому необходимо построить по данным измерений экспериментальную зависимость k_1 и k_2 от \bar{r} и в дальнейшем использовать ее при экстраполяции данных, полученных в блоках из эквивалентных материалов, на блоки из горных пород. Эта экстраполяция производится по зависимостям:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n}^{r,n}(\bar{t}, \bar{r}) &= k_1(\bar{r}) \sigma_{r,n}^{z,m}(\bar{t}, \bar{r}), \\ \tau_+^{r,n}(\bar{r}) &= k_2(\bar{r}) \tau_+^{z,m}(\bar{r}), \\ \sigma_{\varphi}^{r,n}(\bar{r}, \bar{t}) &= k_1(\bar{r}) \sigma_{\varphi}^{z,m}(\bar{r}, \bar{t}), \\ \sigma_z^{r,n}(\bar{r}, \bar{t}) &= k_1(\bar{r}) \sigma_z^{z,m}(\bar{r}, \bar{t}), \end{aligned}$$

где \bar{t} и \bar{r} — соответственно время и расстояние, отнесенные к эквивалентному радиусу заряда $\bar{R}_{0z} = (R_{0z})_m \left[\frac{(\gamma Q)_m}{(\gamma Q)_n} \right]^\alpha$ ($\alpha = 1/3$ и $\alpha = 1/2$ соответственно при взрыве сферического и цилиндрического зарядов).

Экстраполяция модельных экспериментов на натуру проводится по закону расширенного геометрического подобия с масштабом

$$l_z = \frac{(R_{0z})_n}{(R_{0z}^*)_m} = \frac{(R_{0z})_n}{(R_{0z})_m} \left[\frac{(\gamma Q)_n}{(\gamma Q)_m} \right]^\alpha.$$

3.6. Моделирование воздействия сейсмозрывных волн и волн напряжений на здания и сооружения

Колебания, которые воздействуют на различные элементы сооружений можно разделить на две группы: 1) природные динамические воздействия, возникающие при землетрясениях, горных обвалах, падении лавин и т. п. Эти колебания обычно называют сейсмическими; 2) колебания, создаваемые взрывами различного характера, в том числе и взрывными работами. Их, в отличие от первых, называют сейсмозрывными.

При этом воздействие таких колебаний классифицируют еще и так: 1) общее сейсмическое воздействие, когда источники колебаний (землетрясение, мощный взрыв) находятся далеко от изучаемого объекта; 2) местное сейсмозрывное воздействие, когда источник возмущения

(местное действие одиночных или групповых небольших взрывов) находится в непосредственной близости от изучаемого объекта.

Для моделирования поведения и разрушения этих объектов необходимо знать параметры и характер воздействия как волн напряжений, так и сейсмозрывных волн (колебаний).

Для расчета интенсивности сейсмического действия взрыва и соответствующих безопасных расстояний существует определенная методика, основанная на исследованиях М. А. Садовского. В частности, она приведена в Единых правилах безопасности при взрывных работах. Местное сейсмозрывное воздействие – более сложное явление, так как связано с взаимодействием волн напряжений, генерируемых взрывами отдельных зарядов или групп мгновенно взрывааемых зарядов, расположенных в различных точках окружающего охраняемый объект пространства на примерно одинаковых (соизмеримых) расстояниях от него.

3.6.1. Моделирование воздействия волн напряжений

Рассмотрим моделирование воздействия волн напряжений, называемого еще и местным сейсмозрывным воздействием. Это явление связано с интерференцией волн напряжений от взрыва ряда сравнительно небольших зарядов, расположенных в непосредственной близости от изучаемого объекта (подземные выработки, целики, шахты, штольни и т. д.). При местном воздействии взрывных волн, в отличие от общего, сейсмического, возможно нарушение массива, по которому распространяются волны напряжений.

При моделировании местного воздействия волн напряжений надо решить проблемы моделирования волн напряжений и поведения исследуемых объектов. Эти проблемы взаимосвязаны, так как расположенные в массиве объекты сами влияют на падающие на них или обтекающие их волны напряжений, являясь источниками возникновения отраженных, дифракционных, изгибных, преломленных волн. Эти дополнительные волны взаимодействуют с падающими волнами, усложняя общую волновую картину, ослабляют или усиливают общее волновое воздействие. Аналитическое решение данного взаимодействия весьма сложно. Поэтому прибегают к моделированию.

Определение условий моделирования рассмотрим на примере оценки прочности простой конструкции типа пластины при воздействии на нее волны напряжений, генерируемой взрывом. В этом случае прочность ее определяется, в конечном счете, распространением упругопластических волн, возникающих в этой пластине в результате преломления и отражения падающих на нее волн напряжений и возникновения вокруг нее дифракционного поля напряжений.

Процессы дифракции, отражения и преломления волны напряжений, а также процессы возникновения и распространения упругопластических волн в конструкции во многом зависят от самой конструкции, ее конфигурации и материалов, узлов крепления и других факторов. При этом, благодаря податливости некоторых элементов конструкции, воз-

никают дополнительные волновые явления в породе, существенно усложняющие волновую картину вокруг конструкции. В элементах самой конструкции упругопластические волны образуются трех типов: продольные, поперечные и поверхностные. Более того, имеют место многократные отражения и преломления, еще более усложняющие общую волновую картину.

Все эти многообразные и сложные явления, сопровождающие воздействие неконтактного взрыва на конструкции, можно охарактеризовать следующими основными определяющими параметрами, например, для воздействия подземного взрыва на пластину обделки выработки конечных размеров (см. разд. 2.3):

$$P, \bar{R}_{03}, \rho_n, c_n, \sigma_k, \rho_k, c_k, \delta_x, E_n, E_k, \nu, z, z', z'', r, t.$$

Здесь дополнительно приведены следующие величины: ρ_k, c_k – плотность и скорость звука в материале обделки; δ_x – толщина пластины обделки; z, z', z'' – линейная деформация пластины и ее производные, характеризующие соответственно угол поворота и кривизну пластины; σ_k – действующее на пластину напряжение; P – некоторая результирующая нагрузка на пластину, пропорциональная квадрату модуля геометрического подобия (линейного масштаба).

Используя π -теорему, можно, например, для прогиба пластины получить следующую функциональную зависимость в критериальной форме, взяв за основные величины R_{03}, ρ_n, c_n

$$\frac{z}{R_{03}} = f\left(\frac{r}{R_{03}}, \frac{\delta_x}{R_{03}}, \frac{c_n t}{R_{03}}, \frac{\rho_n c_n}{\rho_k c_k}, \frac{\sigma_k}{\rho_n c_n^2}, \nu, z', z'', R_{03}, \frac{P}{E_k \delta_x^2}, \frac{E_k}{E_n}\right).$$

Критерии подобия $r/R_{03}, z/R_{03}, \delta_x/\bar{R}_{03}$, обеспечиваются при соблюдении геометрического подобия.

Критерий $\sigma_k/(\rho_n c_n^2)$ характеризует свойства пластины и окружающей ее среды; он автоматически обеспечивается, если взрыв происходит в одной и той же среде.

Критерий $\rho_n c_n/(\rho_k c_k)$ обуславливает подобие преломления и отражения волны напряжений на границе среда-пластина в сходственных точках и выполняется автоматически, если среда и материал конструкций в модели и натуре одни и те же.

Критерий $\nu = \text{const}$ характеризует упругие свойства материала конструкции и, очевидно, тоже автоматически обеспечивается при одинаковости материалов обеих конструкций.

Критерий $R/(E \delta_x^2)$ обуславливает характер результирующей нагрузки, который обычно тоже автоматически выполняется, если имеет место идентичность внешней нагрузки, геометрическое подобие и одинаковость окружающих сред и материалов конструкций.

Критерий $c_n t/R_{03}$ обуславливает подобие временных характеристик и требует пропорциональности радиусу заряда всех временных параметров: периодов собственных колебаний элементов конструкций, времена действия усилий, временный характер воздействия (эпюры напряжение-время и т. п.).

Эти критерии подобия при соблюдении геометрического подобия автоматически выполняются, если использовать в модели ВВ, материал конструкции и среду натуры, т. е. если модель пластины изготавливается из материала исследуемой обделки в натуре, и она расположена в образце из естественной горной породы, уменьшенные в соответствии с масштабом геометрического подобия в i_c раз, а в качестве зарядов берутся уменьшенные заряды из взрывчатых веществ, применяемых в натуре. При использовании других ВВ необходимо предварительно исследовать как изменяются параметры, характеризующие форму волны (длительность, время нарастания амплитуды волны до максимума), так как они могут существенно меняться для различных ВВ. Кроме того, в этом случае надо вводить эквивалентный радиус и массу заряда по энергии взрыва в соответствии с формулами, приведенными в разд. 2.

Масштаб геометрического подобия выбирают исходя из технических возможностей, условия отсутствия влияния граничных поверхностей блоков породы на волновую картину взаимодействия волн с исследуемым объектом, а также из минимально возможных массы и размеров заряда, при котором будет стабильная и полная его детонация. Заметим, что размеры блоков при этом будут большими, чем при моделировании параметров волны напряжений, так как в этом случае исследуется более детальный процесс взаимодействия волн с объектом. Причем форма блоков должна быть выбрана таким образом, чтобы по возможности отраженные от его граней волны либо совсем не попадали на исследуемый объект, либо приходили туда после многократных отражений существенно ослабленными.

Этого можно достигнуть либо с помощью различных диффузоров у граней блока, либо путем наклеивания приставок (пластин) к граням блока. Диффузоры и приставки изготавливаются из того же материала, что и блок. Диффузор изготавливается в виде раструбов различной формы, уменьшающих амплитуду отраженной волны за счет геометрического расхождения, или за счет геометрического расхождения многократного отражения. При использовании приставок ее толщину δ выбирают такой, чтобы интенсивность суммарной амплитуды напряжения на границе блока с приставкой в результате наложения отраженной и падающих волн превосходила прочность клея на отрыв $\sigma_{отр}^{кл}$, т. е. из условия

$$\sigma_{r_m}(W + 2\delta) - \sigma_r[(W + 2\delta), (\tau_n + 2\delta/c_p)] \geq \sigma_{кл_{отр}}.$$

Это выражение с учетом зависимостей для σ_r , приведенных в разд. 2, запишется в виде

$$1 - e^{-\alpha \frac{\delta}{c_p}} \frac{\sin[\beta(\tau_n + \delta/c_p)]}{\sin(\beta\tau_n)} \geq \frac{\sigma_{кл_{отр}}(\bar{r} + 2\delta)^{1.1}}{545 \rho_n c_p}. \quad (3.85)$$

Из выражения (3.85), задавшись значением $\sigma_{кл_{отр}}$, методом последовательных приближений можно определить толщину δ приставки, или наоборот, задавшись значением δ , таким же путем получить необходимую прочность клея $\sigma_{отр}^{кл}$.

3.6.2. Моделирование сейсмического воздействия

Рассмотрим общее сейсмическое воздействие взрыва и его моделирование с помощью центрифугирования. Очевидно, чтобы смоделировать какие-то колебания, надо модель подвергнуть дополнительному динамическому воздействию, которое воспроизводило бы сейсмическое воздействие взрыва или землетрясения.

Если взять за основной критерий сейсмического воздействия максимальное ускорение a колебания грунта, являющееся некоторой векторной величиной, то следовательно, надо воспроизвести не только величину ускорения, но и ее направление.

Обычно ускорение колебания характеризуют по отношению к ускорению свободного падения. Согласно закону геометрического подобия ускорения колебаний в натуре и в модели должны относиться пропорционально $1/l_c$, т.е.

$$T_m = \sqrt{\frac{g_n}{a_n}} \quad \text{так как } v_c = 1.$$

$$= v_n t_m / (v_m t_n) = \dots = v_c / l_c = 1/l_c,$$

В натуральных условиях значения a_n меняются в довольно широком диапазоне: от тысячных до десятых долей g_n при землетрясениях, а для сейсмозрывных волн — до десятков и сотен g_n .

Кроме ускорений сейсмические колебания характеризуются периодом T , тоже изменяющимся в широких пределах от нескольких сотых долей секунды до нескольких секунд. Наконец, важными параметрами сейсмических колебаний являются смещение грунта u и скорость смещения v .

Сейсмические колебания в исследуемой области взрыва представляют собой квазигармонические колебания. Поэтому можно связать амплитуды всех интересующих параметров соотношениями

$$v = 2\pi u/T, \quad a = 4\pi^2 u/T^2.$$

Причем, исходя из геометрического подобия, имеем для этих параметров следующие масштабы моделирования:

$$u_m = u_n / l_c,$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a_n}{l_c^2}} = 2\pi \sqrt{u_n / (a_n l_c^2)} = T_n / l_c.$$

Если среда в модели и натуре одинакова, то скорость c_p распространения в них одна и та же, и длины волн $\lambda = c_p T$ будут находиться в таком же отношении, что и смещения, т.е. $\lambda_m = \lambda_n / l_c$.

Из полученных соотношений следует, что для моделирования воздействия сейсмических колебаний необходимо, чтобы смещения, периоды и длины волн в модели были бы меньше, чем в натуре на модуль геометрического подобия l_c , а ускорение больше, чем в натуре на тот же модуль.

Рассмотрим моделирование воздействия сейсмозрывных волн на центрифуге, т.е. с помощью центробежного моделирования.

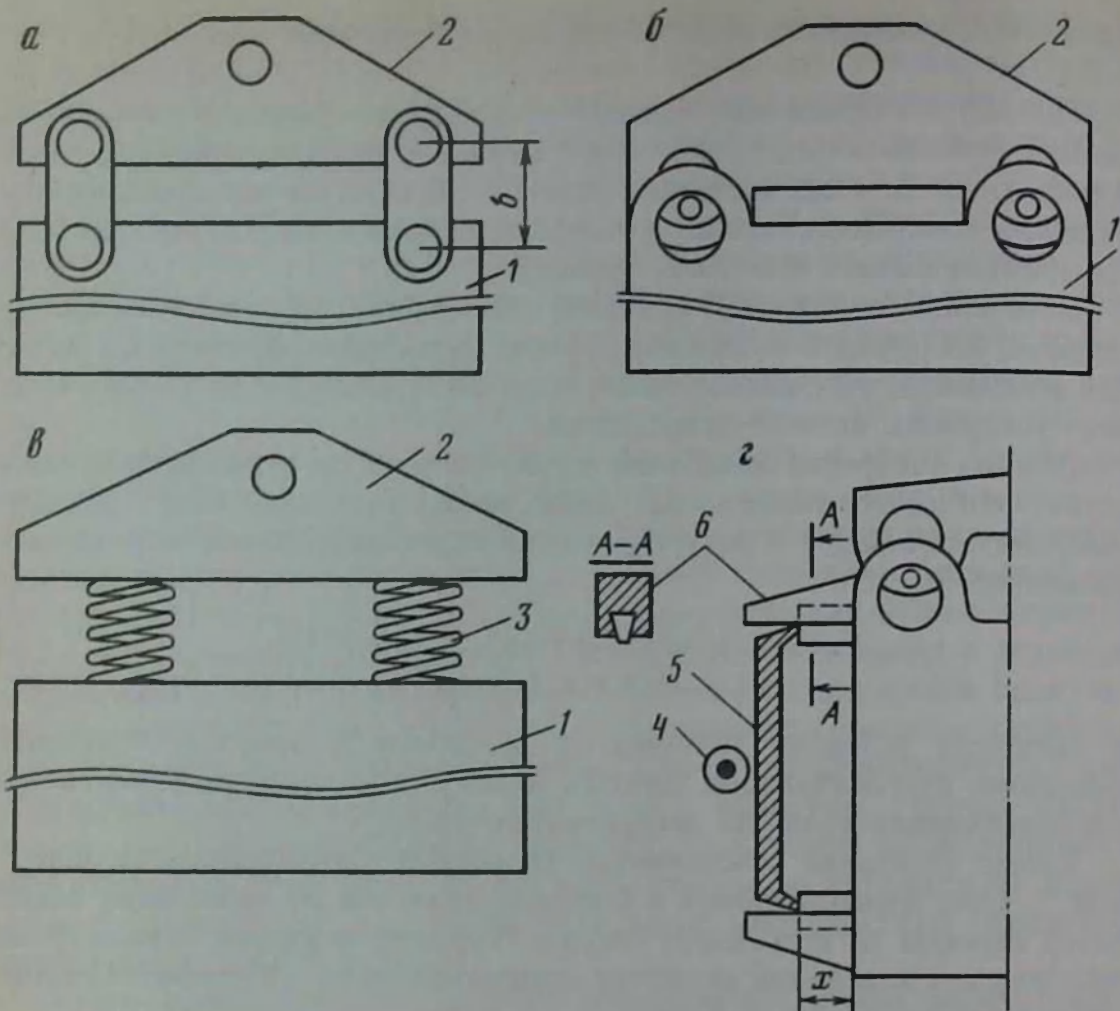


Рис. 29. Способы подвески каретки центрифуги (*а, б, в*) и метод раскачки каретки взрывом (*г*):

1 – каретка; 2 – подвеска; 3 – пружина; 4 – заряд; 5 – металлическая пластина; 6 – кронштейны с пазом для размещения лап пластины в виде «ласточкиного хвоста»

Основным исходным условием будет считать направление действия ускорения. В натуре опасным направлением действия ускорения от сейсмических колебаний является в большинстве случаев горизонтальное. Обычно при центробежном моделировании горизонтальное направление (по отношению к $a_{\text{н}} = g_{\text{н}}$) тоже в большинстве случаев является наиболее опасным. Поэтому рассмотрим моделирование горизонтальных сейсмических колебаний.

Для их воспроизведения можно применять так называемую маятниковую подвеску ракетки с моделью при помощи параллелограммного устройства (рис. 29, *а*). Период колебаний

$$T_{\text{м}} = 2\pi \sqrt{b/g_{\text{н}}}$$

где b – плечо параллелограмма.

Заменяя $T_{\text{м}}$ на $T_{\text{н}}$ и $g_{\text{н}}$ на $g_{\text{н}}$ по зависимости $g_{\text{н}} = g_{\text{н}} i_c$ получим

$$T_{\text{м}} = T_{\text{н}}/i_c = 2\pi \sqrt{b/(a_{\text{н}} i_c)}; \quad b = \bar{T}_{\text{н}}^2 g_{\text{н}} / (4\pi^2 i_c). \quad (3.86)$$

Из условия (3.86) и выбирается плечо параллелограмма. Однако, если в результате расчетов b будет меньше 2–3 мм, то в этом случае лучше применить подвесное роликовое устройство, обеспечивающее полный период колебаний каретки (рис. 29, \bar{o}), тогда плечо будет определяться выражением $b = 2(R - r)$, где R – радиус отверстия; r – радиус валика, вложенного в это отверстие.

В обоих случаях при этом возникает еще и вертикальное ускорение a_y . Расчет показывает, что отношение его к горизонтальному ускорению a_x будет близко к отношению $(a_y)_{\text{м}} / (a_x)_{\text{м}} = u_{\text{м}} / b$, но так как $u_{\text{м}} \ll b$, то $(a_y)_{\text{м}}$ пренебрежимо мало по сравнению с $(a_x)_{\text{м}}$, т.е. имеем $(a_y)_{\text{м}} \ll (a_x)_{\text{м}}$.

При необходимости создать только вертикальную составляющую ускорения применяют пружинную подвеску каретки (рис. 29, \bar{e}), жесткость пружины которой характеризуется коэффициентом жесткости K . Период колебаний массы M в этом случае выразится так

$$T = 2\pi \sqrt{M/K}. \quad (3.87)$$

В нашем случае масса M равна $G_{\text{м}}/g_{\text{н}}$, тогда

$$T_{\text{м}} = \frac{T_{\text{м}}}{i_{\text{с}}} = 2\pi \sqrt{G_{\text{м}} / (g_{\text{н}} K)}, \quad (3.88)$$

где $G_{\text{м}}$ – вес модели с кареткой.

Из уравнения (3.88) вытекает требование к жесткости пружины K в виде

$$K = 4\pi^2 G_{\text{м}} i_{\text{с}}^2 / (g_{\text{н}} T_{\text{н}}^2).$$

При такой подвеске пружины, на которой подвешена каретка с моделью, растянутся на величину $u_{\text{пр}}$, определяемой формулой

$$u_{\text{пр}} = \frac{G_{\text{м}}(i_{\text{с}} - 1)}{K} = \frac{G_{\text{м}} i_{\text{с}}}{K} = \frac{g_{\text{н}} T_{\text{н}}^2}{4\pi^2 i_{\text{с}}}. \quad (3.89)$$

Сравнивая (3.89) с (3.86), видим, что их выражения совпадают, т.е. $b = u_{\text{пр}}$.

Для достижения такого колебательного движения каретки обычно заранее отклоняют ее от состояния равновесия, а затем застопоривают. После приведения центрифуги во вращение стопора снимают, и каретка начинает колебаться. В случае с пружиной стопорное устройство изготавливают так, чтобы при разгоне центрифуги пружина растягивалась не на величину $u_{\text{пр}}$, а только на величину $u_{\text{пр}} - u_{\text{м}}$. Тогда при снятии стопора пружины она будет колебаться с амплитудой $u_{\text{м}}$.

В некоторых случаях стопорные механизмы заменяются устройствами для активной раскачки каретки при ее вращении. С этой целью на боковой стенке каретки (при горизонтальных колебаниях) или на днище (при вертикальных колебаниях) укрепляют стальную пластинку толщиной 10 мм, на которой помещают заряд ВВ массой q (рис. 29, \bar{z}). При взрыве плита с кареткой получает импульс ($H \cdot c$), равный для взрыва заряда тротила величине

$$J \approx 1000 q, \quad (3.90)$$

который сообщает каретке с моделью энергию движения

$$E = J^2 g_n (2 G_m). \quad (3.91)$$

Для получения колебаний с заданной амплитудой необходимо, чтобы ей была сообщена энергия

$$E = \frac{M v_m^2}{2} = 2\pi^2 \frac{u_m G_m}{T_m^2 g_m}. \quad (3.92)$$

Приравняв (3.91) и (3.92) и учтя (3.90), получим выражение для необходимой массы заряда

$$g = 2\pi u_m G_m / (T_m g_n 10^3) = \pi u_m G_m l_c / 500 T_m g_n.$$

При таком способе следует смягчать первоначальный импульс, который может сопровождаться непредвиденными чрезмерными нагрузками модели. Для этого между плитой и кареткой вводят амортизирующее устройство. Оно может быть выполнено в виде механизма, смещающего плиту при действии некоторой силы трения F на величину x с соблюдением следующих условий

$$F \gg G_m a_m / g_n, \quad x \gg 2u_m.$$

При воспроизведении в модели описанными способами тех или иных колебаний имеет место затухание колебаний, которое обычно регистрируют сейсмографами как изменение амплитуды колебаний во времени. Предварительный оценочный расчет затухания может быть произведен исходя из учета трения в механизме маятниковой подвески каретки.

Приближенные расчеты, сделанные Г.И. Покровским, позволили получить следующее выражение для затухания амплитуд колебаний во времени

$$u_m / (u_m)_{\max} = 1 - \frac{g_n f \frac{r}{b} l_c T_m}{\pi^2 (u_m)_{\max}} t, \quad (3.93)$$

где f — коэффициент трения в механизме маятниковой подвески; r — радиус валика подвески.

При этом время полного затухания t_0 определяется из выражения (3.93), приравнявая его нулю, т.е.

$$t_0 = \frac{\pi^2 (u_m)_{\max}}{g_n l_c f T_m r / b}.$$

Отсюда за это время число колебаний

$$n_0 = t_0 / T_m = \pi^2 (u_m)_{\max} / (g_n l_c f T_m^2 r / b).$$

Таким образом, методом центробежного моделирования возможно моделирование общего сейсмического воздействия при условии соблюдения закона расширенного геометрического подобия и известных параметрах сейсмических колебаний ($a_n, u_n, u_n, T_n, \lambda_n$). В этом случае модель

исследуемого объекта помещают в каретку центрифуги и подвергают ее воздействию колебаний указанными выше способами с параметрами ($a_m, v_m, u_m, T_m, \lambda_m$), рассчитанными по формулам квазигармонических колебаний, приведенных в начале разд. 3.6.2.

3.7. Моделирование различных явлений, связанных с поршневым действием газообразных продуктов взрыва

Под явлениями, связанными с поршневым действием продуктов взрыва понимают следующие процессы: образование котловой полости, зон сжатия, дробления и трещинообразования, а также сдвиг и выброс разрушенной породы, разрушение породы при выбросе, дробление ее в процессе выброса, навал и уплотнение выброшенной породы. Процесс развития взрыва может быть расчленен на ряд стадий. На первой стадии образуется, как и при камуфлетном взрыве, котловая полость с радиусом R_0 . В этом случае перемещение свободной поверхности в целом незначительное, могут наблюдаться лишь небольшие отслоения отдельных кусков. На второй стадии разрушения горная порода давлением газов в полости сдвигается в направлении ЛНС, приобретая некоторый запас кинетической энергии, который на третьей стадии обеспечивает инерционное движение горной массы и явление навала ее на четвертой стадии.

Последние две стадии происходят под действием инерционных сил за счет запаса кинетической энергии, полученной горной массой на второй стадии. Эти стадии, в основном, и определяют развал породы и окончательное состояние раздробленной горной массы. В данном разделе будут рассмотрены последние три стадии действия взрыва по разрушению горной породы, а именно: начальное движение разрушенной горной породы, инерционное движение горной массы, образование развала породы (воронки выброса) и уплотнения горной массы.

3.7.1. Моделирование начального движения разрушенной горной породы

Явление начального движения разрушенной горной породы под действием давления продуктов взрыва рассмотрим на примере уступной отбойки горных пород взрывом. Для простоты примем вертикальный уступ, что характерно для крепких горных пород ($\alpha = 80 \div 90^\circ$).

Предположим, что сдвигение разрушенной горной породы под действием газообразных продуктов взрыва начинается после завершения развития полости, образования щели между смежными зарядами и некоторого незначительного перемещения отбиваемой горной массы по линии скважин под действием отраженной волны напряжений (см. рис. 30, б). При этом давление газообразных продуктов взрыва определяется из зависимости

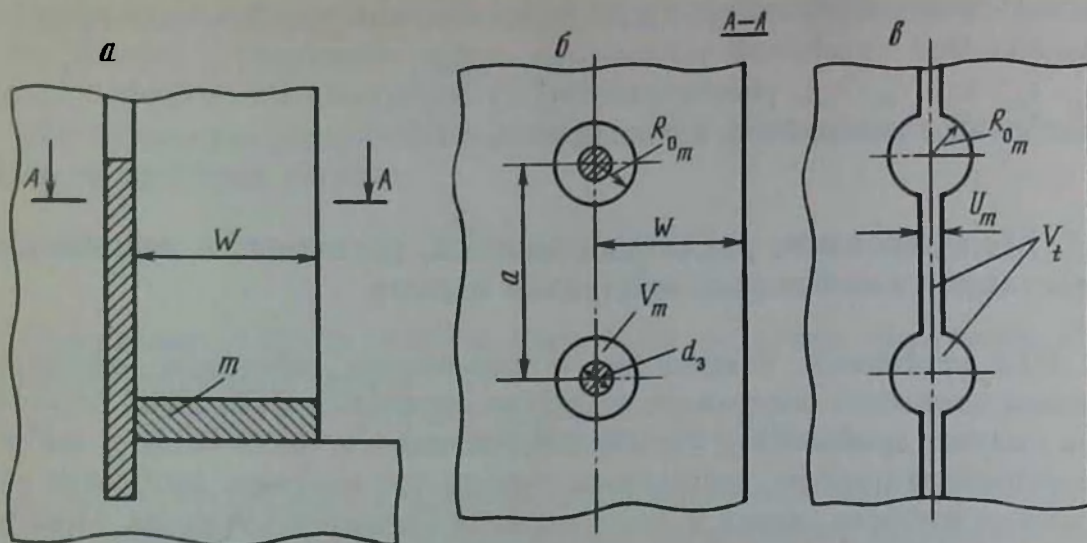


Рис. 30. Схематическое изображение начального сдвижения горной массы: *a* – продольный разрез в плоскости, перпендикулярной стенке уступа; *б* – до начала сдвижения; *в* – в начальный момент отрыва горной породы массы от массива; V_t – объем полости и щели в момент времени t

$$p_t/p_0 = V_m^k / (V_m + l_{\text{свб}} u_m a)^k, \quad (3.94)$$

где p_0 – квазистатическое давление продуктов взрыва по достижении максимальных размеров полости \bar{R}_0 ; V_m – объем полости после завершения ее развития, $V_m = \pi R_{0m}^2 l_{\text{свб}}$; u_m – максимальное смещение горной массы по линии скважин под действием отраженной волны напряжений; a – расстояние между скважинами; $l_{\text{свб}}$ – длина скважины; p_t – квазистатическое давление продуктов взрыва в момент t начала сдвижения горной массы, равное согласно (3.94) значению

$$p_t = p_0 V_m^k / (V_m + u_m l_{\text{свб}} a)^k.$$

Рассмотрим движение элементарного объема горной массы m сечением $S = 1 \text{ м}^2$ и длиной, равной ЛНС – W (см. рис. 30, *a*).

$$m = \rho_n WS = \rho_n W,$$

которая получает начальную кинетическую энергию движения E_0 , равную $E_0 = mv_0^2/2$, где v_0 – начальная скорость движения горной массы.

Для определения начальной скорости движения горной массы запишем динамическое уравнение равновесия элементарной массы m в виде

$$F_1 + F_2 + F_3 + m \frac{d^2 u}{dt^2} + \varphi \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = p_t S = p_t, \quad (3.95)$$

где F_1 – сила, вызванная атмосферным давлением, $F_1 = p_a S = p_a$ = 10^5 Н ; F_2 – составляющая гравитационной силы, действующей в направлении ЛНС, $F_2 = mg \sin \alpha$ (α – угол, составленный нормалью к ЛНС и горизонтальной плоскостью), равный в рассматриваемом случае нулю, т. е. $F_2 = 0$, так как $\alpha = 0$ и $\sin \alpha = 0$; u – текущее значение смещения

элементарной массы m ; t – текущее время с момента взрыва; F_3 – сила трения (сцепления), равная $\bar{F}_3 = \sigma_{\text{сц}} S = \sigma_{\text{сц}} S$; φ – постоянная сопротивлени воздуха, равная $\varphi = \frac{1}{2} C_x \rho_a S$ (где C_x – коэффициент лобового сопротивления, ρ_a – плотность воздуха, S – поперечное сечение элементарной массы, $S = 1 \text{ м}^2$); $p_t S$ – текущая сила, вызванная давлением продуктов взрыва в котловой полости и щели между зарядами, действующее на поперечное сечение $S = 1 \text{ м}^2$ элементарной массы m .

Теоретико-экспериментальные оценки, изложенные в работе [14], показывают, что сопротивление воздуха в начальный момент движения весьма мало, поэтому членам уравнения (3.95) с φ можно пренебречь. В этом случае уравнение (3.95) с учетом $F_2 = 0$ существенно упростится

$$p_a + \sigma_{\text{сц}} + \rho_{\text{п}} W \frac{d^2 u}{dt^2} - p_t = 0. \quad (3.96)$$

Давление продуктов взрыва, действующее на элементарную горную массу, в соответствии с зависимостью (3.94) и значением коэффициента $\kappa = 1,25$,

$$p_t = p_0 (V_{m_0} / (V_{m_0} + u_a))^{1,25}, \quad (3.97)$$

где $\bar{V}_{m_0} = \pi R_{0m}^2$; $i_{\text{сxn}} = 1 \text{ м}$; p_0 – максимальное давление в полости при V_{m_0}

$$p_0 = p_{00} \left(\frac{R_{03}}{R_{0m}} \right)^{2\kappa} = 8,5 \cdot 10^8 \left(\frac{R_{03}^*}{R_{0m}} \right)^{2,5}, \quad (3.98)$$

здесь R_{03}^* – эквивалентный тротилу радиус заряда применяемого ВВ

$$R_{03}^* = R_{03} (\rho_{\text{ВВ}} Q_{\text{ВВ}} / (\rho_{\text{ТР}} Q_{\text{ТР}}))^{0,5}.$$

Выразив ускорение $d^2 u / dt^2$ через скорость v и ее производную dv/du , т.е. $d^2 u / dt^2 = v dv / du$ и подставив его в уравнение (3.96) с учетом выражения для p_t (3.97), получим

$$\rho_{\text{п}} W v dv = \frac{p_0 (V_{m_0})^{1,25} du}{(V_{m_0} + au)^{1,25}} - (p_a + \sigma_{\text{сц}}) du.$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от v_1 (скорость смещения, вызванная волной напряжений) до v_0 (начальная скорость движения, вызванная действием продуктов взрыва) в левой части от u_1 до u_m (смещения горной массы, вызванные соответственно волной напряжения и квазистатическим давлением продуктов взрыва) в правой части и учтя, что u_1 весьма мало ($u_1 = 0$), получим уравнение для определения v_0 в виде

$$\frac{\rho W}{2} (v_1^2 - v_0^2) = -\frac{p_0}{0,25 a} \left[V_{m_0} - \frac{V_{m_0}^{1,25}}{(V_{m_0} + au_m)^{0,25}} \right] + (p_a + \sigma_{\text{сц}}) u_m.$$

Отсюда выражение для v_0 будет

$$v_0 = \left\{ \frac{8 p_0}{\rho W a} \left[V_{m_0} - \frac{V_{m_0}^{1,25}}{(V_{m_0} + au_m)^{0,25}} \right] - 2(p_a + \sigma_{\text{сц}}) \frac{u_m}{8 W} + v_1^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.99)$$

Скорость движения v_1 , обусловленную действием волны напряжений, можно оценить приближенно по зависимости, предложенной Д. М. Бронниковым, введя в нее величину динамической прочности на отрыв $[\sigma_{\text{дн.отр}}]$ вместо статической, т. е. по формуле

$$v_1 \approx c_n [\sigma_{\text{дн.отр}}] / E. \quad (3.100)$$

Максимальное смещение горной породы u_m можно определить из уравнения (3.96), положив в нем ускорение равным нулю, т. е. $d^2 u / dt^2 = 0$, и введя в него значение p_1 по выражению (3.97).

После преобразований получим

$$u_m = \frac{V_{m0}}{a} \left[\left(\frac{p_0}{p_a + \sigma_{\text{сц}}} \right)^{1,25} - 1 \right]. \quad (3.101)$$

Подставив значение u_m по (3.101) и v_1 по (3.100) в (3.99) и учтя значение $m = \rho_n \bar{W}$, получим выражение для v_0 в виде

$$v_0 = \left\{ \frac{8 p_0 V_{m0}}{\rho_n W_a} \left[1 - 1,25 \left(\frac{p_a + \sigma_{\text{сц}}}{p_0} \right)^{0,2} + 0,25 \frac{p_a + \sigma_{\text{сц}}}{p_0} \right] + c_n^2 \left(\frac{\sigma_{\text{дн.отр}}}{E} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Выражая p_0 через p_{00} , \bar{R}_m и R_0^* по формуле (3.98) и \bar{V}_m через R_{c_m} получим окончательную зависимость для определения v_0 в виде

$$v_0 = \left\{ \frac{25,13 p_{00} (R_{03}^*)^2}{\rho_n W_a (\bar{R}_m)^{0,5}} \left[1 - 1,25 \left(\frac{p_a + \sigma_{\text{сц}}}{p_{00}} \right)^{0,2} (\bar{R}_m)^{0,5} + 0,25 \frac{p_a + \sigma_{\text{сц}}}{p_{00}} (\bar{R}_m)^{2,5} \right] + c_n^2 \left(\frac{[\sigma_{\text{дн.отр}}]}{E} \right)^2 \right\}^{0,5}. \quad (3.102)$$

Третий член в квадратной скобке уравнения (3.102) весьма мал по сравнению с остальными, поэтому его можно опустить и записать формулу для v_0 проще, а именно

$$v_0 = \left\{ \frac{25,13 p_{00} (R_{03}^*)^2}{\rho_n W_a (\bar{R}_m)^{0,5}} \left[1 - 1,25 \left(\frac{p_a + \sigma_{\text{сц}}}{p_{00}} \right)^{0,2} (\bar{R}_m)^{0,5} \right] + c_n^2 \frac{[\sigma_{\text{дн.отр}}]^2}{E^2} \right\}^{0,5}. \quad (3.103)$$

Из зависимости (3.103) следует, что при наличии геометрического подобия с масштабом линейных размеров l_c и масштабом времени $t_c = l_c$ масштаб скорости смещения $v_c = 1$ при условии равенства следующих комплексов величин в натуре и модели:

$$\frac{(p_{00})_н}{(\rho_n)_н (\bar{R}_m)_н^{0,5}} = \frac{(p_{00})_м}{(\rho_n)_м (\bar{R}_m)_м^{0,5}}, \quad (3.104)$$

$$\frac{(p_a + \sigma_{\text{сц}})_н^{0,2}}{(\rho_n)_н} (p_{00})_н^{0,8} = \frac{(p_a + \sigma_{\text{сц}})_м^{0,2}}{(\rho_n)_м} (p_{00})_м^{0,8}, \quad (3.105)$$

$$\left(c_n \frac{[\sigma_{\text{дн.отр}}]}{E} \right)_н = \left(c_n \frac{[\sigma_{\text{дн.отр}}]}{E} \right)_м. \quad (3.106)$$

С учетом зависимости (3.73) условие (3.104) запишется в виде

$$\frac{(p_{00})_n}{(\rho_n)_n (\rho_n c_s^2)_n^{-0,141}} = \frac{(p_{00})_m}{(\rho_n)_m (\rho_n c_s^2)_m^{-0,141}} \quad (3.107)$$

Из условий (3.104)–(3.106) следует, что при использовании в модели образцов, изготовленных из породы природы, т.е. при $(\rho_n)_n = (\rho_n)_m$; $(c_s)_n = (c_s)_m$; $(\sigma_{сш})_n = (\sigma_{сш})_m$; $(c_n)_n = (c_n)_m$; $[\sigma_{дв,отр}]_n = [\sigma_{дв,отр}]_m$; $E_n = E_m$ для моделирования необходимо удовлетворить условие

$$(p_{00})_n = (p_{00})_m,$$

которое приводит к необходимости выбора ВВ по условию (3.46) или (3.47) и решению кубического уравнения (3.48) для $p_{ВВ}$.

Таким образом, при моделировании начального сдвижения горной массы можно использовать условия расширенного геометрического подобия, проводя эксперименты на образцах горных пород и выбрав ВВ в модели в соответствии с формулами (3.47) и (3.48). Однако, при этом надо учесть, что взрыв выбранного из указанных условий заряда ВВ должен раздробить образец породы на куски геометрически подобные натурному взрыву. Последнее условие может быть выполнено, если образец будет иметь геометрически подобную структуру по трещиноватости и неоднородности, что и взрываеый блок натурального массива. Подобрать такой образец породы практически невозможно. Как правило образец будет более монолитным куском с естественной микротрещиноватостью, не подобной по направлению и размерам макротрещиноватости массива. Поэтому для его дробления на более мелкие куски, приближенно подобные кускам натурального взрыва, требуется повысить уровень напряжений, отсюда возникает дополнительное условие к модельному заряду ВВ – высокая бризантность. Все вышесказанное свидетельствует о сложности моделирования начального движения горной породы, сводящегося к выбору образца породы и модельного заряда ВВ, обладающего с одной стороны высокой бризантностью, а с другой, имеющего начальное давление продуктов взрыва, удовлетворяющее условиям (3.46) и (3.48), приводящим как показывают расчеты к уменьшению плотности модельного заряда. Все это требует специальных исследований.

При использовании метода эквивалентных материалов моделирование существенно усложняется, так как наряду с трудоемким процессом подбора эквивалентного материала необходим подбор соответствующего ВВ по условиям (3.104) и (3.105), что требует специальных исследований.

При моделировании начального движения при взрывах на выброс необходимо учитывать в уравнениях (3.102) и (3.103) гравитационную составляющую $F = mg \sin \alpha$. В этом случае условие моделирования (3.105) запишется в виде

$$\frac{(p_a + \sigma_{сш} + \rho Wg)_n^{0,2}}{(\rho_n)_n} (p_{00})_n^{0,8} = \frac{(p_a + \sigma_{сш} + \rho g W)_m^{0,2}}{(\rho_n)_m} (p_{00})_n^{0,8}.$$

При проведении моделирования на образцах горных пород имеем:

$$(p_a)_н = (p_a)_м, \quad (\sigma_{сш})_н = (\sigma_{сш})_м, \quad (\rho_n)_н = (\rho_n)_м, \\ (Wg)_н = (Wg)_м \quad \text{или} \quad \underline{a}_{..} = \underline{a}_н \frac{\overline{W}_н}{\overline{W}_м} \frac{\overline{V}_н}{\overline{V}_м} = l_c g_n.$$

Отсюда следует, что дополнительно необходимо выполнить условие центробежного моделирования $g_m = l_c g_n$, т.е. создать искусственное утяжеление материала модели, помещая ее на центрифугу или создавая пригрузку другими способами (например, резко затормаживать модель, падающую с некоторой высоты). В том случае, когда силы $F_1 + F_3 > F_2$, то при моделировании последней (силой F_2) можно пренебречь. В противном случае имеет место масштабный эффект

$$l_m \approx \left\{ \frac{(p_{00})_н^{0.8} [1 - 1,25(\sigma_{сш} + p_a + \rho Wg)_н^{0.2}]}{(p_{00})_м^{0.8} [1 - 1,25(\sigma_{сш} + p_a + \rho Wg)_м^{0.2}]} \right\}^{0.5}, \quad (3.108)$$

а скорость начального смещения определяется по формуле $(v_0)_{..} = l_m (v_0)_м$ с учетом l_m по формуле (3.108).

Таким образом, задача моделирования начального движения при выбросе породы еще больше усложняется необходимостью учета подобия массы выбрасываемой породы.

Для моделирования начальной скорости движения горной массы v_0 предложен комбинированный метод моделирования [7], сущность которого состоит в следующем. Модель массива состоит из образцов горной породы в виде ядра (шара) с расположенными по их оси (центру) заряда ВВ, выбранного из условия равенства начального давления p_{00} в модели и натуре, т.е. в соответствии с формулами (3.104)–(3.106), и эквивалентного материала в виде дискретной среды (например, крупнозернистого песка) с размером зерна среды, равным с учетом геометрического подобия среднему куску горной массы при натурной отбойке породы. Размеры ядра (шара) горных пород принимаются из условия геометрического подобия зоны дробления, а именно относительные радиусы ядра (шара) должны быть равны радиусу зоны дробления при натурном взрыве, длина ядра равна длине модельного заряда плюс диаметр ядра.

Относительные значения радиусов зоны дробления для сосредоточенных (сферических) $\bar{R}_{др}^{сф}$ и удлиненных (цилиндрических) $\bar{R}_{др}^{ул}$ зарядов определяются [4] соответственно зависимостями

$$R_{др}^{сф} = \left[\frac{3,54 \rho_n c_n}{2(1-\nu) [\sigma_{сдв}^{дн}]} \right]^{0,455}; \quad R_{др}^{ул} = \left[\frac{1,1 \rho_n c_n}{2 [\sigma_{сдв}^{дн}]} (1 + c_1 + c_2 \bar{R}_{др}^{ул}) \right]^{0,714}, \quad (3.109)$$

а их абсолютные значения по формулам

$$(R_{др}^{сф})_м = \bar{R}_{др}^{сф} (R_{01}^{сф})_м^*, \quad (R_{др}^{ул})_м = \bar{R}_{др}^{ул} (R_{01}^{ул})_м^*, \quad (3.110)$$

где $\rho_n c_n$ – акустическая жесткость породы; $[\sigma_{сдв}^{дн}]$ – динамическая прочность породы на сдвиг; ν – коэффициент Пуассона; $(R_{01}^{сф})_м^*$, $(R_{01}^{ул})_м^*$ – эквивалентные по энергии взрыва тэну ($\rho_r = 15000 \text{ кг/м}^3$, $\bar{Q}_r = 5860 \text{ кДж/кг}$)

радиусы модельных зарядов, определяемые соответственно по формулам (2.23) и (2.24); c_1 и c_2 – безразмерные постоянные, зависящие от акустической жесткости пород и определяемые соответственно по формулам (2.82).

Дискретная среда (крупнозернистый песок), окружающая керн (шар) с зарядом и замещающая разрушенную горную породу в начальный момент ее движения, для придания устойчивости формы уступа и сближения коэффициента сцепления этой среды с соответствующим коэффициентом разрушенной породы в натуре смачивается водой, слабым раствором глины или глицерином. Для соблюдения подобия массы выталкиваемой разрушенной породы в модели и натуре должно быть удовлетворено условие подобия в предложении использования в модели образца горной породы, т.е. из условия $m_c = l_c^3$. Это условие при моделировании предлагаемым комбинированным построением модели запишется в виде зависимости

$$\rho_n V_n / l_c^3 = \rho_n V_{об} / 2 + \rho_{дс} (V_m - V_{об} / 2) = \rho_{дс} V_m + V_{об} (\rho_n - \rho_{дс}) / 2, \quad (3.111)$$

где \bar{V}_n и \bar{V}_m – объем выталкиваемой горной массы в натуре и в модели; $V_{об}$ – объем образца (керн, шара) горной породы; ρ_n и $\rho_{дс}$ – соответственно плотность породы и дискретной среды (обычно $\rho_n > \rho_{дс}$).

При моделировании отбойки группой (рядом) скважинных n зарядов зависимость (3.111) после несложных преобразований запишется в виде

$$W_m = \frac{\rho_n}{\rho_{дс}} \frac{W_n}{l_c} - \left(\frac{\rho_n}{\rho_{дс}} - 1 \right) \frac{\pi (R_{др})_m^2}{2 \bar{H}_m a_m} [(l_z)_m + 2 (R_{др})_m], \quad (3.112)$$

где \bar{W}_n и \bar{W}_m – линия наименьшего сопротивления соответственно в модели и натуре; \bar{H}_m , a_m – высота уступа, расстояние между зарядами, $(R_{др})_m$, $(l_z)_m$ – соответственно радиус зоны дробления и длина заряда в модели, подчиняющиеся геометрическому подобию, т.е. $\bar{H}_m = H_n / l_c$, $a_m = a_n / l_c$, $(R_{др})_m / l_c = (R_{др})_n$, $(l_z)_m / l_c = (l_z)_n$.

Для случая одиночного скважинного заряда формула (3.111) запишется в виде

$$W_m = \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_{дс}} \frac{W_n^2}{l_c^2} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho_n}{\rho_{дс}} - 1 \right) \frac{(R_{др})_m^2}{H_m} [(l_z)_m - 2 (R_{др})_m] \right\}^{0.5}. \quad (3.113)$$

При взрыве группы котловых зарядов и одиночного сосредоточенного (сферического) заряда формула (3.111) соответственно представится зависимостями:

$$W_m = \frac{\rho_n W_n}{\rho_{дс} l_c} - \frac{2}{3} \pi \left(\frac{\rho_n}{\rho_{дс}} - 1 \right) \frac{(R_{др})_m^3}{H_m a_m}, \quad (3.114)$$

$$W_m = \left\{ \frac{\rho_n W_n^3}{\rho_{дс} l_c^3} - 0,586 \left(\frac{\rho_n}{\rho_{дс}} - 1 \right) (R_{др})_m^3 \right\}^{1/3}. \quad (3.115)$$

Заметим, что значение \bar{W}_m , определенное по формулам (3.112)–(3.115), не подчиняется закону геометрического подобия; ее величина будет больше величины, определенной по условию геометрического подобия.

Предлагаемый метод моделирования с комбинированной моделью позволяет:

более надежно обеспечить динамическое подобие ближней зоны взрыва;

существенно ослабить действие волны напряжений на дискретную среду, замещающую уже разрушенную горную породу, за счет частичного отражения волны на границе образец породы – дискретная среда;

значительно упростить подготовку и проведение модельного эксперимента по сравнению с другими методами, например, методом, где используется вакуумная камера и заменен взрыв специальным источником давления, создаваемым в результате электросжигания шарообразной или цилиндрической оболочки со сжатым воздухом [1], или методом, где проводятся весьма сложные предварительные исследования по созданию эквивалентного материала модели и нового ВВ, взрыв которого должен обеспечить дробление модели геометрически подобное гран-составу при натурном взрыве [14].

Подготовка модельного эксперимента предлагаемым методом комбинированной модели заключается в следующих последовательных операциях.

Задается масштаб геометрического подобия i_c по характерному размеру уступа (например, по высоте уступа H) с учетом удобства и возможностей проведения эксперимента в лабораторных условиях (обычно $i_c = 60 \div 100$).

Зная радиус заряда натурального взрыва и масштаб i_c , определяется эквивалентный по энергии взрыва радиус заряда в модели

$$(R_{03})_м = (R_{03})_н / i_c.$$

По кубическому уравнению (3.48) для выбранного ВВ (обычно тэн, гексоген и т. п.) определяется плотность заряда, а по формуле Кука (3.47) значение скорости детонации $D_м$ и соответствующее им значение теплоты взрывчатого превращения $Q_{..}$. По этим данным, используя зависимость для эквивалентного радиуса заряда (3.24), определяется истинный радиус заряда модельного ВВ

$$(R_{03})_м = \frac{(R_{03})_н}{i_c} \sqrt{\frac{(\rho_{ВВ})_н Q_{..}}{(\rho_{ВВ})_м Q_{..}}}$$

Вычисляются размеры образца горной породы (длина и радиус керна или радиус шара) по зависимостям (3.109) и (3.110), подставляя в них данные натурной горной породы $\rho_n = \rho_n$, $c_n = c_n$, $[\sigma_{дн_{отр}}]$ из [4] и значения эквивалентных по тэну радиусов заряда в модели, определяя их по формулам (2.23) и (2.24). При этом длина керна $(\bar{l}_{..})_м = (l_н)_м + 2(R_{др})_м$.

В изготовленных по вычисленным размерам образцах (керн $-(l_н)_м$ и $(R_{др}^{пл})_м$; шара $-(R_{др}^{сф})_м$ просверливаются отверстия радиусом $(\bar{R}_{от}^{пл})_м$ и $(R_{от}^{сф})_м$ на длину $l_{от}^{пл} = (l_н)_м + (R_{др}^{пл})_м$ и $l_{от}^{сф} = (R_{др}^{сф})_м + (R_{от}^{сф})_м$ соответственно для керна и шара, в которые впоследствии устанавливаются соответствующие заряды с рассчитанной ранее плотностью $(\rho_{ВВ})_м$. Оставшаяся незаряженной часть отверстий $l_{от}^{пл} = (R_{др}^{пл})_м$ – для керна и $l_{от}^{сф} = (R_{др}^{сф})_м$ –

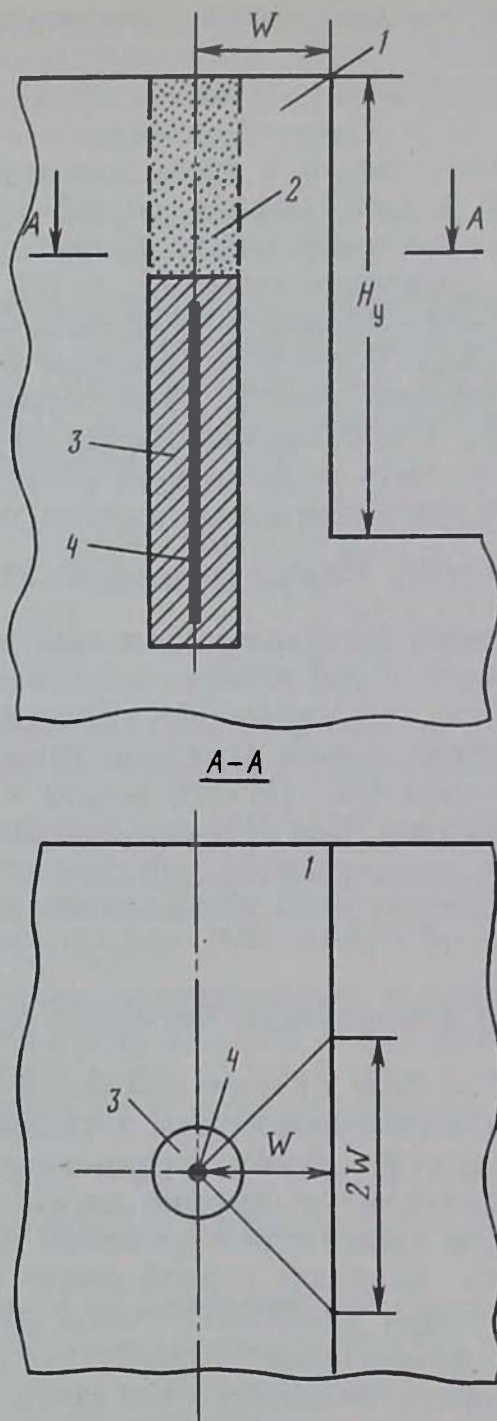


Рис. 31. Схема моделирования скорости v_0 начального движения горной массы методом комбинированной модели:

1 – дисперсная среда; 2 – забойка; 3 – kern из образца натурной породы; 4 – заряд;
 W – ЛНС; H_y – высота уступа

– $(K_{0\sigma})_{\text{м}}$ для шара либо цементируется, либо заливается эпоксидным клеем.

Выбрав в соответствии со средним куском гранулометрического состава горной массы в натуре крупность зерна дискретной среды

(песка), приступают к изготовлению модельного уступа в специальной взрывной камере (рис. 31) с двумя иллюминаторами, расположенными друг против друга на боковых стенках камеры. Размеры взрывной камеры выбираются из соображения свободного размещения в ней взрываемого модельного уступа и числа взрывааемых скважин. При взрывании n зарядов в ряду ширина камеры принимается равной $b_{нк} \geq a_{\dots}(n + 1)$, где a_{\dots} – расстояние между зарядами, n – число зарядов в ряду, при взрывании одиночного заряда – $b_{нк} \geq 3W_{м}$.

Длина взрывной камеры должна быть не менее чем в 2 раза больше ее ширины, т.е. $l_{нк} \geq 2b_{нк}$. В случае необходимости измерения длины развала B , длина взрывной камеры будет больше и определяться условием $l_{нк} \geq b_{нк} + B_{м}$, где $B_{м}$ – длина развала на модели $B_{м} = B_{н}/l_{с}$. Высота камеры должна быть не менее двух высот уступа ($h_{нк} \geq 2H_{м}$). Иллюминаторы из органического или оптического стекла размещаются посередине боковых стенок камеры, размерами $(0,5l_{нк} \frac{2}{3} H_{м})$. С одной стороны камеры и сверху устанавливаются осветительные лампы. С другой стороны измерительной камеры устанавливается скоростная кинокамера СКС-1М или сверхскоростная кинокамера СФР, работающая в режиме покадровой съемки. При этом применяется следующая частота съемок: на камере СКС-1М – 300 кадров в секунду, на СФР – 250 000 кадров в секунду. Для отсчета смещения стенки уступа во времени на стекле иллюминатора, обращенного в сторону кинокамер, наносится квадратная сетка определенных размеров (5 × 5 или 10 × 10 мм).

3.7.2. Моделирование инерционного движения горной массы

После завершения первой стадии движения – сдвижения горной массы под действием волны напряжений и газообразных продуктов взрыва начинается вторая стадия – инерционное движение горной массы, получившей кинетическую энергию движения $E_x = mv_0^2/2$ с начальной скоростью v_0 и подверженной действию гравитационных сил сопротивления воздуха. Движение горной массы будет описываться системой дифференциальных уравнений с учетом противодействия указанных сил, которая в прямоугольных координатах x, y (ось x направлена горизонтально в сторону движения горной массы, ось y – в плоскости груди уступа, вверх и перпендикулярно к оси x) запишется в виде

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= mg \sin \alpha - \varphi \vec{v}^2 \cos \psi, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \cos \alpha - \varphi \vec{v}^2 \sin \psi, \end{aligned} \quad (3.116)$$

где \vec{v} – вектор скорости движения элементарной массы m , $\vec{v}^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2$; $\cos \psi = dx/(\vec{v} dt)$, $\sin \psi = dy/(\vec{v} dt)$; φ – коэффициент сопротивле-

ния воздуха; α – угол наклона подошвы уступа к горизонтальной плоскости.

Эти уравнения замыкаются следующими начальными условиями

$$x|_{t=0} = 0, \quad y|_{t=0} = h;$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

где v_0 – начальная скорость сдвижения элементарной массы m ; h – высота расположения массы m относительно подошвы уступа.

Введя в уравнения (3.116) значения $m = \rho_n WS$ и $\varphi = c_s \rho_b S/2$, где ρ_n и ρ_b – плотность породы и воздуха, S – поперечное сечение элементарной массы m , и преобразовав их, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin \alpha - \frac{c_s \rho_b}{2 \rho_n W} \vec{v} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \cos \alpha - \frac{c_s \rho_b}{2 \rho_n W} \vec{v} \frac{dy}{dt}.$$

Из этих уравнений методом подобных преобразований получим следующие равенства, составленные из масштабов величин

$$l_c/t_c^2 = g_c = (\rho_b)_c v_c l_c / (\rho_n)_c l_c t_c = (\rho_b)_c v_c^2 / ((\rho_n)_c l_c).$$

Приравняв второй и последний члены этих равенств, получим

$$g_c = (\rho_b)_c v_c^2 / ((\rho_n)_c l_c) \quad \text{или} \quad (\rho_b)_c v_c^2 / ((\rho_n)_c g_c l_c) = 1. \quad (3.117)$$

Если при моделировании использовать расширенный закон геометрического подобия, когда $l_c = l_m$, $v_c = v_m$ и в качестве модели использовать образцы горных пород $(\rho_n)_c = 1$, и $(\rho_b)_c = 1$, то из индикатора подобия (3.117) получим $a_c i_c = 1$ или, раскрыв его для природы и модели

$$g_n l_n = g_m l_m \quad \text{и} \quad a_m = g_n i_n / i_m = i_c a_c.$$

Это соотношение является основным условием центробежного моделирования.

Если же отказаться от центробежного моделирования и принять $g_c = 1$, то при наличии геометрического подобия с произвольно взятым масштабом l_c и моделью, изготовленной из образца горной породы $(\rho_n)_c = 1$, из (3.117) получим индикатор

$$(\rho_b)_c v_c^2 / l_c = 1 \quad \text{или} \quad (\rho_b)_n / (\rho_b)_m (v_n / v_m)^2 = l_c.$$

Отсюда для масштаба скорости v_c и скорости в модели v_m имеем соотношения

$$v_c = \sqrt{l_c / (\rho_b)_c}, \quad v_m = v_n \sqrt{(\rho_b)_n / ((\rho_b)_m l_c)}.$$

Отсюда следует, что для $v_c = 1$ и $v_n = v_m$ необходимо $(\rho_b)_c = i_c$ или $(\rho_b)_m = (\rho_b)_n / l_c$, т.е. плотность воздуха в модели должна быть в i_c раз меньше плотности воздуха природы, а это значит, что моделирование

следует проводить в вакуумной камере. То же самое имеет место и при методике с комбинированной моделью, так как в этом методе за счет увеличения ЛНС принято $m_c = l_c^3$, что имеет место при $\rho_c = 1$ ($m_c = \rho_c l_c^3 = l_c^3$).

Кроме того, во всех рассмотренных случаях необходимо учесть условие моделирования начальной скорости движения, т.е. условие $(v_0)_н = (v_0)_м$, которое справедливо при выполнении условий (3.46) и (3.47), что требует выбора ВВ с плотностью, определяемой по уравнению (3.48).

Следует отметить, что при моделировании на центрифуге (центробежное моделирование) на движение осколков породы будет действовать ускорение Кориолиса, искажая это движение. Вследствие искривления траектории движения в плоскости вращения имеет место поперечное смещение точек траектории движения (девиация). Приблизительно смещение

$$\delta = [L^2/(2v)] \sqrt{l_c g_n / R_n} = [\bar{L}^2 / (2\bar{v})] \sqrt{g_m / R_n}, \quad (3.119)$$

где L – дальность бросания осколков; v – скорость движущегося по инерции тела; R_n – радиус центрифуги.

Отсюда мера точности воспроизведения на модели движения осколков в натуре δ/L с учетом выражения (3.119)

$$\delta/L = [L/(2v)] \sqrt{l_c g_n / R_n} = [L/(2v)] \sqrt{g_m / R_n}.$$

Последнее соотношение позволяет оценить, с какой точностью осуществляется моделирование и как его искажает ускорение Кориолиса. Кроме того, это равенство дает возможность определить условия, при которых выполняется заданная точность моделирования, т.е. заданная величина $\delta/L \ll 1$. По этой зависимости можно установить следующие параметры.

Верхний предел масштаба моделирования

$$(l_c)_{\max} = 4(\delta/L)^2 v^2 R_n / (L^2 g_n).$$

Верхний предел длины траектории на модели

$$L_{\max} = 2(\delta/L) v \sqrt{R_n / (l_c g_n)}.$$

Нижний предел радиуса центрифуги

$$(R_n)_{\min} = L l_c g_n / [4v^2 (\delta/L)^2].$$

Эти условия не всегда обязательны. В частности, в результате эксперимента всегда можно внести соответствующие поправки. Так, при киносъемке траектории движения можно ее трансформировать, вводя поправку, исключая влияние ускорения Кориолиса. При этом надо иметь в виду, что смещение траекторий при введении поправки должно происходить в том же направлении, в каком вращается каретка. Кривизна траектории движения частиц в передней части каретки (по направлению вращения) будет уменьшать свою кривизну, а в задней части каретки – увеличивать.

Чтобы уменьшить влияние ускорения Кориолиса на траекторию движения, можно выдвинуть также и другое требование, которое в элементарной форме можно свести к следующему: за время свободного полета выброшенной породы угол поворота центрифуги должен быть существенно меньше 1 рад. И тогда за меру погрешности результата моделирования взрыва на выброс породы можно принять угол поворота центрифуги β за время свободного полета породы, выраженный в радианах

$$\beta = \sqrt{L_m/R_x},$$

где \bar{L}_m — дальность разлета осколков на модели; R_x — расстояние соответствующей точки каретки от оси вращения центрифуги.

В соответствии с изложенным требованием к углу поворота будем иметь условие

$$\sqrt{L_m/R_x} \ll 1 \text{ или } \bar{L}_m/\bar{R}_x \ll 1; \quad \bar{L}_m/\bar{R}_x = \beta^2.$$

Это условие и является дополнительным требованием к размерам модели, помещаемой на центрифуге. Оно оказывается практически выполнимым. Поэтому моделирование взрыва на выброс породы на центрифуге принципиально возможно. Если при моделировании получится все же недостаточная точность, то возможно внести соответствующие коррективы при обработке эксперимента, т.е. надо картину выброса деформировать, поворачивая полученные направления выброса на угол β в направлении вращения центрифуги.

Все вышеизложенное показывает, что моделирование инерционного движения разрушенной горной массы является более сложным процессом, чем моделирование начальной скорости движения. Это связано с необходимостью учета влияния гравитационной силы и сопротивления среды, окружающей горную массу (воздуха, воды — при взрыве соответственно на свободное пространство и на выработанное пространство, заполненное водой).

В этом случае использование центробежного моделирования связано с применением в модели образца горной породы малых размеров, разрушаемой взрывом на подобные натуре куски, что, как показано в разд. 3.7.1, практически невыполнимо и дает большую погрешность наблюдений как за счет непосредственных измерений, так и наличия ускорения Кориолиса, искажающего картину развала или выброса горной массы. Использование комбинированной модели (образец породы в виде керна или шара, окруженный дискретной средой — песком) требует в соответствии с условиями (3.118) и $v_c = 1$ снижение плотности окружающей модель среды (воздух или воду) на величину геометрического масштаба при сохранении условия для горной массы $m_c \approx i_c^3$. В этом случае начальные скорости движения в модели и натуре будут равны, а модельный эксперимент при моделировании отбойки на свободную поверхность следует проводить в вакуумной камере с $(\rho_v)_m = (\rho_v)_n / i_c$. Моделирование отбойки породы на выработанное про-

странство, заполненное водой, следует проводить в компрессионной воздушной камере, где давление воздуха должно быть равным $(\rho_n)_m = (\rho_{нд})_n / l_c$, где $\rho_{нд}$ – плотность воды. При этом не учитывается прибойный эффект вытесненной вверх воды при ее падении.

3.7.3. Моделирование выброса горной массы и образования воронки взрыва

При рассмотрении процесса образования воронки выброса примем в качестве параметров: H – глубину заложения, R_0 – радиус полости, p_0 – давление газов, k – показатель адиабаты и $E_{гн}$ – энергию газов. Горную массу охарактеризуем плотностью ρ_n , сцеплением $\sigma_{сц}$ и коэффициентом внутреннего трения f . В число определяющих параметров надо ввести также и g – ускорение свободного падения, характеризующее силы тяжести выбрасываемой горной массы. Искомыми параметрами будут параметры воронки: радиус R_n и глубина H_n . Тогда функциональная зависимость, например, для радиуса воронки, запишется в виде

$$R_n = \Phi(H, R_0, p_0, E_{гн}, \rho_n, \sigma_{сц}, k, f, g),$$

которая по π -теореме может быть представлена в безразмерном виде

$$R_n/H = \Phi(R_0/H, E_{гн}/(\rho_n g H^4), E_{гн}/(p_0 H^3), E_{гн}/(\sigma_{сц} H^3), k, f). \quad (3.120)$$

Из этого выражения следует, что геометрическое подобие может иметь место, если пренебречь весом, т.е. критерием $E_{гн}/(\rho_n g H^4)$. Это можно сделать, если величина $\rho_n g H$ мала по сравнению с p_0 или $\sigma_{сц}$, что имеет место при взрыве зарядов небольшой массы. Так, в результате обработки экспериментальных данных сравнительно небольших взрывов был получен ряд приближенных формул (в частности, формула Борескова) по определению веса заряда, необходимого для образования воронки заданного радиуса. Эти формулы построены в виде зависимости

$$G/H^3 = C f(R_n/H),$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от свойств грунтов (породы).

При обратном отношении величин $\rho_n g H$ и p_0 единственным определяющим критерием, содержащим энергию, остается $E_{гн}/(\rho_n g H^4)$. Следовательно, в этом случае подобие воронок (равенство отношений R_n/H) будет иметь место при

$$(E_{гн})_n / (\rho_n g H^4)_n = (E_{гн})_m / (\rho_n g H^4)_m,$$

т.е. когда энергия газа в полости будет возрастать не пропорционально H^3 (как при геометрическом подобии), а пропорционально H^4 . Отсюда

следует, что при неизменной среде роль критерия $\frac{E_{гн}}{\rho_n g H^4}$ будет расти с ростом масштаба взрыва. Это подтверждается экспериментальными данными, полученными при мощных взрывах на выброс.

Г. И. Покровский для мощных взрывов предлагает зависимость

$$G_n = \frac{\gamma}{2800} H^{7/2} (1 + n_0^2)^2, \quad (3.121)$$

где γ – плотность породы; n_0 – показатель выброса, $n_0 = R_n/H$.

Эта формула подтверждается данными как мощных, так и малых взрывов. Из нее вытекает, что для моделирования необходимо выполнить условие $G_1/G_2 = \gamma_1/\gamma_2 (H_1/H_2)^{7/2}$ и соблюдать геометрическое подобие.

Существует также еще одна зависимость, близкая к равенству (3.120)

$$G = \rho_n B \sqrt{\frac{2}{3} g} H^{7/2} (1 + n_0^2)^2, \quad (3.122)$$

где g – ускорение свободного падения; ρ_n – плотность породы; B – постоянная, зависящая от удельной энергии ВВ; R_n – радиус воронки.

Формула (3.122) для природы и модели при наличии геометрического подобия запишется так:

для природы

$$G_n/H_n^3 = (\rho_n)_n B \sqrt{\frac{2}{3} g_n H_n} (1 + n_0^2)^2,$$

для модели

$$G_m/H_m^3 = (\rho_n)_m B \sqrt{\frac{2}{3} g_m H_m} (1 + n_0^2)^2. \quad (3.123)$$

Очевидно, в этом случае при переходе от природы к модели величины n_0 , B и G/H^3 неизменны. Следовательно, из условий (3.123) следует

$$g_n H_n = g_m H_m, \quad g_m = g_n H_n / H_m = g_n l_c,$$

т.е. основное условие центробежного моделирования.

Однако возможен и иной метод моделирования. Например, можно уменьшать p_0 , $\sigma_{сц}$ и $E_{пв}$ в модельном эксперименте так, чтобы безразмерные критерии в равенстве (3.120) совпадали с натурными. Так, в работе [1] для этих целей использовалась вакуумная камера, заполненная наполовину сухим песком, в котором на глубине H_m от поверхности размещался сферический объем воздуха в тонкой оболочке. Оболочка при нагревании разрушалась, и освобожденный пузырь воздуха выталкивал с давлением $(p_0)_m$ песок, образуя воронку выброса. Давление в вакуумной камере и в газовом пузыре подбирались в соответствии со вторым и третьим критериями (3.120), прочность песка – в соответствии с четвертым критерием, радиус и глубина его размещения – в соответствии с геометрическим подобием или из равенства первого критерия (3.120). При этом в первом приближении показатель адиабаты k и коэффициент трения f считались неизменными, что, по-видимому, вносит определенную погрешность в результаты моделирования. Этот способ моделирования использовался для исследования зависимости образования воронки и ее размеров от глубины заложения заряда для грунтов типа аллювия и суглинков.

Кроме того, для моделирования образования воронки можно использовать также и метод с комбинированной моделью, помещая ее также в вакуумную камеру с $(\rho_{\text{в}})_{\text{н}} = (\rho_{\text{в}})_{\text{н}}/l_{\text{с}}$ и погружая заряд с шаровым образцом на глубину $H = \bar{W}$ (\bar{W} определяется по зависимости (3.115)), где масштаб геометрического подобия задается произвольно, соизмеряясь с размерами вакуумной камеры и размерами радиуса воронки, вычисленных по одной из формул (3.121), (3.122), т.е. из условия

$$(R_{\text{в}})_{\text{н}}/l_{\text{с}} \leq 4L_{\text{к}},$$

где $(R_{\text{в}})_{\text{н}}$ – радиус воронки в натуре, вычисленный по формуле (3.121) или (3.122); $L_{\text{к}}$ – наименьший размер вакуумной камеры (длина, высота, радиус и т.п.).

В этом случае масштаб геометрического подобия

$$l_{\text{с}} = (R_{\text{в}})_{\text{н}}/(4L_{\text{к}}).$$

Выбрав таким путем масштаб, далее определяют по изложенной в разд. 3.7.1 методике тип и характеристики модельного заряда $(\rho_{\text{ВВ}})_{\text{м}}$, $(R_{\text{о}})_{\text{м}}$, радиус шарообразного образца породы, в который помещается заряд [см. формулы (3.09) и (3.110)], и глубину расположения заряда [см. формулу (3.115)].

3.8. Моделирование навала горной массы и ее уплотнения

Моделирование навала породы и ее уплотнения при взрыве рассмотрим в соответствии с исследованием Г. М. Покровского. Очевидно, что при выбрасывании горной породы взрывом она дробится на отдельные куски, которые получают некоторую скорость. Эти куски, сохраняя определенную долю этой скорости, обозначим ее $v_{\text{к}}$, долетают до поверхности земли (или какой-то преграды) и останавливаются. При этом их кинетическая энергия $mv_{\text{к}}^2/2$ затрачивается на дальнейшее разрушение (дробление) в местах взаимного контакта. В результате появляющиеся более мелкие фракции заполняют поры между более крупными кусками. Этот процесс будет длиться до тех пор, пока не иссякнет полностью запас кинетической энергии.

Описанный процесс приводит к навалу породы, который при определенных условиях будет характеризоваться таким механическим составом, который будет соответствовать некоторому минимальному значению пористости.

Временное сопротивление σ_{\bullet} раздавливания для навала породы будем характеризовать пористостью ϵ этого навала. Так, при некоторой максимальной пористости $\epsilon_{\text{---}}$ значение $\sigma_{\bullet} = 0$, и наоборот, при $\epsilon = 0$ временное сопротивление навала на раздавливание возрастет до временного сопротивления $(\sigma_{\bullet})_{\text{макс}}$ породы в массиве, в результате дробления которой получен рассматриваемый навал.

В первом приближении допустим, что σ_{\bullet} изменяется плавно. По линейному закону, от нуля до $(\sigma_{\bullet})_{\text{макс}}$, если ϵ уменьшается при этом от

ε_{\max} до нуля. В этом случае энергия уплотнения навала при изменении пористости от ε_{\max} до некоторого ε равна для единицы первоначального объема навала породы выражению

$$E_1 = - \int_{\varepsilon_{\max}}^{\varepsilon} \sigma_{\max} \left[d\varepsilon - \frac{\varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \right] = \frac{\sigma_{\max}}{2\varepsilon_{\max}} (\varepsilon_{\max} - \varepsilon)^2. \quad (3.124)$$

Кинетическая энергия единицы породы (в ее первоначальном состоянии до начала ε_{\max}) $E_1 = \rho (v - v_{\kappa})^2 / 2$,

где v_{κ} — скорость удара кусков при образовании навала породы. Приравняв (3.124) и (3.125), получим

$$\rho \left(\frac{v - v_{\kappa}}{2} \right)^2 = \frac{(\sigma_{\kappa})_{\max}}{2\varepsilon_{\max}} (\varepsilon_{\max} - \varepsilon)^2$$

или $\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \sqrt{\frac{\rho (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\max})^2}{(\sigma_{\kappa})_{\max}}} v_{\kappa}$.

Если теперь на модели необходимо получить такое же значение ε , что и в натуре, то это можно осуществить при условии подобия гранулометрического состава горной массы на модели и в натуре и равенства соответствующих скоростей движения кусков породы. Последнее возможно, если вертикальные составляющие скорости, определяемые гравитационной силой, совпадают. Это возможно при искусственном утяжелении кусков на модели, что достигается применением метода центробежного моделирования, так как в выражение для этой скорости входит ускорение свободного падения g , т.е. $v_{\kappa} = \sqrt{2gh}$.

Частным случаем образования навала является его создание при падении кусков породы с некоторой высоты H . В этом случае скорость при падении $v = \sqrt{2gH}$. Из этого выражения следует, что для равенства скоростей в натуре и модели, необходимо соблюсти равенство

$g_n H_n = g_m H_m$ (или $g_m = g_n \frac{H_n}{H_m} = g_n i_n$), которое является основным условием центробежного моделирования.

Следует отметить, что точное моделирование навала горной массы выполнить не представляется возможным, так как он существенно зависит от гранулометрического состава горной массы, который во многом определяется трещиноватостью и неоднородностью взрываемого массива горной породы. Подобрать модель (образец горной породы) с подобными трещиноватостью и неоднородностью практически невозможно. Поэтому иногда изготавливают искусственный модельный массив, составляя и склеивая его из отдельных кусочков, примерно подобных среднему куску, полученному при натуральных взрывах. Для разрушения и перемещения такой модели необходимо также определить и источник взрыва, достаточный для получения подобного натуре перемещения. Но это связано с моделированием разрушения этой

модели, начального движения горной массы и его перемещения, т. е. с моделированием рассмотренных ранее процессов в разд. 3.7. Такой подход к моделированию навала потребует специальных исследований по изготовлению модели, выбору источника взрыва. Кроме того для получения равной пористости навала в натуре и модели необходимо соблюдение идентичности зависимости пористости от прочности кусков горной массы, что возможно либо путем утяжеления кусков из натурной горной породы, используя, например, метод центробежного моделирования, либо путем подбора кусков из эквивалентных материалов, обладающих меньшей прочностью, чем прочность натурной горной породы.

3.9. Моделирование дробления горных пород взрывом

Дробление горных пород взрывом – наиболее сложный процесс, он определяется как действием волн напряжений, так и действием газообразных продуктов детонации. При этом существенное влияние на степень дробления оказывает структура горной породы и главным образом ее неоднородность и трещиноватость. Качество дробления зависит от многих параметров, к числу которых в первую очередь следует отнести такие как: метод взрывания (отбойки), тип ВВ, диаметр заряда, конструкция заряда, интервалы замедления, прочность породы, ее структурные особенности, неоднородность и трещиноватость. Учесть эти факторы аналитически в настоящее время не представляется возможным. Поэтому прибегают к моделированию процесса дробления. Однако и моделирование – трудная задача, так как оно зависит от такого практически не моделируемого параметра, как трещиноватость, и является сложным процессом, состоящим из ряда последовательных, отдельных процедур.

Схематически процесс дробления горной породы можно представить следующим образом. Сначала на породу воздействует образовавшаяся при взрыве волна напряжений, которая при распространении по породе до свободной поверхности и обратно (в виде волны разряжения) создает новые трещины и раскрывает существующие как в радиальном направлении, так и в тангенциальном. В результате горная порода между зарядом и свободной поверхностью покрывается сетью трещин и под действием квазистатического давления газов разрушается, образуя горную массу определенной кусковатости, которая под действием продуктов взрыва перемещается в направлении свободной поверхности. При этом происходит соударение кусков породы и дальнейшее их дробление. При инерционном полете горной массы также возможно соударение кусков и их дробление. Окончательное формирование степени дробления горной породы происходит при их падении на поверхность карьера, почву выработок и образовании навала горной массы.

Из этой схемы видно, что на качество дробления в основном влияют первые две стадии процесса, обусловленные действием волн напряжений и поршневым давлением газообразных продуктов взрыва. При этом

первоначальная кусковатость горной массы существенно зависит от естественной микро- и макротрещиноватости породы, моделирование которой практически невозможно.

В настоящее время существует два подхода моделирования процесса дробления горных пород: первый основан на подобии упругих волновых движений, второй – на использовании метода эквивалентных материалов. Оба подхода являются приближенными и построены на различных допущениях.

Первый подход базируется на двух основных допущениях.

1. Предполагается, что в процессе нагружения среда остается упругой вплоть до момента разрушения. Этому допущению, очевидно, ближе всего соответствует дробление хрупких скальных пород типа кварцит, кварцевое стекло и других пород, содержащих в составе большой процент кварца. Для полускальных пород и грунтов это допущение неверно.

2. Предполагается, что процесс разрушения и дробления происходит мгновенно, а их интенсивность определяется лишь значениями максимальных напряжений. Это допущение вызывает наибольшее число возражений, так как оно не учитывает такие важные факторы, как изменение и перераспределение напряжений в процессе разрушения, влияние импульса и формы волны напряжений, которые существенно меняются при изменении геометрического масштаба моделирования.

Благодаря этим допущениям моделирование процесса дробления возможно при выполнении геометрического и временного подобия, подобия полей напряжений и прочностных характеристик пород. При использовании в модели среды природы моделирование процесса дробления сводится к моделированию волн напряжений, т. е. к расширенному закону геометрического подобия, когда временной и линейный масштабы равны друг другу, и скорости в соответствующих точках пространства и в соответствующие моменты времени равны друг другу.

Основными недостатками этого подхода являются: неучет влияния формы и импульса волны напряжений на процесс дробления, а также невозможность соблюдения геометрического подобия микро- и макротрещин, во многом определяющих подобие гранулометрического состава горной массы в модели и натуре.

Второй подход связан с использованием метода эквивалентных материалов, рассмотренного в разд. 3.1.2, и имеет присущие этому методу трудности и недостатки. Кроме того остается в силе и основной недостаток первого подхода – невозможность моделирования неоднородности и трещиноватости среды природы, определяющих подобие гранулометрического состава горной массы. Следовательно, этот подход является весьма приближенным и несовершенным. Таким образом, можно говорить лишь о приближенном и неполном моделировании процесса дробления горных пород взрывом. Например, при модельных взрывах на блоках какой-либо породы можно исследовать влияние диаметра или конструкции заряда на дробление этого блока. Полученные сравнительные результаты позволяют в какой-то мере судить о

влиянии этих параметров при натуральных взрывах. Однако при экстраполяции модельных опытов на натуру надо иметь в виду структурное состояние породы, ее неоднородность и трещиноватость, что не позволяет получить количественных результатов по дроблению горных пород на основании модельных экспериментов.

Первый подход используется для приближенного моделирования процесса дробления горной породы с помощью аналоговой машины ЭГДА, т.е. используется при математическом моделировании дробления горной породы. Он будет подробно рассмотрен в разд. 4.

Второй подход с помощью эквивалентных материалов впервые был предложен в 1961 г. проф. В. Р. Именитовым, который использовал его для моделирования обрушения и выпуска руды. При этом он предполагал, что подобные куски должны определенным образом размещаться в обрушенной породе, если соблюдены подобия действующих сил и если раздробленные куски в модели геометрически подобны кускам натуры. Поскольку при распределении кусков породы в развале определяющими являются силы тяжести, условия подобия которых являются недостаточными для достижения подобного дробления, то предложено создать модель среды из геометрически подобных кусков прочного материала, скрепленных слабым цементом. При взрыве в такой модели она разрушается по местам соединения кусков, а далее идет процесс обрушения и распределения кусков в развале под действием сил тяжести. При этом масштаб массы заряда q_c предлагается вычислить из соотношения

$$q_c = l_c / K_c, \quad (3.126)$$

а масштаб диаметра заряда $(d_3)_c$ из зависимости

$$(d_3)_c = l_c^{3/4} / \sqrt{K_c (\gamma_{ВВ})_c}, \quad (3.127)$$

где l_c — геометрический масштаб; $(\gamma_{ВВ})_c$ — масштаб плотности ВВ; K_c — масштаб коэффициента влияния работоспособности, конструкции заряда, прочности и плотности среды.

Отметим, что в данном случае допускается некоторая неопределенность при выборе масштаба K_c , который включает и характеристики заряда и породы, а сам метод может быть использован только для процесса обрушения и распределения кусков в навале, т.е. для решения частной задачи.

Имеют место тенденции использования метода эквивалентных материалов для моделирования и других частных задач, связанных с выявлением условий взрывания на качество дробления. В этом случае по данным формы развала и гранулометрического состава раздробленной породы при взрыве в натуральных условиях при определенных условиях взрывания (сетке распределения скважин, сплошной конструкции заряда и порядной схеме взрывания) подбирается крупность материала модели с учетом геометрического масштаба l_c . В большинстве случаев модель komponуется из равных кусков геометрически подобных среднему размеру куска, полученному при натурном взрыве. Масштабы массы и

диаметра заряда выбираются в соответствии с зависимостями (3.126) и (3.127). Производится ряд предварительных модельных взрывов при подобных натуре условиях взрывания и с вариацией массы и диаметра заряда до получения подобия формы развала и гранулометрического состава. По этим данным уточняются масштабы K_c и $(\gamma_{ВВ})_c$, входящие в зависимости (3.126) и (3.127). После этого исследуется на модели влияние на дробление одного из параметров условий взрывания (например, диаметра скважин, сетки скважин и т. п.) путем его изменения в определенных пределах с целью получения оптимальной степени дробления. Полученные оптимальные условия взрывания далее переносятся на натуру с учетом геометрического масштаба, масштабов массы и диаметра зарядов по зависимостям (3.126) и (3.127) с уточненными значениями масштабов K_c и $(\gamma_{ВВ})_c$.

Следует отметить, что этот метод моделирования может дать лишь качественную оценку эффективности применения различных способов управления действием взрыва при дроблении горных пород. Однако при этом нельзя установить количественного изменения интенсивности дробления в натуре в зависимости от применяемого способа управления действием взрыва только по данным модельных взрывов. Иначе говоря, гранулометрический состав горной массы, полученной при модельном взрыве, нельзя переносить с учетом геометрического масштаба на гранулометрический состав при натурном взрыве. Можно лишь констатировать на сколько (в процентах) будет изменяться гранулометрический состав в зависимости от изменения тех или иных параметров и условий взрывания.

Таким образом, моделирование качеством дробления горной породы в полном объеме – весьма сложная и практически невыполнимая задача. Возможно лишь приближенное и частичное моделирование этого явления указанными выше методами. Возможности метода эквивалентных материалов далеко не исчерпаны, при дальнейшем его развитии он может получить широкое распространение при исследовании отдельных показателей дробления горных пород взрывом.

Следует также подчеркнуть, что окончательный гранулометрический состав горной массы определяется после формирования навала. Поэтому при моделировании дробления горных пород надо обязательно учитывать все изложенные в разд. 3.8 условия и требования к моделированию навала горной массы.

4. Основы математического моделирования действия взрыва в горных породах

В последние годы наряду с физическим моделированием стали все чаще и чаще применять математическое моделирование. В отличие от физического моделирования, при котором на уменьшенной (увеличенной) модели, изготовленной либо из среды природы, либо из экви-

валентных материалов, изучается непосредственно интересующий нас процесс в натуре, при математическом моделировании исследуется и решается система дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс, на специальных электронных вычислительных машинах непрерывного действия – аналоговых вычислительных машинах (АВМ). Отсюда следует, что математическое моделирование возможно лишь для таких явлений (процессов), которые имеют математическое описание, и сводится к эксперименту с некоторой физической системой, которая построена таким образом, что ее математическое описание одинаково с исследуемым явлением (процессом). В этом смысле решение на АВМ называется моделированием, а сама аналоговая вычислительная машина является моделью. Возможность создания таких моделей АВМ определяется сходством математического описания ряда явлений, различных по своей физической сущности, т.е. математическим изоморфизмом различных физических систем. Аналоговой вычислительной машиной, вообще говоря, можно назвать любую физическую систему, в которой между непрерывно изменяющимися физическими величинами существуют определенные математические соотношения, аналогичные таковым для исследуемой физической системы или решаемой математической задачи.

4.1. Теоретические основы математического моделирования

В ряде случаев аналитическое решение дифференциальных уравнений, описывающих интересующее явление, в конечном виде невозможно. Тогда эти уравнения с помощью различных приближенных методов (например, методом конечных разностей) приводят к виду, удобному для решения их на быстродействующих электронных цифровых машинах, или к виду, при котором они могут быть смоделированы аналоговыми вычислительными машинами АВМ. В последнем случае имеет место математическое моделирование.

Иначе говоря, математическое моделирование представляет собой решение дифференциальных уравнений, исследуемых на специальных электронных вычислительных машинах непрерывного действия. Из этого определения следует, что для использования математического моделирования необходимо, чтобы исследуемое явление описывалось дифференциальными уравнениями и чтобы были найдены электрические аналоги для параметров, определяющих его. Небольшая стоимость, сравнительно малые габариты и простота в обращении – вот те преимущества, которые отличают их от цифровых машин дискретного типа.

Конструирование аналоговых машин идет в двух направлениях – построение моделей-аналогов, непосредственно моделирующих изучаемый процесс, и построение моделей из отдельных счетно-решающих устройств (ячеек), например электрических сеток, заменяющих расчетные сетки при методе конечных разностей. Машины первого типа являются узкоспециализированными и предназначены для решения только одной или

узкого ряда идентичных задач. Машины второго типа более универсальны и позволяют решать целый класс задач (явлений).

Существуют электронные машины смешанного типа, в которых сочетаются конструкции обоих типов машин, упомянутых выше. Эти машины используются для исследования более сложных явлений, в которых происходит несколько процессов, различающихся условиями однозначности.

Теоретической основой математического моделирования и основой конструирования электрических машин первого типа (моделей-аналогов) является метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА), впервые разработанный выдающимся русским ученым Н. И. Павловским. Этот метод построен на аналогии между процессами изменения параметров электрического тока и процессами изменения аналогичных параметров полей механических, акустических, тепловых и других физических явлений. В основе построения машин второго типа лежит возможность замены приближенных методов решения аналитических задач, в частности метода конечных разностей, сводящихся к методу сеток, электрическими сетками (или ячейками), в которых протекающие электрические процессы описываются уравнениями, подобными конечно-разностными уравнениями, а также возможность применения счетно-решающих электронных устройств.

4.1.1. Теория моделей-аналогов

Обычно под аналогией двух физических явлений различной природы понимают случай, когда явления протекают в геометрически подобных системах, а соответствующие параметры полей этих явлений в сходственные моменты времени и в сходственных точках пространства, т. е. при условиях:

$$t_n/t_m = t_c; \quad x_n/x_m = y_n/y_m = z_n/z_m = l_n/l_m = l_c,$$

удовлетворяют требованию их пропорциональности

$$Q_1/P_1 = Q_2/P_2 = Q_3/P_3 = \dots = Q_n/P_n = Q_c/P_c,$$

где Q_i и P_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) – параметры полей в модели и натуре. Иначе говоря, должно соблюдаться равенство отношений соответствующих аналогичных исследуемых параметров обоих явлений. При этом уравнения, описывающие поля, будут тождественно одинаковыми, если выразить их в безразмерном виде.

Метод аналогии в настоящее время все чаще применяется в научных исследованиях. Он позволяет весьма эффективно перенести разработанные в какой-то области методы анализа явлений в неисследованные новые области. Метод аналогий может быть успешно использован как при решении задачи на счетно-решающих или сеточных электрических машинах, так и при экспериментальном изучении процессов на аналоговых машинах – методом электрогидродинамических аналогий (ЭГДА). Приведем примеры аналогии между процессами и отдельными параметрами физических полей [9].

Электрическое поле тока. Закон Ома

$$j = -\sigma \text{grad } U; \quad I = \int j ds,$$

где j —плотность тока; σ —электропроводность; U —электрический потенциал; I —сила тока.

Потенциальное поле движения. Уравнение движения жидкости

$$v = -\text{grad } \varphi, \quad Q_n = \int v ds,$$

где v —скорость течения жидкости; φ —потенциал течения жидкости; Q_n —расход жидкости.

Поле фильтрации жидкости. Закон Дарси

$$v = -k \text{grad } h, \quad Q_\phi = \int v ds,$$

где v —скорость фильтрации; k —коэффициент фильтрации; h —пьезометрический напор; Q_ϕ —фильтрационный расход.

Магнитное поле. Закон магнитной индукции

$$B = -\mu \text{grad } U, \quad \Phi = \int B ds,$$

где B —магнитная индукция; U —магнитный потенциал; μ —магнитная проницаемость; Φ —магнитный поток.

Поле температур. Закон Фурье

$$q = \lambda \text{grad } T, \quad Q_r = \int q ds,$$

где q —тепловой поток; λ —коэффициент теплопроводности; T —температура; Q_r —тепловой поток.

Рассмотрим более подробно метод ЭГДА между течением электрического тока и потенциальным течением жидкости. Для простоты возьмем течение в координатах x, y (рис. 32).

Выделим в электрическом поле и в жидкости элементарные трубки

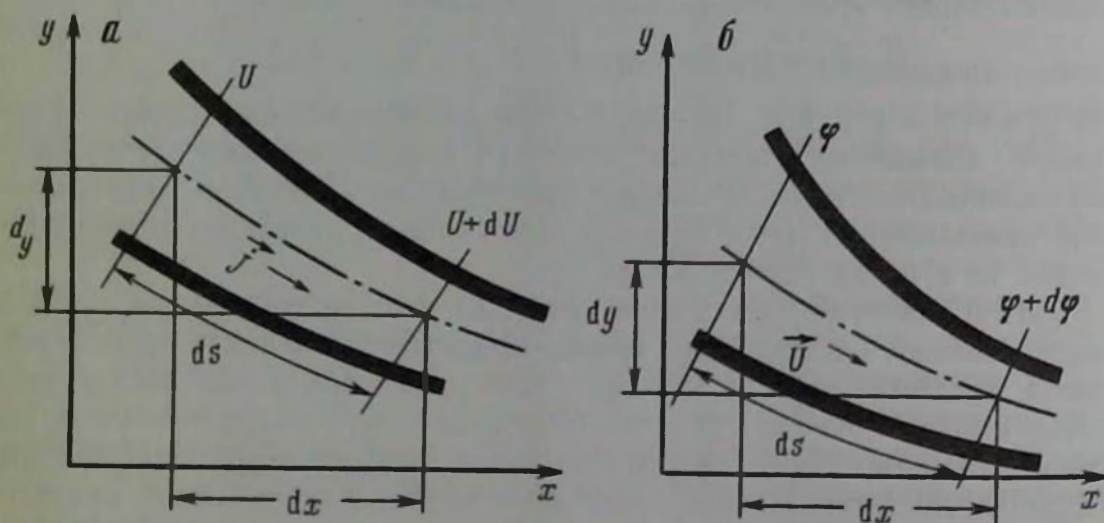


Рис. 32. Пример аналогии между течением электрического тока (а) и потенциальным движением жидкости (б)

тока с элементарным участком длиной ds . Потенциалы электрического тока и жидкости в сечениях соответственно обозначим через U и $U + \Delta U$, φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Плотность электрического тока и скорость движения жидкости по линии тока будут равны соответственно:

$$j = -\sigma dU/ds, \quad v = -d\varphi/ds$$

или в проекциях на оси x и y

$$j_x = -\sigma \partial U / \partial x, \quad j_y = -\sigma \partial U / \partial y; \quad (4.1)$$

$$v_x = -\partial \varphi / \partial x; \quad v_y = -\partial \varphi / \partial y. \quad (4.2)$$

Уравнение неразрывности для обоих полей имеет вид:

$$\partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y = 0; \quad \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0. \quad (4.3)$$

Подставляя в уравнение (4.3) соответствующие значения из (4.1) и (4.2), получим для обоих случаев одно и то же дифференциальное уравнение Лапласа, а именно:

$$\begin{aligned} \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 &= 0, \\ \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следовательно, в данном случае мы можем потенциальное движение жидкости моделировать движением электрического тока в некоторой среде, подбирая надлежащим образом коэффициент электропроводности и соблюдая тождественность граничных условий и условия геометрического подобия, т.е. на границах области исследуемого поля должны быть заданы подобным образом либо значения потенциалов φ и U , либо величин $\partial \varphi / \partial n$ и $\partial U / \partial n$, где n — нормаль к границе области, а также электрическая модель должна представлять область течения жидкости в природе в некотором масштабе без искажения, а коэффициент теплопроводности прямо пропорционален единице (практически любому постоянному числу).

Заметим, при этом, что аналитическое решение уравнения Лапласа (4.4) для жидкости сложно. В то же время решение этого уравнения для электрического тока можно легко осуществить экспериментально, так как значения электрического потенциала могут быть легко измерены в опыте. Решить это же уравнение для жидкости экспериментально — невозможно, так как потенциал φ в природе не существует и введен условно для характеристики потенциального движения жидкости при чисто теоретических исследованиях.

Метод ЭГДА успешно применяют для изучения стационарных физических процессов, которые описываются уравнениями эллиптического типа (уравнениями Лапласа с правой частью и без него). В горном деле метод ЭГДА применяют для решения вопросов фильтрации жидкости, некоторых процессов, распространения сейсмозрывных волн.

Примером модели-аналога может служить установка ЭГДА. Принцип действия этой установки основан на использовании мостового (компенсационного) метода измерений электрического потенциала в

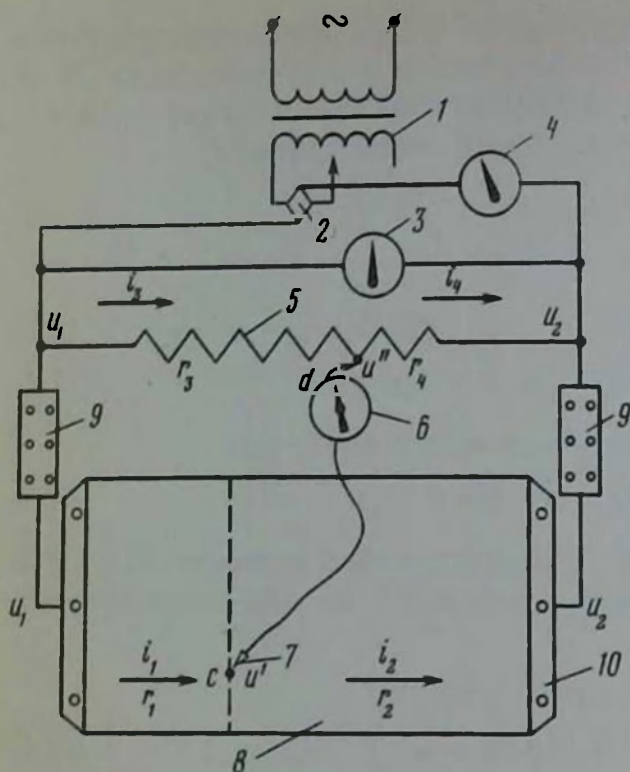


Рис. 33. Принципиальная схема установки электрогидродинамической аналогии ЭГДА:

U_1 – входное напряжение; U_2 – выходное напряжение; C – точка на модели с электрическим потенциалом U' , равным потенциалу потенциометра U'' в точке d

поле модели. Установка ЭГДА (рис. 33) состоит из блока питания (понижающий трансформатор – 1, выпрямитель – 2, вольтметр – 3, миллиамперметр – 4); блока измерения (гранулированный потенциометр – 5, нуль индикатор-гальванометр – 6, поисковая игла – 7), самой модели – 8, магазинов сопротивлений – 9 и зажимных шин – 10.

В качестве модели используют электропроводящую среду из материалов, позволяющих обеспечить определенную удельную электропроводность среды на любом участке модели, строго пропорциональную значению соответствующего параметра в натуре. Для этого часто применяются электропроводный картон и электропроводная бумага, обладающая электронной проводимостью, позволяющей для питания использовать постоянный ток и обеспечивающей очень малую контактную разность потенциалов между бумагой и металлическими шинами.

Перед изготовлением модели обычно определяются геометрическая форма исследуемой области, граничные условия, а также геометрический масштаб моделирования. Если граничные условия представляют собой равные нулю нормальные производные от искомой величины напряжения, то они легко реализуются изоляцией контура тела модели, т.е. обрезкой бумаги по кромкам модели (создание воздушной изоляции). Если на границе надо задать постоянные значения напряжений, то на контуре тела устанавливают зажим-шины и подают на них требуемый потенциал, соответствующий граничным условиям.

Методика проведения экспериментов заключается в определении геометрических мест точек с одинаковыми значениями электрического потенциала, равного потенциалу потенциометра, т.е. $U' = U''$ и $i = 0$ (см.

рис. 33). Соединяя указанные точки плавными линиями, получают так называемые эквипотенциальные линии, которые являются аналогами соответствующих параметров в натуре.

Аналогично строятся линии тока. При этом следует использовать свойство ортогональности линий тока и линий равных потенциалов и решать обратную задачу, т.е. задание граничных условий необходимо поменять местами, а именно: проницаемые границы сделать непроницаемыми (снять шины-зажимы) и непроницаемые – проницаемыми (поставить шины-зажимы). В остальном методика построений линий тока ничем не отличается от методики построения линий равных потенциалов.

4.1.2. Основы теории аналоговых вычислительных машин

Рассмотрим основные положения теории вычислительных аналоговых машин на примере моделирования процессов, которые могут быть описаны линейными уравнениями в частных производных второго порядка.

Это уравнение эллиптического типа: неоднородное (уравнение Пуассона)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = F(x, y, z),$$

однородное (уравнение Лапласа)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0.$$

Эти уравнения характеризуют установившиеся стационарные процессы фильтрации, диффузии, увлажнения, водопонижения и т.д.

К этому типу уравнений относятся также и уравнения параболического типа (уравнение теплопроводности)

$$\nabla^2 \varphi + A \partial \varphi / \partial t = F(x, y, z).$$

Это уравнение характеризует неустановившийся процесс теплообмена. При $F(x, y, z) = 0$ имеем однородное уравнение параболического типа (уравнение Фурье)

$$\nabla^2 \varphi + A \partial \varphi / \partial t = 0.$$

Наконец, к данному типу уравнений относятся уравнения гиперболического типа:

$$\nabla^2 \varphi - \bar{K} \hat{a}^2 \varphi / \hat{a} t^2 = F(x, y, z).$$

Это уравнение тоже характеризует неустановившиеся процессы и, в частности, волновые колебательные процессы.

В этих уравнениях φ – искомая величина (функция координат x, y, z и времени t), F, f_i, A, \bar{K} – известные функции координат. Для решения этих уравнений необходимо дополнительно задать начальные и граничные

условия. Если независимой переменной является время, то задаются только начальные условия (задача Коши). Если же независимыми являются координаты, то задача называется краевой и решается для определенной области, задаваясь тремя типами граничных условий.

1. На границе области задана сама искомая функция (задача Дирихле)

$$\varphi|_r = \varphi_s,$$

где s – точка на границе.

2. На границе задана нормальная производная искомая функции (задача Неймана)

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_r = f(s).$$

3. На границе задана линейная комбинация первых двух условий (смешанная задача).

Для нестационарных краевых задач задаются и граничные и начальные условия.

Как известно, для решения этих задач используют различные приближенные методы: метод конечных разностей, метод характеристик, интегральный метод, вариационный метод (метод Монте-Карло) и др. Большое распространение получил метод конечных разностей или метод сеток. Сущность его заключается в замене производной ее приближенным значением, выраженным через разности значений функции в соседних точках.

Для примера рассмотрим нахождение второй производной в некоторой точке 0 для функции φ в плоскости x, y в точках $1, 2, 3$ и 4 (рис. 34, а).

Первые производные для точек I, II, III, IV приближенно могут быть выражены в виде

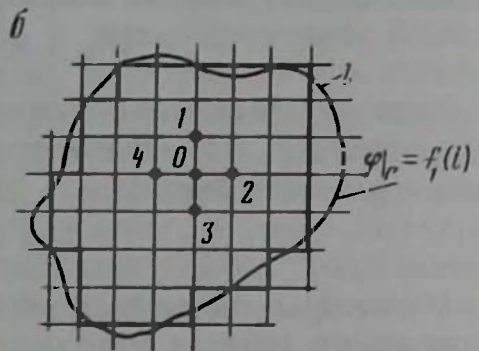
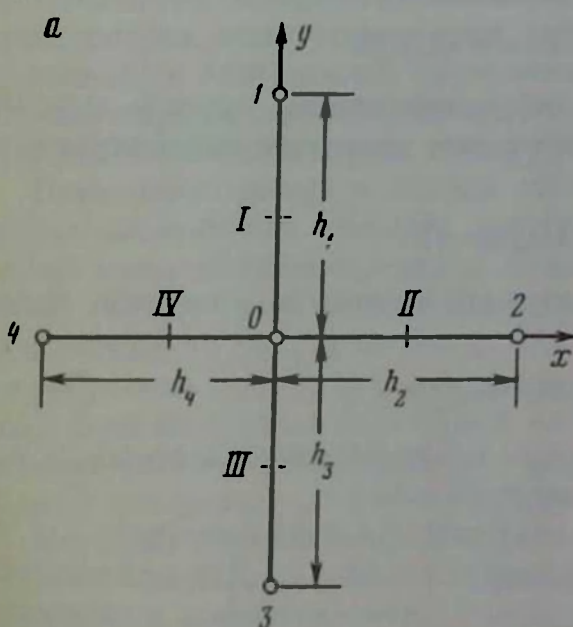


Рис. 34. Схема вывода второй производной в узловой точке 0 по значениям функций в соседних точках (а); разбивка области сеткой (б) (l – граница области S ; $1, 2, 3, 4$ – узловые точки)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \sim \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \sim \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \sim \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_3}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \sim \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_4}. \end{aligned}$$

Отсюда вторая производная в точке 0 будет:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_0)/h_2 + (\varphi_4 - \varphi_0)/h_4}{(h_2 + h_4)/2} + \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)/h_1 + (\varphi_3 - \varphi_0)/h_3}{(h_1 + h_3)/2} \quad (4.5)$$

или, если $h_1 = h_3 = h_y$, $h_2 = h_4 = h_x$,

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4)/h_x^2 + (\varphi_1 + 2\varphi_0 + \varphi_3)/h_y^2. \quad (4.6)$$

Из формул (4.5) и (4.6) видно, что точность решения задач по формуле (4.5) имеет порядок h , а по формуле (4.6) — порядок h^2 . Следовательно, целесообразно величину шага брать равной.

В случае краевой задачи $\nabla^2 \varphi = F(x, y, z)$ для некоторой области S надо задать функцию $\varphi(S)$ или $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(S)$ на контуре l .

Рассмотрим применение разностного метода для решения краевых задач.

В этом случае область S разбивают сетью взаимно перпендикулярных линий (рис. 34, б).

Точка пересечения двух линий называется узловой и для любой из точек (внутренних точек) можно записать разностное уравнение (4.5), которое после преобразования запишется для однородной среды так:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2h_x} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{2h_x} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2h_y} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{2h_y} = 0$$

$$\frac{h_1 + h_3}{2}$$

$$\frac{h_2 + h_4}{2}$$

$$\frac{h_2 + h_4}{2}$$

$$+ \frac{h_2 + h_4}{2h_3} (\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y). \quad (4.7)$$

Для неоднородной среды уравнение (4.7) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2 (\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4 (\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1 (\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3 (\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — известные функции координат в точках 1; 2; 3; 4, характеризующие неоднородность среды.

Такие уравнения (4.7) и (4.8) можно составить для каждой внутренней узловой точки. Следовательно, число неизвестных в этих уравнениях будет равно числу узловых внутренних точек, так как значения функций на границе известны.

Полученную таким образом систему уравнений решают методом последовательных приближений. Это требует больших вычислительных работ. Поэтому применение для этого счетно-решающих и моделирующих машин весьма целесообразно.

В основе метода математического моделирования лежит возможность замены метода сеток электрическими сетками, в которых электрические процессы описываются уравнениями, подобными конечно-разностным уравнениям (4.6) и (4.8). Иначе говоря, электрические сеточные машины моделируют конечно-разностные уравнения, к которым сводятся рассмотренные выше дифференциальные уравнения. В этом случае электрические элементы рассматриваются как некоторые аналоги физических величин. В настоящее время используются две системы электро-механических аналогий.

Первая система исходит из аналогии скорости течения в механической системе электрическому току в проводнике и сводится к следующей аналогии между механическими и электрическими величинами

$$p \sim U, \quad v \sim I, \quad H \propto R, \quad m \propto L, \quad R \propto 1/C. \quad (4.9)$$

Вторая система исходит из аналогии между уравнениями скоростей в механической системе и балансом напряжений в электрическом контуре и сводится к аналогиям вида

$$p \propto I, \quad v \propto U; \quad m \propto C; \quad H \propto 1/R; \quad R \propto L. \quad (4.10)$$

В аналогиях (4.9) и (4.10) p, v, H, m, R — соответственно давление, скорость смещения, механическое сопротивление, масса и жесткость, а U, I, R, L, C — соответственно электрическое напряжение, ток, сопротивление, самоиндукция и емкость.

4.1.3. Счетно-решающие устройства

Счетно-решающие устройства моделируют по операциям математические уравнения, подлежащие решению, и состоят из отдельных операционных блоков, каждый из которых выполняет какую-либо одну математическую операцию: сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование, преобразование функций и т. д., иначе говоря, эти операционные блоки структурной АВМ изоморфозны математическим операциям. В этом случае в соответствии с видом решаемого уравнения из операционных блоков создается схема АВМ, в которой почленно отображаются математические операции решаемого уравнения. В качестве примера рассмотрим схему структурной АВМ, содержащей два интегратора (рис. 35). Каждый интегратор S_1 и S_2 , поступающий на вход, переменную физическую величину интегрирует по независимой переменной (в данном случае по времени) и на выходе дает интеграл от входной физической величины по времени. Задание начального значения выходной переменной осуществляется заранее до начала интегрирования (это показано на схеме интегратора входящей стрелкой с соответствующей надписью). Выходная переменная интегратора 2 — $y(t)$ воспроизводит решение дифференциального уравнения $\frac{d^2 y}{dt^2} = y$. Действительно, если на выходе интегратора S_2 имеем $y(t)$, то на его вход должна поступать производная $\frac{dy}{dt}$, являющаяся в свою очередь выходной величиной интегратора S_1 . Следовательно, на выходе интегратора S_1 должна поступать производная $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) = \frac{d^2 y}{dt^2}$, которая в соответствии со схемой равна самой функции, т. е. выполняется уравнение $\frac{d^2 y}{dt^2} = y$.

Отметим, что при решении на структурной АВМ математических задач, описывающих поведение некоторого физического явления (величины), следует выбирать наиболее простую схему соединения операционных блоков для более экономного представления поведения исходной физической системы в целом. Однако при этом в большинстве случаев возможна потеря отражения непосредственного поведения каждого или некоторых элементов этой системы.

Обычно решению задач на структурной АВМ предшествует процесс анализа исходных математических данных задачи и выявления способа соединения отдельных операционных блоков АВМ, т. е. программирования АВМ. При этом необходимо решить две основные проблемы:

организация совокупности блоков АВМ в вычислительную схему с установлением связей между блоками для передачи результатов вычислений в блоках с выхода одного блока на вход другого;

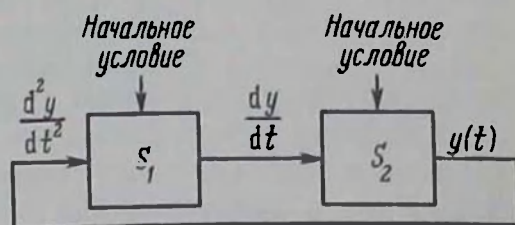


Рис. 35. Схема структурной аналоговой вычислительной машины (АВМ) для решения дифференциального уравнения $\frac{d^2 y}{dt^2} = y$: S_1 — первый интегратор; S_2 — второй интегратор, $y(t)$ — искомая функция по времени t

представление исходных математических переменных физическими величинами, путем выбора соответствующих масштабов.

Результатом программирования является структурная схема, на которой условными обозначениями показывают используемые операционные блоки, а в виде линий изображены связи между блоками.

Решение задачи в результате моделирования на АВМ сводится к измерению значений физических величин либо измерительными приборами, либо регистрацией их на специальной осциллоскопической аппаратуре, что сходно с получением данных при экспериментах.

Наиболее удобные и надежные АВМ – электронные, обладающие большей быстротой решения и хорошо развитой электронной аппаратурой измерения, регистрации и визуального наблюдения. В этом случае электрическое напряжение постоянного тока является физической величиной, представляющей в некотором масштабе математические переменные решаемой задачи. В связи с этим электрическое напряжение в АВМ называют еще и машинной переменной.

Связи между блоками в электронных АВМ осуществляются с помощью электрических проводников, по которым передается электрическое напряжение с выходов одних блоков на входы других.

4.2. Конструирование электрических сеточных машин и решающих устройств

4.2.1. Электрические сеточные машины

Рассмотрим конструирование электрических сеточных машин для моделирования стационарных и нестационарных физических полей, описываемых уравнениями эллиптического и гиперболического типов.

В общем случае сеточные уравнения для стационарных процессов имеют вид, представленный зависимостью (4.8). Для моделирования этого уравнения составляют электрические схемы, представляющие собой такие же сетки, на которые была разбита исследуемая область для конечно-разностного метода (рис. 36).

Для каждой узловой точки электрической сетки можно записать одно из уравнений Кирхгофа

$$\sum_{i=1}^n I_i - I_0 = 0, \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (4.12)$$

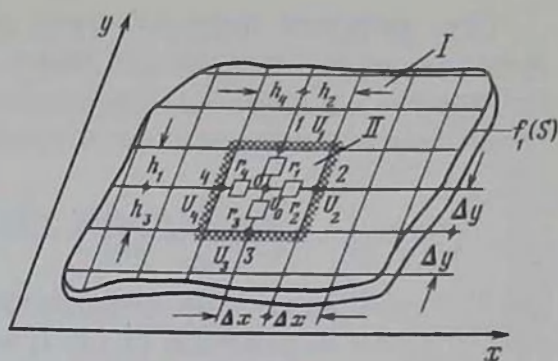
$$\text{или } (U_1 - U_0)/r_1 + (\bar{U}_2 - U_0)/r_2 + (U_3 - U_0)/r_3 + (U_4 - \bar{U}_0)/r_4 = 0, \quad (4.13)$$

$$(U_1 - U_0)/r_1 + (U_2 - U_0)/r_2 + (U_3 - \bar{U}_0)/r_3 + (U_4 - U_0)/r_4 - (U - \bar{U}_0)/R = 0, \quad (4.14)$$

где \bar{U}_i – потенциал в узловых точках электрического поля; r_i – активные сопротивления между узловыми точками; I_i – ток; U – напряжение, подаваемое в узловую точку через активное сопротивление R , I_0 – суммарный ток в узловой точке.

Рис. 36. Схема замены сплошной среды на электрические цепи:

I – сплошная среда; *II* – электрические цепи; 0; 1; 2; 3; 4 – узловые точки



Полагая, что напряжение U пропорционально искомой функции φ , т. е.

$$U_i = k_1 \varphi_i \quad (4.15)$$

(где k_1 – коэффициент пропорциональности), можно записать уравнение (4.13) в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{U_i - U_0}{r_i} = k_1 \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i - \varphi_0}{\tilde{r}_i}.$$

Уравнения (4.8) и (4.14) аналогичны и могут быть взаимозаменяемы, если r_i будут пропорциональны коэффициентам при конечных разностях, т. е.

$$r_i = k_2 \tilde{r}_i, \quad (4.16)$$

$$\text{где } \tilde{r}_1 = \frac{2h_1}{f_1(h_2 + h_4)}; \quad \tilde{r}_2 = \frac{2h_2}{f_2(h_1 + h_3)}; \quad \tilde{r}_3 = \frac{2h_3}{2f_3(h_2 + h_4)}; \\ \tilde{r}_4 = \frac{2h_4}{f_4(h_1 + h_3)}; \quad (4.17)$$

k_2 – коэффициент пропорциональности.

Таким образом, если между узловыми точками электрической сетки включить сопротивления r_i , рассчитанные по формулам (4.16)–(4.17), а на граничных узловых точках задать напряжения, пропорциональные значениям искомой функции на границе, то для определения функции φ_i необходимо замерить напряжения во внутренних узловых точках и их значения пересчитать по формуле (4.15).

Обычно при выборе коэффициентов пропорциональности k_1 и k_2 исходят из практических возможностей электрических машин. Так, принимая значения напряжения, подаваемого на машину, и максимальное сопротивление машины за 100%, значения k_1 и k_2 определяются из условия, чтобы максимальные значения напряжений в узловых точках и на границе, а также и максимальные рассчитанные сопротивления были меньше допустимых, т. е.

$$k_1 \leq 100/U_{\max}, \quad k_2 \leq 100/r_{\max}. \quad (4.18)$$

При решении неоднородного дифференциального уравнения надо иметь в виду, что правая часть уравнения (4.8) аппроксимируется согласно (4.12) током I_0 . Необходимо задать этот ток так, чтобы он был пропорционален правой части уравнения (4.8), т. е.

$$I_0 = k_3 \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y),$$

где k_3 — коэффициент пропорциональности.

Согласно выражению (4.13) $I_0 = (U - U_0)/R$. При $U \gg U_0$

$$I_0 \approx U/R,$$

где U — напряжение, подаваемое в узловую точку через активное сопротивление R .

Следовательно, при очень малых значениях напряжений на сетке ток можно считать примерно пропорциональным напряжению, поданному на сопротивление R . При этом, чтобы $|U| \gg |U_0|$, необходимо сопротивление R брать гораздо большим, чем сопротивление между узловыми точками, т. е. $|\bar{K}| \gg |r_i|$.

Коэффициенты пропорциональности k_1, k_2, k_3 связаны друг с другом зависимостью

$$k_1/k_2 = k_3 \quad \text{или} \quad k_1/(k_2 k_3) = 1. \quad (4.19)$$

Следовательно, значения коэффициентов k_1 и k_2 определяются из условия (4.18), а коэффициенты k_3 — из условия (4.19). Значение R берется из паспорта машины.

Таким образом, при решении неоднородной задачи необходимо составить электрическую сетку из сопротивлений, определяемых условиями (4.16) и (4.17), и в каждую узловую точку через сопротивление R подать напряжение, пропорциональное правой части уравнения (4.8) в данной точке. Кроме того, необходимо задать граничные условия, т. е. подать на граничные точки сетки напряжения, пропорциональные значениям переменной φ на соответствующих точках границы изучаемой области (рис. 37).

При составлении электрических сеток для нестационарных полей исследуемую область также разбивают сеткой и дифференциальное уравнение заменяют системой сеточных уравнений, составляемых для каждой узловой точки.

Рассмотрим математическое моделирование уравнений параболического типа, например, найдем решение уравнения Фурье в области S , т. е. уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = A(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.20)$$

при заданных краевых условиях:

— начальных условиях

$$\varphi(x, y, 0) = f_1(x, y);$$

Рис. 37. Схема задания граничных условий:

1 – точка за пределами исследуемой области; 2 – точка внутри области

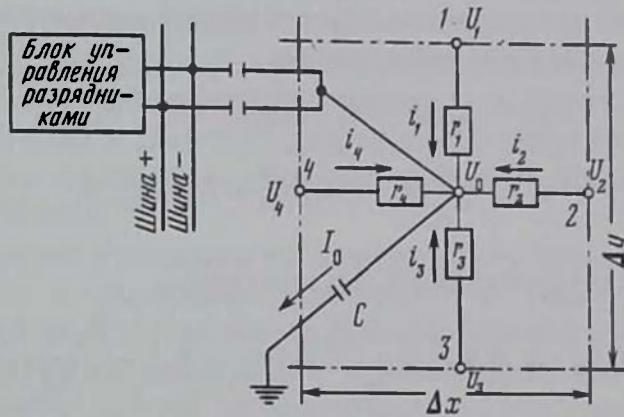
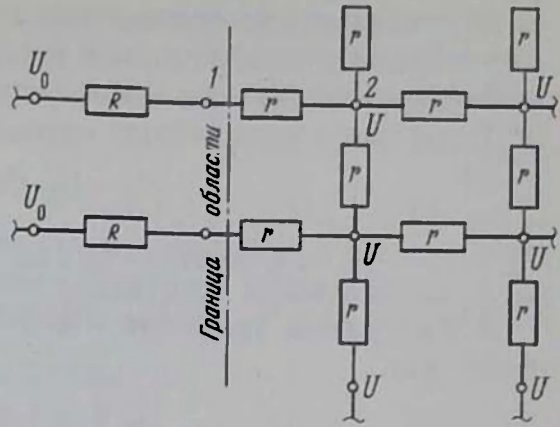


Рис. 38. Схема аппроксимации нестационарных физических полей

– граничных условий

$$\varphi(0, t) = f_2(t); \quad \varphi(x_s, y_s, t) = f_3(l, t),$$

где l – точка границы области.

Для уравнения (4.20) система сеточных алгебраических уравнений будет

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4) A(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Левая часть равенства (4.21) аппроксимируется так же, как и при решении стационарных задач. Правую часть оставляют в дифференциальном виде. Для ее аппроксимации надо в каждую узловую точку подать ток, пропорциональный первой производной искомой функции во времени. Для этого к узловой точке надо подключить не сопротивление, а конденсатор (рис. 38).

При этом модель должна работать на постоянном токе (при переменном токе конденсатор будет не дифференцирующим элементом, а сопротивлением, сдвигающим лишь фазу).

Тогда через конденсатор пройдет ток

$$I = CdU/d\tau,$$

где C – емкость конденсатора; U – напряжение на обкладках конденсатора; τ – длительность протекания тока.

В этом случае уравнение Кирхгофа для каждой узловой точки будет иметь вид:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = I_0$$

$$\text{или } (U_1 - U_0)/r_1 + (U_2 - U_0)/r_2 + (U_3 - U_0)/r_3 + (U_4 - U_0)/r_4 = CdU/d\tau.$$

Введя условия пропорциональности между параметрами моделируемого процесса и электрического поля

$$U_i = k_1 \varphi_i, \quad r_i = k_2 \bar{r}_i, \quad \tau = k_4 t;$$

$$C = k_3 \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) A(x, y)$$

и подставив их в уравнения (4.21), получим

$$\left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left[\frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) \right] = \frac{k_1 k_3}{k_4} \left[\frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) A(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]. \quad (4.22)$$

Для взаимозаменяемости уравнений (4.21) и (4.22) необходимо, чтобы выражения для коэффициентов правой и левой части выражения (4.22) были бы равны друг другу, т. е.

$$k_1/k_2 = k_1 k_3 / k_4 \quad \text{или} \quad k_2 k_3 / k_4 = 1. \quad (4.23)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 определяют из уравнений (4.15) и (4.16), коэффициент k_3 – из условия $k_3 \leq C_{\max}/b$, где C_{\max} – максимальная емкость конденсаторов, применяемых в электрической машине;

$b = \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) A(x, y)$. Коэффициент k_4 определяют из условия (4.23).

Для задания граничных условий при решении первой краевой задачи служит специальный прибор – делитель напряжения, позволяющий получить заданную, пропорциональную искомую функцию, часть напряжения, принятого условно за единицу. В этом случае заданные граничные значения функции пересчитывают в проценты и с делителя, тоже отградуированного в процентах, нужные напряжения подают в точки контура.

При задании граничных условий в виде нормальных производных

искомой функции их также представляют в конечно-разностном виде, т. е. нормальная производная заменяется конечной разностью значений функции в двух соседних, прилегающих к границе точках (см. рис. 36).

$$\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{h} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (4.24)$$

Согласно схеме (см. рис. 37), ток между точками 1 и 2

$$I_{1;2} = (U_1 - U_2)/r = (U_0 - U_1)/R.$$

Взяв $R \gg r$ и пренебрегая U_1/R , получим:

$$I_{1;2} = U_0/R.$$

В результате задавая U_0 пропорционально правой части соотношения (4.24), получим необходимую зависимость между U_1 и U_2 , а значит, и между φ_n и φ_{n-1} соответственно.

Задание начальных условий как самой функции, так и нормальной производной на соответствующей границе в момент времени $t = 0$ осуществляется также с делителя напряжения в каждую точку области через реле, которое в момент $t = 0$ подает заданные напряжения на сетку и тут же их отключает.

Решение сеточных уравнений на электрических аналоговых машинах в итоге сводится к измерению напряжений и токов в исследуемой модели. При этом используются следующие методы измерения:

непосредственное измерение с помощью измерительного прибора — точность метода ограничивается точностью прибора (не более 2–3 знаков), сам прибор для исключения искажений должен быть высокоомным;

замещения — последовательное сравнение обычно на осциллографе с некоторой известной величиной (прост, нагляден и хорошая точность);

нулевой (компенсационный) — сходен с методом замещений, но при сравнении используется нуль-индикатор, фиксирующий нулевую разность между известной и искомой величинами (этот метод является наиболее распространенным);

дифференциальный (разностной) — измеряется не сама искомая величина, а разность между ней и искомой величиной всеми выше перечисленными методами (при этом наиболее часто применяется компенсационный метод).

Для решения описанных выше дифференциальных уравнений в частных производных типа Лапласа, Пуассона и Фурье применяют математические машины — аналоги специального типа. Наиболее распространены результатные сеточные электроиндикаторы ЭИ-12 и универсальные сеточные модели УСМ-1.

4.2.2. Структурные аналоговые вычислительные машины

Кроме моделирования на электрических сетках, где работа моделируемого устройства основана на прямом соответствии конструкции конечно-разностного метода конструкции электрической сетки (см.

рис. 36), т.е. на прямом соответствии между элементами прототипа и электрическими элементами модели (сопротивлениями, емкостями и т.д.), возможно моделирование на электронных АВМ, в которых для получения решения операционные блоки выполняют математические действия. Они предназначены для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, они могут выполнять такие математические действия, как сложение, вычитание, умножение, интегрирование, а также образование производных функций [14].

Структурные аналоговые вычислительные машины состоят из следующих основных частей: операционных блоков, предназначенных для выполнения математических операций; полей набора (коммутации), служащих для соединения различных операционных блоков и образования структурных схем решения математической задачи; устройства управления, служащие для обеспечения взаимодействия во времени всех частей АВМ, блоков установления работы АВМ на одном из четырех режимов (подготовки, решения задачи, автоматического прерывания для фиксации промежуточных значений и изменения коммутации между блоками) и возврата машины в исходное состояние; измерительной и регистрирующей аппаратуры (от простых стрелочных измерительных приборов до различных осциллографов с записью изменения значений переменных величин во времени); источников питания для преобразования напряжений промышленной частоты в номиналы электрического напряжения, необходимые для работы всех частей машины АВМ и имеющие высокую стабильность, так как изменение этих номиналов напряжения при решении задач на АВМ представляет собой изменение машинной переменной.

Наиболее важной частью АВМ являются операционные блоки, которые можно разделить на следующие основные блоки: суммирования (сумматоры), интегрирования (интеграторы) и дифференцирования, перемножения, нелинейных функций (функциональные преобразователи) и прочие вспомогательные блоки (блоки запаздывания, программного управления).

Составным элементом большинства операционных блоков является операционный усилитель (ОУ), схематически изображенный на рис. 39, а. На этом рисунке $e_{\text{вх}}$ — входное напряжение, $U_{\text{вых}}$ — выходное напряжение, k — коэффициент усиления ОУ по напряжению. Операционный усилитель обладает рядом свойств, которые следует иметь в виду при работе на АВМ.

Коэффициент усиления ОУ весьма велик — обычно для высококачественных АВМ $k \geq 4 \cdot 10^4 \div 10^8$.

Входное и выходное напряжения ОУ имеют разные знаки (инверсны) за счет нечетного числа каскадов (обычно трех).

Область изменения выходного напряжения должна находиться в пределах E_{max} АВМ, т.е. $-E_{\text{max}} \leq U_{\text{вых}} \leq E_{\text{max}}$, иначе в ОУ возникают нелинейные искажения. Обычно в ламповых АВМ $E_{\text{max}} = 100$ В, в полупроводниковых АВМ $E_{\text{max}} = 10 \div 50$ В.

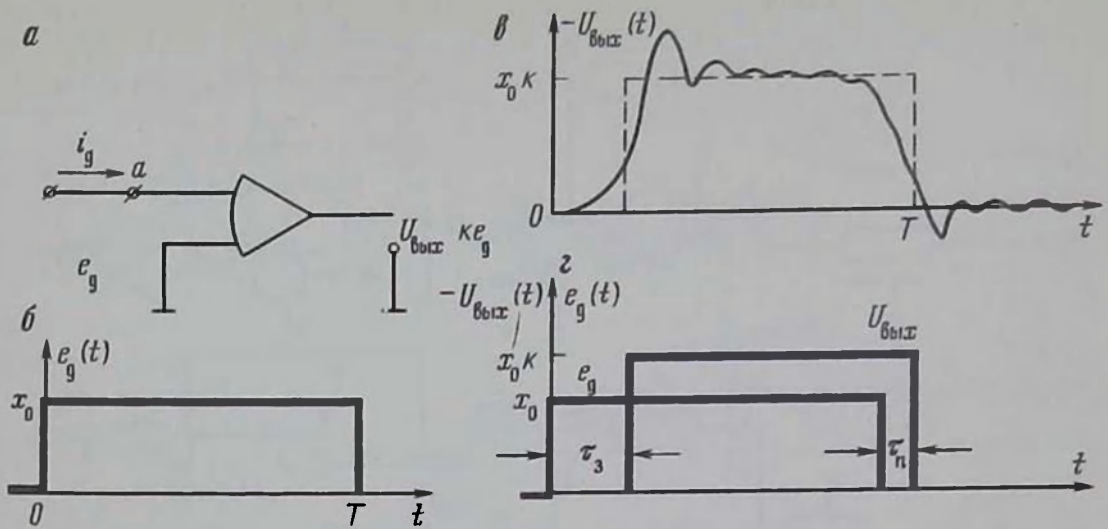


Рис. 39. Схемы операционного усилителя (ОУ) и его характеристик:
a – электрическая схема ОУ; *б, в* – соответственно схема подаваемого прямоугольного на ОУ сигнала и выходного из ОУ сигнала; *г* – схема запаздывания τ , и последствия τ_n входного сигнала на ОУ

Вход ОУ (точка *a*) потенциально заземлен, т. е. напряжение на входе ОУ очень мало и совпадает с потенциалом общей точки схемы ОУ, называемой «земля». Действительно, $U_{\text{вых}} = -e_g k$, отсюда $e_g = -U_{\text{вых}}/k$, и если $U_{\text{вых}} = 100 \text{ В}$, а $k = 4 \cdot 10^4$, то напряжение на входе усилителя $e_g = 2,5 \text{ мВ}$.

Входной ток в ОУ i_g практически отсутствует, так как $i_g = e_g / \bar{R}_{\text{вх}}$, где e_g – мало, а $\bar{R}_{\text{вх}}$ для ОУ очень велико ($R_{\text{вх}}$ определяется изоляцией между входными контактами ОУ).

Операционный усилитель обладает некоторой инерционностью (см. рис. 39, *б, в*), т. е. запаздыванием, и последствием, схематически изображенным на рис. 39, *г*. Причем инерционность тем больше, чем больше скорость изменения входного напряжения e_g .

Большинство ОУ обладает напряжением дрейфа нуля за счет изменения эмиссионных способностей ламп, изменения номиналов источников питания, колебания влажности и температуры окружающей среды. Поэтому при решении задач на АВМ периодически приходится проверять отклонение нулей усилителей и восстанавливать их с помощью специальных устройств.

Блок суммирования представлен на рис. 40, *a*. Он осуществляет суммирование входных напряжений с одновременным их умножением на некоторые постоянные коэффициенты. Действительно, в этой схеме представлено два входа и один выход. Обозначим входные напряжения через U_1 и U_2 , которые через резисторы \bar{R}_1 и R_2 поступают на вход ОУ. Операционный усилитель охвачен отрицательной обратной связью с помощью резистора $\bar{R}_{\text{обс}}$, которая может быть как отрицательной (уменьшающей входную величину), так и положительной (увеличивающей ее). В рассматриваемой схеме эта связь отрицательна из-за инверти-

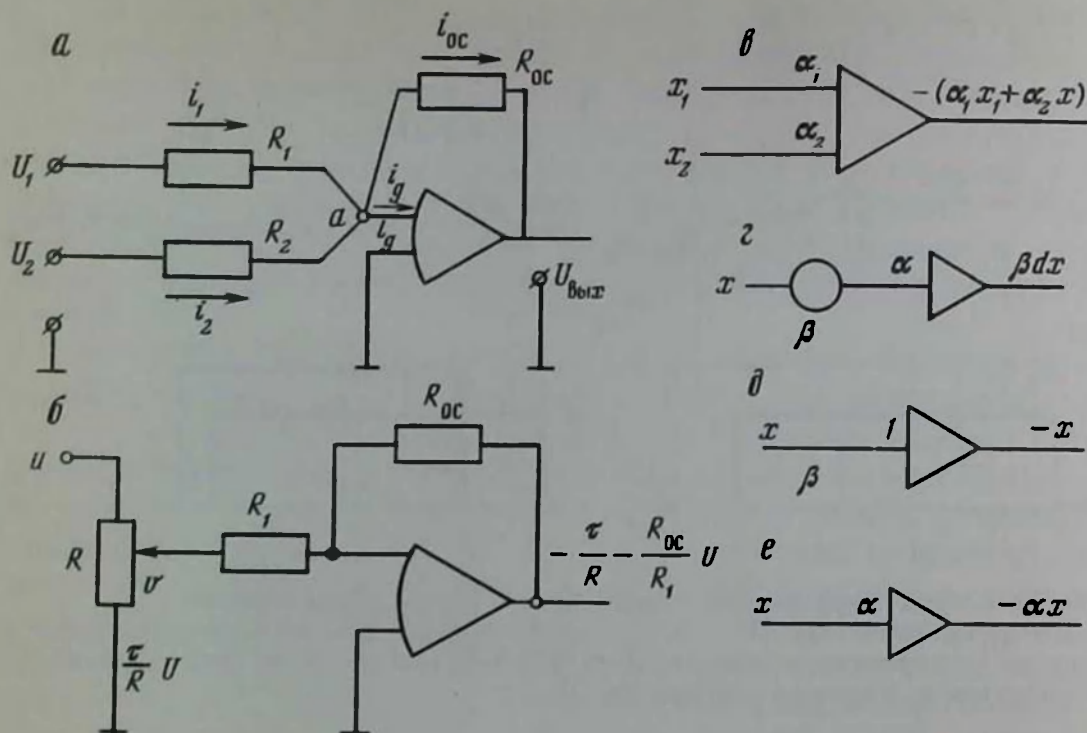


Рис. 40. Простейшие электрические схемы операционных блоков АВМ: а – блок суммирования входных напряжений; б – блок суммирования с переменным коэффициентом передачи с потенциометром R ; в – структурное изображение сумматора с коэффициентами передачи α_1 и α_2 , указываемые у входа в сумматор; г – структурная схема сумматора с изменяющимся коэффициентом передачи β ; д – инвертер, изменяющий лишь знак входной величины; е – блок изменения входной величины на постоянный коэффициент передачи с изменением знака на обратный

рующего свойства ОУ. Согласно закону Кирхгофа для узла a имеем уравнение токов

$$i_{o.c} + i_g = i_1 + i_2, \quad (4.25)$$

где $i_{o.c}$ – ток, оттекающий от узла a через регистр $R_{o.c}$; $i_g = 0$ – ток, оттекающий от узла a на вход ОУ; i_1, i_2 – токи, протекающие соответственно через резисторы R_1 и R_2 .

Уравнение (4.25) по закону Ома пишется в виде

$$(e_g - U_{\text{вых}})/R_{o.c} = (U_1 - e_g)/R_1 + (U_2 - e_g)/R_2.$$

Учитывая, что напряжение e_g на входе усилителя ОУ, $e_g \approx 0$, получаем

$$U_{\text{вых}} = \frac{R_{o.c}}{R_1} U_1 - \frac{R_{o.c}}{R_2} U_2 = -(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2),$$

где $\alpha_1 = R_{o.c}/R_1$ и $\alpha_2 = R_{o.c}/R_2$ – коэффициенты передачи по входам соответственно 1 и 2. Они безразмерны и выражаются в виде отношения сопротивлений. Для получения переменного коэффициента передачи по входу сумматора на этот вход устанавливают потенциометр (рис. 40, б) с

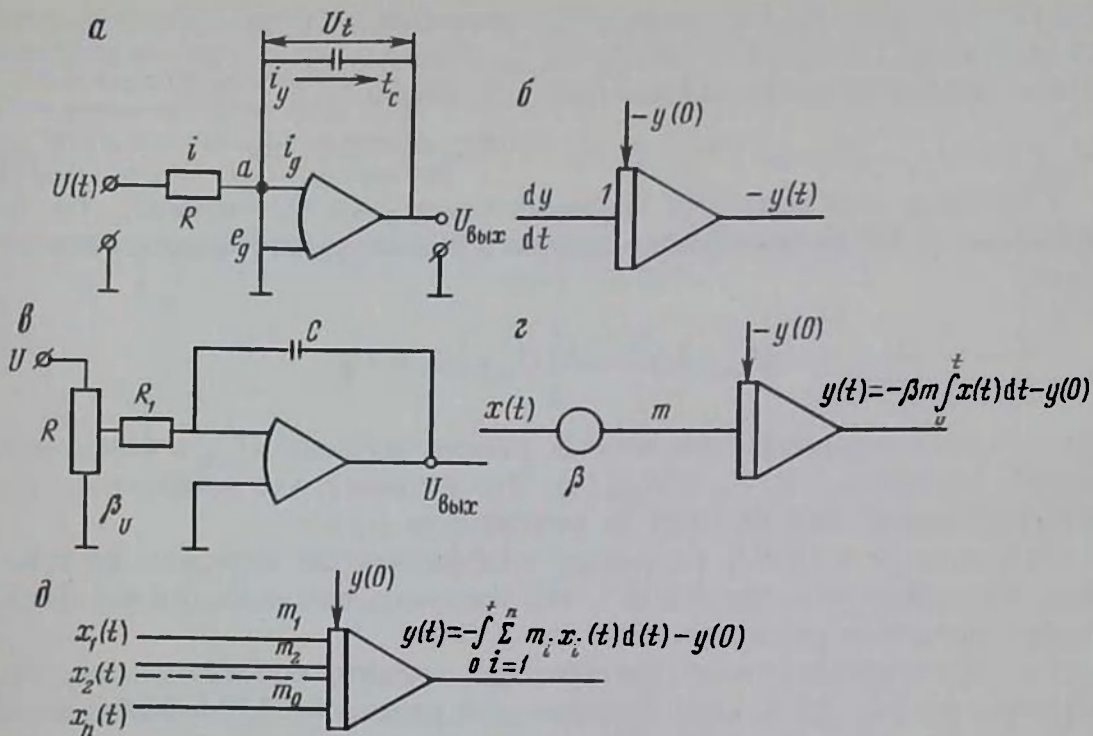


Рис. 41. Электрические и структурные схемы интегрирующих операционных блоков: а, б – соответственно электрическая и структурная схемы интегрирования одной переменной по времени; в, г – соответственно электрическая и структурная схемы интегратора с переменным коэффициентом передачи или переменной продолжительностью интегрирования; д – структурная схема интегросумматора

полным сопротивлением R и плечом сопротивления r , так что на выходе усилителя напряжение

$$U_{\text{вых}} = -rR_{o.c}U_1/(RR_1) = -\beta\alpha U_1,$$

где $\beta = r/R$ – коэффициент передачи потенциометра, $0 \leq \beta \leq 1$.

В этом случае общий коэффициент передачи будет меняться в интервале $0 \leq \alpha\beta \leq \alpha$.

В структурных схемах сумматор изображают в виде треугольников (рис. 40, в) с указанием коэффициента перехода около каждого входа, а потенциометр – в виде кружка, около которого проставляется величина коэффициента передачи β (рис. 40, г).

При одном входе и $\alpha = 1$ сумматор называется инвертором, который служит для сведения операции вычитания к операции сложения. При одном входе и $\alpha \neq 1$ сумматор называется масштабным усилителем ($U_{\text{вых}} = -\alpha U_{\text{вх}}$).

Блок интегрирования (интегратор) изображен на рис. 41, а, он состоит из ОУ, охваченного отрицательной обратной связью через конденсатор емкостью C , с входным резистором R . В этом случае закон Кирхгофа для узловой точки a запишется в виде

$$(U_{\text{вх}} - e_g)/R = C \frac{d}{dt}(e_g - U_{\text{вых}}),$$

так как $i = dQ/dt$ (где \bar{Q} — количество электричества на обкладках конденсатора, $Q = C\bar{U}_c$), а $\bar{U}_c = e_g - U_{\text{вых}}$. Полагая $e_g = -\bar{U}_{\text{вых}}/k = 0$, получим дифференциальное уравнение относительно $U_{\text{вых}}(t)$

$$dU_{\text{вых}}(t)/dt = -U_{\text{вых}}(t)/(RC) = -mU_{\text{вых}}(t). \quad (4.26)$$

Учитывая, что выходная величина схемы рис. 41, а есть $\bar{U}_{\text{вых}}(t)$, то уравнение (4.26) целесообразно записать в эквивалентной интегральной форме

$$U_{\text{вых}}(t) = -m \int_0^t U_{\text{вых}}(t) dt + U_0,$$

где U_0 — постоянная интегрирования, равная значению $\bar{U}_{\text{вых}}$ в начальный момент времени, т. е. $U_0 = U_{\text{вых}}(0)$. Это означает, что конденсатор до интегрирования был заряжен до напряжения U_0 .

Величину $m = 1/(RC)$ называют коэффициентом передачи интегратора, имеющим размерность c^{-1} , что указывает на связь этой величины с длительностью интегрирования.

На структурных схемах интеграторы принято обозначать так, как показано на рис. 41, б. При практической работе на АВМ необходимо умение задавать коэффициенты передачи интеграторов, начальные условия интегрирования и знать особенности работы интегратора в различных режимах; режим установки коэффициентов, режим задания начальных условий, режим интегрирования и режим функции решения.

Отметим, что так же, как и на сумматорах, на входе интегратора можно подключить потенциометры, позволяющие устанавливать любые значения коэффициентов передачи βm , где $\beta = r/R$. На рис. 41, в, г приведены электрическая и структурная схема интегратора с потенциометром. Можно также использовать блок интегросумматор, когда на входе интегратора подключается несколько напряжений (рис. 41, д), например n входов.

В этом случае выходное напряжение

$$U_{\text{вых}} = - \sum_{i=1}^n m_i \int_0^t U_i(t) dt + U_0.$$

Блок дифференцирования представлен на рис. 42, а. В соответствии с изображенной электрической схемой уравнение Кирхгофа для узла а будет $i_c = i_R$, которое через напряжения выразится в виде

$$C \frac{d}{dt} (U_{\text{вых}} - e_g) = (e_g - U_{\text{вых}})/R,$$

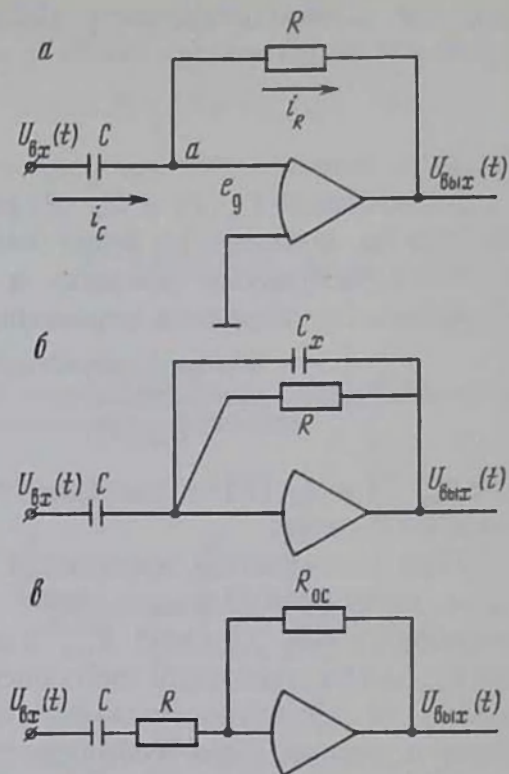
а с учетом $e_g = \bar{U}_{\text{вых}}/k = 0$ имеем

$$U_{\text{вых}}(t) = -RC \frac{dU_{\text{вых}}}{dt}.$$

Однако рассмотренная схема редко применяется в АВМ, так как она

Рис. 42. Электрические схемы блоков дифференцирования:

a – помехоустойчивая схема дифференцирования переменной $u(t)$; *б, в* – комбинированные схемы дифференцирования блоков со сглаживанием помех



усиливает помехи. Поэтому на АВМ операцию дифференцирования либо вообще не используют, либо применяют комбинированные дифференциальные блоки, которые помимо дифференцирования одновременно выполняют еще и сглаживание. На рис. 42, *б, в* приведены две такие схемы. В первый эффект сглаживания достигается за счет введения дополнительного конденсатора в обратной связи, во второй – за счет введения дополнительного входного резистора.

При решении на АВМ ряда задач из области автоматического управления и регулирования, теории устойчивости, волновых процессов и др. встречается необходимость воспроизведения с помощью решающего усилителя разнообразных и сложных передаточных функций [13]. Рассмотрим это на примере линейного дифференциального уравнения между переменными $x(t)$ и $y(t)$ вида

$$d^2x/dt^2 + 2ndx/dt + \omega^2x = ay + bdy/dt, \quad (4.27)$$

которое в операторной форме записи (при $P = d/dt$) запишется в виде

$$P^2x + 2nPx + \omega^2x = ay + bPy \quad (4.28)$$

$$\text{или } (P^2 + 2nP + \omega^2)x(t) = (a + bP)y(t). \quad (4.29)$$

Если каждое из слагаемых (4.28) преобразовать по Лапласу, то можно получить уравнение для изображений переменных x и y в комплексной области, из которого легко определяется выражение для передаточной функции

$$x(P)/y(P) = (a + bP)/(P^2 + 2nP + \omega^2). \quad (4.30)$$

Эта функция по своему виду совпадает с символической операторной

формой записи исходного дифференциального уравнения (4.27), получаемой из равенства (4.29), т.е.

$$x(t)/y(t) = (a + bP)/(P^2 + 2nP + \omega^2).$$

Отсюда имеем, если на решающем усилителе с помощью подбора сопротивлений $Z_{\text{вх}}(P)$ и $Z_{\text{о.с.}}(P)$ реализовать выражение (4.30), то переменная на выходе $x(t)$ будет являться решением уравнения (4.28) при нулевых начальных условиях и заданном входном воздействии $y(t)$. Коэффициент передачи решающего усилителя

$$\frac{U_{\text{вых}}(P)}{U_{\text{вх}}(P)} = -\frac{Z_{\text{о.с.}}(P)}{Z_{\text{вх}}(P)} = -\frac{y_{\text{вх}}(P)}{y_{\text{о.с.}}(P)}, \quad (4.31)$$

где $y_{\text{вх}}(P)$ и $y_{\text{о.с.}}(P)$ – проводимости соответственно входной цепи и цепи обратной связи.

При составлении выражений передаточных функций для заданных схем надо использовать либо операторное выражение для общего сопротивления $Z_{\text{вх}}$ или $Z_{\text{о.с.}}$ в случае последовательного соединения резисторов и емкостей, либо операторное выражение проводимости $y_{\text{вх}}$ или $y_{\text{о.с.}}$ в случае параллельного соединения резисторов и емкостей. Для более сложных схем составляются уравнения для токов и напряжений для всех участков схемы и разрешают их относительно напряжений $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$. На рис. 43 приведены примеры двух схем.

Для схемы рис. 43, а имеем:

$$Z_{\text{вх}} = R_1 + \frac{1}{CP}; \quad Z_{\text{о.с.}} = R_2; \quad \bar{Z}_{\text{вх}} = (R_1CP + 1)/(CP).$$

Подставляя в (4.31) $Z_{\text{о.с.}}$ и $\bar{Z}_{\text{вх}}$, получим передаточную функцию

$$\frac{U_{\text{вых}}(P)}{U_{\text{вх}}(P)} = -\frac{R_2CP}{R_1CP + 1}.$$

Для схемы рис. 43, б имеем:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{R_1C_1P + 1}{C_1P}; \quad \frac{1}{Z_{\text{о.с.}}} = \frac{1}{R_2} + C_2P = \frac{1 + R_2C_2P}{R_2}.$$

Передаточная функция

$$\frac{U_{\text{вых}}(P)}{U_{\text{вх}}(P)} = -\frac{Z_{\text{о.с.}}}{Z_{\text{вх}}} = -\frac{R_2C_1P}{(1 + R_1C_1P)(1 + R_2C_2P)}.$$

Отметим, что при $\bar{U}_{\text{вх}} = \text{const}$ обе схемы дают схемы образования экспоненциальных функций от переменной (времени) t вида:

для схемы рис. 43, а

$$U_{\text{вых}} = -R_2U_1e^{-\frac{t}{CR_1}/R_1},$$

для схемы рис. 43, б

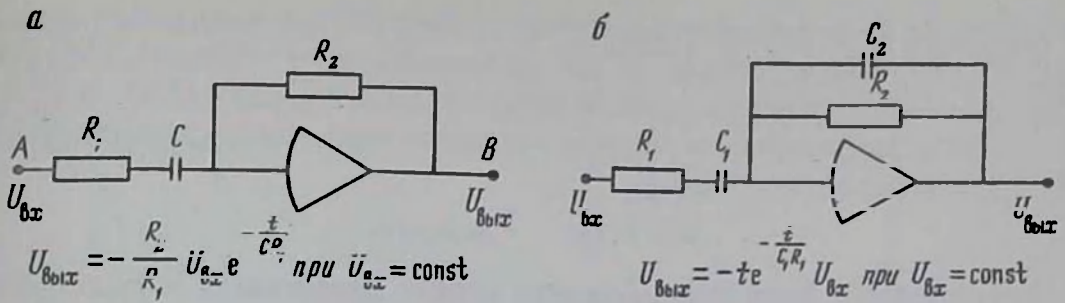


Рис. 43. Электрические схемы блоков преобразования функций: а – преобразование входной функции в экспоненциальную; б – преобразование входной функции в более сложную экспоненциальную функцию

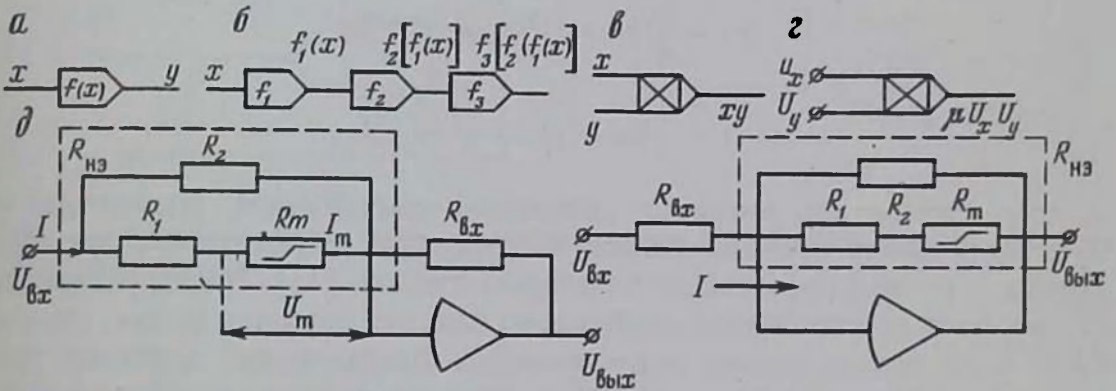


Рис. 44. Схемы функциональных преобразователей (а, б), блоков умножения (в, г), возведения в квадрат и извлечения квадратного корня (д)

$$U_{\text{ввых}} = -t U_1 e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

Помимо рассмотренных выше линейных блоков на АВМ используются нелинейные решающие блоки или функциональные преобразователи: блоки нелинейной функции одной или нескольких переменных, блоки перемножения и деления и т. п. В свою очередь, блоки нелинейной функции делятся на универсальные и специализированные. Первые позволяют с помощью одного устройства за счет изменения его параметров воспроизводить широкий класс заданных функций. Вторые предназначены для воспроизведения только одной определенной зависимости (степенной, тригонометрической и т. д.). Они построены на диодах, нелинейных сопротивлениях, функциональных потенциометрах, электронно-лучевых трубках.

В большинстве АВМ функциональные преобразователи реализуют лишь функцию одного переменного $y = f(x)$ в связи с практическими сложностями построения преобразователей от многих переменных. На структурных схемах их обозначают так, как это показано на рис. 44, а. При наличии нескольких преобразователей можно путем различных

способов их включения воспроизводить иные, более сложные функции. Так, в простейшем случае, путем включения их в последовательную цепочку можно получить суперпозицию взятых функций (рис. 44, б).

Блоки перемножения и деления предназначены для реализации функций двух переменных вида

$$z = k_1 xy; \quad z = k_2 x/y.$$

Теоретически блок перемножения можно представить в виде функционального преобразователя от двух входных переменных (устройство прямого действия). Практически это сложно осуществимо и обычно при создании блоков перемножения идут иным (косвенным) путем. Так, в большинстве средних и малых АВМ блоки перемножения построены в соответствии с одним из двух тождественных преобразований

$$xy = \frac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2],$$

$$xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - x^2 - y^2].$$

В этом случае для операции умножения потребуются сумматоры и функциональные преобразователи – квадраторы, осуществляющие возведение входной переменной во вторую степень [13]. На структурных схемах блок перемножения изображают так, как показано на рис. 44, в и 44, г. В последнем случае подчеркивается электрический характер машинных переменных U_x и U_y . При этом на выходе вырабатывается напряжение, пропорциональное их произведению с коэффициентом пропорциональности μ -схемным масштабом блока перемножения.

Функциональные преобразователи возведения в квадрат и извлечения квадратного корня строятся на основе использования нелинейных полупроводниковых сопротивлений тиррита или виллита, имеющих характеристики, близкие к квадратичным [13]. Так, нелинейный элемент $\bar{K}_{н.з}$, состоящий из цепи, где с полупроводниковым сопротивлением тиррита включены последовательно резистор R_1 и параллельно – резистор R_2 , при включении во входную цепь операционного усилителя (рис. 44, д) позволяет осуществить операцию возведения в квадрат, т.е. $\bar{U}_{вых} = -k_1 R_2 U_{вх}^2$. Тот же элемент $\bar{K}_{н.з}$, включенный в цепь обратной связи операционного усилителя, позволяет осуществить обратную предыдущему операцию – извлечение квадратного корня, т.е.

$$U_{вых} = -\sqrt{\bar{U}_{вх} / (k_1 \bar{K}_{н.з})} = -k \sqrt{U_{вх}}.$$

Для этих же целей могут быть использованы схемы обращения функций, когда на вход интегратора, полученного из операционного усилителя, включается через обратную связь блок, воспроизводящий обратную функцию $y = f(x)$. В зависимости от знака производной этой функции $f'(x)$ реализуется либо схема, показанная на рис. 45, а при $f'(x) > 0$, либо схема, показанная на рис. 45, б при $f'(x) < 0$ [14]. В последнем случае отрицательный знак производной на схеме реализу-

Рис. 45. Электрические схемы обращения функции $y = f(x)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$:
 а - при $f'(x) > 0$; б - при $f'(x) < 0$

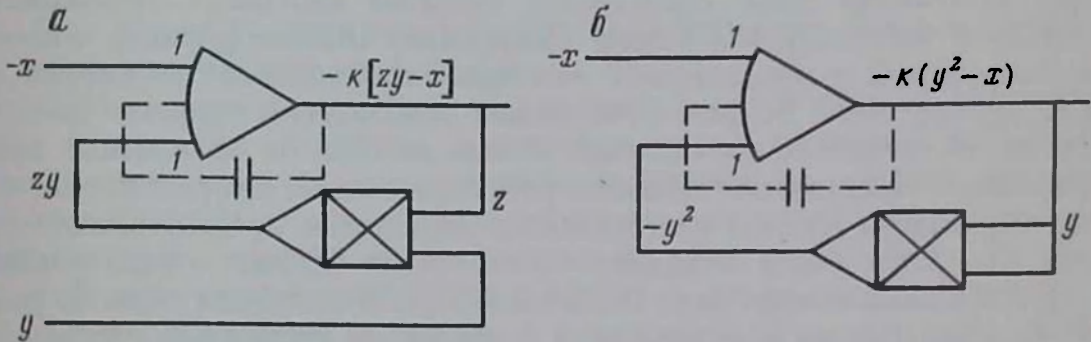
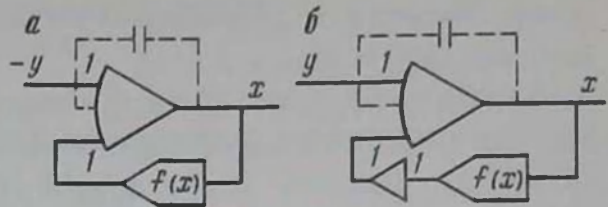


Рис. 46. Схемы деления (а) и извлечения корня (б), построенные на функции обращения функций

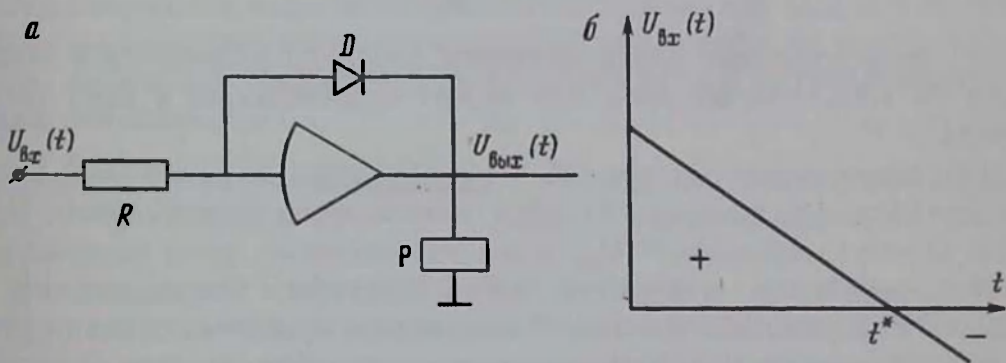


Рис. 47. Схема программного управления:
 а - электрическая схема блока программного управления с диодом D и реле P ;
 б - схема работы диода, пропускающего входное напряжение до момента времени t^*

ется включением последовательно с блоком $y = f(x)$ инвертора I (см. рис. 45, б).

По аналогии с этими схемами выполнение операции деления сведено к выполнению операции умножения с помощью блока перемножения, включенного в обратную связь с операционным усилителем ОУ (рис. 46, а). В этом случае определение частного $z = x/y$ переменных x и y сводится к разрешению неявного уравнения $F(z) = zy - x = 0$ относительно z . Выявление операции извлечения квадратного корня (рис. 46, б)

также сводится к разрешению неявного уравнения $F(y) = y^2 - x = 0$ относительно y (где $y = \sqrt{x}$).

Указанные на рис. 46, *a* и *b* структурные схемы реализуют решение соответственно двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} z' &= -k[zy - x], & z(0) &= 0 \\ y' &= -k[y^2 - x], & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

В АВМ широко используются диодные блоки для построения различных логических схем: ограничения пределов изменения переменной, релейной бесконтактной схемы; образования модуля функции; выбора максимальной и минимальной величины; программного управления и ряд других схем. Во всех этих схемах используется свойство диодов иметь различное сопротивление в зависимости от полярности приложенного напряжения. Принцип работы диодных схем рассмотрим на примере блока (схемы) программного управления, представленного на рис. 47, *a*. Эта схема содержит ОУ, который охвачен отрицательной обратной связью через диод D . На выходе ОУ подключена обмотка реле P . Контакты этого реле находятся в устройстве управления машины, а также выведены на коммутационное поле машины.

Согласно схеме рис. 47, *a* величина напряжения на выходе ОУ определяется выражением

$$U_{\text{вых}}(t) = -\frac{R_d}{R} U_{\text{вх}}(t),$$

где R_d — сопротивление диода, величина которого изменяется в зависимости от того, открыт диод или заперт приложенным к нему напряжением.

Для показанного на рис. 47, *b* случая, пока входное напряжение положительно (до времени t^*), диод открыт, и его сопротивление мало. После момента времени t^* $U_{\text{вх}}$ будет отрицательно, диод запирается, и его сопротивление становится очень большим. Следовательно, на выходе ОУ до момента времени t^* напряжение практически равно нулю, а в момент времени t^* возникает скачок напряжения, величина которого ограничивается сопротивлением обмотки реле P , подключенного в схеме параллельно диоду, так как входная точка ОУ потенциально заземлена. Таким образом в момент появления скачка срабатывает реле P , замыкая одни и замыкая другие контакты. При этом контакты реле, находящиеся в устройстве управления АВМ, могут быть использованы для автоматического выключения машины (автоматического прерывания процесса решения). Контакты реле, находящиеся на наборном поле АВМ, могут быть использованы для автоматического изменения коммутационной схемы, что широко используется в вычислительных схемах с переменной структурой.

4.3. Моделирование действия взрыва методом электрогидродинамических аналогий

Метод электрогидродинамических аналогий (ЭГДА) в настоящее время используется при исследованиях в различных областях физики, механики, гидротехники и др. О. Е. Власов и С. А. Смирнов этот метод применили к решению ряда задач взрывного дела, в том числе и для моделирования процесса дробления горных пород взрывом. При этом ими в основу теории метода моделирования положены следующие допущения:

1. За основную характеристику взрыва принимается общее количество выделившейся при этом энергии Q .

2. Передача энергии взрыва окружающей твердой среде осуществляется практически мгновенно, а движение среды, вызванное взрывом, происходит с некоторыми конечными скоростями, т. е. процесс механического действия взрыва условно разделяется на две последовательные фазы: передачи энергии взрыва среде и движения самой среды.

3. В момент передачи энергии взрыва в среде не будет никаких реальных деформаций, а значит и разрушений. Это возможно, если среда будет вести себя в этот момент как идеальная несжимаемая жидкость.

4. В фазе движения самой среды возникают некоторые конечные деформации, которые по достижении критических значений приводят к разрушению среды.

Эти допущения позволили существенно упростить задачу и получить некоторые конечные результаты по действию взрыва на твердую среду путем несложных вычислений и использования электрогидродинамической аналогии.

4.3.1. Основы моделирования методом гидродинамических аналогий дробления горных пород взрывом

В соответствии с принятыми допущениями в первой фазе передача энергии взрыва сводится к определению состояния идеальной несжимаемой жидкости под действием удельного импульса взрыва $S = p dt$ (где p — давление газов), значение которого в различных точках среды различно и является функцией координат. Рассматривая действие импульса взрыва на элементарную частицу среды ($dx dy dz$) и учитывая второй закон Ньютона о равенстве действия импульса количеству движения, О. Е. Власовым и С. А. Смирновым получены выражения для составляющих скорости движения элементарной частицы v_x, v_y, v_z через значения импульса взрыва и плотность среды ρ в виде

$$\begin{aligned}v_x &= -\frac{\partial}{\partial x}(S/\rho); & v_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(S/\rho); \\v_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(S/\rho).\end{aligned}\tag{4.32}$$

Отсюда следует, что образующиеся при взрыве скорости имеют потенциал

$$\varphi = S/\rho, \quad (4.33)$$

пользуясь которым можно записать выражения (4.32) через φ

$$v_x = -\partial\varphi/\partial x; v_y = -\partial\varphi/\partial y; v_z = -\partial\varphi/\partial z. \quad (4.34)$$

Потенциал скорости φ в соответствии с (4.32) очевидно будет равен нулю при $S = 0$, т.е. где-то на бесконечном удалении от взрыва или на свободной поверхности. На поверхности заряд-среда он будет постоянным по всей поверхности, т.е. $\varphi = \text{const}$. Кроме того, потенциал скорости, в соответствии с допущением о несжимаемости среды в момент передачи энергии взрыва и вытекающим из этого условием о неразрывности движения среды

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0,$$

должен удовлетворять известному уравнению Лапласа, если подставить в это условие значения составляющих скорости по зависимостям (4.32)

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0.$$

Для установления связи потенциала φ с параметрами заряда и среды используется идеализированное представление об условии передачи энергии окружающей заряд среде, т.е. полная кинетическая энергия среды должна быть равна энергии взрыва. Это условие приводит к соотношению

$$\frac{\rho}{2} \iiint (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dx dy dz = Q. \quad (4.35)$$

Ввиду того, что скорости v_x , v_y и v_z имеют потенциал, то вычисление тройного интеграла в левой части соотношения (4.35) можно заменить по формуле Грина вычислением интеграла по поверхности и тогда соотношение (4.35) запишется в виде

$$\frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dF = Q, \quad (4.36)$$

где $d\bar{F}$ — элемент поверхности, ограничивающей рассматриваемую среду; n — направление внутренней нормали.

Полученные выше соотношения и выводы являются общими для зарядов любой формы.

Для сферического заряда радиуса R_{03} , в силу центральной симметрии движения среды с учетом ее несжимаемости получены следующие выражения для параметров поля скоростей

$$\varphi = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{R_{03} Q}{2\pi\rho}}; v_r = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{R_{03} Q}{2\pi\rho}}.$$

На поверхности заряда $\varphi_{\text{пов}}|_{r=R_{03}}$ имеем

$$\varphi_{\text{пов}} = \sqrt{Q/(2\pi\rho R_{03})}. \quad (4.37)$$

Для удлиненного цилиндрического заряда конечной длины необходимо решение трехмерной задачи теории потенциала. В литературе имеется решение такой задачи для случая представления заряда в виде трехосного эллипсоида или эллипсоида вращения. В последнем случае в цилиндрических координатах (положив $r^2 = x^2 + y^2$) эквипотенциальные поверхности могут быть описаны в виде

$$r^2/(a^2 + \lambda) + z^2/(b^2 + \lambda) = 1,$$

где a — малая полуось (радиус вращения); b — большая полуось эллипсоида; λ — некоторый параметр, изменяющийся в пределах $0 \leq \lambda \leq \infty$ и определяющий значение потенциала скорости φ , т.е. $\varphi = f(\lambda)$.

Потенциал скорости

$$\varphi = A \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{b^2 + \lambda}},$$

где A — постоянная, определяемая из условия соблюдения баланса энергии, т.е. из уравнения (4.35).

После ряда преобразований окончательное выражение для φ будет иметь вид

$$\varphi = \frac{2A}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + \lambda}}, \quad (4.38)$$

$$\text{где } A = \sqrt{\frac{Q \sqrt{b^2 - a^2}}{8\pi\rho \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)}}. \quad (4.39)$$

На поверхности заряда $\lambda = 0$ и тогда выражение для потенциала (4.28) с учетом величины A по (4.39) будет

$$\varphi_{\text{пов}} = \sqrt{\frac{Q \ln(b + \sqrt{b^2 - a^2})}{2\pi\rho \sqrt{b^2 - a^2}}},$$

где $\varphi_{\text{пов}}$ — потенциал скорости на поверхности заряда; ρ — плотность среды; Q — энергия взрыва заряда.

При взрывных работах обычно используются удлиненные заряды, где $b \gg a$. В этом случае выражение для $\varphi_{\text{пов}}$ существенно упростится:

$$\varphi_{\text{пов}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi\rho l_3} \ln\left(\frac{2l_3}{d_3}\right)}, \quad (4.40)$$

где $l_3 = 2b$ — длина заряда, м; $d_3 = 2a$ — диаметр заряда, м.

Полученные выражения для потенциала скорости $\varphi_{\text{пов}}$ на поверхности сферического (4.37) и цилиндрического (4.40) зарядов могут быть использованы для исследования различных задач действия взрыва на электрогидродинамической аналоговой машине.

Во второй фазе действия взрыва частицы среды, получившие начальные скорости, будут двигаться и их смещения u_x , u_y , u_z в течение

некоторого времени будут пропорциональны их скоростям. Поскольку смещения u_x , u_y , u_z в различных точках среды в общем случае будут неодинаковы, то среда будет деформироваться. При малых деформациях среда ведет себя как упругая. При более значительных деформациях возникнут необратимые деформации в виде пластических деформаций или деформаций разрыва, которые могут привести к разрушению среды. Очевидно, разрушение будет происходить лишь в том случае, когда плотность энергии деформации среды A достигнет некоторого предела. Для пластических деформаций величина предельной удельной потенциальной энергии может быть определена по зависимости

$$A_s = \sigma_s^2 / (2E),$$

где σ_s — предел текучести; E — модуль упругости среды.

Равная ей кинетическая энергия, более удобная для дальнейших расчетов, определяется по формуле

$$A_s = (\dot{E}_k)_s = \rho v_s^2 / 2. \quad (4.41)$$

Приравнивая эти выражения, можно получить значение критической скорости смещения v_s , которое будет равно

$$v_s = \sigma_s / \sqrt{\rho E}. \quad (4.42)$$

Для большинства горных пород имеет место хрупкое разрушение в виде трещин от местного разрыва связей между соседними частицами. Для этого необходимо, чтобы напряжения превысили временное сопротивление среды на отрыв $\sigma_{отр}$. Но поскольку этот уровень напряжений будет иметь место в упругой стадии нагружения, то надо сообщить среде потенциальную энергию не меньше значения $A_{отр} = \sigma_{отр}^2 / (2E)$. Эту энергию можно выразить аналогично (4.41) через соответствующую критическую скорость на отрыв

$$v_{отр} = \sigma_{отр} / \sqrt{\rho E}.$$

Таким образом в области среды, где имеет место общее сжатие среды, разрушения будут происходить в той части области, где $A \geq A_s$. При наличии растягивающих деформаций в зоне разрежений возможны разрушения при условии $A \geq A_{отр}$.

Учитывая изложенные выше соображения, можно статистически определить минимальные размеры области разрушения, внутри которой с большой вероятностью возможно появление трещин.

О. Е. Власовым и С. А. Смирновым показано, что полная кинетическая энергия E_k деформации взятой области будет определяться выражением

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iiint \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} z \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} z \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z \right)^2 \right] dx dy dz. \quad (4.43)$$

Для области в виде куба с ребром $2a$ после преобразования и взятия

определенного интеграла по всем осям от $-a$ до $+a$ можно получить численное выражение для (4.43) в виде

$$E_{\kappa} = \frac{4}{3} a^5 \rho \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right)^2 \right].$$

Выражение в квадратных скобках названо критерием дробимости и обозначено через D :

$$D = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right)^2. \quad (4.44)$$

Тогда энергия, расходуемая на деформацию куба с ребром $2a$,

$$E_{\kappa} = 4 a^5 \rho D / 3. \quad (4.45)$$

Из равенства (4.44) видно, что критерий дробимости D является функцией координат. Следовательно, энергия деформации зависит не только от места расположения рассматриваемой области, но, в соответствии с выражением (4.45), и от размера области a . Причем эта зависимость будет определяться пятой степенью половины ребра куба, а не третьей степенью, отражающей пропорциональность E_{κ} объему области (куба). Это значит, что для больших областей энергия E_{κ} будет значительно превосходить работу, необходимую для достижения пластичности и определяемую выражением (4.41),

$$(E_{\kappa})_s = 8 a^3 A_s = 4 a^3 \rho v_s^2.$$

При небольших размерах области значение E_{κ} весьма мало и никаких необратимых процессов в ней не будет. Очевидно, наиболее вероятный размер области a , который должен сохраниться целым, без дальнейшего дробления, определится из условия $\bar{E}_{\kappa} = (\bar{E}_{\kappa})_s$ или $\frac{4}{3} a^5 \rho D = 4 a^3 \rho v_s^2$, отсюда

$$a = \sqrt{3} v_s / \sqrt{D}. \quad (4.46)$$

В случае хрупкого разрушения породы в (4.46) надо подставить вместо v_s величину $v_{отр}$.

Из выражения (4.46) следует, что при больших значениях D значения a малы, и наоборот. Следовательно, величина D будет в какой-то мере определять разрушение породы и степень ее дробления.

Выражения (4.44) и (4.46) позволяют оценить наиболее вероятный размер области (куска), который должен сохраниться целым, без дальнейшего дробления. Для этого достаточно определить значение критерия дробимости D на заданном расстоянии от заряда, например на аналоговой машине ЭГДА, и знать значения критических скоростей v_s

или $v_{эф}$. Наиболее просто получить D для взрыва сферического заряда, где его значение можно легко вычислить, основываясь на сферической симметрии движения среды, вызванной взрывом. После несложных выкладок О. Е. Власовым и С. А. Смирновым получены выражения для критерия дробимости $D = 3 R_{03} Q / (\pi \rho r^6)$ и вероятного размера куска породы

$$\bar{a} = v_s r^2 \sqrt{\pi \rho / (R_{03} Q)}. \quad (4.47)$$

Полученное выражение для вероятного куска породы показывает, что с ростом расстояния от центра заряда размер куска увеличивается, а при одном и том же расстоянии будет тем меньше, чем больше радиус заряда и энергия взрыва, что полностью согласуется с физикой процесса и практикой взрывного дробления горных пород. Очевидно, самые мелкие куски будут находиться как можно ближе к заряду. В этом случае при размере крайнего куска $2a$ расстояние между центрами кусков и заряда будет равно

$$r = R_{03} + a, \quad a = r - R_{03}. \quad (4.48)$$

Следовательно, для определения размера кусков следует решить совместно уравнения (4.47) и (4.48). Первое является в системе координат (r, a) параболой третьего порядка, второе — прямой линией с углом наклона 45° к оси r (рис. 48, а). Из графиков рисунка видно, что в области положительных r будет две точки пересечения, либо ни одной, а в пределе, когда прямая AB становится касательной к параболе, — одна общая точка. Очевидно, этот случай является условием возможности разрушения породы. Следовательно, условием дробления является уравнение

$$\partial a / \partial r = 3 v_s r^2 \sqrt{\pi \rho / (R_{03} Q)} = 1, \quad (4.49)$$

которое в общем случае можно записать так: $\partial a / \partial n = 1$, где n — нормаль к поверхности заряда.

Из формул (4.47) и (4.48) можно получить $3r^2 = r^3/a$; $r = 3a$. Отсюда и из уравнений (4.48) имеем $a = R_{03}/2$ и, подставляя в (4.49) значение $r = 3a = \frac{3}{2} R_{03}$, получим

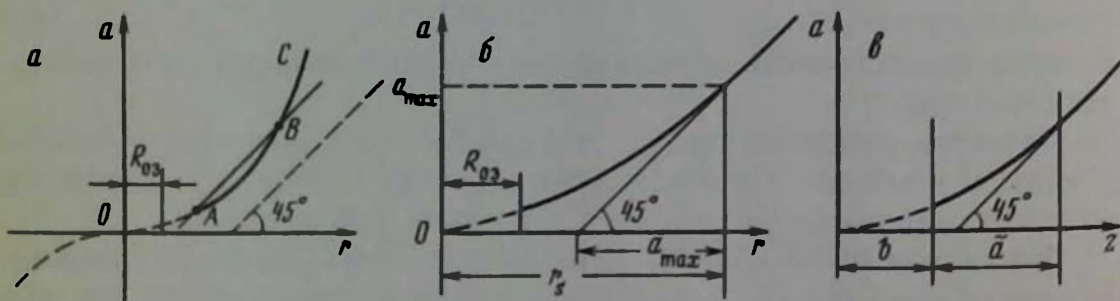


Рис. 48. Схемы к расчету зоны дробления (а) и к определению размеров зоны дробления (б) сферического заряда; схема к расчету дробления вдоль оси удлиненного заряда (в)

$$\frac{9}{4} R_{03}^2 = \frac{1}{3 v_s} \sqrt{\frac{R_{03} Q}{\pi \rho}},$$

отсюда $Q = \frac{729}{16} \pi \rho v_s^2 R_{03}.$

При такой энергии взрыва возможно дробление с небольшим числом кусков, размер которых равен $2a = d_1$. Если же энергия взрыва больше, то дробление происходит с образованием более мелких кусков. Минимальный размер куска, очевидно, будет при $r = R_{03}$:

$$a_{\min} \geq v_s R_{03}^{5/2} \sqrt{\pi \rho / Q}.$$

Выражение для максимального куска и его положение относительно центра заряда можно определить приемом проведения касательной к кубической параболе (4.47). Из уравнения (4.49) непосредственно получим (рис. 48, б)

$$r = (3 v_s)^{-1/2} \left(\frac{R_{03} Q}{\pi \rho} \right)^{1/4}.$$

Подставив это выражение в уравнение (4.47), получим

$$a_{\max} = 3^{-3/2} v_s^{-1/2} (R_{03} Q / \pi \rho)^{1/4}.$$

Отсюда граница зоны дробления будет находиться от центра взрыва на расстоянии

$$r_s = r + a_{\max} = R_{др} = (4 / \sqrt{27} v_s)^4 \sqrt{R_{03} Q / \pi \rho}.$$

Следует отметить, что в общем случае возможны две различных зоны разрушения: первая — дробления, обязанная своим возникновением пластическим (сдвиговым) деформациям; вторая — трещинообразования, обязанная своим возникновением хрупким разрушениям (деформациям отрыва). Последняя определяется критической скоростью отрыва $v_{отр}$ и все параметры этой зоны (размеры кусков, граница зоны) могут быть определены по выше приведенным зависимостям, в которых вместо v_s следует подставить значение $v_{отр}$ критическую скорость отрыва. Для зоны трещинообразования имеем:

$$\begin{aligned} a_{\min} &= v_{отр} R_{03}^{5/2} \sqrt{\pi \rho / Q}; \\ a_{\max} &= (R_{03} Q / \pi \rho)^{1/4} / \sqrt{27} v_{отр}; \\ r_{отр} &= R_{тр} = (4 / \sqrt{27} v_{отр}) (R_{03} Q / \pi \rho)^{1/4}. \end{aligned}$$

Получение аналогичных зависимостей для параметров дробления безграничной среды при взрыве цилиндрических зарядов теоретически значительно сложнее. О. Е. Власов и С. А. Смирнов это сделали для двух случаев: в направлении оси заряда и в экваториальной плоскости.

В первом случае (в направлении оси z) выражение для критерия дробимости D получено в виде

$$D = 24 A^2 z^2 / (z^2 - c^2)^4.$$

Средняя крупность кусков, в соответствии с выражением (4.46), в направлении оси z будет равна

$$\bar{a} = v_{\text{кр}} (z^2 - c^2) / (2 A z \sqrt{2}). \quad (4.50)$$

Граница зоны дробления определится из условия $\partial \bar{a} / \partial n = 1$. О. Е. Власов и С. А. Смирнов исследовали предельный случай, когда вообще возможно дробление и показали, что тогда в соответствии с (4.48) (рис. 48, в) должно быть $z = b + \bar{a}$ и вопрос сводится к решению этого уравнения с учетом равенства (4.50), представленному в виде

$$2z^3 - 3bz^2 + 2cz - bc^2 = 0.$$

Причем ими решено уравнение $z = b + (ab)/c^2$ и выведена приближенная формула для минимального значения $A = 2\sqrt{2}a^2v_{\text{кр}}$.

Во втором случае (в экваториальной плоскости) исследован характер дробления в средней плоскости $xу$, перпендикулярной к оси заряда, при этом получено выражение для критерия D :

$$D = \frac{8A^2(3r^4 + 3c^2r^2 + c^4)}{r^4(r^2 + c^2)^3}$$

и средней степени дробления

$$\bar{a} = \frac{v_{\text{кр}} r^2}{4A} \left[\frac{6(r^2 + c^2)^3}{3r^4 + 3c^2r^2 + c^4} \right]^{1/2}. \quad (4.51)$$

При очень больших значениях r , ограничиваясь старшими членами r под корнем $\sqrt{6r^6/(3r^4)}$, эта зависимость упрощается:

$$\bar{a} = v_{\text{кр}} r^3 / (2\sqrt{2}A).$$

Такой же результат получится и из уравнения (4.49) при больших значениях z

$$\bar{a} = \frac{v_{\text{кр}} z^3}{2\sqrt{2}A}.$$

Этот вывод согласуется с физическим представлением удлиненного заряда, как сосредоточенного на очень больших расстояниях.

Границы зоны дробления находятся из уравнения (4.51) по общему условию $\partial \bar{a} / \partial n = 1$, которое получено в виде

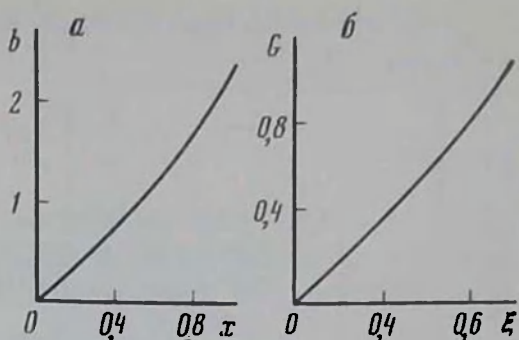
$$\frac{x(9x^6 + 12x^4 + 8x^2 + 2)\sqrt{x+1}}{(3x^4 + 3x^2 + 1)^{3/2}} = B,$$

где $x = r/c$; $B = 2\sqrt{2}A/(\sqrt{3}c^2v_{\text{кр}})$.

Решение этого уравнения для $1 \geq x \geq 0$ получено О. Е. Власовым и С. А. Смирновым (рис. 49, а).

Учитывая, что выбор рационального значения ЛНС в какой-то мере связан также и с определением вероятных размеров зоны разрушения в поперечном сечении, для оценки минимальных размеров кусков породы в экваториальной плоскости, пользуясь формулой (4.51), положив в ней $r = a$ и учитывая $b \gg a$, получено выражение

Ряс. 49. Графики для определения границы зоны дробления (а) и гранулометрического состава (б) при взрыве удлиненного заряда



$$a_{\min} = \frac{d_3^2 v_{\text{кр}}}{4} \left[\frac{3 \pi \rho}{2 q} \ln \left(\frac{l_3}{d_3} \right) \right]^{1/2}$$

Полученная зависимость указывает на особенно сильное влияние диаметра заряда на переизмельчение пород при взрыве, так как с увеличением a_3 растет a_{\min} , а значит уменьшается объем переизмельченной породы. Формула (4.51) позволяет приблизительно оценить гранулометрический состав разрушенной части породы. Точный расчет его получается из исследования методом ЭГДА распределения крупности кусков по всему меридианальному сечению.

Полагая, что вблизи удлиненного заряда поверхности равной крупности приближаются к цилиндрическим поверхностям, О. Е. Власовым и С. А. Смирновым дано определение грансостава только по среднему сечению. В этом случае, допуская, что объем V всех кусков, крупность которых не превышает величины a , приблизительно равен $\bar{v} = \pi l_3 (r^2 - a^2)$, а отсюда $r^2 = a^2 + V/(\pi l_3)$, получено выражение для (4.50) в виде

$$G = \xi \left[\frac{(\xi + 1)^2}{3\xi^2 + 3\xi + 1} \right]^{1/2}, \quad (4.52)$$

где $\xi = V/(\pi l_3 b^2)$; $G = 4 A \bar{a} / (6 b^3 v_{\text{кр}})$.

Полученное выражение (4.52) и будет представлять собой приближенную кривую вероятностного гранулометрического состава, которая для ξ , изменяющейся в пределах $1 \geq \xi \geq 0$, приведена на рис. 49, б.

При исследовании этого вопроса методом ЭГДА надо иметь в виду, что распределение электрического потенциала проводится для его приведенного значения, а не абсолютного, т.е. потенциала, отнесенного к полному падению напряжения на модели. При этом на поверхности модели заряда значение приведенного потенциала принимается равным единице, а на свободной поверхности нулю. В этом случае абсолютные значения потенциалов в отдельных точках определяются умножением их относительных (приведенных) значений на абсолютную величину потенциала скорости на поверхности заряда, которая в общем случае подсчитывается по балансу энергии и для удлиненного заряда $b \gg a$ ($2b = l_3$, $2a = a_3$) описывается формулой (4.40) для случая неограниченной среды, а общее значение кинетической энергии, полученной средой от взрыва, выражается формулой (4.35).

Ток, протекающий через модель в установке ЭГДА, будет определяться зависимостью

$$I = \frac{1}{\tau} \oint \frac{\partial U_{\text{пов}}}{\partial n} d\Gamma = \frac{U_{\text{пов}} - U_0}{\bar{R}},$$

где τ — удельное электрическое сопротивление среды модели; R — электрическое сопротивление модели; $U_{\text{пов}}$, U_0 — напряжение (потенциал) соответственно на поверхности заряда и на свободной поверхности.

Полагая $U_0 = 0$ и $\bar{U}_{\text{пов}} \approx \varphi_{\text{пов}}$ из (4.52) и (4.37), получим

$$\frac{U_{\text{пов}} \tau}{R} = \frac{2Q}{\rho \varphi_{\text{пов}}}; \quad \varphi_{\text{пов}} = U_{\text{пов}} \sqrt{\frac{2Q}{\rho \tau}} \sqrt{R}. \quad (4.53)$$

Сопоставляя (4.40) и (4.53), видим, что (потенциалы) скорости на поверхности зарядов одинаковой энергии, но с различным отношением l_1/d_1 , будут относиться как величины \sqrt{R} , измеренные для моделей этих зарядов.

При моделировании дробления методом ЭГДА помимо построения эквипотенциальных кривых по методике, изложенной в разд. 4.1.1, и определения по ним скоростей смещения частиц среды по формулам (4.34), необходимо по координатам x, y, z вычисление вторых производных потенциала скорости φ , входящих в выражение для критерия дробимости D . Это можно произвести схемой квадратной сетки (рис. 50). В этом случае расчет этих производных производится по формулам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 &= \frac{\varphi_{22} - \varphi_{21}}{a}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 = \frac{\varphi_{23} - \varphi_{22}}{a}, \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1}{a} = \frac{\varphi_{23} - 2\varphi_{22} + \varphi_{21}}{a^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_{22} - \varphi_{32}}{a^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{23} - \varphi_{31}}{4a^2}. \end{aligned}$$

При этом необходима высокая точность снятия распределения потенциала скорости φ в большом количестве точек, что значительно увеличивает трудоемкость расчетов. Для некоторого ее уменьшения следует увеличить масштаб моделирования, что к тому же приводит к уменьшению относительных погрешностей при снятии распределения потенциала. В дальнейшем, для уменьшения трудоемкости определения степени дробления при моделировании на ЭГДА, следует стремиться к тому, чтобы непосредственно измерять вторые производные потенциала скорости. При моделировании также необходимо соблюдение геометрического подобия всех линейных размеров модели с натурой. Кроме того,

Рис. 50. Схема к методике расчета критерия дробимости для оценки дробления удлиненного заряда в любом направлении относительно его оси

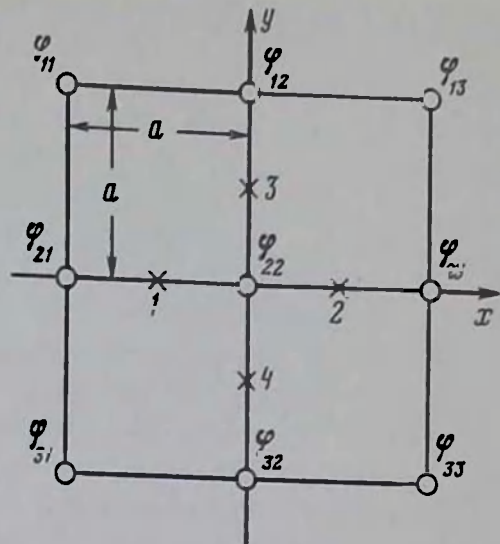
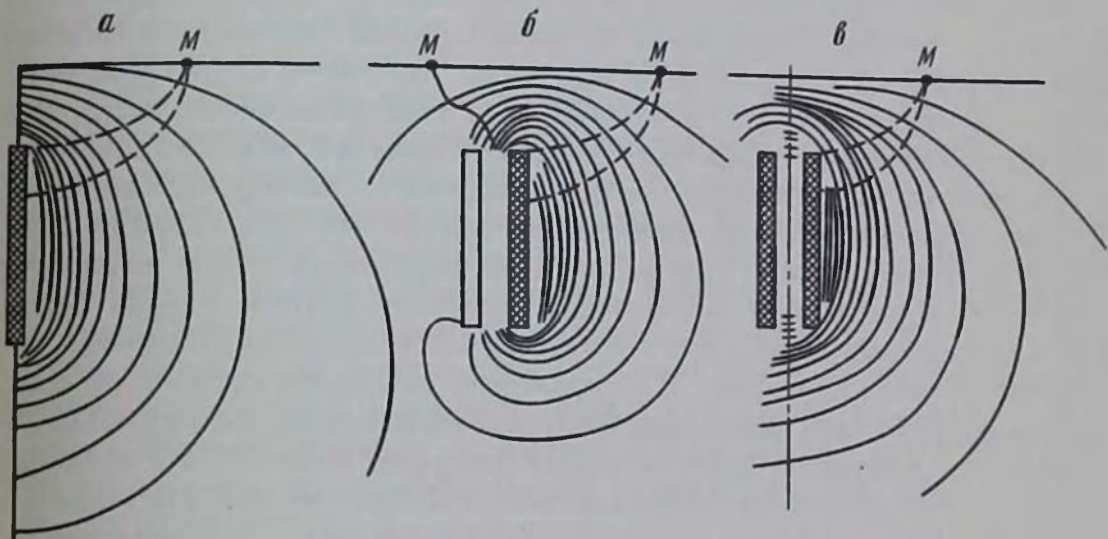


Рис. 51. Начальное скоростное поле модели при действии одиночного шпурового заряда (а), холостого и заряженного (заигтрихованного) шпуров (б), двух заряженных шпуров (в)



для упрощения моделирования и уменьшения трудоемкости работ на установке ЭГДА необходимо использовать следующие явления.

Если вблизи электрода, имитирующего заряд, поместить плоскую поверхность (шину) диэлектрика или поверхность, граничащую с воздухом, то электрическое поле будет таким, как при наличии в моделирующей среде второго электрода (заряда), заряженного одинаково с первым и находящегося от него на расстоянии, равном удвоенному расстоянию от электрода до этой поверхности (шины). Если же вместо диэлектрика поместить плоскую поверхность (шину) проводника, то поле будет формироваться также от двух электродов, расположенных на таком же расстоянии друг от друга, но имеющих противоположные заряды, т.е. моделироваться зеркальное отражение от свободной поверхности.

Эти свойства диэлектрической и проводящей поверхности (шины) позволяют при симметричном расположении электродов (модели) ис-

следовать не всю схему, а часть ее, заключенную между плоскостями симметрии схемы. На рис. 51 в качестве примера показаны распределения потенциала скорости для модели удлиненного (шпурового) заряда, перпендикулярного к плоской свободной поверхности. На этих рисунках в качестве модели заряда принят латунный стержень (полоска для плоской модели), соответствующих геометрическому масштабу размеров, расположенный перпендикулярно к плоскому медному листу (ширина в плоской модели) на расстоянии, равном длине забойки. В этом случае забойка имеет те же свойства, что и основная порода. В соответствии с методикой, описанной в разд. 4.11, строятся эквипотенциальные кривые, по которым можно вычислить скорости в любой точке поля. При этом направление ее должно совпадать с нормалью к эквипотенциальной кривой в этой точке. Густота эквипотенциальных кривых будет характеризовать плотность кинетической энергии в среде вокруг заряда, а направление векторов скорости — направление движения среды в заданных точках среды.

На рис. 51, а дано начальное скоростное поле при взрыве одиночного шпурового заряда. Здесь точка *M* характеризует возможную границу воронки выброса. На рис. 51, б приведено начальное скоростное поле модели вруба из холостого и заряженного (заштрихованного) шпуров. В данном случае наибольшая густота эквипотенциалей (наибольшая плотность энергии) имеет место между шпурами с векторами скорости, направленными в сторону свободного шпура, что свидетельствует о благоприятных условиях для разрушения перемычки между шпурами. При этом воронка при достаточной величине энергии взрыва будет иметь антисимметричный вид — большой выброс в области заряженного шпура. Наконец, на рис. 51, в приведено начальное скоростное поле модели вруба из двух заряженных шпуров, взрывааемых одновременно. В этом случае плотность энергии между шпурами небольшая и частицы среды здесь не двигаются (имеет место интенсивное их сжатие). Возможная воронка в этом случае будет больше на величину расстояния между зарядами при неизменности ее по глубине. Последний вывод о высоте воронки не учитывает факта увеличения эффективного радиуса сближенных зарядов, согласно которой будет иметь место также и рост глубины воронки за счет увеличения эффективного радиуса заряда.

4.3.2. Возможности метода гидродинамических аналогий для моделирования различных процессов разрушения горных пород взрывом и перспективы его развития

Отметим прежде всего, что метод гидродинамических аналогий (ЭГДА) может описывать лишь волновое действие взрыва, полагая, что в результате взрыва идеально упругая среда мгновенно получает некоторую кинетическую энергию движения частиц среды, т.е. в среде мгновенно возникает некоторое потенциальное поле скоростей с потенциалом ϕ . Причем заряд характеризуется лишь мощностью и формой, а инициирование его происходит мгновенно, т.е. процесс взрыва сводится к мгно-

венному выделению энергии ВВ по всему объему заряда. Такая постановка задачи совершенно не учитывает временных характеристик процессов детонации заряда, развития взрыва и распространения волн в среде и разрушения ее, а также поршневого действия продуктов детонации, которое, как известно, играет основную роль в вопросах перемещения горной массы, образовании воронки выброса и навала.

Вышеизложенный метод моделирования дробления горных пород взрывом, не учитывает ни механизма разрушения, ни физико-механических свойств массива, а основывается лишь на критических скоростях смещения частиц породы на сжатие v_s и отрыв $v_{отр}$, характеризующих соответственно пластическое и хрупкое разрушение этих пород и определяемых пределом текучести σ_s и временным сопротивлением на разрыв $\sigma_{отр}$ пород по формулам (4.42) и (4.43). Кроме того, предполагается, что вся энергия взрыва целиком переходит в кинетическую энергию движения породы [см. формулу (4.35)], не учитывая диссипативных потерь энергии взрыва в ближней зоне взрыва и энергии продуктов детонации, оставшихся в полости взрыва. Все эти допущения существенно снижают достоверность полученных этим методом результатов и не позволяют непосредственно экстраполировать результаты моделирования на натуру. Тем не менее они представляют определенный интерес для сравнительной качественной оценки поля напряжений при изменении некоторых условий (параметров) взрывания. В частности можно исследовать влияние расстояния между одновременно взрываемыми зарядами на поле скоростей в породе с учетом свободной поверхности, параллельной ряду зарядов. В этом случае можно использовать плоскую модель, что соответствует случаю применения бесконечно длинных зарядов, параллельных свободной поверхности. При этом для простоты эксперимента можно использовать указанные в разд.4.3.1. условия симметрии схемы с использованием полос из диэлектриков и проводников. Полоса (шина) из проводника устанавливается на линии свободной поверхности, а полоса из диэлектриков — посередине между зарядами перпендикулярно свободной поверхности. Для взрыва зарядов ВВ с теплотой взрыва $Q = 4190$ кДж/кг в граните плотностью $\rho_n = 2600$ кг/м³ и критической скоростью на разрыв $v_{кр} = 1,4$ м/с в скважинах диаметром 200 мм, длиной заряда 10 м и при ЛНС 10 м на установке ЭГДА в масштабе $l_c = 25$ были получены поля потенциала скорости для различных расстояний между зарядами, соответствующих коэффициентам сближения $m = 0,4; 0,8; 1,2; 1,6$ и $2,4$ (рис. 52). При этом энергия заряда

$$Q_3 = \frac{\pi A_3^2}{4} l_3 \gamma_{ВВ} Q = 13,16 \cdot 10^8 \text{ кДж}$$

и потенциал скорости на поверхности заряда $\varphi_{нов} = 272 \text{ м}^2/\text{с}$.

На рис. 52, а–д относительные значения потенциала эквипотенциальных кривых изменяются от 0,95 (1-я к заряду кривая) до 0,05 через 0,05. Абсолютные значения φ получаются умножением их на $\varphi_{нов} = 272 \text{ м}^2/\text{с}$. На рис. 53 приведены полученные графики распределения дробления соответственно по ЛНС и по линии зарядов. Из этих графиков следует, в

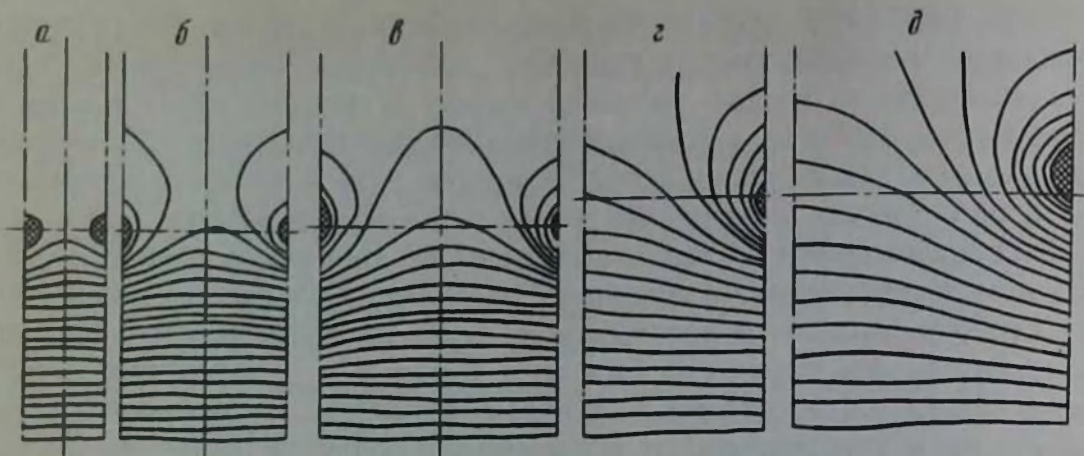


Рис. 52. Поля потенциалов скорости, снятых на модели ЭГДА при действии ряда скважин с различными коэффициентами сближения m :
 $a - m = 0,4$; $б - m = 0,8$; $в - m = 1,2$; $г - m = 1,6$; $д - m = 2,4$

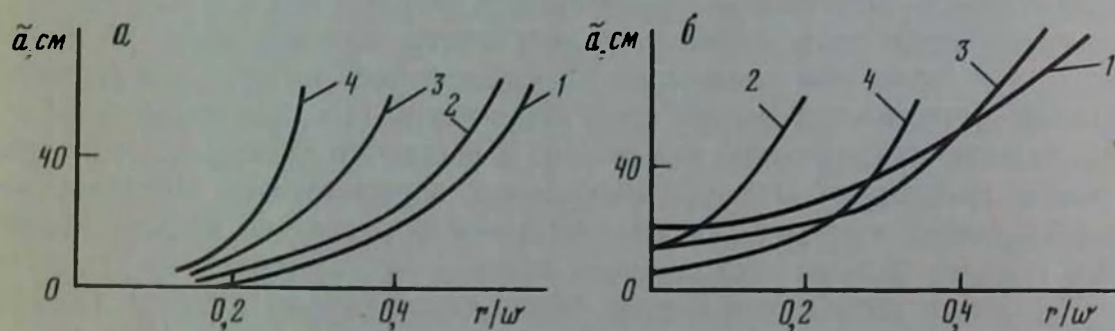


Рис. 53. Графики распределения крупности дробления при различных коэффициентах сближения:
 a — по линии ЛНС; $б$ — по линии, проходящей посередине между зарядами; 1, 2, 3, 4 — соответственно при $m = 1,6$; 2,4; 1,2; 0,8

частности, что наилучшее дробление в направлении ЛНС получается при $m = 1,6$, а наихудшее — при $m = 0,8$; в направлении линии зарядов наилучшее дробление имеет место при $m = 1,2$ и $1,6$ и наихудшее — при $m = 2,4$. При наименьшем коэффициенте сближения $m = 0,4$ эквипотенциальные линии вдали от зарядов представляют собой параллельные прямые на одинаковом расстоянии друг от друга, что свидетельствует о возможности дробления только вблизи зарядов и о поступательном движении среды в направлении ЛНС вдали от него. Полученные результаты в какой-то мере согласуются с данными других исследователей и промышленными взрывами. В частности, в работе [3] для гранитов оптимальный коэффициент сближения зарядов по действию волны напряжений колеблется в пределах от $m = 2$ до $m = 3$ в зависимости от коэффициента Пуассона породы $\nu = 2$ или 3 .

Характер эквипотенциалей посередине между зарядами показывает, что направление скоростей движения среды в этом месте способствует зарождению и образованию щели между зарядами, а по величине составляющей скорости v_y из этих кривых можно судить о возможности образования щели при данном расстоянии между зарядами, проверив условие $(v_y)_{\min} \geq v_{\text{отр}}$. При этом достоверность результатов будет зависеть от правильности оценки энергии взрыва, затрачиваемой на кинетическую энергию движения среды, и величины критической скорости на отрыв, которую целесообразно определять по зависимости

$$v_{\text{отр}} = [\sigma_{\text{дн. отр}}] / (\rho_n c_n),$$

где $[\sigma_{\text{дн. отр}}]$ — динамическая прочность пород на отрыв; $\rho_n c_n$ — акустическая жесткость пород.

Моделирование методом ЭГДА может быть использовано для исследования действия взрыва в слоистых средах, что практически важно для расчета параметров БВР при отбойке полезных ископаемых в тонких жилах, когда зона разрушения вмещающих пород должна быть минимальной. В этом случае слоистая среда моделируется модельными средами с различной степенью электропроводности в соответствующих подобных областях. Однако изготовление таких моделей вызывает определенные трудности. О. Е. Власовым и С. А. Смирновым предлагается более простой способ изготовления модели слоистой среды из среды с однородной проводимостью, в котором для создания скачка потенциала на границе между слоями необходимо ввести сопротивление, удовлетворяющее условию

$$\gamma_1 \Phi_1 = \gamma_2 \Phi_2, \quad (4.54)$$

где γ_1 и γ_2 — объемные веса в контуре слоев; Φ_1 и Φ_2 — значения потенциала скорости в двух соседних слоях для случая $\Phi_2 < \Phi_1$ и $\gamma_2 > \gamma_1$.

В этом случае внутри каждого слоя потенциал Φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$, а нормальные производные к границе раздела слоев в силу несжимаемости сред принимаются равными, т.е. $\partial \Phi_1 / \partial n = \partial \Phi_2 / \partial n$ (n — направление нормали к границе раздела сред). При удельном сопротивлении поверхности раздела R плотность тока, протекающего между этими слоями,

$$(\Phi_1 - \Phi_2) / R = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (4.55)$$

где τ — удельное сопротивление среды модели.

Из формул (4.54) и (4.55) можно получить выражение для сопротивления

$$R = -\tau \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\partial \Phi / \partial n} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) \frac{\tau \Phi_2}{-\partial \Phi / \partial n}.$$

Это сопротивление может быть изготовлено, например, из шелковой или хлопчатобумажной нити, пропитанной электропроводной краской из графитового порошка, смешанного с клеем БФ, удельную электропроводность которых можно изменять в широких пределах, варьируя количеством графита, добавляемого в краску. Последний метод может

быть применен также и для моделирования трещиноватых пород, имитируя систему трещин геометрически подобной сеткой таких нитей. При этом для сопротивления нити трещины R_r можно пользоваться предыдущими рассуждениями, т.е. использовать соотношения

$$\gamma_1 \varphi_1 = \gamma_r \varphi_r; \quad \partial \varphi_1 / \partial n = \partial \varphi_r / \partial n = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}, \quad (4.56)$$

где φ_r и γ_r — соответственно потенциал и плотность заполнителя трещины; K_r — сопротивление, имитирующее трещину на модели.

В этом случае, полагая для простоты наличие одной трещины толщиной δ , располагаемой на расстоянии r от оси (центра) заряда, будем иметь по аналогии с вышеизложенными рассуждениями для области до трещины $\varphi_1 = A + k/r$ — для сферической или осевой симметрии в экваториальной плоскости. Принимая на поверхности заряда $\varphi_1 = 1$, получим $A = 1 - k/R_{03}$, где R_{03} — радиус заряда, а потенциал на расстоянии r_1 будет $\varphi_1 = 1 + k(1/r - 1/R_{03})$. Отсюда нормальная производная $\partial \varphi_1 / \partial n = -k/r^2$. На границе трещины и области за трещиной потенциал скорости $\varphi_2 = B + k/(r + \delta)$. Учитывая, что и на границе трещины со второй областью будет иметь место $\gamma_r \varphi_r = \gamma_1 \varphi_2$, можно выразить φ_r через φ_2 по зависимости

$$\varphi_r = \varphi_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(B + \frac{k}{r + \delta} \right).$$

Постоянную можно определить из условия φ_2 на свободной поверхности, аналогично A для φ_1 из условия на поверхности заряда. Очевидно при $r = \tilde{r}$, $\varphi_2 = 0$ и $B = -k/W$.

$$\text{Тогда } \varphi_r = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(\frac{k}{r + \delta} - \frac{k}{W} \right) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} k \left(\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{W} \right). \quad (4.57)$$

Из первого условия формул (4.56) $\varphi_1 = \varphi_r \gamma_r / \gamma_1$, а из последнего условия этой формулы имеем

$$R_r = \frac{(\varphi_1 - \varphi_r) \tau}{-\partial \varphi / \partial n} = \frac{r \tau}{k} (\varphi_1 - \varphi_r) = \frac{r^2 \tau}{k} \varphi_r \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_1} - 1 \right). \quad (4.58)$$

Подставив в уравнение (4.58) значение φ_r из (4.57), получим

$$R_r = \frac{r^2 \tau}{k} \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_1} - 1 \right) \frac{\gamma_1}{\gamma_r} k \left(\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{W} \right) = \tau r^2 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_r} \right) \left(\frac{1}{r + \delta} \right) \left(\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{W} \right).$$

В работе [8] показано, что влияние трещины на волну напряжения сводится к снижению амплитуды волны напряжений, практически не изменяя его импульса, и определяется суммарной толщиной всех трещин, проходимых волной. Следовательно, оценку трещиноватости можно приближенно проводить по единичной трещине толщиной, равной суммарной толщине, и расположенной примерно посередине между осью (центром) заряда и ЛНС, т.е.

$$r = W/2; \quad \delta = \sum_{i=1}^n \delta_i,$$

γ_{τ} — плотность материала заполнителя трещин, которая при наличии различных заполнителей трещин вычисляется как средняя

$$\gamma_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{\tau_i} \delta_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i}$$

4.4. Примеры моделирования волновых движений с использованием электрических сеток и счетно-решающих устройств

4.4.1. Воспроизведение на АВМ решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим процесс структурной схемы на АВМ решения общих дифференциальных уравнений на примере задачи Коши

$$\begin{aligned} y^{(n)} - F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t] &= 0, \\ y_{(0)}^{n-1} = y_0^{(n-1)}, \dots, y'(0) = y'_0, y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Исходное уравнение разрешается относительно старшей производной, т.е. приводится к виду

$$y^{(n)} = F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t] \quad (4.60)$$

и для нее вычерчивается часть структурной схемы в виде цепочки последовательно включенных интеграторов (рис. 54, а), на вход которых подаются соответствующие производные $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ и т.д. до y' .

Разрабатывается схема, реализующая правую часть уравнения (4.60), конкретный вид которой определяется аналитическим выражением $F(y^i, t)$, на схеме (рис. 54, б) она изображена прямоугольником с соответствующей надписью. При этом выход схемы подается на вход первого интегратора цепочки, что отражает уравнение (4.60).

Задаются всем интеграторам соответствующие начальные условия в виде стрелок с обозначениями начальных условий (рис. 54, в), завершая решение исходного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= f(t), \\ y'(0) = y'_0, y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Записываем уравнение (4.61) в виде

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t) \quad (4.62)$$

и представляем в виде цепочки интеграторов (рис. 55, а).

Разрабатываем схему правой части преобразованного уравнения (4.62). Очевидно, схема должна содержать инвертор 1, сумматор 2 и блок, воспроизводящий функцию $f(t)$, так что на выходе сумматора

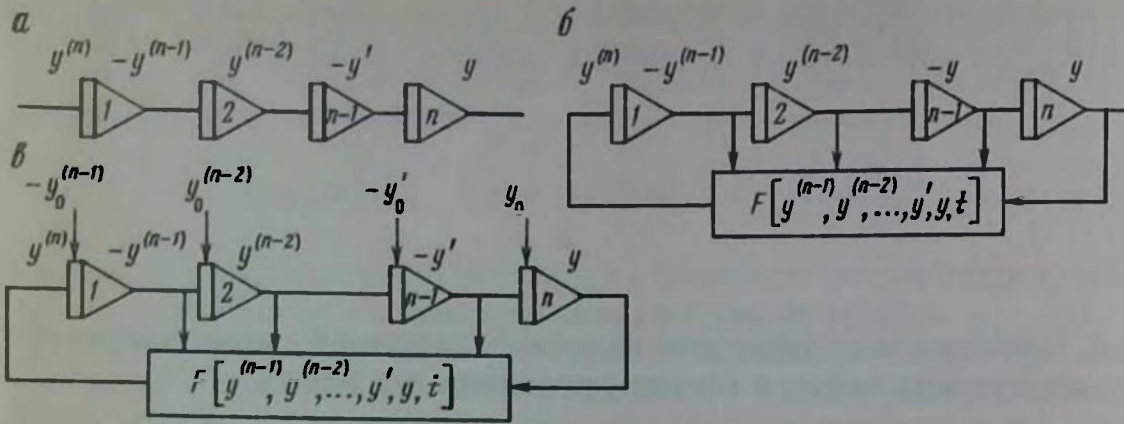


Рис. 54. Структурная схема АВМ решения обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка:
 а – цепочка интеграторов; б – включение в эту цепочку правой части уравнения (4.60); в – включение начальных условий в соответствующие интеграторы

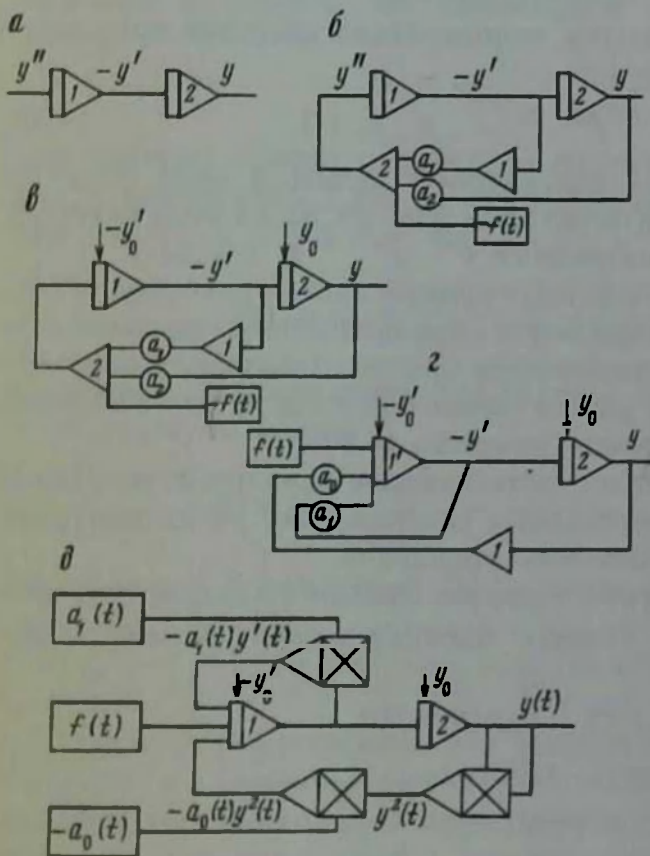


Рис. 55. Структурная схема для воспроизведения на АВМ решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:
 а – цепочка интеграторов; б – задание правой части уравнения; в – включение начальных условий – завершение схемы; г – преобразованная схема, исключающая анализ поведения второй производной функции; д – структурная схема дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

вырабатывается сумма (правая часть): $-a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t) = F[-a_1 y' - a_0 y + f(t)]$ (рис. 55, б), которая поступает на первый интегратор, замыкая решаемое уравнение.

Наконец, подключаются начальные условия к соответствующим интеграторам y'_0 и y_0 (рис. 55, в). Эта схема позволяет исследовать переменные $y''(t)$, $y'(t)$ и $y(t)$. Если же поведение $y''(t)$ нас не интересует, то схема существенно упрощается (рис. 55, г) путем совмещения сумматора 2 и интегратора 1 в интегросумматоре 1'.

При наличии в уравнении (4.62) переменных коэффициентов $a_1(t)$ и $a_0(t)$ схема правой части усложнится за счет введения блоков переменных коэффициентов и блоков перемножения (рис. 55, д).

4.4.2. Воспроизведение на АВМ решений дифференциальных уравнений в частных производных

Решение дифференциальных уравнений в частных производных на АВМ воспроизводится приближенно путем реализации решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходные уравнения в частных производных. Рассмотрим это на примере наиболее простой краевой задачи — задачи Дирихле. При этом в основу аппроксимации положим замену частных производных некоторыми выражениями, содержащими лишь отдельные значения функции, т.е. формулы численного дифференцирования. Наиболее просто отыскиваются формулы численного дифференцирования методом прямоугольных сеток при равноотстоящих значениях аргумента.

Рассмотрим этот метод для некоторой функции $u(x)$ одного переменного x . Пусть для дискретных значений x с шагом h

$$x_{-1} = x_0 - h; \quad x_0 \text{ и } x_{+1} = x_0 + h$$

заданы значения функций $u(x)$: $u(x_{-1})$, $u(x_0)$, $u(x_{+1})$. Разлагая функции $u(x_{-1})$ и $u(x_{+1})$ в ряд Тейлора, а затем вычитая и складывая их [14], можно получить соответственно значения для производных функций $u(x_0)$ в виде

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= \frac{1}{2h} [u(x_{-1}) - u(x_{+1})] - \frac{h^2}{6} u'''(\varepsilon), \dots, \\ u''(x_0) &= \frac{1}{h^2} [u(x_{-1}) - 2u(x_0) + u(x_{+1})] - \frac{h^2}{12} u^{IV}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.63)$$

где $x - h < \varepsilon < x + h$. Оба выражения дают значение производной с точностью порядка h^2 и в случае функции $u(x)$ в виде многочлена второго порядка дают точные значения производной, так как $u'''(x)$ и $u^{IV}(x)$ в этом случае равны нулю.

Аналогичным путем можно выразить и для других точек x_{-1} и x_{+1} . В работе [14] показано, что для равноотстоящих значений аргументов

$$x_0, \quad x_0 + h = x_1, \quad x_2 = x_0 + 2h, \dots, \quad x_i = x_0 + ih$$

соответствующие значения функций и их производные

$$u_0 = u(x_0); u_1 = u(x_1); u_2 = u(x_2), \dots, u_i = u(x_i);$$

$$u'_0 = u'(x_0); u'_1 = u'(x_1); u'_2 = u'(x_2), \dots, u'_i = u'(x_i);$$

связаны соотношениями для трех значений (одномерный случай)

$$u''_0 = \frac{1}{2h} [-3u_0 + 4u_1 - u_2] + \frac{h^2}{3} u'''(\varepsilon_0);$$

$$u''_1 = \frac{1}{2h} [-u_0 + u_2] - \frac{h}{6} u'''(\varepsilon_1);$$

$$u''_2 = \frac{1}{2h} [u_0 - 4u_1 + 3u_2] + \frac{h}{3} u'''(\varepsilon_2),$$

где $x_0 < \varepsilon_0 < x_1$; $x_0 < \varepsilon_1 < x_2$; $x_0 < \varepsilon_2 < x_2$.

Аналогично можно получить производные и для большего числа точек. В работе [14] показывается, что все формулы дифференцирования можно представить приближенно в виде

$$\bar{u}' = \frac{1}{h} M \bar{u}; \bar{u}'' = \frac{1}{h} M \bar{u}' = \frac{1}{h^2} M^2 \bar{u}, \quad (4.64)$$

где \bar{u}'' , \bar{u}' и \bar{u} — n -мерные векторы; M — квадратная матрица, которая для случая трех точек будет равна соответственно

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1,5 & 2,0 & -0,5 \\ -0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,5 & -2,0 & 1,5 \end{vmatrix}$$

Вычисления значений частных производных от нескольких переменных ничем не отличается от вычисления значений производных функции одной переменной. Так, для функции от двух переменных можно записать в соответствии с формулой (4.64)

$$\bar{u}'_x = \frac{1}{h_x} \tilde{M} \bar{u}(x, y); \bar{u}''_x = \frac{1}{h_x^2} M^2 \bar{u}(x, y);$$

$$\bar{u}'_y = \frac{1}{h_y} M \bar{u}(x, y); \bar{u}''_y = \frac{1}{h_y^2} \tilde{M}^2 \bar{u}(x, y);$$

$$[\bar{u}''(x, y)] = \frac{1}{h_x h_y} M [\bar{u}(x, y)]^T M^T,$$

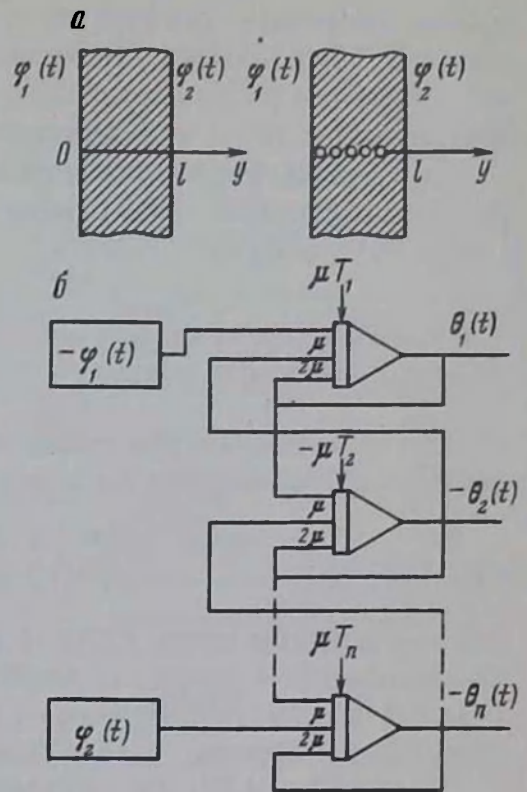
где $[\bar{u}''(x, y)]$ и $[\bar{u}(x, y)]$ — матричные выражения; знак T означает знак транспонирования.

В качестве примера рассмотрим аппроксимацию уравнения теплопроводности

$$\partial \theta / \partial t = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (4.65)$$

описывающее изменение температуры θ в стенке толщиной l , разделяющей две среды с температурами $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, меняющимися во времени (рис. 56, а). В уравнении (4.65) λ — коэффициент теплопроводности.

Рис. 56. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие решение дифференциального уравнения теплопроводности: а - схема постановки задачи; б - структурная схема АВМ, состоящая из последовательной системы уравнений по числу точек разбиения расстояния по координате



c — удельная объемная теплоемкость стенки. Для определения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих уравнение (4.65), разобьем ось y на ряд точек, отстоящих друг от друга на равных расстояниях h , в каждой из которых температура будет лишь функцией времени. Частная производная такой точки может быть представлена приближенно через значения $\theta(y, t)$ в двух соседних с ней точках $i-1$ и $i+1$, т.е. по формуле (4.63)

$$\frac{\partial^2 \theta(y_i, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} [\theta_{i+1}(t) + 2\theta_i(t) + \theta_{i-1}(t)].$$

С учетом этого выражения уравнение (4.65) запишется в виде обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$\frac{\partial \theta_i(t)}{\partial t} = \mu [\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i];$$

$$\theta_i(0) = T(y_i) = T_i; \quad \mu = \frac{\lambda}{ch^2};$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.66)$$

где $T(y)$ — некоторая заданная функция, характеризующая распределение температуры по толщине стенки в первоначальный момент времени; n — число точек на оси y .

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение системы дифференциальных уравнений (4.66), показана на рис. 56, б, где на воспроизведение каждого уравнения системы требуется всего один интегратор,

а всей системы — цепочка из n интеграторов. Прямоугольниками на схеме у первого и последнего интегратора показаны схемы АВМ, воспроизводящие заданные функции времени $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ характеризующие температуру в окружающих стенку средах.

При масштабировании переменных следует иметь в виду, что температура внутренних точек стенки не может превосходить величин температур $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

4.4.3. Математическое моделирование волновых движений, возникающих при взрыве

Сначала рассмотрим аппроксимацию на АВМ решения волнового уравнения, справедливого для упругих волн и имеющего вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.67)$$

где u — смещение точек упругой среды в волне, вызванной взрывом; x, y, z — координаты точки; t — текущее время; c — скорость распространения упругой волны, $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; λ — постоянная Ламе; μ — модуль упругого сдвига породы; ρ — плотность породы.

Уравнение (4.67) для одномерного случая может быть представлено методом конечных разностей в виде обыкновенного дифференциального уравнения по времени t для любой i -ой точки в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{h^2} [u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)], \quad (4.68)$$

где $h = \Delta x$ — расстояние между точками $i = 1, 2, \dots, n$ по линии распространения волны; u_{i-1}, u_i, u_{i+1} — смещения в волне в соседних точках.

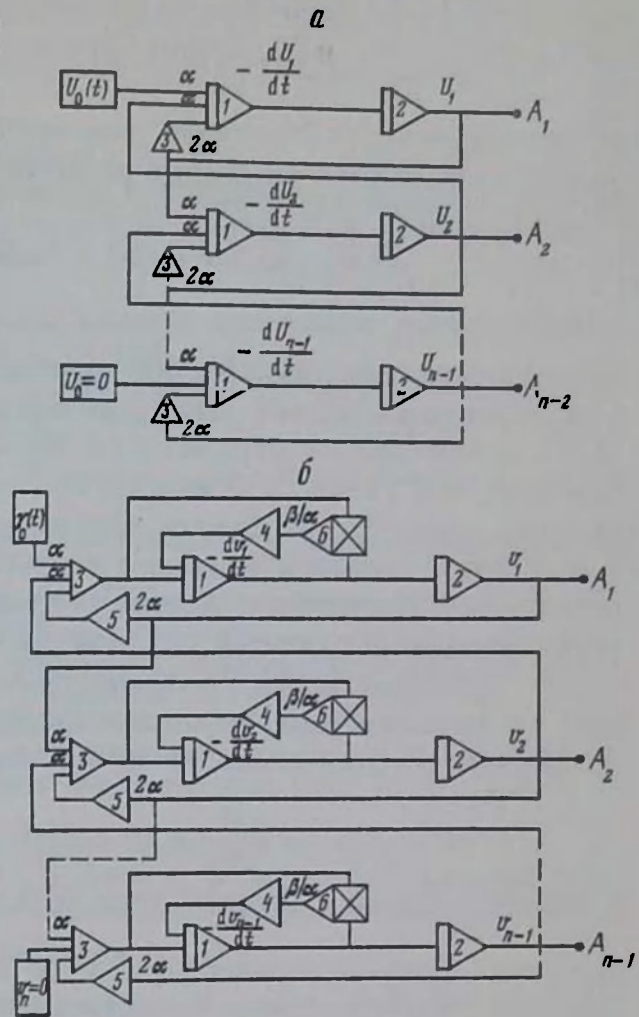
Для решения уравнения (4.68) необходимо задаться начальными и граничными условиями. Например, при взрыве на границе упругой зоны в момент $t = 0$ [момент отсчета распространения волны от этой зоны $u = u_0(x = 0, t = 0)$], а на расстояниях $x \rightarrow \infty$ $u_n \rightarrow 0$. В этом случае структурная схема АВМ, воспроизводящая решение уравнения (4.68), может быть построена в соответствии со схемой аппроксимации, изложенной в разд. 4.4.1 и 4.4.2, в виде цепочки, состоящей из двух интеграторов (рис. 57, а), где $\lambda = \alpha^2/h^2$. Из этого рисунка видно, что на интеграторе 1 первой ячейки подаются значения $u_0(t)\alpha$, $u_2(t)\alpha$ (из выхода интегратора 2 второй ячейки) и из выхода интегратора 2 первой ячейки через инвертер 3 значение в первой точке $-2\alpha u_1(t)$, т.е. на интеграторе 1 подается значение

$$\alpha [u_0(t) + u_2(t) - 2u_1(t)] = \partial^2 u / \partial t^2,$$

а это значит, что в первой ячейке выполняется решение уравнения (4.68) для первой точки. Аналогично вторая ячейка цепочки выполняет решение этого уравнения для второй точки и т.д. до $(k - 1)$ -ой точки, получая на выходе A_1 , из интегратора 2 соответствующие значения смещения частиц в упругой волне $u_i(t)$.

Рис. 57. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие решение одномерного волнового уравнения, описывающего упругое (а) и упругопластическое (б) движение породы, вызванное взрывом:

u_i – смещение i -ой частицы породы;
 v_i – скорость смещения i -ой частицы породы



В качестве второго примера рассмотрим волновое движение в упруго-вязкой среде. Для одномерного движения в направлении оси это движение будет описываться уравнением вида

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.69)$$

где η – коэффициент вязкости среды. Продифференцировав уравнение (4.69) по времени t и обозначив через $v = \partial u / \partial t$ – скорость смещения частиц среды, получим

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (4.70)$$

Для аппроксимации на АВМ решения этого уравнения разрешим его относительно старшей производной в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{4}{3\rho} \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right),$$

а производную скорости по координате представим методом конечных разностей в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} [v_{i-1}(t) + v_{i+1}(t) - 2v_i(t)].$$

Тогда уравнение (4.70) может быть представлено в виде обыкновенного дифференциального уравнения по времени для i -ой точки

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{d}{dt} \beta [v_{i-1}(t) + v_{i+1}(t) - 2v_i(t)] + \alpha [v_{i-1}(t) + v_{i+1}(t) - 2v_i(t)], \quad (4.71)$$

где дополнительно введено обозначение $\beta = 4\eta / (3\rho h^2)$.

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение уравнения (4.71), может быть построена в соответствии со схемой аппроксимации (см. разд. 4.4.1 и 4.4.2) в виде более сложной цепочки, каждая из ячеек которой (рис. 57, б) должна состоять из двух интеграторов 1 и 2, сумматора 3, воспроизводящего вторую производную скорости частиц породы по координате методом конечных разностей: сумматора 4, воспроизводящего первый член правой части уравнения (4.71) совместно с блоком перемножения б и сумматором 5, преобразующего v в $2\alpha v_1$, который подается в сумматор 3. На интегратор 1 первой ячейки сумматора 4 подается первый член правой части уравнения (4.71)

$$\beta \frac{d}{dt} [v_0(t) + v_2(t) - 2v_1(t)],$$

а через сумматор 5 — второй член этой части уравнения

$$\alpha [v_0(t) + v_2(t) - 2v_1(t)],$$

образуя с интегратором 1 конструкцию решаемого уравнения на расстоянии $\Delta x = h$ относительно первой узловой точки, т.е. решения скорости v_1 .

Аналогичная операция выполняется второй ячейкой цепочки относительно второй узловой точки (скорости v_2) и так далее до $(n-1)$ -ой узловой точки (скорости v_{n-1}), получая на выходе ячеек цепочки схемы АВМ в том числе A_i соответствующие значения скоростей. Здесь также как и в первом примере на некоторой границе, от которой производится отсчет времени распространения волны по породе, задается значение начальной скорости смещения $v_0(t)$, а на значительном удалении от этой границы $x \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow n$) значение скорости v_n принимается равным нулю.

Список литературы

1. Адушкин В. В., Козик Б. Б., Ракишев В. Р. Исследование динамики движения массива при взрывании уступов скважинными зарядами. – В кн.: Разрушение и деформирование твердой среды взрывом: Взрывное дело № 76/33. М., Недра, 1976, с. 98–109.
2. Боровиков В. А. Развитие газовой полости при взрыве цилиндрического заряда в горной породе. – ФТПРПИ, 1980, № 6, с. 40–52.
3. Боровиков В. А., Ванягин И. Ф., Цирель С. Ф. Методика расчета коэффициента сближения при уступной отбойке. – Изв. вузов. Горный журнал, 1983, № 8, с. 45–50.
4. Боровиков В. А., Ванягин И. Ф. Техника и технология взрывных работ. Л., Изд-во ЛГИ, 1985.
5. Ванягин И. Ф. Основы моделирования процессов разрушения горных пород. – Л., Изд-во ЛГИ, 1977.
6. Ванягин И. Ф., Боровиков В. А. Моделирование действия взрыва при разрушении горных пород. – Л., Изд-во ЛГИ, 1980.
7. Ванягин И. Ф., Боровиков В. А. Физическое моделирование действия взрыва и процесса разрушения горных пород взрывом. – Л., Изд-во ЛГИ, 1984.
8. Закономерности затухания волны напряжений при прохождении через трещину / В. А. Боровиков, И. Ф. Ванягин, Б. Лайхансурен, В. П. Беляцкий. – В кн.: Сейсмика промышленных взрывов: Взрывное дело № 85/42. М., 1983, с. 52–60.
9. Насонов И. Д. Моделирование горных процессов. М., Недра, 1978.
10. Карпунов Е. Г., Мисник Ю. М., Нефедов М. А. Методика измерений параметров сейсмозрывных волн в горных породах пьезоакселерометрами. – ФТПРПИ, 1977, № 5, с. 103–108.
11. Павлов М. М., Христофоров Б. П. Электромагнитная методика измерения поля массовых скоростей при взрыве цилиндрических зарядов. – В сб.: Взрывное дело № 76/33. М., Недра, 1976, с. 196–200.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М., Наука, 1970.
13. Тарасов В. С. Аналоговые вычислительные машины. Л., Изд-во ЛГИ, 1976.
14. Урмаев А. С. Основы моделирования на АВМ. М., Наука, 1978.

Содержание

Предисловие	3
1. Теоретические основы моделирования действия взрыва в различных средах	7
1.1. Элементы теории размерности	7
1.2. Основные теоремы и дополнительные условия подобия	10
1.2.1. Параметры, определяющие класс, группу явлений и единичное явление	10
1.2.2. Понятие подобия	12
1.2.3. Основные теоремы подобия и дополнительные условия подобия	14
1.3. Понятие о неполном и приближенном подобиях	24
1.4. Основные положения моделирования	29
2. Применение теории подобия и размерности к исследованию действия взрыва в различных средах	38
2.1. Критерии подобия в гидродинамике, при взрыве в воде и воздухе	38
2.1.1. Критерии подобия в гидродинамике	38
2.1.2. Критерии подобия в теории взрыва в воде и воздухе	46
2.2. Задача о сильном взрыве (задача Л. И. Седова)	52
2.3. Специфика критериев подобия при воздействии неконтактного взрыва на конструкции сооружений	56
2.4. Приближенная оценка полей давлений при взрыве зарядов в воде и воздухе в условиях безграничной среды	61
2.4.1. Поле давлений при воздушном взрыве	62
2.4.2. Поле давлений при подводном взрыве	65
2.5. Критерии подобия при взрыве в горных породах	67
2.6. Оценка полей напряжений при взрыве в горных породах в условиях безграничной среды	74
3. Физическое моделирование действия взрыва при разрушении горных пород	77
3.1. Сущность методов физического моделирования, основанных на механическом подобии Ньютона, и примеры их использования	78
3.1.1. Теоретические основы методов механического моделирования	78
3.1.2. Моделирование волны напряжений с помощью метода эквивалентных материалов	79
3.1.3. Моделирование действия взрыва в горных породах с помощью центробежного моделирования	87
3.1.4. Метод фотоупругости	93
3.1.5. Решение методом фотоупругости некоторых задач, сопровождающих действие взрыва в породе	105
3.2. Моделирование действия взрыва, основанное на динамическом и энергетическом подобиях в лабораторных и натуральных условиях	113
3.2.1. Способы регистрации процессов, протекающих в ближней зоне взрыва	114
3.2.2. Способы осуществления модельных экспериментов при изучении процессов, протекающих в средней зоне взрыва	119
3.2.3. Способы моделирования ударных воздушных и сейсмозрывных волн, вызванных массовыми взрывами в горных породах	127
3.3. Моделирование ударной волны и волны напряжений в ближней зоне взрыва	128
3.4. Моделирование развития котловой полости и зон разрушения при камуфлетном взрыве	135
3.5. Моделирование закономерностей распространения волны напряжений и сейсмозрывных волн	143

3.6.	Моделирование воздействия сейсмозрывных волн и волн напряжений на здания и сооружения	149
3.6.1.	Моделирование воздействия волн напряжений	150
3.6.2.	Моделирование сейсмического воздействия	153
3.7.	Моделирование различных явлений, связанных с поршневым действием газообразных продуктов взрыва	157
3.7.1.	Моделирование начального движения разрушенной горной породы	157
3.7.2.	Моделирование инерционного движения горной массы	166
3.7.3.	Моделирование выброса горной массы и образования воронки взрыва	170
3.8.	Моделирование навала горной массы и ее уплотнения	172
3.9.	Моделирование дробления горных пород взрывом	174
4.	Основы математического моделирования действия взрыва в горных породах	177
4.1.	Теоретические основы математического моделирования	178
4.1.1.	Теория моделей-аналогов	179
4.1.2.	Основы теории аналоговых вычислительных машин	183
4.1.3.	Счетно-решающие устройства	187
4.2.	Конструирование электрических сеточных машин и решающих устройств	188
4.2.1.	Электрические сеточные машины	188
4.2.2.	Структурные аналоговые вычислительные машины	193
4.3.	Моделирование действия взрыва методом электрогидродинамических аналогий	205
4.3.1.	Основы моделирования методом гидродинамических аналогий дробления горных пород взрывом	205
4.3.2.	Возможности метода гидродинамических аналогий для моделирования различных процессов разрушения горных пород взрывом и перспективы его развития	216
4.4.	Примеры моделирования волновых движений с использованием электрических сеток и счетно-решающих устройств	221
4.4.1.	Воспроизведение на АВМ решений обыкновенных дифференциальных уравнений	221
4.4.2.	Воспроизведение на АВМ решений дифференциальных уравнений в частных производных	223
4.4.3.	Математическое моделирование волновых движений, возникающих при взрыве	226
	Список литературы	229

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Боровиков Виктор Александрович
Ванягин Иван Федорович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА
ПРИ РАЗРУШЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Заведующий редакцией *О. И. Паркани*
Редактор издательства *Н. П. Шерстнев*
Переплет художника *Т. Н. Погореловой*
Художественный редактор *О. Н. Зайцева*
Технические редакторы *Л. Г. Лаврентьева, С. Г. Веселкина*
Корректор *Л. В. Зайцева*

ИБ № 8223

Сдано в набор 26.01.90. Подписано в печать 05.07.90. Т – 07591. Формат 60 x 88 ¹/₁₆. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл.печ. л. 14,21. Усл. кр. - отт. 14,45. Уч. - изд. л. 17,38. Тираж 1120 экз. Заказ 3170/2222-9. Цена 3 р. 50 к.

Ордена "Знак Почета" издательство "Недра"
125047 Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.

Набрано в Можайском полиграфкомбинате, В/О "Совэкспорткнига" Государственного комитета СССР по печати.

Отпечатано в Московской типографии № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата"
Госкомитета СССР по печати.
109033, Москва, Волочаевская ул., 40

3 р. 50 к.

7

79454

Итого - 1

55/4

1 бл к

НЕДРА