

В. П. Морозов

КУРС
СФЕРОИДИЧЕСКОЙ
ГЕОДЕЗИИ



В. П. Морозов

КУРС
СФЕРОИДИЧЕСКОЙ
ГЕОДЕЗИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ДОПУЩЕНО МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ,
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ «АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЯ»



МОСКВА «НЕДРА» 1979

Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. М., Недра, 1979, 296 с.

В книге изложены следующие основные вопросы: земной эллипсоид как координатная поверхность, свойства геодезической линии и нормального сечения, решение малых геодезических треугольников, способы решения главных геодезических задач и различных засечек с помощью геодезической линии, нормального и центрального сечений, способы решения геодезических задач между точками в пространстве, дифференциальные формулы для различных систем геодезических координат, теория и практика применения плоских конформных координат в проекциях Гаусса — Крюгера, стереографической и конической.

Решения всех задач иллюстрируются примерами. Для решения основных геодезических задач приведены алгоритмы для вычислений на счетных машинах.

Книга предназначена в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по астрономо-геодезической специальности. Она может быть использована также научными и инженерно-техническими работниками, занимающимися математической обработкой геодезических сетей и применением геодезических методов в специальных инженерно-технических работах.

Табл. 40, ил. 66, список лит. — 21 назв.

Рецензенты: кафедра высшей геодезии Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии и доктор техн. наук Е. Г. Бойко (Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева).

Предисловие

По сравнению с первым изданием «Курса сфероидической геодезии» (1969 г.) во втором издании содержание учебника подверглось значительной переработке, вызванной, во-первых, требованием отражения новых вопросов, необходимых для решения современных задач сфероидической геодезии, и, во-вторых, требованием более детального освещения практической стороны решения геодезических задач с учетом использования современной вычислительной техники.

В книгу включены следующие новые вопросы: 1) решение «хордового» треугольника и прямолинейного треугольника в пространстве, 2) решение главных геодезических задач вдоль нормального и центрального сечений, 3) угловая, линейная и гиперболическая засечки на шаре и на эллипсоиде, 4) неитеративный способ вычисления широты по пространственным координатам, 5) дифференциальные формулы для прямолинейного отрезка в пространстве и 6) теория и практика применения конической и стереографической проекций в инженерно-геодезических работах.

С целью сохранения прежнего объема книги исключена чисто математическая часть учебника (элементы дифференциальной геометрии и приложение, состоящее из элементарных математических формул), а также опущено изложение ряда теоретических вопросов, не имеющих практического значения или же устаревших, наконец, сокращено изложение теоретических основ конформного изображения эллипсоида на плоскости.

Существенная методическая переработка теоретического обоснования почти всех вопросов курса позволила изложить выводы формул в достаточно лаконичной и вместе с тем более доступной для студентов форме без ущерба строгости изложения.

В отличие от первого издания, в котором были помещены лишь единичные примеры, во втором издании решение почти всех задач иллюстрируется числовыми примерами, а для решения наиболее крупных задач приведены алгоритмы, которые могут быть использованы при вычислениях на современных вычислительных машинах. В числовых примерах показаны максимальные возможности практического использования той или иной формулы.

Таким образом, содержание второго издания учебника, по мнению автора, в достаточной мере отвечает современным требованиям к уровню теоретической и практической подготовки инженера-геодезиста в области сфероидической геодезии.

Конечной целью всех видов геодезических измерений является определение взаимного положения точек земной поверхности (и околоземного пространства) в той или иной системе координат. К достижению этой цели как на поверхности Земли в целом, так и на небольших ее участках направлены усилия науки и производства в области геодезии.

Методы определения взаимного положения точек на всей поверхности Земли в единой системе координат являются предметом исследования высшей геодезии. Основной задачей высшей геодезии в настоящее время является изучение фигуры Земли, под которой, по современным взглядам, понимают на суше физическую поверхность твердой оболочки Земли, а на морях и океанах — их невозмущенную поверхность.

«Задача изучения фигуры Земли... сводится к определению истинных координат точек, связанных с Землей» (М. С. Молоденский).

В качестве исходной координатной поверхности принимается математическая поверхность эллипсоида вращения. Размеры и ориентировка в пространстве этой поверхности устанавливаются так, чтобы она была достаточно близка к основной уровенной поверхности — геоиду. Такой эллипсоид вращения называется земным эллипсоидом или земным сфероидом.

Из любой точки земной поверхности или околоземного пространства можно провести нормаль к поверхности земного эллипсоида. Тогда положение этой точки будет однозначно определяться тремя пространственными геодезическими координатами B , L и H , из которых широта B и долгота L устанавливают положение нормали, а высота H — расстояние по нормали от поверхности эллипсоида до данной точки.

Вследствие чрезвычайной сложности внешнего вида физической поверхности Земли ее нельзя представить каким-либо математическим уравнением. Поэтому изучение фигуры Земли состоит прежде всего в определении координат ее отдельных точек — геодезических пунктов, которые связаны между собой измеренными расстояниями и направлениями. Участки между геодезическими пунктами изучаются более простыми, чем в высшей геодезии, средствами топографии.

Все геодезические измерения связаны с направлениями отвесных линий. В каждой точке пространства направление отвеса образует с направлением нормали к поверхности эллипсоида небольшой угол, называемый *уклонением отвеса*. Поэтому во все измеренные величины необходимо предварительно ввести поправки за уклонение отвеса. Лишь после этого откроется воз-

возможность установления математических связей между измеренными величинами для их уравнивания и вычисления геодезических координат всех пунктов.

На всех этапах изучения фигуры Земли как при выводе размеров и ориентировки земного эллипсоида, так и при редуцировании измеренных величин с учетом уклонений отвеса совершенно необходимо совместное использование результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений, а в необходимых случаях и результатов наблюдений искусственных спутников Земли. Методика использования этих данных для решения основной задачи высшей геодезии является предметом изучения в самостоятельном разделе высшей геодезии, называемом теоретической геодезией.

Сферодическая геодезия является одним из важнейших разделов высшей геодезии.

В сферодической геодезии изучаются прежде всего методы определения взаимного положения точек, расположенных на поверхности земного эллипсоида, в системе геодезических координат B и L . Эту основную часть сферодической геодезии можно назвать геодезией на сфероиде.

Наряду с системой геодезических координат в сферодической геодезии изучается система плоских координат, для установления которой применяют то или иное картографическое изображение поверхности эллипсоида на плоскости. Переход к системе плоских координат существенно облегчает использование геодезических пунктов при создании топографических карт и при решении многих практических задач на небольших участках земной поверхности.

Наконец, в сферодической геодезии изучаются методы определения взаимного положения точек, расположенных над поверхностью эллипсоида: непосредственно на земной поверхности (на малых высотах) или же в околоземном пространстве (на больших высотах). В этом случае используют систему пространственных декартовых координат x , y , z или систему пространственных геодезических координат B , L , H .

Таким образом, в сферодической геодезии изучают геометрические методы определения взаимного положения точек земной поверхности и околоземного пространства, в которых в качестве исходной координатной поверхности принята поверхность земного эллипсоида, а используемые в этих методах измеренные величины свободны от влияния уклонения отвеса.

В зарубежной литературе сферодическую геодезию иногда называют математической геодезией или геометрической геодезией.

Глава I

ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Земным эллипсоидом называется эллипсоид вращения, поверхность которого как по форме, так и по размерам достаточно близка к поверхности геоида.

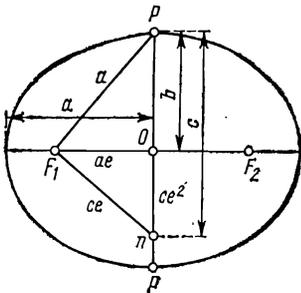


Рис. 1

Любой эллипс определяется размерами его большой a и малой b полуосей (рис. 1). Зная размеры полуосей, находим положение фокусов F_1 и F_2 эллипса

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (I.1)$$

Относительная величина e , определяемая отношением

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (I.2)$$

называется эксцентриситетом эллипса.

В геодезии применяют также и другие относительные величины:

второй эксцентриситет

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad (I.3)$$

сжатие

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad (I.4)$$

величины, не имеющие общепринятого названия,

$$n = \frac{a - b}{a + b}, \quad (I.5)$$

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (I.6)$$

Основное свойство эллипса: сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

Размеры эллипса определяются размерами его большой полуоси a . Форма эллипса определяется одной из приведенных выше относительных величин, чаще всего сжатием α .

Кроме большой и малой полуосей эллипса, часто применяется еще одна линейная величина, определяемая равенством

$$c = \frac{a^2}{b}. \quad (I.7)$$

Эта величина равна гипотенузе прямоугольного треугольника PF_1n (см. рис. 1).

Все линейные и относительные величины эллипса называются элементами эллипса.

Пользуясь формулами (I.2)—(I.7), выразим отношение полуосей эллипса через другие его элементы:

$$\frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{a}{c} = \frac{e}{e'}. \quad (I.8)$$

Отсюда нетрудно найти следующие основные зависимости между элементами эллипса:

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = c(1 - e^2) = \frac{a(1 - n)}{1 + n} = \frac{a^2}{c}, \quad (I.9)$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2} = \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{a(1 + n)}{1 - n}, \quad (I.10)$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{2n}{1 + n}, \quad (I.11)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2}, \quad (I.12)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} = \frac{4n}{(1 - n)^2}, \quad (I.13)$$

$$n = \frac{\alpha}{2 - \alpha} = \frac{\alpha^2}{e^2}, \quad (I.14)$$

$$\frac{a + b}{2} = \frac{a}{1 + n} = \frac{b}{1 - n} = \frac{c(1 - n)}{(1 + n)^2} = a \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (I.15)$$

Полезно запомнить приближенные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx 2n \approx \frac{e^2}{2}, \\ e^2 &\approx e'^2 \approx 2\alpha \approx 4n, \\ n &\approx \frac{\alpha}{2} \approx \frac{e^2}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (I.16)$$

Элементы эллипса являются одновременно элементами эллипсоида вращения, образующей линией которого является этот

эллипс. Поэтому все приведенные выше элементы эллипса и соотношения между ними можно полностью отнести к поверхности земного эллипсоида.

Для вывода численных значений элементов земного эллипсоида, обычно большей полуоси и сжатия, используется большое количество геодезических, астрономических, правиметрических и спутниковых измерений. Методы вывода элементов земного эллипсоида изучаются в третьей части курса высшей геодезии, называемой теоретической геодезией.

В Советском Союзе и в ряде других стран для использования при выполнении геодезических и картографических работ приняты следующие значения исходных элементов земного эллипсоида Красовского, полученные ЦНИИГАиК в 1940 г.:

$$a = 6\,378\,245 \text{ м,}$$

$$\alpha = 1 : 298,3.$$

Значения других элементов эллипсоида, вычисленные по исходным, приведены ниже:

$$b = 6\,356\,863,0188 \text{ м,}$$

$$c = 6\,399\,698,9018 \text{ м,}$$

$$\alpha = 0,0033523299,$$

$$n = 0,0016789792,$$

$$e^2 = 0,0066934216,$$

$$e'^2 = 0,0067385254,$$

$$\sqrt{1 - e^2} = 0,9966476701,$$

$$\sqrt{1 + e'^2} = 1,0033636058,$$

$$\frac{a + b}{2} = 6\,367\,554,0094 \text{ м,}$$

$$a - b = a\alpha = 21\,381,9812 \text{ м,}$$

$$c - a = c\alpha = 21\,453,9018 \text{ м,}$$

$$c - b = ce^2 = 42\,835,8830 \text{ м.}$$

Для приближенных расчетов полезно запомнить следующие округленные значения элементов земного эллипсоида:

$$a = 6400 \text{ км,} \quad a - b = 21 \text{ км,}$$

$$\alpha = \frac{1}{300}, \quad e^2 = \frac{1}{150}, \quad n = \frac{1}{600}.$$

В геодезии земной эллипсоид обычно отождествляют с понятием земного сфероида. В более общем понимании сфероид — это геометрическое тело, близкое по форме к сфере или шару. Поэтому земной сфероид рассматривается как эллипсоид вращения с малым сжатием.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИпсоИДА

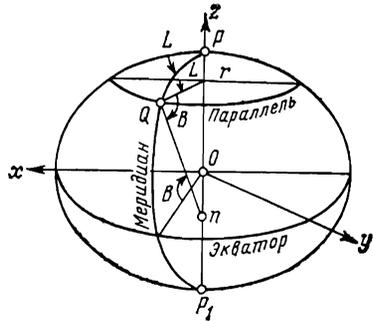
Установим систему декартовых прямоугольных пространственных координат следующим образом. Начало координат поместим в центре эллипсоида, ось z направим вдоль оси вращения, ось x — в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, ось y дополняет систему координат до правой (рис. 2).

Из аналитической геометрии известно, что в этой системе координат уравнение поверхности эллипсоида вращения в канонической форме имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (I.17)$$

Умножив его на a^2 , получим другой вид уравнения поверхности эллипсоида вращения:

$$x^2 + y^2 + z^2(1 + e'^2) = a^2. \quad (I.18) \quad \text{Рис. 2}$$



Возьмем плоскость $z = \text{const}$. Найдём след пересечения поверхности эллипсоида этой плоскостью. Совместное решение уравнений этой плоскости и поверхности эллипсоида даст нам уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{const}, \quad (I.19)$$

где r — радиус окружности.

Таким образом, плоскости $z = \text{const}$ в пересечении с поверхностью эллипсоида дают окружности. Эти окружности называются параллелями ($r = \text{const}$).

Параллель с наибольшим радиусом $r = a$ ($z = 0$) называется экватором.

Экватор делит эллипсоид на две симметричные половины. Верхний полусфероид с полюсом P (см. рис. 2) называется северным полусфероидом, нижний с полюсом P_1 — южным полусфероидом.

Любой параллели с радиусом r в северном полусфероиде соответствует с точно таким же радиусом параллель в южном полусфероиде.

Пересекая поверхность эллипсоида вращения плоскостями, проходящими через ось вращения, получим совершенно одинаковые кривые — эллипсы. Половина каждого эллипса, расположенная между полюсами, называется меридианом.

Если в уравнении (I.17) исключим координаты x и y по равенству (I.19), то получим уравнение меридиана

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (I.20)$$

Параллели и меридианы можно принять в качестве системы ортогональных координатных линий на эллипсоиде. Это возможно, так как каждая параллель пересекается с каждым меридианом под прямым углом, а их пересечение определяет положение единственной точки на поверхности данного полусфероида. Исключения составляют полюсы P и P_1 , в которых сходятся все меридианы. Полюсы представляют собой так называемые особые точки поверхности для данной системы координатных линий — меридианов и параллелей.

Конечно, для какой-либо другой системы координатных линий полюсы могут и не быть особыми точками.

Семейство параллелей и семейство меридианов представляют собой наиболее простую сеть координатных линий на поверхности эллипсоида.

Эта сеть аналогична сети координатных линий в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости с той лишь разницей, что в последней координатные линии — прямые, тогда как меридианы и параллели — кривые линии.

В качестве координат на поверхности эллипсоида можно было бы ввести линейные величины — длины дуг меридианов и параллелей. Такая система координат в принципе возможна, но крайне неудобна и создает серьезные трудности при обработке результатов геодезических измерений, хотя она применяется в математической картографии в некоторых случаях при изображении эллипсоида на плоскости.

Как известно из дифференциальной геометрии, для одного и того же семейства координатных линий можно назначить различного рода координаты, каждая из которых должна сохранять свою величину во всех точках одной и той же координатной линии. Например, для параллели в качестве координаты можно было бы взять радиус параллели r или аппликату z .

В геодезии в качестве координат для меридианов и параллелей приняты угловые величины. Перейдем к их рассмотрению.

Примем один из меридианов за начальный. Тогда положение любого другого меридиана будет определяться двугранным углом, составленным плоскостью начального меридиана и плоскостью данного меридиана. Этот угол имеет одну и ту же величину для всех точек данного меридиана и, следовательно, может быть принят в качестве координаты для меридиана. Он обозначается буквой L и называется геодезической долготой.

Долготы, отсчитываемые от плоскости начального меридиана к востоку (в полюсе — против движения часовой стрелки) в пределах от 0 до $+180^\circ$ называются восточными долготами, а к западу в пределах от 0 до -180° — западными долготами.

Таким образом, меридиан есть координатная линия, во всех точках которой геодезическая долгота имеет одну и ту же величину ($L = \text{const}$).

Перейдем к установлению координаты для параллели.

В некоторой точке Q (см. рис. 2) проведем главную нормаль меридиана, которая пересечет ось вращения в точке n .

Вследствие симметричности поверхности эллипсоида относительно меридиана прямая Qn будет перпендикулярна одновременно к касательной к меридиану и касательной к параллели, следовательно, она перпендикулярна к касательной плоскости в точке Q . А это означает, что направление главной нормали меридиана совпадает с направлением нормали к поверхности эллипсоида.

Острый угол, составленный нормалью к поверхности эллипсоида и плоскостью экватора (или плоскостью любой параллели), называется геодезической широтой и обозначается буквой B .

Геодезическая широта отсчитывается от плоскости экватора в пределах от 0 до 90° . Для точек, расположенных в северном полушароиде, ее принято считать положительной, а в южном полушароиде — отрицательной.

Таким образом, параллель есть координатная линия, во всех точках которой геодезическая широта имеет одну и ту же величину ($B = \text{const}$).

Система геодезических координат B и L представляет собой главную систему координат, позволяющую однозначно определять положение любой точки на поверхности эллипсоида. Она широко применяется в геодезии и картографии. Практическое значение ее заключается в том, что геодезические координаты B и L незначительно отличаются от астрономических координат φ и λ , определяемых астрономическими методами независимо от геодезических измерений.

Из других величин, имеющих постоянное значение для данной параллели, в геодезии применяется еще одна угловая величина, которая определяется следующим построением.

Возьмем отрезок прямой, равный большой полуоси эллипсоида, и отложим его так, чтобы один конец его лежал на поверхности эллипсоида в некоторой точке Q , а другой — на оси вращения эллипсоида (рис. 3) в точке h .

Острый угол, составленный отрезком Qh с плоскостью экватора, называется приведенной широтой и обозначается буквой u .

Из рис. 3 видно, что

$$r = a \cos u. \quad (I.21)$$

Это очень простая формула для вычисления радиуса параллели. Если это его значение подставить в уравнение меридиана (I.20), то получим

$$z = b \sin u. \quad (I.22)$$

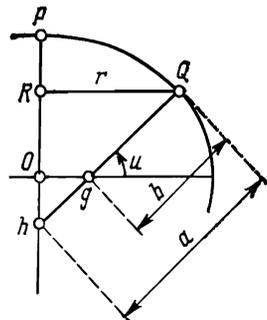


Рис. 3

Из этого равенства следует, что отрезок Qg (см. рис. 3) равен малой полуоси эллипсоида. Тогда

$$hg = a - b = a\alpha,$$

т. е. для всех точек меридиана отрезок hg имеет одну и ту же величину, равную разности полуосей эллипсоида. Это свойство используется в одном из известных приборов, предназначенных для вычерчивания эллипса.

Установим зависимость между приведенной широтой и геодезической долготой, с одной стороны, и декартовыми координатами, с другой.

Совместим ось x с плоскостью начального меридиана. В этом случае по рис. 2 для точки Q можем написать

$$x = r \cos L,$$

$$y = r \sin L.$$

Если теперь радиус параллели заменить его выражением по равенству (I.21) и учесть (I.22), то получим

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos L, \\ y &= a \cos u \sin L, \\ z &= b \sin u. \end{aligned} \right\} \quad (I.23)$$

Равенства (I.23) представляют собой так называемые параметрические уравнения поверхности эллипсоида.

Из них нетрудно найти формулы обратного перехода

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{y}{x}, \\ \operatorname{tg} u &= \frac{z \sqrt{1 + e'^2}}{x \cos L + y \sin L}. \end{aligned} \right\} \quad (I.24)$$

Введем на осях декартовых координат единичные векторы:

\bar{i} — вдоль оси x ,

\bar{j} — вдоль оси y ,

\bar{k} — вдоль оси z .

Напишем уравнение поверхности эллипсоида в векторной форме

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (I.25)$$

где \bar{r} — радиус-вектор, проведенный из центра эллипсоида до любой точки его поверхности; координаты радиуса-вектора определяются формулами (I.23).

Уравнения поверхности эллипсоида в функции геодезических координат B и L будут получены в § 6.

Координаты u , B и L в математике называют криволинейными координатами, так как соответствующие им координатные линии — меридианы и параллели — представляют собой кривые линии.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СФЕРОИДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Почти во всех формулах сфероидической геодезии присутствуют две величины, зависящие от эксцентриситета эллипсоида и широты. Они обозначаются V и W и определяются следующими выражениями:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (I.26)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}. \quad (I.27)$$

V и W называются основными сфероидическими функциями. Кроме них, очень часто встречается еще одна вспомогательная функция эксцентриситета

$$\eta = e' \cos B. \quad (I.28)$$

Она связана с функцией V такой зависимостью:

$$V^2 = 1 + \eta^2. \quad (I.29)$$

Установим связь между функциями V и W .

Так как

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} (1 - \sin^2 B) = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2},$$

то

$$W = V \sqrt{1 - e^2}. \quad (I.30)$$

Пользуясь соотношениями (I.9), нетрудно найти еще следующие зависимости:

$$aW = bV = \sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}, \quad (I.31)$$

$$cW = aV, \quad (I.32)$$

$$V - W = n(V + W) = \alpha V, \quad (I.33)$$

$$V^2 - W^2 = e^2 V^2 = e'^2 W^2. \quad (I.34)$$

§ 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ И ПРИВЕДЕННОЙ ШИРОТАМИ

При элементарном перемещении вдоль меридиана из точки Q (рис. 4) с широтой B в точку Q_1 широта увеличится на dB , координата z увеличится на dz , а радиус параллели уменьшится на dr .

Из элементарного треугольника QQ_1Q_2 можем написать

$$\frac{-dr}{dz} = \operatorname{tg} B.$$

Дифференциалы dr и dz найдем из равенств (I.21) и (I.22)

$$dr = -a \sin u du,$$

$$dz = b \cos u du.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} u. \quad (\text{I.35})$$

Это основная формула, устанавливающая зависимость между геодезической и приведенной широтами, из которой можно найти еще другие формулы связи, если воспользоваться соотношениями (I.9):

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} u, \quad (\text{I.36})$$

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B, \quad (\text{I.37})$$

$$\operatorname{tg} u = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B, \quad (\text{I.38})$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u = \alpha \operatorname{tg} B, \quad (\text{I.39})$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u = n(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u). \quad (\text{I.40})$$

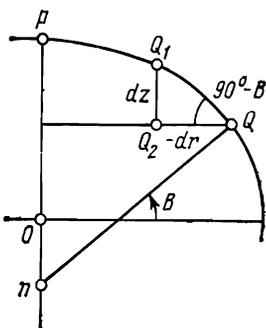


Рис. 4

Из равенства (I.37) получаем

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 B - e^2 \operatorname{tg}^2 B,$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 B} - \frac{e^2 \sin^2 B}{\cos^2 B}$$

или

$$\frac{\cos^2 B}{\cos^2 u} = 1 - e^2 \sin^2 B = W^2.$$

Таким образом, находим

$$\cos u = \frac{\cos B}{W}. \quad (\text{I.41})$$

Перемножим равенства (I.41) и (I.37) и учтем зависимость между V и W по формуле (I.30). Тогда получим

$$\sin u = \frac{\sin B}{V}. \quad (\text{I.42})$$

Дифференцируя равенство (I.37), находим

$$\frac{du}{\cos^2 u} = \sqrt{1 - e^2} \frac{dB}{\cos^2 B},$$

откуда, учитывая формулы (I.41) и (I.30), получаем

$$du = \frac{dB}{\sqrt{W}}. \quad (\text{I.43})$$

Теперь найдем формулы для вычисления разности геодезической и приведенной широт. Так как

$$\frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u} = \frac{\sin(B - u)}{\sin(B + u)},$$

то с учетом выражения (I.40) можем написать

$$\sin(B - u) = n \sin(B + u). \quad (\text{I.44})$$

Разность широт по этой формуле определяется последовательными приближениями, так как в правой части равенства содержится функция обеих широт.

Найдем неинтеративные формулы для вычисления разности широт. Правую часть равенства (I.44) представим одновременно в двух видах

$$\sin(B - u) = n \sin[2B - (B - u)] = n \sin[2u + (B - u)]$$

или

$$\begin{aligned} \sin(B - u) &= n [\sin 2B \cos(B - u) - \cos 2B \sin(B - u)] = \\ &= n [\sin 2u \cos(B - u) + \cos 2u \sin(B - u)]. \end{aligned}$$

Разделив на $\cos(B - u)$, найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(B - u) &= n \sin 2B - n \cos 2B \operatorname{tg}(B - u) = \\ &= n \sin 2u + n \cos 2u \operatorname{tg}(B - u), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg}(B - u) = \frac{n \sin 2B}{1 + n \cos 2B} = \frac{n \sin 2u}{1 - n \cos 2u}. \quad (\text{I.45})$$

Из этих равенств нетрудно найти выражения для непосредственного вычисления разности широт $B - u$, если воспользоваться следующей формулой Лагранжа:

$$\operatorname{tg} z = \frac{n \sin \alpha}{1 \pm n \cos \alpha} \quad (n < 1),$$

$$z = n \sin \alpha \mp \frac{n^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{n^3}{3} \sin 3\alpha \mp \dots$$

Применяя эти соотношения к равенствам (I.45), получаем

$$B-u = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \dots, \quad (I.46)$$

$$B-u = n \sin 2u + \frac{n^2}{2} \sin 4u + \frac{n^3}{3} \sin 6u + \dots. \quad (I.47)$$

Численное значение величины n возьмем для эллипсоида Красовского и умножим обе части равенств на ρ'' . Тогда

$$(B-u)'' = 346,3143'' \sin 2B - 0,2907'' \sin 4B + 0,0003'' \sin 6B - \dots, \quad (I.48)$$

$$(B-u)'' = 346,3143'' \sin 2u + 0,2907'' \sin 4u + 0,0003'' \sin 6u + \dots. \quad (I.49)$$

Максимальное значение $B-u$ будет на широте 45° :

$$(B-u)_{\max} = 346,3140'' = 5'46,3140''.$$

В практике геодезических и астрономических работ применяют также геоцентрическую широту Φ , представляющую собой угол между радиусом-вектором OQ (см. рис. 3) и плоскостью экватора.

По чертежу можно установить ее связь с геодезической широтой в таком виде:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{z}{r} = \frac{b \sin u}{a \cos u} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u.$$

С учетом равенства (I.35) получим

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} B = (1-e^2) \operatorname{tg} B. \quad (I.50)$$

Отсюда нетрудно найти еще такие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \Phi}{\sin B} &= \frac{1-e^2}{\sqrt{1-(2e^2-e^4)\sin^2 B}} = \sqrt{1-(2e^2-e^4)\cos^2 \Phi}, \\ \frac{\cos \Phi}{\cos B} &= \frac{1}{\sqrt{1-(2e^2-e^4)\sin^2 B}} = \frac{\sqrt{1-(2e^2-e^4)\cos^2 \Phi}}{1-e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (I.51)$$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДУГ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ

Пользуясь равенствами (I.25) и (I.23), уравнение поверхности эллипсоида напишем в таком виде:

$$\bar{r} = (a \cos u \cos L) \bar{i} + (a \cos u \sin L) \bar{j} + (b \sin u) \bar{k}. \quad (I.52)$$

Дифференциал радиуса-вектора любой кривой связан с дифференциалом дуги этой кривой равенством

$$d\bar{r} = d\bar{s}t,$$

где \bar{t} — единичный вектор касательной к этой кривой.

С другой стороны, этот же дифференциал радиуса-вектора как функция двух независимых переменных определяется выражением

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial L} dL.$$

Следовательно,

$$d\bar{s}t = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial L} dL. \quad (I.53)$$

Используем эти соотношения для определения длин дуг меридиана и параллели.

Введем обозначения:

dX — дифференциал дуги меридиана,

\bar{t}_B — единичный вектор касательной к меридиану.

Для меридиана ($L = \text{const}$) по равенству (I.53) можно написать

$$dX\bar{t}_B = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du,$$

откуда

$$dX^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right)^2 du^2.$$

Дифференцируя уравнение (I.52) по приведенной широте, найдем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = (-a \sin u \cos L) \bar{i} - (a \sin u \sin L) \bar{j} + (b \cos u) \bar{k}.$$

Следовательно,

$$dX^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2.$$

Перейдем от приведенной широты к геодезической по следующим формулам, полученным в § 4:

$$\sin u = \frac{\sin B}{V}, \quad \cos u = \frac{\cos B}{W}, \quad du = \frac{dB}{VW}.$$

Тогда

$$dX^2 = \left(\frac{a^2}{V^2} \sin^2 B + \frac{b^2}{W^2} \cos^2 B \right) \frac{dB^2}{V^2 W^2}.$$

Так как (см. § 3)

$$\frac{a}{V} = \frac{b}{W}, \quad W^2 = V^2(1 - e^2),$$

то

$$dX^2 = \frac{a^2 dB^2}{V^4 W^2} = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{W^6} dB^2.$$

Отсюда окончательно получим

$$dX = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} dB. \quad (1.54)$$

Теперь введем обозначения для параллели:

dY — дифференциал дуги параллели,

\bar{i}_L — единичный вектор касательной к параллели.

Так как для параллели $u = \text{const}$, то по равенству (1.53) можем написать

$$dY \bar{i}_L = \frac{\partial \bar{r}}{\partial L} dL,$$

откуда

$$dY^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial L} \right)^2 dL^2.$$

Дифференцируя уравнение (1.52) по долготе, найдем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial L} = (-a \cos u \sin L) \bar{i} + (a \cos u \cos L) \bar{j}.$$

Следовательно,

$$dY^2 = a^2 \cos^2 u dL^2.$$

Переходя к геодезической широте, получаем

$$dY = \frac{a}{W} \cos B dL. \quad (1.55)$$

§ 6. ГЛАВНЫЕ РАДИУСЫ КРИВИЗНЫ

Вывод формул

В произвольно выбранной точке на поверхности восставим нормаль к ней и через эту нормаль проведем в разных направлениях множество нормальных плоскостей. Каждая нормальная плоскость пересечет поверхность по кривой линии, называемой нормальным сечением. Каждое нормальное сечение имеет свою кривизну. Из всего полученного таким образом пучка нормальных сечений можно выделить два таких нормальных сечения, из которых одно имеет наибольшую кривизну, а другое — наименьшую кривизну.

Эти два сечения называются главными нормальными сечениями; направления, в которых они располагаются, — главными направлениями, а их радиусы кривизны — главными радиусами кривизны.

Главные нормальные сечения всегда взаимно перпендикулярны, т. е. угол между главными направлениями всегда равен 90° .

На поверхности могут встретиться такие точки, в которых во всех направлениях нормальные сечения имеют одинаковую кривизну, следовательно, среди них невозможно выделить главные нормальные сечения. Такие точки называются точками округления или омбилическими точками. Например, на поверхности шара все точки являются омбилическими.

Установить положение главных нормальных сечений на поверхности эллипсоида вращения не представляет труда. В самом деле, плоскость меридиана делит поверхность эллипсоида вращения на две симметричные половины. Ясно, что в заданной точке поверхности любые два нормальных сечения, симметрично расположенных относительно меридиана, имеют одну и ту же кривизну, поэтому такие сечения не могут быть главными. Следовательно, меридиан будет одним из двух главных нормальных сечений.

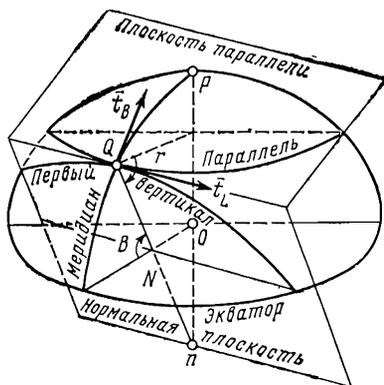


Рис. 5

Вторым главным нормальным сечением будет сечение, перпендикулярное к меридиану. Это сечение носит особое название — первый вертикал.

Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида вращения имеют свои обозначения:

M — радиус кривизны меридиана;

N — радиус кривизны первого вертикала.

Главные радиусы кривизны M и N играют весьма важную роль при решении всех задач на поверхности земного эллипсоида. Найдем формулы для их вычисления.

Для любой кривой радиус ее кривизны в данной точке равен отношению дифференциала дуги кривой к дифференциалу угла между касательными к кривой в конечных точках этой дуги или, что одно и то же, к дифференциалу угла между главными нормальными кривой в конечных точках дуги.

Следовательно, радиус кривизны меридиана можно найти по формуле

$$M = \frac{dX}{d\beta}, \quad (I.56)$$

а радиус кривизны параллели — по формуле

$$r = \frac{dY}{dL}, \quad (I.57)$$

Параллель является наклонным сечением поверхности эллипсоида. Плоскость параллели составляет с плоскостью первого вертикала угол, равный геодезической широте B (рис. 5). Поэтому по теореме Менье можем написать

$$r = N \cos B. \quad (I.58)$$

Используя ранее полученные выражения для дифференциалов дуг меридианов и параллелей (I.54) и (I.55), а также равенство (I.58), найдем формулы для вычисления главных радиусов кривизны

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^2} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}}, \quad (I.59)$$

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}. \quad (I.60)$$

Учитывая, что

$$a = c \sqrt{1-e^2}, \quad W = V \sqrt{1-e^2},$$

найдем еще такие выражения:

$$M = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{\sqrt{(1+e'^2 \cos^2 B)^3}}, \quad (I.61)$$

$$N = \frac{c}{V} = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}}. \quad (I.62)$$

Как видно из этих формул, величина главных радиусов зависит от широты.

Для ответа на вопрос, какой из двух радиусов больше другого, достаточно образовать их отношение

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B.$$

Очевидно, что $N > M$ во всех точках поверхности эллипсоида, кроме полюсов.

На экваторе ($B = 0^\circ$) получим

$$M = a(1-e^2), \quad N = a,$$

тогда как на полюсе ($B = 90^\circ$) будет

$$M = N = c.$$

Следовательно, полюсы являются омбилическими точками поверхности эллипсоида вращения. В полюсах все нормальные сечения представляют собой меридианы.

В связи с этим линейную величину c , введенную в § 1, называют полярным радиусом кривизны.

Вычисление главных радиусов кривизны

При решении различного рода задач на поверхности эллипсоида часто приходится вычислять значения главных радиусов кривизны. При использовании современных вычислительных средств вычисление M и N по формулам (I.59) — (I.62) не вызывает затруднений, так как наиболее сложная операция — извлечение квадратного корня — выполняется по стандартной программе как на больших, так и на малых ЭВМ.

Однако в ряде случаев вычислительной практики бывает необходимо располагать более простыми, не иррациональными выражениями для M и N .

Найдем такие выражения в виде разложений в ряды.

Равенства (I.59) и (I.60) представим в таком виде:

$$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2},$$

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}.$$

Правые части этих равенств разложим в степенные ряды по биному Ньютона. Тогда

$$M = m_0 + m_2 \sin^2 B + m_4 \sin^4 B + m_6 \sin^6 B + m_8 \sin^8 B + \dots, \quad (I.63)$$

$$N = n_0 + n_2 \sin^2 B + n_4 \sin^4 B + n_6 \sin^6 B + n_8 \sin^8 B + \dots. \quad (I.64)$$

Коэффициенты этих рядов являются постоянными величинами и имеют такой вид:

$$\left. \begin{array}{ll} m_0 = a(1 - e^2), & n_0 = a, \\ m_2 = \frac{3}{2}e^2 m_0, & n_2 = \frac{1}{2}e^2 n_0, \\ m_4 = \frac{5}{4}e^2 m_2, & n_4 = \frac{3}{4}e^2 n_2, \\ m_6 = \frac{7}{6}e^2 m_4, & n_6 = \frac{5}{6}e^2 n_4, \\ m_8 = \frac{9}{8}e^2 m_6, & n_8 = \frac{7}{8}e^2 n_6, \\ m_{10} = \frac{11}{10}e^2 m_8, & n_{10} = \frac{9}{10}e^2 n_8. \end{array} \right\} \quad (I.65)$$

Ниже приведены численные значения этих коэффициентов, найденные по элементам эллипсоида Красовского:

$$\begin{array}{ll} m_0 = 6\,335\,552,71700, & n_0 = 6\,378\,245,00000, \\ m_2 = 63\,609,78833, & n_2 = 21\,346,14149, \\ m_4 = 532,20892, & n_4 = 107,15904, \\ m_6 = 4,15602, & n_6 = 0,59772, \\ m_8 = 0,03130, & n_8 = 0,00350, \\ m_{10} = 0,00023, & n_{10} = 0,00002. \end{array}$$

Ряды (I.63) и (I.64) можно представить еще в другом виде, если степени синусов широты заменить тригонометрическими функциями кратного аргумента по следующим формулам:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B,$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B,$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B,$$

$$\sin^8 B = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2B + \frac{7}{32} \cos 4B - \frac{1}{16} \cos 6B + \frac{1}{128} \cos 8B.$$

Сгруппировав коэффициенты при каждом косинусе одинакового аргумента, получим

$$M = a_0 - a_2 \cos 2B + a_4 \cos 4B - a_6 \cos 6B + a_8 \cos 8B - \dots, \quad (I.66)$$

$$N = b_0 - b_2 \cos 2B + b_4 \cos 4B - b_6 \cos 6B + b_8 \cos 8B - \dots. \quad (I.67)$$

Коэффициенты ряда (I.66) определяются следующими выражениями:

$$a_0 = m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8 + \dots,$$

$$a_2 = \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6 + \frac{7}{16} m_8 + \dots,$$

$$a_4 = \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16} m_6 + \frac{7}{32} m_8 + \dots,$$

$$a_6 = \frac{m_6}{32} + \frac{m_8}{16} + \dots,$$

$$a_8 = \frac{m_8}{128} + \dots.$$

Коэффициенты ряда для N определяются этими же равенствами, если в них величины a_i заменить через b_i , а величины m_i через n_i ($i=0, 2, 4, 6, 8, \dots$). Очевидно, ряды (I.66) и (I.67) сходятся гораздо быстрее, чем ряды (I.63) и (I.64). Поэтому при одном и том же числе членов ряды (I.66) и (I.67) дают более точные значения M и N , чем ряды (I.63) и (I.64).

Однако при вычислениях на счетных машинах проще и удобнее использовать степенные ряды. Для того чтобы повысить их точность, не увеличивая числа членов, применяется особая математическая операция, называемая экономизацией степенных рядов (см. приложение). Сущность ее состоит в том, что путем изменения коэффициентов ряда по определенным правилам достигается повышение точности ряда без увеличения числа членов.

Ниже приведены сокращенные степенные ряды, полученные методом экономизации рядов (I.63) и (I.64). В квадратных скобках показан отброшенный член, величина которого составляет

погрешность результата вычисления по формуле сокращенного ряда,

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(m_0 - \frac{m_8}{128} \right) + \left(m_2 + \frac{m_8}{4} \right) \sin^2 B + \\ &+ \left(m_4 - \frac{5}{4} m_8 \right) \sin^4 B + (m_6 + 2m_8) \sin^6 B + \left[\frac{m_8}{128} \cos 8B \right], \\ N &= \left(n_0 - \frac{n_8}{128} \right) + \left(n_2 + \frac{n_8}{4} \right) \sin^2 B + \\ &+ \left(n_4 - \frac{5}{4} n_8 \right) \sin^4 B + (n_6 + 2n_8) \sin^6 B + \left[\frac{n_8}{128} \cos 8B \right]. \end{aligned} \right\} \quad (I.68)$$

Вычислив коэффициенты по элементам эллипсоида Красовского, получим

$$M = 6\,335\,552,717 + [(4,219 \sin^2 B + 532,169) \sin^2 B + 63\,609,796] \sin^2 B, \quad (I.69)$$

$$N = 6\,378\,245,000 + [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21\,346,142] \sin^2 B. \quad (I.70)$$

Найденные по этим формулам значения радиусов M и N будут отличаться от их точных значений менее чем на 0,0005 м при максимальном значении $\sin B = 1$.

С погрешностью менее 0,2 м главные радиусы кривизны вычисляются по таким формулам:

$$M = 6\,335\,552,8 + (538,4 \sin^2 B + 63\,607,5) \sin^2 B, \quad (I.71)$$

$$N = 6\,378\,245,0 + (108,1 \sin^2 B + 21\,345,8) \sin^2 B. \quad (I.72)$$

Параметрические уравнения поверхности эллипсоида в функции геодезических координат

В уравнениях (I.23)

$$x = a \cos u \cos L,$$

$$y = a \cos u \sin L,$$

$$z = b \sin u$$

значение радиуса параллели $a \cos u$ заменим другим его выражением $N \cos B$ согласно равенству (I.58).

Кроме того, преобразуем выражения для z , учитывая следующие полученные ранее соотношения:

$$b = a \sqrt{1 - e^2},$$

$$\sin u = \frac{\sin B}{V},$$

$$W = V \sqrt{1 - e^2},$$

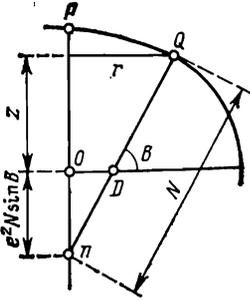


Рис. 6

$$N = \frac{a}{W}.$$

Тогда

$$z = a \sqrt{1-e^2} \frac{\sin B}{W} = \frac{a}{W} (1-e^2) \sin B = N (1-e^2) \sin B.$$

Таким образом, получаем следующие уравнения поверхности эллипсоида в функции геодезических координат:

$$\left. \begin{aligned} x &= N \cos B \cos L, \\ y &= N \cos B \sin L, \\ z &= N \sin B (1-e^2). \end{aligned} \right\} \quad (I.73)$$

Теперь из последнего равенства для z найдем
 $N \sin B - z = e^2 N \sin B.$ (I.74)

Пользуясь этим выражением, нетрудно установить (рис. 6), что

$$\left. \begin{aligned} On &= e^2 N \sin B, \\ OD &= e^2 N \cos B, \\ Dn &= e^2 N. \end{aligned} \right\} \quad (I.75)$$

§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ МЕРИДИАНА И ПАРАЛЛЕЛИ

В дифференциальной геометрии выводятся уравнения Серре—Френе, представляющие собой производные взаимно-ортонормальных единичных векторов касательной \bar{t} , главной нормали \bar{n} и бинормали \bar{b} в любой точке пространственной кривой. Уравнения Серре—Френе имеют вид

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \kappa \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\kappa \bar{t} + \sigma \bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\sigma \bar{n},$$

где κ — кривизна кривой, σ — кручение кривой.

Применим эти уравнения к меридиану и параллели.

На рис. 7 показано:

\bar{t}_B — единичный вектор касательной к меридиану;

\bar{t}_L — единичный вектор касательной к параллели;

\bar{m} — единичный вектор главной нормали меридиана (совпадает с направлением нормали к поверхности);

\bar{n} — единичный вектор главной нормали параллели;

s_n — проекция параллели на плоскость первого вертикала;

s_k — проекция параллели на касательную плоскость.

Меридиан и параллель, а также кривые s_n и s_k являются плоскими кривыми, поэтому кручение всех этих линий равно нулю.

Кривизна меридиана равна $\frac{1}{M}$, кривизна параллели равна $\frac{1}{r}$ или $\frac{1}{N \cos B}$. Следовательно, в соответствии с уравнениями Серре—Френе можем написать:

для меридиана ($\bar{t} = \bar{t}_B, \bar{n} = \bar{m}, ds = dX$)

$$\frac{d\bar{t}_B}{dX} = \frac{\bar{m}}{M}, \tag{I.76}$$

$$\frac{d\bar{m}}{dX} = -\frac{\bar{t}_B}{M}, \tag{I.77}$$

для параллели ($\bar{t} = \bar{t}_L, ds = dY$)

$$\frac{d\bar{t}_L}{dY} = \frac{\bar{n}}{r}, \tag{I.78}$$

$$\frac{d\bar{n}}{dY} = -\frac{\bar{t}_L}{r}. \tag{I.79}$$

В дифференциальной геометрии кривизна проекции любой кривой на нормальную плоскость называется нормальной

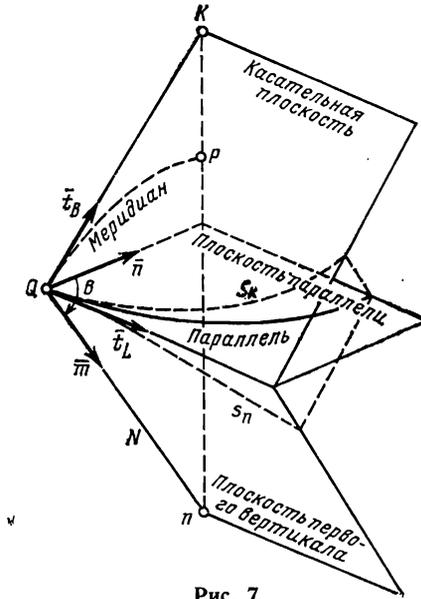


Рис. 7

кривизной, а кривизна проекции этой же линии на касательную плоскость называется геодезической (или тангенциальной) кривизной.

Для меридиана нормальная кривизна равна $\frac{1}{M}$, а геодезическая кривизна равна нулю.

Для параллели нормальная кривизна равна кривизне кривой s_n , равной $\frac{\cos B}{r} = \frac{1}{N}$, т. е. кривизне первого вертикала.

Геодезическая кривизна параллели, которую обозначим через $\frac{1}{\rho}$, будет равна кривизне кривой s_k

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin B}{r} \quad (I.80)$$

или, с учетом равенства (I.58),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{tg} B}{N}. \quad (I.81)$$

Так как кривизна линии s_n равна $\frac{1}{N}$, а линии s_k — $\frac{1}{\rho}$, то уравнения Серре—Френе для этих линий будут:

для линии s_n ($\bar{t} = \bar{t}_L$, $\bar{n} = \bar{m}$, $ds = ds_n$)

$$\frac{d\bar{t}_L}{ds_n} = \frac{\bar{m}}{N}, \quad (I.82)$$

$$\frac{d\bar{m}}{ds_n} = -\frac{\bar{t}_L}{N}, \quad (I.83)$$

для линии s_k ($\bar{t} = \bar{t}_L$, $\bar{n} = \bar{t}_B$, $ds = ds_k$)

$$\frac{d\bar{t}_L}{ds_k} = \frac{\bar{t}_B}{\rho}, \quad (I.84)$$

$$\frac{d\bar{t}_B}{ds_k} = -\frac{\bar{t}_L}{\rho}. \quad (I.85)$$

§ 8. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПОВЕРХНОСТИ

Через данную точку на поверхности можно провести бесчисленное множество различных линий. Направление каждой линии в данной точке устанавливается направляющим углом, составленным одной из координатных линий и данной линией, точнее, углом между касательными к этим линиям.

На поверхности земного эллипсоида в качестве направляющего угла принимается угол между касательными, проведенными к меридиану в северном направлении и к данной линии. Он отсчитывается от меридиана в направлении движения часовой стрелки.

Этот угол называется геодезическим азимутом и обозначается латинской буквой A .

Геодезический азимут можно также определить как двугранный угол между плоскостью меридиана и нормальной плоскостью, проходящей через касательную к данной линии. Один и

тот же азимут может иметь и несколько разных линий, если они имеют общую касательную в данной точке. Например, параллель и первый вертикал в заданной точке поверхности имеют одинаковый азимут, равный 90° (или 270°), хотя расположены они в разных плоскостях.

Дифференциал дуги ds произвольной кривой называют линейным элементом поверхности.

Проектируя линейный элемент на координатные линии, получим дифференциалы дуг меридиана и параллели (рис. 8). Поэтому, с учетом выражений (I.56), (I.57) и (I.58), можем написать:

$$ds \cos A = dX = M dB, \quad (I.86)$$

$$ds \sin A = dY = rdL = N \cos B dL. \quad (I.87)$$

Отсюда следует, что

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2. \quad (I.88)$$

Правая часть последнего равенства называется первой квадратичной формой поверхности эллипсоида в функции геодезических координат.

Из равенств (I.86) и (I.87) можно найти следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad (I.89)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \quad (I.90)$$

Эти уравнения показывают характер изменений широты и долготы при движении вдоль любой линии s на поверхности эллипсоида.

В завершение найдем еще некоторые другие дифференциальные соотношения.

Из элементарного прямоугольного треугольника QQ_1Q_2 (см. рис. 4), в котором дуга QQ_1 равна dX , можно написать

$$-dr = dX \sin B, \quad (I.91)$$

$$dz = dX \cos B. \quad (I.92)$$

Заменим dX его значениями по (I.86). Тогда

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B, \quad (I.93)$$

$$\frac{dz}{dB} = M \cos B, \quad (I.94)$$

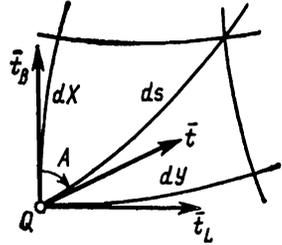


Рис. 8

$$\frac{dr}{ds} = -\sin B \cos A, \quad (I.95)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos B \cos A. \quad (I.96)$$

§ 9. ДЛИНЫ ДУГ МЕРИДИАНА И ПАРАЛЛЕЛИ

Дуга меридиана произвольной длины

Меридиан представляет собой полуэллипс, концы которого совпадают с полюсами эллипсоида. Экватор делит меридиан на две симметричные части.

Для определения длины дуги меридиана от экватора $B=0$ до произвольной параллели с широтой B воспользуемся равенством (I.56), на основании которого можем написать

$$dX = M dB.$$

Следовательно, для вычисления длины дуги меридиана в пределах широт от 0 до B с учетом равенства (I.59) необходимо найти следующий интеграл:

$$X = \int_0^B M dB = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB. \quad (I.97)$$

Этот интеграл является эллиптическим и не выражается в элементарных функциях. Для того чтобы привести его к виду, пригодному для вычислений, необходимо найти его приближенное выражение. С этой целью подынтегральную функцию разложим в ряд, а затем проинтегрируем этот ряд почленно.

Разложение радиуса кривизны меридиана как функции широты в быстро сходящийся ряд было уже выполнено в § 6 в двух видах. Для интегрирования более удобен ряд (I.66), почленное интегрирование которого выполняется достаточно просто.

Напишем окончательный результат интегрирования

$$X = a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \\ + \frac{a_8}{8} \sin 8B - \dots \quad (I.98)$$

В последнем слагаемом этого ряда коэффициент $\frac{a_8}{8} = \frac{m_8}{1024}$ составляет всего 0,00003 м. Поэтому этот член можно отбросить даже при самых высоких требованиях к точности вычислений.

Для удобства вычислений преобразуем оставшиеся члены ряда, заменив тригонометрические функции кратного аргумен-

та степенными функциями,

$$X = a_0 B - \sin B \cos B \left[(a_2 - a_4 + a_6) + \left(2a_4 - \frac{16}{3} a_6 \right) \sin^2 B + \frac{16}{3} a_6 \sin^4 B \right]. \quad (I.99)$$

С коэффициентами, вычисленными по элементам эллипсоида Красовского (см. § 6), этот ряд примет такой вид:

$$X = 6\,367\,558,4969B - \sin B \cos B [32\,005,7801 + (133,9213 + 0,7032 \sin^2 B) \sin^2 B]. \quad (I.100)$$

По этой формуле длина дуги меридиана вычисляется с ошибкой менее 0,0001 м.

С ошибкой не более 0,2 м длину дуги меридиана можно вычислять по нижеследующей более простой формуле, полученной методом экономизации предыдущего ряда:

$$X = 6\,367\,558,5B - \sin B \cos B (32005,6 + 134,6 \sin^2 B). \quad (I.101)$$

Вычисление широты по длине дуги меридиана

Поставим задачу, обратную только что решенной: найти широту по заданной длине дуги меридиана. Эта задача решается методом обращения тригонометрических рядов. Формула обращения приведена в приложении.

Применим эту формулу к равенству (I.98), а затем полученный ряд приведем к виду (I.99) уже известным нам способом. Найдя численные значения коэффициентов по элементам эллипсоида Красовского, получим ряд для вычисления широты в радианах в следующем виде:

$$B = \beta + \sin \beta \cos \beta [50\,517\,738 - (298\,373 - 2382 \sin^2 \beta) \sin^2 \beta] 10^{-10}, \quad (I.102)$$

где

$$\beta = \frac{X}{6\,367\,558,4969}.$$

Погрешность результата вычислений по этой формуле не превосходит $0,2 \cdot 10^{-10}$ и соответствует точности вычислений по формуле (I.100).

При пониженных требованиях к точности можно применить более простую формулу

$$B = \beta + \sin \beta \cos \beta (50\,517 - 296 \sin^2 \beta) 10^{-7}, \quad (I.103)$$

по которой широта вычисляется с погрешностью, выраженной в градусной мере, менее 0,005".

Дуга меридиана малой длины

В практике геодезических работ часто приходится определять длину дуги меридиана между двумя достаточно близкими параллелями $B_1 = \text{const}$ и $B_2 = \text{const}$. Примером может служить вычисление длин восточной и западной сторон сфероидической трапеции, изображаемой на плоскости в виде рамки листа топографической карты того или иного масштаба.

Один из путей решения этой задачи состоит в предварительном вычислении длины дуги меридиана от экватора до заданных широт B_1 и B_2 дважды по формуле (I.100) или (I.101) с последующим образованием разности $X_2 - X_1 = \Delta X$.

Вместо вычислений X_1 и X_2 в практике чаще всего пользуются заранее подготовленной таблицей длин дуг меридиана, откуда значения X_1 и X_2 выбирают по аргументам B_1 и B_2 .

Второй путь решения поставленной выше задачи состоит в том, что величину ΔX определяют непосредственно по разности широт $\Delta B = B_2 - B_1$, полагая эту разность малой величиной. В этом случае используется разложение в ряд по степеням ΔB

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dB} \right)_1 \Delta B + \left(\frac{d^2 X}{dB^2} \right)_1 \frac{\Delta B^2}{2} + \left(\frac{d^3 X}{dB^3} \right)_1 \frac{\Delta B^3}{6} + \dots \quad (\text{I.104})$$

Индекс 1 у коэффициентов этого ряда означает, что они вычисляются по начальному аргументу B_1 .

Найдем значения этих коэффициентов.

Из равенства (I.56) сразу же можем найти

$$\frac{dX}{dB} = M.$$

Для получения второй и третьей производных продифференцируем правую часть равенства (I.63)

$$\frac{d^2 X}{dB^2} = \frac{dM}{dB} = m_2 \sin 2B + 2m_4 \sin 2B \sin^2 B + \dots,$$

$$\frac{d^3 X}{dB^3} = \frac{d^2 M}{dB^2} = 2m_2 \cos 2B + \dots$$

Заменив постоянные коэффициенты m_2 и m_4 их значениями по формулам (I.65) и подставив затем производные в предыдущий ряд, получим

$$\Delta X = M_1 \Delta B + \frac{3}{2} a e^2 (1 - e^2) \left[\left(1 + \frac{5}{2} e^2 \sin^2 B_1 \right) \sin 2B_1 \frac{\Delta B^2}{2} + \cos 2B_1 \frac{\Delta B^3}{3} + \dots \right]. \quad (\text{I.105})$$

В этой формуле ΔB выражено в радианах.

Если взять численные значения элементов эллипсоида Краковского, то этот ряд после несложных преобразований примет такой вид:

$$\Delta X = M_1 \Delta B + 21\,203 [(3 + 0,0502 \sin^2 B_1) \sin B_1 \cos B_1 + (1 - 2 \sin^2 B_1) \Delta B] \Delta B^2, \quad (I.106)$$

где M_1 вычисляется по аргументу B_1 по формуле (I.69).

В формуле (I.105) отброшены члены порядка $ae^6 \Delta B^2$, $ae^4 \Delta B^3$, $ae^2 \Delta B^4$ и более высоких порядков.

Погрешность в длине дуги ΔX , вычисленной по формуле (I.105), за счет отброшенных членов составит величину менее 0,001 м при $\Delta B = 0,01$ ($\Delta X \approx 60$ км) и не более 1 м при $\Delta B = 0,1$ ($\Delta X \approx 600$ км).

Число членов ряда для ΔX можно сократить в два раза, если коэффициенты ряда вычислять не по начальному аргументу B_1 , Тогда вместо ряда $B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2)$, а по среднему аргументу (I.104) получим следующий ряд:

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dB} \right)_m + \Delta B \left(\frac{d^2 X}{dB^2} \right)_m \frac{\Delta B^2}{24} + \dots \quad (I.107)$$

Этот ряд не только короче, но и точнее, чем ряд (I.104), так как в нем отброшены члены порядка ΔB^5 и выше, тогда как в равенстве (I.104) — члены порядка ΔB^4 и выше. Кроме того, в равенстве (I.107) член третьего порядка в 4 раза меньше члена того же порядка в равенстве (I.104).

После замены производных их значениями, приведенными выше, ряд (I.107) примет такой вид:

$$\Delta X = M_m \Delta B + \frac{ae^2(1-e^2)}{8} \cos 2B_m \Delta B^3 + \dots \quad (I.108)$$

или

$$\Delta X = M_m \Delta B + 5300 (1 - 2 \sin^2 B_m) \Delta B^3, \quad (I.109)$$

где M_m вычисляется по аргументу B_m по формуле (I.69).

Второй член в правой части равенства (I.108) на широте $B_m = 45^\circ$ равен нулю, а на широтах 30 и 60° составляет всего лишь 0,002 м при $\Delta B = 0,01$ ($\approx 30'$). Поэтому для малых разностей широт ΔB дугу меридиана можно рассматривать как дугу окружности, радиус которой равен M_m , т. е.

$$\Delta X = M_m \Delta B. \quad (I.110)$$

Теперь найдем обратную зависимость между ΔX и ΔB . Пользуясь формулой обращения степенного ряда (см. приложение), из ряда (I.105) с той же точностью получим

$$\Delta B = \Delta \beta - \frac{3}{2} e^2 \left[(1 + e^2 \sin^2 B_1) \sin 2B_1 \frac{\Delta \beta^2}{2} + \cos 2B_1 \frac{\Delta \beta^3}{3} \right], \quad (I.111)$$

где

$$\Delta\beta = \frac{\Delta X}{M_1}.$$

Из формулы (I.110) для малых ΔB найдем

$$\Delta B = \frac{\Delta X}{M_m}. \quad (\text{I.112})$$

Разность широт, вычисленная по формулам (I.111) и (I.112), выражена в радианах.

Пример вычисления длины дуги меридиана

Исходные данные: $B_1 = 30^\circ$, $B_2 = 30^\circ 30'$.

Вычисления по формуле (I.100):

$$X_1 = 3\,320\,172,406; \quad X_2 = 3\,375\,601,713,$$

$$X_2 - X_1 = 55\,429,307 \text{ м.}$$

Вычисления по формуле (I.106):

$$M_1 = 6\,351\,488,50; \quad \Delta X = 55\,429,307 \text{ м.}$$

Вычисления по формуле (I.109):

$$M_m = 6\,351\,730,48; \quad \Delta X = 55\,429,307 \text{ м.}$$

Контрольные вычисления по формуле (I.111):

$$\Delta\beta = 0,0087269790; \quad \Delta B = 0,0087266463 \text{ или } 30'.$$

Длина дуги параллели

Параллель является окружностью, радиус которой равен $N \cos B$. Поэтому длину дуги параллели ΔY между долготами L_1 и L_2 найдем как произведение радиуса параллели на соответствующий центральный угол $\Delta L = L_2 - L_1$, а именно

$$\Delta Y = N \cos B \Delta L, \quad (\text{I.113})$$

где ΔL выражена в радианах.

Для приближенных расчетов полезно запомнить некоторые соотношения между длинами дуг меридианов и параллелей, с одной стороны, и соответствующими разностями широт и долгот, с другой стороны.

В равенствах (I.110) и (I.113) примем приближенные значения главных радиусов кривизны равными большой полуоси эллипсоида. Тогда

$$dX = \frac{a}{\rho''} dB'', \quad dY = \frac{a}{\rho''} \cos B dL''. \quad (\text{I.114})$$

Зависимость между численными значениями дифференциалов dX , dB , dY и dL показана в табл. 1.

dB	dX	dX	dB
1"	30,9 м	100 м	3,23"
1'	1,85 км	1 км	32"
1°	111 км	100 км	54'
$dL \cos B$	dY	dY	$dL \cos B$

§ 10. ПЛОЩАДЬ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ТРАПЕЦИИ

Сфероидической трапецией называется часть поверхности эллипсоида, ограниченная меридианами и параллелями (рис. 9).

Найдем формулу для вычисления площади сфероидической трапеции. Элемент площади dP равен произведению дифференциалов дуг координатных линий dX и dY , значения которых определяются формулами (1.54) и (1.55):

$$dP = \frac{a^2 (1 - e^2) \cos B}{W^4} dB dL.$$

Так как

$$a^2 (1 - e^2) = b^2,$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B,$$

то

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB dL.$$

Отсюда предварительно найдем

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB. \quad (I.115)$$

Интеграл в правой части этого равенства может быть выражен в элементарных функциях. Пользуясь подстановкой

$$e \sin B = \sin \Psi,$$

находим

$$\int (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB = \frac{1}{e} \int \frac{d\Psi}{\cos^3 \Psi}.$$

В правой части интеграл уже является табличным.

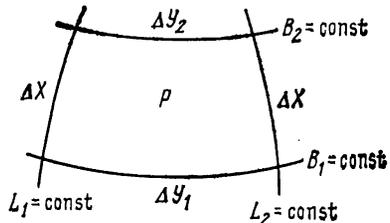


Рис. 9

В результате интегрирования и возврата к исходной переменной взамен равенства (I.115) получим следующее выражение:

$$P = \frac{b^2}{2} (L_2 - L_1) \left| \frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right|_{B_1}^{B_2} \quad (\text{I.116})$$

Вычисления площади по этой формуле достаточно сложны. Поэтому на практике предпочитают пользоваться разложением в ряд.

Подынтегральную функцию в равенстве (I.115) разложим в биномиальный ряд. Тогда получим

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} (\cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + 4e^6 \sin^6 B \cos B + \dots) dB.$$

Почленным интегрированием этого ряда находим окончательное выражение

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \left| \sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 B + \dots \right|_{B_1}^{B_2} \quad (\text{I.117})$$

Найдем площадь всей поверхности эллипсоида. Для этого в равенстве (I.117) следует положить $L_2 - L_1 = 2\pi$, $B_1 = 0$, $B_2 = \frac{\pi}{2}$ и полученный результат удвоить. В результате получим

$$P_E = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \dots \right). \quad (\text{I.118})$$

Найдем радиус R_E эквивалентного шара, площадь которого равна площади эллипсоида, т. е.

$$4\pi R_E^2 = P_E.$$

Отсюда находим

$$R_E = b \sqrt{1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \dots} \quad (\text{I.119})$$

Для эллипсоида Красовского радиус эквивалентного шара равен 6 371 116 м.

При решении многих задач на земном шаре для приближенных расчетов радиус земного шара принимают равным 6 371,1 км.

Глава II

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И НОРМАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

§ 11. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Геодезической линией называется такая линия на поверхности, в каждой точке которой главная нормаль кривой совпадает с нормалью к поверхности ($\bar{n} = \bar{m}$).

В общем случае геодезические линии представляют собой линии двойной кривизны, обладающие как кривизной, так и кручением.

Кривизна и кручение кривой являются скалярными величинами в уравнениях Серре—Френе, с которыми мы уже встречались в § 7. В соответствии с данным выше определением геодезической линии в этих уравнениях единичный вектор главной нормали \bar{n} заменим единичным вектором нормали к поверхности \bar{m} . Тогда уравнения Серре—Френе для геодезической линии примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{ds} &= \kappa_g \bar{m}, \\ \frac{d\bar{m}}{ds} &= -\kappa_g \bar{t} + \sigma_g \bar{b}, \\ \frac{d\bar{b}}{ds} &= -\sigma_g \bar{m}, \end{aligned} \right\} \quad (II.1)$$

где κ_g — кривизна геодезической линии;

σ_g — кручение геодезической линии.

Для отыскания κ_g и σ_g умножим второе уравнение из (II.1) скалярно сначала на единичный вектор \bar{t} , а затем на единичный вектор \bar{b} . Тогда

$$\left(\frac{d\bar{m}}{ds}, \bar{t} \right) = -\kappa_g, \quad (a)$$

$$\left(\frac{d\bar{m}}{ds}, \bar{b} \right) = -\sigma_g. \quad (б)$$

Вектор $\frac{d\bar{m}}{ds}$ разложим на два составляющих вектора в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала

$$\frac{d\bar{m}}{ds} = \frac{\partial \bar{m}}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial s_n} \frac{ds_n}{ds}.$$

В правой части этого равенства первые множители заменим их значениями по формулам (I.77) и (I.83) и учтем, что согласно равенствам (I.86) и (I.87)

$$ds \cos A = dX,$$

$$ds \sin A = dY = ds_n.$$

После этих замен получаем

$$\frac{d\bar{m}}{ds} = -\frac{\cos A}{M} \bar{t}_B - \frac{\sin A}{N} \bar{t}_L. \quad (\text{в})$$

Подстановка этого выражения в векторное уравнение (а) с учетом скалярных произведений $(\bar{t}, \bar{t}_B) = \cos A$, $(\bar{t}, \bar{t}_L) = \sin A$ даст нам

$$\kappa_g = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (\text{II.2})$$

Подстановкой этого же выражения (в) в векторное уравнение (б) с учетом скалярных произведений $(\bar{b}, \bar{t}_B) = \sin A$ и $(\bar{b}, \bar{t}_L) = -\cos A$ мы получим

$$\sigma_g = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) \sin A \cos A. \quad (\text{II.3})$$

Равенства (II.2) и (II.3) можно представить в другом виде, если N вынести за скобки и учесть, что

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B.$$

Тогда

$$\kappa_g = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}{N}, \quad (\text{II.4})$$

$$\sigma_g = -\frac{e'^2 \cos^2 B}{2N} \sin 2A. \quad (\text{II.5})$$

При азимутах 0 при 90° кручение σ_g равно нулю. В первом случае геодезическая линия представляет собой меридиан. Во втором случае в дифференциальной окрестности данной точки кривизна геодезической линии совпадает с кривизной первого вертикала, т. е. $\kappa_g = \frac{1}{N}$.

§ 12. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

*Дифференциальные уравнения геодезической линии.
Уравнение Клеро*

Скалярное произведение (см. рис. 8)

$$(\bar{t}, \bar{t}_B) = \cos A$$

продифференцируем по длине линии s :

$$\left(\frac{\overline{dt}}{ds}, \overline{t}_B\right) + \left(\overline{t}, \frac{\overline{dt}_B}{ds}\right) = -\sin A \frac{dA}{ds}. \quad (\text{а})$$

Мы получили дифференциальное уравнение произвольной линии в векторной форме.

Найдем производные единичных векторов.

Для геодезической линии согласно первому уравнению (II.1) имеем

$$\frac{\overline{dt}}{ds} = \kappa_g \overline{m}. \quad (\text{б})$$

Производную единичного вектора во втором слагаемом разложим на два составляющих вектора в плоскости меридиана и в касательной плоскости:

$$\frac{\overline{dt}_B}{ds} = \frac{\partial \overline{t}_B}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial \overline{t}_B}{\partial s_k} \frac{ds_k}{ds}.$$

В правой части этого равенства первые множители заменим их значениями по формулам (I.76) и (I.85), а вторые множители — по формулам

$$\frac{dX}{ds} = \cos A,$$

$$\frac{ds_k}{ds} = \frac{dY}{ds} = \sin A.$$

Выполнив эти замены, получим

$$\frac{\overline{dt}_B}{ds} = \frac{\cos A}{M} \overline{m} = \frac{\sin A}{\rho} \overline{t}_L. \quad (\text{в})$$

Подставив выражения (б) и (в) в равенство (а), примем во внимание скалярные произведения $(\overline{m}, \overline{t}_B) = 0$, $(\overline{t}, \overline{m}) = 0$, $(\overline{t}, \overline{t}_L) = \sin A$ и сократим обе части равенства на $\sin A$. В результате получим

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{\rho}.$$

Но по (I.80) и (I.81)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin B}{r} = \frac{\operatorname{tg} B}{N}.$$

Поэтому

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin B}{r} \sin A \quad (\text{II.6})$$

или

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A. \quad (\text{II.7})$$

Это первое дифференциальное уравнение геодезической линии. Оно показывает характер изменения азимута при движении вдоль геодезической линии.

Если же в равенстве (II.7) сделаем замену по формуле (I.90), то получим второе дифференциальное уравнение геодезической линии:

$$dA = \sin B dL. \tag{II.8}$$

Теперь найдем интеграл дифференциального уравнения (II.6). Перемножив соответственно левые и правые части этого уравнения и равенства (I.86), получим

$$\cos AdA = \frac{\sin B}{r} \sin AdX.$$

Так как по (I.91)

$$dX \sin B = -dr,$$

то

$$\operatorname{ctg} AdA = -\frac{dr}{r}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$\ln \sin A + \ln r = \ln C$$

или

$$r \sin A = C, \tag{II.9}$$

где C — постоянная интегрирования.

Равенство (II.9) представляет собой уравнение Клеро. Оно было выведено известным французским ученым Клеро в 1733 г. для геодезической линии на всех поверхностях вращения. Уравнение Клеро отражает весьма важное свойство геодезической линии на поверхности вращения: произведение радиуса параллели на синус азимута имеет одно и то же значение во всех точках геодезической линии. Очевидно, каждая геодезическая линия имеет свое значение постоянной величины C .

Однако отсюда не следует, что уравнение Клеро является отличительным признаком геодезической линии. Например, параллель подчиняется уравнению Клеро, но она не геодезическая линия. Таким образом, уравнение Клеро есть необходимый признак геодезической линии, но не достаточный.

Выясним геометрический смысл постоянной величины C .

На любой геодезической линии неограниченной протяженности (кроме меридиана и экватора) можно найти две точки, в которых $\sin A$ имеет наибольшую абсолютную величину, равную единице, а радиус параллели в этих же точках — наимень-

шую величину r_0 . Тогда уравнение (II.9) можно написать в таком виде:

$$r \sin A = r_0. \quad (\text{II.10})$$

Каждая геодезическая линия в своем продолжении обязательно встретит экватор. На экваторе радиус параллели имеет наибольшее значение, равное большой полуоси эллипсоида, тогда как $\sin A$ будет иметь наименьшее значение, которое обозначим $\sin A_0$. Следовательно,

$$r \sin A = a \sin A_0. \quad (\text{II.11})$$

Уравнения (II.9), (II.10) и (II.11) тождественны и различаются только обозначениями постоянной величины

$$C = r_0 = a \sin A_0. \quad (\text{II.12})$$

Так как $r = a \cos u$, то из уравнений (II.10) и (II.11) после сокращения на большую полуось получим одно важное видоизменение уравнения Клеро:

$$\cos u \sin A = \cos u_0, \quad (\text{II.13})$$

$$\cos u \sin A = \sin A_0. \quad (\text{II.14})$$

В этих равенствах u_0 — приведенная широта наиболее удаленной от экватора точки геодезической линии, A_0 — азимут геодезической линии в точке пересечения ее с экватором.

Применим уравнение Клеро к сфере с радиусом, равным единице. Обозначим географическую широту на сфере через φ , а азимут — через α . Так как радиус параллели для сферы единичного радиуса равен $\cos \varphi$, то уравнение Клеро для дуги большого круга будет иметь вид

$$\cos \varphi \sin \alpha = \text{const}. \quad (\text{II.15})$$

По аналогии с уравнением (II.15) равенства (II.13) и (II.14) также можно рассматривать как уравнения Клеро для сферы единичного радиуса, на которой $u = \varphi$, $A = \alpha$.

Пользуясь уравнением Клеро, можно исследовать расположение любой геодезической линии на всей поверхности эллипсоида. Пусть в точке пересечения с экватором геодезическая линия имеет азимут A_0 (рис. 10). При движении вдоль геодезической линии в северном полушарии радиус параллели уменьшается, а азимут геодезической линии увеличивается, пока не достигнет 90° в точке Q_0 , в которой радиус параллели имеет наименьшее значение r_0 и геодезическая линия касается параллели $u_0 = \text{const}$. Дальше геодезическая линия повернет на юг, радиус параллели будет увеличиваться, азимут также будет увеличиваться, но $\sin A$ уменьшается. На экваторе в точке Q_2 азимут достигнет наибольшей величины, равной $180^\circ - A_0$. Миновав экватор, геодезическая линия вступит в южный полушарий, радиус параллели

лели будет уменьшаться до своей минимальной величины r_0 в точке Q_0 , в которой азимут будет равен 90° . При последующем движении азимут продолжает уменьшаться, а радиус параллели будет увеличиваться. Вновь достигнув экватора, геодезическая линия пересечет его под азимутом A_0 , как и в начале движения.

Однако в общем случае точки пересечения геодезической линии с экватором не совпадут, и в своем продолжении геодезическая линия будет описывать бесконечное число витков, последовательно касаясь двух параллелей: $+u_0 = \text{const}$ — в северном полусфереоиде и $-u_0 = \text{const}$ — в южном полусфереоиде. Это объ-

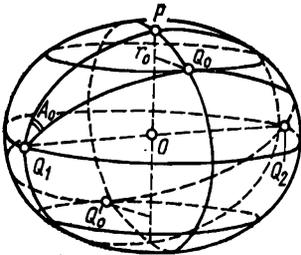


Рис. 10

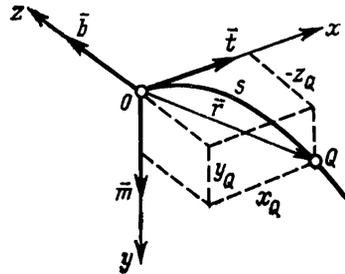


Рис. 11

ясняется тем, что геодезическая линия на эллипсоиде не является плоской кривой, как дуга большого круга на шаре, а обладает кручением.

Параметрические уравнения геодезической линии

Положение любой точки Q (рис. 11) на произвольной кривой, в частности геодезической, однозначно определяется длиной дуги s этой кривой, считая ее положительной в заданном направлении от некоторой начальной точки O на этой кривой. Радиус-вектор \vec{r} точки Q является функцией параметра (независимой переменной) s , т. е.

$$\vec{r} = f(s). \quad (\text{II.16})$$

Введем систему декартовых прямоугольных координат следующим образом: начало координат в точке O , ось x — вдоль единичного вектора касательной \vec{t} , ось y — вдоль единичного вектора нормали к поверхности \vec{m} и ось z — вдоль единичного вектора бинормали \vec{b} .

Теперь уравнение (II.16) нальшем как сумму трех компонентов вектора

$$\vec{r} = x\vec{t} + y\vec{m} + z\vec{b}, \quad (\text{II.17})$$

в котором прямоугольные координаты точки Q будут функциями параметра s ,

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(s), \\ y &= f_2(s), \\ z &= f_3(s). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.18})$$

Уравнения (II.18) называются параметрическими уравнениями кривой.

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать только малые дуги s , не имеющие точек перегиба.

Вектор \bar{r} , как функцию s , разложим в ряд по степеням малой дуги s :

$$\bar{r} = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \left(\frac{d^4\bar{r}}{ds^4}\right)_0 \frac{s^4}{24} + \dots \quad (\text{II.19})$$

Очевидно, координаты (II.18) вектора \bar{r} в этом случае также будут представлять собой степенные ряды относительно переменной s . Чтобы найти эти ряды, необходимо предварительно выяснить значения коэффициентов ряда (II.19). Решить эту задачу нам помогут уравнения Серре—Френе, устанавливающие зависимость между производными единичных векторов \bar{t} , \bar{m} , \bar{b} и кривизной и кручением геодезической линии.

Уравнения Серре—Френе даны выше равенствами (II.1), используя которые найдем производные вектора \bar{r} по длине дуги s в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{t}, \\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} &= \kappa_g \bar{m}, \\ \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} &= \frac{d\kappa_g}{ds} \bar{m} - \kappa_g^2 \bar{t} + \kappa_g \sigma_g \bar{b}, \\ \frac{d^4\bar{r}}{ds^4} &= \left(\frac{d^2\kappa_g}{ds^2} - \kappa_g^3 - \kappa_g \sigma_g^2 \right) \bar{m} - \\ &- 3\kappa_g \frac{d\kappa_g}{ds} \bar{t} + \left(2 \frac{d\kappa_g}{ds} \sigma_g + \kappa_g \frac{d\sigma_g}{ds} \right) \bar{b}. \end{aligned}$$

Подставим полученные производные в ряд (II.19) и объединим все скалярные величины при каждом из трех единичных векторов.

В соответствии с равенством (II.17) полученные таким образом коэффициенты при единичных векторах будут представлять

собой координаты x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} x &= s - (x_g^2)_0 \frac{s^3}{6} - \left(x_g \frac{dx_g}{ds} \right)_0 \frac{s^4}{8} + \dots, \\ y &= (x_g)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{dx_g}{ds} \right)_0 \frac{s^3}{6} + \\ &+ \left(\frac{d^2x_g}{ds^2} - x_g^3 - x_g \sigma_g^2 \right)_0 \frac{s^4}{24} + \dots, \\ z &= (x_g \sigma_g)_0 \frac{s^3}{6} + \left(x_g \frac{d\sigma_g}{ds} + 2 \frac{dx_g}{ds} \sigma_g \right)_0 \frac{s^4}{24} + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.20})$$

В этих уравнениях кривизна κ_g и кручение σ_g определяются полученными выше равенствами (II.4) и (II.5), которые с учетом обозначения (I.28) напишем в таком виде:

$$\kappa_g = \frac{1 + \eta^2 \cos^2 A}{N}, \quad \sigma_g = - \frac{\eta^2 \sin 2A}{2N}. \quad (\text{II.21})$$

Производные кривизны и кручения по s найдем как производные сложных функций двух независимых переменных B и A :

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial B} \frac{dB}{ds} + \frac{\partial f}{\partial A} \frac{dA}{ds}.$$

Предварительно найдем производные по широте

$$\frac{dV^2}{dB} = \frac{d\eta^2}{dB} = -2e'^2 \cos B \sin B = -2\eta^2 \operatorname{tg} B, \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{dV}{dB} = - \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{V}, \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{d}{dB} \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{d}{dB} \left(\frac{V}{c} \right) = - \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{NV^2}.$$

Для производных широты и азимута по s ранее были найдены формулы (I.89) и (II.7):

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M},$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A.$$

Используя эти соотношения и выполнив несложные преобразования, получаем окончательные выражения для производных кривизны и кручения в следующем виде:

$$\frac{d\kappa_g}{ds} = - \frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B}{N^2} \cos A (1 + \eta^2 \cos^2 A), \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{d\sigma_g}{ds} = \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{N^2} \sin A (1 + 3\eta^2 \cos^2 A), \quad (\text{II.25})$$

$$\frac{d^2\kappa_g}{ds^2} = \frac{3\eta^2}{N^3} (\operatorname{tg}^2 B - \cos^2 A) + \dots \quad (\text{II.26})$$

Подставив выражения (II.21), (II.24), (II.25) и (II.26) в уравнения (II.20), получим параметрические уравнения геодезической линии в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= s - \left(\frac{1 + \eta^2 \cos^2 A}{N} \right)_0 \frac{s^3}{6} + \left(\frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B \cos A}{8N^3} \right)_0 s^4 + \dots, \\ y &= \left(\frac{1 + \eta^2 \cos^2 A}{2N} \right)_0 s^2 - \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B \cos A}{2N^2} \right)_0 s^3 - \\ &\quad - \left(\frac{1 + 3\eta^2 (2 \cos^2 A - \operatorname{tg}^2 B)}{24N^3} \right)_0 s^4 + \dots, \\ z &= - \left(\frac{\eta^2 \sin 2A}{12N^2} \right)_0 s^3 + \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B \sin A}{24N^3} \right)_0 s^4 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.27})$$

Здесь в коэффициентах при s^3 и s^4 отброшены члены порядка η^4 .

В рядах (II.27) все коэффициенты вычисляются по аргументам B_0 и A_0 в начальной точке 0 геодезической линии, о чем свидетельствует индекс 0 при скобках.

Уравнения (II.27) могут быть использованы для решения ряда задач, связанных с геодезической линией малой длины.

§ 13. КРИВИЗНА НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ. СРЕДНИЙ РАДИУС КРИВИЗНЫ

Через нормаль к поверхности эллипсоида в некоторой точке Q этой поверхности проведем под различными азимутами множество нормальных плоскостей, дающих в пересечении с поверхностью столько же нормальных сечений. В общей точке Q главная нормаль каждого нормального сечения совпадает с нормалью к поверхности по построению.

Точка кривой на поверхности, в которой главная нормаль кривой совпадает с нормалью к поверхности, в дифференциальной геометрии называют геодезической точкой*.

В рассматриваемом случае точка Q является общей геодезической точкой всего пучка нормальных сечений. Во всех других точках этих нормальных сечений их главные нормали не будут совпадать с нормалью к поверхности.

Любое нормальное сечение имеет по крайней мере одну геодезическую точку. У геодезической линии все точки геодезические.

Ранее (см. § 6) мы выделили из всех нормальных сечений, проходящих через данную точку поверхности, два главных нормальных сечения — меридиан и первый вертикал — и нашли их

* Такие термины, как «геодезическая линия», «геодезическая кривизна», «геодезическая точка» и т. п., применяются в математике и не имеют непосредственного отношения к геодезии.

кривизну. Теперь нам предстоит найти кривизну произвольного нормального сечения в его геодезической точке.

Через геодезическую точку произвольного нормального сечения проведем касательную геодезическую линию. Ясно, что обе линии в точке касания будут иметь один и тот же азимут.

Главные нормали как геодезической линии, так и нормального сечения в точке касания совпадают с нормалью к поверхности. Поэтому кривизна нормального сечения будет равна кривизне геодезической линии в их общей точке.

Таким образом, кривизна произвольного нормального сечения будет определяться формулами (II.2) или (II.4) для геодезической линии. Напишем их в таком виде:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}{N}, \quad (\text{II.29})$$

где R_A — радиус кривизны нормального сечения в его геодезической точке. Величину этого радиуса можно найти из формул (II.28) или (II.29), взяв обратную величину правых частей этих равенств. Обычно для вычисления радиуса кривизны произвольного нормального сечения применяют такое выражение:

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A} = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}. \quad (\text{II.30})$$

В геодезии встречается так называемый «средний радиус кривизны», который не относится ни к одной линии на эллипсоиде, но используется как вспомогательная величина в некоторых теоретических и практических вопросах геодезии.

Средний радиус кривизны R определяют как предел среднего арифметического значения из радиусов кривизны R_A всех возможных нормальных сечений, проведенных через данную точку поверхности в разных направлениях.

Так как радиус кривизны R_A , как видно из формулы (II.30), меняется в зависимости от изменения $\cos^2 A$, то для определения среднего радиуса кривизны достаточно взять нормальные сечения в пределах одного квадранта в азимутах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ с интервалами через малое приращение азимута ΔA . Общее число радиусов будет равно $\frac{\pi}{2\Delta A}$, а их среднее арифметическое значение будет таким:

$$\left(\sum_{A=\Delta A}^{\frac{\pi}{2}} R_A \right) : \frac{\pi}{2\Delta A} = \frac{2}{\pi} \sum_{A=\Delta A}^{\frac{\pi}{2}} R_A \Delta A.$$

При $\Delta A \rightarrow 0$ в пределе получим значение среднего радиуса кривизны R в виде такого интеграла:

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_A dA.$$

Под знак интеграла подставим значение R_A , определяемое формулой (II.30). Тогда

$$R = \frac{2N}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dA}{1 + \eta^2 \cos^2 A}.$$

Подынтегральное выражение преобразуем таким образом:

$$\frac{\frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \eta^2 + \eta^2 \tan^2 A} = \frac{d(\operatorname{tg} A)}{V^2 + \operatorname{tg}^2 A} = \frac{d\left(\frac{\operatorname{tg} A}{V}\right)}{V \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg} A}{V}\right)^2\right]}.$$

Тогда после интегрирования получим

$$R = \frac{2N}{\pi V} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} A}{V} \right) \right]_0^{\pi/2},$$

откуда

$$R = \frac{N}{V} = \frac{c}{V^2} = \sqrt{MN}. \quad (\text{II.31})$$

Таким образом, средний радиус кривизны вычисляется как среднее геометрическое значение из главных радиусов кривизны в данной точке поверхности.

Попутно здесь приведем одну из важных характеристик любой поверхности.

Полной или гауссовой кривизной поверхности называется величина K , равная произведению кривизн главных нормальных сечений поверхности в данной точке.

Для поверхности земного эллипсоида

$$K = \frac{1}{MN} = \frac{V^4}{c^2}. \quad (\text{II.32})$$

Полная кривизна и средний радиус кривизны поверхности имеют тесную связь, выражаемую равенством

$$R = \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (\text{II.33})$$

Обе эти величины инвариантны при изгибании поверхности.

§ 14. СИСТЕМЫ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ НА ПОВЕРХНОСТИ. ПРИВЕДЕННАЯ ДЛИНА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Шар. На поверхности шара система полярных координат устанавливается следующим образом. Некоторую точку Q_0 (рис. 12) выбирают в качестве полюса полярных координат. Из точки Q_0 можно провести множество дуг больших кругов. Одну из этих дуг принимают за полярную ось Q_0P .

Положение произвольной точки Q на поверхности шара определяется двумя координатами: длиной дуги большого круга s

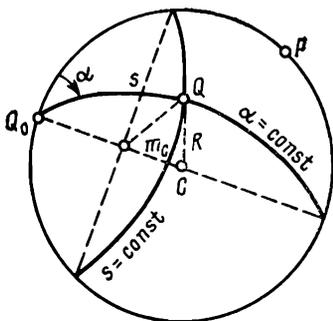


Рис. 12

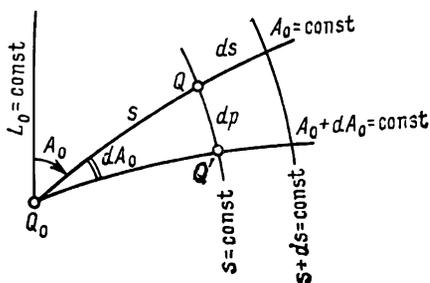


Рис. 13

от полюса Q_0 до точки Q и полярным углом α между полярной осью Q_0P и дугой большого круга s .

Координатными линиями будут малые круги $s = \text{const}$ и пучок дуг больших кругов $\alpha = \text{const}$. Радиусы кривизны всех дуг больших кругов равны радиусу R шара. Радиусы кривизны m_c малых кругов ($s = \text{const}$) зависят от длины s и вычисляются по формуле

$$m_c = R \sin \frac{s}{R}. \quad (\text{II.34})$$

Если дуга s мала по сравнению с радиусом R , то функцию (II.34) можно представить в виде быстро сходящегося ряда

$$m_c = s - \frac{s^3}{6R^2} + \frac{s^5}{120R^4} - \dots \quad (\text{II.35})$$

Дифференциалами дуг координатных линий будут:

ds — дифференциал дуги большого круга $\alpha = \text{const}$,

$dp_c = m_c da$ — дифференциал дуги малого круга $s = \text{const}$.

Эллипсоид вращения. Система полярных координат на поверхности эллипсоида устанавливается так же, как на шаре. Какая-либо точка Q_0 (рис. 13) выбирается в качестве полюса

полярных координат. В качестве полярной оси обычно принимают меридиан точки Q_0 ($L_0 = \text{const}$).

Полярными координатами произвольной точки Q будут длина геодезической линии s от полюса Q_0 и геодезический азимут A_0 этой линии в полюсе Q_0 .

Первое семейство координатных линий представляет собой пучок геодезических линий, исходящих из полюса Q_0 . Здесь необходимо предварительно выяснить, какую величину можно принять в качестве постоянной для каждой линии этого пучка.

Как известно, координатной линией на любой поверхности называется такая линия, во всех точках которой какая-либо величина, принятая в качестве координаты, имеет одно и то же значение. Каждому численному значению координаты соответствует единственная координатная линия (за исключением особых точек, в которых однозначность исчезает).

Во всех точках геодезической линии на поверхности эллипсоида постоянную величину сохраняет, по уравнению Клеро, произведение радиуса параллели на синус азимута. Но эту величину принять в качестве координаты в общем невозможно, так как одной и той же величине $r \sin A = \text{const}$ соответствует множество геодезических линий, пересекающих экватор под одним и тем же азимутом, но в разных точках. Поэтому, чтобы из множества геодезических линий выделить одну, следует указать положение (широту и долготу) какой-либо точки этой линии и ее азимут в этой же точке.

Для пучка геодезических линий в качестве такой точки служит полюс полярных координат. Азимут A_0 позволяет выделить из этого пучка единственную геодезическую линию.

Конечно, в других точках заданной геодезической линии ее азимут A отличается от A_0 . Но вместе с тем мы знаем, что азимут A в любой точке геодезической линии связан с азимутом A_0 в ее начальной точке уравнением Клеро

$$r \sin A = r_0 \sin A_0,$$

откуда

$$\frac{r \sin A}{r_0} = \sin A_0 = \text{const},$$

где r_0 и A_0 относятся к полюсу полярных координат. Поэтому в качестве независимой переменной, сохраняющей свою величину для данной геодезической линии, мы можем принять A_0 , и геодезическую линию пучка рассматривать как координатную линию $A_0 = \text{const}$. Всякое изменение азимута A_0 означает переход к другой геодезической линии данного пучка.

Второе семейство координатных линий в рассматриваемой системе полярных координат состоит из замкнутых кривых $s = \text{const}$, которые называются геодезическими окружностями. Эти окружности всюду ортогональны геодезическим

линиям пучка. Они, так же как и геодезические линии, в общем случае являются кривыми двоякой кривизны, тогда как аналогичные им малые круги на шаре являются плоскими кривыми.

Представляет интерес один частный случай системы полярных координат на эллипсоиде.

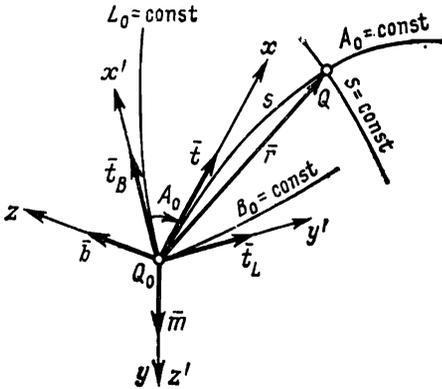


Рис. 14

Пусть полюс полярных координат совпадает с северным полюсом эллипсоида. Тогда первым семейством координатных линий будет пучок меридианов $L = \text{const}$, длины которых отсчитываются от полюса. Вторым семейством координатных линий будут параллели эллипсоида $X = \text{const}$.

Выясним, что представляют собой дифференциалы дуг координатных линий в системе полярных координат.

Для линии $A_0 = \text{const}$ это будет ds — дифференциал дуги геодезической линии. Дифференциал дуги геодезической окружности $s = \text{const}$ обозначим dp . Тогда

$$dp = \sqrt{G} dA_0, \quad (\text{II.36})$$

где

$$G = \left(\frac{\partial x'}{\partial A_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial A_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial A_0} \right)^2, \quad (\text{II.37})$$

x', y', z' — прямоугольные декартовы координаты, начало которых можно выбрать в любой точке пространства.

Для того чтобы найти производные декартовых координат, следует установить зависимость между координатами x', y', z' и полярными координатами s и A_0 , т. е. необходимо найти параметрические уравнения поверхности эллипсоида в виде функции от s и A_0 :

$$x' = f_1(s, A_0),$$

$$y' = f_2(s, A_0),$$

$$z' = f_3(s, A_0).$$

На рис. 14 показано:

\bar{t}_B, \bar{t}_L — единичные векторы касательных к меридиану и параллели в начальной точке Q_0 системы полярных координат на поверхности;

\bar{m} — единичный вектор нормали к поверхности;
 \bar{t}, \bar{b} — единичные векторы касательной и бинормали в начальной точке Q_0 произвольной геодезической линии;
 \bar{r} — радиус-вектор произвольной точки Q на поверхности.

Систему декартовых координат x', y', z' установим следующим образом. Началом координат будет служить начальная точка Q_0 . Ось x' направим вдоль касательной \bar{t}_B к меридиану, ось y' — вдоль касательной \bar{t}_L к параллели и ось z' — вдоль нормали \bar{m} к поверхности.

Вектор \bar{r} представим как сумму трех его компонентов

$$\bar{r} = x' \bar{t}_B + y' \bar{t}_L + z' \bar{m},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x' &= (\bar{r}, \bar{t}_B), \\ y' &= (\bar{r}, \bar{t}_L), \\ z' &= (\bar{r}, \bar{m}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.38})$$

Для геодезической линии $A_0 = \text{const}$, произвольно расположенной на поверхности эллипсоида, ранее были получены параметрические уравнения (II.27) в функции длины геодезической линии s .

Этими же уравнениями можно определять положение точки на любой геодезической линии $A_0 = \text{const}$ в системе полярных координат, если начало координат x, y, z выбрать в точке Q_0 , а направления осей расположить в соответствии с рис. 11. Тогда для радиуса-вектора \bar{r} можно написать равенство

$$\bar{r} = x \bar{t} + y \bar{m} + z \bar{b}. \quad (\text{II.39})$$

Найдем скалярные произведения в уравнениях (II.38), в которых для r воспользуемся равенством (II.39), и учтем следующие выражения для скалярных произведений единичных векторов:

$$\begin{aligned} (\bar{t}, \bar{t}_B) &= \cos A_0, & (\bar{m}, \bar{t}_B) &= 0, & (\bar{b}, \bar{t}_B) &= \sin A_0, \\ (\bar{t}, \bar{t}_L) &= \sin A_0, & (\bar{m}, \bar{t}_L) &= 0, & (\bar{b}, \bar{t}_L) &= -\cos A_0, \\ (\bar{t}, \bar{m}) &= 0, & (\bar{m}, \bar{m}) &= 1, & (\bar{b}, \bar{m}) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos A_0 + z \sin A_0, \\ y' &= x \sin A_0 - z \cos A_0, \\ z' &= y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.40})$$

Эти уравнения вместе с равенствами (II.27) применяют для решения широкого круга задач на поверхности эллипсоида, когда можно ограничиваться малой длиной геодезической линии.

Найдем частные производные от координат x' , y' , z' по переменной A_0

$$\frac{\partial x'}{\partial A_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial A_0} + z \right) \cos A_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial A_0} - x \right) \sin A_0,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial A_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial A_0} + z \right) \sin A_0 - \left(\frac{\partial z}{\partial A_0} - x \right) \cos A_0,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial A_0} = \frac{\partial y}{\partial A_0}.$$

После подстановки этих производных в равенство (II.37) получим

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial A_0} + z \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial A_0} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_0} \right)^2.$$

При подстановке значений координат и их производных в правую часть полученного равенства условимся, что будем сохранять только члены порядка η^2 . Из уравнений (II.27) легко установить, что производные всех трех координат по переменной A_0 будут иметь члены порядка η^2 . Такой же порядок имеет координата z . Следовательно, квадратами и удвоенными произведениями этих величин можно пренебречь.

Таким образом, с принятой точностью получим

$$G = x^2 - 2x \frac{\partial z}{\partial A_0},$$

откуда

$$\sqrt{G} = x \sqrt{1 - \frac{2}{x} \frac{\partial z}{\partial A_0}} = x - \frac{\partial z}{\partial A_0}.$$

Из третьего уравнения (II.27) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial A_0} = - \left(\frac{\eta^2}{6N^2} \cos 2A \right)_0 s^3 + \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{24N^3} \cos A \right)_0 s^4 + \dots$$

Подставив значения x и $\frac{\partial z}{\partial A_0}$ в равенство для \sqrt{G} , получим

$$\begin{aligned} \sqrt{G} &= s - \left(\frac{1 + 2\eta^2 \cos^2 A}{6N^2} \right)_0 s^3 + \left(\frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B}{8N^3} \cos A \right)_0 s^4 + \\ &+ \left[\frac{\eta^2}{6N^2} (2 \cos^2 A - 1) \right]_0 s^3 - \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{24N^3} \cos A \right)_0 s^4 = \\ &= s - \left(\frac{1 + \eta^2}{6N^2} \right)_0 s^3 + \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{3N^3} \cos A \right)_0 s^4. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{1 + \eta^2}{N^2} = \frac{V^2}{N^2} = \frac{1}{R^2},$$

где R — средний радиус кривизны.

$$\text{В последнем слагаемом примем } \frac{e'^2}{N^3} \approx \frac{e^2}{a^3}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\sqrt{G} = s - \frac{s^3}{6R_0^2} + \frac{e^2}{6a^3} \sin 2B_0 \cos A_0 s^4. \quad (\text{II.41})$$

Правую часть этого равенства называют приведенной длиной геодезической линии и в системе полярных координат на эллипсоиде обозначают латинской буквой m .

Первые два члена этого выражения являются первыми членами разложения в ряд функции

$$R_0 \sin \frac{s}{R_0} = s - \frac{s^3}{6R_0^2} + \frac{s^5}{120R_0^4} - \dots$$

Члены пятого и более высоких порядков относительно s были отброшены при получении ряда (II.19), поэтому они отсутствуют и в равенстве (II.41). Восстановив их, мы получим следующее выражение для приведенной длины геодезической линии:

$$m = R_0 \sin \frac{s}{R_0} + \frac{e^2}{6a^3} \sin 2B_0 \cos A_0 s^4. \quad (\text{II.42})$$

В этом равенстве R_0 — средний радиус кривизны, вычисляемый по широте B_0 в начальной точке геодезической линии. Таким образом, выражение для дифференциала дуги геодезической окружности согласно равенству (II.36) примет такой вид:

$$dp = m dA_0, \quad (\text{II.43})$$

в котором величина m определяется равенством (II.42).

Геометрический смысл приведенной длины геодезической линии состоит в том, что она представляет собой радиус кривизны геодезической окружности. Положение центра кривизны этой окружности остается неопределенным.

Найти положение центра кривизны геодезической окружности — задача довольно сложная. Мы здесь попытаемся ответить лишь на такой вопрос: может ли этот центр кривизны находиться на нормали к поверхности в начальной точке геодезической линии?

Для поверхности шара ответ на этот вопрос однозначно положительный, как это видно по рис. 12.

Для поверхности эллипсоида рассмотрим наиболее наглядный для ответа на поставленный вопрос частный случай, когда начальная точка геодезической линии находится на экваторе. Средний радиус кривизны согласно формуле (II.31) при $B_0=0$ будет равен малой полуоси эллипсоида, т. е. $R_0=b$. Тогда дифференциал дуги геодезической окружности в соответствии с равенствами (II.42) и (II.43) будет определяться по такой формуле:

$$dp = \left(s - \frac{s^3}{6b^2} + \dots \right) dA_0. \quad (a)$$

Исследуем две геодезические линии, исходящие из начальной точки на экваторе под азимутами $A_0=0$ и $A_0=90^\circ$, т. е. меридиан и экватор. Для исследования воспользуемся параметрическими уравнениями геодезической линии (II.27).

Выпишем значения x и z для меридиана при условии $B_0=0$ и $A_0=0$:

$$x = s - \left(\frac{1 + e'^2}{a} \right)^2 \frac{s^3}{6} + \dots,$$

$$z = 0,$$

где $s=X$ — длина дуги меридиана.

Теперь напишем эти же уравнения при условии $B_0=0$ и $A_0=dA_0$, сохранив прежнюю длину дуги s . Очевидно, с погрешностью порядка dA_0^2 выражение для x останется прежним, а второе уравнение примет такой вид:

$$z = -\frac{e'^2 s^3}{6a^2} dA_0 + \dots$$

Ясно, что абсцисса x представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из конечной точки геодезической линии на нормаль в ее начальной точке, лежащей на плоскости экватора.

Расстояние между конечными точками двух геодезических линий с начальными азимутами $A_0=0$ и dA_0 представляет собой дифференциал дуги геодезической окружности dp . Это расстояние определяется не только поворотом оси x на угол dA_0 , но и координатой z конечной точки второй линии, а именно

$$dp = x dA_0 - z = \left[s - \left(\frac{1 + e'^2}{a} \right)^2 \frac{s^3}{6} + \frac{e'^2}{a^2} \frac{s^3}{6} + \dots \right] dA_0,$$

откуда с погрешностью на члены порядка e^4 получим выражение

$$dp = \left(s - \frac{1 + e'^2}{a^2} \frac{s^3}{6} + \dots \right) dA_0 = \left(s - \frac{s^3}{6b^2} + \dots \right) dA_0,$$

которое совпадает с равенством (a).

Аналогичные уравнения найдем для экватора при азимутах $A_0 = 90^\circ$ и $A_0 = 90^\circ + dA_0$:

$$x = s - \frac{s^3}{6a^2} + \dots,$$

$$z = \frac{e'^2 s^3}{6a^2} + \dots.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} dp = x dA_0 - z &= \left(s - \frac{s^3}{6a^2} - \frac{e'^2 s^3}{6a^2} + \dots \right) dA_0 = \\ &= \left(s - \frac{1 + e'^2}{6a^2} s^3 + \dots \right) dA_0 = \left(s - \frac{s^3}{6b^2} + \dots \right) dA_0, \end{aligned}$$

т. е. и в этом случае мы получили равенство (а).

Таким образом, мы установили, что в обоих случаях x не равняется m . Следовательно, центр кривизны геодезической окружности не находится на нормали к поверхности в начальной точке геодезической линии.

Только в одном частном случае центр кривизны лежит на нормали, когда начальная точка геодезической линии совпадает с полюсом эллипсоида. Тогда геодезическими окружностями будут параллели, а приведенной длиной геодезической линии — меридиана — будет служить радиус соответствующей параллели.

Приведенная длина геодезической линии применяется на практике в тех случаях, когда необходимо найти линейный сдвиг конца геодезической линии, вызванный небольшим изменением азимута в ее начальной точке. Для этого служит формула (II.43).

Для геодезической линии любой протяженности вместо формулы (II.42) рекомендуется пользоваться следующей формулой Гельмерта [7]:

$$m = m_0 + \Delta m, \quad (\text{II.44})$$

где

$$m_0 = R_0 \sin \frac{s}{R_0}, \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} \Delta m = \frac{ae^2}{16} &\left[\cos A_0 \sin 2B_0 \left(4 \frac{s}{a} \sin \frac{s}{a} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \cos \frac{s}{a} + \cos 3 \frac{s}{a} \right) + (\cos^2 B_0 \cos^2 A_0 - \sin^2 B_0) \times \right. \\ &\left. \times \left(12 \frac{s}{a} \cos \frac{s}{a} - 9 \sin \frac{s}{a} - \sin 3 \frac{s}{a} \right) \right]. \quad (\text{II.46}) \end{aligned}$$

В правой части равенства (II.46) отброшены члены с множителем e^4 .

Таблица 2

s	m ₀ , м	Δm, м	m, м	ΔmdA ₀ , м		mdA ₀ = dp, м	
				dA ₀ = 1"	dA ₀ = 1'	dA ₀ = 1"	dA ₀ = 1'
300 км	299 889	0,025	299 889	—	—	1,45	87,23
0,1 a	636 762	0,51	636 762	—	—	3,1	185,2
0,5 a	3 057 892	318	3 058 210	0,002	0,1	14,8	889,6
a	5 367 097	4284	5 371 381	0,02	1,2	26,0	1562,5

Найдем величину линейного сдвига dp для различных длин геодезических линий с использованием формулы (II.44) при следующих условиях: $B_0=45^\circ$, $A_0=45^\circ$, $dA_0=1''$ и $1'$. Результаты вычислений, выполненных на эллипсоиде Красовского, показаны в табл. 2.

Как видно из табл. 2, влияние поправки Δm на величину линейного сдвига dp настолько незначительно, что на практике для вычисления m почти всегда достаточно ограничиться применением формулы (II.45).

Исследованиями Гельмерта установлено, что приведенная длина геодезической линии будет иметь одну и ту же величину, независимо от того, какие используются в формуле (II.44) значения широты и азимута — для начальной точки геодезической линии или же для ее конечной точки.

Легко видеть, что при использовании формулы (II.45) это не имеет места вследствие разных значений R_0 в начальной и конечной точках геодезической линии, если они не находятся на одной параллели. Ясно, что различие здесь возникает за счет отброшенной поправки Δm .

Следовательно, если мы отбрасываем поправку Δm , то с такой же ошибкой приведенную длину геодезической линии можно вычислить по формуле (II.45) как с широтой начальной точки, так и с широтой конечной точки геодезической линии.

Приведенная длина геодезической линии применяется главным образом в дифференциальных формулах геодезической линии, которые рассматриваются в главе IV учебника.

§ 15. ЭЛЕМЕНТЫ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Параметрические уравнения нормального сечения

Пусть начало декартовых координат совпадает с геодезической точкой нормального сечения, ось x направлена вдоль касательной к нему, ось y — вдоль его главной нормали. В геодезической точке нормального сечения его главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, следовательно, кривизна нормального сечения в этой точке равна кривизне геодезической

линии, имеющей общую касательную с нормальным сечением. Поэтому в качестве параметрических уравнений нормального сечения можно использовать первые два уравнения (II.27). Так как нормальное сечение — плоская кривая, то $z=0$. Таким образом, для нормального сечения имеем такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{6R_A^2} + \frac{3\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{8N_0^3} s^4 + \dots, \\ y &= \frac{s^2}{2R_A} - \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{2N_0^2} s^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.47})$$

Конечно, в этих уравнениях переменная величина s является дугой нормального сечения, а не геодезической линией, как в уравнениях (II.27). Все постоянные коэффициенты в этих рядах вычисляются по широте и азимуту начальной (геодезической) точки нормального сечения.

Длина хорды нормального сечения

Хордой d нормального сечения является отрезок прямой, соединяющий геодезическую точку нормального сечения и его произвольную точку. Для определения длины этой хорды можем воспользоваться уравнениями (II.47).

Из равенства

$$d^2 = x^2 + y^2$$

приближенно можно написать

$$d = x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right].$$

Заменив координаты x и y их значениями по (II.47), найдем

$$\begin{aligned} d &= \left(s - \frac{s^3}{6R_A^2} + \frac{3\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{8N_0^3} s^4 + \dots \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{s^2}{8R_A^2} - \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{4N_0^2} s^3 + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда с принятой точностью получим окончательно

$$d = s - \frac{s^3}{24R_A^2} + \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{8N_0^3} s^4 + \dots \quad (\text{II.48})$$

Угол между касательной и хордой нормального сечения

Этот угол в геодезической точке нормального сечения обозначим буквой β_0 . Очевидно,

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{y}{x}.$$

Используя уравнения (II.47) и ограничиваясь членами второго порядка относительно s , находим

$$\beta_0 = \frac{s}{2R_A} - \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{2N_0^3} s^2 + \dots \quad (\text{II.49})$$

Сравнение длин дуг нормального сечения и окружности

Пусть точка Q_0 (рис. 15) является геодезической точкой нормального сечения $s = Q_0Q$ и одновременно началом системы декартовых координат; R_A — радиус кривизны нормального сечения в этой же точке, равный отрезку Q_0O .

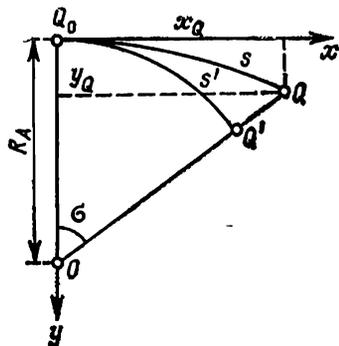


Рис. 15

Из точки O как из центра опишем дугу окружности s' радиуса R_A . Точка Q' на этой окружности является центральной проекцией точки Q .

По рис. 15 напишем следующее равенство:

$$\operatorname{tg} \frac{s'}{R_A} = \frac{x}{R_A - y}, \quad (\text{II.50})$$

где x и y — координаты точки Q , определяемые уравнениями (II.47).

Полагая дуги s и s' малыми величинами в сравнении с радиусом R_A , левую и правую части последнего равенства умножим на R_A и каждую часть в отдельности разложим в ряды:

$$R_A \operatorname{tg} \frac{s'}{R_A} = s' + \frac{s'^3}{3R_A^2} + \dots,$$

$$\frac{x}{1 - \frac{y}{R_A}} = x \left(1 + \frac{y}{R_A} + \dots \right).$$

В последнем равенстве заменим координаты их значениями по (II.47):

$$\begin{aligned} x \left(1 + \frac{y}{R_A} + \dots \right) &= \left[s - \frac{s^3}{6R_A^2} + \left(\frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B \cos A}{8N^3} \right)_0 s^4 + \dots \right] \left[1 + \right. \\ &+ \left. \frac{s^2}{2R_A^2} - \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B \cos A}{2N^3} \right)_0 s^3 + \dots \right] = \\ &= s + \frac{s^3}{3R_A^2} - \left(\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B \cos A}{8N^3} \right)_0 s^4 + \dots \end{aligned}$$

Полученные ряды подставим в равенство (II.50). Тогда с принятой точностью с погрешностью на члены порядка $\left(\frac{s}{R_A} \right)^6$

и $\eta^4 \left(\frac{s}{R_A} \right)^3$ можем написать окончательно

$$s - s' = \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_0}{8N_0^3} s^4. \quad (\text{II.51})$$

Наибольшей величины эта разность длин дуг достигает при $A_0 = 0^\circ$ или 180° , т. е. в плоскости меридиана, а именно

$$(s - s')_{\max} = \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} B_0}{8N_0^3} s^4. \quad (\text{II.52})$$

Например, при $B_0 = 45^\circ$ и $s = 640$ км получим

$$s - s' = \frac{e^2 \sin B_0 \cos B_0}{8} \left(\frac{s}{N_0} \right)^3 s = \frac{0,5 \cdot 640}{8 \cdot 150} = 0,27 \text{ м.}$$

В первом вертикале ($A_0 = 90^\circ$) эта разность с точностью, принятой в равенстве (II.52), равна нулю.

Таким образом, во многих случаях практики длину дуги нормального сечения с весьма малой погрешностью можно заменить длиной дуги окружности, радиус которой равен радиусу кривизны нормального сечения в его геодезической точке.

В частном случае при $A_0 = 0^\circ$ нормальное сечение представляет собой дугу меридиана, а $R_A = M_0$. Поэтому длину дуги меридиана можно вычислять по формуле

$$\Delta X = M_0 \sigma. \quad (\text{II.53})$$

Эта формула имеет очень простой вид и обладает высокой точностью. Однако величина центрального угла σ , как правило, неизвестна. Заданной величиной обычно является разность широт ΔB , поэтому длину дуги меридиана вычисляют по более сложной формуле (I.105).

§ 16. СРАВНЕНИЕ ДЛИН ДУГ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ И НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

На поверхности эллипсоида точки Q_1 и Q_2 (рис. 16) соединены геодезической линией s_g и нормальным в точке Q_1 сечением s_n . Длины этих дуг будем считать малыми по сравнению с радиусами кривизны эллипсоида.

Необходимо найти разность $s_n - s_g$.

Если рассматривать точку Q_1 как полюс полярных координат, то положение любой точки Q нормального сечения можно определить длиной геодезической линии s_g и ее азимутом A_g в точке Q_1 .

Дифференциал ds_n дуги нормального сечения выражается через дифференциалы дуг координатных линий в системе полярных координат следующим образом (см. рис. 16):

$$ds_n^2 = ds_g^2 + dp^2, \quad (\text{II.54})$$

где dp есть дифференциал дуги геодезической окружности и определяется формулой (II.43):

$$dp = m dA_g.$$

Дифференциал dA_g представляет собой изменение угла между нормальным сечением с азимутом A_n , имеющим в данном случае неизменное положение, и геодезической линией с азимутом A_g , который изменяется при движении точки Q вдоль нормального сечения.

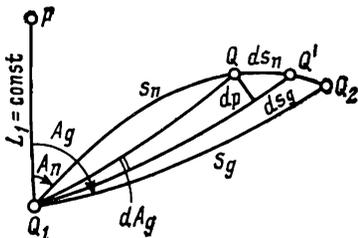


Рис. 16

Разность азимутов $A_g - A_n$ определяется формулой

$$A_g - A_n = -\frac{e^2}{12a^2} \cos^2 B_1 \sin 2A_g s_g^2,$$

которую легко получить из формулы (см. § 19, (III.1), если положить в ней $H_2 = 0$). Продифференцируем обе части этого равенства по переменным A_g и s_g , при этом в правой части $\sin 2A_g$ полагаем постоянным, так как малое изменение аргумента этой функции практически не оказывает

существенного влияния на общий результат. Таким образом, получим

$$dA_g = -\frac{e^2 s_g}{6a^2} \cos^2 B_1 \sin 2A_g ds_g.$$

Подставим это выражение в равенство (II.54), в котором с принятой точностью для малых s_g можно положить $m = s_g$. В результате будем иметь

$$ds_n^2 = ds_g^2 + \frac{e^4 s_g^4}{36a^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2A_g ds_g^2,$$

откуда, извлекая квадратный корень, находим

$$ds_n = \left(1 + \frac{e^4 s_g^4}{72a^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2A_g \right) ds_g.$$

Проинтегрировав эту функцию по всей длине нормального сечения от точки Q_1 до точки Q_2 , получим окончательное выражение для определения разности длин дуг нормального сечения и геодезической линии

$$s_n - s_g = \frac{e^4 s_g^5}{360a^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2A_g. \quad (\text{II.55})$$

Наибольшей величины эта разность достигает тогда, когда точка Q_1 находится на экваторе ($B_1 = 0$) и азимут $A_g = 45^\circ$. В этом случае при расстоянии $s_g = 1000$ км разность $s_n - s_g$ будет составлять всего 0,00007 м. Очевидно, с весьма незначительной ошибкой длину нормального сечения можно принимать

равной длине соответствующей геодезической линии во всех случаях практики, когда расстояние между точками Q_1 и Q_2 меньше радиусов кривизны эллипсоида.

Формула (II.55) впервые получена Бесселем в 1837 г.

§ 17. УСЛОВИЯ ЗАМЕНЫ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА ПОВЕРХНОСТЬЮ ШАРА

При решении многих практических задач, в которых используются расстояния, измеряемые по поверхности, с целью упрощения вычислений возникает необходимость замены поверхности эллипсоида более простой поверхностью шара.

Поверхность эллипсоида не развертывается на шаре, т. е. ее невозможно наложить всеми точками на поверхность шара так, чтобы расстояния между точками не изменялись. Поэтому эллипсоид изображают тем или иным способом на шаре и по соответствующим формулам учитывают возникающие при этом искажения углов и длин линий. Так поступают в тех случаях, когда требуется высокая точность решения задач и необходимо тщательно вычислять величины угловых и линейных искажений. Такого рода точные расчеты выполняются, например, при решении главных геодезических задач, методы решения которых изложены в главе IV.

Здесь мы рассмотрим лишь такой вопрос: какие величины наибольших линейных погрешностей можно ожидать при замене эллипсоида шаром?

Если необходимо заменить всю поверхность эллипсоида поверхностью шара, то в этом случае наиболее подходящим будет такой шар, поверхность (или объем) которого равна поверхности (или объему) эллипсоида. Радиус такого шара был нами получен в § 10 и равен 6371,1 км. При решении различных задач на поверхности такого шара обычно географические координаты шара принимают равными соответствующим геодезическим координатам эллипсоида. Тогда разница в длинах дуг меридиана между экватором и полюсом на эллипсоиде и на шаре составит 5,6 км, а разность соответствующих длин четверти экватора будет равна 11,2 км.

Конечно, можно взять и другие размеры радиуса шара. Но тогда в одних направлениях погрешность уменьшится, а в других — возрастет. Так, если взять радиус шара равным большой полуоси эллипсоида, то вдоль экватора линейной погрешности не будет, но в длине меридиана между полюсом и экватором она составит 16,8 км. Если же радиус шара взять равным малой полуоси эллипсоида, то погрешность составит соответственно по меридиану 16,8 км и по экватору 33,6 км.

Если необходимо, чтобы разница в длинах дуг четверти меридианного эллипса и четверти экватора на эллипсоиде и на шаре была одинаковой, равной 8,4 км, то радиус шара следует

взять равным 6372,9 км. Относительная линейная погрешность в этом случае составит 1 : 1200.

Теперь поставим такую задачу: какую часть поверхности эллипсоида можно заменить сферической поверхностью при допустимой наибольшей погрешности в длинах линий?

Для решения этой задачи изобразим часть поверхности эллипсоида на шаре. Радиус шара примем равным среднему радиусу кривизны эллипсоида $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$, вычисленному по широте B_0 параллели, проходящей через середину изображаемого участка поверхности эллипсоида.

Выберем произвольную точку O на этой параллели (рис. 17). Пусть ее изображением на шаре будет точка O' . Любую другую точку Q эллипсоида изобразим на шаре так, чтобы ее полярные координаты s и A_0 были

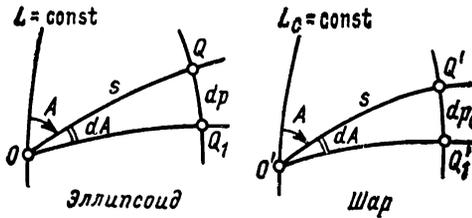


Рис. 17

точно равны полярным координатам s и A_0 точки Q' на шаре. При таком способе изображения линейное искажение в дифференциальной окрестности точки Q' в направлении дуги большого круга $Q'O'$ будет равно нулю, а в перпендикулярном к нему направлении вдоль геодезической окружности будет наибольшим. Это наибольшее искажение выразим относительной величиной v :

$$v = \frac{dp_c - dp}{dp_c}, \quad (II.56)$$

где dp — дифференциал геодезической окружности на эллипсоиде;

dp_c — изображение dp на шаре в виде дифференциала геодезической окружности.

В системе полярных координат на эллипсоиде дифференциал dp определяется равенством

$$dp = m dA_0,$$

в котором приведенная длина геодезической линии m выражается формулой (II.42),

$$m = R_0 \sin \frac{s}{R_0} + \frac{e^2}{6a^3} \sin 2B_0 \cos A_0 s^4.$$

Для шара в § 14 были получены аналогичные выражения:

$$dp_c = m_c d\alpha,$$

$$m_c = R \sin \frac{s}{R}.$$

С учетом принятых выше условий изображения эллипсоида на шаре можем написать

$$dp_c = R_0 \sin \frac{s}{R_0} dA_0.$$

После подстановки этих значений dp и dp_c в равенство (II.56) и сокращения на dA_0 получим

$$v = -\frac{m_c - m}{m_c}.$$

В числителе m и m_c заменим выражениями, приведенными выше, а в знаменателе примем $m_c = s$ с пренебрегаемо малой погрешностью $e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^6$. Тогда

$$v = -\frac{e^2}{6} \sin 2B_0 \cos A_0 \left(\frac{s}{a}\right)^3.$$

Из этой формулы видно, что наибольшая величина искажения будет в том случае, когда азимуты геодезических линий A_0 равны 0 или 180° , а геодезическая линия s представляет собой дугу меридиана ΔX . Таким образом, наибольшая величина искажения будет представляться следующей формулой:

$$v_{\max} = \pm \frac{e^2}{6} \sin 2B_0 \left(\frac{\Delta X}{a}\right)^3; \quad (\text{II.57})$$

В качестве начальной точки O , от которой отсчитываются расстояния s , можно взять любую точку на параллели $B_0 = \text{const}$. Абсолютная величина искажения v_{\max} будет одинаковой для всех точек, удаленных от параллели $B_0 = \text{const}$ на одно и то же расстояние ΔX к северу или к югу.

Рассматриваемое нами изображение можно представить следующим образом. Сфероидический пояс эллипсоида шириной $2\Delta X$ при наложении на шар вдоль параллели $B_0 = \text{const}$ не изменится, тогда как в северной части сжимается ($dp_c < dp$) и в южной части растягивается ($dp_c > dp$). Такие изменения имеют место лишь в направлении восток—запад. В направлении север—юг никаких изменений в длинах линий не происходит, так как длина дуги меридиана ΔX точно равна длине дуги меридиана на шаре в соответствии с принятыми выше условиями изображения.

Основываясь на уравнении (II.57), можно решить поставленную выше задачу. Задавшись допустимой абсолютной величиной максимального относительного искажения v_{\max} , можно найти наибольшую ширину $2\Delta X_{\max}$ сфероидического пояса. В пределах этого пояса можно пренебречь линейными искажениями при замене эллипсоида шаром, радиус которого R_0 вычисляется по широте B_0 средней параллели сфероидического пояса.

В пределах широт B_0 от 30° до 60° $\sin 2B_0$ меняется незначительно: от 0,866 до 1. Поэтому для таких широт без больших отступлений в вычисленном значении v_{\max} можно взять $\sin 2B_0 = 1$. Тогда из равенства (II.57) можем найти

$$2\Delta X_{\max} = 2a \sqrt[3]{\frac{6}{e^2} v_{\max}}. \quad (\text{II.58})$$

Допустим, что $|v_{\max}| = 10^{-8}$. С такой точностью производят вычисления в триангуляции 1 класса, в частности, при решении треугольников. Решая уравнение (II.58) с этим значением $|v_{\max}|$, получаем

$$2\Delta X_{\max} = 2a \sqrt[3]{150 \cdot 6 \cdot 10^{-8}} = 265 \text{ км.}$$

Таким образом, все сфероидические треугольники, расположенные в пределах сфероидического пояса шириной 265 км, можно решать как сферические с относительной погрешностью 10^{-8} , при этом ни одна вершина треугольника не должна быть удалена от параллели с широтой B_0 , по которой вычислен радиус шара, более чем на 133 км.

При пониженных требованиях к точности решения задач на поверхности эллипсоида ширина пояса соответственно увеличивается. Так, например, если $v_{\max} = 10^{-6}$, то ширина пояса достигает 1230 км; если же $v_{\max} = 10^{-5}$, то ширина пояса будет равна 2650 км, а наибольшая величина линейной погрешности на краях этого пояса будет 13 м.

§. 18. ВИДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Триангуляция как основной метод построения геодезической сети на земной поверхности состоит из различного вида треугольников, вершинами которых являются геодезические пункты. Измеренные на этих пунктах угловые и линейные величины исправляются различного рода поправками, учитывающими инструментальные погрешности и влияние внешней среды.

В результате введения этих поправок треугольники становятся прямолинейными, в которых измеренные величины углов и сторон, обремененные, главным образом, случайными погрешностями измерений, в дальнейшем поступают в математическую обработку с целью уравнивания и последующего вычисления координат всех геодезических пунктов.

Для математической обработки измеренных величин в триангуляции в настоящее время применяют два принципиально различающихся друг от друга метода.

В первом методе уравниваются совместно все измеренные в треугольниках величины: горизонтальные углы, зенитные расстояния и длины сторон. Триангуляционная сеть в этом методе рассматривается как пространственное построение в виде своеобразного многогранника, гранями которого являются плоские треугольники.

Для установления геометрических связей между треугольниками необходимо предварительно найти величины всех элементов — углов и сторон — каждого треугольника, так как в современной триангуляции, как правило, измеряются не все стороны, а углы плоского треугольника вообще не измеряются.

Решение такого рода плоских треугольников рассматривается в § 24.

Во втором методе уравнивания геодезической сети, который в настоящее время является основным, все геодезические пункты проектируются на поверхность земного эллипсоида по нормалям к этой поверхности. Проекции геодезических пунктов соединяются геодезическими линиями.

Треугольники на поверхности эллипсоида, образованные геодезическими линиями, называются сфероидическими треугольниками.

Уравниванию подлежит геодезическая сеть, состоящая из сфероидических треугольников.

Для получения элементов сфероидического треугольника необходимо перейти от измеренных горизонтальных углов (или

направлений) и прямолинейных сторон пространственного треугольника к соответствующим углам и сторонам сфероидического треугольника. Затем посредством решения сфероидического треугольника найти неизмеряемые длины сторон.

Возможность решения малых сфероидических треугольников как сферических была рассмотрена в § 17.

Измеренный горизонтальный угол представляет собой двугранный угол, гранями которого являются вертикальные плоскости, а его ребром — отвесная линия. Угол же сфероидического треугольника расположен в касательной плоскости, перпендикулярной к нормали к поверхности эллипсоида. Поэтому при переходе на эллипсоид необходимо прежде всего в измеренный горизонтальный угол ввести поправку за уклонения отвеса от нормали. Такая поправка рассматривается в III-ей части курса высшей геодезии — в теоретической геодезии. Здесь же мы ограничимся только чисто геометрическими редукциями, полагая, что отвесная линия и нормаль к поверхности эллипсоида совпадают.

§ 19. ПОПРАВКА В ИЗМЕРЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕХОДА К НАПРАВЛЕНИЮ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

На рис. 18 показано:

D — измеренное прямолинейное расстояние между пунктами Q_1 и Q_2 , находящимися над поверхностью эллипсоида на высотах H_1 и H_2 ,

Q'_1, Q'_2 — проекции пунктов Q_1 и Q_2 на поверхности эллипсоида по нормальям к ней,

s — геодезическая линия малой длины, соединяющая проекции пунктов,

$\overline{t_n}, \overline{t_g}, \overline{b_n}, \overline{b_g}$ — единичные векторы касательной и бинормали соответственно к нормальному сечению и геодезической линии; все четыре вектора лежат в касательной к точке Q'_1 плоскости,

$\overline{m_1}, \overline{m_2}$ — единичные векторы нормалей к поверхности эллипсоида в точках Q'_1 и Q'_2 ,

\overline{r} — вектор, соединяющий концы геодезической линии,

dA — искомая поправка.

Из точки Q'_2 опустим перпендикуляр Q'_2Q на нормальную в точке Q'_1 плоскость, проходящую через точку Q_2 . Он будет параллелен вектору бинормали $\overline{b_n}$ в точке Q'_1 . Длину этого перпендикуляра можно найти дважды: как проекцию высоты H_2 и как проекцию модуля вектора \overline{r} , т. е.

$$(\overline{r}, \overline{b_n}) = H_2 (\overline{m_2}, \overline{b_n}). \quad (A)$$

Векторы \bar{r} и \bar{m}_2 представим в виде рядов по степеням малой длины геодезической линии s :

$$\bar{r} = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots,$$

$$\bar{m}_2 = \bar{m}_1 + \left(\frac{d\bar{m}}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2\bar{m}}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \dots$$

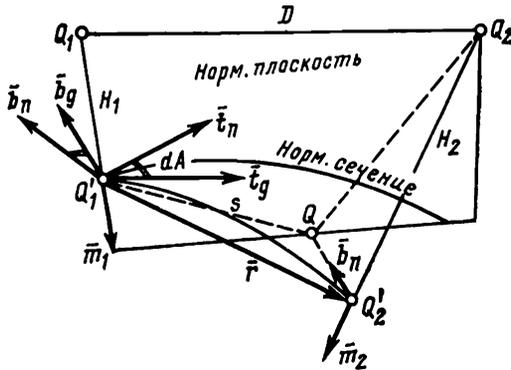


Рис. 18

Для определения коэффициентов этих рядов привлечем уравнения Серре — Френе (II.1) для геодезической линии

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \kappa_g \bar{m},$$

$$\frac{d\bar{m}}{ds} = -\kappa_g \bar{t} + \sigma_g \bar{b},$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\sigma_g \bar{m}.$$

Учитывая эти равенства, можем написать

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}_g,$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{t}_g}{ds} = \kappa_g \bar{m},$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{d\kappa_g}{ds} \bar{m} - \kappa_g^2 \bar{t}_g + \kappa_g \sigma_g \bar{b}_g.$$

Таким образом, предыдущие ряды примут такой вид:

$$\bar{r} = \bar{s} \bar{t}_g + \kappa_g \frac{s^2}{2} \bar{m}_1 + \left(\frac{d\kappa_g}{ds} \bar{m}_1 - \kappa_g^2 \bar{t}_g + \kappa_g \sigma_g \bar{b}_g\right) \frac{s^3}{6} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_2 &= \bar{m}_1 + (-\kappa_g \bar{t}_g + \sigma_g \bar{b}_g) s + \\ &+ \left(-\frac{d\kappa_g}{ds} \bar{t}_g - \kappa_g^2 \bar{m}_1 + \frac{d\sigma_g}{ds} \bar{b}_g - \sigma_g^2 \bar{m}_1 \right) \frac{s^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

В соответствии с написанным выше равенством (А) умножим эти ряды скалярно на вектор \bar{b}_n , после чего приравняем их друг другу. При умножении учтем, что

$$(\bar{t}_g, \bar{b}_n) = -\sin(dA) \approx -dA,$$

$$(\bar{m}_1, \bar{b}_n) = 0,$$

$$(\bar{b}_g, \bar{b}_n) = \cos(dA) \approx 1.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} -dAs + \kappa_g^2 \frac{s^3}{6} dA + \kappa_g \sigma_g \frac{s^3}{6} = \\ = H_2 \left[\kappa_g dAs + \sigma_g s + \left(\frac{d\kappa_g}{ds} dA + \frac{d\sigma_g}{ds} \left(\frac{s^2}{2} \right) \right] \right. \end{aligned}$$

После сокращения на s решим это равенство относительно искомой поправки dA :

$$dA = \frac{H_2 \left(-\sigma_g - \frac{d\sigma_g}{ds} \frac{s}{2} \right) + \kappa_g \sigma_g \frac{s^2}{6}}{1 + H_2 \left(\kappa_g + \frac{d\kappa_g}{ds} \frac{s}{2} \right) - \kappa_g^2 \frac{s^2}{6}}. \quad (a)$$

Кривизна и кручение геодезической линии определяются формулами (II.4) и (II.5), а их производные — формулами (II.24) и (II.25). Приведем их здесь:

$$\kappa_g = \frac{1}{N} (1 + \eta^2 \cos^2 A); \quad \sigma_g = -\frac{\eta^2}{N} \sin A \cos A;$$

$$\frac{d\kappa_g}{ds} = -\frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B}{N^2} \cos A (1 + \eta^2 \cos^2 A);$$

$$\frac{d\sigma_g}{ds} = \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{N^2} \sin A (1 + 3\eta^2 \cos^2 A).$$

Перед тем как подставить эти выражения в правую часть равенства (а), условимся о точности, с которой мы должны получить величину dA . Будем рассматривать $\frac{s}{N}$, $\frac{H}{N}$ и η^2 малыми величинами одного и того же порядка. В конечном же результате ограничимся лишь малыми величинами третьего порядка.

Таким образом, по равенству (а) получим

$$dA = \frac{H_2 \left(\frac{\eta_1^2}{N_1} \sin A_1 \cos A_1 - \frac{\eta_1^2 \operatorname{tg} B_1}{N_1^2} \sin A_1 \frac{s}{2} \right) - \frac{\eta_1^2}{N_1^2} \sin A_1 \cos A_1 \frac{s^2}{6}}{1 + \frac{H_2}{N_1}},$$

откуда с той же точностью напомним окончательно

$$dA_1'' = \rho'' \frac{e'^2}{N_1} H_2 \cos^2 B_1 \sin A_1 \left(\cos A_1 - \operatorname{tg} B_1 \sin A_1 \frac{s}{2N_1} - \frac{H_2}{N_1} \cos A_1 \right) - \rho'' e'^2 \cos^2 B_1 \sin A_1 \cos A_1 \frac{s^2}{6N_1^2}. \quad (\text{III.1})$$

Эта формула содержит в себе два вида поправок в измеренное направление: первое слагаемое — поправка за высоту наблюдаемого пункта, второе слагаемое — поправка за переход от нормального сечения к геодезической линии.

При обработке триангуляции 1 класса все поправки в измеренное направление должны вычисляться с точностью до 0,001". Суммарная поправка затем округляется до 0,01".

С такой точностью вычисления по формуле (III.1) выполняются в редких случаях, когда расстояние между пунктами достигает 300 км, а высота пункта над поверхностью эллипсоида свыше 4 км.

В большинстве случаев в триангуляции 1 класса длины сторон составляют величину не более 60 км, а высоты — менее 4 км. Для таких случаев формулу (III.1) можно упростить, отбросив в ней второй и третий члены в скобках.

Кроме того, примем $N \approx a$, вычислим постоянные коэффициенты и выпишем для каждой поправки самостоятельные выражения:

— поправка в измеренное направление за высоту наблюдаемого пункта

$$dA_H'' = 0,109 \cos^2 B_1 \sin 2A_1 H_2, \quad (\text{III.2})$$

— поправка в измеренное направление за переход от нормального сечения к геодезической линии

$$dA_g'' = 0,28 \cdot 10^{-5} \cos^3 B_1 \sin 2A_1 s^2. \quad (\text{III.3})$$

В этих формулах H_2 и s выражены в км.

Пример вычисления поправок: $B_1 = A_1 = 45^\circ$, $H_2 = 1$ км, $s = 60$ км; $dA_H'' = 0,054''$, $dA_g'' = 0,005''$.

§ 20. РЕДУЦИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕННОГО ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЭЛЛИпсоИДА

Два геодезических пункта Q_1 и Q_2 (рис. 19) расположены на высотах H_1 и H_2 над поверхностью эллипсоида. Между ними измерено прямолинейное расстояние D . Необходимо найти длину геодезической линии s между проекциями геодезических пунктов на поверхность эллипсоида.

В § 16 было установлено, что длина геодезической линии и длина дуги нормального сечения между двумя точками на эллипсоиде отличаются друг от друга на ничтожно малую величину.

Кроме того, в § 15 было показано, что длина дуги нормального сечения незначительно отличается от длины дуги откружности, радиус которой равен радиусу кривизны нормального сечения в его начальной точке. Так, например, при $s=640$ км погрешность будет равна 0,3 м, а при $s=200$ км всего лишь 0,003 м.

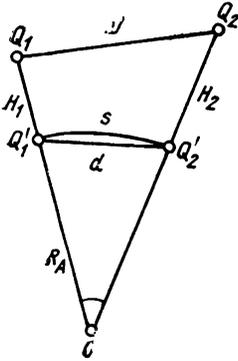


Рис. 19

Поэтому искомую длину геодезической линии будем считать равной длине дуги окружности, радиус которой вычисляется по формуле (II.30),

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B_1 \cos^2 A_1},$$

где B_1 — широта точки Q_1 ,

A_1 — геодезический азимут нормального сечения между точками Q_1' и Q_2' .

В плоском треугольнике Q_1Q_2O со сторонами D , R_A+H_1 и R_A+H_2 найдем угол при вершине O , равный s/R_A , по формуле

$$\sin^2 \frac{s}{2R_A} = \frac{D^2 - (H_2 - H_1)^2}{4(R_A + H_1)(R_A + H_2)}.$$

Вынесем за скобки D^2 и R_A^2 и извлечем квадратный корень из обеих частей равенства. Тогда

$$s = 2R_A \arcsin \left[\frac{D}{2R_A} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{H_2 - H_1}{D}\right)^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}} \right]. \quad (\text{III.4})$$

Разложив в ряд функцию арксинуса и отбросив член пятого порядка, получим

$$s = D \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{H_2 - H_1}{D}\right)^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}} + \left(\frac{D}{R_A}\right)^2 \frac{D}{24}. \quad (\text{III.5})$$

Каждая из высот H_1 и H_2 составляет сумму двух высот: нормальной высоты и высоты квазигеоида.

Для обеспечения высокой точности вычисления s с относительной ошибкой не более 10^{-6} необходимо определять разность высот $H_2 - H_1$ с точностью до 0,1 м при $D < 10$ км и с точностью до 1 м при $D > 10$ км. Сами же высоты H_1 и H_2 должны быть взяты с ошибкой порядка 5 м. Радиус кривизны R_A достаточно взять с ошибкой порядка 10 км.

В практике геодезических работ встречаются случаи, когда от измеренной линии D необходимо перейти к длине хорды гео-

дезической линии. Для вычисления хорды d в правой части равенства (III.5) следует отбросить второй член. Тогда

$$d = D \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{H_2 - H_1}{D}\right)^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}}. \quad (\text{III.6})$$

§ 21. ВЫЧИСЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА

Для вычисления сферического избытка ε в сферическом треугольнике любого размера сферическая тригонометрия располагает формулами различного вида. Наиболее подходящими из них будут такие формулы:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} \sin B}{\cos \frac{b}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A}{\cos \frac{a}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

где

$$a = \frac{s_a}{R}, \quad b = \frac{s_b}{R}, \quad c = \frac{s_c}{R}, \quad (\text{III.8})$$

s_a, s_b, s_c — длины сторон треугольника в линейной мере,
 A, B, C — углы треугольника,
 R — радиус сферы.

В малых сферических треугольниках стороны являются малыми величинами по сравнению с радиусом сферы. Поэтому тригонометрические функции малых аргументов разложим в ряды:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{24} + \dots \right), \\ \sin \frac{a}{2} &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{24} + \dots \right), \\ \cos \frac{a}{2} &= 1 - \frac{a^2}{8} + \dots \end{aligned}$$

Аналогичные разложения можно написать и для двух других сторон.

Если ограничиться только членами четвертого порядка относительно стороны, то из равенств (III.7) для вычисления сфе-

рического избытка получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{ab}{2} \sin C \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - 3c^2}{24} \right), \\ \varepsilon &= \frac{ac}{2} \sin B \left(1 - \frac{a^2 + c^2 - 3b^2}{24} \right), \\ \varepsilon &= \frac{bc}{2} \sin A \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - 3a^2}{24} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9})$$

В практике геодезических работ эти формулы применяются сравнительно редко. В современных построениях триангуляции I класса стороны треугольников обычно не выходят за пределы 60 км, поэтому для вычисления сферического избытка в формулах (III.9) достаточно ограничиться только главными членами. Учитывая равенства (III.8), можем написать

$$\varepsilon'' = fs_a s_b \sin C = fs_a s_c \sin B = fs_b s_c \sin A, \quad (\text{III.10})$$

где

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}.$$

Приближенное значение f равно $25 \cdot 10^{-4}$, если радиус R выражен в километрах.

В формулах (III.10) сферический избыток вычисляется по любым двум сторонам. Но эти формулы можно преобразовать так, чтобы ε'' был функцией только одной стороны.

Рассматривая сферический треугольник как плоский, можно написать

$$A + B + C = 180^\circ,$$

$$\frac{s_a}{\sin A} = \frac{s_b}{\sin B} = \frac{s_c}{\sin C}.$$

С учетом этих равенств формулы (III.10) приведем к такому виду:

$$\varepsilon'' = fs_a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A} = fs_b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B} = fs_c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}. \quad (\text{III.11})$$

Так как для плоского треугольника

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

то

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \text{ctg } B + \text{ctg } C.$$

Аналогично можем найти

$$\frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C,$$

$$\frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B.$$

Используя эти соотношения, получим еще одну группу формул для вычисления сферического избытка:

$$\varepsilon'' = \frac{fs_a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C} = \frac{fs_b^2}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C} = \frac{fs_c^2}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}. \quad (\text{III.12})$$

Формулы (III.10), (III.11) и (III.12) обладают одинаковой точностью.

В триангуляции 1 класса сферический избыток вычисляется с точностью до $0,001''$. В табл. 3 для четырех сферических треугольников различной формы приведены максимальные размеры сторон, в пределах которых погрешность сферического избытка, вычисленного по формулам (III.10), не превышает $0,001''$.

Таблица 3

№ п/п	Углы треугольника			ε''	Длины сторон, км		
	A	B	C		s_a	s_b	s_c
1	60°	60°	60°	46	145	145	145
2	75	75	30	27	145	145	75
3	30	30	120	18	90	90	155
4	30	60	90	23	75	125	145

Таким образом, во всех треугольниках современной триангуляции 1 класса сферический избыток можно вычислять по любым формулам (III.10)—(III.12) с погрешностью не более $0,001''$.

Для вычисления сферического избытка в каждом треугольнике, кроме углов, должны быть известны также приближенные длины сторон, для определения которых необходимо предварительно решить все треугольники как плоские.

Выясним, с какой точностью должны быть известны длины сторон и углы, чтобы вычисленный по ним сферический избыток имел погрешность не более $0,001''$. С этой целью возьмем равносторонний треугольник, для которого из формул (III.10) можем написать

$$\varepsilon'' = fs^2 \sin A.$$

Дифференцируя это равенство по переменным s и A , получаем

$$d\epsilon'' = 2fs \sin Ads,$$

$$d\epsilon'' = fs^2 \cos AdA.$$

Приняв $d\epsilon'' = 0,0005''$ и $A = 60^\circ$, найдем ds и dA для различных длин сторон треугольника (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

s , км	ds , м	dA''
30	4	90
50	2	32
100	1	8

Данные, приведенные в табл. 4, показывают, что при предварительном решении треугольников со сторонами до 30 км можно применять тригонометрические функции с четырьмя знаками, а со сторонами от 30 до 100 км — с пятью знаками. Кроме того, в этих вычислениях измеренные углы можно использовать

как углы плоского треугольника, не вводя в них никаких поправок.

Теперь рассмотрим вычисление сферического избытка в тех случаях, когда стороны треугольника выходят за пределы, приведенные в табл. 3. Здесь придется учитывать уже члены четвертого порядка, т. е. использовать формулы (III.9). Приведем эти формулы к виду, удобному для практического применения.

Главные члены перед скобками в этих формулах обозначим так:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_a &= \frac{bc}{2} \sin A = \frac{s_b s_c}{2R^2} \sin A, \\ \epsilon_b &= \frac{ac}{2} \sin B = \frac{s_a s_c}{2R^2} \sin B, \\ \epsilon_c &= \frac{ab}{2} \sin C = \frac{s_a s_b}{2R^2} \sin C. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.13})$$

Величины a^2 , b^2 и c^2 в скобках в этих же формулах выразим через сферический избыток. Для этого воспользуемся приведенными выше равенствами (III.12), в которых сферический избыток выразим в радианной мере. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{s_a^2}{R^2} = 2\epsilon (\text{ctg } B + \text{ctg } C), \\ b^2 &= \frac{s_b^2}{R^2} = 2\epsilon (\text{ctg } A + \text{ctg } C), \\ c^2 &= \frac{s_c^2}{R^2} = 2\epsilon (\text{ctg } A + \text{ctg } B), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.14})$$

где с принятой точностью достаточно положить $\epsilon = \epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c$.

Таким образом, равенства (III.9) будут приведены к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' &= \varepsilon_a \left[1 + \frac{\varepsilon_a}{6} (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} A) \right] \rho'', \\ \varepsilon'' &= \varepsilon_b \left[1 + \frac{\varepsilon_b}{6} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B) \right] \rho'', \\ \varepsilon'' &= \varepsilon_c \left[1 + \frac{\varepsilon_c}{6} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C) \right] \rho''. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.15})$$

Формулы (III.15) вместе с формулами (III.13) могут применяться для вычисления сферического избытка с точностью до $0,001''$ при длинах сторон в несколько сот километров.

§ 22. РЕШЕНИЕ МАЛОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА КАК ПЛОСКОГО С СОХРАНЕНИЕМ УГЛОВ

Решение сферического треугольника в геодезических работах состоит в том, что по известным углам A, B, C треугольника (рис. 20) и заданной стороне a вычисляют остальные две стороны b и c .

Стороны сферического треугольника, представляющие дуги больших кругов, должны быть выражены в частях радиуса сферы по формулам (III.8).

Для решения сферического треугольника произвольного размера применяются следующие формулы сферической тригонометрии:

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin a \frac{\sin B}{\sin A}, \\ \sin c &= \sin a \frac{\sin C}{\sin A}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.16})$$

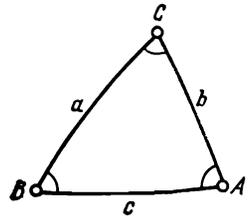


Рис. 20

Поскольку стороны треугольника в геодезии выражаются в линейной мере, то при использовании формул (III.16) приходится выполнять дополнительные вычисления: переходить от линейных величин к сферическим дугам, находить синусы этих дуг, а после вычислений по формулам (III.16) выполнять обратный переход от синусов дуг к линейным величинам.

В геодезических сетях длины сторон треугольников обычно значительно меньше радиуса сферы. Вследствие этого появляется возможность заменить формулы (III.16) более простыми выражениями.

Формулы будут наиболее простыми тогда, когда стороны треугольника настолько малы, что кривизной шара можно пре-

небречь. Тогда треугольник решается как плоский по формулам

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A}, \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.17})$$

В триангуляции 1 класса, хотя стороны и малы, все-таки пренебрегать кривизной шара нельзя.

Поправки за кривизну шара при решении малых сферических треугольников как плоских по формулам (III.17) можно учесть двумя способами:

- 1) введением поправок в стороны с сохранением величины углов (способ аддитанентов),
- 2) введением поправок в сферические углы с сохранением длин сторон (способ Лежандра).

Ниже рассматривается первый способ. Второй способ будет рассмотрен в следующем параграфе.

Полагая, что стороны сферического треугольника — малые величины, их тригонометрические функции в равенствах (III.16) разложим в ряды, ограничиваясь членами третьего порядка,

$$\begin{aligned} b - \frac{b^3}{6} + \dots &= \left(a - \frac{a^3}{6} + \dots \right) \frac{\sin B}{\sin A}, \\ c - \frac{c^3}{6} + \dots &= \left(a - \frac{a^3}{6} + \dots \right) \frac{\sin C}{\sin A}, \end{aligned}$$

откуда с принятой точностью

$$\begin{aligned} b &= a \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{b^3}{6} - \frac{a^3}{6} \frac{\sin B}{\sin A} = a \frac{\sin B}{\sin A} \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{6} \right), \\ c &= a \frac{\sin C}{\sin A} + \frac{c^3}{6} - \frac{a^3}{6} \frac{\sin C}{\sin A} = a \frac{\sin C}{\sin A} \left(1 + \frac{c^2 - a^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Заменяв сферические дуги линейными величинами по формулам (III.17), получим

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{s_b}{R} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{s_a}{R} \right)^2 \right], \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{s_c}{R} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{s_a}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.18})$$

Из этих формул видно, что главные члены, стоящие перед квадратными скобками, представляют собой решение сферического треугольника как плоского по формулам (III.17), причем углы в них являются сферическими. Вычислив только главные члены, мы получили бы длины сторон s_b и s_c с недостаточной

точностью. Второй и третий члены в квадратных скобках улучшают значения s_b и s_c . Поправочные члены в квадратных скобках называют аддитаментами. Поэтому решение малого сферического треугольника по формулам (III.18) можно назвать способом аддитаментов.

Формулы (III.18) можно прологарифмировать. Тогда второй и третий члены в квадратных скобках превратятся в малые поправочные члены к логарифму главного члена, называемые логарифмическими аддитаментами. Логарифмический метод решения малого сферического треугольника применялся до появления современных вычислительных машин. В настоящее время он утратил свое практическое значение.

Для того чтобы оценить степень точности формул (III.18), необходимо разложение синусов сторон в равенствах (III.16) довести до членов пятого порядка. Тогда

$$\left. \begin{aligned} b &= a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{b^2 - a^2}{6} \left(1 + \frac{7b^2 - 3a^2}{60} \right) \right], \\ c &= a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{c^2 - a^2}{6} \left(1 + \frac{7c^2 - 3a^2}{60} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Умножим стороны a , b и c на радиус шара и заменим их в множителе перед круглыми скобками по формулам (III.18), а в круглых скобках — по формулам (III.17). Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{s_b^2 - s_a^2}{6R^2} \left(1 + \frac{9s_b^2 - s_a^2}{20R^2} \right) \right], \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{s_c^2 - s_a^2}{6R^2} \left(1 + \frac{9s_c^2 - s_a^2}{20R^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.20})$$

Возьмем равнобедренный треугольник, у которого каждая из определяемых сторон s_b и s_c в два раза больше заданной стороны s_a . В практике геодезических работ такая форма треугольника близка к предельной, так как угол A в этом случае приближенно равен 30° .

Для этого треугольника поправочный член пятого порядка в формулах (III.20) будет

$$\Delta s_b = \Delta s_c = \frac{7}{4} \left(\frac{s_a}{R} \right)^5 \cdot R.$$

Пусть $s_a = 65$ км, $s_b = s_c = 130$ км, $R = 6400$ км. Тогда абсолютная погрешность вычисления длин сторон по формулам (III.18) будет равна 0,0013 м, а относительная погрешность 10^{-18} .

При пониженных требованиях к точности определения длин сторон размеры треугольника соответственно могут быть увеличены. Так, например, если относительную погрешность определения сторон принять равной 10^{-7} , то предельные длины сторон треугольника будут равны $s_a = 110$ км, $s_b = s_c = 220$ км, а абсо-

лютная погрешность определения сторон по формулам (III.18) составит 0,022 м.

В формулах (III.18) поправочные члены являются функциями длин сторон. Но их можно выразить также через сферический избыток. Для этого правые части равенств (III.14)

$$\left(\frac{s_a}{R}\right)^2 = 2\varepsilon (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C),$$

$$\left(\frac{s_b}{R}\right)^2 = 2\varepsilon (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C),$$

$$\left(\frac{s_c}{R}\right)^2 = 2\varepsilon (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)$$

следует подставить в уравнения (III.18). Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \right], \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.21})$$

Конечно, эти формулы имеют ту же точность, что и формулы (III.18), т. е. они ошибочны на величины пятого порядка относительно длин сторон треугольника. Сферический избыток в формулах (III.21) можно вычислять по любой из формул (III.10), (III.11) и (III.12).

§ 23. РЕШЕНИЕ МАЛОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА КАК ПЛОСКОГО С СОХРАНЕНИЕМ ДЛИН СТОРОН

Малый сферический треугольник можно решать как плоский, если каждый его угол уменьшить на одну треть сферического избытка:

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)}, \\ s_c &= s_a \frac{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.22})$$

Этот метод решения малых сферических треугольников был предложен Лежандром в 1787 г. Приведенная выше формулировка носит название теоремы Лежандра. Приведем ее доказательство.

В правой части первого равенства (III.22) синусы разложим в ряды по степеням малой величины ε :

$$s_b = s_a \frac{\sin B - \frac{\varepsilon}{3} \cos B - \dots}{\sin A - \frac{\varepsilon}{3} \cos A - \dots} = s_a \frac{\sin B \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{ctg} B - \dots \right)}{\sin A \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{ctg} A - \dots \right)},$$

откуда с той же точностью, т. е. с ошибкой на величины порядка ε^2 , найдем

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \right].$$

Это равенство полностью совпадает с первым уравнением (III.21).

Таким образом, теорема Лежандра доказана. Однако следует иметь в виду, что она применима только для малых сферических треугольников. Поэтому необходимо установить границы ее применения, т. е. выяснить, каковы предельные размеры сферических треугольников, которые можно решать по способу Лежандра при заданной точности определения длин сторон.

Для этого следует сравнить формулы (III.22) способом Лежандра со строгими формулами (III.16) или же с формулами (III.19), в которых сохранены члены пятого порядка относительно длин сторон. Для того чтобы было удобно сравнивать эти формулы между собой, представим их в виде рядов по степеням одной из той же малой величины ε , которая, как было показано в § 21, является малой второго порядка относительно длин сторон.

Обратимся к формулам (III.19). Квадраты сторон в них выразим через сферический избыток.

Замену сторон в круглых скобках выполним в соответствии с равенствами (III.14). Для замены сторон в выражении перед круглыми скобками эти формулы не обеспечивают нужной точности. Более точные выражения найдем по первой формуле (III.19), из которой с точностью до членов четвертого порядка напишем

$$b^2 = ab \frac{\sin B}{\sin A} \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{6} \right),$$

$$a^2 = ab \frac{\sin A}{\sin B} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{6} \right).$$

Из первой формулы (III.19) находим

$$ab = \frac{2\varepsilon}{\sin C} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - 3c^2}{24} \right).$$

Подставив это выражение в предыдущие равенства, с принятой точностью получим

$$b^2 = 2\varepsilon \frac{\sin B}{\sin A \sin C} \left(1 + \frac{-3a^2 + 5b^2 - 3c^2}{24} \right), \quad (\text{а})$$

$$a^2 = 2\varepsilon \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \left(1 + \frac{5a^2 - 3b^2 - 3c^2}{24} \right). \quad (\text{б})$$

Теперь в этих равенствах преобразуем синусы сферических углов. Так как $A + C = 180^\circ - (B - \varepsilon)$ и $B + C = 180^\circ - (A - \varepsilon)$, то $\sin(A + C) = \sin(B - \varepsilon)$, $\sin(B + C) = \sin(A - \varepsilon)$.

Разложим в ряды правые части этих равенств $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin B (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} B + \dots)$, $\sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin A (1 - \varepsilon \operatorname{ctg} A + \dots)$.

Разделив первое равенство на произведение $\sin A \sin C$ и второе — на $\sin B \sin C$, с принятой точностью получим

$$\frac{\sin B}{\sin A \sin C} = (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} B),$$

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} A).$$

Внесем эти выражения в равенства (а) и (б). Кроме того, в этих равенствах квадраты сторон в скобках заменим их приближенными выражениями (III.14), а именно

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 2\varepsilon (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C), \\ b^2 &= 2\varepsilon (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C), \\ c^2 &= 2\varepsilon (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B). \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

После указанных подстановок в равенства (а) и (б) образуем их разность

$$b^2 - a^2 = 2\varepsilon (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \left[1 + \frac{\varepsilon}{6} (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C) \right]. \quad (\text{г})$$

Наконец, пользуясь выражениями (в), найдем

$$7b^2 - 3a^2 = 2\varepsilon (7 \operatorname{ctg} A - 3 \operatorname{ctg} B + 4 \operatorname{ctg} C). \quad (\text{д})$$

Нам осталось подставить выражения (г) и (д) в первое равенство (III.19) и выполнить элементарные преобразования в его правой части. После умножения обеих частей этого равенства на радиус сферы получим окончательно

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \left[1 + \frac{\varepsilon}{30} (12 \operatorname{ctg} A + 2 \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C) \right] \right\}. \quad (\text{III.23})$$

Точно таким же способом можно найти аналогичную формулу для вычисления третьей стороны. Приведем эту формулу в окончательном виде:

$$s_c = s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C) \left[1 + \frac{\varepsilon}{30} (12 \operatorname{ctg} A + 2 \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} B) \right] \right\}. \quad (\text{III.24})$$

Теперь обратимся к формулам Лежандра (III.22), из которых в первой разложим в ряд синусы углов до членов порядка ε^2 :

$$s_b = s_a \frac{\sin B - \frac{\varepsilon}{3} \cos B - \frac{\varepsilon^2}{18} \sin B + \dots}{\sin A - \frac{\varepsilon}{3} \cos A - \frac{\varepsilon^2}{18} \sin A + \dots}.$$

Вынесем первые члены в числителе и знаменателе за скобки и разделим ряды друг на друга. После элементарных преобразований с принятой точностью получим

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{ctg} A \right) \right]. \quad (\text{III.25})$$

Точно так же из второй формулы (II.22) найдем

$$s_c = s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C) \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{ctg} A \right) \right]. \quad (\text{III.26})$$

Сравнивая эти выражения, полученные из формул Лежандра, с формулами (III.23) и (III.24), замечаем, что их правые части различаются на члены порядка $s\varepsilon^2$, т. е. на члены пятого порядка относительно длин сторон треугольника. Следовательно, теорема Лежандра справедлива только до членов третьего порядка включительно. Поэтому при ее применении для решения малых сферических треугольников сферический избыток можно вычислять с достаточной точностью по любой из формул (III.10) — (III.12). Именно так и поступают при решении треугольников в триангуляции 1 класса.

На вопрос о том, каковы предельные размеры сферических треугольников, которые можно решать по способу Лежандра, нельзя дать однозначного ответа, так как точность решения зависит не только от размеров сторон, но и от формы треугольника. Это подтверждается данными, приведенными в табл. 3, из которой видно, что при одних и тех же требованиях к точности вычисления сферического избытка допустимые размеры сторон треугольника находятся в пределах от 75 до 155 км.

По этой же таблице можно установить, что для первых трех треугольников углы A и B равны, поэтому сторона s_b по спосо-

бу Лежандра или по формуле (III.23) практически вычисляется безошибочно, даже если стороны значительно больше указанных в таблице. Что касается стороны s_c , то при ее вычислении по способу Лежандра, т. е. без учета члена порядка ϵ^2 в формуле (III.26), ошибка вычисленного значения стороны будет меньше 0,001 м, если $s_c < 155$ км.

В практике выполнения геодезических работ может иногда возникнуть необходимость решения сферических треугольников с длинами сторон в несколько сот километров, когда способ Лежандра не может обеспечить необходимую точность.

Используя полученные выше формулы, нетрудно найти более точные поправки в углы сферического треугольника, чем используемые в способе Лежандра. Введя эти поправки, сферический треугольник затем можно будет решать как плоский по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin \left(B - \frac{\epsilon}{3} - \beta \right)}{\sin \left(A - \frac{\epsilon}{3} - \alpha \right)}, \\ s_c &= s_a \frac{\sin \left(C - \frac{\epsilon}{3} - \gamma \right)}{\sin \left(A - \frac{\epsilon}{3} - \alpha \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Ясно, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (\text{a})$$

а сами поправки имеют порядок ϵ^2 . Их можно назвать поправочными членами к способу Лежандра.

Синусы в правых частях равенств (III.27) разложим в ряды до членов ϵ^2 включительно. Очевидно, мы получим ряды, аналогичные (III.25) и (II.26), но с дополнительными членами, а именно:

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{\epsilon}{3} (\text{ctg } A - \text{ctg } B) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \text{ctg } A \right) - \beta \text{ctg } B + \alpha \text{ctg } A \right],$$

$$s_c = s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[1 + \frac{\epsilon}{3} (\text{ctg } A - \text{ctg } C) \left(1 + \frac{\epsilon}{3} \text{ctg } A \right) - \gamma \text{ctg } C + \alpha \text{ctg } A \right].$$

Конечно, эти равенства по точности соответствуют выражениям (III.23) и (III.24). Сравним их, найдем

$$\alpha \operatorname{ctg} A - \beta \operatorname{ctg} B = -\frac{\varepsilon^2}{90} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) (2 \operatorname{ctg} A + 2 \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C), \quad (6)$$

$$\alpha \operatorname{ctg} A - \gamma \operatorname{ctg} C = -\frac{\varepsilon^2}{90} (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C) (2 \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B + 2 \operatorname{ctg} C). \quad (в)$$

Решив совместно уравнения (а), (б) и (в) относительно α , β и γ , получим

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{90} (2 \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C),$$

$$\beta = \frac{\varepsilon^2}{90} (2 \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C),$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2}{90} (2 \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B).$$

Таким образом, поправки в сферические углы будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta A'' &= \frac{\varepsilon''}{3} + \frac{\varepsilon''^2}{90\rho''} (2 \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C), \\ \Delta B'' &= \frac{\varepsilon''}{3} + \frac{\varepsilon''^2}{90\rho''} (2 \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A), \\ \Delta C'' &= \frac{\varepsilon''}{3} + \frac{\varepsilon''^2}{90\rho''} (2 \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B). \end{aligned} \right\} \quad (III.28)$$

В этих равенствах сферический избыток следует вычислять по формулам (III.15).

Решение сферического треугольника будет выполняться по формулам

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin(B - \Delta B'')}{\sin(A - \Delta A'')}, \\ s_c &= s_a \frac{\sin(C - \Delta C'')}{\sin(A - \Delta A'')}. \end{aligned} \right\} \quad (III.29)$$

Следует иметь в виду, что для вычисления сферического избытка по формулам (III.13) необходимо знать две стороны треугольника. Если же задана только одна сторона, то длину второй стороны следует вычислить предварительно по способу Лежандра. Но можно и не вычислять второй стороны, если вос-

пользоваться вместо формул (III.28) следующими:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A'' &= \Delta'' - \frac{\Delta''^2}{10\rho''} (13 \operatorname{ctg} A + 6 \operatorname{ctg} B + 6 \operatorname{ctg} C), \\ \Delta B'' &= \Delta'' - \frac{\Delta''^2}{10\rho''} (16 \operatorname{ctg} A + 3 \operatorname{ctg} B + 6 \operatorname{ctg} C), \\ \Delta C'' &= \Delta'' - \frac{\Delta''^2}{10\rho''} (16 \operatorname{ctg} A + 6 \operatorname{ctg} B + 3 \operatorname{ctg} C), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.30})$$

где

$$\Delta'' = \left(\frac{\rho''}{6R^2} \right) \frac{s_a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}. \quad (\text{III.31})$$

Эти формулы вместе с равенствами (III.29) наиболее удобны для решения сферических треугольников со сторонами $0,01 < \frac{s}{R} < 0,1$.

Для вывода формул (III.30) все необходимые соотношения были получены выше.

Сделаем еще одно важное замечание, касающееся решения сфероидических треугольников.

В § 17 было установлено, что сфероидические треугольники можно решать как сферические, если их вершины не выходят за пределы сфероидического пояса шириной 265 км, по широте средней параллели которого вычислен радиус шара. Если же стороны сфероидического треугольника выходят за границы этого пояса, то при решении этого треугольника необходимо учесть сфероидические поправки, определяемые для каждой вершины треугольника следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \delta A'' &= \frac{\Delta''}{4} \left(\frac{f_A}{f} - 1 \right), \\ \delta B'' &= \frac{\Delta''}{4} \left(\frac{f_B}{f} - 1 \right), \\ \delta C'' &= \frac{\Delta''}{4} \left(\frac{f_C}{f} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.32})$$

где Δ'' определяется равенством (III.31), а величина f вычисляется так:

$$f = \frac{1}{3} (f_A + f_B + f_C).$$

Для вычисления f_A , f_B и f_C применяется известное нам выражение

$$f_i = \frac{\rho''}{2R_i^2}, \quad i = A, B, C,$$

в котором средний радиус кривизны $R = \sqrt{MN}$ вычисляется по широте соответствующей вершины сфероидического треугольника.

Чтобы не вычислять трижды величину f_i , формулы (III.32) путем несложных преобразований можно привести к более простым выражениям

$$\left. \begin{aligned} \delta A'' &= k\Delta'' \sin 2B_m [(B_B - B_A) + (B_C - B_A)], \\ \delta B'' &= k\Delta'' \sin 2B_m [(B_A - B_B) + (B_C - B_B)], \\ \delta C'' &= k\Delta'' \sin 2B_m [(B_A - B_C) + (B_B - B_C)], \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

где B_A, B_B, B_C — широты соответствующих вершин треугольника, выраженные в градусах;

B_m — широта центральной точки треугольника;

$$k = \frac{e^2}{6\rho^0} = 1,94 \cdot 10^{-5}.$$

Поправки, вычисленные по формулам (III.32) и (III.33), прибавляются к правым частям равенств (III.28) или (III.30), после чего сфероидический треугольник решается как плоский по формулам (III.29).

Итак, для решения малых сферических треугольников мы располагаем несколькими формулами различного вида.

Для практического применения при обработке триангуляции 1 класса наиболее удобны формулы Лежандра (III.22). Предварительное вычисление сферического избытка по измеренным углам позволяет выявить величину угловой невязки ω в треугольнике по формуле

$$\omega = A' + B' + C' - (180^\circ + \epsilon). \quad (\text{III.34})$$

Сферический избыток лучше всего вычислять по формулам (III.11), так как в них участвует только одна сторона треугольника и не возникает необходимости в предварительном определении приближенных значений двух других сторон.

Таблица 5

B	f	B	f
30°	25,44 · 10 ⁻⁴	60	25,27 · 10 ⁻⁴
40	25,38 · 10 ⁻⁴	70	25,22 · 10 ⁻⁴
50	25,32 · 10 ⁻⁴	80	25,19 · 10 ⁻⁴

Величину f можно выбрать из табл. 5 по широте B для целого ряда треугольников, если они не выходят за пределы сфероидического пояса шириной 265 км, в середине которого проходит параллель $B = \text{const}$.

Что касается формул (III.16), то их использование для высокоточного решения малых сферических треугольников нецелесо-

**Пример решения сферического треугольника в триангуляции 1 класса
по способу Лежандра**

Формулы:

$$\varepsilon'' = f(s_a)_{\text{км}}^2 \frac{\sin B' \sin C'}{\sin A'};$$

$$\omega = A' + B' + C' - (180^\circ - \varepsilon'');$$

$$s_b = \frac{s_a \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{3} \right)};$$

$$s_c = \frac{s_a \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{3} \right)}.$$

Вычисление сферического избытка
 $B_m = 54^\circ 30'$

$(s_a)_{\text{км}}^2$	1835
$\sin A'$	0,9917
$\sin B'$	0,8664
$\sin C'$	0,6065
f	$25,30 \cdot 10^{-4}$
ε''	2,460

№ вершин	Измеренные углы	$\frac{\omega}{3}$	Сферические углы	$\frac{\varepsilon}{3}$	Плоские углы	Длины сторон	
A	82°37'42,67"	0,27"	82°37'42,40"	0,82"	82°37'41,58"	s_a	42 837,26
B	60 02 17,42	0,27	60 02 17,15	0,82	60 02 16,33	s_b	37 421,61
C	37 20 03,18	0,27	37 20 02,91	0,82	37 20 02,09	s_c	26 195,57
Σ	180 00 03,27	0,81	180 00 02,46	2,46	180 00 00,00		
ε	2,46						
ω	0,81						

образно не только потому, что приходится выполнять взаимный переход от линейных сторон к сферическим дугам, но еще и потому, что при вычислении по этим формулам приходится пользоваться десятизначными тригонометрическими функциями, тогда как при решении треугольников по способу Лежандра (табл. 6) или по способу аддитаментов вполне достаточно ограничиться восьмизначными или семизначными тригонометрическими функциями.

При пониженных требованиях к точности решения, конечно, число знаков тригонометрических функций соответственно уменьшается в том и в другом случаях.

В некоторых методах построения современной триангуляции в треугольниках измеряются только стороны (метод так называемой трилатерации). При этом возникает необходимость вычисления горизонтальных углов в треугольниках. Эти углы в геодезической сети нужны для передачи геодезических азимутов от одной стороны к другой.

Определение горизонтальных углов в сферических треугольниках выполняется в следующей последовательности.

Измеренные между пунктами прямолинейные расстояния D редуцируют на поверхность эллипсоида, применяя формулы (III.5).

По найденным сторонам s сферического треугольника вычисляют плоские углы A' , B' , C' , используя следующие формулы плоской тригонометрии:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (s_a + s_b + s_c), \\ \operatorname{tg} \frac{A'}{2} &= \sqrt{\frac{(p - s_b)(p - s_c)}{p(p - s_a)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.35})$$

Остальные углы B' и C' вычисляются по этим же формулам с круговой заменой переменных:

A'	s_a	s_b	s_c
B'	s_b	s_c	s_a
C'	s_c	s_a	s_b

Далее вычисляется сферический избыток.

Если длины сторон не превышают 100 км, то достаточно применить одну из формул (III.10) — (III.12), а затем одну треть сферического избытка прибавить к каждому плоскому углу A' , B' и C' .

Если же стороны больше 100 км, то поправки к плоским углам вычисляют по формулам (III.30), причем в равенстве (III.31) функции $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} C$ следует вычислить не по плоским углам, а по предварительно исправленным на одну треть сферического избытка с точностью до $0,1''$.

При необходимости, в зависимости от величины треугольника и от требуемой точности, вычисляют сфероидические поправки по формулам (III.33).

Пример решения сфероидического треугольника по формулам (III.29) — (III.31) и (III.33)

Заданные величины: $s_a = 500\,000,00$ м; $B_m = 45^\circ$;

$$A = 60^\circ 02' 02,061''; \quad B_A = 42^\circ 45';$$

$$B = 90^\circ 02' 02,048''; \quad B_B = 42^\circ 45';$$

$$C = 30^\circ 02' 02,054''; \quad B_C = 47^\circ 15'.$$

Вычисление сфероидических поправок:

$$R_m = 6\,378\,209,0 \text{ м}; \quad \Delta'' = 122,179'';$$

$$B_A - B_B = 0; \quad B_A - B_C = -4,5''; \quad B_B - B_C = -4,5'';$$

$$\delta A = 0,011''; \quad \delta B = 0,011''; \quad \delta C = -0,021''.$$

Сферические углы:

$$A = 60^\circ 02' 02,050''; \quad \text{ctg } A = 0,576\,561;$$

$$B = 90^\circ 02' 02,037''; \quad \text{ctg } B = -0,000\,592;$$

$$C = 30^\circ 02' 02,075''; \quad \text{ctg } C = 1,729\,685.$$

Поправки в углы сфероидического треугольника:

$$\Delta A = \Delta'' - 0,129'' + 0,011'' = 2' 02,061'';$$

$$\Delta B = \Delta'' - 0,142'' + 0,011'' = 2' 02,048'';$$

$$\Delta C = \Delta'' - 0,104'' - 0,021'' = 2' 02,054''.$$

Плоские углы: Стороны:

$$A = 60^\circ 00' 00,000''; \quad s_a = 500\,000,00 \text{ м};$$

$$B = 90^\circ 00' 00,000''; \quad s_b = 577\,350,27 \text{ м};$$

$$C = 30^\circ 00' 00,000''; \quad s_c = 288\,675,14 \text{ м}.$$

§. 24. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА, ВЕРШИНЫ КОТОРОГО РАСПОЛОЖЕНЫ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЛИпсоИДА

Пусть точки Q_1 , Q_2 и Q_3 (рис. 21) являются геодезическими пунктами, расположенными на различных высотах над поверхностью земного эллипсоида. Между пунктами измерены горизонтальные углы A_1 , A_2 , A_3 и зенитные расстояния Z_{12} , Z_{21} , Z_{13} , Z_{31} , Z_{23} , Z_{32} , а также измерено одно из прямолинейных расстояний D_{12} . Решение треугольника $Q_1Q_2Q_3$ состоит в определении двух других его сторон D_{13} и D_{23} .

Прежде всего найдем внутренние углы плоского треугольника. При этом следует иметь в виду, что, хотя измеренные горизонтальные углы и зенитные расстояния непосредственно связаны с направлениями отвесных линий на каждом пункте, но для получения углов плоского треугольника не возникает необходимости в переходе к нормальям к поверхности эллипсоида. Это следует из того, что изменение направления отвеса в вершинах тре-

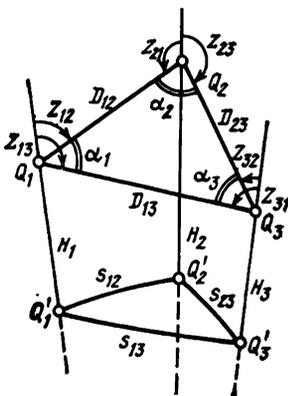


Рис. 21

угольника никак не отражается на его положении, конечно, при условии сохранения высот вершин треугольника.

Рассмотрим переход от измеренного угла к углу плоского треугольника для пункта Q_1 (рис. 22).

Из точки Q_1 , как из центра, опишем сферу единичного радиуса. Направление отвеса и направления на точки Q_2 и Q_3 определяют на этой сфере вершины сферического треугольника

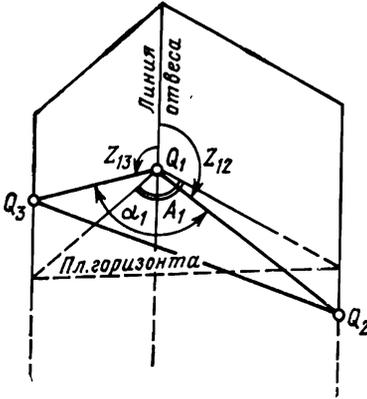


Рис. 22

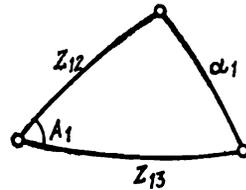


Рис. 23

(рис. 23). Сторонами его будут измеренные зенитные расстояния Z_{12} и Z_{13} и искомый угол плоского треугольника α_1 . Угол сферического треугольника, расположенный против стороны α_1 , представляет собой измеренный горизонтальный угол A_1 .

Все четыре элемента полученного сферического треугольника можно связать одной из формул сферической тригонометрии, а именно:

$$\cos \alpha_1 = \cos Z_{12} \cos Z_{13} + \sin Z_{12} \sin Z_{13} \cos A_1. \quad (\text{III. 36})$$

Напишем аналогичные соотношения для двух других вершин плоского треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \cos Z_{21} \cos Z_{23} + \sin Z_{21} \sin Z_{23} \cos A_2, \\ \cos \alpha_3 &= \cos Z_{31} \cos Z_{32} + \sin Z_{31} \sin Z_{32} \cos A_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 37})$$

Зная теперь углы плоского треугольника, можем легко найти две другие стороны этого треугольника по формулам

$$\left. \begin{aligned} D_{13} &= D_{12} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3}, \\ D_{23} &= D_{12} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 38})$$

Очевидно, что по полученным здесь формулам можно решать треугольники любых размеров, если только между пунктами есть прямая видимость или во всяком случае имеется возможность измерить горизонтальные и вертикальные углы и одну из сторон.

Учитывая то, что при условии прямой видимости между пунктами на земной поверхности зенитные расстояния будут близки к 90° , измерять их можно со значительно меньшей точностью, чем горизонтальные углы. В самом деле, дифференцируя равенство (III.36) по всем переменным и полагая, что $\alpha_1 \approx A_1$, найдем

$$d\alpha_1 = \sin(Z_{12} + Z_{13}) \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} dZ + \sin Z_{12} \sin Z_{13} dA_1. \quad (\text{III.39})$$

Даже в таких редких случаях в триангуляции 1 класса, когда $Z_{12} = Z_{13} = 90^\circ 30'$ и $A' = 120^\circ$, численная величина коэффициента при dZ в равенстве (III.39) будет в 30 раз меньше величины коэффициента при dA_1 .

Поэтому если горизонтальные углы измеряются с погрешностью $0,5\text{--}0,7''$, то зенитные расстояния, используемые для вычисления длин сторон, достаточно измерять с погрешностью $15\text{--}20''$.

Если в треугольнике измерены все три стороны и зенитные расстояния и необходимо найти горизонтальные углы, то решение выполняется по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (D_{12} + D_{13} + D_{23}), \\ \cos \alpha_1 &= \frac{2p(p - D_{23})}{D_{12}D_{13}} - 1, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{2p(p - D_{13})}{D_{12}D_{23}} - 1, \\ \cos \alpha_3 &= \frac{2p(p - D_{12})}{D_{13}D_{23}} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.40})$$

$$\left. \begin{aligned} \cos A_1 &= \frac{\cos \alpha_1 - \cos Z_{12} \cos Z_{13}}{\sin Z_{12} \sin Z_{13}}, \\ \cos A_2 &= \frac{\cos \alpha_2 - \cos Z_{21} \cos Z_{23}}{\sin Z_{21} \sin Z_{23}}, \\ \cos A_3 &= \frac{\cos \alpha_3 - \cos Z_{31} \cos Z_{32}}{\sin Z_{31} \sin Z_{32}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.41})$$

Теперь рассмотрим частный случай расположения плоского треугольника, когда высоты пунктов равны нулю, следовательно, стороны плоского треугольника являются хордами сторон сферического треугольников $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ (см. рис. 21). Такой плоский треугольник называется хордовым треугольником.

Мы будем рассматривать только такие хордовые треуголь-

ники, размеры которых соответствуют размерам сферического треугольника без учета поправок за эксцентриситет эллипсоида (см. § 17).

Элементарные геометрические соображения позволяют установить, что каждое зенитное расстояние связано с соответствующей длиной хорды d точным равенством

$$\cos Z = -\frac{d}{2R}. \quad (\text{III.42})$$

Очевидно также, что для каждой хорды $Z_{ik} = Z_{ki}$.

Решение хордового треугольника можно выполнять по формулам (III.36) — (III.38) методом последовательных приближений. В первом приближении вычисление зенитных расстояний для заданной хорды выполняется по формуле (III.42), а для двух других сторон зенитные расстояния принимаются равными нулю.

Как видно, этот способ решения хордового треугольника довольно трудоемок. Поэтому ниже будут рассмотрены более простые способы.

Связь между дугой окружности s и ее хордой d устанавливается известным из элементарной геометрии равенством

$$d = 2R \sin \frac{s}{2R}, \quad (\text{III.43})$$

откуда с погрешностью на малые члены пятого порядка находим

$$d = s - \frac{s^3}{24R^2} + \dots, \quad (\text{III.44})$$

$$s = d + \frac{d^3}{24R^2} + \dots \quad (\text{III.45})$$

Пользуясь этими равенствами, можно осуществлять взаимный переход от хорды к стороне сферического треугольника. Решение же сферического треугольника выполняется одним из описанных выше способов, например по способу Лежандра.

Еще более простое решение хордового треугольника предложено Грюнертом (1855 г.). Рассмотрим его.

В § 22 для решения малого сферического треугольника по способу Лежандра формула

$$s_b = s_a \frac{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{3} \right)}$$

была приведена к виду (III.23)

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\text{ctg } A - \text{ctg } B) \right]. \quad (\text{a})$$

Для решения соответствующего хордового треугольника по аналогии со способом Лежандра напишем

$$d_b = d_a \frac{\sin(B - \delta)}{\sin(A - \delta)},$$

где δ — поправка, вводимая в каждый сферический угол.

По аналогии же с равенством (а) можем найти

$$d_b = d_a \frac{\sin B}{\sin A} [1 + \delta(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)].$$

Хорды заменим их значениями по равенству (III.44). Тогда

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} [1 + \delta(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)] \left(1 - \frac{s_a^2}{24R^2} + \frac{s_b^2}{24R^2} \right).$$

Если же учтем, что по (III.16)

$$\frac{s_b^2}{R^2} - \frac{s_a^2}{R^2} = 2\varepsilon(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B),$$

то с принятой точностью получим

$$s_b = s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[1 + \left(\delta + \frac{\varepsilon}{12} \right) (\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B) \right]. \quad (б)$$

Сравнивая правые части равенств (а) и (б), находим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, для решения хордового треугольника можем написать следующие соотношения:

$$d_a : d_b : d_c = \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4} \right) : \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4} \right) : \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4} \right). \quad (III.46)$$

Эти уравнения выражают теорему Грюнерта.

Для вычисления сферического избытка используются формулы (III.10) — (III.12), причем с принятой в них точностью, т. е. с погрешностью на малые члены четвертого порядка, сферические стороны и углы можно заменить хордами и плоскими углами соответствующего хордового треугольника.

Относительно использования хордового треугольника в геодезических работах известный немецкий геодезист Гельмерт (1843—1917) высказал следующее суждение: «Можно ли в действительности считать вычисление триангуляции с использованием хорд и горизонтальных углов предпочтительным, зависит от того, какой вид принимают соответствующие формулы для эллипсоида вращения и как представляется дальнейшее использование результатов некоторой триангуляции в форме хорд и горизонтальных углов».

В связи с этим заметим, что хорды измерить непосредственно невозможно. К ним следует переходить от измеренных прямо-

линейных отрезков D по формуле (III.6) в том случае, если в последующей математической обработке триангуляции будут использоваться хордовые треугольники и горизонтальные углы.

В настоящее время в связи с повышением интереса к методам обработки пространственных геодезических сетей без редуцирования результатов геодезических измерений на поверхность эллипсоида более целесообразным является использование пространственных треугольников, для решения которых были получены выше формулы (III.46) — (III.51).

В табл. 7 приведен пример решения плоского треугольника в пространстве в двух вариантах.

Таблица 7

Вершины	Горизонтальные углы		Зенитные расстояния				Косинусы углов α	Длины сторон, км	
	A_1	A_2	Z_{12}	Z_{13}	Z_{21}	Z_{23}		D_{23}	D_{12}
Q_1	A_1	$82^\circ 49' 10,957''$	Z_{12}	$90^\circ 02' 11,16''$	Z_{13}	$89^\circ 59' 43,49''$	0,124 991 86	D_{23}	60 005,027
Q_2	A_2	$55 46 17,719$	Z_{24}	$90 10 26,43$	Z_{21}	$90 19 22,40$	0,562 499 02	D_{13}	50 004,178
Q_3	A_3	$41 24 36,349$	Z_{31}	$90 27 13,46$	Z_{32}	$90 21 53,91$	0,750 006 23	D_{12}	40 002,883

В первом варианте исходными данными являются горизонтальные углы, зенитные расстояния и одна из сторон. Необходимо найти две другие стороны. Применяются формулы (III.36)—(III.38).

Во втором варианте исходными величинами служат длины сторон и зенитные расстояния. Необходимо найти горизонтальные углы. Применяются формулы (III.40) и (III.41).

Рассмотрим последовательность действий при редуцировании измеренных величин на поверхность эллипсоида для последующего решения хордового треугольника.

Примем в качестве измеренных величин горизонтальные углы, зенитные расстояния и длину стороны D_{23} , приведенные в табл. 7.

Кроме того, приведем еще следующие величины, необходимые для редуцирования:

- средняя широта треугольника $B_m = 45^\circ$;
- азимуты сторон $A_{12}^0 = 11^\circ$, $A_{13}^0 = 94^\circ$, $A_{23}^0 = 135^\circ$;
- высоты вершин $H_1 = 400$ м, $H_2 = 500$ м, $H_3 = 600$ м.

1. Вычисление длины хорды исходной стороны по формуле (III.6)

$$(R_A)_{23} = 6\,388\,935,9 \text{ м,}$$

$$d_{23} = 60\,005,027 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{100}{60\,005,027}\right)^2}{\left(1 + \frac{500}{R_A}\right) \left(1 + \frac{600}{R_A}\right)}} = 59\,999,779 \text{ м.}$$

2. Вычисление поправок за высоту наблюдаемого пункта по формуле (III.2) и поправок за переход к геодезической линии по формуле (III.3) (табл. 8).

Таблица 8

Направление	Азимут	Высота в км	dA_H	s , км	dA_g	$dA_H + dA_g$
$Q_1 - Q_2$	11°	0,5	+0,001"	40	0,000"	+0,001"
$Q_1 - Q_3$	94	0,6	0,000	50	0,000	0,000
$Q_2 - Q_3$	135	0,6	-0,033	60	-0,005	-0,038
$Q_2 - Q_1$	191	0,4	+0,001	40	0,000	+0,001
$Q_3 - Q_1$	274	0,4	0,000	50	0,000	0,000
$Q_3 - Q_2$	315	0,5	-0,027	60	-0,005	-0,032

3. Определение углов сферического треугольника и решение хордового треугольника (табл. 9).

Таблица 9

Вер- шины	Поправки в горизонталь- ные углы	Сферические углы	$\frac{\epsilon}{4}$	Приведенные углы	Длины хорд, м	
Q_1	-0,001"	82°49'10,956"	1,258"	82°49'09,698"	d_{23}	59 999,779
Q_2	+0,039	55 46 17,758	1,258	55 46 16,500	d_{13}	49 999,872
Q_3	-0,032	41 24 36,317	1,258	41 24 35,059	d_{12}	39 999,935
Σ	+0,006	180 00 05,031	3,774	180 00 01,257		
ϵ		5,031				

4. Контрольные вычисления хорд по формуле (III.6)

$$(R_A)_{13} = 6\,399\,594,0 \text{ м}; \quad d_{13} = 49\,999,872 \text{ м};$$

$$(R_A)_{12} = 6\,378\,981,1 \text{ м}; \quad d_{12} = 39\,999,936 \text{ м}.$$

Следует иметь в виду, что применение теоремы Грюнерта к хордовому треугольнику, в сущности, не является его решением, а только лишь средством для вычисления сторон, так как приведенные углы не относятся ни к сферическому, ни к плоскому треугольнику. Для получения внутренних углов хордового треугольника необходимо в сферические углы ввести неравные поправки $dA_1 = 2,229''$, $dA_2 = 1,438''$, $dA_3 = 1,364''$, после чего хордовый треугольник можно было бы решать как плоский. Между поправками dA_1 , dA_2 , dA_3 трудно установить какую-либо закономерность. Поэтому теорема Грюнерта является весьма простым и остроумным выходом из этого затруднения.

Глава IV

РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА

§ 25. ВИДЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ТОЧНОСТЬ ИХ РЕШЕНИЯ

Сущность решения почти всех видов геодезических задач на поверхности эллипсоида состоит в определении геодезических координат некоторой точки по заданным координатам других точек и по измеренным или заданным угловым и линейным величинам.

Пусть между двумя точками Q_1 и Q_2 (рис. 24) на поверхности эллипсоида проведена геодезическая линия. Условимся точку Q_1 рассматривать как начальную точку геодезической линии, тогда Q_2 будет ее конечной точкой. Условимся также, что геодезическая линия от точки Q_1 к точке Q_2 имеет прямое направление, а от точки Q_2 к точке Q_1 — обратное направление.

В любой точке геодезической линии ее азимут называется прямым, если он указывает прямое направление геодезической линии, и обратным, если он указывает обратное направление этой линии. Очевидно, прямой и обратный азимуты в одной и той же точке отличаются друг от друга ровно на 180° .

Прямой азимут в начальной точке Q_1 называют также начальным азимутом геодезической линии.

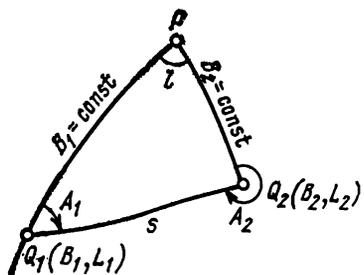


Рис. 24

Прямая геодезическая задача

Даны геодезические координаты B_1 и L_1 некоторой точки Q_1 (см. рис. 24), а также длина геодезической линии s и ее начальный азимут A_1 . По этим данным требуется найти координаты B_2 и L_2 , а также обратный азимут A_2 в точке Q_2 .

Обратная геодезическая задача

Даны геодезические координаты B_1, L_1 и B_2, L_2 двух точек Q_1 и Q_2 . Требуется найти кратчайшее расстояние s (длину геодезической линии) между заданными точками, а также прямой A_1 и обратный A_2 азимуты этой линии в точках Q_1 и Q_2 .

Как видно, в этой задаче геодезические координаты не определяются, а задаются, поэтому ее решение используют для контроля решения прямой геодезической задачи.

Вместе с тем она имеет и большое самостоятельное значение. Она широко применяется при решении многих технических задач, в которых требуется определить расстояние и направление между любыми двумя точками на земной поверхности.

Прямую и обратную геодезические задачи называют главными геодезическими задачами.

Прямая геодезическая задача применяется при вычислении геодезических координат пунктов триангуляции I класса. В результате решения треугольников в сети I класса в каждом треугольнике будут известны все углы и все длины сторон. Для одного из пунктов, принятого за начальный, должны быть известны геодезические координаты B_0 и L_0 и азимут A_0 с начального пункта на один из соседних пунктов.

Зная координаты начального пункта, а также расстояния и азимуты на соседние пункты, вычисляют геодезические координаты и обратные азимуты всех других пунктов, непосредственно связанных с начальным пунктом. Принимая затем каждый из этих пунктов за начальный, вычисляют геодезические координаты и обратные азимуты соседних с ним пунктов и т. д.

При развитии государственной сети геодезических пунктов прямая и обратная геодезические задачи применяются для малых расстояний (20—60 км, в редких случаях 200—300 км). В специальных целях такие задачи приходится решать на любые расстояния вплоть до 20 000 км.

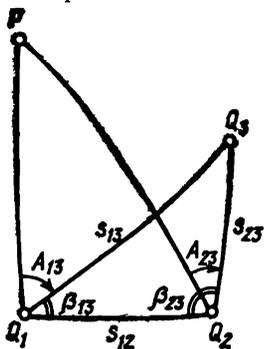


Рис. 25

Угловая засечка

Даны геодезические координаты двух точек Q_1 и Q_2 (рис. 25), а также направления с этих точек на третью точку Q_3 . В качестве направлений могут служить азимуты линий A_{13} и A_{23} или горизонтальные углы β_{13} и β_{23} в заданных пунктах. Линиями, для которых заданы направления, могут быть геодезические линии, нормальные сечения, центральные сечения и т. п. Необходимо найти геодезические координаты точки Q_3 .

Линейная засечка

Даны геодезические координаты двух точек Q_1 и Q_2 (см. рис. 25), а также длины линий s_{13} и s_{23} , соединяющих точки Q_1 и Q_2 с третьей точкой Q_3 . В качестве таких линий могут служить геодезические линии, нормальные сечения, центральные сечения и т. п. Необходимо найти геодезические координаты точки Q_3 .

Гиперболическая засечка

Даны геодезические координаты трех или четырех точек, а также разности расстояний от каждой пары из числа заданных точек до определяемой точки. Каждой разности расстояний соответствует некоторая гиперболическая кривая на поверхности эллипсоида. В пересечении двух гиперболических кривых находится определяемая точка. Необходимо найти геодезические координаты определяемой точки.

Точность решения геодезических задач

Математические методы решения геодезических задач обеспечивают выполнение вычислений с любой практически необходимой точностью. Однако чем выше требуемая точность, тем сложнее вычисления. Поэтому при любых вычислениях следует заранее установить практически необходимую точность, чтобы вычисления были экономны, не требовали лишних затрат вычислительного труда.

Выполняя любые сложные технические расчеты, необходимо учитывать, что на точность результата вычислений оказывают влияние три вида погрешностей:

1) погрешности исходных данных, являющиеся обычно функциями погрешностей измеренных величин;

2) погрешности формул, представляющих приближенные математические зависимости (например, отброшенные члены в рядах);

3) погрешности вычислений, возникающие из-за округления чисел как в процессе самих вычислений, так и при использовании приближенных значений тригонометрических функций и различных вычислительных средств (логарифмические линейки, счетные машины), выдающих, как правило, округленные числа.

Точность результата вычислений определяют главным образом погрешности исходных данных, отражающие современный уровень техники и методов измерений. В соответствии с этой точностью должны подбираться формулы, таблицы и вычислительные средства.

Исходными данными для всякого рода вычислений в геодезии кроме постоянных величин являются результаты измерений линий и углов.

Наивысшую точность определения взаимного положения точек земной поверхности при современном уровне техники измерений дает триангуляция 1 класса.

В триангуляции 1 класса углы измеряются с погрешностью $\pm 0,7''$, а длины сторон — с относительной погрешностью 1 : 400 000. Длины сторон должны быть не менее 20 км.

Линейный сдвиг конечной точки линии длиной 20 км, вызываемый погрешностью измеренного угла или погрешностью измеренной стороны, равен

$$ds = \frac{0,7'' \cdot 20\,000}{\rho''} = 0,07 \text{ м,}$$

$$ds = \frac{20\,000}{400\,000} = 0,05 \text{ м.}$$

Проекцию линейного сдвига на меридиан выразим в градусной мере

$$dB = \frac{0,05}{M} \rho'' = 0,0015''.$$

В триангуляции 1 класса геодезические координаты и азимуты вычисляются последовательно от пункта к пункту. Чтобы не допустить накопления погрешностей в координатах за счет погрешностей вычислений, широты и долготы вычисляют с точностью до $0,0001''$.

Уравненные на станции измеренные направления выводят до $0,01''$. Чтобы избежать накопления погрешностей при передаче азимута от пункта к пункту, геодезические азимуты принято вычислять с точностью до $0,001''$. В каталоги помещаются округленные после уравнивания геодезической сети значения: координат до $0,001''$, азимутов до $0,01''$.

Теперь рассмотрим вопрос о предельной точности решения геодезических задач при больших расстояниях между пунктами.

Из анализа точности рядов триангуляции 1 класса известно, что средняя квадратическая погрешность положения конечного пункта звена относительно начального пункта звена при средней длине звена 200 км равна 0,6 м, что в геодезических координатах соответствует $0,02''$.

Учитывая, что погрешность в положении пункта по мере удаления его от начального пункта возрастает приблизительно пропорционально корню квадратному из расстояния до начального пункта, легко подсчитать, что при расстоянии 10 000 км (50 звеньев) эта погрешность будет составлять $0,02'' \cdot \sqrt{50} = 0,14''$.

Исходя из требования, чтобы на погрешности результата как можно меньше отражались погрешности самих вычислений, вычисления необходимо вести с большей точностью, чем точность исходных данных. Обычно искомые величины рекомендуется вычислять на один или два десятичных знака больше по сравнению с заданными величинами. Таким образом, при решении геодезических задач на большие расстояния угловые величины (широты, долготы и азимуты) практически достаточно вычислять с точностью до $0,01''$ или до $0,001''$.

При исследовании точности формул и методов решения геодезических задач координаты вычисляются с точностью до $0,0001''$.

§ 26. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ШАРЕ

Общие формулы для дуги большого круга

Прежде чем изучать методы решения геодезических задач на поверхности эллипсоида, полезно ознакомиться с решением этих задач на шаре, так как эллипсоид по форме близок к шару, и главной составной частью решения геодезических задач на

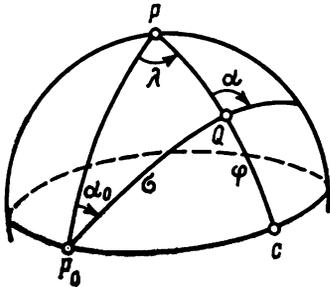


Рис. 26

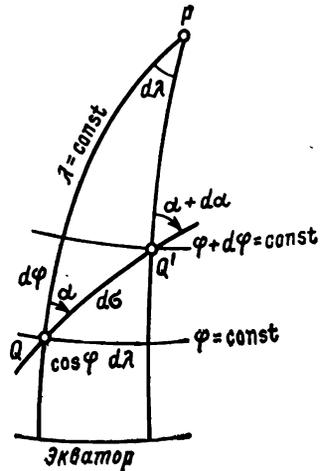


Рис. 27

эллипсоиде является решение сферического треугольника, сторонами которого являются дуги больших кругов.

Введем следующие обозначения координат на шаре (рис. 26):

φ — географическая широта,

λ — географическая долгота,

α — азимут дуги большого круга,

σ — сферическое расстояние (длина дуги большого круга, выраженная в частях радиуса шара).

Положение любой дуги большого круга на шаре определяется: а) положением точки P_0 пересечения дуги с экватором, б) азимутом α_0 этой дуги в точке P_0 .

Положение любой точки Q на этой дуге определяется сферическим расстоянием σ , отсчитываемым от точки P_0 . Величины α_0 и σ являются полярными координатами точки Q , φ и λ — географическими координатами этой же точки.

Между полярными и географическими координатами точки Q из треугольника P_0QC нетрудно найти следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \cos \varphi \sin \alpha = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{ctg} \sigma, \\ \cos \sigma &= \cos \varphi \cos \lambda = \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \cos \alpha &= \cos \alpha_0 \cos \lambda = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \sigma, \\ \sin \varphi &= \sin \sigma \cos \alpha_0 = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sin \lambda &= \sin \sigma \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.1})$$

Из дуги большого круга выделим элементарную дугу $d\sigma$ и через ее конечные точки Q и Q' проведем меридианы и параллели (рис. 27). Проекции дуги $d\sigma$ на меридиан и параллель определяются следующими выражениями:

$$d\sigma \cos \alpha = d\varphi, \quad (\text{IV.2})$$

$$d\sigma \sin \alpha = \cos \varphi d\lambda. \quad (\text{IV.3})$$

На шаре единичного радиуса $d\varphi$ представляет собой дифференциал дуги меридиана, а $\cos \varphi d\lambda$ — дифференциал дуги параллели.

Выпишем первое равенство из группы формул (IV.1)

$$\cos \varphi \sin \alpha = \sin \alpha_0. \quad (\text{IV.4})$$

Это выражение представляет собой уравнение Клеро для геодезической линии (дуги большого круга) на шаре.

Дифференцируя это равенство по обоим переменным, получаем

$$-\sin \varphi \sin \alpha d\varphi + \cos \varphi \cos \alpha d\alpha = 0,$$

откуда

$$d\alpha = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha d\varphi. \quad (\text{IV.5})$$

Заменим $d\varphi$ по равенству (IV.2).

Тогда

$$d\alpha = \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha d\sigma. \quad (\text{IV.6})$$

Если же воспользоваться равенством (IV.3), то получим

$$d\alpha = \sin \varphi d\lambda. \quad (\text{IV.7})$$

Уравнения (IV.5), (IV.6) и (IV.7) относятся непосредственно к дуге большого круга. Равенства же (IV.2) и (IV.3) в общем случае справедливы для любой кривой на шаре, в том числе и для дуги большого круга.

Из полученных выше дифференциальных соотношений выделим следующие три равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\sigma} &= \cos \alpha, \\ \frac{d\lambda}{d\sigma} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi}, \\ \frac{d\alpha}{d\sigma} &= \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

Эти равенства называются дифференциальными уравнениями дуги большого круга. Они показывают характер изменения широты, долготы и азимута при элементарном перемещении вдоль дуги большого круга.

Решение главных геодезических задач на шаре

Решение прямой и обратной геодезических задач на шаре представляет собой решение полярного сферического треугольника PQ_1Q_2 (рис. 28), когда заданы любые две стороны и угол между ними и необходимо найти третью сторону и прилежащие к ней углы.

Для решения полярного треугольника можно применить различные формулы сферической тригонометрии. Выберем из них такие, по которым искомые аргументы будут определяться, главным образом, функцией арктангенса, так как именно эта функция чаще других используется в стандартных программах для ЭВМ.

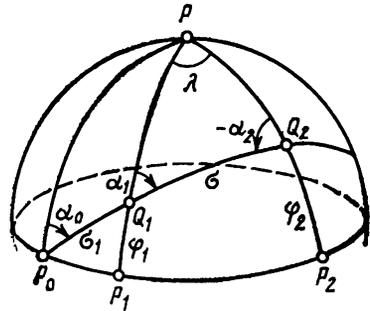


Рис. 28

Кроме того, для этой функции проще чем, для других функций, можно установить квадрант. Весьма важно также, чтобы при вычислении тангенса искомого аргумента по формуле, представленной дробью, не возникла неопределенность или потеря точности при любых возможных значениях аргументов.

Наконец, следует совершенно исключить или свести к вынужденному минимуму использование обратных тригонометрических функций в промежуточных этапах вычислений. Этим можно существенно упростить программу вычислений для решения задачи в целом.

Приведем основные соотношения между элементами полярного сферического треугольника:

$$\sin \sigma \sin \alpha_1 = \sin \lambda \cos \varphi_2, \quad (\text{IV.9})$$

$$\sin \sigma \sin \alpha_2 = -\sin \lambda \cos \varphi_1, \quad (\text{IV.10})$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_1 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda, \quad (\text{IV.11})$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \lambda, \quad (\text{IV.12})$$

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda, \quad (\text{IV.13})$$

$$\cos \varphi_2 \cos \lambda = \cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1, \quad (\text{IV.14})$$

$$\cos \varphi_2 \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \sin \sigma - \cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1, \quad (\text{IV.15})$$

$$\cos \varphi_2 \sin \alpha_2 = -\cos \varphi_1 \sin \alpha_1, \quad (\text{IV.16})$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1. \quad (\text{IV.17})$$

Применим эти формулы для решения геодезических задач.

Прямая геодезическая задача

Исходные данные: φ_1 , α_1 , σ . Определяемые величины: φ_2 , α_2 , λ .

Широта φ_2 определяется по формуле (IV.17). Вычисление арксинуса можно заменить вычислением арктангенса, используя равенство

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2}}. \quad (\text{IV.18})$$

Формулу для определения разности долгот λ найдем делением равенства (IV.9) на (IV.14)

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}. \quad (\text{IV.19})$$

Формулу для определения обратного азимута α_2 найдем делением равенства (IV.16) на (IV.15)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \varphi_1 \sin \sigma}. \quad (\text{IV.20})$$

Обратная геодезическая задача

Исходные данные: φ_1 , φ_2 , λ . Определяемые величины: σ , α_1 , α_2 .

Формулу для определения прямого азимута α_1 найдем делением равенства (IV.9) на (IV.11)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \lambda \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda} = \frac{p}{q}. \quad (\text{IV.21})$$

Формулу для определения обратного азимута α_2 найдем делением равенства (IV.10) на (IV.12)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \lambda \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \lambda - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}. \quad (\text{IV.22})$$

Для определения сферического расстояния σ предварительно найдем $\sin \sigma$, умножив равенство (IV.9) на $\sin \alpha_1$, а равенство (IV.11) — на $\cos \alpha_1$ и сложив их. Полученный результат разделим на равенство (IV.13). Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma &= \frac{\cos \varphi_2 \sin \lambda \sin \alpha_1 + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda) \cos \alpha_1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda} = \\ &= \frac{p \sin \alpha_1 + q \cos \alpha_1}{\cos \sigma}, \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

где p и q — числитель и знаменатель в формуле (IV.21).

Угловая засечка

Целью любого вида засечек на сфере является прежде всего отыскание полярных координат определяемой точки, т. е. азимута и сферического расстояния от одной из заданных точек до определяемой. После этого во всех случаях для определения широты и долготы этой точки решается прямая геодезическая задача по формулам (IV.17) и (IV.19).

В угловой засечке заданными величинами являются широты φ_1 и φ_2 и разность долгот λ_{12} двух исходных пунктов Q_1 и Q_2 (рис. 29), а также азимуты α_{13} и α_{23} с этих точек на определяемый пункт Q_3 . Необходимо найти сферические расстояния σ_{13} и σ_{23} .

Предварительно решается обратная геодезическая задача между исходными пунктами Q_1 и Q_2 для определения сферического расстояния σ_{12} и азимутов α_{12} и α_{21} по формулам (IV.21) — (IV.23).

Затем вычисляются углы

$$\beta_1 = \alpha_{12} - \alpha_{13},$$

$$\beta_2 = \alpha_{23} - \alpha_{21}.$$

Для вычисления сферического расстояния σ_{13} применяются формулы

$$\operatorname{ctg} \sigma_{13} = \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \sigma_{12}}{\sin \beta_2 \sin \sigma_{12}}, \quad (\text{IV.24})$$

$$\sin \sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma_{13}}},$$

$$\cos \sigma_{13} = \operatorname{ctg} \sigma_{13} \sin \sigma_{13}.$$

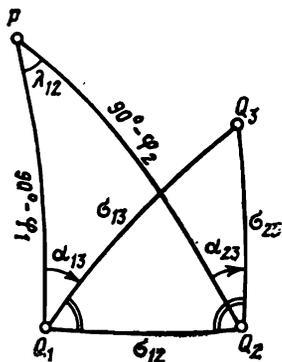


Рис. 29

Для контрольного вычисления координат пункта Q_3 используются формулы

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \sigma_{23} &= \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \sigma_{12}}{\sin \beta_1 \sin \sigma_{12}}, \\ \sin \sigma_{23} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma_{23}}}, \\ \cos \sigma_{23} &= \operatorname{ctg} \sigma_{23} \sin \sigma_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.25})$$

Линейная засечка

В линейной засечке заданными величинами являются широты φ_1 и φ_2 и разность долгот λ_{12} двух исходных пунктов Q_1 и Q_2 (см. рис. 29), а также сферические расстояния σ_{13} и σ_{23} между исходными пунктами и определяемым Q_3 . Необходимо найти азимуты α_{13} и α_{23} .

Так же как в угловой засечке, предварительно между исходными пунктами вычисляются азимуты α_{12} и α_{21} и сферическое расстояние σ_{12} .

Затем определяются тригонометрические функции азимута α_{13} по формулам

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_1 &= \frac{\cos \sigma_{23} - \cos \sigma_{13} \cos \sigma_{12}}{\sin \sigma_{13} \sin \sigma_{12}}, \\ \sin \beta_1 &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1}, \\ \sin \alpha_{13} &= \sin \alpha_{12} \cos \beta_1 - \cos \alpha_{12} \sin \beta_1, \\ \cos \alpha_{13} &= \cos \alpha_{12} \cos \beta_1 + \sin \alpha_{12} \sin \beta_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.26})$$

Контрольные вычисления выполняются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_2 &= \frac{\cos \sigma_{13} - \cos \sigma_{23} \cos \sigma_{12}}{\sin \sigma_{23} \sin \sigma_{12}}, \\ \sin \beta_2 &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2}, \\ \sin \alpha_{23} &= \sin \alpha_{21} \cos \beta_2 + \cos \alpha_{21} \sin \beta_2, \\ \cos \alpha_{23} &= \cos \alpha_{21} \cos \beta_2 - \sin \alpha_{21} \sin \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.27})$$

Гиперболическая засечка

Сферической гиперболой называется такая кривая на поверхности шара, для каждой точки которой разность расстояний (длин дуг больших кругов) от двух заданных точек на шаре, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Пусть на поверхности шара из двух пунктов F_1 и F_2 (рис. 30) с заданными географическими координатами измерена разность расстояний $\sigma_1 - \sigma_2 = 2a$ до некоторой точки Q . Через эту точку

проходит сферическая гипербола $2a = \text{const}$, для которой точки F_1 и F_2 являются фокусами.

Найдем уравнение этой гиперболы в системе полярных координат.

Проведем через фокусы F_1 и F_2 дугу большого круга. Длина этой дуги между фокусами, равная $2c$, называется базисом (или базой) разностно-дальномерной системы.

В качестве полюса полярных координат можно принять как фокус F_1 , так и фокус F_2 . Полярными координатами точки Q в первом случае будут угол β_1 и сферическое расстояние σ_1 , во втором случае — угол β_2 и сферическое расстояние σ_2 .

По треугольнику F_1F_2Q для определения стороны σ_2 можно написать уравнение

$$\cos \sigma_2 = \cos \sigma_1 \cos 2c + \sin \sigma_1 \sin 2c \cos \beta_1.$$

Если эту же сторону выразить через разность расстояний $\sigma_2 = \sigma_1 - 2a$, то можем написать

$$\cos \sigma_2 = \cos \sigma_1 \cos 2a + \sin \sigma_1 \sin 2a.$$

Приравнивая друг другу правые части этих равенств, после простых преобразований получаем

$$\text{ctg } \sigma_1 = \frac{\sin 2c \cos \beta_1 - \sin 2a}{\cos 2a - \cos 2c}. \quad (\text{IV.28})$$

Это и есть уравнение сферической гиперболы в полярных координатах σ_1 и β_1 .

Введем обозначения:

$$r = \frac{\sin 2a}{\sin 2c} = \frac{\sin a \cos a}{\sin c \cos c}, \quad (\text{IV.29})$$

$$k = \frac{\cos 2a - \cos 2c}{\sin 2c} = \frac{\sin^2 c - \sin^2 a}{\sin c \cos c}. \quad (\text{IV.30})$$

Величины r и k находятся в пределах $-1 \leq r \leq +1$,

$$0 \leq k \leq \text{tg } c.$$

Теперь уравнение (IV.28) примет такой вид:

$$\text{ctg } \sigma_1 = \frac{\cos \beta_1 - r}{k}. \quad (\text{IV.31})$$

Отсюда найдем обратную зависимость

$$\cos \beta_1 = r + k \text{ctg } \sigma_1. \quad (\text{IV.32})$$

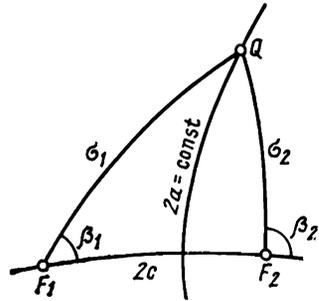


Рис. 30

Для второй системы полярных координат с полюсом F_2 найдем аналогичные уравнения

$$\operatorname{ctg} \sigma_2 = \frac{r - \cos \beta_2}{k}, \quad (\text{IV.33})$$

$$\cos \beta_2 = r - k \operatorname{ctg} \sigma_2. \quad (\text{IV.34})$$

Используем только что полученные уравнения сферических гипербол для решения гиперболической засечки.

Чтобы установить местоположение точки Q на сфере гиперболической засечкой, необходимо располагать двумя базисами. Двум измеренным с этих базисов разностям расстояний до точки Q будут соответствовать две гиперболы, в точке пересечения которых находится определяемая точка Q .

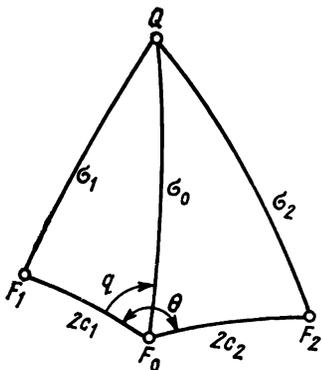


Рис. 31

Расположение базисов на сфере возможно в двух вариантах: 1) один из фокусов является общим для обоих базисов, а сами базисы в этом фокусе составляют произвольный угол (совмещенные базы); 2) каждый базис располагается произвольно относительно другого базиса (разобщенные базы).

Рассмотрим прежде всего гиперболическую засечку при первом варианте расположения базисов.

В качестве полюса полярных координат для обоих базисов примем общий фокус F_0 (рис. 31).

Измеренные разности расстояний определяются следующими равенствами:

$$2a_1 = \sigma_1 - \sigma_0,$$

$$2a_2 = \sigma_2 - \sigma_0.$$

Для первого базиса F_0F_1 применим уравнение гиперболы (IV.33), в котором следует заменить σ_2 через σ_0 , а угол β_2 — через $180^\circ - q$,

$$\operatorname{ctg} \sigma_0 = \frac{r_1 + \cos q}{k_1}, \quad (\text{A})$$

где

$$r_1 = \frac{\sin 2a_1}{\sin 2c_1} = \frac{\sin a_1 \cos a_1}{\sin c_1 \cos c_1}, \quad (\text{IV.35})$$

$$k_1 = \frac{\sin^2 c_1 - \sin^2 a_1}{\sin c_1 \cos c_1}. \quad (\text{IV.36})$$

Для второго базиса F_0F_2 применим уравнение (IV.31), в котором следует заменить σ_1 через σ_0 , угол β_1 через $\theta - q$ и r через $-r_2$,

$$\operatorname{ctg} \sigma_0 = \frac{\cos(\theta - q) + r_2}{k_2}, \quad (\text{Б})$$

где

$$r_2 = \frac{\sin 2a_2}{\sin 2c_2} = \frac{\sin a_2 \cos a_2}{\sin c_2 \cos c_2}, \quad (\text{IV.37})$$

$$k_2 = \frac{\sin^2 c_2 - \sin^2 a_2}{\sin c_2 \cos c_2}. \quad (\text{IV.38})$$

Объединив равенства (А) и (Б), получим

$$\operatorname{tg} \sigma_0 = \frac{k_1}{\cos q + r_1} = \frac{k_2}{\cos(\theta - q) + r_2}. \quad (\text{IV.39})$$

Из последнего равенства найдем

$$k_2 \cos q + k_2 r_1 = k_1 \cos \theta \cos q + k_1 \sin \theta \sin q + k_1 r_2.$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sin \theta &= m, \\ k_1 \cos \theta - k_2 &= n, \\ k_1 r_2 - k_2 r_1 &= l, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.40})$$

получим следующее тригонометрическое уравнение:

$$m \sin q + n \cos q + l = 0. \quad (\text{IV.41})$$

Решение этого уравнения можно выполнить двумя способами. Рассмотрим первый способ.

Представим равенство (IV.41) в таком виде:

$$2m \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2} + n \left(\cos^2 \frac{q}{2} - \sin^2 \frac{q}{2} \right) + l = 0.$$

Разделив его на $\cos^2 \frac{q}{2}$ и перегруппировав слагаемые, получим квадратное уравнение

$$(n - l) \operatorname{tg}^2 \frac{q}{2} - 2m \operatorname{tg} \frac{q}{2} - (n + l) = 0,$$

решением которого является следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \frac{q}{2} = \frac{m - \sqrt{m^2 + n^2 - l^2}}{n - l}. \quad (\text{IV.42})$$

В этом выражении знак перед корнем взят минус, что соответствует условию $0 < q < \theta$, т. е. определяемое направление лежит внутри угла $F_1F_0F_2$. Если же определяемое направление находится вне угла θ , то перед корнем следует поставить знак плюс.

Теперь, не переходя к арктангенсу, находим

$$\sin q = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{q}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{q}{2}},$$

$$\cos q = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{q}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{q}{2}}.$$

Для контроля вычислений $\sin q$ и $\cos q$ используется уравнение (IV.41).

В литературе встречается также другой способ решения уравнения (IV.41). Сущность его заключается в следующем.

Введем вспомогательный угол δ при помощи равенства $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \delta$, подставив которое в уравнение (IV.41) найдем

$$\sin(q + \delta) = -\frac{l}{m} \cos \delta.$$

Тогда значение угла q получим по равенству

$$q = (q + \delta) - \delta.$$

Этот способ решения уравнения (IV.41) можно применять при ручном счете с использованием таблиц тригонометрических функций. Но для вычислений на ЭВМ он неудобен, так как приходится вычислять функции $\operatorname{arctg} \left(\frac{n}{m} \right)$ и $\operatorname{arcsin} \left(-\frac{l}{m} \cos \delta \right)$, при нахождении которых возникают трудности, связанные с установлением квадранта искомого угла.

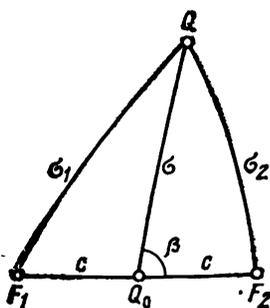


Рис. 32

Получив угол q , находим непосредственно азимут на определяемую точку $\alpha_0 = \alpha_{01} + q$ или же его функции

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \sin \alpha_{01} \cos q + \cos \alpha_{01} \sin q, \\ \cos \alpha_0 &= \cos \alpha_{01} \cos q - \sin \alpha_{01} \sin q. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.43})$$

Далее вычисляется $\operatorname{tg} \sigma_0$ по любому из двух его выражений (IV.39).

Полученные таким образом значения σ_0 , $\sin \alpha_0$ и $\cos \alpha_0$ затем используют для вычисления координат точки Q по формулам решения прямой геодезической задачи, принимая точку F_0 (см. рис. 31) за начальную.

Перейдем к рассмотрению второго варианта гиперболической засечки, когда два базиса размещены на шаре произвольно на некотором расстоянии друг от друга. Ранее полученные

уравнения гиперболы (IV.31)—(IV.34) для данного варианта не пригодны. Поэтому найдем новое уравнение сферической гиперболы.

В качестве полюса полярных координат σ и β (рис. 32) выберем среднюю точку Q_0 базиса F_1F_2 .

В двух треугольниках F_1Q_0Q и F_2Q_0Q найдем стороны σ_1 и σ_2 по формулам

$$\cos \sigma_2 = \cos \sigma \cos c + \sin \sigma \sin c \cos \beta,$$

$$\cos \sigma_1 = \cos \sigma \cos c - \sin \sigma \sin c \cos \beta,$$

откуда

$$\frac{1}{2} (\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1) = \sin \sigma \sin c \cos \beta,$$

$$\frac{1}{2} (\cos \sigma_2 + \cos \sigma_1) = \cos \sigma \cos c.$$

Учитывая, что

$$\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1 = 2 \sin \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

$$\cos \sigma_2 + \cos \sigma_1 = 2 \cos \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2a,$$

получаем уравнение гиперболы в таком виде:

$$\frac{\sin^2 \sigma \sin^2 c \cos^2 \beta}{\sin^2 a} + \frac{\cos^2 \sigma \cos^2 c}{\cos^2 a} = 1.$$

Решим это уравнение относительно $\cos \beta$

$$\cos^2 \beta = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \sigma \sin^2 c} \left(1 - \frac{\cos^2 \sigma \cos^2 c}{\cos^2 a} \right) =$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\sin^2 c} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma - \frac{\operatorname{ctg}^2 \sigma \cos^2 c}{\cos^2 a} \right) =$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\sin^2 c} \left(1 + \frac{\cos^2 a - \cos^2 c}{\cos^2 a} \operatorname{ctg}^2 \sigma \right).$$

Отсюда окончательно находим

$$\cos \beta = \frac{\sin a}{\sin c} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 c - \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} \operatorname{ctg}^2 \sigma}. \quad (\text{IV.44})$$

В этом уравнении зависимость между β и σ значительно слабее, чем в равенстве (IV.28). Поэтому уравнение (IV.44) выгодно использовать в тех случаях, когда величина сферического расстояния σ до определяемой точки значительно больше длины базиса $2c$.

Гиперболическая засечка с использованием уравнения (IV.44) выполняется в такой последовательности.

Для базисов F_1F_2 и F_3F_4 (рис. 33) необходимо предварительно найти координаты средних точек A и B . Для этого по координатам фокусов сначала решают обратную геодезическую задачу, а затем, взяв половину полученного расстояния, т. е. величину c , и начальный азимут в одном из фокусов, решают прямую геодезическую задачу. Кроме того, следует еще решить

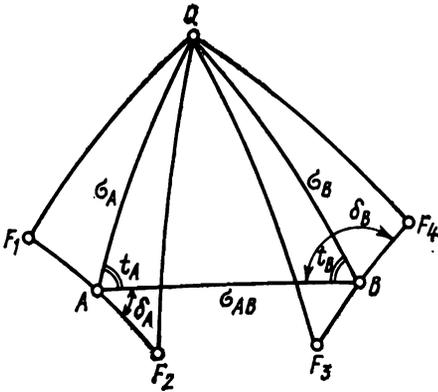


Рис. 33

обратную геодезическую задачу между средними точками A и B для получения расстояния σ_{AB} и азимутов α_{AB} и α_{BA} . Наконец, вычисляют постоянные углы δ_A и δ_B как разности азимутов дуги σ_{AB} и дуг AF_2 и BF_4 .

Определение полярных координат σ и β от точек A и B до точки Q выполняется методом последовательных приближений.

В первом приближении вычисляются значения $\cos \beta$ в точках A и B по формуле (IV.44), в которой величину

$\text{ctg } \sigma$ принимают равной нулю. Кроме того, вычисляется $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$. Затем в первом же приближении вычисляется значение $\text{ctg } \sigma$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sin t_A &= \sin \beta_A \cos \delta_A - \cos \beta_A \sin \delta_A, \\ \cos t_A &= \cos \beta_A \cos \delta_A + \sin \beta_A \sin \delta_A, \\ \sin t_B &= \cos \beta_B \sin \delta_B - \sin \beta_B \cos \delta_B, \\ \cos t_B &= \cos \beta_B \cos \delta_B + \sin \beta_B \sin \delta_B, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.45})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg } \sigma_A &= \frac{\sin t_A \cos t_B + \cos t_A \sin t_B \cos \sigma_{AB}}{\sin t_B \sin \sigma_{AB}}, \\ \text{ctg } \sigma_B &= \frac{\cos t_A \sin t_B + \sin t_A \cos t_B \cos \sigma_{AB}}{\sin t_A \sin \sigma_{AB}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.46})$$

Эти значения $\text{ctg } \sigma$ вносятся в формулу (IV.44) для получения новых значений $\cos \beta$ и $\sin \beta$, а затем и $\text{ctg } \sigma$.

С последними приближениями $\sin \beta$ и $\cos \beta$ вычисляются углы t_A и t_B , а затем азимуты с точки A на точку Q и с точки B на точку Q :

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_{AQ} &= \sin \alpha_{AB} \cos t_A - \cos \alpha_{AB} \sin t_A, \\ \cos \alpha_{AQ} &= \cos \alpha_{AB} \cos t_A + \sin \alpha_{AB} \sin t_A, \\ \sin \alpha_{BQ} &= \sin \alpha_{BA} \cos t_B + \cos \alpha_{BA} \sin t_B, \\ \cos \alpha_{BQ} &= \cos \alpha_{BA} \cos t_B - \sin \alpha_{BA} \sin t_B. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.47})$$

Найденные значения σ и α в дальнейшем используются для вычисления координат точки Q решением прямой геодезической задачи как из точки A , так и (для контроля) из точки B .

Так как каждой разности расстояний $2a$ соответствуют две ветви гиперболы, симметричные относительно базиса, то для однозначного решения задачи необходимы дополнительные сведения о том, в какой стороне от базиса расположена определяемая точка Q . В соответствии с этими сведениями устанавливается знак в приведенном выше равенстве $\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$.

Дифференциальные формулы для дуги большого круга

Дифференциальные формулы устанавливают зависимость между малыми (дифференциальными) изменениями географических координат $\varphi_1, \varphi_2, \lambda$ двух точек Q_1 и Q_2 на поверхности шара, вызванными малыми изменениями полярных координат — длины дуги большого круга (сферического расстояния) σ и начального азимута α_1 .

Предположим, что при неизменном положении начальной точки Q_1 конечная точка Q_2 сдвинулась вдоль дуги большого круга, соединяющей эти две точки, на некоторую малую величину $d\sigma$, вследствие чего изменились координаты φ_2 и λ этой точки. Зависимость между этими изменениями и $d\sigma$ устанавливается первыми двумя выражениями (IV.8), если их отнести к конечной точке Q_2 и учесть, что азимут α в этих формулах следует изменить на 180° , чтобы получить обратный азимут α_2 .

Таким образом, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{d\sigma} &= -\cos \alpha_2, \\ \frac{d\lambda}{d\sigma} &= -\frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.48)$$

Далее при неизменном положении точки Q_1 и сферического расстояния σ увеличение начального азимута α_1 на малую величину $d\alpha_1$ вызовет перемещение точки Q_2 в точку Q'_2 (рис. 34).

Дуга $Q_2Q'_2$ представляет собой дифференциал дуги малого круга и в соответствии с равенствами (II.43) и (II.34) для сферы единичного радиуса определяется выражением

$$Q_2Q'_2 = \sin \sigma d\alpha_1.$$

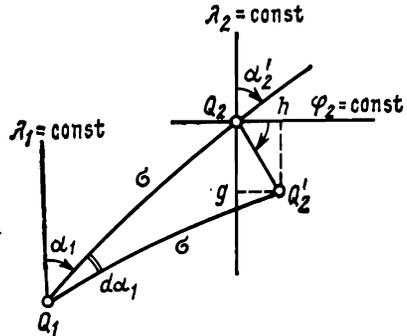


Рис. 34

Проектируя эту дугу на меридиан $\lambda = \text{const}$ и параллель $\varphi_2 = \text{const}$, получаем

$$\begin{aligned} Q_2 g &= -d\varphi_2 = \sin \alpha'_2 \sin \sigma d\alpha_1, \\ Q_2 h &= \cos \varphi_2 d\lambda = \cos \alpha'_2 \sin \sigma d\alpha_1. \end{aligned}$$

Так как $\alpha'_2 = \alpha_2 - 180^\circ$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{d\alpha_1} &= \sin \sigma \sin \alpha_2, \\ \frac{d\lambda}{d\alpha_1} &= -\frac{\sin \sigma \cos \alpha_2}{\cos \varphi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.49})$$

Теперь предположим, что при неизменных величинах σ и α_1 изменяется положение начальной точки Q_1 .

Прежде всего необходимо заметить, что λ есть разность долгот точек Q_1 и Q_2 . Поэтому при передвижении точки Q_1 вдоль параллели изменится долгота этой точки на величину $d\lambda$ и точно на такую же величину изменится долгота точки Q_2 при сохранении неизменными величин σ и α_1 . Следовательно, разность долгот λ остается прежней. Это вполне объяснимо, так как при решении геодезических задач между двумя точками долгота начальной точки не играет никакой роли и ее можно взять произвольной.

При перемещении точки Q_1 вдоль меридиана на малую величину $d\varphi_1$ изменяется широта конечной точки Q_2 на величину $d\varphi_2$. Для установления зависимости между этими величинами при неизменности всех других переменных продифференцируем равенство (IV.17) по переменным φ_1 и φ_2 . В результате этого получим

$$\cos \varphi_2 d\varphi_2 = (\cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1) d\varphi_1.$$

Если же учесть равенство (IV.14), то получим

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \cos \lambda. \quad (\text{IV.50})$$

Теперь выясним, как изменится разность долгот λ при изменении широты φ_1 .

Продифференцировав равенство (IV.9) по φ_1 , найдем

$$0 = \cos \lambda \cos \varphi_2 \frac{d\lambda}{d\varphi_1} - \sin \lambda \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},$$

откуда, приняв во внимание выражение (IV.50), получим

$$\frac{d\lambda}{d\varphi_1} = \sin \lambda \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (\text{IV.51})$$

Влияние изменений всех независимых переменных σ , α_1 и φ_1 на координаты φ_2 и λ можно представить в виде двух полных дифференциалов

$$d\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} d\varphi_1,$$

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_1} d\varphi_1.$$

Подставив вместо частных производных их значения, выраженные равенствами (IV.48), (IV.49), (IV.50) и (IV.51), получим полные дифференциальные формулы, связывающие изменения всех переменных,

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_2 &= \cos \lambda d\varphi_1 + \sin \sigma \sin \alpha_2 d\alpha_1 - \cos \alpha_2 d\sigma, \\ d\lambda &= \sin \lambda \operatorname{tg} \varphi_2 d\varphi_1 - \frac{\sin \sigma \cos \alpha_2}{\cos \varphi_2} d\alpha_1 - \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_2} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.52})$$

Для получения обратной зависимости решим эти два уравнения относительно дифференциалов $d\sigma$ и $d\alpha_1$. Предварительно найдем

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 d\varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \alpha_2 d\lambda &= \\ &= -d\sigma + (\cos \lambda \cos \alpha_2 + \sin \lambda \sin \varphi_2 \sin \alpha_2) d\varphi_1, \\ \sin \alpha_2 d\varphi_2 - \cos \varphi_2 \cos \alpha_2 d\lambda &= \\ &= \sin \sigma d\alpha_1 + (\cos \lambda \sin \alpha_2 - \sin \lambda \sin \varphi_2 \cos \alpha_2) d\varphi_1. \end{aligned}$$

Применив формулы сферической тригонометрии к полярному треугольнику $Q_1 P Q_2$ (см. рис. 28), установим, что в последних равенствах выражения в скобках можно заменить соответственно на $-\cos \alpha_1$ и на $-\cos \sigma \sin \alpha_1$.

Таким образом, дифференциальные формулы, устанавливающие обратные зависимости между дифференциалами переменных, получаем в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= -\cos \alpha_1 d\varphi_1 - \cos \alpha_2 d\varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \alpha_2 d\lambda, \\ d\alpha_1 \sin \sigma &= \cos \sigma \sin \alpha_1 d\varphi_1 + \sin \alpha_2 d\varphi_2 - \cos \varphi_2 \cos \alpha_2 d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.53})$$

§ 27. ОБЩИЕ УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоиДА

Как было показано в § 8, при перемещении вдоль любой кривой на поверхности эллипсоида изменение широты и долготы характеризуется следующими двумя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}. \quad (\text{IV.54})$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \quad (\text{IV.55})$$

Изменение азимута вдоль геодезической линии определяется уравнением

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A. \quad (\text{IV.56})$$

Эти три уравнения связывают между собой четыре переменных: B , L , A и s , из которых длина геодезической линии s принята в качестве независимой переменной.

Равенства (IV.54)—(IV.56) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрируя их по дуге s между точками Q_1 и Q_2 , получаем

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\cos A}{M} ds, \\ L_2 - L_1 &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N \cos B} ds, \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.57})$$

Эти интегралы не выражаются в элементарных функциях. Поэтому точные их значения неизвестны.

Для приближенного вычисления этих интегралов применяют разложения в ряды или самих интегралов, или подынтегральных функций с последующим почленным интегрированием каждого ряда.

Рассмотрим первый путь интегрирования.

Разложим интегралы (IV.57) в следующие ряды по степеням малой дуги s :

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots, \\ L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots, \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{ds} \right)_1 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2} \right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{ds^3} \right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.58})$$

Первые коэффициенты этих рядов даны равенствами (IV.54)—(IV.56). Остальные коэффициенты находят последовательным дифференцированием первых коэффициентов по переменным B и A как сложных функций. Например,

$$\frac{d^2B}{ds^2} = \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{ds} \right) \frac{dB}{ds} + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{dB}{ds} \right) \frac{dA}{ds}.$$

Найдем частные производные в этом равенстве

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{ds} \right) = \cos A \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{M} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{dB}{ds} \right) = -\frac{\sin A}{M}.$$

Так как

$$M = \frac{c}{V^3},$$

то

$$\frac{d}{dB} \left(\frac{1}{M} \right) = \frac{3V^2}{c} \frac{dV}{dB}.$$

Ранее было найдено выражение

$$\frac{dV}{dB} = -\frac{\eta^2 \operatorname{tg} B}{V}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{ds} \right) = -\frac{3\eta^2 \operatorname{tg} B}{N} \cos A.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = -\frac{\operatorname{tg} B}{MN} (3\eta^2 \cos^2 A + \sin^2 A).$$

Аналогичным образом можно получить все необходимые коэффициенты в рядах (IV.58). Чем выше порядок производной, тем сложнее ее вид. Вот как выглядит, например, выражение для третьей производной широты:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 B}{ds^3} = & -\frac{1}{MN^2} [\cos A \sin^2 A (1 + 3 \operatorname{tg}^2 B + \eta^2 - 9\eta^2 \operatorname{tg}^2 B) + \\ & + 3\eta^2 \cos^3 A (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2 - 5\eta^2 \operatorname{tg}^2 B)]. \end{aligned}$$

Как видно, вычисление коэффициентов в рядах (IV.58) весьма затруднительно. Поэтому вычисления с помощью этих рядов выполняются обычно в таком порядке. Вводят обозначения $s \cos A_1 = u$, $s \sin A_1 = v$. После этого коэффициенты при различных степенях u , v будут сложными функциями только одного аргумента — широты B_1 . Эти функции вычисляются заранее и представляются в виде таблицы с определенным шагом по широте, откуда их выбирают путем интерполирования на заданную широту B_1 .

Таким образом, рабочие формулы для вычисления разностей широт, долгот и азимутов по заданным значениям s и A_1 будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= a_1 u + a_2 u^2 + a_3 v^2 + a_4 uv^2 + a_4 u^3 + \dots, \\ L_2 - L_1 &= b_1 v + b_2 uv + b_3 u^2 v + b_4 v^3 + \dots, \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= c_1 v + c_2 uv + c_3 u^2 v + c_4 v^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.59})$$

Вычисления по этим формулам удобны лишь при ручном счете при наличии заранее составленных таблиц коэффициентов. Кроме того, они могут применяться лишь при малых расстояниях, когда s значительно меньше радиуса земного шара.

Некоторыми рациональными приемами формулы (IV.59) можно преобразовать так, что они будут достаточно простыми как для ручного счета, так и для счета на ЭВМ. Так, например, вводят вспомогательную точку на меридиане начальной точки геодезической линии. Тогда ряды (IV.59), примененные к линиям между вспомогательной, начальной и конечной точками, примут весьма простой вид (см. § 31).

Во-вторых, если для решения прямой геодезической задачи начальные данные (B, A) задать не для начальной, а для средней точки геодезической линии, то можно получить ряды, у которых число членов будет в два раза меньше, чем в рядах (IV.59) (см. § 32).

Во всех такого рода формулах в виде рядов обычно отбрасывают члены пятого порядка относительно расстояния. Поэтому их можно применять на сравнительно короткие расстояния: для точных вычислений в триангуляции 1 класса и для приближенных определений при расстояниях до 600 км.

В связи с широким внедрением в практику геодезических вычислений электронно-вычислительных машин в настоящее время появилась возможность успешного использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Такие методы были известны давно, но не применялись на практике, так как были весьма трудоемки и сложны, поэтому мало пригодны для ручного счета. Выполненные в последние годы исследования как в СССР, так и за рубежом по применению, в частности, метода Рунге — Кутты показали практическую эффективность этого метода при решении прямой геодезической задачи на малые расстояния на ЭВМ (см. § 33).

Перейдем к рассмотрению второго пути вычисления интегралов (IV.57). Он является наиболее общим и приводит к формулам, пригодным для решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида при любых расстояниях между двумя точками до 20 000 км и с любой практически необходимой точностью.

Сущность его состоит в следующем.

Форма земного эллипсоида незначительно отличается от шара. Решение же геодезических задач на шаре, как было показано в § 26, выполняется совершенно строго по простым формулам сферической тригонометрии.

Исходя из этого, представляется целесообразным геодезическую линию эллипсоида изобразить на шаре в виде дуги большого круга так, что каждой точке геодезической линии соответствовала бы единственная точка дуги большого круга в качестве ее изображения.

Такое взаимно однозначное точечное соответствие между геодезической линией на эллипсоиде и дугой большого круга на шаре называется геодезическим изображением.

Такое соответствие считается установленным, если найдены математические зависимости между величинами B, L, A, s в каждой точке геодезической линии на эллипсоиде и величинами $\varphi, \lambda, \alpha, \sigma$ в соответствующей точке дуги большого круга на шаре.

Эти зависимости можно записать в виде следующих четырех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dB}{d\varphi} = f_1, \quad \frac{dL}{d\lambda} = f_2, \quad \frac{dA}{d\alpha} = f_3, \quad \frac{ds}{d\sigma} = f_4. \quad (\text{IV.60})$$

В правых частях этих уравнений через f_1, f_2, f_3 и f_4 обозначены некоторые функции, зависящие в общем случае от широты, азимута и эксцентриситета эллипсоида.

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (IV.60), мы получим необходимые формулы для взаимного перехода с эллипсоида на шар. Таким образом, последовательность решения геодезических задач будет следующей:

- 1) вычисление по заданным величинам на эллипсоиде соответствующих величин на шаре (переход с эллипсоида на шар);
- 2) решение геодезической задачи на шаре;
- 3) вычисление по величинам, полученным на шаре, соответствующих величин на эллипсоиде (переход с шара на эллипсоид).

Рассмотрим те условия, которым должны удовлетворять дифференциальные уравнения (IV.60) при геодезическом изображении.

Перемещение вдоль геодезической линии на элементарное расстояние ds вызывает изменения координат и азимута на элементарные величины dB, dL и dA . Аналогичное перемещение вдоль дуги большого круга на $d\sigma$ вызывает изменения координат и азимута на $d\varphi, d\lambda$ и $d\alpha$. Зависимости между этими изменениями определяются дифференциальными уравнениями (IV.54) — (IV.56) для геодезической линии и уравнениями (IV.8) для дуги большого круга.

Напишем эти уравнения в таком виде:

$$dB = \frac{\cos A}{M} ds, \quad d\varphi = \cos \alpha d\sigma,$$

$$dL = \frac{\sin A}{N \cos B} ds, \quad d\lambda = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} d\sigma,$$

$$dA = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds, \quad d\alpha = \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha d\sigma.$$

Пусть дифференциал ds в некоторой точке Q геодезической линии на эллипсоиде (рис. 35) изображается дифференциалом $d\sigma$ в соответствующей точке Q_c дуги большого круга на шаре.

Предположим, что нам известна зависимость между ds и $d\sigma$ в виде отношения $\frac{ds}{d\sigma} = f_4$. Тогда, разделив друг на друга левые и правые части приведенных выше уравнений, получим зависимость между координатами и азимутами геодезической ли-

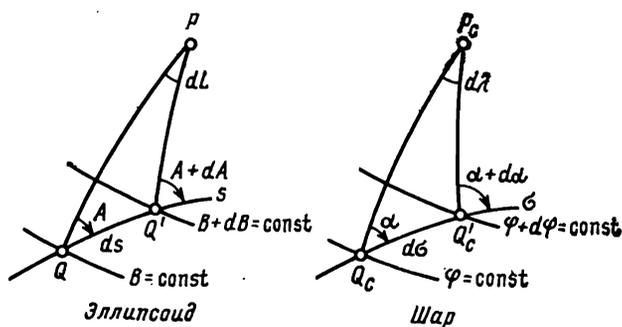


Рис. 35

нии на эллипсоиде и дуги большого круга на шаре в следующем виде:

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{\cos A}{M \cos \alpha} \frac{ds}{d\sigma}, \quad (\text{IV.61})$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\cos \varphi \sin A}{N \cos B \sin \alpha} \frac{ds}{d\sigma}, \quad (\text{IV.62})$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha} \frac{ds}{d\sigma}. \quad (\text{IV.63})$$

Таким образом, если нам известна функция f_4 или вообще любая из четырех функций в уравнениях (IV.60), то остальные три функции мы можем найти из решения уравнений (IV.61) — (IV.63).

Общие интегралы дифференциальных уравнений (IV.60) содержат произвольные постоянные. Для получения частных интегралов назначают дополнительные или начальные условия, обеспечивающие однозначное решение.

Свободный выбор одной из четырех функций (IV.60) и начальных условий интегрирования открывает широкие возможности изыскания различных способов изображения геодезической линии дугой большого круга, а следовательно, разработки различных способов решения геодезических задач на эллипсоиде.

Какую из четырех функций (IV.60) следует принять как произвольную, какой ей придать вид и какие принять начальные условия интегрирования — все это зависит от конкретных практических условий применения главной геодезической задачи.

Использовать во всех случаях один и тот же способ перехода с эллипсоида на шар не всегда выгодно с точки зрения простоты вычислений. Может случиться так, что после выбора простейшей зависимости, например $B = \varphi$, для остальных трех координат зависимости окажутся настолько сложными, что их использование не окупится простотой установления первой зависимости.

Между тем круг способов решения главных геодезических задач может быть еще более расширен, если вместо геодезической линии, соединяющей две точки на поверхности эллипсоида, использовать другие линии, близкие по длине к геодезической, например, нормальное сечение, центральное сечение и т. п.

Для того чтобы установить необходимые зависимости для взаимного перехода с эллипсоида на шар, для таких линий можно использовать только два уравнения (IV.61) и (IV.62), так как третье уравнение (IV.63) относится только к геодезической линии. Поэтому в таких случаях произвольно заданными могут быть уже не одна, а две функции из четырех (IV.60).

Наконец, для решения геодезических задач иногда используется то или иное картографическое изображение всей или части поверхности эллипсоида на шаре. В таких изображениях обычно меридианы и параллели эллипсоида изображаются на шаре также меридианами и параллелями. Следовательно, заданная функция f_1 в этих изображениях будет зависеть только от одного аргумента — широты, а вторая функция f_2 — произвольно выбранная постоянная величина. Подставив эти функции в уравнения (IV.61) и (IV.62) и проинтегрировав их, можно найти зависимость между сферическим расстоянием σ и его изображением на эллипсоиде — линией s , а также зависимость между азимутом α дуги большого круга и азимутом A линии s .

Ясно, что длина этой линии s и ее азимут A между двумя точками на эллипсоиде не будут равны длине и азимуту геодезической линии, проведенной между этими же точками. Поэтому возникает необходимость дополнительных вычислений поправок Δs и ΔA в длину и азимут полученной на эллипсоиде кривой, чтобы найти длину и азимут геодезической линии.

Использование картографических изображений эллипсоида на шаре для решения геодезических задач будет оправдано лишь в том случае, если уравнения преобразования широт и долгот имеют простой вид, а поправками Δs и ΔA можно пренебречь из-за их малости или же вычислять их также по простым формулам.

В заключение заметим, что в любом из способов, который можно разработать по описанной выше методике, возможны два варианта интегрирования каждого из дифференциальных уравнений (IV.60). В первом варианте подынтегральную функцию раскладывают в быстро сходящийся ряд по степеням эксцентриситета эллипсоида. Почленное интегрирование этого ряда при-

водит к выражениям, которые обеспечивают практически одинаковую точность при любых расстояниях между заданными точками.

Во втором варианте искомые интегралы представляют в виде ряда Тейлора по степеням расстояния или разностей широт и долгот, полагая их малыми величинами. В этом случае интегрирование сводится к дифференцированию функций (IV.60) для получения коэффициентов ряда. Для вычислений используют обычно лишь первые три-пять членов ряда, а точность вычислений с помощью такого ряда определяется величиной первого отброшенного члена ряда. По заданной величине отброшенного члена, в свою очередь, устанавливают предельную величину расстояния, допустимого для вычислений с помощью этого ряда.

Таковы теоретические основы разработки любого способа решения геодезических задач на поверхности эллипсоида как из числа уже известных, так и теоретически возможных способов.

§ 28. РЕШЕНИЕ ГЛАВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО СПОСОБУ БЕССЕЛЯ

Связь между координатами на эллипсоиде и на шаре

В основе способа Бесселя лежат следующие условия:

- 1) геодезическая линия изображается на шаре дугой большого круга;
- 2) в соответствующих точках геодезической линии и дуги большого круга азимуты равны;
- 3) широта любой точки на шаре равна приведенной широте соответствующей точки на эллипсоиде.

Согласно первому условию можно использовать все три уравнения (IV.61)—(IV.63). С учетом второго условия ($\alpha=A$) эти уравнения примут вид

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{N \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} B}, \quad (\text{IV.64})$$

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{N \operatorname{tg} \varphi}{M \operatorname{tg} B}, \quad (\text{IV.65})$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sin \varphi}{\sin B}. \quad (\text{IV.66})$$

Найдем интегралы этих уравнений.

Уравнение (IV.65) легко интегрируется. Разделив переменные, получим

$$\operatorname{tg} \varphi d\varphi = \frac{M \sin B dB}{N \cos B}.$$

Так как по формуле (I.93)

$$M \sin B dB = -dr,$$

то

$$\operatorname{tg} \varphi d\varphi = -\frac{dr}{r},$$

откуда

$$\ln \cos \varphi - \ln r + \ln C = 0,$$

или

$$C \cos \varphi = r, \quad (\text{IV.67})$$

где C — постоянная интегрирования.

Значение постоянной C определяется третьим условием способа Бесселя, согласно которому $\varphi = u$. Так как $r = a \cos u$, то $C = a$.

Обратимся к уравнениям (IV.64) и (IV.66). С учетом третьего условия Бесселя получим

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{N \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} B} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{W} = \frac{a}{V},$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sin u}{\sin B} = \frac{1}{V}.$$

В сфероидической функции V аргумент B выразим через приведенную широту следующим образом:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \frac{e^2}{1-e^2} W^2 \cos^2 u = 1 + e^2 V^2 \cos^2 u,$$

откуда

$$V^2 = \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 u}.$$

Таким образом, уравнения (IV.64) и (IV.66) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\sigma} &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}, \\ \frac{dL}{d\lambda} &= \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.68})$$

Эти равенства являются дифференциальными уравнениями Бесселя. Интегрируя их вдоль дуги большого круга между ее точками Q_1 и Q_2 , получаем

$$s = a \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma, \quad (\text{IV.69})$$

$$l = L_2 - L_1 = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda. \quad (\text{IV.70})$$

Присоединив к этим уравнениям равенства $\varphi = u$ и $\alpha = A$, получим основные соотношения, связывающие координаты B, L, A, s в любой точке геодезической линии с координатами $\varphi, \lambda, \alpha, \sigma$ в соответствующей точке дуги большого круга. Другими словами, эти соотношения устанавливают взаимно однозначное точечное соответствие между геодезической линией на эллипсоиде и дугой большого круга на шаре.

Иногда такое соответствие между линиями называют «бесселевым изображением эллипсоида на шаре», т. е. изображение только одной линии отождествляют с изображением всей поверхности.

Бессель не занимался изображением эллипсоида на шаре. Но если все-таки воспользоваться идеей Бесселя об изображении геодезической линии, то для изображения поверхности эллипсоида следует взять систему полярных координат, рассмотренную в § 14, т. е. использовать пучок геодезических линий, соединяющих одну выбранную на эллипсоиде точку с множеством других точек, и каждую геодезическую линию этого пучка изобразить на шаре по Бесселю. Ясно, что параллели эллипсоида $B = \text{const}$ будут изображены на шаре также параллелями $u = \text{const}$. Однако меридианы эллипсоида $L = \text{const}$ изобразятся на шаре в виде кривых, отличающихся от меридианов шара $\lambda = \text{const}$, о чем свидетельствует второе уравнение из (IV.68).

Такой переход с эллипсоида на шар действительно можно назвать «бесселевым изображением эллипсоида на шаре». Его можно использовать для решения геодезических задач при одном непременном условии: начальные точки всех геодезических линий должны совпадать с заданным полюсом полярных координат. На практике же при решении геодезических задач начальные точки геодезических линий, как правило, не совпадают. Поэтому каждой геодезической линии с заданными начальными условиями соответствует свой полюс полярных координат и свои изображения меридианов и параллелей.

Следовательно, при «бесселевом изображении эллипсоида на шаре» между поверхностями эллипсоида и шара в общем случае невозможно установить однозначное точечное соответствие.

Вернемся к интегралам (IV.69) и (IV.70). Эти интегралы являются эллиптическими и не выражаются в элементарных функциях. С практической точки зрения это не существенно, так как можно найти их приближенные выражения, пригодные для вычислений с любой необходимой для практики точностью.

Мы рассмотрим два варианта приближенного интегрирования, которые наилучшим образом удовлетворяют требованиям вычислительной практики с использованием современных вычислительных машин.

Первый вариант основан на разложении подынтегральных выражений в быстро сходящиеся ряды с последующим почлен-

ным интегрированием этих рядов. С подобным методом интегрирования эллиптических интегралов мы уже встречались в § 9 при вычислении длины дуги меридиана.

Во втором варианте используется один из методов численного интегрирования.

Интегрирование уравнений Бесселя методом разложения в ряд

Начнем с интеграла (IV.69). Прежде всего преобразуем его подынтегральную функцию, выразив ее аргумент — приведенную широту — через переменную σ .

Из прямоугольного треугольника $P_0Q_1P_1$ (рис. 36), в котором точку Q_1 будем рассматривать как текущую на дуге большого круга $P_0Q_1Q_2$, можем написать

$$\sin u = \sin \sigma \cos A_0,$$

откуда

$$\cos^2 u = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma.$$

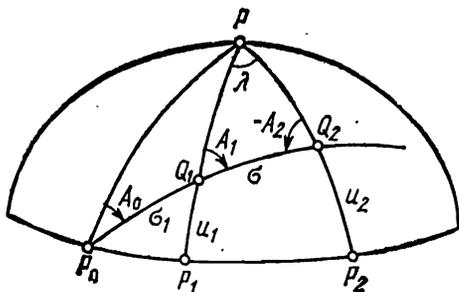


Рис. 36

Теперь равенство (IV.69) преобразуем следующим образом.

$$\begin{aligned} s &= a \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma} \, d\sigma = \\ &= a \sqrt{1 - e^2} \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma} \, d\sigma = \\ &= b \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma} \, d\sigma, \end{aligned}$$

где b — малая полуось эллипсоида.

Введем обозначение для постоянного коэффициента в подынтегральной функции

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0. \quad (\text{IV.71})$$

Тогда

$$s = b \int_{Q_1}^{Q_2} (1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} \, d\sigma. \quad (\text{IV.72})$$

Для получения приближенного выражения этого интеграла его подынтегральную функцию разложим в ряд по формуле бинома Ньютона

$$(1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} = 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \sigma - \frac{k^4}{8} \sin^4 \sigma + \frac{k^6}{16} \sin^6 \sigma - \dots$$

Так как величина k^2 содержит множителем эксцентриситет в квадрате ($e'^2 \approx \frac{1}{150}$), то ясно, что этот ряд довольно быстро сходится.

Для облегчения последующего интегрирования степенные функции заменим функциями кратного аргумента

$$\sin^2 \sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma,$$

$$\sin^4 \sigma = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma + \frac{1}{8} \cos 4\sigma,$$

$$\sin^6 \sigma = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\sigma + \frac{3}{16} \cos 4\sigma - \frac{1}{32} \cos 6\sigma.$$

Сгруппировав коэффициенты при каждой функции с одинаковым аргументом, получим

$$\begin{aligned} (1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} &= \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 - \dots \right) - \\ &- \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512} k^6 - \dots \right) \cos 2\sigma - \\ &- \left(\frac{k^4}{64} - \frac{3}{256} k^6 + \dots \right) \cos 4\sigma - \left(\frac{k^6}{512} - \dots \right) \cos 6\sigma - \dots \end{aligned}$$

Последний член этого равенства после интегрирования и умножения на малую полуось эллипсоида составит величину

$$\frac{bk^6}{3072} \sin 6\sigma < 0,0006 \text{ м,}$$

которой можно пренебречь даже при самых высоких практических требованиях к точности вычислений.

Неопределенные интегралы тригонометрических функций в других членах последнего равенства найдем в таком виде:

$$\int \cos 2\sigma d\sigma = \frac{1}{2} \sin 2\sigma,$$

$$\int \cos 4\sigma d\sigma = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos 2\sigma.$$

Теперь напишем окончательный вид интеграла (IV.72) с принятой точностью, но пока без подстановки пределов,

$$s_1 = A\sigma_1 - B \sin 2\sigma_1 - C \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_1 - \dots, \quad (\text{IV.73})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= b \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 - \dots \right), \\ B &= b \left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15}{1024} k^6 - \dots \right), \\ C &= b \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.74})$$

Взяв численные значения b и e'^2 для эллипсоида Красовского, получим

$$\left. \begin{aligned} A &= 6\,356\,863,020 + (10\,708,949 - 13,474 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0 = \\ &= 30,81834161 + (51\,918\,450 - 65\,324 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0 \cdot 10^{-9}, \\ B &= (5354,469 - 8,978 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\ C &= (2,238 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0 + 0,006. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.75})$$

При получении коэффициентов этих рядов выполнена их экономизация. Точность их такова, что длина геодезической линии, вычисленная с их использованием по формуле (IV.73), будет отличаться от ее точного значения не более чем на 0,005 м при любых расстояниях.

Первое выражение для коэффициента A используется в том случае, когда величина σ в формуле (IV.73) выражена в радианах, второе выражение — когда величина σ выражена в секундах дуги.

По формуле (IV.73) вычисляется длина геодезической линии от экватора до любой точки Q_i дуги большого круга.

Для вычисления длины геодезической линии между двумя заданными точками Q_1 и Q_2 применим формулу (IV.73) для каждой из этих точек

$$s_1 = A\sigma_1 - B \sin 2\sigma_1 - C \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_1, \quad (\text{a})$$

$$s_2 = A\sigma_2 - B \sin 2\sigma_2 - C \sin 2\sigma_2 \cos 2\sigma_2. \quad (\text{б})$$

Полагая, что $s_2 - s_1 = s$ и $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$, получим

$$s = A\sigma + \sin 2\sigma_1 (B + C \cos 2\sigma_1) - \sin 2\sigma_2 (B + C \cos 2\sigma_2). \quad (\text{IV.76})$$

Эта формула применяется при решении обратной геодезической задачи.

При решении прямой геодезической задачи величина s является заданной, тогда как искомой является σ . Формулу для отыскания σ легко получаем из (IV.76)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{A} \{ s - \sin 2\sigma_1 (B + C \cos 2\sigma_1) + \\ &+ \sin 2(\sigma_1 + \sigma) [B + C \cos 2(\sigma_1 + \sigma)] \}. \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

Очевидно, по этой формуле сферическое расстояние σ определяется последовательными приближениями. В первом приближении можно принять

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} [s - (B + C \cos 2\sigma_1) \sin 2\sigma_1]. \quad (\text{IV.78})$$

Найдем формулу для вычисления σ , не требующую последовательных приближений. Для этого равенство (б) напомним в таком виде:

$$\frac{s_2}{A} = \sigma_2 - \frac{B}{A} \sin 2\sigma_2 - \frac{C}{2A} \sin 4\sigma_2.$$

Это равенство решим относительно σ_2 по правилам обращения тригонометрического ряда (см. приложение). Тогда будем иметь

$$\sigma_2 = \frac{s_2}{A} + \frac{B'}{A} \sin 2 \left(\frac{s_2}{A} \right) + \frac{C'}{2A} \sin 4 \left(\frac{s_2}{A} \right), \quad (\text{IV.79})$$

где

$$B' = B - \frac{BC}{2A} - \frac{B^3}{2A^2} = B - \frac{3b}{2048} k^6,$$

$$C' = C + \frac{2B^2}{A} = 5C.$$

Если в формуле для B' отбросить второй член, то это отразится на σ_2 всего лишь на величину менее 0,0001", или в метрах менее 0,003 м. Поэтому во всех случаях на практике можно принять $B' = B$.

Теперь найдем выражение для $\frac{s_2}{A}$. Так как $s_2 = s_1 + s$, то с учетом равенства (а) будем иметь

$$\frac{s_2}{A} = \sigma_1 - \frac{B}{A} \sin 2\sigma_1 - \frac{C}{A} \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_1 + \frac{s}{A},$$

откуда, приняв во внимание выражение (IV.78), получим

$$\frac{s_2}{A} = \sigma_1 + \sigma_0.$$

Таким образом, из равенства (IV.79) с учетом только что полученных соотношений и элементарных преобразований найдем

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{A} [B + 5C \cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)] \sin 2(\sigma_1 + \sigma_0). \quad (\text{IV.80})$$

Для вычисления σ по этой формуле нет необходимости применять последовательные приближения. В этом ее преимущество перед формулой (IV.77), поэтому ее и следует рекомендовать для вычислений.

Перейдем к вычислению интеграла (IV.70)

$$I = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \, d\lambda.$$

Перед интегрированием необходимо так преобразовать подынтегральное выражение, чтобы аргумент подынтегральной функции и переменная интегрирования были бы одной и той же величиной.

Предварительно подынтегральную функцию разложим в ряд по формуле бинома Ньютона и проинтегрируем первый член

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q_1}^{Q_2} (1 - e^2 \cos^2 u)^{1/2} \, d\lambda = \int_{Q_1}^{Q_2} \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \frac{e^6}{16} \cos^6 u - \dots \right) d\lambda = \\ &= \lambda - \int_{Q_1}^{Q_2} \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} \cos^2 u + \frac{e^6}{16} \cos^4 u + \dots \right) \cos^2 u \, d\lambda. \end{aligned}$$

Теперь в подынтегральном выражении от переменных u и λ перейдем к переменной σ .

Ранее мы уже имели формулу

$$\cos^2 u = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma. \quad (A)$$

Кроме того, для дуги большого круга на шаре в соответствии с условиями изображения по Бесселю на основании равенств (IV.4) и (IV.3) напомним

$$\cos u \sin A = \sin A_0,$$

$$d\lambda \cos u = d\sigma \sin A.$$

Отсюда находим

$$\cos^2 u \, d\lambda = \sin A_0 \, d\sigma. \quad (B)$$

После подстановки соотношений (A) и (B) в подынтегральное выражение получим

$$\begin{aligned} I &= \lambda - \sin A_0 \int_{Q_1}^{Q_2} \left[\left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{8} + \dots \right) \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 A_0 \sin^4 \sigma + \dots \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Степенные функции переменной σ заменим функциями кратного аргумента и сгруппируем постоянные коэффициенты при каждой функции с одинаковым аргументом

$$l = \lambda - \sin A_0 \int_{Q_1}^{Q_2} \left\{ \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 A_0 + \left(\frac{3}{128} e^6 + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 A_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{e^6}{32} + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots \right] \cos 2\sigma + \dots \right\} d\sigma.$$

Отброшенный в правой части этого равенства член $\frac{e^6}{128} \cos^4 A_0 \sin A_0 \cos 4\sigma$ составляет величину менее 0,00015''.

В результате интегрирования и подстановки предельных значений σ_1 и σ_2 получим следующие формулы для определения разностей долгот:

— при решении прямой задачи

$$= \lambda - \sin A_0 [\alpha\sigma + \beta (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1)], \quad (\text{IV.81})$$

— при решении обратной задачи

$$\lambda = l + \sin A_0 [\alpha\sigma + \beta (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1)], \quad (\text{IV.82})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) - \\ &- \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 A_0 + \left(\frac{3}{128} e^6 + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots, \\ \beta &= \left(\frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{32} + \dots \right) \cos^2 A_0 - \left(\frac{e^6}{64} + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.83})$$

Взяв численное значение эксцентриситета для эллипсоида Красовского, для коэффициентов α и β получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= [33\,523\,299 - (28\,189 - 70 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0] \cdot 10^{-10}, \\ \alpha &= 691,46768 - (0,58143 - 0,00144 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\ \beta &= (0,2907 - 0,0010 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.84})$$

Первая формула для α используется тогда, когда величина σ в равенствах (IV.81) и (IV.82) выражается в секундах дуги, вторая формула — если σ выражается в радианах. В обоих слу-

чаях долготы, вычисленная по формулам (IV.81) и (IV.82), выражается в градусной мере.

С этими коэффициентами погрешность в вычисленном значении долготы составит величину не более 0,0002".

Приведем новый вариант формул, позволяющих упростить вычисления s и λ при решении обратной геодезической задачи.

Формулу (IV.76) для вычисления длины геодезической линии перепишем в таком виде:

$$s = A\sigma - B(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) - C(\sin 2\sigma_2 \cos 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_1),$$

откуда

$$s = A\sigma - 2B \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) - C \sin 2\sigma \cos (4\sigma_1 + 2\sigma). \quad (IV.85)$$

Последнее выражение соответствует традиционной форме записи.

При вычислении s по этой формуле приходится находить прямые и обратные тригонометрические функции с различными аргументами, поэтому при ручном счете традиционными методами использование таблиц тригонометрических функций было насущной необходимостью.

Для вычислений на современных счетных машинах применение такой методики не рационально. Более удобный путь состоит в том, что вместо неоднократного вычисления обратных тригонометрических функций, при которых возникают затруднения с определением квадранта угла, выгоднее выполнять различные преобразования тригонометрических функций, для которых требуются лишь простые алгебраические действия.

Но можно пойти еще дальше по пути упрощения методики вычисления длины геодезической линии. С этой целью преобразуем формулу (IV.85) следующим образом.

Прежде всего найдем

$$\begin{aligned} \cos (2\sigma_1 + \sigma) &= \cos 2\sigma_1 \cos \sigma - \sin 2\sigma_1 \sin \sigma = \\ &= \cos \sigma - 2 \sin \sigma_1 (\sin \sigma_1 \cos \sigma + \cos \sigma_1 \sin \sigma) = \cos \sigma - 2 \sin \sigma_1 \sin \sigma_2. \end{aligned}$$

Применив четвертую формулу из группы формул (IV.1) к начальной и конечной точкам дуги большого круга, получим выражения, с помощью которых произведем замены синусов во втором слагаемом. Тогда

$$\cos (2\sigma_1 + \sigma) = \frac{1}{\cos^2 A_0} (\cos^2 A_0 \cos \sigma - 2 \sin u_1 \sin u_2).$$

Кроме того, учтем, что

$$\cos (4\sigma_1 + 2\sigma) = 2 \cos^2 (2\sigma_1 + \sigma) - 1.$$

После подстановки этих выражений в равенство (IV.85) получим

$$s = A\sigma + \frac{2B}{\cos^2 A_0} (2 \sin u_1 \sin u_2 - \cos^2 A_0 \cos \sigma) \sin \sigma + \\ + \frac{2C}{\cos^4 A_0} [\cos^4 A_0 - 2 \cos^2 A_0 \cos^2 (2\sigma_1 + \sigma)] \cos \sigma \sin \sigma.$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sin u_1 \sin u_2 - \cos^2 A_0 \cos \sigma, \\ y &= (\cos^4 A_0 - 2x^2) \cos \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (IV.86)$$

Теперь формула для вычисления длины геодезической линии примет следующий вид:

$$s = A\sigma + (B'x + C'y) \sin \sigma, \quad (IV.87)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= 6\,356\,863,020 + (10\,708,949 - 13,474 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0, \\ B' &= 10\,708,938 - 17,956 \cos^2 A_0, \quad C' = 4,487. \end{aligned} \right\} \quad (IV.88)$$

Преимущество формулы (IV.87) перед формулой (IV.76) состоит в том, что в ней нет необходимости в определении дуги σ_1 и связанных с ней тригонометрических функций. Кроме того, выражения (IV.88) для вычисления коэффициентов имеют более простой вид по сравнению с выражениями (IV.75).

Если таким же образом преобразовать формулу (IV.82), то она примет следующий вид:

$$\lambda = l + (\alpha\sigma - \beta' x \sin \sigma) \sin A_0, \quad (IV.89)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= [33\,523\,299 - (28\,189 - 70 \cos^2 A_0) \cos^2 A_0] \cdot 10^{-10}, \\ \beta' &= (28\,189 - 94 \cos^2 A_0) \cdot 10^{-10}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.90)$$

Здесь σ и l выражены в радианах.

Численное интегрирование уравнений Бесселя

Приближенное вычисление определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

по Гауссу состоит в следующем. В промежутке между предельными значениями аргументов $x=a$ и $x=b$ выбирают n узловых точек по уравнению

$$x_i = a + (b-a) v_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где v_i — некоторое постоянное число меньше единицы, отнесенное к соответствующей узловой точке.

Для каждой узловой точки по аргументу x_i вычисляется значение подынтегральной функции, которое затем умножается на некоторое постоянное число R_i , соответствующее этой узловой точке.

После этого определенный интеграл можно будет вычислить по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n R_i f(x_i), \quad (\text{IV.91})$$

правая часть которой тем ближе к точному значению интеграла, чем больше используется узловых точек.

Значения постоянных величин v_i и R_i зависят от принятого при вычислении числа узловых точек n . Эти значения для n от 1 до 6 приведены в приложении.

Метод численного интегрирования Гаусса отличается от других аналогичных методов, например, трапеций Симпсона, Ньютона — Котеса, Чебышева, тем, что при одинаковом числе узловых точек он дает значительно более точный результат, а для достижения одинаковой точности используется гораздо меньше узловых точек, чем существенно сокращается общий объем вычислений.

Применим метод Гаусса для вычисления определенных интегралов (IV.69) и (IV.70)

$$s = a \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma,$$

$$l = \int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda.$$

Для вычисления этих интегралов численными методами нет необходимости в том, чтобы подынтегральную функцию и переменную интегрирования выразить через один и тот же аргумент. Однако при движении вдоль дуги большого круга переменная интегрирования λ во втором интеграле изменяется неравномерно, что потребует значительно большего числа узловых точек, чем при использовании переменной интегрирования σ , как в первом интеграле.

Поэтому второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$l = \int_{Q_1}^{Q_2} [1 - (1 - \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u})] d\lambda = \lambda \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{e^2 \cos^2 u d\lambda}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}.$$

Если же учесть найденное выше равенство (Б), то получим

$$l = \lambda - e^2 \sin A_0 \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{d\sigma}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}. \quad (\text{IV.92})$$

Эллиптические интегралы в равенствах (IV.69) и (IV.92) в соответствии с формулой (IV.91) представим в таком виде:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \, d\sigma = \sigma \sum_{i=1}^n R_i \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_i},$$

$$\int_{Q_1}^{Q_2} \frac{d\sigma}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} = \sigma \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_i}}.$$

Суммы в правых частях этих равенств обозначим так:

$$E_\sigma = \sum_{i=1}^n R_i \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_i}, \quad (\text{IV.93})$$

$$E_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_i}}. \quad (\text{IV.94})$$

Таким образом, для решения прямой геодезической задачи следует использовать уравнения

$$\sigma = \frac{s}{a E_\sigma}, \quad (\text{IV.95})$$

$$l = \lambda - e^2 \sigma \sin A_0 E_\lambda, \quad (\text{IV.96})$$

а для решения обратной геодезической задачи такие уравнения:

$$s = a \sigma E_\sigma, \quad (\text{IV.97})$$

$$\lambda = l + e^2 \sigma \sin A_0 E_\lambda. \quad (\text{IV.98})$$

Нам осталось выяснить, как найти значения приведенных широт u_i в узловых точках, размещение которых на дуге большого круга рассчитывается по формуле

$$\sigma_i - \sigma_1 = \Delta\sigma_i = \sigma v_i.$$

Формулу для вычисления широты u_i для узловой точки Q_i нетрудно найти из сферического треугольника $Q_1 P Q_i$ (рис. 37)

$$\sin u_i = \sin u_1 \cos(v_i \sigma) + \cos u_1 \sin(v_i \sigma) \cos A_1. \quad (\text{IV.99})$$

Итак, нами получены все соотношения, необходимые для взаимного перехода с эллипсоида на шар при решении главных геодезических задач.

Ниже будут приведены последовательности решения прямой и обратной геодезических задач. Кроме полученных выше зави-

симостей между координатами точек геодезической линии и дуги большого круга при решении этих задач используются формулы сферической тригонометрии для решения прямой и обратной геодезических задач на шаре (см. § 26).

Решение прямой геодезической задачи не вызывает затруднений. Но при решении обратной геодезической задачи возникают трудности, связанные с вычислением разности долгот на шаре λ . В самом деле, из формулы (IV.82) видно, что для вычисления λ , кроме заданной разности долгот $l = L_2 - L_1$, необходимо заранее найти величины σ , σ_1 и $\sin A_0$, которые сами зависят от искомой величины λ .

Это затруднение преодолевается применением метода последовательных приближений, так как для вычисления λ по формуле (IV.82) входящие в нее величины σ , σ_1 и $\sin A_0$ необходимо знать со значительно меньшей точностью, чем требуется от определяемой величины λ .

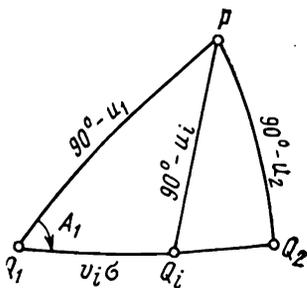


Рис. 37

Последовательность решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя

Исходные величины: широта B_1 , долгота L_1 и азимут A_1 в начальной точке геодезической линии и ее длина s .

Искомые величины: широта B_2 , долгота L_2 и азимут A_2 в конечной точке геодезической линии.

Первый алгоритм

1. Вычисление приведенной широты начальной точки

$$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

$$\sin u_1 = \frac{\sin B_1 \sqrt{1 - e^2}}{W_1}, \quad \cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1},$$

2. Вычисление вспомогательных функций

$$\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1, \quad \operatorname{ctg} \sigma_1 = \frac{\cos u_1 \cos A_1}{\sin u_1},$$

$$\sin 2\sigma_1 = \frac{2 \operatorname{ctg} \sigma_1}{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 + 1}, \quad \cos 2\sigma_1 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 - 1}{\operatorname{ctg}^2 \sigma_1 + 1}.$$

3. Вычисление коэффициентов A , B , C , α и β по формулам (IV.75) и (IV.84) по аргументу $\cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0$.

4. Вычисление сферического расстояния

$$\sigma_0 = [s - (B + C \cos 2\sigma_1) \sin 2\sigma_1] \frac{1}{A},$$

$$\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0) = \sin 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 + \cos 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\cos 2(\sigma_1 + \sigma_0) = \cos 2\sigma_1 \cos 2\sigma_0 - \sin 2\sigma_1 \sin 2\sigma_0,$$

$$\sigma = \sigma_0 + [B + 5C \cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)] \frac{\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0)}{A}.$$

5. Вычисление поправки в разность долгот

$$\lambda - l = \delta = \{\alpha\sigma + \beta[\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0) - \sin 2\sigma_1]\} \sin A_0.$$

6. Вычисление геодезических координат и азимута в конечной точке

$$\sin u_2 = \sin u_1 \cos \sigma + \cos u_1 \cos A_1 \sin \sigma,$$

$$B_2 = \arctg \left[\frac{\sin u_2}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \sin^2 u_2}} \right],$$

$$\lambda = \arctg \left[\frac{\sin A_1 \sin \sigma}{\cos u_1 \cos \sigma - \sin u_1 \sin \sigma \cos A_1} \right],$$

знак $\sin A_1$	+	+	-	-
знак $\operatorname{tg} \lambda$	+	-	-	+
$\lambda =$	$ \lambda $	$180^\circ - \lambda $	$- \lambda $	$ \lambda - 180^\circ$

$$L_2 = L_1 + \lambda - \delta,$$

$$A_2 = \arctg \left[\frac{\cos u_1 \sin A_1}{\cos u_1 \cos \sigma \cos A_1 - \sin u_1 \sin \sigma} \right],$$

знак $\sin A_1$	-	-	+	+
знак $\operatorname{tg} A_2$	+	-	+	-
$A_2 =$	$ A_2 $	$180^\circ - A_2 $	$180^\circ + A_2 $	$360^\circ - A_2 $

$|\lambda|, |A_2|$ — углы в первой четверти.

Второй алгоритм

1. Вычисление приведенной широты начальной точки

$$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

$$\sin u_1 = \frac{\sin B_1 \sqrt{1 - e^2}}{W_1}, \quad \cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1}.$$

2. Вычисление σ последовательными приближениями. В первом приближении $\sigma = \frac{s}{a}$.

$$\sin u_{(i)} = \sin u_1 \cos(v_{(i)}\sigma) + \cos u_1 \sin(v_{(i)}\sigma) \cos A_1,$$

$$\cos^2 u_{(i)} = 1 - \sin^2 u_{(i)},$$

$$E_\sigma = \sum_{(i)=1}^{(n)} R_{(i)} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_{(i)}}.$$

Здесь (i) — номер узловой точки, а не номер приближения

$$\sigma = \frac{s}{aE_\sigma}.$$

3. Вычисление поправки в разность долгот

$$E_\lambda = \sum_{(i)=1}^{(n)} \frac{R_{(i)}}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_{(i)}}},$$

$$\delta = e^2 \cos u_1 \sin A_1 \sigma E_\lambda.$$

Затем применяются формулы первого алгоритма, начиная от вычисления $\sin u_2$ (п. 6) и до конца алгоритма.

Последовательность решения обратной геодезической задачи по способу Бесселя

Исходные величины: широты B_1, B_2 и долготы L_1, L_2 начальной и конечной точек геодезической линии.

Искомые величины: длина геодезической линии s и азимуты A_1 и A_2 в ее начальной и конечной точках.

Первый алгоритм

1. Подготовительные вычисления

$$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}, \quad W_2 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2},$$

$$\sin u_1 = \frac{\sin B_1 \sqrt{1 - e^2}}{W_1}, \quad \sin u_2 = \frac{\sin B_2 \sqrt{1 - e^2}}{W_2},$$

$$\cos u_1 = \frac{\cos B_1}{W_1}, \quad \cos u_2 = \frac{\cos B_2}{W_2},$$

$$l = L_2 - L_1,$$

$$a_1 = \sin u_1 \sin u_2, \quad a_2 = \cos u_1 \cos u_2,$$

$$b_1 = \cos u_1 \sin u_2, \quad b_2 = \sin u_1 \cos u_2.$$

2. Совместное вычисление начального азимута, сферического расстояния и разности долгот последовательными приближениями

$$\lambda = l + \delta.$$

В первом приближении принимают $\delta = 0$.

$$p = \cos u_2 \sin \lambda, \quad q = b_1 - b_2 \cos \lambda,$$

$$A_1 = \arctg \left(\frac{p}{q} \right), \quad (\text{A})$$

Знак p	+	+	-	-
Знак q	+	-	-	+
$A_1 =$	$ A_1 $	$180^\circ - A_1 $	$180^\circ + A_1 $	$360^\circ - A_1 $

$$\sin \sigma = p \sin A_1 + q \cos A_1, \quad \cos \sigma = a_1 + a_2 \cos \lambda, \quad (\text{Б})$$

$$\sigma = \arctg \left(\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma} \right),$$

Знак $\cos \sigma$	+	-
$\sigma =$	$ \sigma $	$180^\circ - \sigma $

$|A_1|$ и $|\sigma|$ — аргументы в первой четверти.

$$\left. \begin{aligned} \sin A_0 &= \cos u_1 \sin A_1, \\ x &= 2a_1 - \cos^2 A_0 \cos \sigma, \\ \delta &= [\alpha \sigma - \beta' x \sin \sigma] \sin A_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В})$$

Коэффициенты α и β' вычисляются по формулам (IV.90).

С полученным значением δ повторяются все вычисления по формулам (А), (Б) и (В) для получения нового значения δ , с которым затем вновь повторяются эти же вычисления. Так продолжается до тех пор, пока новое значение δ не будет отличаться от предыдущего его значения на заданную допустимую величину.

Значения λ , A_1 , σ , x и $\sin A_0$, полученные в последнем приближении, принимаются за окончательные.

3. Вычисление коэффициентов A , B' и C' по формулам (IV.88) и затем длины геодезической линии s

$$y = (\cos^4 A_0 - 2x^2) \cos \sigma,$$

$$s = A\sigma + (B'x + C'y) \sin \sigma.$$

4. Вычисление обратного азимута

$$A_2 = \arctg \left[\frac{\cos u_1 \sin \lambda}{b_1 \cos \lambda - b_2} \right].$$

Квадрант A_2 определяют по тем же признакам, что и ранее вычисленное значение A_1 , полагая, что числителю соответствует величина p , а знаменателю q .

Второй алгоритм

Вначале выполняются все подготовительные вычисления, а также вычисления по формулам (А), (Б) первого алгоритма. Затем вместо формул (В) применяются следующие:

$$\sin u_{(i)} = \sin u_1 \cos (v_{(i)}\sigma) + \cos u_1 \cos A_1 \sin (v_{(i)}\sigma),$$

$$\cos^2 u_{(i)} = 1 - \sin^2 u_{(i)},$$

$$E_\lambda = \sum_{(i)=1}^{(n)} \frac{R_{(i)}}{1 + \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_{(i)}}},$$

$$\delta = e^2 \sigma \cos u_1 \sin A_1 E_\lambda.$$

Окончательное значение величины δ определяется последовательными приближениями так же, как и в первом алгоритме.

В последующих вычислениях функции E_σ используются те значения $\cos^2 u_{(i)}$, которые были найдены в последнем приближении для E_λ .

$$E_\sigma = \sum_{(i)=1}^{(n)} R_{(i)} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_{(i)}},$$

$$s = a\sigma E_\sigma,$$

$$A_2 = \arctg \left[\frac{\cos u_1 \sin \lambda}{b_1 \cos \lambda - b_2} \right].$$

Следует помнить, что во всех приведенных выше формулах (i) — номер узловой точки, а не номер приближения.

Рассмотрим некоторые практические рекомендации относительно применения первого и второго алгоритмов для решения геодезических задач.

При использовании второго алгоритма, когда число узловых точек берется больше 3, возрастает объем вычислений по сравнению с вычислениями по первому алгоритму. В этом случае для вычислений по второму алгоритму более целесообразно использование ЭВМ. Для программирования второй алгоритм несколько проще, чем первый. Первый же алгоритм более удобен для ручного счета. Вместе с тем программирование его также не вызывает затруднений.

Программы для решения прямой и обратной геодезических задач, составленные как по первому, так и по второму алгоритму, будут универсальными, так как могут быть использованы при любых расстояниях между точками на поверхности эллип-

соида и с любой точностью, какая требуется в современной практике. Эти алгоритмы можно использовать и при вычислении координат в триангуляции 1 класса. Наряду с этим для коротких расстояний ($s < 60$ км) в §§ 31 и 32 рекомендуются более простые алгоритмы.

Особенности решения обратной геодезической задачи при предельно больших расстояниях

При решении обратной геодезической задачи по приведенным выше алгоритмам длина геодезической линии определяется как кратчайшее расстояние между двумя точками на эллипсоиде. Это расстояние не может быть больше длины дуги меридиана между северным и южным полюсами эллипсоида или между диаметрально противоположными точками на экваторе. На поверхности эллипсоида Красовского это расстояние равно 20 004 275,00 м.

Между любыми двумя точками на эллипсоиде можно провести две геодезические линии, одна из которых будет кратчайшей. Поэтому, если между двумя точками решить прямую геодезическую задачу, взяв, например, $s = 20\,005\,000$ м, то после решения обратной геодезической задачи по геодезическим координатам этих же двух точек мы получим другое значение s , меньшее, чем было принято при решении прямой геодезической задачи.

На поверхности шара сферическое расстояние достигает наибольшей величины $\sigma = \pi$ в том случае, когда обе точки располагаются на концах диаметра шара. Тогда разность долгот будет $\lambda = \pi$, а широты точек будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. $u_2 = -u_1$.

Но этим условиям удовлетворяет множество дуг больших кругов, проходящих через две заданные точки (концы диаметра шара) под различными азимутами. Поэтому при решении обратной геодезической задачи по способу Бесселя при этих условиях, казалось бы, должна возникнуть неопределенность в установлении азимутов геодезической линии. Это подтверждается также приведенной в алгоритме решения обратной геодезической задачи формулой

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{p}{q},$$

в которой при $\lambda = \pi$ и $u_1 = u_2$ числитель p и знаменатель q будут равны нулю.

Однако эта неопределенность легко разрешается, если обратиться к формуле (IV.82). Положив в ней $\lambda = \sigma = \pi$ и $\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1$, получим

$$\pi - |l| = \alpha \pi \cos u_1 \sin A_1, \quad (\text{IV.100})$$

где $|l|$ — абсолютная величина разности долгот $L_2 - L_1$ составляет величину меньше π .

Отсюда находим

$$\sin A_1 = \frac{\pi - |l|}{\alpha \pi \cos u_1}. \quad (\text{IV.101})$$

Коэффициент α здесь вычисляется по одной из формул (IV.84), в которой с достаточной точностью можно принять

$$\cos^2 A_0 = 1 - \left[\frac{\pi - |l|}{\pi} 298,3 \right]^2. \quad (\text{IV.102})$$

Положительной разности долгот l в равенстве (IV.101) соответствует азимут A_1 в I или II четверти, отрицательной — в III или IV четверти. Следовательно, при рассматриваемых условиях через две точки на эллипсоиде проходят две геодезические линии одинаковой длины с начальными азимутами A_1 и $\pi - A_1$.

Только что рассмотренный случай является предельным и в практике встречается редко. С гораздо большей вероятностью могут встретиться такие случаи, когда широты двух точек не равны, но мало отличаются друг от друга по абсолютной величине, а разность долгот при этом подчиняется неравенству $\pi - |l| < \alpha \pi \cos u_1$.

Здесь, конечно, можно уже использовать приведенные выше алгоритмы решения обратной геодезической задачи, но при этом число итераций может быть очень велико.

С целью уменьшения числа итераций следует предварительно найти приближенный азимут по формуле (IV.101), в которой следует принять $\alpha = \frac{1}{298,3}$, а именно

$$\sin A_1 = \frac{\pi - |l|}{\pi \cos u_1} 298,3. \quad (\text{IV.103})$$

Затем необходимо найти приближенную величину сферического расстояния по формуле

$$\sin \sigma = \frac{\cos u_1 \sin u_2 - \sin u_1 \cos u_2 \cos l}{\cos A_1}. \quad (\text{IV.104})$$

После этого определяется величина δ методом итераций по приведенному выше алгоритму.

Улучшение сходимости приближений при решении обратной геодезической задачи по способу Бесселя

Формулу (IV.82) приведем к такому виду:

$$\delta = \lambda - l = \sin A_0 \sigma \left\{ \alpha + \frac{\beta}{\sigma} [\sin 2(\sigma_1 + \sigma) - \sin 2\sigma_1] \right\}. \quad (\text{IV.105})$$

В этом равенстве
 $\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1.$

Заменим функцию $\sin A_1$ ее выражением

$$\sin A_1 = \frac{\sin \lambda}{\sin \sigma} \cos u_2,$$

полученным по треугольнику Q_1PQ_2 (см. рис. 34).

Кроме того, обозначим

$$k = \left\{ \alpha + \frac{\beta}{\sigma} [\sin 2(\sigma_1 + \sigma) - \sin 2\sigma_1] \right\} \cos u_1 \cos u_2. \quad (\text{IV.106})$$

Если применяется второй алгоритм, то

$$k = e^2 E_\lambda \cos u_1 \cos u_2.$$

Теперь равенство (IV.105) примет такой вид:

$$\delta = \frac{\sin \lambda}{f}, \quad (\text{IV.107})$$

где

$$f = \frac{\sin \sigma}{k\sigma}. \quad (\text{IV.108})$$

Величина k мало чувствительна к изменениям σ , поэтому ее окончательное значение можно найти уже в первом приближении при определении δ .

Займемся преобразованием равенства (IV.107):

$$f\delta = \sin \lambda = \sin(l + \delta) = \sin l \cos \delta + \cos l \sin \delta.$$

Разложив $\sin \delta$ и $\cos \delta$ в ряды, с погрешностью на члены порядка δ^5 получим

$$f\delta = \sin l \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right) + \delta \left(1 - \frac{\delta^2}{6} \right) \cos l,$$

откуда

$$\delta \left(f - \cos l + \frac{\delta^2}{6} \cos l \right) = \sin l \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right)$$

или

$$\delta \left(1 + \frac{\cos l}{f - \cos l} \frac{\delta^2}{6} \right) = \frac{\sin l}{f - \cos l} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right).$$

Разделим обе части равенства на выражение в скобках, стоящее в левой части. Введя обозначение

$$\bar{\delta} = \frac{\sin l}{f - \cos l}, \quad (\text{IV.109})$$

с принятой выше точностью получим окончательно

$$\delta = \bar{\delta} - \frac{\bar{\delta}^3}{6} \left(3 + \frac{\cos l}{f - \cos l} \right). \quad (\text{IV.110})$$

Отброшенные в этом равенстве члены порядка δ^5 вызовут погрешность в вычисленном значении δ менее 10^{-10} (или $0,00002''$) при максимально возможном значении $\delta_{\max}=0,0105317$ (или $36'12,3''$).

Вычисление δ по формулам (IV.106), (IV.108), (IV.109) и (IV.110) почти во всех случаях и при любых расстояниях требует меньшего числа приближений, чем применение для этой же цели формулы (IV.89) или (IV.82). Однако в отдельных случаях, в частности, при вычислении предельно больших расстояний, когда разность долгот l мала, т. е. когда начальный азимут геодезической линии близок к нулю или 180° , применение формулы (IV.110) обязательно, так как применение формулы (IV.82) в этом случае может потребовать весьма большого числа итераций.

Если же начальный азимут близок к 90° или 270° , то, наоборот, применение формулы (IV.82) или (IV.89) обеспечивает более быструю сходимость итераций, чем применение формулы (IV.110).

При выборе той или иной формулы для вычисления δ для больших расстояний ($s < 10\,000$ км) можно руководствоваться приведенными ниже простыми расчетами.

Предварительно на логарифмической линейке вычисляются значения следующих функций:

$$\cos \sigma = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l,$$

$$\sin^2 A_1 = \frac{(\sin l \cos B_2)^2}{1 - \cos^2 \sigma}.$$

Если функция $\cos \sigma$ положительна или равна нулю, то применяют формулу (IV.110).

Если функция $\cos \sigma$ отрицательна, то при условии $0 < \sin^2 A_1 < 0,5$ применяют формулу (IV.110), при условии $0,5 \leq \sin^2 A_1 \leq 1$ (IV.82) или (IV.89).

Заключительные замечания к способу Бесселя

Формулы Бесселя для решения прямой геодезической задачи впервые были опубликованы в 1825 г. и имеют следующий вид:

$$\sigma = \frac{\alpha}{b} s + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \dots,$$

$$l = \lambda - \frac{e^2 \sin m}{\sqrt{1 - 0,75e^2}} [\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \dots],$$

где в наших обозначениях $M = \sigma_1$ и $m = A_0$.

Для логарифмических вычислений Бесселем были составлены таблицы, из которых логарифмы коэффициентов α , β , γ , α' , β' выбираются по аргументам $\lg k$ и $\lg k'$, являющимся функциями эксцентриситета и $\cos^2 m$.

Со времени опубликования способа Бесселя решению прямой геодезической задачи, основанной на интегрировании двух его дифференциальных уравнений, посвящено много работ как в СССР, так и за рубежом. Каждый автор по-своему использует три основных условия Бесселя, в результате чего появились, на первый взгляд, оригинальные, а по существу уже известные формулы Бесселя, но с другими обозначениями и несущественной перегруппировкой членов.

Наиболее оригинальными модификациями способа Бесселя являются новые способы интегрирования дифференциальных уравнений (IV.68). В качестве примера рассмотрим один из них, предложенный в 1950 г. французскими геодезистами Ж. Леваллуа и М. Дюпюи.

В равенстве (IV.72) подинтегральную функцию представим в виде ряда

$$s = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \sigma - \frac{k^4}{8} \sin^4 \sigma + \frac{k^6}{16} \sin^6 \sigma - \dots \right) d\sigma.$$

Неопределенный интеграл каждого члена этого ряда можно найти по рекуррентной формуле*

$$\int \sin^n \sigma d\sigma = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} \sigma d\sigma - \frac{1}{n} \sin^{n-1} \sigma \cos \sigma.$$

После интегрирования получается формула для вычисления длины геодезической линии от экватора до любой точки этой линии в таком виде:

$$s = b (\sigma + k^2 J_2 - k^4 J_4 + k^6 J_6 - \dots),$$

где

$$J_2 = \frac{1}{4} (\sigma - \sin \sigma \cos \sigma),$$

$$J_4 = \frac{1}{64} (3\sigma - 3 \sin \sigma \cos \sigma - 2 \sin^3 \sigma \cos \sigma),$$

$$J_6 = \frac{1}{768} (15\sigma - 15 \sin \sigma \cos \sigma - 10 \sin^3 \sigma \cos \sigma - 8 \sin^5 \sigma \cos \sigma).$$

Для вычисления разности долгот получено аналогичное выражение:

$$l = \lambda - \sin m (B_0 \sigma - B_2 J_2 \cos^2 m + B_4 J_4 \cos^4 m - \dots),$$

где B_0, B_2, B_4, \dots являются функциями только эксцентриситета

* Эту формулу в геодезической литературе иногда ошибочно называют интегралом Валлиса. В математике формулой Валлиса (Wallis) называется выражение, устанавливающее связь между числом π и целыми числами. Для получения формулы Валлиса используется приведенная выше рекуррентная формула, но непосредственно с последней в математике имя Валлиса не связывают.

**Решение прямой геодезической задачи по способу Бесселя
(первый алгоритм)**

B_1	45°	A	6 362 236,927
L_1	0°	B	2686,386
A_1	265°	C	0,570
s	19 500 000,00 м	α	691,17609
W_1	0,998 325 242	β	0,1457
$\sin u_1$	0,705 918 568	σ_0	3,065 033 007
$\cos u_1$	0,708 293 000	$\sin 2(\sigma_1 + \sigma_0)$	-0,021 333
$\sin A_1$	-0,996 194 698	$\cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)$	-0,999 772
$\cos A_1$	-0,087 155 743	σ	3,065 024 008
$\sin A_0$	-0,705 597 731	δ	-1494,8042"
$\cos^2 A_0$	0,502 1318	$\sin \sigma$	0,076 493 850
$\operatorname{ctg} \sigma_1$	-0,087 448 9006	$\cos \sigma$	-0,997 070 053
$\sin 2\sigma_1$	-0,173 570 454	λ	-173°48'01,6753"
$\cos 2\sigma_1$	-0,984 821 455	B_2	-45°12'54,2680"
		L_2	-173°23'06,8711"
		A_2	90°36'47,711"

Таблица 11

**Решение обратной геодезической задачи по способу Бесселя
(первый алгоритм)**

Исходные данные: $B_1 = 45^\circ$; $B_2 = -45^\circ 12' 54,2680''$; $l = 173^\circ 23' 06,8711''$

$\sin u_1$	0,705 918 568	a_1	-0,500 194 391
$\cos u_1$	0,708 293 000	a_2	0,499 798 563
$\sin u_2$	-0,708 572 367	b_1	-0,501 876 848
$\cos u_2$	0,705 638 151	b_2	0,498 123 073

Вычисляемые величины	Приближения			
	1	2	3	4
$\sin \lambda$	-0,115 193 016	-0,108 002 976	-0,107 991 300	-0,107 991 281
$\cos \lambda$	-0,993 343 128	-0,994 150 571	-0,994 151 839	-0,994 151 841
p	-0,081 284 586	-0,076 211 020	-0,076 202 781	-0,076 202 7678
q	-0,007 069 717	-0,006 667 510	-0,006 666 87887	-0,006 666 87786
A_1	265°01'45,175"	265°00'00,242"	265°00'00,002"	265°00'00,001"
$\sin A_1$	-0,996 239 010	-0,996 194 800	-0,996 194 699	-0,996 194 699
$\cos A_1$	-0,086 647 767	-0,087 154 578	-0,087 155 735	-0,087 155 737
$\sin \sigma$	0,081 591 451	0,076 502 126	0,076 493 863	0,076 493 850
$\cos \sigma$	-0,996 665 859	-0,997 069 418	-0,997 070 052	-0,997 070 052
σ	3,059 910 402	3,065 015 707	3,065 023 995	3,065 024 008
$\sin A_0$	-0,705 629 117	-0,705 597 803	-0,705 597 732	-0,705 597 732
x	-0,499 975 3	-0,499 728 6	-0,499 728 2	-0,499 728 2
α	0,003 350 916	0,003 350 916	0,003 350 916	0,003 350 916
β'	0,000 002 814	0,000 002 814	0,000 002 814	0,000 002 814
δ	-1492,3777"	-1494,8002"	-1494,8041"	-1494,8041"
A	6 362 236,926		y	0,247
B'	10 699,922		s	19 499 999,99 м
C'	4,487		A_2	90°36'47,710"

Так как непосредственное вычисление функций J_2, J_4, J_6 довольно затруднительно, то для них обычно составляют специальные таблицы коэффициентов. Такого рода таблицы, в частности, помещены в книге Вл. К. Христова и М. Даскаловой «Таблицы для вычисления на счетных машинах прямой и обратной задач по географическим координатам при больших расстояниях на поверхности эллипсоида Ф. Н. Красовского для всех широт» (Труды Центральной геодезической лаборатории Болгарской академии наук, № 10, София, 1963, текст на болгарском языке).

§ 29. КРАТКИЙ ОБЗОР ДРУГИХ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА БОЛЬШИЕ РАССТОЯНИЯ

В § 28 мы познакомились пока с одним из возможных способов решения главных геодезических задач — со способом Бесселя и его модификациями.

Способ Бесселя по строгости решения и логической стройности не имеет себе равных. Он может применяться при любых расстояниях между точками на эллипсоиде и с любой практически необходимой точностью. Для решения прямой геодезической задачи при любых больших расстояниях способ Бесселя следует считать наилучшим. При решении обратной геодезической задачи по способу Бесселя существенно увеличивается объем вычислений вследствие необходимости выполнения последовательных приближений.

Последнее обстоятельство вынуждает обратить внимание на другие способы решения обратной геодезической задачи. Объясняется это тем, что в последнее время для вычисления расстояния и направления между двумя точками земной поверхности в самых разнообразных технических применениях практика потребовала разработать такие способы и алгоритмы, которые были бы более экономичны как с точки зрения затрат машинного времени при вычислениях на ЭВМ, так и с точки зрения минимальной загрузки оперативной памяти ЭВМ. Кроме того, в технических применениях не требуется высокой точности определяемых величин: при определении расстояния в большинстве случаев допускается погрешность в несколько метров или даже в несколько десятков метров. Следовательно, в вычислениях можно ограничиться семью значащими цифрами.

Ниже будут рассмотрены без подробных выводов формул некоторые способы решения обратной геодезической задачи, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям.

1. *Решение обратной геодезической задачи по второму способу геодезического изображения.*

В этом способе, как и в способе Бесселя, геодезическая линия изображается дугой большого круга, поэтому его можно назвать вторым способом геодезического изображения в отличие

от первого способа геодезического изображения, которым является способ Бесселя.

Кроме того, в этом способе, как и в способе Бесселя, азимуты геодезической линии и дуги большого круга в соответствующих точках равны, т. е. $\alpha = A$. Но для определения постоянной интегрирования C в уравнении (IV.67) изменено дополнительное условие. Постоянная C в этом уравнении предварительно заменена произведением двух новых постоянных β и R , а именно

$$\beta R \cos \varphi = N \cos B. \quad (\text{IV.111})$$

Затем введен в качестве вспомогательной функции масштаб изображения геодезической линии, который определяется следующими выражениями:

$$m = \frac{R d\sigma}{ds} = \frac{R \operatorname{tg} B}{N \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin B}{\beta \sin \varphi}, \quad (\text{IV.112})$$

получаемыми из уравнения (IV.62) с учетом равенств $\alpha = A$ и (IV.111).

Для определения постоянных β и R поставлены следующие дополнительные условия: в средней точке геодезической линии масштаб должен равняться единице, а его производная по широте — нулю.

Применив эти условия к функции (IV.112), найдем

$$R = \sqrt{M_m N_m} = \frac{c}{V_m^2},$$

$$\beta = \sqrt{1 + \eta_m^2 \cos^2 B_m},$$

где

$$B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2).$$

Для определения сферического расстояния и разности долгот на шаре в соответствии с равенствами (IV.112) и (IV.66) необходимо найти интегралы

$$\sigma = \frac{1}{R} \int_{Q_1}^{Q_2} m ds,$$

$$\lambda = \beta \int_{Q_1}^{Q_2} m dL.$$

Для вычисления этих интегралов подынтегральную функцию m представляют в виде ряда по степеням разности широт $B_2 - B_1$. Затем выполняют численное интегрирование по формуле Симпсона, разделив интервал интегрирования всего на две части. Коэффициенты рядов вычисляют для средней широты

B_m . С учетом поставленных выше двух дополнительных условий для масштаба изображения, пренебрегая членами пятого порядка относительно разности широт, получим следующие окончательные выражения для интегралов:

$$\sigma = \frac{s}{R} [1 - t(B_2 - B_1)^2], \quad (IV.113)$$

$$\lambda = \beta(L_2 - L_1) [1 - t(B_2 - B_1)^2], \quad (IV.114)$$

где

$$t = \frac{\eta_m^2}{6V_m^2}. \quad (IV.115)$$

Рассматриваемый здесь способ геодезического изображения отличается от способа Бесселя не только тем, что для вычисления широты на шаре взято иное значение постоянной интегрирования. Главное отличие этих способов друг от друга состоит в разных методах интегрирования двух дифференциальных уравнений $\frac{dL}{d\lambda} = f_2$ и $\frac{ds}{d\sigma} = f_4$ из системы (IV.60).

В способе Бесселя подынтегральные функции были разложены в ряды по степеням эксцентриситета. Поэтому в результате почленного интегрирования этих рядов точность окончательных выражений для вычисления s и l остается одинаковой при любых расстояниях.

В рассматриваемом здесь способе подынтегральные выражения представлены в виде рядов по степеням разности широт конечных точек геодезической линии. Отброшенные члены пятого порядка относительно расстояния в формулах (IV.113) и (IV.114) определяют точность решения обратной геодезической задачи данным способом. Поэтому с увеличением расстояния точность решения резко снижается.

Так, например, при $s = 700$ км погрешность определения расстояния не превышает 0,003 м. Но при $s = 3000$ км эта погрешность достигает уже 3 м.

Достоинства этого способа состоят в том, что, во-первых, азимут геодезической линии получается сразу после решения обратной геодезической задачи на шаре, во-вторых, при использовании этого способа не возникает необходимости в последовательных приближениях.

Существуют и другие способы перехода с эллипсоида на шар, которые могут применяться для решения обратной геодезической задачи с погрешностью в определяемом расстоянии также на величины пятого порядка относительно расстояния.

Наиболее известны из них следующие: 1) конформное изображение эллипсоида на шаре по К. Ф. Гауссу (1844 г.), 2) равнопромежуточное по меридианам изображение эллипсоида на шаре по В. И. Бауману (1899 г.) и 3) равновеликое изображение эллипсоида на шаре по И. Фришауфу (1913 г.).

Общим свойством всех трех способов является то, что дуге большого круга на шаре соответствует на эллипсоиде не геодезическая, а другая весьма близкая к ней по длине линия. В этих способах очень просто вычисляются длина линии s и разность долгот λ по таким формулам:

$$s = R\sigma, \quad \lambda = \beta(L_2 - L_1).$$

Такое упрощение выражений для получения s и λ оказалось возможным благодаря принятию третьего дополнительного условия, согласно которому вторая производная масштаба по широте в средней точке геодезической линии равна нулю.

Однако за счет такого упрощения не только усложнилось вычисление широт φ_1 и φ_2 на шаре, но и возникла необходимость в определении поправки в сферический азимут α для получения азимута A геодезической линии. Формула для вычисления этой поправки также имеет сложный вид.

Поэтому для определения сферических широт и поправок в азимуты на практике составляют специальные таблицы, имеющие довольно большой объем.

Для вычислений на счетных машинах, особенно если есть возможность на них вычислять тригонометрические функции и извлекать квадратный корень, для решения обратной геодезической задачи с высокой точностью, когда расстояния не превышают 3000 км, наиболее удобным будет описанный выше второй способ геодезического изображения.

Последовательность решения обратной геодезической задачи этим способом будет такой.

1. Вычисление коэффициентов по аргументу $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$:

$$\eta_m^2 = e'^2 \cos^2 B_m, \quad \beta = \sqrt{1 + \eta_m^2 \cos^2 B_m},$$

$$R = \frac{c}{1 + \eta_m^2}, \quad t = \frac{\eta_m^2}{6(1 + \eta_m^2)}, \quad h = \frac{1 + \eta_m^2}{\beta}.$$

2. Вычисление широт и разности долгот на шаре

$$\cos \varphi_1 = \frac{h \cos B_1}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}}, \quad \sin \varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{h \cos B_2}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_2}}, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2},$$

$$\lambda = \beta(L_2 - L_1) [1 - t(B_2 - B_1)^2].$$

3. Решение обратной геодезической задачи на шаре

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\sin \lambda \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda} = \frac{p}{q},$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{p \sin A_1 + q \cos A_1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda}.$$

4. Вычисление длины геодезической линии

$$s = R\sigma[1 + t(B_2 - B_1)^2].$$

Здесь величины $(B_2 - B_1)$ и σ выражены в радианах.

Этот способ можно использовать также и для решения прямой геодезической задачи, но методом последовательных приближений, так как для определения сферического расстояния по формуле (IV.113) должна быть известна широта B_2 . Вычисления становятся довольно сложными, поэтому применять этот способ для решения прямой геодезической задачи нецелесообразно.

Примеры решения обратной геодезической задачи по второму способу геодезического изображения приведены в табл. 12 и 13.

Таблица 12

B_1	45°	$\cos \varphi_1$	0,707 477 204
B_2	52°59'55,547"	$\sin \varphi_1$	0,706 736 164
l	9°59'53,883"	$\cos \varphi_2$	0,574 224 402
B_m	49°59'57,774"	$\sin \varphi_2$	0,818 697 952
$B_2 - B_1$	0,174 511	λ	0,174 601 156
R	6 381 929,9	p	0,099 751 605
β	1,000 575 045	q	0,179 555 192
t	0,000 462 756	A_1	29°03'15,452"
h	1,002 207 953	s	1 320 284,3 м

Точные значения: $A_1 = 45^\circ 56' 05,25''$; $s = 3\,013\,976,7$ м.

Таблица 13

B_1	41°24'59,30"	$\cos \varphi_1$	0,750 227 199
B_2	55°45'20,20"	$\sin \varphi_1$	0,661 180 119
l	35°26'42,00"	$\cos \varphi_2$	0,563 418 692
B_m	48°35'09,75"	$\sin \varphi_2$	0,826 171 518
$B_2 - B_1$	0,250 265	λ	0,619 011 918
R	6 380 884,2	p	0,326 912 821
β	1,000 644 911	q	0,316 415 614
t	0,000 489 990	A_1	45°56'05,33"
h	1,002 302 214	s	3 013 975,8 м

Точные значения: $A_1 = 45^\circ 56' 05,25''$; $s = 3\,013\,976,7$ м.

2. Решение геодезических задач вдоль центрального сечения.

Из центра эллипсоида опишем сферу произвольного радиуса и на нее спроектируем поверхность эллипсоида лучами, проведенными из центра сферы.

Такое взаимно однозначное точечное соответствие называется центральной перспективой или геоцентрическим изображением эллипсоида на шаре.

При этом изображении между координатами соответствующих точек поверхностей эллипсоида и шара существуют следующие зависимости:

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B, \quad \lambda = L, \quad (\text{IV.116})$$

где $\varphi = \Phi$ — геоцентрическая широта.

Плоскость, проходящую через центр эллипсоида, назовем центральной плоскостью. Очевидно, плоскости меридианов и экватора являются центральными плоскостями.

След пересечения поверхности эллипсоида какой-либо центральной плоскостью представляет собой кривую линию — эллипс, которая называется геоцентрическим или центральным сечением. Перспективным изображением центрального сечения эллипсоида является дуга большого круга, лежащая в центральной плоскости.

Применительно к геоцентрическому изображению дифференциальные уравнения (IV.61) и (IV.62) напишем в таком виде:

$$\frac{ds}{d\sigma} = M \frac{\cos \alpha}{\cos A} \frac{dB}{d\varphi} = N \frac{\cos B \sin \alpha}{\cos \varphi \sin A}, \quad (\text{IV.117})$$

откуда

$$\operatorname{tg} A = V^2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos B}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dB}.$$

Из первого уравнения (IV.116) найдем

$$\frac{d\varphi}{dB} = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 B} (1 - e^2) = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin B \cos B}.$$

После подстановки значения этой производной в предыдущее равенство получим

$$\operatorname{tg} A = \frac{V^2}{\sin B} \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi.$$

По четвертому равенству из (IV.1) $\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi = \operatorname{tg} \lambda$. Поэтому

$$\operatorname{tg} A = \frac{V^2}{\sin B} \operatorname{tg} L.$$

В этом выражении исключены элементы дуги большого круга, т. е. φ , α и σ . Очевидно, точно такое же выражение можно получить и тогда, когда в первом уравнении (IV.116) множитель $1 - e^2$ будет заменен любой другой постоянной величиной.

Для каждой выбранной постоянной величины широта φ и величины σ и α , найденные из решения обратной геодезической задачи на шаре, будут иметь свои значения, но дуге большого круга всякий раз будет соответствовать одно и то же центральное сечение на эллипсоиде.

Исходя из этого, для вычисления длины и азимута центрального сечения выберем такое изображение, для которого сущест-

вуют наиболее простые зависимости между координатами соответствующих точек на шаре и на эллипсоиде, а именно:

$$\varphi = B, \quad \lambda = L. \quad (\text{IV.118})$$

Этими равенствами устанавливается так называемое сферическое изображение эллипсоида на шаре или соответствие по нормальям, так как равенства координат по (IV.118) могут существовать лишь в том случае, если нормали к поверхностям эллипсоида и шара в соответствующих точках параллельны (это условие сферического изображения любой поверхности по Гауссу) и если, кроме того, параллельны друг другу оси вращения этих поверхностей.

Для определения длины s и азимута A центрального сечения из уравнений (IV.117) с учетом равенства $\varphi = B$ напомним

$$\frac{ds}{d\sigma} = M \frac{\cos \alpha}{\cos A} = N \frac{\sin \alpha}{\sin A}, \quad (\text{IV.119})$$

откуда

$$\operatorname{tg} A = V^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{IV.120})$$

В первом равенстве (IV.119) отношение косинусов азимутов выразим в функции широты B . Для этого из равенства (IV.120) найдем

$$1 + \operatorname{tg}^2 A = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + (V^4 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

откуда

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 A} = 1 + (2\eta^2 + \eta^4) \sin^2 \alpha.$$

Таким образом, из (IV.119) найдем

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{a(1 - e^2) \left[1 + \left(\frac{2e^2}{1 - e^2} \cos^2 B + \frac{e^4}{(1 - e^2)^2} \cos^4 B \right) \sin^2 \alpha \right]^{1/2}}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}.$$

Используя соотношения

$$\cos B \sin \alpha = \sin \alpha_0,$$

$$\sin B = \cos \alpha_0 \sin \sigma,$$

относящиеся к дуге большого круга при сферическом изображении, получаем

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{a [1 - (2 - e^2) e^2 \cos^2 \alpha_0 - e^4 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma]^{1/2}}{(1 - e^2 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)^{3/2}}.$$

Правую часть этого равенства разложим в ряд, ограничиваясь членами порядка e^4 . Затем заменим степенные функции σ

функциями кратного аргумента и проинтегрируем полученное выражение. В результате получим

$$s_i = A\sigma_i - B \sin 2\sigma_i + C \sin 2\sigma_i \cos 2\sigma_i - \dots, \quad (\text{IV.121})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= a \left[1 - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{4} \right) \cos^2 \alpha_0 - \frac{19}{64} e^4 \cos^4 \alpha_0 \right], \\ B &= a \left[\left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{e^4}{8} \right) \cos^2 \alpha_0 + \frac{7}{32} e^4 \cos^4 \alpha_0 \right], \\ C &= \frac{15}{128} a e^4 \cos^4 \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.122})$$

Для эллипсоида Красовского значения коэффициентов определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} A &= 6\,378\,245,0 - (10\,601,6 + 84,8 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \alpha_0, \\ B &= (15\,973,9 + 62,5 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \alpha_0, \\ C &= (33,5 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.123})$$

По формуле (IV.121) вычисляется длина центрального сечения от экватора до произвольной точки i этой линии. Для вычисления длины линии между двумя заданными точками образуем разность $s_2 - s_1 = s$:

$$s = A\sigma + \sin 2\sigma_1 (B - C \cos 2\sigma_1) - \sin 2\sigma_2 (B - C \cos 2\sigma_2). \quad (\text{IV.124})$$

Приведя это равенство к виду, аналогичному равенству (IV.87), получим

$$s = A\sigma + (B'x - C'y) \sin \sigma, \quad (\text{IV.125})$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= 6\,378\,245,0 - (10\,601,6 + 84,8 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \alpha_0, \\ B' &= 31\,947,8 + 125,0 \cos^2 \alpha_0, \\ C' &= 67,0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.126})$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sin B_1 \sin B_2 - \cos^2 \alpha_0 \cos \sigma, \\ y &= (\cos^4 \alpha_0 - 2x^2) \cos \sigma, \\ \sin \alpha_0 &= \cos B_1 \sin \alpha_1, \\ \cos^2 \alpha_0 &= 1 - \sin^2 \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.127})$$

Последовательность действий по определению длины центрального сечения и его начального азимута будет следующей:

1. Решение обратной геодезической задачи на шаре

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\cos B_2 \sin l}{\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l} = \frac{p}{q}, \\ \sin \sigma &= p \sin \alpha_1 + q \cos \alpha_1, \\ \cos \sigma &= \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.128})$$

2. Вычисление длины линии по формулам (IV.125)—(IV.127).

3. Вычисление азимута в начальной точке по формуле (IV.120)

$$\operatorname{tg} A_1 = (1 + e'^2 \cos^2 B_1) \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (\text{IV.129})$$

Теперь рассмотрим последовательность решения прямой геодезической задачи, в которой в число заданных величин, кроме широты и долготы начальной точки, входят длина центрального сечения s и ее азимут A_1 .

1. Вычисление азимута дуги большого круга

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} A_1}{1 + e'^2 \cos^2 B_1}. \quad (\text{IV.130})$$

2. Вычислением вспомогательных величин α_0 и σ_1

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \cos B_1 \sin \alpha_1, \\ \operatorname{ctg} \sigma_1 &= \frac{\cos B_1 \cos \alpha_1}{\sin B_1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.131})$$

3. Вычисление коэффициентов по формуле (IV.123).

4. Вычисление сферического расстояния

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{A} [s - (B - C \cos 2\sigma_1) \sin 2\sigma_1], \\ \sigma &= \sigma_0 + \frac{1}{A} [B + 1, 4C \cos 2(\sigma_1 + \sigma_0)] \sin 2(\sigma_1 + \sigma_0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.132})$$

Эти формулы получены таким же способом, как и формулы (IV.78) и (IV.80) в способе Бесселя, но по равенству (IV.121).

5. Вычисление геодезических координат конечной точки

$$\left. \begin{aligned} \sin B_2 &= \sin B_1 \cos \sigma + \cos B_1 \sin \sigma \cos \alpha_1, \\ \operatorname{tg} l &= \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos B_1 \cos \sigma - \sin B_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.133})$$

Способ сферического изображения можно использовать также и для вычисления длины геодезической линии, если из длины линии, найденной по формуле (IV.124) или (IV.125), вычесть поправку Δs , определяемую таким равенством (см. [16]):

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= \frac{ae^4}{16} \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \left[\sigma + \frac{1}{2} (\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) - \right. \\ &\left. - \frac{2\sigma^2}{\sin \sigma} \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.134})$$

С учетом обозначений (IV.127) это выражение можно представить в таком виде:

$$\Delta s = \frac{ae^4}{16} \sin^2 \alpha_0 \left[\sigma \cos^2 \alpha_0 - x \sin \sigma - \frac{2\sigma^2}{\sin \sigma} (\sin B_1 \sin B_2 - x) \right]. \quad (\text{IV.135})$$

После введения этой поправки в (IV.125) получим следующую формулу для вычисления длины геодезической линии:

$$s = P\sigma + (Qx - 67,0y) \sin \sigma + 35,7z \frac{\sigma^2}{\sin \sigma}, \quad (\text{IV.136})$$

где

$$\left. \begin{aligned} P &= 6\,378\,245,0 - (10\,619,4 + 66,9 \cos^2 \alpha_0) \cos^2 \alpha_0, \\ Q &= 31\,965,7 + 107,1 \cos^2 \alpha_0, \\ z &= (\sin B_1 \sin B_2 - x) (1 - \cos^2 \alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.137})$$

Другие вспомогательные величины вычисляются по формулам (IV.127).

Погрешность в длине геодезической линии, вычисленной по этой формуле, составляет величину менее 0,5 м при любых больших расстояниях до 20 000 км.

Формула (IV.136) широко применяется при вычислении различного вида засечек на поверхности эллипсоида, которые рассматриваются в § 30.

Азимут геодезической линии в ее начальной точке с погрешностью порядка 1—2" при любых больших расстояниях можно найти по такой формуле:

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\cos B_2 \sin \lambda \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}}{\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos \lambda}, \quad (\text{IV.138})$$

где

$$\lambda = l + \frac{\sigma \sin \alpha_0}{298,3}.$$

Если расстояние меньше 15 000 км, то можно применить такую формулу:

$$A_1 = \alpha_1 + 690,3'' \sin \alpha_0 \left[\cos B_1 \cos \alpha_1 + (\sin B_2 \cos \sigma - \sin B_1) \frac{\sigma}{\sin^2 \sigma} \right].$$

Пример решения обратной геодезической задачи по способу сферического изображения эллипсоида на шаре по формулам (IV.127), (IV.128), (IV.136), (IV.137) и (IV.138) приведен в табл. 14.

**Решение обратной геодезической задачи по способу сферического
изображения эллипсоида на шаре**

B_1	45°	σ	3,060 047 50
B_2	-45°12'54,268"	$\sin \alpha_0$	-0,704 438 45
$L_2 - L_1 = l$	-173°23'06,871"	$\cos^2 \alpha_0$	0,503 766
$\sin l$	-0,115 193 02	P	6 372 878,3
$\cos l$	-0,993 343 13	Q	32 019,7
$\sin B_1$	0,707 106 78	x	-0,501 654
$\cos B_1$	0,707 106 78	y	0,2487
$\sin B_2$	-0,709 756 10	z	-0,000 219
$\cos B_2$	0,704 447 50	s	19 500 000,1 м
p	-0,081 147 435	V_1	1,001 683 2
q	-0,007 069 664	$\lambda - l$	-1490,5"
α_1	265°01'15,2"	$\sin \lambda$	-0,108 011 9
$\sin \alpha_1$	-0,996 226 41	$\cos \lambda$	-0,994 149 6
$\cos \alpha_1$	-0,086 792 48	A_1	265°00'00,4"
$\sin \sigma$	0,081 454 811		
$\cos \sigma$	-0,996 677 04		

3. Решение геодезических задач вдоль нормального сечения

Для решения геодезических задач мы будем использовать только прямое нормальное сечение, когда плоскость сечения проходит через нормаль к поверхности эллипсоида в начальной точке Q_1 с координатами B_1 и L_1 и имеет в этой точке геодезический азимут A_1 .

Длина нормального сечения короче длины центрального сечения на величину Δs , определяемую равенством (см. [16])

$$\Delta s = \frac{ae^4}{2} (\cos B_1 \sin \alpha_1)^2 \sin B_1 (a' \sin B_1 + b' \cos B_1 \cos \alpha_1), \quad (\text{IV.139})$$

где

$$a' = 2\sigma - \sin \sigma \left(1 + \frac{2}{1 + \cos \sigma} \right),$$

$$b' = \left(\frac{\sigma}{\sin \sigma} - 1 \right) (1 - \cos \sigma),$$

$$\frac{ae^4}{2} = 142,9 \text{ м.}$$

Здесь α_1 и σ вычислены по формулам (IV.128).

О величине поправки Δs можно судить по таким данным. При $B_1 = 45^\circ$, $\alpha_1 = 45^\circ$ и для различных расстояний, выраженных в градусной мере, поправка Δs имеет следующие значения:

σ°	30	60	90	120	150	170
$\Delta s, \text{ м}$	0,3	2,6	9,7	24,3	51,1	97,9

Для определения геодезического азимута нормального сечения применяется точная формула

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \frac{e^2 \cos B_1}{\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l} \left(\frac{W_2^2}{W_1^2} \sin B_1 - \sin B_2 \right)}, \quad (\text{IV.140})$$

в которой $\operatorname{tg} \alpha_1$ вычисляют по первой формуле (IV.128).

Формула (IV.140) получена известным русским ученым геодезистом Ф. А. Слудским [19] в 1865 г. и представляет собой основное уравнение разработанной им теории триангуляции без базиса. С погрешностью на величины порядка e^6 формулу (IV.140) представим в следующем виде:

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{p}{q + \delta}, \quad (\text{IV.141})$$

где

$$\delta = e^2 \cos B_1 (\sin B_1 - \sin B_2) \left(1 + e^2 \sin B_1 \frac{\sin B_1 + \sin B_2}{2} \right), \quad (\text{IV.142})$$

а через p и q обозначены числитель и знаменатель в выражении (IV.128) для $\operatorname{tg} \alpha_1$.

Решение обратной геодезической задачи, т. е. определение длины дуги нормального сечения и его азимута в начальной точке, выполняется в следующей последовательности.

Вначале решают обратную геодезическую задачу на шаре по формулам (IV.128). Затем вычисляют длину центрального сечения и вспомогательные величины по формулам (IV.125) — (IV.127). Поправку Δs , найденную по формуле (IV.139), вычитают из вычисленной длины дуги центрального сечения. Наконец, азимут нормального сечения вычисляют по формуле (IV.141).

Прямая геодезическая задача по нормальному сечению может быть решена только приближениями, так как для перехода от заданного азимута A_1 к сферическому α_1 необходимо знать широту B_2 конечной точки, как это видно из равенства (IV.140).

В первом приближении принимают $\alpha_1 = A_1$, $\sigma = \frac{s}{a}$, с которыми вычисляют

$$\left. \begin{aligned} \sin B_2 &= \sin B_1 \cos \sigma + \cos B_1 \sin \sigma \cos \alpha_1, \\ q &= \sin \sigma \cos \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.143})$$

Затем находят δ по (IV.142) и азимут α_1 по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} A_1 \left(1 + \frac{\delta}{q} \right). \quad (\text{IV.144})$$

Вычислив поправку Δs по (IV.139), прибавляют ее к заданной длине нормального сечения, чтобы найти длину централь-

ного сечения. Используя эту длину, а также азимут α_1 , вычисляют сферическое расстояние σ по формулам (IV.131) и (IV.132).

После этого повторяют все вычисления, начиная с формул (IV.143). Решение задачи завершается определением B_2 и l по формулам (IV.133).

Ниже на числовом примере показана последовательность вычислений при определении длин геодезической линии, центрального сечения и нормального сечения и их азимутов.

1. Решение обратной геодезической задачи на шаре по формулам (IV.128) и вычисление вспомогательных величин по формулам (IV.127) (табл. 15).

Таблица 15

B_1	60°07'00,000"	p	0,662 985 817
B_2	—48°18'21,750"	q	—0,325 534 698
$L_2 - L_1 = l$	94°37'29,731"	α_1	116°09'05,909"
$\sin l$	0,996 743 895	$\sin \alpha_1$	0,897 630 688
$\cos l$	—0,080 632 544	$\cos \alpha_1$	—0,440 748 395
$\sin B_1$	0,867 041 716	$\sin \sigma$	0,738 595 311
$\cos B_1$	0,498 235 549	$\cos \sigma$	—0,674 149 068
$\sin B_2$	—0,746 708 324	σ	2,310 608 328
$\cos B_2$	0,665 151 620	x	—0,755 546
		y	0,3382
		$\sin^2 \alpha_0$	0,200 016

2. Вычисление длины и азимута геодезической линии по формулам (IV.136) и (IV.138)

$$s = 14\,700\,000,4 \text{ м}; \quad A_1 = 116^\circ 00' 01,5''.$$

Точные значения:

$$s = 14\,700\,000,00 \text{ м}; \quad A_1 = 116^\circ 00' 00,000''.$$

3. Вычисление длины и азимута центрального сечения по формулам (IV.125) и (IV.129)

$$s = 14\,700\,003,3 \text{ м}; \quad A_1 = 116^\circ 06' 49,588''.$$

4. Вычисление длины и азимута нормального сечения по формулам (IV.139) и (IV.141)

$$\Delta s = -33,4 \text{ м}; \quad \delta = 0,005\,383\,575;$$

$$s = 14\,700\,036,7 \text{ м}; \quad A_1 = 115^\circ 46' 32,033''.$$

Как видно, в данном случае центральное сечение располагается южнее геодезической линии, а нормальное сечение — севернее.

§ 30. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ С ПОМОЩЬЮ ЗАСЕЧЕК

Основной целью всех видов геодезических засечек является определение геодезических координат одного или нескольких пунктов по известным координатам исходных пунктов или точек, а также по заданным или измеренным на поверхности эллипсоида линейным и угловым величинам, связывающим исходные пункты с определяемыми.

Решение любой засечки сводится к определению расстояния и направления от одного из исходных пунктов до определяемого, чтобы затем решить прямую геодезическую задачу.

Мы ограничимся рассмотрением только трех основных видов прямых засечек: угловой (азимутальной), линейной и гиперболической (разностно-дальномерной). Все другие виды засечек — обратные, комбинированные и т. п. — в практике решения геодезических задач на поверхности эллипсоида встречаются сравнительно редко. Если же возникнет необходимость в решении такого рода задач, то, ознакомившись с тремя основными видами засечек, нетрудно будет самостоятельно найти решение и других видов засечек.

Для решения геодезических засечек на поверхности эллипсоида выше уже были подготовлены почти все необходимые соотношения. Поэтому в данном параграфе мы рассмотрим общие методические вопросы и некоторые особенности перехода с эллипсоида на шар.

При решении всех видов геодезических засечек будем использовать главным образом сферическое изображение эллипсоида на шаре как наиболее подходящее для решения такого рода задач.

Почти во всех видах геодезических засечек для перехода с эллипсоида на шар необходимо знать приближенные координаты определяемого пункта. Поэтому все засечки, как правило, решают методом последовательных приближений.

В первом приближении решают засечку на шаре, принимая заданные геодезические координаты и измеренные на эллипсоиде величины как сферические. Получив приближенные значения координат определяемой точки, редуцируют измеренные величины на шар, а затем вновь решают задачу на шаре и вычисляют новые значения координат определяемой точки. Так как предыдущее редуцирование на шар было выполнено пока еще с недостаточной точностью, то необходимо выполнить его еще раз, но уже с новыми, более точными значениями координат, после чего решить засечку на шаре в третий раз и вычислить окончательные значения координат определяемого пункта.

Вместо второго редуцирования на шар и третьего решения засечек на шаре можно использовать иной путь для определения окончательных координат — вычисление дифференциальных поправок к приближенным координатам. Именно такая методика

принята ниже в описании решения всех трех видов геодезических засечек.

Конечно, можно было бы вычислить дифференциальные поправки уже после первого решения засечек. Но тогда приближенные координаты еще значительно отличались бы от их точных значений. Поэтому пришлось бы по уточненным координатам еще раз вычислить дифференциальные поправки. Однако при расстояниях менее 1000 км во многих случаях можно применять и такую сокращенную методику решения засечки.

При составлении уравнений дифференциальных поправок используются дифференциальные формулы, вывод которых дан в § 26.

1. Угловая засечка

Последовательность решения угловой засечки по азимутам геодезических линий покажем на примере.

1. Исходными величинами являются геодезические координаты двух точек Q_1 и Q_2 и азимуты геодезических линий с этих точек на определяемую точку Q_3 .

Точки	B_i	L_i	A_{i3}
Q_1	50°	0°	$51^\circ 05' 09,714''$
Q_2	40°	15°	$33^\circ 04' 01,425''$

2. Решение обратной геодезической задачи на шаре между исходными пунктами по формулам (IV.21) — (IV.23)

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{\sin(L_2 - L_1) \cos B_2}{\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1)} \equiv \frac{p}{q},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{21} = \frac{\sin(L_2 - L_1) \cos B_1}{\cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) - \sin B_1 \cos B_2},$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{p \sin \alpha_{12} + q \cos \alpha_{12}}{\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1)}.$$

Результаты вычислений:

$$\alpha_{12} = 127^\circ 46' 29,728''; \quad \alpha_{21} = 318^\circ 27' 08,154''; \quad \sigma_{12} = 0,253544164.$$

3. Вычисление сферических расстояний σ_{13} и σ_{23} в первом приближении по формулам (IV.24) и (IV.25)

$$\beta_1 = \alpha_{12} - A_{13}, \quad \beta_2 = A_{23} - \alpha_{21},$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{13} = \frac{\sin \beta_2 \sin \sigma_{12}}{\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \sigma_{12}},$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{23} = \frac{\sin \beta_1 \sin \sigma_{12}}{\cos \beta_1 \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \sigma_{12}}.$$

Результаты вычислений:

$$\sigma_{13} = 0,472590942; \quad \sigma_{23} = 0,477353089.$$

4. Вычисление поправок в азимуты A_{13} и A_{23} для перехода с эллипсоида на шар

$$\sin B_3 = \sin B_1 \cos \sigma_{13} + \cos B_1 \sin \sigma_{13} \cos A_{13},$$

$$\sin \alpha_{01} = \cos B_1 \sin A_{13}, \quad \sin \alpha_{02} = \cos B_2 \sin A_{23},$$

$$x_{13} = \cos B_1 \cos A_{13}, \quad x_{23} = \cos B_2 \cos A_{23},$$

$$y_{13} = \frac{\sin B_1 - \sin B_3 \cos \sigma_{13}}{\sin \sigma_{13}}, \quad y_{23} = \frac{\sin B_2 - \sin B_3 \cos \sigma_{23}}{\sin \sigma_{23}},$$

$$\alpha_{13} = A_{13} + \frac{e^2}{2} \sin \alpha_{01} \left(y_{13} \frac{\sigma_{13}}{\sin \sigma_{13}} - x_{13} \right),$$

$$\alpha_{23} = A_{23} + \frac{e^2}{2} \sin \alpha_{02} \left(y_{23} \frac{\sigma_{23}}{\sin \sigma_{23}} - x_{23} \right).$$

Результаты вычислений:

$$\alpha_{13} = 51^\circ 02' 46,434''; \quad \alpha_{23} = 32^\circ 59' 33,791''.$$

5. Вычисление σ_{13} и σ_{23} во втором приближении по формулам (IV.24) и (IV.25), в которых

$$\beta_1 = \alpha_{12} - \alpha_{13}, \quad \beta_2 = \alpha_{23} - \alpha_{21}.$$

Результаты вычислений:

$$\sigma_{13} = 0,471973389; \quad \sigma_{23} = 0,476997965.$$

6. Вычисление приближенных геодезических координат точки Q_3 по формулам (IV.17) и (IV.19)

$$\sin \bar{B}_3 = \sin B_1 \cos \sigma_{13} + \cos B_1 \sin \sigma_{13} \cos \alpha_{13},$$

$$\operatorname{tg}(\bar{L}_3 - L_1) = \frac{\sin \sigma_{13} \sin \alpha_{13}}{\cos B_1 \cos \sigma_{13} - \sin B_1 \sin \sigma_{13} \cos \alpha_{13}}.$$

Если в этих формулах индекс 1 заменить индексом 2, то можно найти координаты \bar{B}_3 и \bar{L}_3 вторично, что послужит контролем вычислений.

Результаты вычислений:

$$\bar{B}_3 = 59^\circ 59' 59,537''; \quad \bar{L}_3 - L_1 = 45^\circ 00' 00,798''.$$

7. Решение обратной геодезической задачи на эллипсоиде для получения геодезических азимутов A_{13} и A_{23} , соответствующих координатам \bar{B}_3 и \bar{L}_3 .

В общем случае здесь необходимо применить способ Бесселя. Однако для расстояний до 3000 км вычисления будут гораздо проще, если использовать второй способ геодезического изобра-

жения, описанный в § 29. В результате вычислений по этому способу получим

$$\bar{A}_{13} = 51^{\circ}05'10,750''; \quad \bar{A}_{23} = 33^{\circ}04'02,745''.$$

8. Вычисление дифференциальных поправок dB_3 и dL_3 к координатам \bar{B} и \bar{L}_3 за счет различия между значениями заданных и вычисленных азимутов геодезических линий.

Используя второе из равенств (IV.53), составляем два уравнения поправок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha_{01}}{\cos \bar{B}_3} dB_3 + y_{13} dL_3 + (A_{13} - \bar{A}_{13}) \sin \sigma_{13} &= 0, \\ \frac{\sin \alpha_{02}}{\cos \bar{B}_3} dB_3 + y_{23} dL_3 + (A_{23} - \bar{A}_{23}) \sin \sigma_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.145})$$

Значения коэффициентов при dB_3 и dL_3 были получены ранее при вычислениях по п. 4.

После решения этих двух уравнений находим

$$dB_3 = 0,463'', \quad dL_3 = -0,798''.$$

Таким образом, окончательные значения координат точки Q_3 будут: $B_3 = 60^{\circ}$, $L_3 = 45^{\circ}$.

Решение угловой засечки по азимутам нормальных сечений будет отличаться от предыдущего случая тем, что поправки в азимуты нормальных сечений при переходе на шар определяются формулой (IV.144). В первом приближении принимают $\alpha_{13} = A_{13}$, $\alpha_{23} = A_{23}$ и решают угловую засечку на шаре. Вычислив $\sin B_3$, находят α_{13} и α_{23} во втором приближении по формуле (IV.144) и вторично решают угловую засечку на шаре. Затем вновь вычисляют $\sin B_3$ и находят α_{13} , α_{23} , σ_{13} и σ_{23} в третьем приближении. Наконец, вычисляют окончательные координаты точки Q_3 дважды, как с точки Q_1 , так и с точки Q_2 , по формулам (IV.17) и (IV.19).

Решение угловой засечки по азимутам центральных сечений выполняется достаточно просто, так как переход от заданных азимутов A_{13} и A_{23} к азимутам α_{13} и α_{23} на шаре совершается без приближений по формуле (IV.130). После этого решается угловая засечка на шаре, а затем вычисляются геодезические координаты точки Q_3 по формулам (IV.17) и (IV.19).

2. Линейная засечка

Приведем описание последовательности решения линейной засечки, сопровождая его числовым примером.

1. Исходными величинами являются геодезические координаты двух точек Q_1 и Q_2 и длины геодезических линий, соеди-

няющих заданные точки с определяемой точкой Q_3 ,

$$\begin{aligned} B_1 &= 50^\circ, & L_1 &= 0^\circ, & s_{13} &= 3\,016\,177,6 \text{ м}, \\ B_2 &= 40^\circ, & L_2 &= 15^\circ, & s_{23} &= 3\,043\,776,8 \text{ м}. \end{aligned}$$

2. Решение обратной геодезической задачи на шаре между исходными пунктами по формулам (IV.21) и (IV.23).

Результаты вычислений по заданным выше координатам были приведены ранее при описании решения угловой засечки в п. 2.

3. Вычисление азимутов α_{13} и α_{23} в первом приближении по формулам (IV.26) и (IV.27), в которых следует принять

$$\tilde{\sigma}_{13} = \frac{s_{13}}{P_0}, \quad \tilde{\sigma}_{23} = \frac{s_{23}}{P_0},$$

где

$$P_0 = 6\,378\,245.$$

Результаты вычислений:

$$\alpha_{13} = 0,89323209, \quad \alpha_{23} = 0,57882362.$$

4. Уточнение сферических расстояний σ_{13} и σ_{23} по формулам (IV.136) и (IV.137) с пониженной точностью

$$\sigma_{i3} = \tilde{\sigma}_{i3} + [\Delta P_i \sigma_{i3} - (Q_i x_{i3} - 67 y_{i3}) \sin \tilde{\sigma}_{i3}] : P_0,$$

где

$$\cos^2 \alpha_{0i} = 1 - (\cos B_i \sin \alpha_{i3})^2,$$

$$\Delta P_i = (10\,619 + 67 \cos^2 \alpha_{0i}) \cos^2 \alpha_{0i},$$

$$Q_i = 31\,966 + 107 \cos^2 \alpha_{0i},$$

$$\sin B_3 = \sin B_1 \cos \tilde{\sigma}_{13} + \cos B_1 \sin \tilde{\sigma}_{13} \cos \alpha_{13},$$

$$x_{i3} = 2 \sin B_i \sin B_3 - \cos^2 \alpha_{0i} \cos \tilde{\sigma}_{i3},$$

$$y_{i3} = (\cos^4 \alpha_{0i} - 2x_{i3}^2) \cos \tilde{\sigma}_{i3} \quad (i = 1, 2).$$

Результаты вычислений:

$$\sigma_{13} = 0,47196837, \quad \sigma_{23} = 0,47699430.$$

5. Вычисление азимутов α_{13} и α_{23} во втором приближении по формулам (IV.26) и (IV.27).

Результаты вычислений:

$$\alpha_{13} = 0,89092239, \quad \alpha_{23} = 0,57582374.$$

6. Вычисление приближенных геодезических координат точки Q_3 по уточненным азимутам и сферическим расстояниям с использованием формул (IV.17) и (IV.19).

Результаты вычислений:

$$\bar{B}_3 = 59^\circ 59' 59,740'', \quad \bar{L}_3 - L_1 = 44^\circ 59' 58,717''.$$

7. Решение обратной геодезической задачи на эллипсоиде для получения длин геодезических линий между исходными пунктами и определяемым с использованием приближенных координат \bar{B}_3 и \bar{L}_3 , применяют формулы (IV.136) и (IV.137).

Результаты вычислений:

$$\bar{s}_{13} = 3\,016\,157,6 \text{ м}, \quad \bar{s}_{23} = 3\,043\,755,9 \text{ м}.$$

8. Вычисление дифференциальных поправок dB_3 и dL_3 , учитывающих различие между заданными и вычисленными длинами геодезических линий. В соответствии с первым из равенств (IV.53) составляются два уравнения поправок

$$a_i dB_3'' + b_i dL_3'' = c_i \quad (i=1, 2), \quad (\text{IV.146})$$

где

$$a_i = \frac{\sin B_3 \cos \sigma_{i3} - \sin B_i}{\cos B_3 \sin \sigma_{i3}},$$

$$b_i = \cos B_i \sin \alpha_{i3} = \sin \alpha_{0i},$$

$$c_i = 0,03234 (s_{i3} - \bar{s}_{i3}).$$

Результаты решения этих уравнений:

$$dB_3'' = +0,256'', \quad dL_3'' = +1,280''.$$

Окончательные значения координат:

$$B_3 = \bar{B}_3 + dB_3'' = 59^\circ 59' 59,996'',$$

$$L_3 = \bar{L}_3 + dL_3'' = 44^\circ 59' 59,997''.$$

В тех случаях, когда заданными (или измеренными) длинами линий вместо геодезических линий являются центральные или нормальные сечения, описанная выше последовательность решения линейной засечки сохраняется. Это допустимо потому, что разница в длинах этих трех видов линий невелика, и для получения приближенных координат \bar{B}_3 и \bar{L}_3 можно использовать любую из этих линий. Существующая небольшая разница в длинах этих линий отразится лишь в свободных членах уравнений поправок. Ясно, что обратную геодезическую задачу для получения длин линий s_{13} и s_{23} по п. 7 необходимо решать по приведенным в § 29 формулам для соответствующих линий.

3. Гиперболическая засечка с тремя исходными пунктами

Рассмотрим методику решения гиперболической засечки, в которой заданными величинами служат разности длин геодезических линий.

Методика решения гиперболической засечки на шаре была рассмотрена в § 26. При решении ее на поверхности эллипсоида возникает дополнительная задача — найти зависимость между разностью длин геодезических линий на эллипсоиде и разностью длин соответствующих дуг больших кругов на шаре.

Для установления этой зависимости воспользуемся равенством (IV.136).

Схема размещения исходных пунктов (фокусов) и определяемого пункта показана на рис. 38.

Для основного пункта Q_0 и двух боковых Q_1 и Q_2 известны геодезические координаты. Известны (или измерены) также разности расстояний

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_1 &= s_1 - s_0, \\ \Delta s_2 &= s_2 - s_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.147})$$

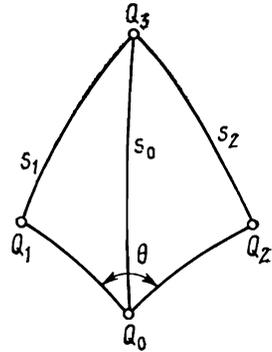


Рис. 38

Каждая из трех линий s_0 , s_1 и s_2 может быть найдена по равенству (IV.136), записанному в таком виде:

$$s_i = P_0 \sigma_i + \delta_i \quad (i=0, 1, 2), \quad (\text{IV.148})$$

где

$$P_0 = 6\,378\,245,0;$$

$$\delta_i = (Q_i x_i - 67 y_i) \sin \sigma_i - \Delta P_i \sigma_i + 35,7 \frac{\sigma_i^2}{\sin \sigma_i} z_i (1 - c_i),$$

$$c_i = \sin^2 B_i + \left(\frac{\sin B_3 - \sin B_i \cos \sigma_i}{\sin \sigma_i} \right)^2,$$

$$Q_i = 31\,965,7 + 107,1 c_i, \quad \Delta P_i = (10\,619,4 + 66,9 c_i) c_i,$$

$$x_i = 2 \sin B_i \sin B_3 - c_i \cos \sigma_i,$$

$$y_i = (c_i^2 - 2x_i^2) \cos \sigma_i,$$

$$z_i = \sin B_i \sin B_3 - x_i.$$

Из равенств (IV.147) и (IV.148) находим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta s_1}{P_0} + \frac{\delta_0 - \delta_1}{P_0}, \\ \Delta \sigma_2 &= \frac{\Delta s_2}{P_0} + \frac{\delta_0 - \delta_2}{P_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.149})$$

Разности $\Delta \sigma_1 = 2 a_1$ и $\Delta \sigma_2 = 2 a_2$ являются начальными величинами при решении гиперболической засечки на шаре.

Сложные функции δ_i зависят в конечном счете от двух аргументов: σ_0 и α_0 , т. е. от дуги большого круга и ее азимута меж-

ду основным пунктом Q_0 и определяемым Q_3 . Эти же две величины являются искомыми в гиперболической засечке, зная которые легко вычисляются координаты B_3 и L_3 определяемого пункта по формулам решения прямой геодезической задачи на шаре.

Учитывая, что разности $\delta_0 - \delta_1$ и $\delta_0 - \delta_2$, как правило, во много раз меньше измеренных разностей Δs_1 и Δs_2 , для определения $\Delta \sigma_1$ и $\Delta \sigma_2$ по формулам (IV.149) возможно применить метод итераций.

Таким образом, решение гиперболической засечки на эллипсоиде будет выполняться в следующей последовательности.

1. Решая обратную геодезическую задачу на шаре между пунктами Q_0 , Q_1 и Q_2 по заданным геодезическим координатам, находят длины базисов $2c_1$ и $2c_2$, а также азимуты этих базисов α_{01} и α_{02} и угол $\theta = \alpha_{02} - \alpha_{01}$.

2. Взяв в первом приближении $2a_1 = \frac{\Delta s_1}{P_0}$ и $2a_2 = \frac{\Delta s_2}{P_0}$, решают гиперболическую засечку на шаре по формулам (IV.35) — (IV.43) для получения σ_0 и α_0 в первом приближении.

3. Найдя значения $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_1$ и $\sigma_2 = \sigma_0 + \Delta \sigma_2$, а также

$$\sin B_3 = \sin B_0 \cos \sigma_0 + \cos B_0 \sin \sigma_0 \cos \alpha_0,$$

вычисляют функции δ_0 , δ_1 и δ_2 по приведенным выше формулам (IV.148).

4. По формулам (IV.149) находят разности $\Delta \sigma_1 = 2a_1$ и $\Delta \sigma_2 = 2a_2$ во втором приближении.

5. Решают гиперболическую засечку на шаре для получения σ_0 и α_0 во втором приближении.

В большинстве случаев практически достаточно выполнить не более трех приближений. Уже после второго приближения координаты, вычисленные по формулам

$$\sin \bar{B}_3 = \sin B_0 \cos \sigma_0 + \cos B_0 \sin \sigma_0 \cos \alpha_0,$$

$$\operatorname{tg}(\bar{L}_3 - L_0) = \frac{\sin \sigma_0 \sin \alpha_0}{\cos B_0 \cos \sigma_0 - \sin B_0 \sin \sigma_0 \cos \alpha_0},$$

будут отличаться от окончательных значений не более чем на $1-2''$. Поэтому вместо третьего приближения можно вычислить дифференциальные поправки dB_3 и dL_3 к координатам \bar{B}_3 и \bar{L}_3 , используя уравнения (IV.146).

Найдя после второго приближения величины $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_1$ и $\sigma_2 = \sigma_0 + \Delta \sigma_2$, а также \bar{B}_3 , вычисляют длины линий s_i по формуле (IV.148) и их разности $\Delta \bar{s}_1 = \bar{s}_1 - s_0$, $\Delta \bar{s}_2 = \bar{s}_2 - s_0$. Затем находят дифференциалы разностей расстояний

$$ds_1 = \Delta s_1 - \Delta \bar{s}_1, \quad ds_2 = \Delta s_2 - \Delta \bar{s}_2,$$

а также коэффициенты

$$a_i = \frac{\sin \bar{B}_3 \cos \sigma_i - \sin B_i}{\cos \bar{B}_3 \sin \sigma_i}, \quad b_i = \sqrt{c_i^-} \quad (i=0, 1, 2).$$

Составив два уравнения

$$(a_1 - a_0) dB_3 + (b_1 - b_0) dL_3 = 0,03234 ds_1,$$

$$(a_2 - a_0) dB_3 + (b_2 - b_0) dL_3 = 0,03234 ds_2,$$

находят их решение в таком виде:

$$dB_3'' = [(b_2 - b_0) ds_1 - (b_1 - b_0) ds_2] D,$$

$$dL_3'' = [(a_1 - a_0) ds_2 - (a_2 - a_0) ds_1] D,$$

где

$$D = \frac{0,03234}{(a_1 - a_0)(b_2 - b_0) - (a_2 - a_0)(b_1 - b_0)}.$$

Наконец, находят окончательные значения координат

$$B_3 = \bar{B}_3 + dB_3'', \quad L_3 = \bar{L}_3 + dL_3''.$$

4. Гиперболическая засечка с разнесенными базисами

Этот вид гиперболической засечки применяют, главным образом, в тех случаях, когда две пары исходных пунктов или два базиса расположены на большом удалении друг от друга, а расстояние от базисов до определяемого пункта значительно превосходит длину каждого базиса. Эти условия позволяют установить положение определяемого пункта в первом приближении с большей точностью.

Методика решения данного вида гиперболической засечки на шаре с достаточной подробностью изложена в § 26. Поэтому здесь мы рассмотрим лишь особенности решения, связанные с переходом на шар.

В последующем изложении будем придерживаться расположения пунктов и обозначений, показанных на рис. 33.

По измеренным на эллипсоиде разностям расстояний Δs_{12} и Δs_{34} в первом приближении вычисляют для каждого базиса разности сферических расстояний

$$2\tilde{a}_{12} = \frac{\Delta s_{12}}{P_0}, \quad 2\tilde{a}_{34} = \frac{\Delta s_{34}}{P_0},$$

где

$$P_0 = 6\,378\,245,0 \text{ м.}$$

Кроме того, также в первом приближении находят

$$\cos \beta_A = \frac{\sin \tilde{a}_{12}}{\sin c_{12}}, \quad \cos \beta_B = \frac{\sin \tilde{a}_{34}}{\sin c_{34}}.$$

Используя формулы (IV.45), (IV.46) и (IV.47), вычисляют сферические расстояния σ_A и σ_B и азимуты α_{AQ} и α_{BQ} . Теперь открылась возможность вычисления редукций.

Предварительно находят значения сферических расстояний от каждого исходного пункта до определяемого.

С достаточной для редуцирования точностью можно принять, что

$$\sigma_A = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_B = \frac{\sigma_3 + \sigma_4}{2}.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \sigma_A + \tilde{a}_{12}, \quad \sigma_2 = \sigma_A - \tilde{a}_{12}, \quad \sigma_3 = \sigma_B + \tilde{a}_{34}, \quad \sigma_4 = \sigma_B - \tilde{a}_{34}.$$

Затем вычисляют приближенную широту определяемого пункта

$$\sin B_Q = \sin B_A \cos \sigma_A + \cos B_A \sin \sigma_A \cos \alpha_{AQ}.$$

Основываясь на формуле (IV.149), для рассматриваемого вида засечки напишем

$$a_{12} = \tilde{a}_{12} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2P_0},$$

$$a_{34} = \tilde{a}_{34} + \frac{\delta_3 - \delta_4}{2P_0},$$

где

$$\delta_i = (Q_i x_i - 67 y_i) \sin \sigma_i - \Delta P_i \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$c_i = \sin^2 B_i + \left(\frac{\sin B_Q - \sin B_i \cos \sigma_i}{\sin \sigma_i} \right)^2,$$

$$Q_i = 31\,966 + 107c_i, \quad \Delta P_i = (10\,619 + 67c_i)c_i,$$

$$x_i = 2 \sin B_i \sin B_Q - c_i \cos \sigma_i,$$

$$y_i = (c_i^3 - 2x_i^2) \cos \sigma_i.$$

Теперь вычисляют углы β во втором приближении

$$\cos \beta_A = \frac{\sin a_{12}}{\sin c_{12}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 c_{12} - \sin^2 a_{12}}{\cos^2 a_{12}} \operatorname{ctg}^2 \sigma_A},$$

$$\cos \beta_B = \frac{\sin a_{34}}{\sin c_{34}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 c_{34} - \sin^2 a_{34}}{\cos^2 a_{34}} \operatorname{ctg}^2 \sigma_B}.$$

Затем, вновь применив формулы (IV.45), (IV.46) и (IV.47), находят полярные координаты σ_A и α_{AQ} , с которыми вычисляют геодезические координаты \bar{B}_Q и $\bar{L}_Q - L_A$, по формулам (IV.17) и (IV.19). Эти координаты будут уже мало отличаться от их точных значений. Для их уточнения вычисляют дифференциальные

поправки dB_Q и dL_Q по формулам, которые использовались в решении гиперболической засечки первого вида.

Необходимые для определения Δs_1 и Δs_2 четыре расстояния вычисляют по формулам (IV.136).

§ 31. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА МАЛЫЕ РАССТОЯНИЯ ПО СПОСОБУ ШРЕЙБЕРА

Для решения прямой геодезической задачи на малые расстояния применяют более простые формулы по сравнению с полученными выше формулами для больших расстояний.

Приведем вывод тех формул, которые применяются при вычислении геодезических координат и азимутов на пунктах триангуляции I класса в СССР.

Пусть точки Q_1 и Q_2 (рис. 39) — проекции пунктов триангуляции на поверхность эллипсоида, между которыми решается геодезическая задача. В полярном сфероидическом треугольнике Q_1PQ_2 из точки Q_2 проведем геодезическую линию Q_2Q_0 под прямым углом к меридиану точки Q_1 . Получим два прямоугольных сфероидических треугольника. Точка Q_0 называется вспомогательной точкой. Введение ее в значительной мере упрощает вывод формул.

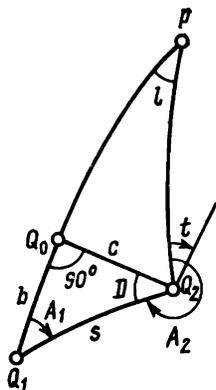


Рис. 39

Последовательность вывода будет такой. Сначала по заданным начальному азимуту A_1 и стороне s решается малый сфероидический треугольник $Q_1Q_0Q_2$ с целью определения длин сторон Q_1Q_0 и Q_0Q_2 . После этого по длине дуги меридиана Q_1Q_0 вычисляется разность широт точек Q_0 и Q_1 . Затем решается второй прямоугольный сфероидический треугольник Q_0PQ_2 для получения разности долгот $l=L_2-L_1$, разности широт $d=B_0-B_2$ и угла t , который будет нужен для вычисления обратного азимута A_2 . Угол t представляет собой азимут направления, проведенного из точки Q_2 под прямым углом к линии Q_2Q_0 .

Взяв в качестве радиуса сферы средний радиус кривизны эллипсоида в точке Q_1 , т. е. $R_1 = \sqrt{M_1 N_1}$, решим малый треугольник $Q_1Q_0Q_2$ как сферический. Возможность такого решения была обоснована в § 17. Обозначим стороны этого треугольника

$$\frac{s}{R_1} = \sigma, \quad \frac{b}{R_1} = u, \quad \frac{c}{R_1} = v.$$

По правилам Непера напишем

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \sigma \cos A_1, \quad (\text{IV.150})$$

$$\sin v = \sin \sigma \sin A_1. \quad (\text{IV.151})$$

Функции малых аргументов разложим в ряды, ограничиваясь членами третьего порядка,

$$u + \frac{u^3}{3} + \dots = \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3} + \dots \right) \cos A_1,$$

$$v - \frac{v^3}{6} + \dots = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6} + \dots \right) \sin A_1,$$

или с той же точностью

$$u = \sigma \cos A_1 \left(1 + \frac{\sigma^2}{3} - \frac{u^2}{3} \right),$$

$$v = \sigma \sin A_1 \left(1 - \frac{\sigma^2}{6} + \frac{v^2}{6} \right).$$

Для главных членов введем обозначения

$$u_0 = \sigma \cos A_1, \tag{IV.152}$$

$$v_0 = \sigma \sin A_1. \tag{IV.153}$$

Очевидно,

$$u_0^2 + v_0^2 = \sigma^2.$$

В поправочных членах с принятой точностью можно заметить

$$u^2 = u_0^2, \quad v^2 = v_0^2.$$

Таким образом, с точностью до членов третьего порядка получим окончательно

$$u = u_0 \left(1 + \frac{v_0^2}{3} \right), \tag{IV.154}$$

$$v = v_0 \left(1 - \frac{u_0^2}{6} \right). \tag{IV.155}$$

Перейдем к определению разности широт $B_0 - B_1$. Этой разности соответствует длина дуги меридиана $b = uR_1$. Напишем следующий ряд до членов третьего порядка включительно:

$$B_0 = B_1 + \left(\frac{dB}{dX} \right)_1 uR_1 + \left(\frac{d^2B}{dX^2} \right)_1 \frac{u^2 R_1^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{dX^3} \right)_1 \frac{u^3 R_1^3}{6} + \dots$$

Найдем коэффициенты этого ряда

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M} = \frac{V^3}{c} = \frac{(1 + e'^2 \cos^2 B)^{3/2}}{c},$$

$$\frac{d^2B}{dX^2} = \frac{-\frac{3}{2} e'^2 \sin 2BV}{cM}.$$

По правилам Непера может написать

$$\cos B_0 = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} l,$$

$$\sin \gamma = \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} B_0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos B_0}, \quad (\text{IV.157})$$

$$\operatorname{tg} t = \sin \gamma \operatorname{tg} B_0. \quad (\text{IV.158})$$

Функции малых аргументов разложим в ряды до членов третьего порядка

$$l + \frac{l^3}{3} + \dots = \left(\gamma + \frac{\gamma^3}{3} + \dots \right) \frac{1}{\cos B_0},$$

$$t + \frac{t^3}{3} + \dots = \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6} + \dots \right) \operatorname{tg} B_0,$$

откуда с той же точностью

$$l = \frac{\gamma}{\cos B_0} \left(1 + \frac{\gamma^2}{3} - \frac{l^2}{3} \right),$$

$$t = \gamma \operatorname{tg} B_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{6} - \frac{t^2}{3} \right).$$

Обозначим главные члены

$$\lambda = \frac{\gamma}{\cos B_0}, \quad (\text{IV.159})$$

$$\tau = \gamma \operatorname{tg} B_0 = \lambda \sin B_0. \quad (\text{IV.160})$$

В поправочных членах в скобках с принятой точностью можем положить $l^2 = \lambda^2$, $t^2 = \tau^2$.

Тогда

$$l = \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 B_0}{3} - \frac{\lambda^2}{3} \right),$$

$$t = \tau \left(1 - \frac{\lambda^2 \cos^2 B_0}{6} - \frac{\lambda^2 \sin^2 B_0}{3} \right),$$

откуда окончательно получим

$$l = \lambda \left(1 - \frac{\tau^2}{3} \right), \quad (\text{IV.161})$$

$$t = \tau \left(1 - \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\tau^2}{6} \right). \quad (\text{IV.162})$$

Перейдем к определению широты B_2 конечной точки Q_2 . Для этого нам достаточно найти разность широт $B_0 - B_2$. Но сначала надо найти ей соответствующую разность широт на шаре, т. е. $B_0 - B'_2$.

Сферический треугольник $Q_0P'Q_2$ изобразим отдельно на рис. 41. Обозначения, взятые в кружки, соответствуют принятым обозначениям углов и сторон в сферической тригонометрии.

Применим к этому треугольнику одну из аналогий Непера

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}.$$

В соответствии с нашими обозначениями получим

$$\operatorname{tg} \frac{B_0 - B'_2}{2} = \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

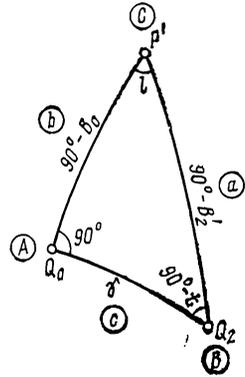


Рис. 41

Здесь все аргументы — малые величины, поэтому их функции разложим в ряды до третьего порядка включительно. Предварительно обозначим разность широт на шаре

$$d_0 = B_0 - B'_2.$$

Тогда

$$\frac{d_0}{2} + \frac{d_0^3}{24} + \dots = \left(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{24} + \dots \right) \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} + \dots \right).$$

Очевидно, величина d_0 является малой второго порядка относительно t и γ . Поэтому член, содержащий d_0^3 , отбросим как член шестого порядка. Вынесем первые члены в правой части равенства за скобки, оставшиеся выражения в скобках перемножим и учтем равенства (IV.159) и (IV.160), полагая, что $t = \tau$. В результате найдем

$$d_0 = \frac{t\gamma}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right).$$

Введем обозначение для разности широт на эллипсоиде $d = B_0 - B_2$.

Чтобы установить связь между малыми разностями широт d и d_0 , проведем мысленно параллель из точки Q_2 (см. рис. 40) до пересечения с меридианом точки Q_0 . Ясно, что дуги меридианов на эллипсоиде и на шаре между параллелями этих двух точек практически равны друг другу и представляют собой дуги окружностей разных радиусов. Поэтому можно написать

$$d_0 N_0 = d M_0,$$

откуда

$$d = d_0 \frac{N_0}{M_0} = V_0^2 d_0.$$

Таким образом, окончательно получим

$$d'' = \frac{t\gamma}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) (1 + e'^2 \cos^2 B_0) \rho'', \quad (\text{IV.163})$$

$$B_2 = B_0 - d'', \quad L_2 = L_1 + l\rho''. \quad (\text{IV.164})$$

Нам осталось найти обратный азимут A_2 .

По рис. 39 можно написать

$$A_2 = 270^\circ + t - D.$$

Малому сферическому прямоугольному треугольнику $Q_1 Q_0 Q_2$ соответствует равенство

$$180^\circ + \varepsilon = A_1 + 90^\circ + D.$$

Сферический избыток ε этого треугольника легко определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{uv}{2}. \quad (\text{IV.165})$$

Таким образом, для определения обратного азимута можем написать следующую формулу:

$$A_2 = A_1 + 180^\circ + (t - \varepsilon) \rho''. \quad (\text{IV.166})$$

Соберем вместе все формулы, по которым выполняются вычисления.

Исходные данные: B_1, L_1, A_1, s .

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}, & \sigma &= \frac{s}{c} V_1^2, \\ u_0 &= \sigma \cos A_1, & v_0 &= \sigma \sin A_1, \\ u &= u_0 \left(1 + \frac{v_0^2}{3} \right), & v &= v_0 \left(1 - \frac{u_0^2}{6} \right), \\ B_0 &= B_1 + \rho'' u \left[V_1 - \frac{e'^2}{4} u (3 \sin 2B_1 + 2u \cos 2B_1) \right], \\ V_0 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_0}, \\ \gamma &= \frac{vV_0}{V_1^2}, & \lambda &= \frac{\gamma}{\cos B_0}, & \tau &= \lambda \sin B_0, \\ l'' &= \lambda \left(1 - \frac{\tau^2}{3} \right) \rho'', \\ t &= \tau \left(1 - \frac{\lambda^2 + \tau^2}{6} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.167})$$

$$\begin{aligned}
 d'' &= \frac{t\gamma}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} \right) V_0^3 \rho'', \\
 B_2 &= B_0 - d'', \quad L_2 = L_1 + l'', \\
 \varepsilon &= \frac{uv}{2}, \\
 A_2 &= A_1 + 180^\circ + (t - \varepsilon) \rho''.
 \end{aligned}$$

При расстояниях между пунктами не более 100 км формулы (IV.167) позволяют определять геодезические координаты с точностью до 0,0001'' и азимуты с точностью до 0,001''. Поэтому их применяют для вычислений в триангуляции 1 класса.

При расстояниях до 600 км эти формулы обеспечивают получение координат с точностью до 0,1''.

В северных широтах точность определения долготы по формулам (IV.167) резко снижается.

Поэтому в широтах севернее 60° при вычислении разности долгот необходимо учитывать сферические члены пятого порядка, применяя следующую формулу:

$$l'' = \rho'' \lambda \left[1 - \frac{\tau^2}{3} \left(1 - \frac{2\tau^2 + \lambda^2}{5} \right) \right].$$

Вывод формул (IV.167) выполнен по методу, предложенному немецким геодезистом Шрейбером. Формулы, полученные Шрейбером в 1878 г., были предназначены для логарифмических вычислений и в настоящее время почти не применяются, так как решение подобных задач гораздо удобнее и проще выполнять на счетных машинах (табл. 16).

Для вычисления координат с погрешностью не более 0,2'' при расстояниях до 60 км формулы (IV.167) можно упростить.

Упрощенные формулы имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}, \\
 \beta'' &= \frac{s \cos A_1}{c} V_1^3 \rho'', \quad \gamma = \frac{s \sin A_1}{c} V_1, \\
 B_0 &= B_1 + \beta'', \\
 l'' &= \frac{\rho'' \gamma}{\cos B_0}, \quad \tau'' = l'' \sin B_0, \\
 B_2 &= B_0 - \frac{\gamma \tau''}{2}, \quad L_2 = L_1 + l'', \\
 A_2 &= A_1 + \tau'' - \frac{\gamma \beta''}{2} + 180^\circ.
 \end{aligned} \tag{IV.168}$$

Решение прямой геодезической задачи по способу Шрейбера

B_1	60°	γ	0,006 634 843
L_1	10°	λ	0,013 424 515
A_1	45°	τ	0,011 670 325
s	60 000,000 м	l''	46'08,8793"
V_1	1,000 841 961	t	0,011 669 709
σ	0,009 391 235	d''	7,9985"
u	0,006 640 704	ϵ	0,000 022 049
v	0,006 640 557	B_2	60°22'42,8586"
B_0	60°22'50,8571"	L_2	10°46'08,8793"
V_0	1,000 822 659	A_2	225°40'02,509"

§ 32. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА МАЛЫЕ РАССТОЯНИЯ ПО ФОРМУЛАМ СО СРЕДНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Примем такую последовательность вывода формул: в начале найдем формулы для решения геодезических задач на шаре при малых расстояниях между точками, затем учтем сфероидические поправки к этим формулам для перехода с эллипсоида на шар.

Прежде всего установим зависимость между углами и сторонами полярного сферического треугольника. Такую зависимость при малых расстояниях между точками наиболее целесообразно установить по формулам сферической тригонометрии, называемым формулами Деламбра — Гаусса и имеющим такой вид:

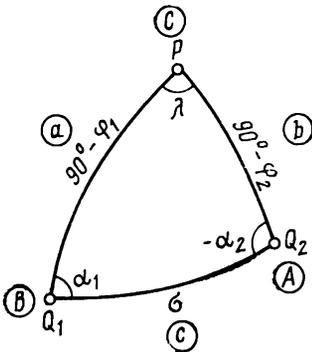


Рис. 42

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2}, \\ \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2}, \\ \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2}, \\ \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} \end{aligned} \right\} \text{(IV.169)}$$

На рис. 42 латинскими буквами, обведенными кружком, обозначены углы и стороны, являющиеся аргументами в формулах (IV.169). Им соответствующие углы и стороны полярного сфе-

рического треугольника обозначены греческими буквами, причём φ — широта, λ — разность долгот, σ — сферическое расстояние (дуга большого круга, выраженная в частях радиуса шара), α — азимут дуги большого круга.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi, \quad \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_m, \\ \alpha_2 - \alpha_1 + 180^\circ = \Delta\alpha, \quad \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + 180^\circ) = \alpha_m. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.170})$$

Сопоставляя друг другу латинские и греческие обозначения соответствующих углов и сторон, можем установить, что

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2} = \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \frac{a+b}{2} = 90^\circ - \varphi_m, \\ \frac{A-B}{2} = 90^\circ - \alpha_m, \quad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, из формул (IV.169) получим

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} = \cos \alpha_m \sin \frac{\sigma}{2},$$

$$\cos \varphi_m \sin \frac{\lambda}{2} = \sin \alpha_m \sin \frac{\sigma}{2},$$

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{\Delta\alpha}{2} \cos \frac{\sigma}{2},$$

$$\sin \varphi_m \sin \frac{\lambda}{2} = \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \cos \frac{\sigma}{2}.$$

С целью упрощения вычислений тригонометрические функции малых аргументов $\Delta\varphi$, $\Delta\alpha$, σ и λ разложим в ряды до членов третьего порядка включительно:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta\varphi^3}{48} + \dots \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots \right) = \\ = \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \dots \right) \cos \alpha_m, \\ \cos \varphi_m \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} + \dots \right) = \sin \alpha_m \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \dots \right), \\ \left(1 - \frac{\Delta\varphi^2}{8} + \dots \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \dots \right) = \\ = \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{8} + \dots \right) \left(1 - \frac{\sigma^2}{8} + \dots \right), \\ \sin \varphi_m \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} + \dots \right) = \left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \frac{\Delta\alpha^3}{48} + \dots \right) \left(1 - \frac{\sigma^2}{8} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

Вынесем за скобки члены первого порядка и решим первое, второе и четвертое уравнения относительно $\Delta\varphi$, λ и $\Delta\alpha$. При делении и умножении рядов применим с достаточной точностью такие приближенные преобразования:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = (1+x^2)(1+y^2)^{-1} \approx (1+x^2)(1-y^2) \approx 1+x^2-y^2.$$

Таким образом, найдем

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \sigma \cos \alpha_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\Delta\varphi^2}{24} + \frac{\lambda^2}{8} \right), \\ \lambda &= \frac{\sigma \sin \alpha_m}{\cos \varphi_m} \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\lambda^2}{24} \right), \\ \Delta\alpha &= \lambda \sin \varphi_m \left(1 + \frac{\sigma^2}{8} - \frac{\lambda^2}{24} + \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б})$$

Кроме того, третье из предыдущих равенств (А) с принятой точностью приведем к такому виду:

$$\Delta\varphi^2 + \lambda^2 - \Delta\alpha^2 = \sigma^2.$$

С помощью этого выражения заменим величину σ^2 , содержащуюся в скобках во всех трех равенствах (Б).

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \sigma \cos \alpha_m \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right), \\ \lambda &= \frac{\sigma \sin \alpha_m}{\cos \varphi_m} \left(1 - \frac{\Delta\varphi^2}{24} + \frac{\Delta\alpha^2}{24} \right), \\ \Delta\alpha &= \lambda \sin \varphi_m \left(1 + \frac{\Delta\varphi^2}{8} + \frac{\lambda^2}{12} - \frac{\Delta\alpha^2}{12} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.171})$$

Мы получили формулы для решения прямой геодезической задачи на шаре.

Теперь перейдем на поверхность эллипсоида. Для этого сфероидический треугольник Q_1Q_2P (рис. 43), у которого расстояние s между точками Q_1 и Q_2 является малой величиной (в сравнении с радиусом кривизны дуги s), изобразим на шаре следующим образом.

Радиус шара примем равным радиусу кривизны первого вертикала N_m , вычисленного по средней широте $B = \frac{1}{2}(B_1+B_2)$.

Точку пересечения нормали N_m с осью вращения эллипсоида примем за центр шара. Стороны сфероидического треугольника Q_1Q_2P спроектируем на шар лучами, проведенными из центра шара. При таком изображении разность долгот на эллипсоиде $l = L_2 - L_1$ будет точно равна разности долгот на шаре λ , длина

геодезической линии s будет весьма незначительно отличаться от соответствующей длины дуги большого круга, азимуты A_1 и A_2 геодезической линии практически также не будут отличаться от азимутов дуги большого круга. Средняя широта B_m с высокой точностью равна средней широте φ_m на шаре. Точно так же можно считать равными длину дуги меридиана ΔX между параллелями точек Q_1 и Q_2 и ей соответствующую длину дуги меридиана на шаре.

Следовательно, можно написать такие равенства:

$$\varphi_m = B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2),$$

$$\lambda = l = L_2 - L_1,$$

$$\alpha_m = A_m = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + 180^\circ),$$

$$\Delta\alpha = a = \frac{1}{2} (A_2 - A_1 + 180^\circ).$$

Однако разности широт точек Q_1 и Q_2 на шаре $\Delta\varphi$ и на эллипсоиде $b = B_2 - B_1$ будут существенно отличаться друг от друга, несмотря на то, что длины соответствующих дуг меридианов практически равны. Дело здесь в том, что разности широт зависят от кривизны меридиана.

Принимая дугу меридиана ΔX на эллипсоиде как дугу окружности радиуса M_m , вычисленного по средней широте B_m , можем написать равенство длин дуг меридианов на эллипсоиде и на шаре в следующем виде:

$$\Delta X = M_m b = N_m \Delta\varphi.$$

Кроме того, учтем, что длина геодезической линии s и ей соответствующее сферическое расстояние связаны равенством

$$s = N_m \sigma.$$

Если теперь принять во внимание все написанные выше соотношения между широтами, долготами, азимутами и длинами линий на шаре и на эллипсоиде, то мы можем из формул (IV.171) для шара получить аналогичные формулы для эллипсоида. При этом в выражениях, стоящих в скобках, мы можем с достаточной точностью принять $\Delta\varphi = b$.

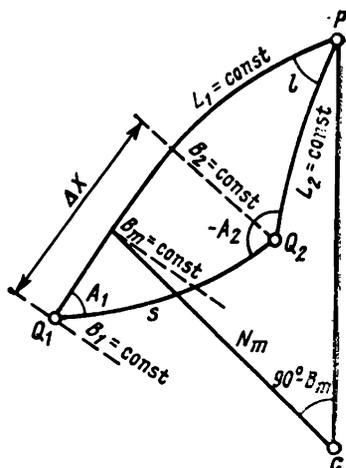


Рис. 43

Таким образом, формулы для решения прямой геодезической задачи на поверхности эллипсоида будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{s \cos A_m}{M_m} \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{24} \right), \\ l &= \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left(1 - \frac{b^2}{24} + \frac{a^2}{24} \right), \\ a &= l \sin B_m \left(1 + \frac{b^2}{8} + \frac{l^2}{12} - \frac{a^2}{12} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.172})$$

Для удобства вычислений величину l в правой части последнего равенства заменим ее значением по второму равенству и введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{s}{c} V_m^3 \cos A_m, \\ \lambda &= \frac{s}{c} \frac{V_m}{\cos B_m} \sin A_m, \\ \alpha &= \lambda \sin B_m. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.173})$$

Теперь равенства (IV.172) представим в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} b &= \beta \left(1 + \frac{2\lambda^2 + \alpha^2}{24} \right), \\ l &= \lambda \left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} \right), \\ a &= \alpha \left(1 + \frac{2\beta^2 + 2\lambda^2 - \alpha^2}{24} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.174})$$

Здесь все угловые величины выражены в радианах.

Формулы (IV.174) предназначены для вычисления разностей широт, долгот и азимутов в триангуляции I класса наряду с формулами (IV.167) способа Шрейбера.

Таблица 17

Решение прямой геодезической задачи по формулам со средними аргументами
Исходные данные: $B_1=60^\circ$; $L_1=10^\circ$; $A_1=45^\circ$; $s=60\,000\,000$ м

Приближения					
I		II		III	
V_1	1,000 8420	V_m	1,000 832 347	V_m	1,000 832 348
β''	685,44"	β	0,006 607 185	β	0,006 607 188
γ	0,003 3175	λ	0,013 423 863	λ	0,013 423 854
τ''	1203,62"	α	0,011 647 517	α	0,011 647 509
B_m	60°11'24,45"	B_m	60°11'21,4286"	B_2	60°22'42,8586"
A_m	45°20'01,35"	A_m	45°20'01,2519"	L_2	10°46'08,8792"
				A_2	225°40'02,502"

При выводе этих формул методика перехода с эллипсоида на шар была дана описательно, без строгих доказательств. Если же воспользоваться одним из способов изображения эллипсоида на шаре, рассмотренных в § 29, то можно найти более точные выражения для разностей широт, долгот и азимутов.

Формулы, учитывающие сфероидические величины в членах третьего порядка, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} b &= \beta \left[1 + (3e'^2 - 6\eta_m^2) \frac{\beta^2}{24} + (1 + \eta_m^2) \frac{\lambda^2}{12} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2\eta_m^2) \frac{\alpha^2}{24} \right], \\ l &= \lambda \left[1 + \frac{\alpha^2}{24} - (1 - 9e'^2 + 8\eta_m^2) \frac{\beta^2}{24} \right], \\ a &= \alpha \left[+ 1(2 + 9e'^2 - 6\eta_m^2) \frac{\beta^2}{24} + (1 + \eta_m^2) \frac{\lambda^2}{12} - \right. \\ &\quad \left. - (1 + 2\eta_m^2) \frac{\alpha^2}{24} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.175})$$

Эти формулы дают погрешность в координатах не более 0,0005'' при расстояниях до 250 км.

Аналогичные формулы в несколько ином виде были выведены К. Ф. Гауссом [6] на основе применения им его теории конформного изображения эллипсоида на шаре.

В формулах (IV.173), (IV.174) и (IV.175) аргументами служат, кроме длины геодезической линии s , средняя широта B_m и средний азимут A_m . Поэтому эти равенства условно называют формулами со средними аргументами.

Рассмотрим последовательность решения прямой геодезической задачи по формулам (IV.173) и (IV.174), или (IV.175) (табл. 17).

Начальными величинами являются B_1 , L_1 , A_1 и s .

Так как средняя широта B_m и средний азимут A_m не входят в число заданных величин, то решение задачи приходится выполнять последовательными приближениями.

В первом приближении можно принять $B_m = B_1$ и $A_m = A_1$. С целью сокращения общего числа приближений для определения B_m и A_m в первом приближении можно использовать значения B_2 и A_2 , вычисленные по упрощенным формулам (IV.168), или же найти B_2 и L_2 по карте, нанеся на нее графически положение конечной точки геодезической линии по s и A_1 , а затем найти

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \quad \text{и} \quad A_m = A_1 + \frac{1}{2}(L_2 - L_1) \sin B_m.$$

Во втором и последующих приближениях принимают

$$B_m = B_1 + \frac{b}{2}, \quad A_m = A_1 + \frac{a}{2}.$$

Для обеспечения точности 0,0001'' в координатах при $s < 60$ км достаточно ограничиться тремя или четырьмя приближениями.

Окончательные значения искомых величин в градусной мере вычисляются по таким формулам:

$$B_2 = B_1 + b\rho'', \quad L_2 = L_1 + l\rho'', \quad A_2 = A_1 + a\rho'' \pm 180^\circ. \quad (\text{IV.176})$$

Теперь рассмотрим последовательность решения обратной геодезической задачи на малые расстояния по формулам со средними аргументами (табл. 18).

Таблица 18

Решение обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами

B_1	60°	$l \sin B_m$	0,011 647 553
B_2	60°22'42,8586''	Q	42 178,607
L_1	10°	P	42 672,768
L_2	10°46'08,8792''	a''	2402,502''
b	0,006 607 325	A_m	45°20'01,241''
l	0,013 423 905	A_1	44°59'59,991''
B_m	60°11'21,4293''	A_2	225°40'02,492''
M_m	6 383 745,14	s	60 000,000 м
N_m	6 394 376,55		

Прежде всего по заданным координатам B_1, L_1, B_2, L_2 находим

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{B_2 - B_1}{\rho''}, \quad l = \frac{L_2 - L_1}{\rho''}, \quad B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2), \\ \eta_m^2 &= e'^2 \cos^2 B_m, \quad N_m = \frac{c}{\sqrt{1 + \eta_m^2}}, \quad M_m = \frac{N_m}{1 + \eta_m^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.177})$$

Из формул (IV.172) с погрешностью на величины пятого порядка находим такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} s \cos A_m &= b M_m \left[1 - \frac{2l^2 + (l \sin B_m)^2}{24} \right], \\ s \sin A_m &= l \cos B_m N_m \left[1 + \frac{b^2 - (l \sin B_m)^2}{24} \right], \\ a'' &= l \sin B_m \left[1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2(l \sin B_m)^2}{24} \right] \rho''. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.178})$$

Если же в членах третьего порядка учесть еще сфероидические величины, приведенные в равенствах (IV.175), то получим

более точные формулы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 s \cos A_m &= b M_m \left[1 - (e'^2 - 2\eta_m^2) \frac{b^2}{8} - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \eta_m^2) \frac{(l \cos B_m)^2}{12} - \frac{(l \sin B_m)^2}{8} \right], \\
 s \sin A_m &= l \cos B_m N_m \left[1 + (1 - 9e'^2 + 8\eta_m^2) \frac{b^2}{24} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(l \sin B_m)^2}{24} \right], \\
 a'' &= l \sin B_m \left[1 + (3 + 2\eta_m^2) \frac{b^2}{24} + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \eta_m^2) \frac{(l \cos B_m)^2}{12} \right] \rho''.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.179})$$

Обозначив правые части первых двух равенств (IV.178) и (IV.179) соответственно через Q и P , получим

$$s \cos A_m = Q, \quad s \sin A_m = P.$$

Таким образом, решение задачи завершается применением следующих формул:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg} A_m &= \frac{P}{Q}, \quad s = Q \cos A_m + P \sin A_m = \sqrt{Q^2 + P^2}, \\
 A_1 &= A_m - \frac{a''}{2}, \quad A_2 = A_m + \frac{a''}{2} \pm 180^\circ.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.180})$$

Точность определения длины линии и азимута по (IV.178) зависит от величины самой линии и характеризуется следующими предельными значениями погрешностей Δs и ΔA , соответствующими различным длинам определяемой линии s на всех широтах от 0 до 90° :

s , км	Δs , м	ΔA "
80	0,01	0,02
200	0,1	0,1
400	1	0,5
600	5	1
800	10	2

По формулам (IV.179) длина линии определяется с погрешностью менее 0,5 м, если $s < 600$ км и $B_m < 73^\circ$. С уменьшением расстояния в n раз погрешность вычисленного расстояния уменьшается в n^5 раз.

§ 33. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ПО МЕТОДУ РУНГЕ — КУТТА — МЕРСОНА

Немецкие ученые Рунге (1895) и Кутт (1901) разработали оригинальный метод численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. В 1958 г. английский ученый Мерсон частично модифицировал классический метод Рунге—Кутта, благодаря чему процесс вычислений ускорился.

Рассмотрим сущность метода Рунге — Кутта — Мерсона.

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{IV.181})$$

и начальными значениями $x = x_0$, $y = y_0$. Необходимо найти численное значение функции y_n для заданного значения аргумента x_n .

Для определения y_n последовательно вычисляют значения функций y_i для равноотстоящих промежуточных значений $x_i = x_0 + h_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), причем в качестве начальных принимают значения x_{i-1} и y_{i-1} , найденные в предыдущем вычислении.

Приращение независимого аргумента $h = \frac{x_n - x_0}{n}$

представляет собой шаг интегрирования, величина которого устанавливается в зависимости от заданной точности определения функции y_i .

Функцию y_i вычисляют по формуле

$$y_i = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + 4k_4 + k_5), \quad (\text{IV.182})$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{h}{3} f(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ k_2 &= \frac{h}{3} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{3}, y_{i-1} + k_1\right), \\ k_3 &= \frac{h}{3} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{3}, y_{i-1} + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= \frac{h}{3} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{3}{8} k_1 + \frac{9}{8} k_3\right), \\ k_5 &= \frac{h}{3} f\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + \frac{3}{2} k_1 - \frac{9}{2} k_3 + 6k_4\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.183})$$

При выводе этих формул исходным уравнением послужило разложение функции y_i в ряд Тейлора по степеням h до четвертого порядка. Поэтому рассматриваемый метод называют методом Рунге — Кутта четвертого порядка. Таким образом, формула

(IV.182) обладает погрешностью порядка h_5 . Эта погрешность определяется равенством

$$\varepsilon = 0,2k_1 - 0,9k_3 + 0,8k_4 - 0,1k_5, \quad (\text{IV.184})$$

с помощью которого устанавливают шаг интегрирования.

Предположим, что необходимо вычислить функцию y_i с заданной точностью ε . Тогда первоначально выбранное приращение h можно уточнить, пользуясь следующим критерием: если правая часть равенства (IV.184) превышает ε , то h следует уменьшить в два раза, а если правая часть в 32 раза меньше, чем ε , то h можно удвоить.

Применим метод Рунге—Кутты—Мерсона для численного интегрирования трех дифференциальных уравнений (IV.54)—(IV.56), которые представим в таком виде:

$$\dot{f}_B(B, A) = \frac{\cos A}{c} (1 + e'^2 \cos^2 B)^{3/2},$$

$$\dot{f}_L(B, A) = \frac{\sin A}{c \cos B} (1 + e'^2 \cos^2 B)^{1/2},$$

$$\dot{f}_A(B, A) = \dot{f}_L(B, A) \sin B.$$

Заданными начальными значениями искоемых функций в точке $s=0$ служат координаты B_1 , L_1 и азимут A_1 .

Рассмотрим последовательность вычислений для одного интервала интегрирования $h=s$.

Числа k_r ($r=1, 2, 3, 4, 5$ — номера этапов вычислений) в равенствах (IV.183) для аргумента широты обозначим через ΔB_r , а для аргумента азимута — через ΔA_r . Значения широты B_r и азимута A_r , используемые при вычислении функций f_B и f_L , представлены в табл. 19.

Таблица 19

r	B_r	A_r
1	B_1	A_1
2	$B_1 + 2\Delta B_1$	$A_1 + 2\Delta A_1$
3	$B_1 + \Delta B_1 + \Delta B_2$	$A_1 + \Delta A_1 + \Delta A_2$
4	$B_1 + \frac{3}{4}\Delta B_1 + \frac{9}{4}\Delta B_3$	$A_1 + \frac{3}{4}\Delta A_1 + \frac{9}{4}\Delta A_3$
5	$B_1 + 3\Delta B_1 - 9\Delta B_3 + 12\Delta B_4$	$A_1 + 3\Delta A_1 - 9\Delta A_3 + 12\Delta A_4$

Выделим постоянный множитель, не изменяющийся на всех этапах вычислений,

$$\sigma = \frac{s}{6c} \rho''.$$

Теперь числа ΔB_r и ΔA_r будут вычисляться по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_r &= \sigma \cos A_r \sqrt{(1 + 0,00673853 \cos^2 B_r)^3}, \\ \Delta L_r &= \frac{\sigma \sin A_r}{\cos B_r} \sqrt{1 + 0,00673853 \cos^2 B_r}, \\ \Delta A_r &= \Delta L_r \sin B_r \quad (r=1, 2, 3, 4, 5). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.185})$$

Значения B_r и A_r выбирают из табл. 19.

Координаты и обратный азимут в конечной точке линии s определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \Delta B_1 + 4\Delta B_4 + \Delta B_5, \\ L_2 &= L_1 + \Delta L_1 + 4\Delta L_4 + \Delta L_5, \\ A_2 &= A_1 + \Delta A_1 + 4\Delta A_4 + \Delta A_5 \pm 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.186})$$

При малых длинах s формулы (IV.185) и (IV.186) применяют однократно (одним шагом). Если же геодезическая линия имеет большую длину, то ее делят на отдельные малые дуги и вычисления по формулам (IV.185) и (IV.186) выполняют последовательно по каждой дуге.

В этом методе вычислений формулы имеют довольно простой вид и удобны для программирования. Однако при больших расстояниях объем вычислений становится непомерно большим.

При решении прямой геодезической задачи (табл. 20) для

Таблица 20

Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге—Кутта—Мерсона

Исходные данные		r	B_r	A_r
B_1	45°	1	0,785 398 163	0,785 398 163
L_1	10°	2	0,792 801 464	0,792 776 604
A_1	45°	3	0,792 773 777	0,792 859 068
s	400 000,00 м	4	0,796 440 129	0,796 651 589
σ	2148,6928"	5	0,807 352 444	0,808 283 803

r	ΔB_r	ΔL_r	ΔA_r
1	1527,0404"	2152,3095"	1521,9127"
2	1515,6187"	2184,3084"	1555,9315"
3	1515,4923"	2184,4247"	1555,9719"
4	1509,5917"	2200,7471"	1573,2511"
5	1491,3665"	2250,7893"	1626,1033"

$$B_2 = 46^\circ 15' 28,3869'', \quad L_2 = 11^\circ 50' 03,0437'', \quad A_2 = 226^\circ 18' 40,5101''.$$

малых расстояний, когда достаточно однократного применения формул (IV.185) и (IV.186), объем вычислений будет также несколько больше, чем при вычислениях с той же точностью по формулам со средними аргументами (IV.174).

§ 34. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИпсоИДА

Дифференциальные формулы устанавливают зависимость между малыми (дифференциальными) изменениями координат начальной и конечной точек геодезической линии, ее длины и азимутов.

Семь переменных $B_1, L_1, B_2, L_2, s, A_1$ и A_2 геодезической линии связаны между собой сложной зависимостью, которая определяется формулами решения прямой и обратной геодезических задач. Из этих семи переменных четыре являются независимыми, от которых зависят остальные три.

Изменения трех зависимых переменных представим в виде полных дифференциалов

$$\left. \begin{aligned} ds &= \frac{\partial s}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial s}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial s}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial s}{\partial L_2} dL_2, \\ dA_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_1}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_1}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_1}{\partial L_2} dL_2, \\ dA_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_2}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_2}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_2}{\partial L_2} dL_2. \end{aligned} \right\} \quad (IV.187)$$

Эти равенства показывают, как изменятся длина геодезической линии и ее азимуты, если концы этой линии получат некоторые малые сдвиги, выраженные дифференциалами координат.

Равенства (IV.187) примем в качестве исходных соотношений, из которых затем можно будет найти другие зависимости между этими же дифференциалами.

Частные производные при строгом изложении следовало бы найти дифференцированием по соответствующим переменным уравнений, полученных выше для решения главных геодезических задач.

Однако такой путь получения производных довольно затруднителен, так как возника-

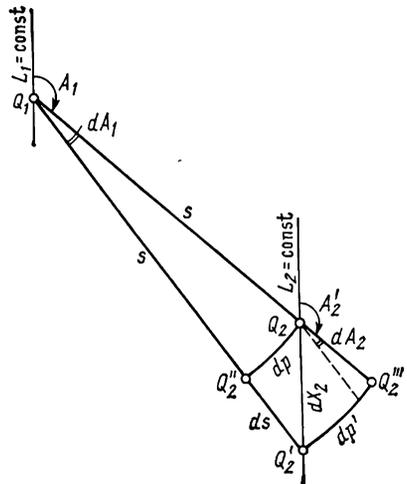


Рис. 44

ет необходимость в выполнении утомительных преобразований весьма сложных выражений, получаемых после дифференцирования. Поэтому при выводе формул мы будем пользоваться геометрическим представлением частных дифференциалов, составляющих правые части уравнений (IV.187). Такой вывод формул является менее строгим, но более наглядным.

Прежде всего определим влияние изменения широты B_2 на величины s , A_1 и A_2 при постоянной величине долготы L_2 и неизменном положении начальной точки Q_1 .

Пусть точка Q_2 (рис. 44) переместилась вдоль меридиана $L_2 = \text{const}$ в точку Q'_2 на расстояние dX_2 в сторону экватора, следовательно, широта B_2 уменьшилась на величину dB_2 .

Поэтому

$$dX_2 = -M_2 dB_2. \quad (\text{IV.188})$$

Такое перемещение вызвало увеличение длины геодезической линии на величину ds , начального азимута на dA_1 и обратного азимута на dA_2 . Эти дифференциалы, показанные на рис. 44, очевидно, являются частными дифференциалами и соответствуют вторым слагаемым в равенствах (IV.187), а именно

$$ds = \frac{\partial s}{\partial B_2} dB_2, \quad dA_1 = \frac{\partial A_1}{\partial B_2} dB_2, \quad dA_2 = \frac{\partial A_2}{\partial B_2} dB_2. \quad (\text{IV.189})$$

Дуга $Q_2Q'_2 = dp$ представляет собой дифференциал дуги геодезической окружности и определяется формулой

$$dp = m dA_1, \quad (\text{IV.190})$$

где m — приведенная длина геодезической линии, вычисленная по длине дуги s , широте B_1 и азимуту A_1 для начальной точки Q_1 . Но, как было показано в § 14, величина m будет той же самой, если ее вычислить по широте B_2 и азимуту A_2 для конечной точки Q_2 . Поэтому в дальнейшем изложении мы не будем ставить индекс 1 или 2 у величины m .

Дуга $Q'_2Q''_2 = dp'$ является также дифференциалом дуги геодезической окружности, но ее приведенная длина геодезической линии вычисляется по длине дуги $s + ds$, т. е.

$$dp' = (m + dm) dA_1 = dp + \left(\frac{dm}{ds} \right)_1 ds dA_1. \quad (\text{IV.191})$$

Величина производной приведенной длины геодезической линии зависит от того, с какой широтой и с каким азимутом она вычислена. Поэтому для этой производной необходимо ставить индекс 1 или 2.

По чертежу (см. рис. 44) можно установить, что

$$ds = dX_2 \cos(180^\circ - A'_2),$$

$$dp = dX_2 \cos(A'_2 - 90^\circ).$$

Так как $A_2' = A_2 - 180^\circ$, то с учетом равенств (IV.188) и (IV.190) находим

$$\begin{aligned} ds &= -M_2 \cos A_2 dB_2, \\ mdA_1 &= M_2 \sin A_2 dB_2. \end{aligned}$$

Приняв во внимание равенства (IV.189), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial B_2} &= -M_2 \cos A_2, \\ \frac{\partial A_1}{\partial B_2} &= \frac{M_2}{m} \sin A_2. \end{aligned} \right\} \quad (IV.192)$$

Теперь найдем еще производную обратного азимута A_2 .

На рис. 44 пунктиром обозначена дуга, параллельная дуге геодезической линии $Q_2''Q_2'$. Теперь дифференциал dA_2 можно найти из такого соотношения:

$$dA_2 = \frac{dp' - dp}{\partial s},$$

откуда согласно равенству (IV.191) находим

$$dA_2 = \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_1 dA_1.$$

Если же учтем соотношения (IV.189) и (IV.192), то получим

$$\frac{\partial A_2}{\partial B_2} = \frac{M_2}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_1 \sin A_2 \quad (IV.193)$$

Перейдем к определению влияния изменения долготы L_2 на s , A_1 и A_2 при постоянной широте B_2 и неизменном положении начальной точки Q_1 .

Пусть точка Q_2 (рис. 45) переместилась вдоль параллели $B_2 = \text{const}$ к западу в точку Q_2' на расстояние, равное длине дуги параллели $r_2 dL_2$, где $r_2 = N_2 \cos B_2$ — радиус параллели.

Из чертежа видно, что

$$\begin{aligned} ds &= r_2 dL_2 \sin A_2', \\ mdA_1 &= r_2 dL_2 \cos A_2', \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} ds &= -r_2 \sin A_2 dL_2, \\ mdA_1 &= -r_2 \cos A_2 dL_2, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

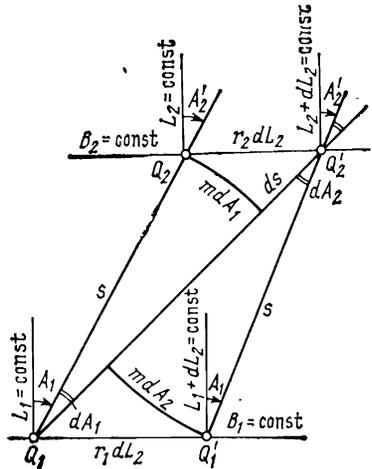


Рис. 45

Передвинем начальную точку Q_1 вдоль параллели $B_1 = \text{const}$ в точку Q'_1 на расстояние, равное длине дуги параллели $r_1 dL_2$. Так как после этого сдвига долгота обеих точек Q_1 и Q_2 изменилась на одну и ту же величину dL_2 , то длина геодезической линии и ее азимуты в точках Q'_1 и Q'_2 останутся прежними. Поэтому по чертежу можем написать, что

$$mdA_2 = r_1 dL_2 \cos A_1. \quad (\text{Б})$$

Для рассматриваемого случая частные дифференциалы будут определяться такими выражениями:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial L_2} dL_2, \quad dA_1 = \frac{\partial A_1}{\partial L_2} dL_2, \quad dA_2 = \frac{\partial A_2}{\partial L_2} dL_2.$$

С учетом этих выражений из формул (А) и (Б) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial L_2} &= -r_2 \sin A_2, \\ \frac{\partial A_1}{\partial L_2} &= -\frac{r_2}{m} \cos A_2, \\ \frac{\partial A_2}{\partial L_2} &= \frac{r_1}{m} \cos A_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.194})$$

Теперь найдем частные производные для того случая, когда конечная точка Q_2 остается в неизменном положении, а сдвигается начальная точка Q_1 .

Ясно, что в этом случае достаточно в полученных выше формулах поменять местами индексы 1 и 2. В результате такой замены найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial B_1} &= -M_1 \cos A_1, \\ \frac{\partial A_2}{\partial B_1} &= \frac{M_1}{m} \sin A_1, \\ \frac{\partial A_1}{\partial B_1} &= \frac{M_1}{m} \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_1, \\ \frac{\partial s}{\partial L_1} &= -r_1 \sin A_1, \\ \frac{\partial A_2}{\partial L_1} &= -\frac{r_1}{m} \cos A_1, \\ \frac{\partial A_1}{\partial L_1} &= \frac{r_2}{m} \cos A_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.195})$$

Значения всех частных производных, представленных равенствами (IV.192), (IV.193), (IV.194) и (IV.195), подставим в

уравнения (IV.187). Тогда получим полные дифференциальные формулы в следующем окончательном виде:

$$ds = -M_1 \cos A_1 dB_1 - M_2 \cos A_2 dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2 (dL_2 - dL_1), \quad (\text{IV.196})$$

$$dA_1 = \frac{M_1}{m} \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_1 dB_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_2 dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_2 (dL_2 - dL_1), \quad (\text{IV.197})$$

$$dA_2 = \frac{M_1}{m} \sin A_1 dB_1 + \frac{M_2}{m} \left(\frac{dm}{ds} \right)_1 \sin A_2 dB_2 + \frac{N_1 \cos B_1}{m} \cos A_1 (dL_2 - dL_1). \quad (\text{IV.198})$$

При получении равенства (IV.196) учтено уравнение Клеро $N_1 \cos B_1 \sin A_1 = -N_2 \cos B_2 \sin A_2$.

Теперь решим следующую задачу. Пусть независимыми переменными будут координаты B_1 , L_1 , азимут A_1 и длина геодезической линии s . Выясним, как изменятся координаты B_2 , L_2 и азимут A_2 в конечной точке Q_2 при малых изменениях перечисленных выше независимых переменных.

Соответствующие этому случаю дифференциальные формулы нетрудно найти из полученных выше трех уравнений (IV.196) — (IV.198), если первые два из них решить относительно дифференциалов dB_2 и dL_2 , а затем подставить найденные значения в третье уравнение.

Опустив промежуточные преобразования, приведем искомые дифференциальные формулы в окончательном виде:

$$dB_2 = \frac{M_1}{M_2} \left[\cos A_1 \cos A_2 + \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_1 \sin A_2 \right] dB_1 - \frac{\cos A_2}{M_2} ds + \frac{m}{M_2} \sin A_2 dA_1, \quad (\text{IV.199})$$

$$dL_2 = dL_1 - \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \left[\cos A_1 \sin A_2 - \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 \times \sin A_1 \cos A_2 \right] dB_1 - \frac{\sin A_2}{N_2 \cos B_2} ds - \frac{m \cos A_2}{N_2 \cos B_2} dA_1, \quad (\text{IV.200})$$

$$dA_2 = -M_1 \operatorname{tg} A_2 \left\{ \frac{\operatorname{tg} B_1}{N_1} + \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \times \left[\cos A_1 \cos A_2 + \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_1 \sin A_2 \right] \right\} dB_1 - \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \sin A_2 ds + \left[\left(\frac{dm}{ds} \right)_1 - \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_2} \cos A_2 \right] dA_1. \quad (\text{IV.201})$$

Все найденные выше формулы можно применять при любой длине геодезической линии и при любом расположении ее начальной и конечной точек на поверхности земного эллипсоида. Эти формулы, конечно, приближенные, так как в них не приняты во внимание дифференциалы второго и более высоких порядков. Поэтому они тем точнее, чем меньше величины дифференциалов независимых переменных.

Для вычисления приведенной длины геодезической линии и ее производной, которые входят в коэффициенты при дифференциалах, в большинстве случаев достаточно использовать следующие простые формулы:

$$m = R \sin \frac{s}{R}, \quad \frac{dm}{ds} = \cos \frac{s}{R},$$

где $R = \sqrt{MN}$ вычисляется по широте B_1 или B_2 .

При невысоких требованиях к точности дифференциальные формулы могут быть значительно упрощены, если коэффициенты при дифференциалах представить в сферическом выражении, т. е. пренебречь сжатием эллипсоида.

Такие упрощенные дифференциальные формулы были получены в § 26.

Глава V

РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 35. СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ

При решении геодезических задач между точками в пространстве используют следующие системы координат.

А. Системы геоцентрических координат.

Начало координат находится в центре эллипсоида;

а) декартовы прямоугольные координаты:

ось z расположена вдоль оси вращения эллипсоида и направлена на северный полюс,

ось x расположена в плоскости начального меридиана $L=0$,

ось y расположена в плоскости меридиана с долготой $L=90^\circ$;

б) полярные координаты:

геоцентрическая широта Φ — угол между радиусом-вектором и плоскостью экватора,

геодезическая долгота L ,

геоцентрический радиус-вектор ρ — расстояние по прямой, соединяющей заданную точку пространства с центром эллипсоида.

Связь между двумя системами геоцентрических координат осуществляется по следующим формулам (рис. 46):

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \Phi \cos L, \\ y &= \rho \cos \Phi \sin L, \\ z &= \rho \sin \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (V.1)$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x},$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x \cos L + y \sin L} = \frac{z}{R}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \cos \Phi + z \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (V.2)$$

Б. Системы топоцентрических координат.

Начало координат находится в некоторой точке Q_0 (B_0, L_0, H_0), расположенной обычно на земной поверхности;

а) декартовы прямоугольные координаты:

ось ζ расположена на продолжении нормали к поверхности эллипсоида в точке Q_0 ,

ось ξ расположена в плоскости меридиана точки Q_0 перпендикулярно к оси ζ и направлена в сторону оси вращения эллипсоида,

ось η перпендикулярна к осям ξ и ζ и направлена в сторону увеличения долготы;

б) полярные координаты:

геодезический азимут A_0 — двугранный угол между плоскостью меридиана начальной точки и нормальной плоскостью, проходящей через нормаль в точке Q_0 и заданную точку Q пространства,

зенитное расстояние Z_0 — угол между осью ζ и прямолинейным направлением из точки Q_0 в точку Q ,

расстояние D между точками Q_0 и Q по прямой.

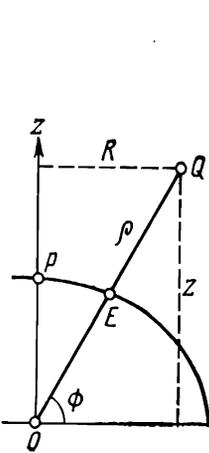


Рис. 46

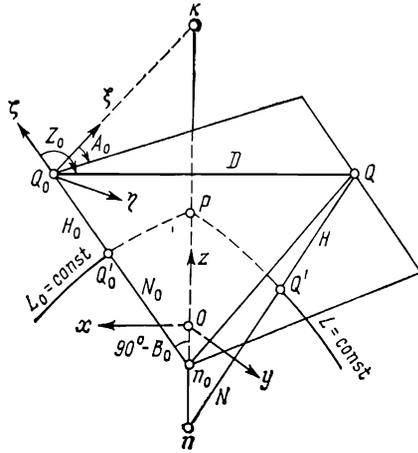


Рис. 47

Связь между двумя системами топоцентрических координат осуществляется по следующим формулам (рис. 47):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= D \sin Z_0 \cos A_0, \\ \eta &= D \sin Z_0 \sin A_0, \\ \zeta &= D \cos Z_0, \end{aligned} \right\} \quad (V.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A_0 &= \frac{\eta}{\xi}, \\ \operatorname{ctg} Z_0 &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{\zeta}{\xi \cos A_0 + \eta \sin A_0}, \\ D &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = (\xi \cos A_0 + \eta \sin A_0) \sin Z_0 + \zeta \cos Z_0. \end{aligned} \right\} \quad (V.4)$$

В. Система геодезических координат:

геодезическая широта B ,

геодезическая долгота L ,

геодезическая высота H — кратчайшее расстояние от заданной точки пространства до поверхности эллипсоида (продолжение нормали к этой поверхности).

Связь между геодезическими и декартовыми геоцентрическими координатами осуществляется по следующим формулам (рис. 48):

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L, \\ y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ z &= (N + H) \sin B - e^2 N \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.5})$$

Эти формулы легко получаются из ранее найденных уравнений поверхности эллипсоида (I.73), если к каждой из координат x , y , z прибавить проекции высоты H на соответствующие оси координат, а именно:

$$\Delta x = H \cos B \cos L,$$

$$\Delta y = H \cos B \sin L,$$

$$\Delta z = H \sin B.$$

Найдем формулы обратного перехода от x , y , z к B , L , H .

Очевидно, долготу можно сразу же найти по формуле

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x}. \quad (\text{V.6})$$

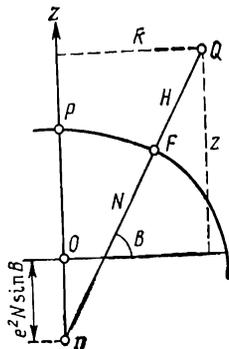


Рис. 48

Так как по рис. 48

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = x \cos L + y \sin L = (N + H) \cos B, \quad (\text{V.7})$$

то, основываясь на равенствах (V.5), можем написать формулу для определения широты B :

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e^2 N \sin B}{R}. \quad (\text{V.8})$$

В правой части этого равенства выражение $N \sin B$ зависит от искомой широты B . Учитывая, что это выражение умножается на малую величину $e^2 \approx \frac{1}{150}$, широту B можно найти по формуле (V.8) методом последовательных приближений. Хотя приближений будет немного (не более трех при вычислении широты с точностью до $0,0001''$), все же вычисления затрудняются тем, что в каждом приближении необходимо находить арктангенс широты, а затем вычислять $N \sin B$ для следующего приближения.

В геодезической литературе опубликовано большое число предложений по упрощению вычисления широты. Большинство этих предложений сводится к тому, чтобы избавиться от иррациональности и от применения метода приближений. С этой

целью уравнение (V.8) обычно заменяют тем или иным приближенным выражением.

Между тем современные вычислительные машины, как большие ЭВМ, так и малые настольные, позволяют легко извлекать квадратный корень. Число же приближений будет всего два или три, что тоже не должно вызывать затруднений. Поэтому единственным недостатком, усложняющим вычисления, можно считать лишь необходимость вычисления в каждом приближении функций $\operatorname{arctg} B$ и $\sin B$.

Для устранения этого недостатка преобразуем формулу (V.8), предварительно переписав ее в таком виде:

$$\operatorname{tg} B = \frac{z}{R} + \frac{e^2 N \sin B}{R}.$$

Так как

$$N = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}},$$

то

$$\operatorname{tg} B = \frac{z}{R} + \frac{ce^2 \sin B}{R\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}}.$$

Во втором слагаемом разделим числитель и знаменатель на $\cos B$ и учтем, что

$$\frac{1}{\cos^2 B} = 1 + \operatorname{tg}^2 B.$$

Тогда получим окончательно

$$\operatorname{tg} B = \frac{z}{R} + \frac{ce^2 \operatorname{tg} B}{R\sqrt{1 + e'^2 + \operatorname{tg}^2 B}}. \quad (\text{V.9})$$

При вычислениях по формуле (V.9) не возникает необходимости находить в каждой итерации $\operatorname{arctg} B$, благодаря чему существенно упрощается весь процесс приближений.

Для удобства вычислений формулу (V.9) представим в следующем виде:

$$t_{i+1} = t_0 + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}} \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (\text{V.10})$$

где

$$t_0 = \frac{z}{R}, \quad p = \frac{ce^2}{R}, \quad k = 1 + e'^2.$$

После завершения вычислений по формуле (V.10) широта B определится по последнему приближению t_{i+1} :

$$B = \operatorname{arctg}(t_{i+1}). \quad (\text{V.11})$$

Число приближений зависит от требуемой точности широты B или точности $\operatorname{tg} B$. Эта зависимость показана в табл. 21.

Теперь найдем формулу для определения геодезической высоты H . Для этого воспользуемся одним из равенств (V.7)

$$R = (N + H) \cos B.$$

Т а б л и ц а 21

Точность вычислений $\operatorname{tg} B$	Число приближений
10^{-6}	2
10^{-9}	3
10^{-12}	4

Отсюда находим

$$H = \frac{1}{\cos B} (R - N \cos B) = \left(R - \frac{c \cos B}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}} \right) \frac{1}{\cos B}.$$

Разделив во втором слагаемом в скобках числитель и знаменатель на $\cos B$, получим

$$H = \frac{1}{\cos B} \left(R - \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 + \operatorname{tg}^2 B}} \right). \quad (\text{V.12})$$

Для удобства вычислений равенство (V.12) представим в таком виде:

$$H = \left(R - \frac{c}{\sqrt{k + t_{i+1}^2}} \right) \sqrt{1 + t_{i+1}^2}, \quad (\text{V.13})$$

где величина t_{i+1} получена по формуле (V.10) в последнем приближении.

Пример вычисления широты B и высоты H .

Исходные данные: $z = R = 5\,604\,589,00$ м.

Вычисления:

$$t_0 = 1; \quad p = 0,007643002;$$

$$t_1 = 1,005395337 \quad (B_1 = 45^\circ 09' 15''),$$

$$t_2 = 1,005409882 \quad (B_2 = 45^\circ 09' 16,4''),$$

$$t_3 = 1,005409921 \quad (B_3 = 45^\circ 09' 16,4317''),$$

$$H = 1558551,63 \text{ м.}$$

Из большого числа неитеративных методов определения широты, опубликованных за последнее десятилетие, выделяется своим изяществом и высокой точностью метод, который предложил английский геодезист Боуринг (Survey Review, XXIII, 181, July 1976).

Сущность этого метода состоит в следующем.

В равенстве (V.8) от геодезической широты перейдем к приведенной. Тогда

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{z}{R} + \frac{e^2 c \sin u}{R} \right).$$

Введем вспомогательную функцию по формуле

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{R\sqrt{1 - e^2}} = \frac{z\sqrt{1 + e'^2}}{R} = \frac{z}{R} \frac{a}{b}. \quad (\text{V.14})$$

Геометрический смысл аргумента θ состоит в том, что этот угол равен приведенной широте точки E (см. рис. 46).

Выразив z/R через $\operatorname{tg} \theta$ в предыдущем равенстве, получаем

$$\operatorname{tg} u = (1 - e^2) \operatorname{tg} \theta + \frac{e^2 a}{R} \sin u.$$

Функцию $\sin u$ в этом равенстве заменим следующим приближенным соотношением:

$$\sin u = \sin \theta + \frac{d \sin \theta}{d \operatorname{tg} \theta} (\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \theta) + \dots = \sin \theta + (\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \theta) \cos^3 \theta + \dots$$

Тогда получим

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \theta = \frac{e^2 a}{R} \sin \theta + \frac{e^2 a}{R} (\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \theta) \cos^3 \theta - e^2 \operatorname{tg} \theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \theta + \frac{\frac{e^2 a}{R} \sin \theta - e^2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \frac{e^2 a}{R} \cos^3 \theta}.$$

После приведения к общему знаменателю и умножения на R находим

$$\operatorname{tg} u = \frac{R \operatorname{tg} \theta (1 - e^2) + e^2 a \sin^3 \theta}{R - e^2 a \cos^3 \theta}.$$

Перейдем к тангенсу геодезической широты, разделив обе части последнего равенства на $\sqrt{1 - e^2}$. Принимая во внимание равенство (V.14), получаем окончательно

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e'^2 a \sin^3 \theta}{R - e^2 a \cos^3 \theta}. \quad (\text{V.15})$$

Погрешность в широте, вычисленной по формуле (V.15), определяется таким выражением:

$$dB'' = \frac{3}{2} \rho'' a e^6 \sin^3 \theta \cos^3 \theta \frac{H^2}{(a + H)^3}.$$

Наибольшего значения dB'' достигает при $\theta = 45^\circ$, при этом величина погрешности в зависимости от высоты H будет находиться в следующих пределах:

если $0 < H < 700$ км, то $dB < 0,0001''$,
 если 700 км $< H < 3700$ км, то $dB < 0,0010''$.

Наибольшей величины, равной $0,00172''$, погрешность в широте достигает при $H = 2a$. При дальнейшем возрастании высоты погрешность уменьшается.

Как видно, формула (V.15) обладает весьма высокой точностью определения широты, вместе с тем она имеет достаточно простой вид. Участвующие в ней функции синус и косинус легко вычисляются без перехода к аргументу θ по таким формулам:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad \sin \theta = \operatorname{tg} \theta \cos \theta,$$

где $\operatorname{tg} \theta$ определяется по равенству (V.14).

Постоянные коэффициенты в формулах (V.14) и (V.15) для эллипсоида Красовского имеют такие значения:

$$\frac{a}{b} = \frac{298,3}{297,3} = 1,0033\ 636\ 058;$$

$$e'^2 a = 42\ 835,883;$$

$$e^2 a = 42\ 692,283.$$

Пример вычисления широты по формулам (V.14) и (V.15).
 Исходные данные: $z = R = 5604\ 589,00$ м.

Вычисленные значения:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,003\ 363\ 606; \quad \operatorname{tg} B = 1,005\ 409\ 924;$$

$$B = 45^\circ\ 09'\ 16,4320''.$$

Связь между декартовыми топоцентрическими и декартовыми геоцентрическими координатами установим следующим образом.

Прежде всего начало координат топоцентрической системы перенесем в точку n_0 (см. рис. 47), в результате чего координата ζ увеличится на величину $N_0 + H_0$.

Затем повернем оси координат ξ и ζ вокруг оси η на угол $90^\circ - B_0$, чтобы ось ζ совпала с осью вращения эллипсоида.

После этого перенесем начало координат n_0 в центр эллипсоида O на расстояние $On_0 = e^2 N_0 \sin B_0$.

Наконец, оси координат, лежащие в плоскости экватора, повернем вокруг оси z на угол, равный долготе L_0 начальной точки Q_0 , а у абсциссы изменим знак на обратный, в результате преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x &= [(\zeta + N_0 + H_0) \cos B_0 - \xi \sin B_0] \cos L_0 - \eta \sin L_0, \\ y &= [(\zeta + N_0 + H_0) \cos B_0 - \xi \sin B_0] \sin L_0 + \eta \cos L_0, \\ z &= (\zeta + N_0 + H_0) \sin B_0 + \xi \cos B_0 - e^2 N_0 \sin B_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.16})$$

Чтобы найти обратные зависимости, решим эти уравнения относительно ξ , η и ζ .

В результате решения получим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (z + e^2 N_0 \sin B_0) \cos B_0 - (x \cos L_0 + y \sin L_0) \sin B_0, \\ \eta &= y \cos L_0 - x \sin L_0, \\ \zeta &= (z + e^2 N_0 \sin B_0) \sin B_0 + (x \cos L_0 + \\ &+ y \sin L_0) \cos B_0 - (N_0 + H_0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.17})$$

§ 36. РЕШЕНИЕ ГЛАВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕЖДУ ТОЧКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

По аналогии с решением главных геодезических задач на поверхности эллипсоида, т. е. в двумерном пространстве, сформулируем сущность решения главных геодезических задач в пространстве трех измерений.

Прямая геодезическая задача. Даны геодезические координаты B_1, L_1, H_1 некоторой точки Q_1 и полярные топоцентрические координаты D_{12}, A_{12}, Z_{12} второй точки Q_2 . По этим данным требуется найти геодезические координаты B_2, L_2, H_2 точки Q_2 .

Обратная геодезическая задача. Даны геодезические координаты B, L, H двух точек Q_1 и Q_2 . Требуется найти полярные топоцентрические координаты D_{12}, A_{12}, Z_{12} точки Q_2 относительно точки Q_1 .

Для решения этих задач применяются формулы, полученные в предыдущем параграфе.

При решении прямой геодезической задачи последовательно применяются формулы (V.3), (V.16), (V.6), (V.7), (V.10), (V.11) и (V.13).

При решении обратной геодезической задачи последовательно применяются формулы (V.5), (V.17) и (V.4).

Конечно, во всех этих формулах индексы координат следует заменить индексами, соответствующими исходным данным в той или иной задаче. Кроме того, с целью упрощения решения обеих задач изменим направления осей x и y в плоскости экватора на угол, равный долготе L_1 точки Q_1 . Тогда ось x будет лежать в плоскости меридиана $L_1 = \text{const}$. Поэтому в формулах (V.16) и (V.17) для точки Q_1 следует положить $L_0 = 0$, а в формуле (V.5) для точки Q_2 вместо долготы L следует взять разность долгот $L_2 - L_1$.

С учетом этих замечаний приведем алгоритмы решения главных геодезических задач между двумя точками пространства.

Решение прямой геодезической задачи

Исходные данные: $B_1, L_1, H_1; D_{12}, A_{12}, Z_{21}$.

$$\left. \begin{aligned} \xi_{12} &= D_{12} \sin Z_{12} \cos A_{12}, \\ \eta_{12} &= D_{12} \sin Z_{12} \sin A_{12}, \\ \zeta_{12} &= D_{12} \cos Z_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.18})$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}, \\ x_2 &= (N_1 + H_1 + \zeta_{12}) \cos B_1 - \xi_{12} \sin B_1, \\ y_2 &= \eta_{12}, \\ z_2 &= (N_1 + H_1 + \zeta_{12}) \sin B_1 + \xi_{12} \cos B_1 - e^2 N_1 \sin B_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.19})$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \\ t_0 &= \frac{z_2}{R}, \quad p = \frac{ce^2}{R} \\ k &= 1 + e'^2, \\ t_{i+1} &= t_0 + \frac{pt_i}{\sqrt{k + t_i^2}} \quad (i=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.20})$$

Вслед за последней итерацией вычисляются

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \arctg(t_{i+1}), \\ H_2 &= \left(R - \frac{c}{\sqrt{k + t_{i+1}^2}} \right) \sqrt{1 + t_{i+1}^2}, \\ L_2 - L_1 = l &= \arctg\left(\frac{y_2}{x_2}\right), \quad L_2 = L_1 + l, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.21})$$

Знак y_2	+	+	-	-
Знак x_2	+	-	-	+
$l =$	$ l $	$180^\circ - l $	$ l - 180^\circ$	$- l $

$|l|$ — аргумент в первой четверти.

Постоянные величины для эллипсоида Красовского:

$$a = 6378\,245, \quad c = 6399\,698,902,$$

$$e^2 = 0,006\,693\,422; \quad ce^2 = 42\,835,88,$$

$$k = 1,006\,738\,525.$$

Решение обратной геодезической задачи

Исходные данные: $B_1, L_1, H_1; B_2, L_2, H_2$.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}, \quad N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}, \\ x_2 &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos(L_2 - L_1), \\ y_2 &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1), \\ z_2 &= [N_2(1 - e^2) + H_2] \sin B_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.22})$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{12} &= (z_2 + e^2 N_1 \sin B_1) \cos B_1 - x_2 \sin B_1, \\ \eta_{12} &= y_2, \\ \zeta_{12} &= (z_2 + e^2 N_1 \sin B_1) \sin B_1 + x_2 \cos B_1 - (N_1 + H_1), \\ A_{12} &= \arctg \left(\frac{\eta_{12}}{\xi_{12}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.23})$$

Знак η_{12}	+	+	-	--
Знак ξ_{12}	+	-	-	+
$A_{12} =$	$ A_{12} $	$180^\circ - A_{12} $	$180^\circ + A_{12} $	$360^\circ - A_{12} $

A_{12} — аргумент в первой четверти.

$$\left. \begin{aligned} \psi_{12} &= \xi_{12} \cos A_{12} + \eta_{12} \sin A_{12} = \sqrt{\xi_{12}^2 + \eta_{12}^2}, \\ z_{12} &= \text{arcctg} \left(\frac{\xi_{12}}{\psi_{12}} \right), \\ D_{12} &= \psi_{12} \sin Z_{12} + \zeta_{12} \cos Z_{12} = \sqrt{\psi_{12}^2 + \zeta_{12}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.24})$$

Если необходимо найти для этого же отрезка D_{12} азимут и зенитное расстояние со второй точки на первую, т. е. величины A_{21} и Z_{21} , то можно применить эти же формулы, но в них следует поменять местами индексы 1 и 2.

Для этого общего случая решения обратной геодезической задачи можно найти формулу, позволяющую проконтролировать результаты решения.

Приравняем друг другу значения координаты η для точки Q_2 , определяемые равенствами (V.18), (V.23) и (V.22),

$$D_{12} \sin Z_{12} \sin A_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin (L_2 - L_1).$$

Поменяв местами индексы 1 и 2, напишем аналогичное равенство для точки Q_1

$$D_{21} \sin Z_{21} \sin A_{21} = -(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin (L_2 - L_1).$$

Исключив из этих равенств $D_{12} = D_{21}$ и $\sin (L_2 - L_1)$, получим

$$\begin{aligned} (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin Z_{12} \sin A_{12} + \\ + (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin Z_{21} \sin A_{21} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Очевидно, между координатами любых двух точек Q_i и Q_k на заданном отрезке прямой D в пространстве существует зависимость, устанавливаемая формулой

$$\begin{aligned} (N_i + H_i) \cos B_i \sin Z_{ik} \sin A_{ik} + \\ + (N_k + H_k) \cos B_k \sin Z_{ki} \sin A_{ki} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

Это соотношение впервые вывел английский геодезист М. Хотин в 1957 г.

Приведенные выше формулы можно применять также и для решения геодезических задач между точками на поверхности эллипсоида, если в этих формулах положить $H_1 = H_2 = 0$. В результате решения, например, обратной геодезической задачи в этом случае мы получим азимуты прямого и обратного нормальных сечений и длину хорды этих сечений.

Методы решения геодезических задач между точками на поверхности эллипсоида с использованием хорд вместо геодезических линий были исследованы различными учеными еще в прошлом столетии. Наиболее полно они рассмотрены в трудах Гельмерта [7] и Кларка [13]. В 1954 г. советский ученый М. С. Молоденский [15] вновь обратил внимание геодезистов на применение метода хорд на всех этапах обработки геодезических измерений. Однако, не обладая особыми преимуществами перед методами решения задач с использованием геодезической линии, метод хорд не нашел практического применения.

Формулы, полученные выше для решения прямой и обратной геодезических задач между точками в пространстве, лежат в основе решения многочисленных задач, встречающихся в практике обработки пространственных геодезических сетей в самых различных вариантах (табл. 22 и 23). Разнообразие вариантов объясняется, во-первых, возможностью широкого выбора необходимых измеренных величин на двух пунктах, во-вторых, возможностью увеличения числа пунктов, на которых производятся измерения, что позволяет осуществить разнообразные засечки: прямые, обратные, угловые, линейные, комбинированные и и т. п.

Современное состояние исследований в области трехмерной геодезии наиболее полно освещено в статье В. Ф. Еремеева и М. И. Юркиной «Некоторые вопросы обработки пространственных сетей» [8].

Таблица 22

Решение прямой геодезической задачи между точками в пространстве

B_1	65°	$N_1 + H_1 + \zeta_{12}$	6 222 039, 73
L_1	45°	x_2	4 326 367, 52
H_1	500 м	y_2	681 437, 31
Z_{12}^1	95°	z_2	4 809 043, 79
A_{12}	160°	R	4 379 704, 64
D_{12}	2 000 000, 00 м	t_0	1, 098 029 247
ξ_{12}	-1 872 233, 61	p	0, 009 780 542
η_{12}	681 437, 31	t (с)	1, 105 270 917
ζ_{12}	-174 311, 49	B_2	47°51'45, 3793"
$\sin B_1$	0, 906 307 787	L_2	53°57'03, 6127"
$\cos B_1$	0, 422 618 262	H_2	137 983, 77 м
N_1	6 395 851, 22		

Решение обратной геодезической задачи между точками в пространстве

B_1	65°	N_2	6 390 015,29	N_1	6 395 851,22
L_1	45°				
H_1	500 м	x_2	4 326 367,52	x_1	2 670 294,42
B_2	47°51'45,3793"	y_2	681 437,31	y_1	—420 592,62
L_2	53°57'03,6127"	z_2	4 809 043,79	z_1	5 758 263,76
H_2	137 983,77 м	ξ_{12}	—1 872 233,61	ξ_{21}	1 904 434,71
$\sin B_1$	0,906 307 787	η_{12}	681 437,31	η_{21}	—420 592,62
$\cos B_1$	0,422 618 262	ζ_{12}	—174 311,49	ζ_{21}	—442 978,87
$\sin B_2$	0,741 538 122	A_{12}	159°59'59,9996"	A_{21}	347°32'46,2765"
$\cos B_2$	0,670 910 734	ψ_{12}	1 992 389,39	ψ_{21}	1 950 325,54
$\sin(L_2 - L_1)$	0,155 589 786	Z_{12}	95°00'00,0005"	Z_{21}	102°47'47,5071"
$\cos(L_2 - L_1)$	0,987 821 754	D_{12}	2 000 000,00 м	D_{21}	2 000 000,00 м

Контроль по уравнению (V.25):

$$921\,035,72 - 921\,035,72 = 0.$$

В этой работе рассматриваются вопросы обработки пространственных геодезических сетей без проектирования их на поверхность эллипсоида. В основу изложения положена теория определения фигуры физической поверхности Земли геометрическим методом, развитая М. С. Молоденским.

§ 37. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОТРЕЗКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Здесь будут рассмотрены дифференциальные формулы, устанавливающие зависимость между малыми (дифференциальными) изменениями полярных топоцентрических координат D , A и Z и геодезических координат начальной точки Q_1 (B_1 , L_1 , H_1) и конечной точки Q_2 (B_2 , L_2 , H_2) прямолинейного отрезка D_{12} .

Предварительно установим зависимости между малыми изменениями декартовых и геодезических координат произвольной точки в пространстве. Эти зависимости в общем виде можно записать так:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL + \frac{\partial x}{\partial H} dH,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL + \frac{\partial y}{\partial H} dH,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial B} dB + \frac{\partial z}{\partial L} dL + \frac{\partial z}{\partial H} dH.$$

Частные производные в этих равенствах нетрудно найти из уравнений (V.5), если учесть, что (см. § 8) для точки на эллип-

соиде (при $H=0$) были получены производные (I.93) и (I.94),

$$\frac{d}{dB} (N \cos B) = -M \sin B,$$

$$\frac{dz}{dB} = M \cos B.$$

Таким образом, после дифференцирования функций (V.5) и подстановки производных в предыдущие равенства получим

$$\left. \begin{aligned} dx &= -(M+H) \sin B \cos L dB - \\ &\quad -(N+H) \cos B \sin L dL + \cos B \cos L dH, \\ dy &= -(M+H) \sin B \sin L dB + \\ &\quad + (N+H) \cos B \cos L dL + \cos B \sin L dH, \\ dz &= (M+H) \cos B dB + \sin B dH. \end{aligned} \right\} \quad (V.27)$$

Отсюда найдем обратные зависимости

$$\left. \begin{aligned} (M+H) dB &= \cos B dz - (\cos L dx + \sin L dy) \sin B, \\ (N+H) \cos B dL &= \cos L dy - \sin L dx, \\ dH &= (\cos L dx + \sin L dy) \cos B + \sin B dz \end{aligned} \right\} \quad (V.28)$$

Применим эти формулы к начальной точке Q_1 и конечной точке Q_2 прямолинейного отрезка D_{12} . При этом будем полагать, что ось x располагается в плоскости меридиана начальной точки Q_1 . Поэтому в формулах (V.27) и (V.28) следует положить для начальной точки $L=0$, а для конечной точки $L=L_2 - L_1 = l$. Тогда эти формулы примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= -(M_1+H_1) \sin B_1 dB_1 + \cos B_1 dH_1, \\ dy_1 &= (N_1+H_1) \cos B_1 dL_1, \\ dz_1 &= (M_1+H_1) \cos B_1 dB_1 + \sin B_1 dH_1. \end{aligned} \right\} \quad (V.29)$$

$$\left. \begin{aligned} (M_1+H_1) dB_1 &= \cos B_1 dz_1 - \sin B_1 dx_1, \\ (N_1+H_1) \cos B_1 dL_1 &= dy_1, \\ dH_1 &= \cos B_1 dx_1 + \sin B_1 dz_1. \end{aligned} \right\} \quad (V.30)$$

$$\left. \begin{aligned} dx_2 &= [\cos B_2 dH_2 - (M_2+H_2) \sin B_2 dB_2] \cos l - \\ &\quad - (N_2+H_2) \cos B_2 \sin l dL_2, \\ dy_2 &= [\cos B_2 dH_2 - (M_2+H_2) \sin B_2 dB_2] \sin l + \\ &\quad + (N_2+H_2) \cos B_2 \cos l dL_2, \\ dz_2 &= (M_2+H_2) \cos B_2 dB_2 + \sin B_2 dH_2. \end{aligned} \right\} \quad (V.31)$$

$$\left. \begin{aligned} (M_2+H_2) dB_2 &= \cos B_2 dz_2 - \\ &\quad - (\cos l dx_2 + \sin l dy_2) \sin B_2, \\ (N_2+H_2) \cos B_2 dL_2 &= \cos l dy_2 - \sin l dx_2, \\ dH_2 &= (\cos l dx_2 + \sin l dy_2) \cos B_2 + \sin B_2 dz_2. \end{aligned} \right\} \quad (V.32)$$

Продифференцировав равенства (V.18) по всем переменным, найдем

$$\begin{aligned}d\xi_{12} &= \sin Z_{12} \cos A_{12} dD_{12} + D_{12} \cos Z_{12} \cos A_{12} dZ_{12} - \\ &- D_{12} \sin Z_{12} \sin A_{12} dA_{12}, \\d\eta_{12} &= \sin Z_{12} \sin A_{12} dD_{12} + D_{12} \cos Z_{12} \sin A_{12} dZ_{12} + \\ &+ D_{12} \sin Z_{12} \cos A_{12} dA_{12}, \\d\zeta_{12} &= \cos Z_{12} dD_{12} - D_{12} \sin Z_{12} dZ_{12}.\end{aligned}$$

Решив эти уравнения относительно дифференциалов dD_{12} , dZ_{12} и dA_{12} , получим

$$\left. \begin{aligned}dD_{12} &= (\cos A_{12} d\xi_{12} + \sin A_{12} d\eta_{12}) \sin Z_{12} + \cos Z_{12} d\zeta_{12}, \\D_{12} dZ_{12} &= (\cos A_{12} d\xi_{12} + \sin A_{12} d\eta_{12}) \cos Z_{12} - \\ &- \sin Z_{12} d\zeta_{12}, \\D_{12} \sin Z_{12} dA_{12} &= \cos A_{12} d\eta_{12} - \sin A_{12} d\xi_{12}.\end{aligned} \right\} \quad (\text{V.33})$$

Эти уравнения являются исходными для получения искомым дифференциальных формул.

В последующем наша задача будет заключаться в том, чтобы найти зависимость между дифференциалами $d\xi_{12}$, $d\eta_{12}$ и $d\zeta_{12}$ и изменениями координат начальной и конечной точек отрезка D_{12} .

Сначала найдем требуемую зависимость для начальной точки.

Продифференцируем равенство (V.23) по переменным B_1 , L_1 и H_1 , полагая неизменными B_2 , L_2 , H_2 , а также величину $e^2 N_1$, тем самым пренебрегая членами порядка e^4 . Одновременно будем учитывать равенства (V.22).

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}d\xi_{12} &= [-(z_2 + e^2 N_1 \sin B_1) \sin B_1 + \\ &+ e^2 N_1 \cos^2 B_1 - x_2 \cos B_1] dB_1 - y_2 \sin B_1 dL_1, \\d\eta_{12} &= -x_2 dL_1, \\a\zeta_{12} &= [(z_2 + e^2 N_1 \sin B_1) \cos B_1 + e^2 N_1 \sin B_1 \cos B_1 - \\ &- x_2 \sin B_1 - e^2 N_1 \sin B_1 \cos B_1] dB_1 + y_2 \cos B_1 dL_1 - dH_1.\end{aligned}$$

Пользуясь выражениями (V.23), перейдем к координатам ξ , η , ζ . В процессе преобразований учтем, что $N_1 - e^2 N_1 \cos^2 B_1 = M_1$ с точностью до e^4 . Находим

$$\begin{aligned}d\xi_{12} &= -(\zeta_{12} + M_1 + H_1) dB_1 - \eta_{12} \sin B_1 dL_1, \\d\eta_{12} &= [\xi_{12} \sin B_1 - (\zeta_{12} + N_1 + H_1) \cos B_1] dL_1, \\d\zeta_{12} &= \xi_{12} dB_1 + \eta_{12} \cos B_1 dL_1 - dH_1.\end{aligned}$$

Подставив значения этих дифференциалов в уравнения (V.33) и учтя равенства (V.18), получим

$$\left. \begin{aligned} dD_{12} &= -(M_1 + H_1) \sin Z_{12} \cos A_{12} dB_1 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin Z_{12} \sin A_{12} dL_1 - \cos Z_{12} dH_1, \\ D_{12} dZ_{12} &= -[D_{12} + (M_1 + H_1) \cos Z_{12}] \cos A_{12} dB_1 - [D_{12} + (N_1 + H_1) \cos Z_{12}] \sin A_{12} \cos B_1 dL_1 + \sin Z_{12} dH_1, \\ D_{12} \sin Z_{12} dA_{12} &= (D_{12} \cos Z_{12} + M_1 + H_1) \sin A_{12} dB_1 + [D_{12} (\sin B_1 \sin Z_{12} - \cos B_1 \cos Z_{12} \cos A_{12}) - (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos A_{12}] dL_1. \end{aligned} \right\} \quad (V.34)$$

Теперь найдем изменения полярных координат в зависимости от изменений координат конечной точки.

Продифференцируем снова равенства (V.23) по переменным x_2 , y_2 и z_2 . В результате получим

$$d\xi_{12} = \cos B_1 dz_2 - \sin B_1 dx_2,$$

$$d\eta_{12} = dy_2,$$

$$d\zeta_{12} = \sin B_1 dz_2 + \cos B_1 dx_2.$$

Дифференциалы декартовых координат в этих равенствах заменим их значениями по уравнениям (V.31). Тогда

$$\begin{aligned} d\xi_{12} &= (M_2 + H_2) (\cos B_1 \cos B_2 + \sin B_1 \sin B_2 \cos l) dB_2 + (N_2 - H_2) \cos B_2 \sin B_1 \sin l dL_2 + (\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l) dH_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta_{12} &= -(M_2 + H_2) \sin B_2 \sin l dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos l dL_2 + \cos B_2 \sin l dH_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\zeta_{12} &= (M_2 + H_2) (\sin B_1 \cos B_2 - \cos B_1 \sin B_2 \cos l) dB_2 - (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos B_1 \sin l dL_2 + (\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l) dH_2. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в равенства (V.33) получим

$$\left. \begin{aligned} dD_{12} &= (M_2 + H_2) [(a_1) \sin Z_{12} \cos A_{12} - (a_2) \sin Z_{12} \sin A_{12} + (a_3) \cos Z_{12}] dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 [(b_1) \sin Z_{12} \cos A_{12} + (b_2) \sin Z_{12} \sin A_{12} - (b_3) \cos Z_{12}] dL_2 + [(c_1) \sin Z_{12} \cos A_{12} + (c_2) \sin Z_{12} \sin A_{12} + (c_3) \cos Z_{12}] dH_2, \\ D_{12} dZ_{12} &= (M_2 + H_2) [(a_1) \cos Z_{12} \cos A_{12} - (a_2) \cos Z_{12} \sin A_{12} - (a_3) \sin Z_{12}] dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 [(b_1) \cos Z_{12} \cos A_{12} + (b_2) \cos Z_{12} \sin A_{12} + (b_3) \sin Z_{12}] dL_2 + [(c_1) \cos Z_{12} \cos A_{12} + \end{aligned} \right\} \quad (V.35)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &+ (c_2) \cos Z_{12} \sin A_{12} + (c_3) \sin Z_{12} dH_2, \\
 D_{12} \sin Z_{12} dA_{12} &= -(M_2 + H_2) [(a_1) \sin A_{12} + \\
 &+ (a_2) \cos A_{12}] dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 [- (b_1) \sin A_{12} + \\
 &+ (b_2) \cos A_{12}] dL_2 + [- (c_1) \sin A_{12} + (c_2) \cos A_{12}] dH_2,
 \end{aligned} \right\} \quad (V.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 (a_1) &= \cos B_1 \cos B_2 + \sin B_1 \sin B_2 \cos l, \\
 (a_2) &= \sin B_2 \sin l, \\
 (a_3) &= \sin B_1 \cos B_2 - \cos B_1 \sin B_2 \cos l, \\
 (b_1) &= \sin B_1 \sin l, \\
 (b_2) &= \cos l, \\
 (b_3) &= \cos B_1 \sin l, \\
 (c_1) &= \cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l, \\
 (c_2) &= \cos B_2 \sin l, \\
 (c_3) &= \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l.
 \end{aligned} \right\} \quad (V.36)$$

Таким образом, при изменении геодезических координат начальной точки используются формулы (V.34), а при изменении координат конечной точки — формулы (V.35). Характерной особенностью этих формул является то, что в них используются, кроме геодезических координат B , L , H обеих точек, азимут A_{12} и зенитное расстояние Z_{12} только в начальной точке. Этим они отличаются от других аналогичных дифференциальных формул, встречающихся в геодезической литературе, в которых используются одновременно азимуты и зенитные расстояния в обеих точках.

Для определения поправок dD_{21} , dZ_{21} и dA_{21} в конечной точке отрезка D_{12} в формулах (V.34) и (V.35) следует поменять местами индексы 1 и 2. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned}
 dD_{21} &= -(M_2 + H_2) \sin Z_{21} \cos A_{21} dB_2 - \\
 &- (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin Z_{21} \sin A_{21} dL_2 - \cos Z_{21} dH_2, \\
 D_{21} dZ_{21} &= -[D_{21} + (M_2 + H_2) \cos Z_{21}] \cos A_{21} dB_2 - \\
 &- [D_{21} + (N_2 + H_2) \cos Z_{21}] \sin A_{21} \cos B_2 dL_2 + \sin Z_{21} dH_2, \\
 D_{21} \sin Z_{21} dA_{21} &= (D_{21} \cos Z_{21} + M_2 + H_2) \sin A_{21} dB_2 + \\
 &+ [D_{21} (\sin B_2 \sin Z_{21} - \cos B_2 \cos Z_{21} \cos A_{21}) - \\
 &- (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos A_{21}] dL_2,
 \end{aligned} \right\} \quad (V.37)$$

$$\left. \begin{aligned}
 dD_{21} &= (M_1 + H_1) [(a_1) \sin Z_{21} \cos A_{21} + (b_1) \sin Z_{21} \sin A_{21} + \\
 &+ (c_1) \cos Z_{21}] dB_1 + (N_1 + H_1) \cos B_1 [- (a_2) \sin Z_{21} \cos A_{21} + \\
 &+ (b_2) \sin Z_{21} \sin A_{21} + (c_2) \cos Z_{21}] dL_1 + \\
 &+ [(a_3) \sin Z_{21} \cos A_{21} - (b_3) \sin Z_{21} \sin A_{21} + (c_3) \cos Z_{21}] dH_1, \\
 D_{21} dZ_{21} &= (M_1 + H_1) [(a_1) \cos Z_{21} \cos A_{21} + \\
 &+ (b_1) \cos Z_{21} \sin A_{21} - (c_1) \sin Z_{21}] dB_1 + \\
 &+ (N_1 + H_1) \cos B_1 [- (a_2) \cos Z_{21} \cos A_{21} + \\
 &+ (b_2) \cos Z_{21} \sin A_{21} - (c_2) \sin Z_{21}] dL_1 + \\
 &+ [(a_3) \cos Z_{21} \cos A_{21} - (b_3) \cos Z_{21} \sin A_{21} - (c_3) \sin Z_{21}] dH_1, \\
 D_{21} \sin Z_{21} dA_{21} &= - (M_1 + H_1) [(a_1) \sin A_{21} - \\
 &- (b_1) \cos A_{21}] dB_1 + (N_1 + H_1) \cos B_1 [(a_2) \sin A_{21} + \\
 &+ (b_2) \cos A_{21}] dL_1 + [- (a_3) \sin A_{21} - (b_3) \cos A_{21}] dH_1.
 \end{aligned} \right\} \quad (V.38)$$

Здесь, конечно, $D_{21} = D_{12}$. Кроме того, поправка dD_{12} в формулах (V.34) должна быть равна поправке dD_{21} в формулах (V.38), а поправка dD_{12} в формулах (V.35) должна быть равна поправке dD_{21} в формулах (V.37), так как эти поправки вызваны одними и теми же изменениями геодезических координат в соответствующих точках. Поэтому, приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых дифференциалах геодезических координат и учитывая выражения (V.3), получаем следующие зависимости между топоцентрическими координатами в начальной и конечной точках отрезка D_{12} :

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_{21} &= - (a_1) \xi_{12} + (a_2) \eta_{12} - (a_3) \zeta_{12}, \\
 \eta_{21} &= - (b_1) \xi_{12} - (b_2) \eta_{12} + (b_3) \zeta_{12}, \\
 \zeta_{21} &= - (c_1) \xi_{12} - (c_2) \eta_{12} - (c_3) \zeta_{12},
 \end{aligned} \right\} \quad (V.39)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_{12} &= - (a_1) \xi_{21} - (b_1) \eta_{21} - (c_1) \zeta_{21}, \\
 \eta_{12} &= (a_2) \xi_{21} - (b_2) \eta_{21} - (c_2) \zeta_{21}, \\
 \zeta_{12} &= - (a_3) \xi_{21} + (b_3) \eta_{21} - (c_3) \zeta_{21}.
 \end{aligned} \right\} \quad (V.40)$$

Равенства (V.39) можно использовать при решении прямой и обратной геодезических задач между точками в пространстве (см. § 36) для определения в конечной точке Q_2 дополнительных величин: азимута A_{21} и зенитного расстояния Z_{21} по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 A_{21} &= \arctg \frac{\eta_{21}}{\xi_{21}}, \\
 Z_{21} &= \operatorname{arccctg} \frac{\zeta_{21}}{\sqrt{\xi_{21}^2 + \eta_{21}^2}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (V.41)$$

Полученные выше дифференциальные формулы применяют при уравнивании пространственной геодезической сети для составления уравнений поправок. Точность этих формул зависит только от величины заданных поправок координат. Так, например, если dH не более 100 м, dB и dL не более 3", то dZ и dA получаются с ошибкой менее 0,001", а dD — с погрешностью менее 0,03 м при любой длине отрезка D .

§ 38. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

В § 35 было рассмотрено несколько систем пространственных координат, в каждой из которых однозначно определяется положение любой точки пространства. Все эти системы тесно связаны между собой благодаря тому, что все они опираются на одну и ту же заданную поверхность земного эллипсоида, размеры которого известны, известно также и его положение относительно земной поверхности.

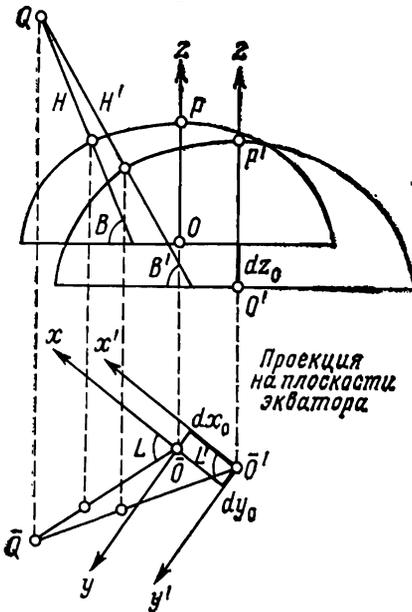


Рис. 49

Изменение координатной поверхности, т. е. изменение размеров эллипсоида и его ориентировки относительно земной поверхности, вызывает изменение пространственных координат всех точек окружающего пространства. Конечно, при этом взаимное положение точек не меняется.

Дифференциальными формулами, которые будут получены ниже, определяются малые (дифференциальные) изменения геодезических координат B , L , H точек земной поверхности или

Поверхность этого эллипсоида называют координатной поверхностью, так как относительно нее определяется положение любой точки земной поверхности и околоземного пространства в системе геодезических координат.

Система геодезических координат B , L , H связана с системой декартовых координат уравнениями (V.5). Приведем здесь эти уравнения в частично измененном виде

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos L + H \cos B \cos L, \\ y &= r \sin L + H \cos B \sin L, \\ z &= N(1 - e^2) \sin B + H \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.42})$$

где $r = N \cos B$ — радиус параллели.

околоземного пространства, вызванные малыми изменениями размеров эллипсоида и его параллельным сдвигом в пространстве. Такие формулы называют также дифференциальными формулами второго рода.

Пусть некоторый эллипсоид с заданными размерами a и e^2 установлен относительно земной поверхности так, что ось вращения его параллельна оси вращения Земли, а центр эллипсоида незначительно удален от центра инерции Земли.

Представим себе, что форма и размеры эллипсоида изменились: большая полуось на величину da , а квадрат эксцентриситета на величину de^2 . Ясно, что при этом геодезические координаты B, L, H всех точек пространства изменятся, но декартовы координаты x, y, z этих точек останутся прежними, так как положение осей координат не изменилось.

Теперь в дополнение к предыдущему осуществим параллельное перемещение эллипсоида в пространстве вместе с осями координат $Oxyz$. Очевидно, вследствие этого геодезические координаты вновь изменятся, а пространственные координаты всех точек в результате переноса начала координат изменятся на одни и те же величины dx_0, dy_0, dz_0 .

Зависимость между всеми указанными изменениями можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} dx_0 &= \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial e^2} de^2 + \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL + \frac{\partial x}{\partial H} dH, \\ dy_0 &= \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial e^2} de^2 + \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL + \frac{\partial y}{\partial H} dH, \\ dz_0 &= \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial e^2} de^2 + \frac{\partial z}{\partial B} dB + \frac{\partial z}{\partial L} dL + \frac{\partial z}{\partial H} dH. \end{aligned} \right\} \quad (V.43)$$

Все восемь дифференциалов в равенствах (V.43) представляют собой поправки к старым значениям размеров эллипсоида (a, e^2) и координат (B, L, H, x, y, z) произвольной точки пространства для получения новых значений этих величин в новой системе геодезических координат.

Геометрическая картина перехода от старой системы геодезических координат к новой системе показана на рис. 49.

Частные производные в равенствах (V.43) найдем дифференцированием по соответствующим переменным правых частей уравнений (V.42).

При дифференцировании учтем, что ранее в § 8 были получены следующие производные для точки на поверхности эллипсоида, когда $H=0$:

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B,$$

$$\frac{\partial z}{\partial B} = M \cos B.$$

Таким образом, из уравнений (V.42) найдем

$$\frac{\partial x}{\partial B} = -(M + H) \sin B \cos L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = -(M + H) \sin B \sin L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial B} = (M + H) \cos B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = -(N + H) \cos B \sin L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = (N + H) \cos B \cos L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial H} = \cos B \cos L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial H} = \cos B \sin L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial H} = \sin B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial N}{\partial a} \cos B \cos L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial N}{\partial a} \cos B \sin L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial N}{\partial a} (1 - e^2) \sin B,$$

$$\frac{\partial x}{\partial e^2} = \frac{\partial N}{\partial e^2} \cos B \cos L,$$

$$\frac{\partial y}{\partial e^2} = \frac{\partial N}{\partial e^2} \cos B \sin L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial e^2} = \left[\frac{\partial N}{\partial e^2} (1 - e^2) - N \right] \sin B.$$

Производные $\frac{\partial N}{\partial a}$ и $\frac{\partial N}{\partial e^2}$ будут найдены позднее.

Подставив значения частных производных в равенства (V.43), получим

$$\left. \begin{aligned} dx_0 &= \left[\frac{\partial N}{\partial a} \cos B da + \frac{\partial N}{\partial e^2} \cos B de^2 - (M + H) \sin B dB + \right. \\ &\quad \left. + \cos B dH \right] \cos L - (N + H) \cos B \sin L dL, \\ dy_0 &= \left[\frac{\partial N}{\partial a} \cos B da + \frac{\partial N}{\partial e^2} \cos B de^2 - (M + H) \sin B dB + \right. \end{aligned} \right\} \quad (V.44)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \cos BdH \Big] \sin L + (N + H) \cos B \cos L dL, \\ dz_0 = & \frac{\partial N}{\partial a} (1 - e^2) \sin B da + \left[\frac{\partial N}{\partial e^2} (1 - e^2) - N \right] \sin B de^2 + \\ & + (M + H) \cos B dB + \sin BdH. \end{aligned} \right\}$$

Решим эти уравнения относительно поправок dB , dL и dH .

Из первых двух уравнений предварительно находим

$$dx_0 \sin L - dy_0 \cos L = -(N + H) \cos BdL, \quad (V.45)$$

$$dx_0 \cos L + dy_0 \sin L = \frac{\partial N}{\partial a} \cos B da +$$

$$\frac{\partial N}{\partial e^2} \cos B de^2 - (M + H) \sin B dB + \cos BdH. \quad (V.46)$$

Равенством (V.45) определяется поправка dL . Для определения поправок dB и dH решим совместно уравнение (V.46) с третьим из уравнений (V.44).

$$\begin{aligned} dz_0 \cos B - (dx_0 \cos L + dy_0 \sin L) \sin B = & (M + H) dB - \\ - \frac{\partial N}{\partial a^2} e^2 \sin B \cos B da - & \left(\frac{\partial N}{\partial e^2} e^2 + N \right) \sin B \cos B de^2, \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} dz_0 \sin B + (dx_0 \cos L + dy_0 \sin L) \cos B = & dH + \frac{\partial N}{\partial a} (1 - e^2 \sin^2 B) da + \\ + \left[\frac{\partial N}{\partial e^2} (1 - e^2 \sin^2 B) - N \sin^2 B \right] & de^2. \end{aligned} \quad (B)$$

Теперь найдем частные производные $\frac{\partial N}{\partial a}$ и $\frac{\partial N}{\partial e^2}$.

Так как

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2},$$

то

$$\frac{\partial N}{\partial a} = \frac{N}{a},$$

$$\frac{\partial N}{\partial e^2} = -\frac{a}{2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} (-\sin^2 B) = \frac{N \sin^2 B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)}.$$

После подстановки этих выражений в равенства (A) и (B) при дальнейших преобразованиях следует учитывать следующие соотношения:

$$1 - e^2 \sin^2 B = \frac{a^2}{N^2},$$

$$\frac{e^2 \sin^2 B}{1 - e^2 \sin^2 B} = \frac{N^2}{a^2} - 1.$$

Таким образом, из уравнений (А), (Б) и (V.45) после соответствующих преобразований получим дифференциальные формулы в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} (M+H) dB &= \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B da + \\ &+ \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{de^2}{2} - \\ &- (dx_0 \cos L + dy_0 \sin L) \sin B + dz_0 \cos B, \\ (N+H) \cos B dL &= -dx_0 \sin L + dy_0 \cos L, \\ dH &= -\frac{a}{N} da + N \sin^2 B \frac{de^2}{2} + \\ &+ (dx_0 \cos L + dy_0 \sin L) \cos B + dz_0 \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.47})$$

Для получения dB и dL в угловой мере (в секундах) необходимо вычисленные по формулам (V.47) численные значения правых частей умножить соответственно в первом равенстве на

$$\frac{\rho''}{M+H}, \quad \text{а во втором равенстве на } \frac{\rho''}{(N+H) \cos B}.$$

Дифференциальные формулы (V.47) применяются при переходе от одного эллипсоида к другому при условии, что оси вращения и плоскости начальных меридианов обоих эллипсоидов соответственно параллельны.

Как видно из этих формул, для определения поправок dB , dL и dH должны быть известны общие для всех точек пространства поправки da , de^2 , dx_0 , dy_0 и dz_0 . Первые две поправки легко найти, так как размеры применяющихся на практике эллипсоидов обычно известны. Что касается остальных трех поправок, выражающих параллельный сдвиг одного эллипсоида относительно другого, то эти поправки определяют косвенным образом. Один из способов получения этих поправок заключается в следующем.

Пусть для какой-либо точки Q_0 с координатами B_0 , L_0 , H_0 относительно первого эллипсоида уже известны поправки dB_0 , dL_0 и dH_0 для перехода к координатам относительно второго эллипсоида. Подставив эти поправки в уравнения (V.44), в которых частные производные $\frac{\partial N}{\partial a}$ и $\frac{\partial N}{\partial e^2}$ должны быть заменены их выражениями, полученными выше, найдем формулы для вычисления поправок dx_0 , dy_0 и dz_0 . Однако полученные таким образом формулы будут иметь довольно сложный вид.

Значительно более простой вид эти формулы примут в том случае, если в качестве начального меридиана взять меридиан точки Q_0 , т. е. $L_0 = \text{const}$, а ось x расположить в плоскости этого меридиана.

Ясно, что теперь в формулах (V.44) будет $\sin L=0$, а $\cos L=1$. Если в этих формулах все коэффициенты отнесем к широте B_0 , то получим

$$\left. \begin{aligned} dx_0 &= \frac{N_0}{a} \cos B_0 da + \frac{M_0 \sin^2 B_0}{2(1-e^2)} \cos B_0 de^2 - \\ &\quad - (M_0 + H_0) \sin B_0 dB_0 + \cos B_0 dH_0, \\ dy_0 &= (N_0 + H_0) \cos B_0 dL_0, \\ dz_0 &= \left[\frac{N_0}{a} (1-e^2) da + \left(\frac{M_0 \sin^2 B_0}{2} - N_0 \right) de^2 + \right. \\ &\quad \left. + dH_0 \right] \sin B_0 + (M_0 + H_0) \cos B_0 dB_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.48})$$

При совместном применении формул (V.48) и (V.47) в последних следует заменить долготу L на $(L-L_0)$.

Если в число заданных размеров эллипсоидов входит не квадрат эксцентриситета, а сжатие, то в формулах (V.47) и (V.48) следует выполнить следующие замены:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad 1 - e^2 = (1 - \alpha)^2, \quad \frac{de^2}{2} = (1 - \alpha) d\alpha.$$

Рассмотрим вопрос о точности вычислений по полученным дифференциальным формулам.

В формулах (V.47) все коэффициенты при дифференциалах переменных являются точными функциями широты, долготы и размеров эллипсоида. Но сами формулы являются приближенными, так как в исходных уравнениях (V.43) мы ограничились дифференциалами первого порядка. На практике величины da , dx_0 , dy_0 и dz_0 обычно не превосходят 1000 м, а de^2 — не более 10^{-4} . Поэтому поправки dB'' и dL'' , вычисленные по формулам (V.47), будут ошибочны за счет отброшенных дифференциалов второго порядка не более чем на 0,003'', а поправка dH — не более чем на 0,1 м.

Для приближенных расчетов, когда не требуется высокой точности определения дифференциальных поправок, полученные выше формулы можно существенно упростить, если в коэффициентах отбросить члены порядка e^2 и принять $H=0$.

Упрощенные формулы имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} dB'' &= 4,13 \cdot \sin B \cos B d\alpha \cdot 10^5 + \\ &\quad + 0,0323 [dz_0 \cos B - (dx_0 \cos l + dy_0 \sin l) \sin B], \\ dL'' &= \frac{0,0323}{\cos B} dy_0 \cos l - dx_0 \sin l, \\ dH &= -da + 64 \sin^2 B d\alpha \cdot 10^5 + \\ &\quad + (dx_0 \cos l + dy_0 \sin l) \cos B + dz_0 \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.49})$$

где

$$dx_0 = \cos B_0 da + 64 \sin^2 B_0 \cos B_0 d\alpha \cdot 10^5 -$$

$$- 31 \sin B_0 dB_0'' + \cos B_0 dH_0,$$

$$dy_0 = 31 \cos B_0 dL_0'',$$

$$dz_0 = \sin B_0 da - 64 (1 + \cos^2 B_0) \sin B_0 d\alpha \cdot 10^5 +$$

$$+ 31 \cos B_0 dB_0'' + \sin B_0 dH_0,$$

$$l = L - L_0.$$

По этим формулам поправки dB'' и dL'' вычисляются с погрешностью менее $0,1''$, а dH — с погрешностью менее 3 м.

Полученные выше дифференциальные формулы используются не только для вычисления поправок в координаты при переходе к новой системе геодезических координат, для которой ее параметры a , e^2 , dx_0 , dy_0 , dz_0 заранее определены. Эти же формулы применяются и для отыскания указанных пяти параметров, т. е. для установления новой системы геодезических координат. Эта задача подробно рассматривается в третьей части курса высшей геодезии — в теоретической геодезии.

Глава VI

ПЛОСКИЕ КОНФОРМНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 39. ПРИМЕНЕНИЕ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ В ГЕОДЕЗИИ

В предыдущих главах были рассмотрены методы решения основных задач, встречающихся в геодезии, по определению взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида и в околоземном пространстве.

Во многих случаях геодезической практики измерения производятся между точками, удаленными друг от друга на весьма малые расстояния, во много раз меньше радиуса земного шара. В таких случаях для численной обработки геодезических измерений и для определения взаимного положения точек земной поверхности вместо поверхности эллипсоида гораздо проще и практически удобнее использовать плоскость. Например, решение прямой и обратной геодезических задач на плоскости выполняется, как показано ниже, по весьма простым формулам аналитической геометрии.

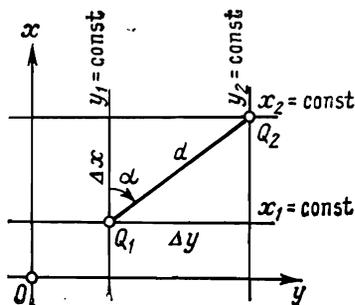


Рис. 50

Прямая задача. Даны плоские декартовы прямоугольные координаты x_1 и y_1 точки Q_1 (рис. 50) и полярные координаты второй точки Q_2 : d — прямолинейное расстояние между этими точками и α — полярный угол между координатной линией $y_1 = \text{const}$ и прямолинейным отрезком d . Плоские прямоугольные координаты x_2 и y_2 второй точки вычисляют по формулам

$$x_2 = x_1 + d \cos \alpha, \quad y_2 = y_1 + d \sin \alpha. \quad (\text{VI.1})$$

Обратная задача. Даны прямоугольные координаты x_1, y_1, x_2, y_2 двух точек на плоскости. Расстояние d между этими точками и полярный угол α определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ d &= \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha} = \\ &= (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.2})$$

Ясно, что эти формулы несравненно проще тех формул, которые применяются при решении аналогичных задач на поверхности эллипсоида даже при малых расстояниях. Поэтому при решении многих задач на практике поверхность эллипсоида заменяют плоскостью, а вместо географических координат пользуются плоскими координатами.

С этой целью поверхность эллипсоида изображают на плоскости по соответствующим математическим правилам.

Теория и практика применения различных изображений (проекций) поверхности земного эллипсоида на плоскости изучается в математической картографии и, откуда и будет пользоваться сведениями в необходимом объеме.

При любом изображении поверхности эллипсоида на плоскости изменяется взаимное положение точек, вследствие чего неизбежно возникают искажения длин линий, углов и площадей.

Применение картографических проекций в геодезии имеет свои особенности. Если в математической картографии изображают на плоскости большие области или же всю поверхность эллипсоида, то в геодезии используют изображение сравнительно небольшой части поверхности эллипсоида.

Основной причиной такого ограничения является практическое требование: линейные и угловые величины на поверхности эллипсоида должны возможно меньше отличаться от соответствующих величин на плоскости, т. е. величина линейных и угловых искажений должна быть сравнительно небольшой. Конечно, при любом изображении эллипсоида на плоскости можно вычислить все возникающие искажения. Но тогда был бы потерян практический смысл перехода на плоскость, так как вычисление больших искажений во многих случаях представляет собой не менее сложную задачу, чем решение геодезических задач непосредственно на эллипсоиде. Поэтому в геодезии на плоскости изображают лишь небольшую область поверхности эллипсоида, в пределах которой искажения невелики и вычисляются сравнительно просто. Если же требуется изобразить большую область, то ее приходится делить на отдельные небольшие участки и каждый такой участок изображать на плоскости в своей системе плоских координат.

Из множества картографических проекций в геодезии в настоящее время применяют только конформные (равноугольные) проекции. В конформных проекциях углы между линиями на поверхности при изображении этих линий на плоскости не изменяются, а масштаб в данной точке изображения не зависит от направления.

Отсутствие угловых искажений не является главным преимуществом конформных проекций перед неконформными. Дело в том, что геодезические линии эллипсоида изображаются на плоскости в виде кривых сложного вида, и практическое использование таких кривых весьма затруднительно. Поэтому изо-

бражение геодезической линии на плоскости заменяют прямой линией — хордой, соединяющей конечные точки этого изображения. Отсюда возникает дополнительная задача — вычисление угла между изображением геодезической линии и хордой.

Наиболее существенное преимущество конформных проекций — это независимость масштаба конформного изображения от направления в данной точке. Это свойство конформных проекций позволяет гораздо проще, чем в других проекциях, учитывать линейные искажения при выполнении геодезических и топографических работ.

Из общего числа конформных проекций мы будем изучать только симметричные проекции. Главное внимание будет уделено проекции Гаусса — Крюгера, наиболее широко применяющейся в практике геодезических и топографических работ не только в СССР, но и во многих других государствах.

§ 40. УСЛОВИЯ КОНФОРМНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИпсоИДА НА ПЛОСКОСТИ

Под отображением одной поверхности на другой в математике понимается взаимно однозначное точечное соответствие между поверхностями, по которому каждой точке одной поверхности приводится в соответствие некоторая точка другой поверхности в качестве изображения первоначальной точки.

В математической картографии, сведения из которой используются в геодезии для установления системы плоских координат, вместо термина «отображение» чаще применяют термин «изображение».

Положение точки на поверхности эллипсоида определяется геодезическими координатами B и L .

Положение точки на плоскости определяется декартовыми прямоугольными координатами x и y .

Для получения любого изображения поверхности эллипсоида на плоскости устанавливается зависимость между координатами соответствующих точек в виде двух функций

$$x = f_1(B, L), \quad (y = f_2(B, L), \quad (VI.3)$$

которые должны быть непрерывны вместе со своими производными любого порядка.

При конформном изображении функции (VI.3) должны удовлетворять условиям конформности. Найдем эти условия.

Пусть точка A (рис. 51) является изображением на плоскости некоторой точки на эллипсоиде, дуга AB — изображение дифференциала дуги меридиана $L = \text{const}$, а дуга AC — изображение дуги параллели $B = \text{const}$.

Угол γ представляет собой один и тот же угол поворота конформного изображения как меридиана, так и параллели от-

носительно. прямолинейных координатных линий $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ на плоскости. Этот угол носит название сближения меридианов. Он отсчитывается от координатной линии $x = \text{const}$ (или $y = \text{const}$) в направлении против хода часовой стрелки.

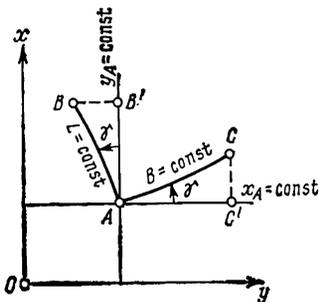


Рис. 51

Из подобных треугольников ABB' и ACC' можем написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{AB'}{AB} &= \frac{AC'}{AC} = \cos \gamma, \\ \frac{BB'}{AB} &= \frac{CC'}{AC} = \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Выясним значения сторон этих треугольников.

В соответствии с условием независимости масштаба от направления напомним выражения для масштаба m

$$m = \frac{AB}{MdB} = \frac{AC}{N \cos BdL},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} AB &= mMdB, \\ AC &= mN \cos BdL. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Из уравнений (VI.3) напомним полные дифференциалы плоских координат

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL.$$

Применив эти уравнения для изображения дифференциала дуги меридиана $L = \text{const}$, получим

$$\left. \begin{aligned} dx_B &= AB' = \frac{\partial x}{\partial B} dB, \\ dy_B &= BB' = -\frac{\partial y}{\partial B} dB. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Аналогично для изображения дифференциала дуги параллели $B = \text{const}$ получим

$$\left. \begin{aligned} dx_L &= CC' = \frac{\partial x}{\partial L} dL, \\ dy_L &= AC' = \frac{\partial y}{\partial L} dL. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Теперь подставим значения сторон, определяемые формулами (б), (в) и (г), в равенство (а). Тогда

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L} dL}{mN \cos B dL} = \cos \gamma,$$

$$-\frac{\frac{\partial y}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L} dL}{mN \cos B dL} = \sin \gamma.$$

Из этих соотношений находим прежде всего

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{M}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L}, \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\frac{M}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.4})$$

Кроме того,

$$m \cos \gamma = \frac{1}{M} \frac{\partial x}{\partial B} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L},$$

$$m \sin \gamma = -\frac{1}{M} \frac{\partial y}{\partial B} = \frac{1}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}.$$

Из последних двух равенств получаем следующие формулы для вычисления сближения меридианов и масштаба:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)}, \quad (\text{VI.5})$$

$$m = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2} = \frac{1}{N \cos B} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2}, \quad (\text{VI.6})$$

$$m = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right) \cos \gamma - \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right) \sin \gamma \right] =$$

$$= \frac{1}{N \cos B} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right) \sin \gamma + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right) \cos \gamma \right]. \quad (\text{VI.7})$$

Дифференциальные уравнения (VI.4) являются теми условиями, которым должны удовлетворять функции (VI.3) при конформном изображении эллипсоида на плоскости.

При взаимно однозначном точечном соответствии между поверхностью эллипсоида и плоскостью должны существовать обратные функции

$$B = F_1(x, y), \quad L = F_2(x, y), \quad (\text{VI.8})$$

которые позволяют осуществлять переход от плоских координат к геодезическим.

Эти функции при конформном изображении должны удовлетворять условиям, определяемым следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -\frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.9})$$

Сближение меридианов и масштаб в этом случае будут определяться такими формулами:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N \cos B \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)}{M \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)} = -\frac{M \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)}{N \cos B \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)}, \quad (\text{VI.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \sqrt{M^2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 + N^2 \cos^2 B \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2} = \\ &= \sqrt{M^2 \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 + N^2 \cos^2 B \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Таковы основные формулы, определяющие условия любого конформного изображения поверхности эллипсоида на плоскости.

Для того чтобы получить какую-либо конкретную конформную проекцию, необходимо сформулировать характеризующие ее условия, в соответствии с которыми написать уравнения проекции (VI.3). Они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (VI.4).

§ 41. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛЯРНЫМИ КООРДИНАТАМИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ И НА ПЛОСКОСТИ

На поверхности эллипсоида положение какой-либо точки Q_2 по отношению к некоторой точке Q_1 определяется геодезическими полярными координатами — длиной геодезической линии s между этими точками и ее геодезическим азимутом A_{12} в точке Q_1 .

После того как поверхность эллипсоида изображена на плоскости, положение точки Q_2 по отношению к точке Q_1 будет определяться плоскими полярными координатами — длиной прямолинейного отрезка d и его направляющим углом α_{12} в точке Q_1 .

Направляющий угол α , отсчитываемый от координатной линии $y = \text{const}$, т. е. линии, параллельной оси абсцисс, по часовой стрелке до заданного направления на плоскости, называется дирекционным углом.

Математическая обработка результатов геодезических измерений значительно проще выполняется на плоскости, чем на эллипсоиде. Поэтому необходимо найти формулы перехода от полярных координат s и A_{12} на эллипсоиде к им соответствующим полярным координатам d и α_{12} на плоскости.

Геодезическая линия эллипсоида изображается на плоскости в виде некоторой кривой s , вид которой в общем случае неизвестен. Использование этой кривой для решения геодезических задач на плоскости практически невозможно. Поэтому вместо кривой S используют хорду d , стягивающую эту кривую между двумя заданными точками Q_1 и Q_2 (рис. 52).

Для перехода от азимута A_{12} геодезической линии s к дирекционному углу α_{12} хорды d по рис. 52 можем написать следующее равенство:

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}, \quad (VI.12) \quad \text{Рис. 52}$$

где γ_1 — сближение меридианов в точке Q_1 , δ_{12} — поправка к дирекционному углу кривой S , возникающая из-за кривизны изображения геодезической линии. Поправку δ_{12} называют сокращенно поправкой за кривизну. Ее отсчитывают от касательной к кривой S по часовой стрелке до хорды.

Известно, что масштаб m равен пределу отношения дифференциала dS изображения геодезической линии к дифференциалу ds самой линии. Поэтому для определения длины кривой S необходимо найти интеграл

$$S = \int_{Q_1}^{Q_2} m ds. \quad (VI.13)$$

Обозначим разность длин кривой S и ее хорды так:

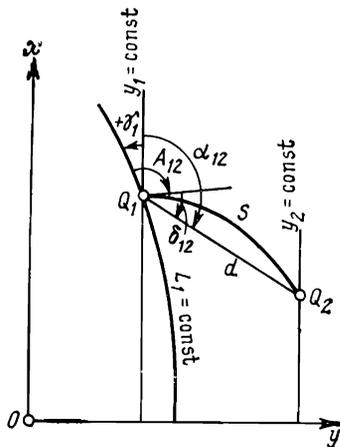
$$\delta S = S - d. \quad (VI.14)$$

Таким образом, длина хорды d будет определяться равенством

$$d = S - \delta S, \quad (VI.15)$$

где S вычисляется по формуле (VI.13).

Очевидно, поправки δ_{12} и δS зависят от длины кривой S и ее кривизны. В общем случае эти зависимости сложны. При



малой длине кривой S эти зависимости можно записать в виде рядов по степеням S

$$\delta_{12} = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \left(\frac{d\Gamma}{dS} \right)_1 \frac{S^2}{6} + \dots, \quad (\text{VI.16})$$

$$\delta S = \Gamma_1^2 \frac{S^3}{24} + \dots, \quad (\text{VI.17})$$

где Γ — кривизна кривой S .

Ясно, что обе поправки δ_{12} и δS являются поправками за кривизну изображения геодезической линии, причем первая

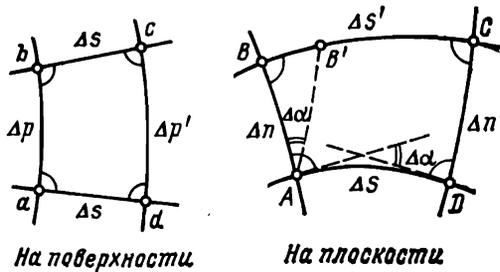


Рис. 53

вводится в направление линии S , а вторая — в ее длину.

Выясним, от чего зависит кривизна Γ и как ее найти.

На любой гладкой поверхности две произвольные линии называются геодезически параллельными, если расстояние между ними, измеряемое вдоль перпендикулярных к ним геодезических линий, повсюду одинаковое.

Возьмем на поверхности эллипсоида элементарный прямоугольный четырехугольник $abcd$ (рис. 53), две противоположные стороны которого Δp и $\Delta p'$ являются дугами геодезически параллельных линий, а две другие стороны — равные друг другу дуги геодезических линий Δs .

Изобразим этот четырехугольник на плоскости конформно. При этом прямые углы в вершинах четырехугольника останутся без изменений, но стороны его будут изображены дугами различной длины. Равным дугам $\Delta s = ad = bc$ будут соответствовать на плоскости дуги ΔS и $\Delta S'$ разной длины, так как линейные искажения в разных участках плоскости не будут одинаковыми. Сторона Δp изображается дугой Δn .

Проведем дугу AB' параллельно стороне DC (см. рис. 53). В первом приближении, с ошибкой на члены порядка Δn^2 , можем написать

$$\Delta S' = \Delta S + \Delta \alpha \Delta n + \dots$$

Вынесем в правой части первый член за скобки и разделим обе части равенства на Δs . Тогда

$$\frac{\Delta S'}{\Delta s} = \frac{\Delta S}{\Delta s} \left(1 + \frac{\Delta \alpha}{\Delta S} \Delta n + \dots \right).$$

При $\Delta s \rightarrow 0$ величины ΔS , $\Delta S'$ и $\Delta \alpha$ также будут стремиться к нулю, и в пределе, когда точка D совпадет с точкой A , получим

$$m_B = m_A (1 + \Gamma_A \Delta n + \dots), \quad (a)$$

где

$$m_A = \left(\frac{dS}{ds} \right)_A \quad \text{— масштаб в точке } A,$$

$$m_B = \left(\frac{dS'}{ds} \right)_B \quad \text{— масштаб в точке } B,$$

$$\Gamma_A = \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)_A \quad \text{— кривизна конформного изображения геодезической линии в точке } A.$$

Независимо от выражения (а) для масштаба в точке B можно написать следующий ряд:

$$m_B = m_A + \left(\frac{dm}{dn} \right)_A \Delta n + \left(\frac{d^2 m}{dn^2} \right)_A \frac{\Delta n^2}{2} + \dots,$$

откуда с погрешностью на члены порядка Δn^2 найдем

$$m_B = m_A \left[1 + \left(\frac{1}{m} \frac{dm}{dn} \right)_A \Delta n + \dots \right]$$

или

$$m_B = m_A \left[1 + \left(\frac{d \ln m}{dn} \right)_A \Delta n + \dots \right]. \quad (б)$$

Сравнивая между собой правые части равенств (а) и (б), находим, что кривизна конформного изображения геодезической линии подчиняется равенству

$$\Gamma = \frac{d \ln m}{dn}. \quad (VI.18)$$

Это уравнение, найденное в 1886 г. голландским ученым Схольсом, читается так: кривизна конформного изображения геодезической линии равна производной логарифма масштаба по внешней нормали (т. е. нормали к кривой, направленной в сторону выпуклости кривой).

Уравнение (VI.18) справедливо только для конформного изображения, при котором прямые углы в вершинах четырехугольника $abcd$ (см. рис. 53) при изображении его на плоскости сохраняют свои величины.

Масштаб обычно выражают в функции плоских координат. Поэтому правую часть равенства (VI.18) представим как производную функции двух независимых переменных x и y :

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \ln m}{\partial y} \frac{dy}{dn}.$$

Так как проекциями дифференциала нормали dn на координатные линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ будут (рис. 54).

$$dx = dn \sin \alpha, \quad -dy = dn \cos \alpha,$$

то

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial y} \cos \alpha, \quad (\text{VI.19})$$

где α — дирекционный угол изображения геодезической линии S .

Таким образом, для перехода от полярных координат s и A на эллипсоиде к полярным координатам d и α на плоскости используются (формулы (VI.12), (VI.13), (VI.15), (VI.16), (VI.17) и (VI.19) при любом конформном изображении эллипсоида на плоскости.

Для применения этих формул достаточно знать лишь выражение масштаба для конкретной проекции.

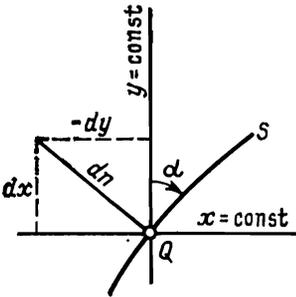


Рис. 54

§ 42. УРАВНЕНИЯ ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

Вычисление плоских координат по геодезическим координатам

Проекция Гаусса—Крюгера представляет собой конформное изображение поверхности земного эллипсоида на плоскости с постоянным масштабом на прямолинейном изображении одного из меридианов.

Рассмотрим последовательность вывода уравнений проекции Гаусса — Крюгера.

Выберем на поверхности эллипсоида один из меридианов с долготой L_0 и изобразим его на плоскости в виде прямой. Эту прямую примем за ось абсцисс системы декартовых координат на плоскости. Тогда меридиан $L_0 = \text{const}$ будет называться осевым меридианом.

Масштаб изображения осевого меридиана для всех его точек примем равным единице.

В качестве начала плоских координат примем изображение на плоскости точки пересечения осевого меридиана с экватором.

Изобразим на плоскости часть поверхности эллипсоида — узкую полосу от экватора до полюса, ограниченную меридианами $L_1 = \text{const}$ и $L_2 = \text{const}$.

Такая проекция является симметричной относительно оси абсцисс. Это означает, что две точки Q_1 и Q_2 на эллипсоиде (рис. 55) с одинаковой широтой и с одинаковой по абсолютной величине разностью долгот $l = |L - L_0|$ после их изображения на плоскости будут иметь одинаковую абсциссу x и одинаковую по абсолютной величине ординату y (рис. 56). Для точки Q , лежащей на осевом меридиане, ее ордината будет $y=0$, а ее абсцисса равна длине дуги меридиана, т. е. $x=X$.

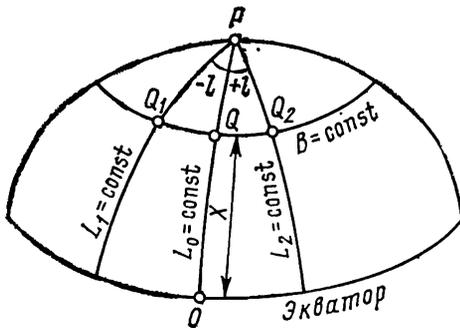


Рис. 55

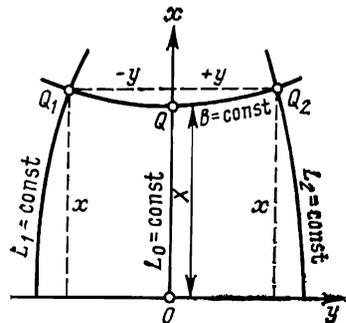


Рис. 56

Уравнения изображения всех симметричных проекций при малой величине разности долгот l можно представить в виде следующих степенных рядов:

$$\left. \begin{aligned} x &= X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + \dots, \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.20})$$

Коэффициенты в этих рядах представляют собой функции только широты B .

Характерным признаком уравнений симметричных проекций является то, что уравнение абсциссы состоит из членов только четной степени разности долгот, а уравнение ординаты — из членов только нечетной степени этой разности.

Уравнения (VI.20) охватывают целый ряд проекций как конформных, так и неконформных, в том числе и проекцию Гаусса — Крюгера. Все эти проекции весьма похожи друг на друга по виду изображений меридианов и параллелей, но уравнения (VI.20) каждой проекции отличаются друг от друга значениями коэффициентов.

Найдем значения этих коэффициентов для проекции Гаусса — Крюгера.

Так как эта проекция по ее определению должна быть конформной, то потребуем, чтобы уравнения изображения (VI.20)

удовлетворяли условиям конформного изображения (VI.4),

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{M}{N \cos B} \frac{\partial y}{\partial L},$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{M}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}.$$

Подставив сюда частные производные рядов (VI.20), получим

$$\frac{dX}{dB} + \frac{da_2}{dB} l^2 + \frac{da_4}{dB} l^4 + \dots = \frac{M}{N \cos B} (b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + \dots),$$

$$\frac{db_1}{dB} l + \frac{db_3}{dB} l^3 + \dots = -\frac{M}{N \cos B} (2a_2 l + 4a_4 l^3 + \dots).$$

Сравнивая между собой в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях l , находим

$$b_1 = \frac{N \cos B}{M} \frac{dX}{dB}, \quad a_2 = -\frac{N \cos B}{2M} \frac{db_1}{dB},$$

$$b_3 = \frac{N \cos B}{3M} \frac{da_2}{dB}, \quad a_4 = -\frac{N \cos B}{4M} \frac{db_3}{dB}$$

и т. д. Для получения каждого следующего коэффициента необходимо найти производную предыдущего коэффициента. В выражении для первого коэффициента, очевидно, $\frac{dX}{dB} = M$.

При последующем дифференцировании коэффициентов следует использовать уже известную нам производную (I.93)

$$\frac{d(N \cos B)}{dB} = -M \sin B.$$

Приведем коэффициенты рядов (VI.20) для вычисления плоских координат Гаусса — Крюгера в окончательном виде

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} N \sin B \cos B, \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4), \\ a_6 &= \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \\ &+ \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B), \\ a_8 &= \frac{1}{40320} N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111 \operatorname{tg}^2 B + \\ &+ 543 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B), \\ b_1 &= N \cos B, \\ b_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 B (-\operatorname{tg}^2 B + \eta^2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.21})$$

$$\left. \begin{aligned} b_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B), \\ b_7 &= \frac{1}{5040} N \cos^7 B (61 - 479 \operatorname{tg}^2 B + 179 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B). \end{aligned} \right\}$$

В коэффициентах b_5 и a_6 отброшены члены с множителем η^4 , а в коэффициентах b_7 и a_8 — с множителем η^2 .

Точность рядов (VI.20) и коэффициентов (VI.21) такова, что они обеспечивают в плоских координатах точность 0,01 м при разности долгот $l=9^\circ$. На практике величина l обычно не превышает 4° . В этом случае для получения точности 0,001 м в координатах x и y в рядах (VI.20) можно отбросить члены порядков l^7 и l^8 .

Заметим, что при $B=0$ все коэффициенты a_2 , a_4 , a_6 и a_8 будут равны нулю, следовательно, по (VI.20), будет $x=0$. Это означает, что экватор ($B=0$) изображается в проекции Гаусса — Крюгера прямой линией — осью ординат.

Вычисление коэффициентов непосредственно по формулам (VI.21) затруднительно из-за их довольно сложного вида. Поэтому для практического применения обычно составляют специальные таблицы этих коэффициентов.

Для точных вычислений, необходимых при обработке триангуляции 1 класса, применяют «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80° . Эллипсоид Красовского». М., Геодезиздат, 1958.

В этих таблицах ряды (VI.20) представлены в таком виде:

$$x = X + a_2 l^2 - a_4 l^4 + a' k_6,$$

$$y = b_1 l + b_3 l^3 + b' k_5.$$

Численные значения величин X , a_2 , a_4 , a' , b_1 , b_3 и b' , зависящих от широты B , выбирают из таблиц путем интерполирования. Во введении к таблицам даны подробные пояснения пользования таблицами и примеры вычисления координат.

Для вычисления координат с меньшей точностью (до 0,1 м или до 1 м) аналогичные таблицы включены в различные пособия и руководства и предназначены для вычисления на счетных машинах.

Необходимость в вычислении плоских координат Гаусса — Крюгера в настоящее время возникает довольно часто при решении самых разнообразных инженерно-технических задач. Поэтому целесообразно составить алгоритм и стандартную программу для вычисления координат на ЭВМ без привлечения каких-либо таблиц.

С этой целью формулы (VI.20) и (VI.21) следует преобразовать так, чтобы они были проще для программирования.

Приведем в окончательном виде преобразованные формулы, в которых численные значения коэффициентов вычислены по элементам эллипсоида Красовского,

$$\left. \begin{aligned} x &= 6\,367\,558,497 B - (((a_{28}l^2 - a_{26})l^2 + \\ &+ a_{24})l^2 + 0,5)l^2 N - a_0 \sin B \cos B, \\ y &= ((b_{17}l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1) l N \cos B, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.22})$$

где

$$\begin{aligned} N &= [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21\,346,142] \sin^2 B + 6\,378\,245, \\ a_0 &= (0,7032 \cos^2 B - 135,3277) \cos^2 B + 32\,140,4046, \\ a_{24} &= [(0,000\,0076 \cos^2 B + 0,002\,5269) \cos^2 B + \\ &+ 0,25] \cos^2 B - 0,041\,6667, \\ a_{26} &= [(0,00562 \cos^2 B + 0,16358) \cos^2 B - 0,08333] \cos^2 B + 0,00139, \\ a_{28} &= [(0,125 \cos^2 B - 0,104) \cos^2 B + 0,014] \cos^2 B, \\ b_{13} &= (0,001\,12309 \cos^2 B + 0,333\,33333) \cos^2 B - 0,166\,66667, \\ b_{15} &= [(0,004\,043 \cos^2 B + 0,196\,743) \cos^2 B - 0,166\,667] \cos^2 B + \\ &+ 0,008\,333, \\ b_{17} &= [(0,1429 \cos^2 B - 0,1667) \cos^2 B + 0,0361] \cos^2 B - 0,0002. \end{aligned}$$

Здесь величины B и l выражены в радианах.

Точность этих формул соответствует точности исходных формул (VI.20), (VI.21).

Вычисления плоских координат по формулам (VI.22) не вызывают затруднений и при использовании настольных вычислительных машин, так как все действия состоят в основном из операций умножения и суммирования.

Пример вычисления плоских координат по формулам (VI.22) приведен в табл. 24.

Вычисление геодезических координат по плоским координатам

Функции (VI.8) для обратного перехода от плоских координат к геодезическим представим в виде рядов по степеням ординаты y , полагая ее малой величиной.

Для симметричных изображений эти ряды будут иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x + A_2 y^2 + A_4 y^4 + A_6 y^6 + A_8 y^8 + \dots, \\ l &= B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 + B_7 y^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.23})$$

Все коэффициенты в этих рядах представляют собой функции только абсциссы x .

Переход от B, l к x, y

B	45°	b_{13}	0,000 280 77
l	$+9^\circ$	b_{15}	-0,025 309
N	6 388 944,935	b_{17}	-0,0060
a_0	32 072,9166	x	5 024 605,872 м
a_{24}	0,083 9660	y	+709 627,279 м
a_{26}	0,00132		
a_{28}	-0,0034		

Для удобства вычислений в качестве аргумента вместо абсциссы x используют соответствующую ей величину B_x .

Из формул (VI.23) следует, что при $y=0$ величина B_x представляет собой широту точки Q_x (рис. 57); плоскими координатами этой точки являются x и $y=0$, а геодезическими B_x и $l=0$.

Но абсцисса точки Q_x , т. е. отрезок OQ_x , равняется длине дуги меридиана X по условию проекции (масштаб на осевом меридиане равен единице). Следовательно, широту B_x можно найти как функцию длины дуги меридиана X по известным нам формулам (I.102), приняв $X=x$, а все коэффициенты рядов (VI.23), в свою очередь, будут являться функциями широты B_x .

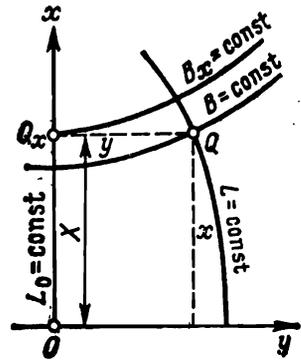


Рис. 57

Перейдем к определению коэффициентов в рядах (VI.23) для проекции Гаусса — Крюгера. Наложим на эти ряды условия конформного изображения, устанавливаемые дифференциальными уравнениями (VI.9),

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial y},$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial x}.$$

При дифференцировании рядов (VI.23) вместо аргумента x мы должны брать аргумент X .

Таким образом, получаем

$$\frac{dB}{dX} + \frac{dA_2}{dX} y^2 + \frac{dA_4}{dX} y^4 + \dots = \frac{N \cos B}{M} (B_1 + 3B_3 y^2 + 5B_5 y^4 + \dots),$$

$$2A_2 y + 4A_4 y^3 + \dots = -\frac{N \cos B}{M} \left(\frac{dB_1}{dX} y + \frac{dB_3}{dX} y^3 + \dots \right).$$

Сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях y , находим

$$B_1 = \frac{M}{N \cos B} \frac{dB}{dX}, \quad A_2 = -\frac{N \cos B}{2M} \frac{dB_1}{dX},$$

$$B_3 = \frac{M}{3N \cos B} \frac{dA_2}{dX}, \quad A_4 = -\frac{N \cos B}{4M} \frac{dB_3}{dX}$$

и т. д.

Последовательным дифференцированием по длине дуги меридиана X соответствующих функций найдем все необходимые коэффициенты.

При дифференцировании по длине дуги меридиана следует учесть, что

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}, \quad \frac{df(B)}{dX} = \frac{df(B)}{dB} \frac{dB}{dX}.$$

Приведем полученные таким образом коэффициенты рядов (VI.23) для преобразования плоских координат Гаусса — Крюгера в геодезические координаты в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{V_x^2 \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2}, \\ A_4 &= -\frac{A_2}{12N_x^2} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 4\eta_x^4), \\ A_6 &= \frac{A_2}{360N_x^4} (61 + 90 \operatorname{tg}^2 B_x + 45 \operatorname{tg}^4 B_x + \\ &+ 46\eta_x^2 - 252\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x - 90\eta_x^2 \operatorname{tg}^4 B_x), \\ A_8 &= \frac{-A_2}{20160N_x^6} (1385 + 3633 \operatorname{tg}^2 B_x + 4095 \operatorname{tg}^4 B_x + 1575 \operatorname{tg}^6 B_x), \\ B_1 &= \frac{1}{N_x \cos B_x}, \\ B_3 &= -\frac{B_1}{6N_x^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2), \\ B_5 &= \frac{B_1}{120N_x^4} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B_x + 24 \operatorname{tg}^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x), \\ B_7 &= -\frac{B_1}{5040N_x^6} (61 + 662 \operatorname{tg}^2 B_x + 1320 \operatorname{tg}^4 B_x + 720 \operatorname{tg}^6 B_x). \end{aligned} \right\} \text{(VI.24)}$$

Координаты B и l по формулам (VI.23) получаются в радианах. Точность вычислений по ним соответствует точности формул (VI.21).

Для вычислений на ЭВМ формулы (VI.23) и (VI.24) трудно преобразовать в следующие (с коэффициентами, вы-

численными по элементам эллипсоида Красовского):

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x + (((A_{26}z^2 - A_{26})z^2 + A_{24})z^2 - 1) z^2 A_{22}, \\ l &= (((B_{17}z^2 + B_{15})z^2 + B_{13})z^2 + 1) z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.25})$$

где

$$\beta = \frac{x}{6\,367\,558,497},$$

$$B_x = [(2382 \cos^2 \beta + 293\,609) \cos^2 \beta + 502\,21747] \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-10} + \beta,$$

$$A_{22} = (0,00336\,9263 \cos^2 B_x + 0,5) \sin B_x \cos B_x,$$

$$A_{24} = [(0,005\,6154 - 0,000\,0151 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x + 0,161\,6128] \cos^2 B_x + 0,25,$$

$$A_{26} = [(0,00389 \cos^2 B_x + 0,04310) \cos^2 B_x - 0,00168] \cos^2 B_x + 0,125,$$

$$A_{28} = [(0,013 \cos^2 B_x + 0,008) \cos^2 B_x - 0,031] \cos^2 B_x + 0,078,$$

$$B_{13} = (0,166\,66667 - 0,001\,12309 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,333\,33333,$$

$$B_{15} = [(0,008\,783 - 0,000\,112 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,166\,667] \cos^2 B_x + 0,2,$$

$$B_{17} = (0,1667 - 0,0361 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,1429,$$

$$N_x = [(0,605 \sin^2 B_x + 107,155) \sin^2 B_x + 21\,346,142] \sin^2 B_x + 6\,378\,245,$$

$$z = \frac{y}{N_x \cos B_x}.$$

Пример вычисления геодезических координат по формулам (VI.25) приведен в табл. 25.

Таблица 25

Переход от x, y к B, l

x	5 024 605,872	B_{13}	-0,251 309 60
y	+709 627,279	B_{15}	0,119 830
β	0,789 094 576	B_{17}	-0,0694
B_x	0,791 612 910	z	0,158 060 360
N_x	6 389 078,265	B	44°59'59,9999"
A_{22}	0,250 812 471	l	+8°59'59,9996"
A_{24}	0,331 1694		
A_{26}	0,135 15		
A_{28}	0,066		

Необходимость в вычислении плоских координат с точностью до 0,001 м и геодезических координат с точностью до 0,0001" в практике геодезических работ встречается сравнительно редко. Чаще всего практические требования к точности координат бывают значительно ниже, а значит и формулы для вычисления координат в этом случае могут быть существенно упрощены.

Для вычислений на ЭВМ ниже приводятся алгоритмы, основанные на упрощении формул (VI.22) и (VI.25). В них отра-

жены особенности применения проекции Гаусса — Крюгера, описанные в § 47 (нумерация зон, условные ординаты).

Для точек, расположенных в пределах одной шестиградусной зоны, точность вычисления координат указана в заголовке каждого алгоритма.

Алгоритм вычисления плоских координат Гаусса — Крюгера с погрешностью не более 0,1 м.

Координаты B и L заданы в радианах.

$$a_0 = (0,7 \cos^2 B - 135,3) \cos^2 B + 32140,4,$$

$$a_3 = (0,0011 \cos^2 B + 0,3333) \cos^2 B - 0,1667,$$

$$a_4 = 0,25 \cos^2 B - 0,042,$$

$$a_5 = (0,2 \cos^2 B - 0,17) \cos^2 B,$$

$$N = \frac{6\,397\,698,9}{\sqrt{1 + 0,00\,673\,853 \cos^2 B}},$$

$$Lk + 1 = n + \alpha$$

(n — целая часть числа,
 α — дробная часть числа),

$$l = \frac{\alpha - 0,5}{k}, \quad k = \frac{p^\circ}{6} = 9,549\,2966,$$

$$\left. \begin{aligned} x &= [(a_4 l^2 + 0,5) l^2 N - a_0] \sin B \cos B + 6\,367\,558,5 B, \\ y_{\text{усл}} &= [(a_5 l^2 + a_3) l^2 + 1] l N \cos B + (10n + 5) \cdot 10^5. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.26})$$

Координаты x и $y_{\text{усл}}$ получаются в метрах.

Алгоритм вычисления плоских координат Гаусса — Крюгера с погрешностью не более 3 м.

Координаты B и L заданы в радианах.

$9,5493 L + 1 = n + \alpha$ (n — целая часть, α — дробная часть числа),

$$l = \frac{\alpha - 0,5}{9,5493}, \quad N = \frac{6\,399\,700}{\sqrt{1 + 0,0067385 \cos^2 B}},$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (0,5 N l^2 + 135 \cos^2 B - 32140) \sin B \cos B + 6\,367\,558 B, \\ y_{\text{усл}} &= [(\cos^2 B - 0,5) \frac{l^2}{3} + 1] l N \cos B + (10n + 5) \cdot 10^5. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.27})$$

Координаты x и $y_{\text{усл}}$ получаются в метрах.

Алгоритм вычисления геодезических координат по плоским координатам с погрешностью не более 0,003".

$$y_{\text{усл}} \cdot 10^{-6} = n + \alpha, \quad L_0 = \frac{n - 0,5}{9,549\,2966},$$

$$\beta = \frac{x}{6\,367\,558,5},$$

$$B_x = [502\,217 + (2936 + 24 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-8} + \beta,$$

$$z = \frac{(\alpha - 0,5) \sqrt{1 + 0,00673853 \cos^2 B_x}}{6,3996989 \cos B_x},$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= (0,00337 \cos^2 B_x + 0,5) \sin B_x \cos B_x, \\
 b_4 &= 0,162 \cos^2 B_x + 0,25, \\
 b_3 &= (0,0011 \cos^2 B_x - 0,1667) \cos^2 B_x + 0,3333, \\
 b_5 &= 0,17 \cos^2 B_x - 0,2, \\
 B &= (b_4 z^2 - 1) b_2 z^2 + B_x, \\
 L &= [1 - (b_5 z^2 + b_3) z^2] z + L_0.
 \end{aligned} \quad (VI.28)$$

Координаты B и L получаются в радианах.

Алгоритм вычисления геодезических координат по плоским координатам с погрешностью не более $0,1''$.

$$\begin{aligned}
 y_{\text{усл}} \cdot 10^{-6} &= n + \alpha, \quad L_0 = \frac{n - 0,5}{9,5493}, \quad \beta = \frac{x}{6\,367\,558}, \\
 B_x &= (294 \cos^2 \beta + 50\,222) \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-7} + \beta, \\
 z &= \frac{(\alpha - 0,5) \sqrt{1 + 0,006\,7385 \cos^2 B_x}}{6,3997 \cos B_x}, \\
 B &= [(0,65 \cos^2 B_x + 1) z^2 - 4] (0,0067 \cos^2 B_x + \\
 &+ 1) \sin B_x \cos B_x \frac{z^2}{8} + B_x, \\
 L &= \left[(\cos^2 B_x - 2) \frac{z^2}{6} + 1 \right] z + L_0.
 \end{aligned} \quad (VI.29)$$

Координаты B и L получаются в радианах.

§ 43. СБЛИЖЕНИЕ МЕРИДИАНОВ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

Сближение меридианов используется при переходе от азимута геодезической линии к дирекционному углу ее изображения на плоскости по формуле

$$\alpha = A - \gamma.$$

Для вычисления сближения меридианов в любой конформной проекции выше были получены формулы (VI.5) общего вида, из которых воспользуемся следующей:

$$\operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial L} \right) : \left(\frac{\partial y}{\partial L} \right). \quad (VI.30)$$

Частные производные по долготе в этом выражении найти гораздо проще, чем частные производные по широте в другом выражении (VI.5).

В уравнениях (VI.22) раскроем скобки и полученные выражения проинтегрируем по долготе l . Тогда найдем

$$\frac{\partial x}{\partial L} = N \sin B \cos B (l + 4a_{24}l^3 + 6a_{26}l^5 + 8a_{28}l^7),$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = N \cos B (1 + 3b_{13}l^2 + 5b_{15}l^4 + 7b_{17}l^6).$$

Подставив значения этих производных в уравнение (VI.30), получим окончательно

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\{[(8a_{28}l^2 + 6a_{26})l^2 + 4a_{24}]l^2 + 1\} l \sin B}{[(7b_{17}l^2 + 5b_{15})l^2 + 3b_{13}]l^2 + 1}. \quad (\text{VI.31})$$

Сближение меридианов вычисляют обычно одновременно с вычислением плоских координат по геодезическим координатам, поэтому в формуле (VI.31) используются те же значения коэффициентов, что и в формулах (VI.22).

Знак сближения меридианов совпадает со знаком разности долгот $l = L - L_0$. Очевидно, для точек, расположенных к востоку от осевого меридиана, сближение меридианов всегда будет иметь знак плюс, а к западу — минус.

Найдем еще одну формулу для вычисления сближения меридианов.

Если в равенство (VI.30) подставить значения частных производных функций (VI.20), а коэффициенты заменить по формулам (VI.21), то после элементарных преобразований можно найти следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin B \operatorname{tg} l + \eta^2 \sin B \cos^2 Bl^3 \left(1 + \frac{2}{3} \eta^2 + \cos^2 Bl^2\right)$$

или в другом виде

$$\operatorname{tg} \gamma = \{[(l^2 + 0,0045) \cos^2 B + 1] 0,00674l^3 \cos^4 B + \operatorname{tg} l\} \sin B. \quad (\text{VI.32})$$

Эта формула будет наиболее удобной для вычислений особенно в тех случаях, когда сближение меридианов определяется независимо от вычисления плоских координат.

Если заданы плоские координаты, то наиболее рациональной будет следующая последовательность вычислений: вначале определяются геодезические координаты B и l по формулам (VI.25), а затем применяется равенство (VI.32).

Для приближенного определения сближения меридианов с точностью до $1'$ достаточно ограничиться первым членом в равенстве (VI.31). Тогда

$$\gamma' = l' \sin B. \quad (\text{VI.33})$$

Если же заданы плоские координаты, то предварительно находят приближенную широту B с точностью до $1'$ (по круп-

номасштабной карте), а затем применяют такую формулу:

$$\gamma' = \frac{\rho'}{a} \operatorname{tg} By = 0,539 \operatorname{tg} By_{\text{км}}. \quad (\text{VI.34})$$

Пример вычисления сближения меридианов.

Исходные данные: $B = 45^\circ$, $l = +9^\circ$.

Результат вычислений по формуле (VI.31) с использованием коэффициентов табл. 24: $\gamma = +6^\circ 23' 25,661''$. Результат вычислений по формуле (VI.32): $\gamma = +6^\circ 23' 25,660''$.

§ 44. МАСШТАБ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

Масштаб изображения является важнейшей характеристикой любой конформной проекции. Зная формулу масштаба, можно установить величины и распределение линейных искажений в пределах изображаемой области.

Для вывода формулы масштаба воспользуемся второй формулой из (VI.6), которую напомним в следующем виде:

$$m^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 \right] \frac{1}{N^2 \cos^2 B}.$$

Найдем производные по долготе от функций (VI.20) и сразу же подставим значения коэффициентов по формулам (VI.21). В производных сохраним только члены порядка l^4 , в которых отбросим сфероидические члены. Таким образом, найдем

$$\frac{\partial x}{\partial l} \frac{1}{N \cos B} = \sin Bl + \sin B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) \frac{l^3}{6},$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} \frac{1}{N \cos B} = 1 + \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) \frac{l^2}{2} +$$

$$+ \cos^4 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{24}.$$

Возведем каждое из этих выражений в квадрат и сложим их. Тогда получим с принятой выше точностью

$$m^2 = \sin^2 Bl^2 + \sin^2 B \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{3} +$$

$$+ 1 + \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) l^2 + \cos^4 B (1 - 2 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{4} +$$

$$+ \cos^4 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{12}.$$

Заменим $\sin^2 B$ через $\cos^2 B \operatorname{tg}^2 B$ и приведем подобные члены.

$$m^2 = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) l^2 + \cos^4 B (8 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{12}.$$

Для извлечения квадратного корня применим выражение

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$$

Таким образом, получаем окончательно

$$m = 1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{24}. \quad (\text{VI.35})$$

Из этого равенства видно, что при $l=0$, т. е. на оси абсцисс, масштаб равен единице во всех точках. По мере удаления от осевого меридиана к востоку и западу масштаб изображения быстро увеличивается.

Заменим разность долгот l ординатой y , для чего воспользуемся вторым выражением из (VI.20) с принятой в (VI.35) точностью

$$y = N \cos Bl + N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^3}{6}.$$

Обращая этот ряд относительно $l \cos B$, находим

$$l \cos B = \frac{y}{N} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^3}{6N^3},$$

откуда

$$l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{3N^4},$$

$$l^4 \cos^4 B = \frac{y^4}{N^4}.$$

Подставим последние два выражения в равенство (VI.35). Тогда

$$m = 1 + \frac{1 + \eta^2}{2N^2} y^2 - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{6N^4} + \\ + (5 - 4 \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{24N^4} = 1 + \frac{V^2}{N^2} \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24N^4}.$$

Так как

$$\frac{V^2}{N^2} = \frac{V^4}{c^2} = \frac{1}{R^2},$$

где R — средний радиус кривизны эллипсоида, то окончательно получим

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (\text{VI.36})$$

Здесь в члене четвертого порядка мы заменили N^4 на R^4 с ошибкой на сфероидические члены, что соответствует принятой выше точности.

Если при выводе формулы масштаба сохранить члены порядка l^6 , то можно получить более точную формулу в таком виде:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \frac{y^6}{720R^6}. \quad (\text{VI.37})$$

Ниже для вывода формул редукций нам потребуется выражение натурального логарифма масштаба. Найдем его.

Воспользовавшись разложением в ряд

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \dots,$$

из формулы (VI.36) получим

$$\ln m = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{12R^4}. \quad (\text{VI.38})$$

Анализируя выражение (VI.36), легко заметить, что с увеличением ординаты линейные искажения быстро возрастают пропорционально квадрату ординаты. Наоборот, постоянному значению ординаты $y = \text{const}$ соответствует практически постоянная величина масштаба $m = \text{const}$.

С изменением широты изменяется, конечно, величина радиуса

$$R = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B},$$

но весьма незначительно.

Поэтому можно считать, что изоколы (линии равных искажений длин) в проекции Гаусса — Крюгера располагаются практически параллельно оси абсцисс на всей полосе проекции от экватора до полюса.

На этом основании проекцию Гаусса — Крюгера наиболее целесообразно применять для изображения полосы, вытянутой на эллипсоиде с юга на север, причем ширина этой полосы в линейной мере не зависит от географической широты и может иметь одну и ту же величину как на юге, так и на севере. Границами такой полосы служат изоколы $m = \text{const}$ (рис. 58).

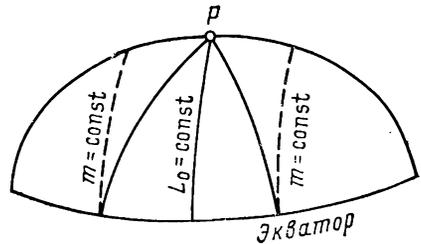


Рис. 58

§ 45. КРИВИЗНА КОНФОРМНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

В § 41 была получена формула (VI.19)

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial y} \cos \alpha,$$

по которой определяется кривизна изображения геодезической линии в любой конформной проекции.

Для получения кривизны Γ в проекции Гаусса — Крюгера воспользуемся выражением (VI.38) логарифма масштаба этой проекции

$$\ln m = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^3}{12R^4}.$$

Частную производную этой функции по ординате находим достаточно просто

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y} = \frac{y}{R^2} - \frac{y^2}{3R^4}. \quad (a)$$

Частная производная по абсциссе определяется сложнее, так как радиус кривизны R зависит непосредственно от широты B . Поэтому частную производную $\ln m$ по абсциссе будем искать как производную сложной функции

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{\partial \ln m}{\partial B} \frac{dB}{dX} \frac{dX}{dx}.$$

Эта производная в правой части будет иметь множителем квадрат эксцентриситета. Поэтому при дифференцировании выражения для $\ln m$ ограничимся только его первым членом. С такой же точностью можем принять, что $\frac{dX}{dx} = 1$.

Таким образом, искомой будет следующая функция:

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{y^2}{2c^2} \frac{dV^4}{dB} \frac{dB}{dX}.$$

Так как

$$\frac{dV^4}{dB} = 2V^2 \frac{d}{dB} (1 + e'^2 \cos^2 B) = -2V^2 e'^2 \sin 2B,$$

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M},$$

то с ошибкой порядка e^4 получим

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x} = -\frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2. \quad (б)$$

Подставив значения частных производных по равенствам (а) и (б) в выражение для кривизны Γ , найдем

$$\Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos \alpha + \frac{y^3}{3R^4} \cos \alpha - \frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2 \sin \alpha. \quad (VI.39)$$

Теперь найдем еще изменение кривизны Γ при перемещении вдоль кривой S , т. е. производную $\frac{d\Gamma}{dS}$.

При дифференцировании функции (VI.39) отбросим в ней последний член как весьма малый по величине по сравнению с первыми двумя. Кроме того, в этой же функции с достаточной точностью радиус кривизны R примем за постоянную величину, переменными же величинами будут y и α . Тогда

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{\partial\Gamma}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{dS}.$$

Так как

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial y} = -\frac{\cos\alpha}{R^2} + \frac{y^2}{R^4} \cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dS} = \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha} = \frac{y}{R^2} \sin\alpha - \frac{y^3}{3R^4} \sin\alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{dS} = \Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos\alpha + \dots,$$

то, ограничиваясь членами порядка $\frac{1}{R^4}$, находим

$$\frac{d\Gamma}{dS} = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{R^2} + \frac{y^2}{R^4} \cos\alpha \sin\alpha - \frac{y^2}{R^4} \cos\alpha \sin\alpha.$$

Окончательно

$$\frac{d\Gamma}{dS} = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{R^4}. \quad (\text{VI.40})$$

Пользуясь формулами (VI.39) и (VI.40), исследуем общий вид кривой S на плоскости.

С этой целью установим направление вогнутости кривой.

Так как

$$\Gamma = \frac{d\alpha}{dS},$$

то

$$d\alpha = \Gamma dS.$$

Следовательно, знак изменения величины дирекционного угла $d\alpha$ при движении вдоль кривой S в заданном направлении совпадает со знаком кривизны Γ .

Определяя знак Γ по формуле (VI.39) (без последнего члена) в различных направлениях, проведенных из двух точек, расположенных в восточной ($+y$) и западной ($-y$) половинах плоскости проекции, замечаем, что во всех случаях вогнутость кривой S направлена в сторону оси абсцисс (рис. 59).

В двух частных случаях, когда линия S расположена на оси абсцисс или в направлении, к ней перпендикулярном, кривая S

вырождается в прямую, так как в этих случаях как кривизна Γ , так и ее производная обращаются в нуль.

В точке пересечения кривой S с осью абсцисс кривизна кривой равна нулю, но производная кривизны не будет равна нулю, как это видно из формулы (VI.40), и не меняет

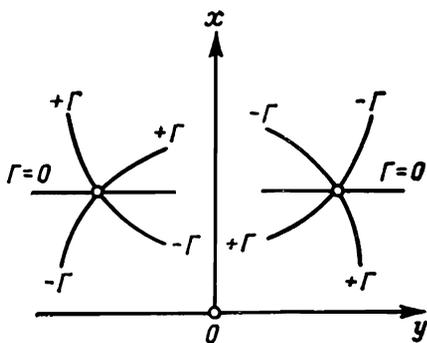


Рис. 59

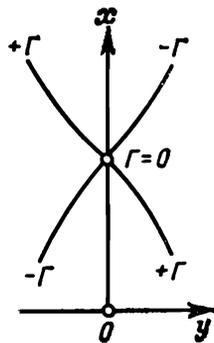


Рис. 60

своего знака при изменении направления в этой точке на 180° . Следовательно, в точке пересечения с осью абсцисс кривая S имеет точку перегиба (рис. 60).

§ 46. РЕДУЦИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТЬ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА

Под редуцированием геодезической линии понимают переход от длины и азимутов геодезической линии на эллипсоиде к дирекционному углу и длине хорды ее изображения на плоскости.

В общем виде для любой проекции формулы редуцирования были получены в § 41. Теперь мы применим эти формулы для проекции Гаусса — Крюгера.

Одним из составных элементов редуциционных формул является сближение меридианов, методика вычисления которого уже была рассмотрена в § 43. Нам осталось найти формулы для вычисления поправок за кривизну и за масштаб.

Поправка в направление геодезической линии за кривизну ее изображения на плоскости (редукция направления или «поправка за кривизну»)

Эта поправка в общем виде определяется выражением (VI.16)

$$\delta_{12} = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \left(\frac{d\Gamma}{dS} \right)_1 \frac{S^2}{6} + \dots, \quad (\text{A})$$

где S — изображение геодезической линии на плоскости,
 Γ — кривизна этого изображения.

Подставим сюда значения кривизны и ее производной, определяемые равенствами (VI.39) и (VI.40), и отнесем их к начальной точке

$$\delta_{12} = -\frac{y_1}{2R_1^2} S \cos \alpha_1 + \frac{y_1^2}{6R_1^4} S \cos \alpha_1 - \frac{e^2 \sin 2B_1}{2R_1^3} y_1^2 S \sin \alpha_1 - \frac{S^2}{6R_1^3} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1. \quad (\text{VI.41})$$

Это выражение нам предстоит привести к виду, более удобному для вычислений.

В первую очередь необходимо перейти от длины линии S и ее дирекционного угла α_1 к длине хорды d и ее дирекционному углу α_{12} по формулам (VI.12), (VI.15), (VI.16) и (VI.17), из которых находим

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \delta_{12}, \quad (\text{B})$$

$$d = S - \Gamma_1^2 \frac{S^3}{24}. \quad (\text{B})$$

Предварительно выясним, с какой точностью следует знать величины S и α , чтобы вычислить поправку δ_{12} с заданной точностью.

С этой целью продифференцируем первый член в правой части равенства (VI.41)

$$d\delta = -\frac{y_1}{2R_1^2} (\cos \alpha_1 dS - S \sin \alpha_1 d\alpha_1),$$

откуда

$$d\delta'' = -\rho'' \frac{y_1}{2R_1^2} \cos \alpha_1 dS + \frac{y_1}{2R_1^2} S \sin \alpha_1 d\alpha_1''.$$

При обработке триангуляции 1 класса дирекционные углы вычисляются с точностью до $0,001''$. Примем наибольшие значения $y_1 = 320$ км и $S = 60$ км. С этими значениями, приравняв $\cos \alpha_1$ и $\sin \alpha_1$ единице, из последнего равенства получаем

$$|d\delta''| = 0,001'' = |0,8dS|_{\max} = |0,00025d\alpha_1''|_{\max}.$$

Отсюда находим, что для вычисления δ_{12} с погрешностью не более $0,001''$ длины сторон следует знать с погрешностью dS не более 1 м, а дирекционные углы с погрешностью $d\alpha_1$ не более $4''$.

С принятыми выше значениями y_1 и S при $\alpha_1 = 0^\circ$ величина δ_{12} будет равняться $50''$. Поэтому если в равенстве (B) отбросить δ_{12} , то погрешность в дирекционном угле хорды будет в 10 раз больше допустимой. Следовательно, при преобразовании формулы (VI.41) равенство (B) следует учитывать.

Теперь из равенства (В), опуская индексы, получаем

$$S - d = \Gamma^2 \frac{S^3}{24} = \frac{y^2}{24R^4} S^3 \cos^2 \alpha.$$

С принятыми выше значениями y_1 и S , а также при $\cos \alpha = 1$ найдем

$$S - d = 0,0005 \text{ м.}$$

Следовательно, во всех случаях практики при длинах сторон, не превышающих 60 км, можно принимать длину изображения геодезической линии S равной длине ее хорды d .

Приступим к преобразованию равенства (VI.41).

Прежде всего найдем для главного члена

$$S \cos \alpha_1 = d \cos (\alpha_{12} - \delta_{12}) = d \cos \alpha_{12} - d \sin \alpha_{12} \frac{y_1}{2R_1^2} d \cos \alpha_{12}.$$

Введем обозначения для приращений координат

$$d \cos \alpha_{12} = \Delta x = x_2 - x_1,$$

$$d \sin \alpha_{12} = \Delta y = y_2 - y_1.$$

Теперь из равенства (VI.41) с принятой точностью находим

$$\begin{aligned} \delta_{12}'' &= -\rho'' \frac{\Delta x}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3} - \frac{y_1^2}{2R_1^2} \Delta y - \frac{y_1^2}{3R_1^2} \right) - \\ &- \frac{e^2 \sin 2B_1}{2R_1^3} y_1^2 \Delta y. \end{aligned} \quad (\text{VI.42})$$

В триангуляции 1 класса вместо ординаты y_1 обычно используют среднюю ординату

$$y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Тогда

$$y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}.$$

Подставим это значение y_1 в равенство (VI.42), учтем, что

$$y_1^2 = y_m^2 - \frac{3}{2} y_m \Delta y + \frac{3}{4} y_m \Delta y^2 - \frac{\Delta y^3}{8},$$

а при последующих преобразованиях будем пренебрегать членами порядка $y_m \Delta y^2$ и Δy^3 . Кроме того, без ущерба для точности радиус кривизны R можно вычислять для широты, взятой для средней точки заданной геодезической линии.

Таким образом, окончательную формулу для вычисления поправки за кривизну в начальной точке, применяемую при

обработке триангуляции 1 класса, получим в следующем виде:

$$\delta_{12}'' = -f_{\delta} \Delta x \left(y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \left(\rho'' \frac{e^2}{2} \right) \frac{\sin 2B_m}{R_m^3} y_m^2 \Delta y, \quad (\text{VI.43})$$

где принято обозначение

$$f_{\delta} = \frac{\rho''}{2R_m^2}.$$

Формулу редукции в конечной точке хорды δ_{21} можно найти из (VI.43), если в ней поменять местами индексы 1 и 2 в приращениях $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = y_2 - y_1$. Если же индексы оставить прежними, т. е. пользоваться теми же обозначениями координат, что и при вычислении δ_{12} , то в формуле (VI.43) необходимо перед приращениями координат изменить знаки на обратные.

Следовательно,

$$\delta_{21}'' = f_{\delta} \Delta x \left(y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \left(\rho'' \frac{e^2}{2} \right) \frac{\sin 2B_m}{R_m^3} y_m^2 \Delta y. \quad (\text{VI.44})$$

Для вычислений на ЭВМ без применения специальных таблиц формулы (VI.43) и (VI.44) нетрудно привести к такому виду:

$$\delta_{12}'' = -k_1 (1 + e'^2 \cos^2 B_m)^2 \left(\frac{y_m}{c} \right) \Delta x \left[6 - 2 \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 - \frac{\Delta y}{y_m} \right] - k_2 \sin 2B_m \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 \Delta y, \quad (\text{VI.45})$$

$$\delta_{21}'' = k_1 (1 + e'^2 \cos^2 B_m)^2 \left(\frac{y_m}{c} \right) \Delta x \left[6 - 2 \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 + \frac{\Delta y}{y_m} \right] + k_2 \sin 2B_m \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 \Delta y, \quad (\text{VI.46})$$

где

$$k_1 = \frac{\rho''}{12c} = 2,685\,587,$$

$$k_2 = \frac{\rho'' e_2}{2c} = 0,108,$$

$$e'^2 = 0,00\,67385, \quad c = 6399,70 \text{ км},$$

y_m и Δy выражаются в километрах и вычисляются с точностью 0,001 км.

В триангуляции 2 класса при длинах сторон менее 20 км в предыдущих формулах можно ограничиться только первыми двумя членами

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12}'' &= -f_{\delta} \Delta x \left(y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) = -\frac{f_{\delta}}{3} \Delta x (2y_1 + y_2), \\ \delta_{21}'' &= f_{\delta} \Delta x \left(y_m + \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{f_{\delta}}{3} \Delta x (y_1 + 2y_2). \end{aligned} \right\} \quad (VI.47)$$

В триангуляции низших классов применяют еще более простые формулы

$$\delta_{12}'' = -\delta_{21}'' = -f_{\delta} y_m \Delta x = -0,00253 y_m \Delta x. \quad (VI.48)$$

В последнем выражении величины y_m и Δx берут в километрах. Для вычисления редуций по приведенным выше формулам должны быть известны плоские координаты начального и конечного пунктов: в триангуляции 1 класса с точностью до 1 м, в триангуляции 2 класса — до 10 м и в низших классах триангуляции — до 0,1 км.

Поправка в длину геодезической линии за масштаб ее изображения на плоскости

Выше было показано, что поправка за кривизну изображения геодезической линии δS , определяемая формулой (VI.17), при длинах сторон порядка 60 км и менее будет значительно меньше 0,001 м, поэтому в триангуляции 1 класса можно принять $d = S$.

Таким образом, для вычисления длины хорды нам необходимо найти интеграл (VI.13)

$$d = \int_0^s m ds, \quad (VI.49)$$

где m определяется формулой (VI.36),

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}.$$

Масштаб изображения является весьма сложной функцией длины геодезической линии. Поэтому найти неопределенный интеграл (VI.49) в замкнутой форме — задача трудно разрешимая.

Однако следует учесть, что при незначительном удалении от осевого меридиана и при небольшой длине линии масштаб вдоль этой линии изменяется весьма медленно. Поэтому задача нахождения определенного интеграла упрощается, и ее решение можно будет искать приближенными методами, обеспечивающими необходимую точность при малых расстояниях.

Существуют два достаточно простых приближенных метода вычисления определенного интеграла (VI.49): метод разложения в ряд по степеням длины линии и метод численного интегрирования. Мы здесь применим второй метод.

Применение любого метода численного интегрирования предусматривает вычисление подынтегральной функции, в нашем случае — масштаба, в нескольких точках геодезической линии или ее изображения на плоскости.

Применим наиболее простую формулу Симпсона, разделив интервал интегрирования всего на две части, следовательно, подынтегральную функцию надлежит вычислить в трех точках линии: в начальной, средней и конечной. Все величины, относящиеся к средней точке, будем обозначать индексом m . Тогда интеграл (VI.49) будет представлен таким выражением:

$$d = \frac{s}{6} (m_1 + 4m_m + m_2), \quad (\text{VI.50})$$

где

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2R_1^2} + \frac{y_1^4}{24R_1^4},$$

$$m_m = 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4},$$

$$m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2R_2^2} + \frac{y_2^4}{24R_2^4}.$$

Во всех трех выражениях масштаба радиус R условимся вычислять только для средней точки, а в членах четвертого порядка примем $y_1^4 = y_2^4 = y_m^4$. Эти допущения вызовут пренебрежимо малую ошибку в длине хорды, если ее величина не превышает 60 км.

Формулу (VI.50) представим в двух видах. В первом случае используем следующие выражения:

$$2y_m = y_1 + y_2,$$

$$4y_m^2 = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2.$$

Тогда из равенства (VI.50) найдем

$$d = s \left(1 + \frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{6R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right). \quad (\text{VI.51})$$

Во втором случае используем такие соотношения:

$$y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}, \quad y_2 = y_m + \frac{\Delta y}{2},$$

откуда

$$y_1^2 = y_m^2 - y_m\Delta y + \frac{\Delta y^2}{4},$$

$$y_2^2 = y_m^2 + y_m \Delta y + \frac{\Delta y^2}{4},$$

$$y_1 y_2 = y_m^2 - \frac{\Delta y^2}{4}.$$

После подстановки этих выражений в равенство (VI.51) получим

$$d = s \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right). \quad (\text{VI.52})$$

Представим эту формулу еще в другом виде, более удобном для вычислений на ЭВМ,

$$d - s = \Delta s = -\frac{s}{24} (1 + e'^2 \cos^2 B_m)^2 \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 \left[12 + \left(\frac{\Delta y}{y_m} \right)^2 + \left(\frac{y_m}{c} \right)^2 \right], \quad (\text{VI.53})$$

где $e'^2 = 0,0067385$, $c = 6\,399\,700$ м,

B_m — широта средней точки геодезической линии; величины s , y_m и Δy выражены в метрах с точностью до 1 м.

Формулы (VI.51) и (VI.52) применяют в триангуляции 1 класса. В триангуляции 2 класса применяют эти же формулы, но без последнего члена, который при длине стороны 20 км и $y_m = 320$ км составит всего лишь 0,005 м.

В сетях низших классов достаточно применить следующую формулу:

$$\Delta s = 0,123 y_m^2 s, \quad (\text{VI.54})$$

в которой величина y_m выражается в сотнях километров, а s — в километрах. Поправка Δs получается в метрах.

При значительном удалении от осевого меридиана (до 1000 км) в формулу (VI.52) необходимо добавить еще один член согласно выражению (VI.37) для масштаба. Тогда получим

$$d = s \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} + \frac{y_m^6}{720R_m^6} \right). \quad (\text{VI.55})$$

Отсюда найдем обратную зависимость в следующем виде:

$$s = d \left(1 - \frac{y_m^2}{2R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{5y_m^4}{24R_m^4} - \frac{61y_m^6}{720R_m^6} \right). \quad (\text{VI.56})$$

§ 47. ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОЕКЦИИ ГАУССА — КРЮГЕРА В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ТОПОГРАФИЧЕСКИХ РАБОТАХ СССР

Координатные зоны

Плоские прямоугольные координаты точек поверхности эллипсоида, вычисленные по геодезическим координатам в одной из конформных проекций, называют сокращенно плоскими конформными координатами.

Область распространения системы плоских конформных координат называют координатной зоной. Границы зоны в общем случае могут быть произвольными. В практике топографо-геодезических работ координатную зону обычно ограничивают или изоколой с заданной величиной масштаба, или изображениями на плоскости меридианов и параллелей.

С целью упорядочения вычисления плоских конформных координат Гаусса — Крюгера при построении государственной геодезической сети СССР и, главным образом, с целью создания возможности использования этой сети в качестве опорной при составлении топографических карт в Советском Союзе разработаны и действуют правила, регламентирующие порядок применения проекции Гаусса — Крюгера в геодезических и топографических работах.

Согласно этим правилам в пределах территории СССР установлено определенное число самостоятельных систем плоских координат. Для каждой системы заданы долготы осевых меридианов и указаны границы координатных зон.

В основу построения единой общегосударственной системы (в широком смысле слова) плоских координат положено разделение поверхности эллипсоида (точнее, северного полушария) на ряд совершенно одинаковых сфероидических треугольников, ограниченных экватором и меридианами с разностью долгот 6° . Эти сфероидические треугольники называют шестиградусными меридианными полосами. Часто такие полосы называют зонами. Но не следует отождествлять их с координатными зонами.

Изображение на плоскости каждой шестиградусной полосы в многогранной видоизменной поликонической проекции представляет собой колонну листов Международной карты мира в масштабе $1 : 1\,000\,000$.

Изображение этой же полосы на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера представляет собой шестиградусную координатную зону, ограниченную изображениями экватора и меридианов ABP (рис. 61). Осевой меридиан зоны является средним меридианом шестиградусной меридианной полосы на эллипсоиде.

Прямолинейные изображения осевого меридиана и экватора, принятые в качестве осей декартовых координат, позволяют создать в каждой шестиградусной координатной зоне самостоя-

тельную систему плоских координат, которая используется во всех видах геодезических и топографических работ, выполняемых в границах одной зоны.

В пределах каждой шестиградусной координатной зоны размещается целое число трапеций топографических карт в масштабах от 1 : 500 000 до 1 : 10 000. По координатам, вычисленным для угловых точек трапеций, на каждый лист топографической карты наносят координатную сетку в системе плоских координат данной зоны.

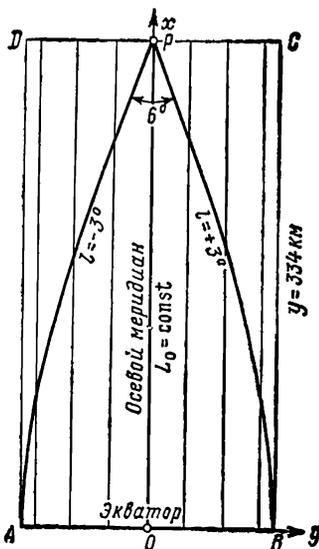


Рис. 61

Системы координат в каждой зоне проекции Гаусса — Крюгера совершенно идентичны: плоские координаты x и y , вычисленные по геодезическим координатам B и l в любой координатной зоне, имеют одни и те же значения.

Чтобы исключить из обращения отрицательные ординаты и облегчить пользование координатной сеткой на топографических картах, принято ко всем ординатам добавлять постоянное число 500 000 м. Кроме того, чтобы знать, к какой зоне относятся плоские координаты, к ординате слева приписывают номер зоны. В результате получается число, представляющее собой условную ординату.

Например, $y_{\text{усл}} = 27\ 349\ 817,425$ означает, что точка с этой ординатой расположена в 27 зоне, ее истинная ордината равна $-150\ 182,575$, а долгота осевого меридиана $L_0 = 27 \cdot 6 - 3 = 159^\circ$.

В такой записи положение любой точки на поверхности эллипсоида однозначно определяется абсциссой x и условной ординатой $y_{\text{усл}}$.

Заметим, что было бы, по-видимому, гораздо удобнее координате приписывать вместо номера зоны долготу осевого мери-

диана. Номера зон ведутся с запада на восток. Номер каждой шестиградусной зоны отличается от номера соответствующей колонны листов миллионной карты на 30.

Номер зоны n и долгота осевого меридиана L_0 в градусах связаны между собой равенством

$$L_0 = 6n - 3.$$

Всего на территории СССР создано 29 шестиградусных зон с номерами от 4 по 32 и соответственно установлено 29 осевых меридианов со стандартными долготами, равными 21, 27, ..., 183, 189°.

Системы координат в каждой зоне проекции Гаусса — Крюгера совершенно идентичны: плоские координаты x и y , вычисленные по геодезическим координатам B и l в любой координатной зоне, имеют одни и те же значения.

диана в градусах. Тогда условная ордината в приведенном выше примере была бы записана в таком виде: $U_{\text{усл}} = 159\,349\,817,425$.

Аналогичную запись предлагал уже Н. Г. Келль [12] еще в 1932 г.

Рассмотрим более подробно вопрос о ширине координатных зон.

При выполнении геодезических работ ширина координатной зоны может быть произвольной. Дело в том, что современные методы и средства вычислений позволяют получать плоские координаты в проекции Гаусса — Крюгера при значительном удалении точек от осевого меридиана. Например, плоские координаты с точностью до 0,01 м можно вычислять по формулам (VI.22) при ширине координатных зон до 18° по долготе, а по формулам, приведенным ниже в § 48, даже в 100° -ной координатной зоне.

Иначе обстоит дело в топографии.

Основное требование, которое предъявляется к любой картографической проекции, применяемой при создании топографических карт, состоит в том, чтобы расстояния, измеренные по карте, были бы практически равны им соответствующим расстояниям на местности в масштабе карты.

Выясним, удовлетворяет ли шестиградусная зона проекции Гаусса — Крюгера этому требованию.

Точность расстояния, измеренного между двумя точечными объектами на топографической карте, характеризуется средней погрешностью порядка 0,7 мм, независимо от величины расстояния. Эта погрешность складывается из погрешности измерения расстояния по карте, из погрешностей взаимного положения объектов, возникающих вследствие неточного нанесения их на карту, из погрешностей печати, влияния деформации бумаги и т. п.

Для различных масштабов карты погрешности 0,7 мм соответствуют величины Δd , выраженные в метрах и показанные во второй колонке табл. 26.

Таблица 26

Масштаб карты	Δd , м	s , км	Δs , м
1 : 10 000	7	7,5	10
1 : 25 000	18	15	20
1 : 50 000	35	30	41
1 : 100 000	70	60	82
1 : 200 000	140	120	165
1 : 500 000	350	360	490

Максимальные расстояния s , которые можно измерить между двумя наиболее удаленными друг от друга точками в пре-

делах одного листа карты на широте 30° , приведены в третьей колонке табл. 26.

Линейное искажение, вызванное масштабом проекции, достигает наибольшей величины в точке пересечения граничного меридиана зоны с экватором, т. е. в точке с координатами $B=0^\circ$ и $|l|=3^\circ$ (см. рис. 61), в которой $|y|=334$ км. Это максимальное искажение Δs , вычисленное по формуле (VI.54), показано в последней колонке табл. 26.

Относительное искажение длин линий для карт всех масштабов составляет $1:730$.

Сравнивая между собой величины Δd и Δs в каждой строчке, замечаем, что для топографических карт всех масштабов эти величины примерно одного порядка. На широтах 35° и более (территория СССР) значения Δs будут существенно меньше погрешностей Δd .

Таким образом, при выполнении картометрических работ на всех топографических картах в пределах одной шестиградусной зоны линейными искажениями, вызванными проекцией, можно пренебрегать.

Разделение поверхности эллипсоида на сфероидические треугольники (шестиградусные меридианные полосы) и изображение их на плоскости в виде независимых друг от друга шестиградусных координатных зон создает определенные затруднения в тех случаях, когда необходимо установить геодезическую связь между пунктами, координаты которых заданы в разных координатных зонах, т. е. вычислены от разных осевых меридианов.

Например, математическая обработка геодезической сети, пункты которой располагаются по обе стороны от граничного меридиана шестиградусной полосы на эллипсоиде, возможна лишь в том случае, если координаты всех пунктов вычислены только в одной системе плоских координат, т. е. в одной координатной зоне.

Для решения обратной геодезической задачи на плоскости между двумя пунктами, расположенными в разных шестиградусных полосах на эллипсоиде, плоские координаты должны быть заданы в одной координатной зоне.

Для такого рода случаев, нередко встречающихся в практике, необходимо, чтобы шестиградусная координатная зона была расширена. Именно поэтому соответствующими инструкциями предусмотрено для всех пунктов, расположенных на $30'$ по долготе к востоку и западу от граничного меридиана шестиградусных полос, помещать в каталоги два значения плоских координат: вычисленные от осевого меридиана своей зоны и от осевого меридиана ближайшей соседней зоны. Это означает, что для геодезических работ фактически применяют координатные зоны шириной 7° по долготе, перекрывающие друг друга на 1° .

Необходимость расширения шестиградусной координатной зоны возникает и при использовании координатных сеток на топографических картах в тех случаях, когда объекты, между которыми необходимо установить топографо-геодезическую связь (например, определить расстояние и азимут по плоским координатам, снятым с карты), расположены в разных координатных зонах. Для того чтобы координаты этих объектов можно было снимать с карты в одной и той же координатной системе, координатную сетку каждой шестиградусной зоны распространяют на листы топографических карт в соседней зоне. С этой целью на рамках листов карт, расположенных вблизи граничного меридиана, соответствующими штрихами показывают выходы координатных линий соседней зоны. Таким образом, координатные сетки двух соседних зон будут частично перекрывать друг друга.

Границы области перекрытия координатных сеток должны определяться изоколами с допустимыми линейными искажениями.

Как было показано выше, максимально допустимые искажения в пределах шестиградусной зоны будут при $y=334$ км. Конечно, эта величина искажения сохраняется на всей координатной линии (изоколе) BC (см. рис. 61). Поэтому область перекрытия координатных сеток находится в пределах треугольников BSP и ADP .

Как видно из рисунка, размеры перекрытия координатных сеток топографических карт не одинаковы по долготе и зависят от широты.

Величину перекрытия по долготе в градусах можно вычислить по такой формуле:

$$l^{\circ} = \frac{3^{\circ}}{\cos B}.$$

На рис. 62 с правой стороны приведены для различных широт значения долгот, отсчитываемых от осевого меридиана. Они указывают на допустимые границы перекрытия координатных сеток на листах карты соседней зоны.

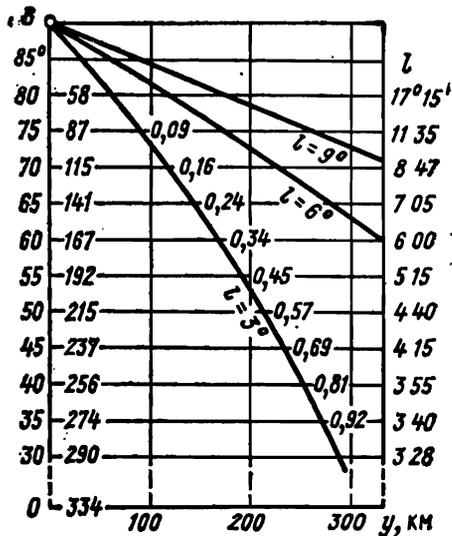


Рис. 62

В «Основных положениях по содержанию топографических карт масштабов 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000, 1:1 000 000» (М., 1977) предусмотрены следующие величины перекрытий координатных зон к востоку и западу от граничного меридиана: до широты 28° на 1° , в широтах $28^\circ \div 76^\circ$ на 2° и в широтах более 76° на 3° . Таким образом, с 1977 г. на всей территории СССР на топографические карты в полосе шириной до 10° наносят координатные сетки, перекрывающие друг друга на 4° .

Как видно, в этих рекомендациях не отражена возможность сохранения постоянства масштаба на краю координатной зоны. Действительно, при $l = \pm 5^\circ$ в широтах южнее 53° относительные линейные искажения составляют величины от 1:720 ($B=53^\circ$) до 1:260 ($B=28^\circ$), которые значительно превосходят максимальное искажение для шестиградусной зоны при $l = \pm 3^\circ$, равное 1:730 ($B=0^\circ$). Это обстоятельство следует учитывать при выполнении картометрических работ с использованием перекрывающей координатной сетки в южных широтах СССР.

Итак, практика применения шестиградусных зон показывает, что ширина координатной зоны в действительности больше, чем это следует из ее названия. Поэтому термин «шестиградусная зона» определяет не ширину зоны, а только разность долгот осевых меридианов двух соседних зон.

При топографических съемках в масштабах 1:5000 и крупнее требования к точности положения объектов местности на картах повышаются, в частности, относительная погрешность в измеренном на карте расстоянии не должна превышать 1:2000, следовательно, в длине линии 1 км допускается погрешность не более 0,5 м.

При таких повышенных требованиях к точности составления карт величина линейных искажений на краю шестиградусной зоны может оказаться недопустимо большой. Поэтому для крупномасштабных съемок рекомендуют применять трехградусные зоны, для которых осевые меридианы совпадают с осевыми и граничными меридианами шестиградусных зон. Однако не всегда необходимо безоговорочно следовать этой рекомендации.

На рис. 62 справа на разных широтах показаны расстояния в километрах от осевого меридиана до граничного меридиана шестиградусной зоны. Около граничного меридиана ($l=3^\circ$) приведены линейные искажения в метрах на 1 км длины линии. По этим данным можно судить, что при производстве крупномасштабных съемок севернее 53° нет нужды переходить к трехградусным зонам.

При съемках городов и участков территории, отводимой под строительство крупных инженерных сооружений, допускаются

весьма незначительные линейные искажения, чтобы можно было ими пренебречь и лишь в крайних случаях учитывать по простейшим формулам.

Здесь целесообразно применение местной системы координат в проекции Гаусса — Крюгера или в какой-либо другой конформной проекции. Для таких случаев в § 49, рассматриваются еще коническая и стереографическая проекции.

В качестве осевого меридиана в местных системах координат выбирают меридиан, проходящий поблизости от центра участка съемки. Он необязательно должен совпадать с каким-либо осевым меридианом шестиградусных или трехградусных зон. Но во всех случаях применения местных систем координат, включая системы трехградусных зон, все организации, применяющие местные системы для решения своих ведомственных задач, после завершения построения опорной геодезической сети обязаны плоские координаты своих пунктов перевычислить в общегосударственную систему плоских координат в шестиградусных зонах. Это делается для того, чтобы пункты местной геодезической сети в последующем можно было использовать для государственного картографирования, а также для решения других топографо-геодезических задач.

Методика перевычисления координат местных систем в систему шестиградусных зон рассматривается ниже в § 50.

Вычисление плоских координат в триангуляции 1 класса

Плоские координаты пунктов триангуляции 1 класса вычисляются после уравнивания триангуляции, если уравнивание велось по геодезическим координатам, или в процессе уравнивания, если уравнивание ведется в плоских координатах.

Рассмотрим последовательность вычислений плоских координат в звене триангуляции 1 класса.

Независимо от того, окончательно уравнены углы в треугольниках звена или только предварительно (например, введением одной трети невязки в каждый угол треугольника), в каждом сферическом треугольнике сумма его углов равна 180° плюс сферический избыток.

На концах базисных сторон (на пунктах Лапласа) должны быть известны геодезические координаты B и L и геодезический азимут A базисной стороны.

Прежде всего по геодезическим координатам B и L для одного из пунктов базисной стороны вычисляют плоские координаты x и y с точностью до 0,001 м и сближение меридианов γ с точностью до 0,001".

Затем вычисляют поправки за кривизну для всех сторон и поправку за масштаб только в базисную сторону. Эти поправки определяют последовательными приближениями, так как

формулы для вычисления редуций получены в виде функций плоских координат, которые являются в данном случае искомыми величинами.

Вначале составляется схематический чертеж сети в масштабе 1 : 100 000 или 1 : 200 000, на котором вычерчивают координатную сетку плоских координат проекции Гаусса — Крюгера, наносят по плоским координатам начальный пункт базисной стороны, от него в масштабе чертежа откладывают базисную сторону по приближенному дирекционному углу $A-\gamma$, а по измеренным сферическим углам вычерчивают все треугольники звена.

По этому чертежу графически определяют плоские координаты всех пунктов с точностью до 0,1 км, пользуясь которыми вычисляют приближенные редуции. Редуцию длины базисной стороны вычисляют по приближенной формуле (VI.54) с точностью до 1 м. Редуции направлений вычисляют по формуле (VI.48) с точностью до 1".

После введения приближенных редуций вычисляют плоские координаты пунктов с точностью до 1 м. По этим координатам затем вычисляют точные редуции всех направлений в звене по полным формулам (VI.43) и (VI.44) с точностью до 0,001", а также редуцию длины базисной стороны по формуле (VI.52) с точностью до 0,001 м.

На каждом пункте по разностям поправок за кривизну двух направлений выводят поправку в угол, которая вычитается из сферического угла.

В результате введения поправок в сферические углы сумма углов в каждом треугольнике должна равняться точно 180° , так как сумма поправок в сферические углы равняется сферическому избытку треугольника.

Наконец, вычисляют плоские координаты всех пунктов звена с точностью до 0,001 м.

Так как длина хорды и дирекционный угол базисной стороны теперь уже известны, то можно найти координаты второго пункта базисной стороны.

Вычисление координат всех других пунктов выполняется или посредством решения плоских треугольников и последующего вычисления приращений координат, или же способом прямой угловой засечки, например, по формулам Юнга, с последующим решением обратных задач на плоскости с целью определения дирекционных углов и длин сторон плоских треугольников.

Для вычисления плоских координат по геодезическим, геодезическим по плоским, сближения меридианов и редуций длин сторон и направлений можно также использовать «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80° » (М., Геодезиздат, 1958).

*Пример редуцирования стороны триангуляции
I класса на плоскость*

Исходные данные: $B_1=45^\circ$, $L_1=60^\circ$, $A_{12}=45^\circ$, $s_{12}=60\,000,000$ м.

1. Вычисление плоских координат по формулам (VI.22) и сближения меридианов по формуле (VI.31):

$$L_0=57^\circ, x_1=4\,989\,413,220, y_1=+236\,544,591,$$

$$\gamma_1=+2^\circ07'20,279''.$$

2. Вычисление приращений плоских координат с точностью до 0,1 км:

$$\Delta x_{12}=s_{12} \cos(A_{12}-\gamma_1)=+44,0 \text{ км},$$

$$\Delta y_{12}=s_{12} \sin(A_{12}-\gamma_1)=+40,8 \text{ км},$$

$$y_m=y_1+\frac{\Delta y_{12}}{2}=+257,0 \text{ км}.$$

3. Вычисление приближенных редукций по формулам (VI.48) и (VI.54):

$$\delta''_{12}=-0,00253y_m\Delta x_{12}=-29'',$$

$$\Delta s_{12}=0,123(y_m \cdot 0,01)^2 s_{12}=49 \text{ м}.$$

4. Вычисление приращений плоских координат с точностью до 1 м:

$$\alpha_{12}=A_{12}-\gamma_1+\delta''_{12}=42^\circ52'11'',$$

$$d_{12}=s_{12}+\Delta s_{12}=60\,049 \text{ м},$$

$$\Delta x_{12}=d_{12} \cos \alpha_{12}=+44\,010 \text{ м},$$

$$\Delta y_{12}=d_{12} \sin \alpha_{12}=+40\,853 \text{ м},$$

$$y_m=256\,981 \text{ м}.$$

5. Вычисление точных редукций по формулам (VI.45) и (VI.53):

$$\delta_{12}=-27,902'', \delta_{21}=+29,421'', \Delta s_{12}=48,809 \text{ м}.$$

6. Окончательное вычисление плоских координат второго пункта:

$$\alpha_{12}=42^\circ52'11,819'', d_{12}=60\,048,809 \text{ м},$$

$$x_2=x_1+d_{12} \cos \alpha_{12}=5\,033\,422,981 \text{ м},$$

$$y_2=y_1+d_{12} \sin \alpha_{12}=+277\,397,992 \text{ м}.$$

§ 48. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА — КРЮГЕРА ДЛЯ ШИРОКОЙ ПОЛОСЫ

Краткая историческая справка

Известный немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) в 1820—30 гг. для численной обработки ганноверской триангуляции применил разработанную им конформную проек-

цию эллипсоида с постоянным масштабом на прямолинейном изображении одного из меридианов, но в печати ее не опубликовал. Известно лишь, что формулы проекции в окончательном виде он сообщил в частной научной переписке.

Теория проекции Гаусса впервые была опубликована О. Шрейбером в 1866 г. уже после смерти Гаусса.

Более обстоятельное изложение теории проекции Гаусса с детальной разработкой рабочих формул дал немецкий геодезист Л. Крюгер в своих работах, опубликованных в 1912 и 1919 гг. С тех пор эта проекция под названием конформной проекции Гаусса — Крюгера получила широкое распространение во многих странах.

Для удобства практического применения проекции Гаусса — Крюгера немецкий ученый Г. Баумгарт в 1919 г. предложил ввести трехградусные зоны, ко всем ординатам прибавлять 500 000, а перед ординатой ставить порядковый номер зоны, счет которых начинается от Гринвича.

При введении в 1928 г. в геодезическую практику советского государства единой системы общегосударственных плоских координат в проекции Гаусса — Крюгера были приняты предложения Баумгарта, но вместо 3-градусных зон были установлены 6-градусные зоны.

Проекция Гаусса — Крюгера была предметом исследования многих геодезистов. Особенно заметным является большой труд известного болгарского геодезиста проф. В. К. Христова, подводящий итог его многолетним изысканиям в области теории и практики применения проекции Гаусса — Крюгера. Книга проф. В. К. Христова переведена на русский язык и издана в 1957 г. Геодезиздатом под названием «Координаты Гаусса — Крюгера на эллипсоиде вращения».

В геодезической и картографической литературе проекцию Гаусса — Крюгера часто называют поперечно-цилиндрической равноугольной проекцией эллипсоида, однако без пояснения условности такого названия.

Больше того, исходя из этого названия, иногда пытаются объяснить получение этой проекции посредством изображения эллипсоида на цилиндре, касающемся осевого меридиана.

Конечно, таким способом получить проекцию Гаусса — Крюгера невозможно ни для эллипсоида, ни для шара.

Дело в том, что в математической картографии рассматривается целая группа поперечно-цилиндрических проекций, куда входит и проекция Гаусса — Крюгера. Главным признаком, объединяющим эти проекции, является постоянство масштаба на прямолинейном изображении одного из меридианов эллипсоида.

Название этой группы проекций связано с одной-единственной проекцией, обладающей этим же признаком, а именно перспективной поперечно-цилиндрической проекцией. Эту проекцию

действительно можно получить геометрическим построением: спроектировать поверхность эллипсоида на касательный по меридиану цилиндр прямолинейными лучами, проведенными из центра эллипсоида.

Конечно, для получения любого перспективного изображения безусловно необходимо установить одну поверхность в определенное положение относительно другой и выбрать центр перспективы. Но во всех других видах изображений взаимное положение поверхностей не играет никакой роли и не может помочь найти уравнения изображения. Поэтому и для получения проекции Гаусса — Крюгера нет никакой необходимости «обертывать» эллипсоид цилиндром.

Кстати, такие довольно распространенные в картографической литературе термины, как «касательный или секущий цилиндр», «касательный или секущий конус», «параллель касания», «меридиан касания» и т. п., надо понимать как чисто условные и не связывать с ними геометрического представления для объяснения или получения проекции.

Другое название проекции Гаусса — Крюгера, распространенное главным образом в заграничной литературе, это поперечная проекция Меркатора. В США ее называют *The universal transverse Mercator projection* или сокращенно проекция UTM.

В широко применяемой в морской навигации конформной проекции Меркатора для шара «линией касания цилиндра», на которой масштаб равен единице, является экватор. В этой же проекции в качестве «линии касания» можно использовать любой большой круг на шаре. «Линией касания» является один из меридианов шара для сферической поперечной проекции Меркатора. Впервые она была получена Ламбертом.

Проекция Гаусса — Крюгера при сжатии эллипсоида, равном нулю, обращается в сферическую поперечную проекцию Меркатора. Поэтому можно сказать, что К. Ф. Гаусс обобщил проекцию Ламберта на случай изображения эллипсоида на плоскости.

В практике применения проекции Гаусса — Крюгера в некоторых государствах масштаб изображения осевого меридиана принимают равным числу меньше единицы. Так, в США в применяемой там проекции UTM масштаб на оси абсцисс равен 0,9996.

Уменьшение масштаба на оси абсцисс дает возможность расширить координатную зону без увеличения линейных искажений на краю зоны.

В настоящее время в США обсуждается вопрос о замене конической проекции Ламберта, которая до сих пор применяется во многих штатах для инженерных работ и кадастровых съемок, проекцией UTM с 2-градусными зонами с линейными искажениями, не превосходящими 1 : 10 000.

*Поперечно-цилиндрическая равнопромежуточная проекция
Кассини — Зольднера для шара*

Введем на шаре систему сферических координат ξ и η следующим образом.

На рис. 63 дуга POP_1 — осевой меридиан, дуга OE — экватор. Из точки E , расположенной на экваторе на расстоянии 90° от осевого меридиана, проведем дуги больших кругов, которые будут перпендикулярны к осевому меридиану и составляют с экватором угол ξ . Примем эти дуги в качестве первого семейства координатных линий $\xi = \text{const}$.

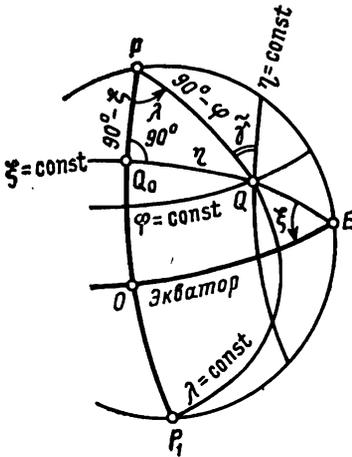


Рис. 63

Пересечем поверхность шара плоскостями, параллельными плоскости осевого меридиана. Линиями сечения будут дуги малых кругов. Все точки каждой из этих дуг удалены от осевого меридиана на одно и то же расстояние η . Примем эти дуги в качестве второго семейства координатных линий $\eta = \text{const}$.

Положение произвольной точки Q на шаре определяется следующими координатами: ξ — дуга OQ_0 осевого меридиана, η — дуга большого круга Q_0Q , отсчитываемая от осевого меридиана.

Связь между географическими φ и λ и сферическими координатами ξ и η легко установить из прямоугольного сферического треугольника PQ_0Q .

Формулы, устанавливающие эту связь, следующие:

— вычисление сферических координат по географическим

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda}, \quad \sin \eta = \sin \lambda \cos \varphi, \quad (\text{VI.57})$$

— вычисление географических координат по сферическим

$$\sin \varphi = \sin \xi \cos \eta, \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \eta}{\cos \xi}. \quad (\text{VI.58})$$

Умножив сферические координаты ξ и η на радиус шара R , получим линейное выражение этих дуг, которые примем за прямолинейные плоские координаты проекции,

$$x = R\xi, \quad y = R\eta. \quad (\text{VI.59})$$

В этой проекции осью абсцисс является прямолинейное изображение осевого меридиана, осью ординат — прямолинейное изображение экватора.

Ордината y точки Q является прямолинейным изображением дуги большого круга QQ_0 ($\xi = \text{const}$). Абсцисса x точки Q представляет собой изображение дуги малого круга QF ($\eta = \text{const}$).

Масштаб изображения осевого меридиана равен единице.

Масштаб изображения вдоль линии ординат ($x = \text{const}$) также равен единице.

Для определения масштаба вдоль линии абсцисс ($y = \text{const}$) следует абсциссу $x = R\xi$ разделить на ей соответствующую дугу $QF = R\xi \cos \eta$. Тогда масштаб вдоль линии абсцисс будет

$$m_x = \frac{1}{\cos \eta}. \quad (\text{VI.60})$$

Отсюда следует, что рассматриваемая проекция не является конформной.

Впервые эта проекция была применена Кассини (Франция) в 1734 г. для численной обработки триангуляционного ряда вдоль меридиана при выполнении градусных измерений.

В 1810 г. немецкий геодезист Зольднер предложил аналогичную проекцию для математической обработки геодезической сети.

Проекция Зольднера применялась при обработке геодезических сетей в некоторых областях России до 1928 г., т. е. до введения единой системы координат Гаусса — Крюгера.

Поперечно-цилиндрическая конформная проекция Ламберта для шара

Эта проекция отличается от проекции Кассини — Зольднера тем, что масштаб изображения в любой точке проекции не зависит от направления, следовательно, он должен быть одинаков как в направлении абсцисс, так и в направлении ординат.

В проекции Кассини — Зольднера масштаб m_y вдоль ординат равен 1, а масштаб m_x вдоль абсцисс равен $\frac{1}{\cos \eta}$. Ясно, что установить один и тот же масштаб, равный единице, как вдоль ординат, так и вдоль абсцисс невозможно, так как поверхность шара не разворачивается на плоскости. Поэтому установим вдоль ординат такой же масштаб, каким он получается вдоль абсцисс, т. е. примем, что

$$m_x = m_y = \frac{dy}{Rd\eta} = \frac{1}{\cos \eta},$$

откуда

$$y = R \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\cos \eta}$$

Введем вместо η новую переменную p по уравнению

$$p = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\cos \eta} = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\eta}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \eta}{1 - \sin \eta} \quad (\text{VI.61})$$

Таким образом, плоские координаты точек в проекции Ламберта будут вычисляться по формулам

$$x = R\xi, \quad y = Rp. \quad (\text{VI.62})$$

Для их вычисления по заданным географическим координатам φ и λ используются формулы (VI.57) и (VI.61).

Найдем формулы перехода от φ и λ непосредственно к переменной p без вычисления величины η . Для этого воспользуемся одной из формул для обратных гиперболических функций, а именно

$$x = \operatorname{Arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

где $y = \operatorname{th} x$.

Если в этом выражении y заменим через $\sin \eta$, то, сравнивая его с равенством (VI.61), обнаружим, что $x = p$.

Следовательно, можем написать

$$\sin \eta = \operatorname{th} p. \quad (\text{VI.63})$$

Пользуясь формулами зависимости между тригонометрическими и гиперболическими функциями, можно найти еще следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{sh} p, \quad \cos \eta = \frac{1}{\operatorname{ch} p}, \quad \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \operatorname{th} \frac{p}{2} \quad (\text{VI.64})$$

Таким образом, вместо выражений (VI.57), (VI.58) и (VI.61) для проекции Ламберта следует применять следующие: вычисление плоских координат по географическим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \xi &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \lambda}, \quad \operatorname{th} p = \cos \varphi \sin \lambda, \\ x &= R\xi, \quad y = Rp, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.65})$$

вычисление географических координат по плоским:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{R}, \quad p = \frac{y}{R}, \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} p}, \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{sh} p}{\cos \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.66})$$

Теперь найдем формулы для вычисления сближения меридианов и масштаба.

При конформном изображении шара на плоскости углы сохраняются. Следовательно, сближение меридианов γ на плос-

кости как угол между координатной линией $y = \text{const}$ и изображением меридиана $\lambda = \text{const}$ будет равняться углу на шаре между координатной линией $\eta = \text{const}$ (или $p = \text{const}$) и меридианом $\lambda = \text{const}$ (см. рис. 63). Поэтому по прямоугольному сферическому треугольнику PQ_0Q находим

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \text{ctg } \lambda \text{ ctg}(90^\circ - \tilde{\gamma}),$$

$$\cos(90^\circ - \eta) = \text{ctg } \xi \text{ ctg}(90^\circ - \tilde{\gamma}),$$

откуда с учетом равенства $\sin \eta = \text{th } p$ получаем

$$\text{tg } \tilde{\gamma} = \sin \varphi \text{ tg } \lambda, \quad (\text{VI.67})$$

$$\text{tg } \tilde{\gamma} = \text{tg } \xi \text{ th } p. \quad (\text{VI.68})$$

Для масштаба мы уже имели выше выражение $m = \frac{1}{\cos \eta}$.

Заменяв $\cos \eta$ через $\frac{1}{\text{ch } p}$, получим

$$\tilde{m} = \text{ch } p. \quad (\text{VI.69})$$

Поперечно-цилиндрическую конформную проекцию Ламберта можно также рассматривать как поперечную проекцию Меркатора для шара.

В нормальной (прямой) проекции Меркатора изображение полюса бесконечно удалено от изображения экватора. Аналогично этому в поперечной проекции Меркатора изображение точки E (см. рис. 63) как полюса осевого меридиана также находится в бесконечности.

Таким образом, в проекции Ламберта или в поперечной проекции Меркатора можно изобразить на плоскости почти всю поверхность шара за исключением малой окрестности вокруг западной и восточной точек на экваторе, удаленных от осевого меридиана на $\pm 90^\circ$.

Проекция Гаусса — Крюгера для эллипсоида

Рассмотренную выше поперечную проекцию Меркатора для шара распространим на поверхность эллипсоида.

Для этого примем следующую последовательность вывода уравнений проекции: во-первых, изобразим поверхность эллипсоида на шаре конформно; во-вторых, изобразим шар на плоскости в поперечной проекции Меркатора; в-третьих, преобразуем полученное изображение на плоскости конформно так, чтобы масштаб изображения осевого меридиана эллипсоида на плоскости во всех его точках был бы равен единице. В результате мы получим конформное изображение эллипсоида в проекции Гаусса — Крюгера.

Такая последовательность вывода формул проекции Гаусса — Крюгера была принята Л. Крюгером в его сочинении

«Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene», Veröff. des Preuss. Geod. Inst., N. F., 52, Potsdam, 1912.

Для конформного изображения всей поверхности эллипсоида на шаре наиболее простым является способ, разработанный Молльвейде в 1807 г. Это изображение подчинено двум условиям.

Первым условием изображения по Молльвейде служит равенство соответствующих долгот на шаре и на эллипсоиде. Пусть осевой меридиан эллипсоида $L_0 = \text{const}$ изображается на шаре также осевым меридианом, долготу которого λ примем равной нулю. Тогда по первому условию изображения будет

$$L - L_0 = l = \lambda. \quad (\text{VI.70})$$

Согласно второму условию изображения по Молльвейде широта φ на шаре связана с широтой B на эллипсоиде следующим уравнением:

$$\text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \text{tg} \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}},$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

Для удобства вычислений это равенство представляют в виде быстро сходящегося ряда

$$\varphi = B - k_2 \sin 2B + k_4 \sin 4B - k_6 \sin 6B + \dots, \quad (\text{VI.71})$$

где

$$k_2 = 2 \left(n - \frac{1}{3} n^2 - \frac{2}{3} n^3 + \dots \right) = 0,003\ 3560728,$$

$$k_4 = \frac{5}{3} n^2 - \frac{16}{15} n^3 + \dots = 0,000\ 0046932,$$

$$k_6 = \frac{26}{15} n^3 + \dots = 0,000\ 0000082,$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \quad a \text{ и } b \text{ — полуоси эллипсоида.}$$

По правилам обращения тригонометрического ряда находим обратную зависимость

$$B = \varphi + k'_2 \sin 2\varphi + k'_4 \sin 4\varphi + k'_6 \sin 6\varphi + \dots, \quad (\text{VI.72})$$

где

$$k'_2 = 2 \left(n - \frac{1}{3} n^2 - n^3 + \dots \right) = 0,003\ 3560696,$$

$$k'_4 = \frac{7}{3} n^2 - \frac{8}{5} n^3 + \dots = 0,000\ 0065700,$$

$$k'_6 = \frac{56}{15} n^3 + \dots = 0,000\ 0000176.$$

В этих формулах широты B и φ выражены в радианах. Численные значения коэффициентов даны для эллипсоида Краковского.

Масштаб изображения получим в результате деления длины дуги параллели на шаре $R \cos \varphi \lambda$ на соответствующую длину дуги параллели на эллипсоиде $N \cos B l$. Так как $\lambda = l$, то сразу же находим формулу масштаба

$$\bar{m} = \frac{R \cos \varphi}{N \cos B} = \frac{R \cos \varphi}{c \cos B} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}, \quad (\text{VI.73})$$

где c и e' — элементы эллипсоида.

Вычисленные значения φ и λ затем используют в формулах (VI.65) для определения плоских координат $R\xi$ и $R\rho$ в поперечной проекции Меркатора.

Для перехода от плоских координат $R\xi$ и $R\rho$ к координатам x и y Гаусса — Крюгера применим аналитическую функцию комплексного переменного

$$x + iy = Rf(\xi + ip), \quad (\text{VI.74})$$

которая, как известно из курса математики, осуществляет конформное преобразование плоских координат.

Для того чтобы установить вид этой функции, которая удовлетворяла бы условиям проекции Гаусса — Крюгера, найдем ее для частного случая, когда $p=0$, т. е. для изображения осевого меридиана. Очевидно, в этом случае будет $y=0$ и $\xi=\varphi$, а абсцисса x согласно условию проекции Гаусса — Крюгера должна равняться длине дуги меридиана X . Следовательно, функция (VI.74) в этом частном случае будет иметь такой вид:

$$X = Rf(\varphi). \quad (\text{VI.75})$$

Длина дуги меридиана нам известна в функции геодезической широты B : она определяется, в частности, формулой (I.98). В этой формуле широту B выразим через широту φ по равенству (VI.72).

После необходимых преобразований функция (VI.75) примет такой вид:

$$X = R(\varphi + \alpha_2 \sin 2\varphi + \alpha_4 \sin 4\varphi + \alpha_6 \sin 6\varphi + \dots), \quad (\text{VI.76})$$

где

$$R = \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \dots \right) = 6\,367\,558,497 \text{ м},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} n - \frac{2}{3} n^2 + \frac{5}{16} n^3 + \dots = 0,000\,8376118,$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48} n^2 - \frac{3}{5} n^3 + \dots = 0,000\,000\,7606,$$

$$\alpha_6 = \frac{61}{240} n^3 + \dots = 0,000\,000\,0012.$$

Численные значения коэффициентов даны для эллипсоида Красовского.

Сравнивая равенства (VI.74) и (VI.75), замечаем, что для получения искомой аналитической функции следует в выражении (VI.76) заменить X через $x+iy$, а φ через $\xi+ip$. Тогда

$$x+iy=R[(\xi+ip)+\alpha_2 \sin 2(\xi+ip)+\alpha_4 \sin 4(\xi+ip)+\alpha_6 \sin 6(\xi+ip)+\dots]. \quad (\text{VI.77})$$

Для отделения действительной части этого равенства от мнимой применим формулы функций комплексного аргумента, приведенные в приложении.

Таким образом, формулы для вычисления плоских координат в проекции Гаусса — Крюгера будут найдены в таком окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{ch} 2p + \alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{ch} 4p + \\ &+ \alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{ch} 6p + \dots), \\ y &= R(p + \alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{sh} 2p + \alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{sh} 4p + \\ &+ \alpha_6 \cos 6\xi \operatorname{sh} 6p + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.78})$$

Для установления обратной зависимости необходимо из равенства (VI.77) найти $\xi+ip$ как функцию аргумента $x+iy$ по правилам обращения тригонометрического ряда, а затем отделить действительную часть от мнимой.

Приведем искомые формулы в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u - \beta_2 \sin 2u \operatorname{ch} 2v - \beta_4 \sin 4u \operatorname{ch} 4v - \\ &- \beta_6 \sin 6u \operatorname{ch} 6v - \dots, \\ p &= v - \beta_2 \cos 2u \operatorname{sh} 2v - \beta_4 \cos 4u \operatorname{sh} 4v - \\ &- \beta_6 \cos 6u \operatorname{sh} 6v - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.79})$$

где

$$u = \frac{x}{R}, \quad v = \frac{y}{R},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} n - \frac{2}{3} n^2 + \frac{37}{96} n^3 + \dots = 0,000\ 837\ 6121,$$

$$\beta_4 = \frac{1}{48} n^2 + \frac{1}{15} n^3 + \dots = 0,000\ 000\ 0590,$$

$$\beta_6 = \frac{17}{480} n^3 + \dots = 0,000\ 000\ 0002.$$

При конформном преобразовании плоских координат прямолинейная сеть координатных линий $\xi = \text{const}$ и $p = \text{const}$ исходного изображения перейдет в криволинейную, вследствие чего появится угол поворота изображения, аналогичный сближению меридианов. Обозначим этот угол поворота через γ .

Претерпит изменение также и масштаб исходного изображения. Обозначим это изменение масштаба через \bar{m} .

При конформном преобразовании на плоскости для определения $\bar{\gamma}$ и \bar{m} применяются следующие формулы:

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) : \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \quad (\text{VI.80})$$

$$\bar{m} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2}, \quad (\text{VI.81})$$

при переходе от x и y к координатам $R\xi$ и $R\rho$:

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right) : \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right), \quad (\text{VI.82})$$

$$\bar{m} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)^2}. \quad (\text{VI.83})$$

Входящие в эти равенства частные производные найдем дифференцированием функций (VI.78) и (VI.79) по соответствующим переменным. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= 1 + 2\alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{ch} 2\rho + \\ &+ 4\alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{ch} 4\rho + 6\alpha_6 \cos 6\xi \operatorname{ch} 6\rho + \dots, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -2\alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{sh} 2\rho - \\ &- 4\alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{sh} 4\rho - 6\alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{sh} 6\rho - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.84})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= 1 - 2\beta_2 \cos 2u \operatorname{ch} 2v - \\ &- 4\beta_4 \cos 4u \operatorname{ch} 4v - 6\beta_6 \cos 6u \operatorname{ch} 6v - \dots, \\ \frac{\partial \rho}{\partial u} &= 2\beta_2 \sin 2u \operatorname{sh} 2v + \\ &+ 4\beta_4 \sin 4u \operatorname{sh} 4v + 6\beta_6 \sin 6u \operatorname{sh} 6v + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.85})$$

Таким образом, сближение меридианов γ в проекции Гаусса — Крюгера складывается из двух углов поворота

$$\gamma = \tilde{\gamma} + \bar{\gamma}, \quad (\text{VI.86})$$

которые вычисляются по формулам (VI.67), (VI.68), (VI.80) и (VI.82), а масштаб m в этой же проекции определяется как произведение трех масштабов

$$m = \tilde{m} \bar{m} \bar{m}, \quad (\text{VI.87})$$

которые вычисляются по формулам (VI.69), (VI.73), (VI.81) и (VI.83).

Итак, получены все формулы для вычисления координат, сближения меридианов и масштаба проекции Гаусса — Крюгера для широкой полосы. Она имеет большое практическое значение. Укажем на некоторые области ее возможного применения. Прежде всего ее целесообразно применять при уравнивании обширных геодезических сетей, расположенных в нескольких шестиградусных зонах, когда все вычисления необходимо выполнять в одной системе плоских координат.

Применение ее возможно также при решении различных инженерно-технических задач специального назначения, когда область расположения участвующих в задаче точек выходит далеко за пределы шестиградусной зоны, а осевой меридиан, взятый в центре этой области, не совпадает ни с одним из стандартных осевых меридианов шестиградусных зон, поэтому невозможно использование координат пунктов, вычисленных в общегосударственной системе плоских координат.

Наконец, таблица координат проекции Гаусса — Крюгера для широкой полосы по предложению В. В. Каврайского может с успехом применяться в картографических целях при вычислении равноугольных проекций общего типа, приспособляемых к очертанию страны (см. Каврайский В. В. Избранные труды, т. II, вып. 2, Изд. Управления начальника Гидрографической службы ВМФ, 1959).

Таким образом, составленная по приведенным выше формулам для вычислений на ЭВМ программа будет универсальной, пригодной для использования при решении всех геодезических и картографических задач, связанных с вычислением координат в проекции Гаусса — Крюгера.

Объединим вместе все необходимые для вычисления проекции формулы и, частично преобразовав их для удобства вычислений, представим в виде алгоритмов.

При применении этих формул могут возникнуть затруднения, связанные с вычислением гиперболических функций. Если используются вычислительные машины, для которых имеются стандартные программы вычислений таких функций, как e^x и $\ln x$, то в этом случае можно применить следующие довольно простые формулы:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}); \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}.$$

Если, же нет возможности вычисления функций e^x и $\ln x$, то гиперболические функции можно найти с помощью полиномов, включенных в приведенные ниже алгоритмы. Эти полиномы обеспечивают вычисление функций $\operatorname{Arth} y$ и $\operatorname{sh} x$ с ошибкой не более $4 \cdot 10^{-9}$, если $\operatorname{th} x < 0,818$ и $x < 1,15$, что соответствует при $B=0$ разности долгот 55° и ординате 7335 км.

Ниже приводятся соответствующие алгоритмы и примеры вычислений по этим алгоритмам.

Вычисление плоских координат, сближения меридианов и масштаба проекции Гаусса — Крюгера для широкой полосы

Исходные данные: $B, l = L - L_0$.

$$\varphi = B - [(2624 \sin^2 B + 372\,834) \sin^2 B + 66\,934\,216] \sin B \cos B \cdot 10^{-10},$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos l}, \quad \operatorname{th} p = \cos \varphi \sin l, \quad \operatorname{tg} \bar{\gamma} = \operatorname{tg} \xi \operatorname{th} p,$$

$$\rho = (((((\bar{a}_{13} A^2 + \bar{a}_{11}) A^2 + \bar{a}_9) A^2 + \bar{a}_7) A^2 + \bar{a}_5) A^2 + \bar{a}_3) A^2 + \bar{a}_1) A + \bar{a}_0,$$

где

$$A = \frac{\operatorname{th} p - a}{1 - a \operatorname{th} p},$$

\bar{a}_0	0,575 646 2732	$a = 0,519\,493\,8532,$
\bar{a}_1	1,000 000 0183	$a_1 = \sin 2\xi = \frac{2 \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg}^2 \xi},$
\bar{a}_3	0,333 330 8550	$b_1 = \cos 2\xi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \xi}{1 + \operatorname{tg}^2 \xi},$
\bar{a}_5	0,200 096 5163	$c_1 = \operatorname{sh} 2p = \frac{2 \operatorname{th} p}{1 + \operatorname{th}^2 p},$
\bar{a}_7	0,141 216 7856	$d_1 = \operatorname{ch} 2p = \frac{1 + \operatorname{th}^2 p}{1 - \operatorname{th}^2 p},$
\bar{a}_9	0,125 170 5465	
\bar{a}_{11}	0,028 614 1632	
\bar{a}_{13}	0,205 298 5219	

$$a_2 = 2a_1 b_1, \quad c_2 = 2c_1 d_1,$$

$$b_2 = 1 - 2a_1^2, \quad d_2 = 1 + 2c_1^2$$

$$a_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad c_3 = c_1 d_2 + c_2 d_1,$$

$$b_3 = b_1 b_2 - a_1 a_2, \quad d_3 = d_1 d_2 + c_1 c_2,$$

$$x = R\xi + A_2 a_1 d_1 + A_4 a_2 d_2 + A_6 a_3 d_3,$$

$$y = R\rho + A_2 b_1 c_1 + A_4 b_2 c_2 + A_6 b_3 c_3,$$

$$x_\xi = 1 + (2A_2 b_1 d_1 + 4A_4 b_2 d_2 + 6A_6 b_3 d_3) : R,$$

$$y_\xi = (2A_2 a_1 c_1 + 4A_4 a_2 c_2 + 6A_6 a_3 c_3) : R,$$

$$R = 6\,367\,558,497, \quad A_2 = 5333,5419,$$

$$A_4 = 4,84339, \quad A_6 = 0,007622,$$

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{y_\xi}{x_\xi}, \quad \gamma = \bar{\gamma} + \bar{\gamma},$$

$$m = \frac{H \cos \varphi}{\cos B} \sqrt{\frac{(x_\xi^2 + y_\xi^2) (1 + e'^2 \cos^2 B)}{1 - \operatorname{th}^2 p}},$$

где

$$N = \frac{R}{c} = 0,994\,977\,825, \quad e'^2 = 0,006\,738\,5254.$$

Пример вычислений по данному алгоритму приведен в табл. 27.

Таблица 27

Вычисление x, y, γ, m в проекции Гаусса—Крюгера для широкой полосы

B	30°	c_1	3,449 139 3
l	$+60^\circ$	d_1	3,591 178 3
φ	0,520 696396	c_2	24,772 9
$\operatorname{tg} \xi$	1,146 973 785	d_2	24,793 1
$\operatorname{th} \rho$	0,751 253 606	c_3	174,5
$\operatorname{tg} \gamma$	0,861 668 193	d_3	174,5
ρ	0,975 826 640	x	5 455 230,329
ξ	0,853 747 784	y	6 211 011,300
a_1	0,990 671 20	x_ξ	0,999 108 04
b_1	-0,136 273 90	y_ξ	0,005 702 676
a_2	-0,270 005	$\tilde{\gamma}$	$40^\circ 45' 01,547''$
b_2	-0,962 859	γ	20,548''
a_3	-0,917 1	γ	$40^\circ 45' 22,095''$
b_3	0,398 7	m	1,512 516 06

Вычисление геодезических координат, сближения меридианов и масштаба проекции Гаусса — Крюгера для широкой полосы

Исходные данные: x, y .

Стандартный блок вычисления $\operatorname{sh} \alpha$.

$$\operatorname{sh} \alpha = (((\bar{a}_{11}\alpha^2 + \bar{a}_9)\alpha^2 + \bar{a}_7)\alpha^2 + \bar{a}_5)\alpha^2 + \bar{a}_3)\alpha^2 + \bar{a}_1)\alpha.$$

\bar{a}_3	0,166 666 6667
\bar{a}_5	0,008 333 3335
\bar{a}_7	0,000 198 4120
\bar{a}_9	0,000 002 7564
\bar{a}_{11}	0,000 000 0251

$$u = \frac{x}{R}, \quad v = \frac{y}{R}, \quad R = 6\,367\,558,497,$$

$$a_1 = \sin 2u, \quad b_1 = \cos 2u,$$

$$a_2 = 2a_1b_1, \quad b_2 = 1 - 2a_1^2,$$

$$a_3 = a_1b_2 + a_2b_1, \quad b_3 = b_1b_2 - a_1a_2,$$

$$c_1 = \operatorname{sh} 2v, \quad d_1 = \sqrt{1 + c_1^2},$$

$$c_2 = 2c_1d_1, \quad d_2 = 1 + 2c_1^2,$$

$$c_3 = c_1d_2 + c_2d_1, \quad d_3 = c_1c_2 + d_1d_2,$$

sh $2v$ вычисляется по стандартному блоку, в котором следует положить $\alpha = 2v$;

$$\xi = u - (B_2 a_1 d_1 + B_4 a_2 d_2 + B_6 a_3 d_3) \cdot 10^{-10},$$

$$P = v - (B_2 b_1 c_1 + B_4 b_2 c_2 + B_6 b_3 c_3) \cdot 10^{-10},$$

$$\xi_u = 1 - (2B_2 b_1 d_1 + 4B_4 b_2 d_2 + 6B_6 b_3 d_3),$$

$$p_u = 2B_2 a_1 c_1 + 4B_4 a_2 c_2 + 6B_6 a_3 c_3,$$

$$B_2 = 8\,376\,121, \quad B_4 = 590,42, \quad B_6 = 1,68,$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} p}, \quad \operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{sh} p}{\cos \xi}; \quad \operatorname{tg} \tilde{\gamma} = \operatorname{tg} l \sin \varphi,$$

sh p вычисляется по стандартному блоку, в котором следует положить $\alpha = p$;

$$\operatorname{ch} p = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p},$$

$$B = \varphi + [(5645 \sin^2 \varphi - 531\,245) \sin^2 \varphi + 67\,385\,254] \sin \varphi \cos \varphi \cdot 10^{-10},$$

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{p_u}{\xi_u}, \quad \gamma = \tilde{\gamma} + \bar{\gamma},$$

$$m = \frac{H \cos \varphi \operatorname{ch} p}{\cos B} \sqrt{\frac{1 + e'^2 \cos^2 B}{p_u^2 + \xi_u^2}},$$

где

$$H = 0,994\,977\,825, \quad e'^2 = 0,006\,738\,5254.$$

Пример вычислений по данному алгоритму приведен в табл. 28.

Таблица 28

Вычисление B, l, γ, m в проекции Гаусса—Крюгера для широкой полосы

x	5 455 230,329 м	ξ	0,853 747 783
y	6 211 011,300 м	p	0,975 826 637
u	0,856 722 452	sh p	1,138 239 494
v	0,975 414 879	ch p	1,515 120 175
a_1	0,989 842 94	sin φ	0,497 484 364
b_1	-0,142 165 25	tg l	1,732 050 798
a_2	-0,281 443	$\tilde{\gamma}$	40°45'01,546"
b_2	-0,959 578	φ	0,520 696 397
a_3	-0,909 8	B	30°00'00,0003"
b_3	0,415 0	l	59°59'59,9995"
c_1	3,446 182 4	ξ_u	1,000 860 13
d_1	3,588 338 5	p_u	0,005 712 687
c_2	24,732 1	$\bar{\gamma}$	20,548"
d_2	24,752 3	γ	40°45'22,094"
c_3	174,0	m	1,512 516 08
d_3	174,1		

§ 49. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

Применение аналитических функций комплексного переменного для получения конформных проекций эллипсоида на плоскости

Если две непрерывные и дифференцируемые функции P и Q двух независимых переменных U и V , а именно

$$P = f_1(U, V), \quad Q = f_2(U, V) \quad (\text{VI.88})$$

удовлетворяют уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial P}{\partial U} = \frac{\partial Q}{\partial V}, \quad \frac{\partial Q}{\partial U} = -\frac{\partial P}{\partial V} \quad (\text{VI.89})$$

то из них можно составить аналитическую функцию комплексного переменного

$$P + iQ = f(U + iV). \quad (\text{VI.90})$$

Если на некоторой поверхности задана система координат U и V , то функция (VI.90) осуществляет конформное преобразование этой системы в новую систему координат P и Q на этой же поверхности.

Если же P и Q составляют систему координат на другой поверхности, то функция (VI.90) устанавливает конформное изображение первой поверхности на второй.

Для получения конформного изображения с помощью функции (VI.90) нельзя брать любые системы криволинейных координат, а только такие, для которых функции (VI.88) удовлетворяют уравнениям (VI.89). Для других систем координат формально составленная функция (VI.90) не будет давать конформного изображения.

Условиям (VI.89) удовлетворяют такие функции (VI.88), которые связывают две системы так называемых *изометрических координат*.

В системе изометрических координат линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = \lambda^2 (dU^2 + dV^2), \quad (\text{VI.91})$$

где λ — некоторая функция координат U и V .

Система плоских прямоугольных координат является изометрической, так как линейный элемент в этой системе $dS^2 = dx^2 + dy^2$ соответствует виду (VI.91).

Система геодезических координат B и L на эллипсоиде не является изометрической, так как линейный элемент согласно равенству (I. 88)

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2$$

не соответствует виду (VI.91).

Для приведения его к изометрическому виду вынесем $N^2 \cos^2 B$ за скобки. Тогда

$$ds^2 = N^2 \cos^2 B \left(\frac{M^2}{N^2 \cos^2 B} dB^2 + dL^2 \right).$$

Первый член в скобках является функцией только одной переменной B . Введем новую переменную по формуле

$$dq = \frac{MdB}{N \cos B}. \quad (\text{VI.92})$$

Интеграл этой функции имеет вид

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B}, \quad (\text{VI.93})$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

Величина q называется изометрической широтой.

Так как линейный элемент поверхности эллипсоида теперь примет изометрическую форму

$$ds^2 = N^2 \cos^2 B (dq^2 + dL^2), \quad (\text{VI.94})$$

то для получения любого конформного изображения эллипсоида на плоскости можно применить функцию

$$x + iy = f(q + iL). \quad (\text{VI.95})$$

Геометрический смысл изометрических координат состоит в том, что равенство дифференциалов этих координат создает равенство им соответствующих дифференциалов дуг координатных линий. Так, например, из формулы (VI.94) можем написать

$$dX = N \cos B dq, \quad dY = N \cos B dL,$$

откуда при $dq = dL$ следует, что $dX = dY$.

Выберем на осевом меридиане $L_0 = \text{const}$ точку Q_0 с широтой B_0 . Изображение этой точки на плоскости примем за начало плоских координат, а точку Q_0 будем называть начальной точкой.

Введем обозначения для координат произвольной точки Q на эллипсоиде

$$l = L - L_0, \quad \Delta B = B - B_0, \quad \Delta q = q - q_0.$$

Теперь в соответствии с равенством (VI.95) можем написать уравнение любой конформной проекции в следующем виде:

$$x + iy = f(\Delta q + il). \quad (\text{VI.96})$$

Аналитическая функция (VI.96) имеет производные любого порядка. Поэтому, полагая, что Δq и l — малые величины, эту функцию разложим в ряд:

$$x + iy = C_1 (\Delta q + il) + C_2 (\Delta q + il)^2 + C_3 (\Delta q + il)^3 + \dots \quad (\text{VI.97})$$

В конформных проекциях, применяемых в геодезии, произвольно выбранный меридиан $L_0 = \text{const}$ изображается прямолинейно на оси абсцисс, поэтому эти проекции являются симметричными относительно оси абсцисс.

Для любой симметричной проекции при $l=0$ должно быть $y=0$. При этих условиях из равенства (VI.97) находим

$$x_m = C_1 \Delta q + C_2 \Delta q^2 + C_3 \Delta q^3 + \dots = f(\Delta q), \quad (\text{VI.98})$$

где x_m — изображение дуги осевого меридиана ΔX на оси абсцисс. Коэффициенты C_n ($n=1, 2, 3, \dots$) являются действительными числами и для каждой проекции имеют свои значения.

После отделения действительной части от мнимой в равенстве (VI.97) получим

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \Delta q + C_2 (\Delta q^2 - l^2) + C_3 (\Delta q^3 - 3\Delta q l^2) + \dots, \\ y &= C_1 l + C_2 (2\Delta q l) + C_3 (\Delta q^2 l - l^3) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.99})$$

В этих рядах выражения, заключенные в скобки, представляют собой гармонические полиномы, т. е. полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Рекомендуется следующий порядок вычисления гармонических полиномов:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \Delta q, & Q_1 &= l, \\ P_2 &= P_1^2 - Q_1^2, & Q_2 &= 2P_1 Q_1, \\ P_3 &= P_1 P_2 - Q_1 Q_2, & Q_3 &= P_1 Q_2 + Q_1 P_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n &= P_1 P_{n-1} - Q_1 Q_{n-1}, & Q_n &= P_1 Q_{n-1} + Q_1 P_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.100})$$

Очевидно, вычисление каждого полинома по этим формулам не сложнее вычисления полинома второго порядка.

Таким образом, вычисление плоских координат будет выполняться по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + C_4 P_4 + C_5 P_5 + C_6 P_6 + \dots, \\ y &= C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_3 + C_4 Q_4 + C_5 Q_5 + C_6 Q_6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.101})$$

Для перехода от заданной разности геодезических широт ΔB к разности изометрических широт Δq вместо использования довольно сложной для вычислений формулы (VI.93) обычно применяют следующий ряд:

$$\Delta q = \left(\frac{dq}{dB} \right)_0 \Delta B + \left(\frac{d^2 q}{dB^2} \right)_0 \Delta B^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 q}{dB^3} \right)_0 \Delta B^3 + \dots$$

Обозначим

$$t_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n q}{dB^n} \right)_0, n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$\Delta q = t_1 \Delta B + t_2 \Delta B^2 + t_3 \Delta B^3 + t_4 \Delta B^4 + t_5 \Delta B^5 + t_6 \Delta B^6 + \dots, \quad (\text{VI.102})$$

где

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{V_0^2 \cos B_0}, \quad t_2 = \frac{\operatorname{tg} B_0}{2V_0^4 \cos B_0} (1 + 3\eta_0^2), \\ t_3 &= \frac{1}{6 \cos B_0} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_0 + \eta_0^2 + 6\eta_0^4 \operatorname{tg}^2 B_0 - 3\eta_0^4 + \dots), \\ t_4 &= \frac{\operatorname{tg} B_0}{24 \cos B_0} (5 + 6 \operatorname{tg}^2 B_0 - \eta_0^2 - 6\eta_0^4 \operatorname{tg}^2 B_0 + 21\eta_0^4 + \dots), \\ t_5 &= \frac{1}{120 \cos B_0} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B_0 + 24 \operatorname{tg}^4 B_0 - \eta_0^2 + \dots), \\ t_6 &= \frac{\operatorname{tg} B_0}{720 \cos B_0} (61 + 180 \operatorname{tg}^2 B_0 + 120 \operatorname{tg}^4 B_0 + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.103})$$

Для обратного перехода от плоских координат к геодезическим обратим ряд (VI.98). Тогда

$$\Delta q = C'_1 x_m + C'_2 x_m^2 + C'_3 x_m^3 + \dots$$

Заменив Δq через $\Delta q + il$, а x_m — через $x + iy$ и отделив действительную часть от мнимой, получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= C'_1 x + C'_2 (x^2 - y^2) + C'_3 (x^3 - 3xy^2) + \dots, \\ l &= C'_1 y + C'_2 (2xy) + C'_3 (3x^2 y - y^3) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.104})$$

Вычисление гармонических полиномов в этих рядах также можно выполнять по формулам (VI.100), положив в них $P_1 = x$ и $Q_1 = y$.

Коэффициенты C'_n ($n=1, 2, 3, \dots$) можно получить по формулам обращения ряда из равенства (VI.98).

Для перехода от Δq к ΔB применяют ряд

$$\Delta B = t'_1 \Delta q + t'_2 \Delta q^2 + t'_3 \Delta q^3 + \dots, \quad (\text{VI.105})$$

коэффициенты которого можно получить из равенства (VI.102) по правилам обращения ряда.

Все коэффициенты полученных выше рядов вычисляются один раз по широте B_0 и могут быть использованы для вычисления плоских координат всех точек, расположенных внутри изображаемой области в пределах допустимых значений ΔB и l .

Вычисление координат проекции Гаусса — Крюгера по формулам с постоянными коэффициентами

Согласно условию проекции Гаусса — Крюгера осевой меридиан изображается на плоскости без искажений. Поэтому в левой части равенства (VI.98) следует положить $x_m = \Delta X = X - X_0$, а в правой части этого равенства коэффициенты C_n для дан-

ной проекции будут представлять собой производные длины дуги меридиана по изометрической широте. Таким образом, получаем

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dq} \right)_0 \Delta q + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2X}{dq^2} \right)_0 \Delta q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3X}{dq^3} \right)_0 \Delta q^3 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда совпадают с соответствующими коэффициентами (VI.21).

В самом деле

$$\frac{dX}{dq} = \frac{dX}{dB} \frac{dB}{dq} = \frac{dX}{dB} \frac{N \cos B}{M} = b_1,$$

$$\frac{d^2X}{dq^2} = \frac{db_1}{dB} \frac{dB}{dq} = \frac{db_1}{dB} \frac{N \cos B}{M} = -2a_2,$$

$$\frac{d^3X}{dq^3} = -6b_3, \quad \frac{d^4X}{dq^4} = 24a_4 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, предыдущий ряд можем написать так:

$$\Delta X = X - X_0 = b_1 \Delta q - a_2 \Delta q^2 - b_3 \Delta q^3 + a_4 \Delta q^4 + b_5 \Delta q^5 - a_6 \Delta q^6 - \dots \quad (\text{VI.106})$$

Тогда ряды (VI.101) для вычисления плоских координат Гаусса — Крюгера будут иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_0 + b_1 P_1 - a_2 P_2 - b_3 P_3 + a_4 P_4 + b_5 P_5 - a_6 P_6, \\ y &= b_1 Q_1 - a_2 Q_2 - b_3 Q_3 + a_4 Q_4 + b_5 Q_5 - a_6 Q_6. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.107})$$

Длина дуги меридиана X_0 и коэффициенты b_1, a_2, b_3, a_4 и т. д. вычисляются заранее для выбранной в пределах области изображения широты B_0 . Они в дальнейшем используются как

Таблица 29

B_0	42°
t_1	1,340 643 60
t_2	0,608 036 0
t_3	0,588 760
t_4	0,497 80
t_5	0,487 5
t_6	0,481
X_0	4 651 719,054 м
$b_1 \cdot 10^{-1}$	474 707,8326
$a_2 \cdot 10^{-2}$	15 882,077
$b_3 \cdot 10^{-3}$	84,327
$a_4 \cdot 10^{-4}$	30,866
$b_5 \cdot 10^{-5}$	-1,093
$a_6 \cdot 10^{-6}$	0,020

Таблица 30

B	45°
l	+3°
ΔB	+0,052 359 8776
$P_1 = 10 \Delta q$	0,719 513 583
$Q_1 = 10 l$	0,523 598 776
P_2	0,243 544 1
Q_2	0,753 472 9
P_3	-0,219 284
Q_3	0,669 653
P_4	-0,508 41
Q_4	0,367 01
P_5	-0,558 0
Q_5	-0,002 1
P_6	-0,40
Q_6	-0,29
x	4 989 413,218 м
y	+ 236 544,594 м

постоянные величины при вычислении координат Гаусса — Крюгера для всех точек, расположенных в пределах широт $B-B_0$ и долгот $L-L_0$.

Если абсолютная величина этих разностей координат не превышает 4° , то для вычисления плоских координат с погрешностью не более $0,002-0,003$ м применяются ряды (VI.107) со всеми членами до 6-го порядка включительно.

Если изображаемая область меньше указанной выше, а также если не требуется высокой точности плоских координат, то число членов соответственно сокращается.

Ниже приведена таблица постоянных величин, вычисленных для широты $B=42^\circ$ (табл. 29), а также пример вычисления плоских координат (табл. 30) по формулам (VI.102), (VI.100) и (VI.107).

Конформная коническая проекция Ламберта

Коническими проекциями называются такие проекции, у которых параллели изображаются концентрическими окружностями, а меридианы — прямыми линиями — радиусами этих окружностей.

«Параллель касания» с широтой B_0 называют нормальной параллелью.

Положение произвольной точки Q (рис. 64) на плоскости определяется декартовыми координатами x и y или полярными координатами ρ и γ . Связь между ними, как это видно из рис. 64, устанавливается следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_0 - \rho \cos \gamma, \\ y &= \rho \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.108})$$

Уравнения всех конических проекций в общем виде можно записать в таком виде:

$$\rho = f(B), \quad \gamma = \beta l, \quad (\text{VI.109})$$

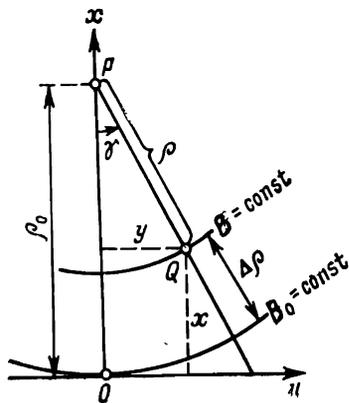


Рис. 64

где β — постоянная величина, определяемая дополнительными условиями. Угол γ , очевидно, равен сближению меридианов во всех конических проекциях.

Масштаб проекции вдоль меридиана m_B равен отношению дифференциала дуги меридиана к его изображению

$$m_B = \frac{-d\rho}{dX} = \frac{-d\rho}{MdB}.$$

Масштаб вдоль параллели m_L равен отношению дифференциалов дуги параллели и ее изображения

$$m_L = \frac{\rho d\gamma}{dY} = \frac{\rho \beta dL}{N \cos B dL} = \frac{\rho \beta}{N \cos B}.$$

В конформной проекции эти масштабы равны. Поэтому масштаб конформной конической проекции определяется одним из следующих выражений:

$$m = -\frac{d\rho}{M dB} = \frac{\beta \rho}{N \cos B}. \quad (\text{VI.110})$$

Отсюда находим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta \frac{M dB}{N \cos B}$$

или с учетом выражения (VI.92)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta dq.$$

После интегрирования этого уравнения получим

$$\ln \rho = -\beta \Delta q + \ln k$$

или

$$\rho = k e^{-\beta \Delta q}, \quad (\text{VI.111})$$

где k — постоянная интегрирования,

e — основание натуральных логарифмов.

При установлении значений двух постоянных k и β исходят из двух условий, согласно которым масштаб во всех точках на изображении нормальной параллели $B_0 = \text{const}$ принимается равным единице, а производная масштаба приравнивается нулю, т. е.

$$m_0 = 1, \quad \left(\frac{dm}{d\rho} \right)_0 = \left(\frac{dm}{dq} \right)_0 = 0. \quad (\text{a})$$

Таким образом, масштаб на нормальной параллели будет минимальным в пределах изображаемой области.

Напишем уравнение масштаба (VI.110) в таком виде:

$$\ln m + \ln(N \cos B) = \ln \beta + \ln \rho.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по q , находим

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dq} + \frac{1}{N \cos B} \frac{d(N \cos B)}{dq} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dq}. \quad (\text{б})$$

Так как

$$\frac{d(N \cos B)}{dq} = \frac{dr}{dB} \frac{dB}{dq} = -M \sin B \frac{N \cos B}{M},$$

$$\frac{d\rho}{dq} = -\beta \rho,$$

то при поставленных выше условиях (а) из равенства (б) получим

$$\beta = \sin B_0, \quad (\text{VI.112})$$

а по уравнениям (VI.111) и (VI.110)

$$k = \rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} B_0. \quad (\text{VI.113})$$

Вместо вычисления ρ по формуле (VI.111) обычно предпочитают находить малую величину $\Delta\rho = \rho_0 - \rho$, которую можно представить в виде ряда по степеням

$$-\Delta\rho = \left(\frac{d\rho}{dq}\right)_0 \Delta q + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dq^2}\right)_0 \Delta q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\rho}{dq^3}\right)_0 \Delta q^3 + \dots$$

Так как

$$\frac{d\rho}{dq} = -\beta\rho, \quad \frac{d^2\rho}{dq^2} = \beta^2\rho \text{ и т. д.,}$$

то предыдущий ряд будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} \Delta\rho = \rho_0 \left[\beta\Delta q - \frac{1}{2} (\beta\Delta q)^2 + \frac{1}{6} (\beta\Delta q)^3 - \frac{1}{24} (\beta\Delta q)^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{120} (\beta\Delta q)^5 - \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.114})$$

Этот ряд соответствует выражению (VI.98), так как в конических проекциях $\Delta\rho = x_m$.

Для вычисления ΔB и l по заданным плоским координатам x и y из уравнений (VI.108) нетрудно найти следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{y}{\rho_0 - x}; \quad l = \frac{\gamma}{\beta}; \\ \Delta\rho &= \rho_0 (1 - \cos \gamma) + x \cos \gamma - y \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.115})$$

Последнее равенство можно представить в виде ряда

$$\Delta\rho = x - \frac{y^2}{2\rho_0} - \frac{xy^2}{2\rho_0^2} + \dots \quad (\text{VI.116})$$

Обращение ряда (VI.114) даст нам

$$\beta\Delta q = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3 + \dots$$

Наконец, по формуле (VI.105) найдем ΔB .

Для вычисления масштаба из формул (VI.110) можно найти следующий ряд по степеням $\Delta\rho$:

$$\begin{aligned} m = 1 + \frac{V_0^2}{2N_0^2} \Delta\rho^2 + \frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{6N_0^3} (1 - 4\eta_0^2) \Delta\rho^3 + \\ + \frac{V_0^2}{24N_0^3} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 B_0 - 3\eta_0^2 + \dots) \Delta\rho^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.117})$$

Заменив $\Delta\rho$ в уравнении (VI.117) по равенству (VI.116), найдем выражение масштаба в функции плоских координат до членов третьего порядка включительно

$$m = 1 + \frac{V_0^2}{2N_0^2} x^2 + \frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{6N_0^3} (1 - 4\eta_0^2) x^3 - \\ - \frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{2N_0^3} xy^2 + \dots \quad (\text{VI.118})$$

Если $\Delta\rho$ представить в виде ряда по степеням длины дуги меридиана ΔX , учитывая, что

$$\frac{d\Delta\rho}{dX} = m, \quad \frac{d^2\Delta\rho}{dX^2} = m \frac{dm}{d\Delta\rho}$$

и т. д., и затем подставить этот ряд в равенство (VI.117), то получим

$$m = 1 + \frac{V_0^2}{2N_0^2} \Delta X^2 + \frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{6N_0^3} (1 - 4\eta_0^2) \Delta X^3 + \\ + \frac{V_0^2}{24N_0^4} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_0 + \eta_0^2 + \dots) \Delta X^4 + \dots \quad (\text{VI.119})$$

Проинтегрировав это выражение по длине дуги меридиана, найдем уравнение изображения осевого меридиана

$$x_m = \Delta X + c_3 \Delta X^3 + c_4 \Delta X^4 + c_5 \Delta X^5 + \dots, \quad (\text{VI.120})$$

где

$$c_3 = \frac{V_0^2}{6N_0^2}; \quad c_4 = \frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{24N_0^3} (1 - 4\eta_0^2);$$

$$c_5 = \frac{V_0^2}{120N_0^4} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_0 + \eta_0^2 + \dots).$$

Для получения редуционных формул воспользуемся соотношениями, найденными в § 41 для любых конформных проекций. Используя равенства (VI.118), (VI.19), (VI.16) и (VI.13), получаем следующие формулы для вычисления поправки в направление за кривизну и поправки в длину линии за масштаб:

$$\delta_{12}'' = \frac{\rho''}{6R_0^2} (y_2 - y_1) (2x_1 + x_2) = \\ = \delta_0 (y_2 - y_1) (2x_1 + x_2) \cdot 10^{-10}, \quad (\text{VI.121})$$

$$d - s = \Delta s = \frac{s}{6R_0^2} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \quad (\text{VI.122})$$

или с несколько меньшей точностью

$$\Delta s = \frac{s}{2R_0^2} x_m^2 = \Delta_0 x_m^2 \cdot 10^{-15}. \quad (\text{VI.123})$$

В этих формулах принято:

$$R_0^2 = M_0 N_0 = \frac{N_0^2}{V_0^2}; \quad \delta_0 = \frac{\rho''}{6R_0^2} 10^{10},$$

$$x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \Delta_0 = \frac{10^{15}}{2R_0^2}.$$

Пример вычисления плоских координат в конической конформной проекции Ламберта

Исходные данные: а) геодезические координаты начальной точки системы плоских координат: $B_0=42^\circ$, $L_0=64^\circ$; б) для заданной стороны на эллипсоиде: $B_1=43^\circ$, $L_1=65^\circ 20'$, $A_{12}=90^\circ$, $s_{12}=15\,000,0$ м.

1. Вычисление постоянных величин (табл. 31).

Таблица 31

N_0	6 387 824,0	t_1	1,340 643 60
ρ_0	7 094 397,2	t_2	0,608 036 0
β	0,669 130 606	t_3	0,588 760
δ_0	8,45	t_4	0,497 80
Δ_0	12,3	t_5	0,487 5

2. Вычисление плоских координат первой точки (табл. 32) по формулам (VI.102), (VI.114) и (VI.108).

Таблица 32

Δq	0,023 587 040	γ_1	+0°53'31,83"
$\Delta \rho$	111 090,56	x_1	+111 937,2 м
ρ	6 983 306,68	y_1	+108 735,3 м

3. Вычисление приближенных координат второй точки

$$x_2 = x_1 + s_{12} \cos(A_{12} - \gamma_1) = 112\,171 \text{ м},$$

$$y_2 = y_1 + s_{12} \sin(A_{12} - \gamma_1) = 123\,733 \text{ м}.$$

4. Вычисление редуций. Все координаты и длина линии предварительно умножаются на 10^{-5} :

$$\delta_{12} = \pm 4,26'', \quad \Delta s = 2,32 \text{ м}.$$

5. Вычисление окончательных координат второй точки

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} = 89^\circ 06' 32,43'',$$

$$d_{12} = s_{12} + \Delta s = 15\,002,32 \text{ м},$$

$$x_2 = x_1 + d_{12} \cos \alpha_{12} = 112\,170,5 \text{ м},$$

$$y_2 = y_1 + d_{12} \sin \alpha_{12} = 123\,735,8 \text{ м}.$$

Стереографическая проекция Руссилья

Из нескольких возможных способов получения стереографических проекций поверхности эллипсоида мы рассмотрим тот, который предложил французский инженер Руссилья в 1924 г. для применения в геодезических и топографических работах Франции. Под названием «квазистереографическая проекция» она применялась до недавнего времени в Польше.

В качестве исходного уравнения проекции Руссилья взял уравнение изображения осевого меридиана в таком виде:

$$x_m = \Delta X + c_3 \Delta X^3 + c_5 \Delta X^5 + \dots, \quad (\text{VI.125})$$

где

$$c_3 = \frac{1}{12R_0^2}, \quad c_5 = \frac{1}{120R_0^4}, \quad R_0^2 = M_0 N_0.$$

В уравнении (VI.125) длину дуги меридиана ΔX заменим ее выражением по равенству (VI.106). Тогда коэффициенты C_n в уравнениях (VI.98) и (VI.99) до пятого порядка включительно будут определяться следующими выражениями:

$$C_1 = b_1, \quad C_2 = -a_2, \quad C_3 = -b_3 + c_3 b_1^3,$$

$$C_4 = a_4 - 3b_1^2 a_2 c_3,$$

$$C_5 = b_5 + 3c_3 (b_1 a_2^2 - b_1^2 b_3) + c_5 b_1^5.$$

Подставив сюда значения коэффициентов по (VI.21), получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= N_0 \cos B_0, \quad C_2 = -\frac{1}{2} N_0 \sin B_0 \cos B_0, \\ C_3 &= -\frac{1}{12} N_0 \cos^3 B_0 (1 + \eta_0^2 - 2 \operatorname{tg}^2 B_0), \\ C_4 &= \frac{1}{24} N_0 \sin B_0 \cos^3 B_0 (2 - \operatorname{tg}^2 B_0 + 6\eta_0^2), \\ C_5 &= \frac{1}{240} N_0 \cos^5 B_0 (2 - 11 \operatorname{tg}^2 B_0 + 2 \operatorname{tg}^4 B_0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.126})$$

Приведем без вывода еще другие формулы, необходимые для перехода с эллипсоида на плоскость:

— масштаб изображения

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4R_0^2} - \frac{\operatorname{tg} B_0}{R_0^3} (2\eta_0^2 - \eta_0^4) xy^2 + \dots, \quad (\text{VI.127})$$

— сближение меридианов

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \rho'' \frac{\operatorname{tg} B_0}{N_0} y + \rho'' \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_0}{2N_0^2} xy + \\ &+ \rho'' \frac{\operatorname{tg} B_0 (3 + 4 \operatorname{tg}^2 B_0)}{12N_0^3} (3x^2 - y^2) y + \dots = \\ &= h_1 y + h_2 xy + h_3 (3x^2 - y^2) y + \dots, \end{aligned} \quad (\text{VI.128})$$

— поправка за кривизну

$$\delta_{12}'' = \frac{\rho''}{4R_0^2} (x_1y_2 - x_2y_1) = \delta_0 (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot 10^{-10}, \quad (\text{VI.129})$$

где

$$\delta_0 = \frac{\rho''}{4R_0^2} 10^{10},$$

— поправка за масштаб

$$d - s = \Delta s = \frac{s}{12R_0^2} (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \quad (\text{VI.130})$$

или с несколько меньшей точностью

$$\Delta s = \frac{s}{4R_0^2} (x_m^2 + y_m^2) = \Delta_0 (x_m^2 + y_m^2) s \cdot 10^{-15}, \quad (\text{VI.131})$$

где

$$\Delta_0 = \frac{10^{15}}{4R_0^2}, \quad x_m = \frac{1}{2} (x_1 + x_2), \quad y_m = \frac{1}{2} (y_1 + y_2).$$

*Пример вычисления плоских координат
в стереографической проекции*

Исходные данные: а) геодезические координаты начальной точки системы плоских координат: $B_0 = 42^\circ$, $L_0 = 64^\circ$; б) для заданной стороны на эллипсоиде: $B_1 = 43^\circ$, $L_1 = 65^\circ 20'$, $A_{12} = 90^\circ$, $s_{12} = 15\,000,0$ м.

1. Вычисление постоянных величин (табл. 33).

Таблица 33

t_1	1,340 643 60	$C_1 \cdot 10^{-1}$	474 707,83	$h_1 \cdot 10^5$	2907,43
t_2	0,608 036 0	$C_2 \cdot 10^{-2}$	-15 882,08	$h_2 \cdot 10^{10}$	66,26
t_3	0,588 760	$C_3 \cdot 10^{-3}$	134,96	$h_3 \cdot 10^{15}$	0,37
t_4	0,497 80	$C_4 \cdot 10^{-4}$	8,86	δ_0	12,68
t_5	0,487 5	$C_5 \cdot 10^{-5}$	-0,34	Δ_0	6,15

2. Вычисление плоских координат первой точки (табл. 34) по формулам (VI.102), (VI.100) и (VI.101) и сближения меридианов по формуле (VI.128), в которой каждую координату следует предварительно умножить на 10^{-5} .

Таблица 34

$P_1 = 10\Delta q$	+0,235 8704	Q_4	+0,0003
$Q_1 = 10 l$	+0,232 7106	P_5	-0,003
P_2	+0,001 4806	Q_5	-0,003
Q_2	+0,109 7791	x_1	+111 942,5 м
P_3	-0,025 20	y_1	+108 729,6 м
Q_3	+0,026 23	γ_1	+0°54'02,93"
P_4	-0,012 0		

3. Вычисление приближенных координат второй точки
 $x_2 = x_1 + s_{12} \cos(A_{12} - \gamma_1) = 112\,178 \text{ м},$
 $y_2 = y_1 + s_{12} \sin(A_{12} - \gamma_1) = 123\,728 \text{ м}.$

4. Вычисление редуций по формулам (VI.129) и (VI.131)
 $x_m = 112\,060 \text{ м}, \quad y_m = 116\,229 \text{ м}.$

Все координаты и длина линии предварительно умножаются на 10^{-5} :

$$\delta_{12} = 2,10'', \quad \Delta s = 2,41 \text{ м}.$$

5. Вычисление окончательных координат второй точки

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} = 89^\circ 05' 59,2'',$$

$$d_{12} = s_{12} + \Delta s = 15\,002,4 \text{ м},$$

$$x_2 = x_1 + d_{12} \cos \alpha_{12} = +112\,178,2 \text{ м},$$

$$y_2 = y_1 + d_{12} \sin \alpha_{12} = +123\,730,1 \text{ м}.$$

Сравнительная характеристика трех геодезических проекций

Достоинство любой конформной проекции определяется величиной линейных искажений в пределах изображаемого участка.

На рис. 65 изображены координатные зоны трех проекций: стереографической, Ламберта и Гаусса — Крюгера. На краю зоны каждой проекции величина линейных искажений одинакова. Если величину линейных искажений на краю зоны стереографической проекции условно принять за единицу, то в трех точках Q_1 , Q_2 и Q_3 , находящихся на одинаковом удалении от начала координат, линейные искажения в двух других проекциях будут такой величины, какая показана в табл. 35.

Данные, приведенные на рис. 65 и в табл. 35, позволяют выбрать ту проекцию, у которой в границах изображаемого участка линейные искажения будут наименьшими.

Очевидно, если участок вытянут с севера на юг, то целесообразно применить проекцию Гаусса — Крюгера. Если же он вытянут с запада на восток, то следует применить проекцию Ламберта. При круглом очертании границы участка наиболее выгодно использовать стереографическую проекцию. Наконец,

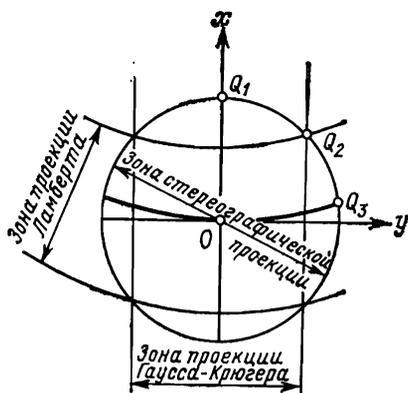


Рис. 65

Точки	Относительные линейные искажения = $m - 1$		
	стереографическая проекция	проекция Ламберта	проекция Гаусса—Крюгера
	$\frac{x^2 + y^2}{4R^2}$	$\frac{x^2}{2R^2}$	$\frac{y^2}{2R^2}$
Q_1	1	2	0
Q_2	1	1	1
Q_3	1	0	2

если участок вытянут в направлении под углом около 45° к меридиану или же он имеет почти квадратную форму, то можно применить любую из указанных трех проекций.

Вычисление координат проекции Гаусса — Крюгера по координатам других проекций

Примем следующие исходные положения для всех конформных проекций, подлежащих преобразованию в проекцию Гаусса — Крюгера:

- 1) проекции симметричны относительно оси абсцисс;
- 2) осевые меридианы проекций совпадают;
- 3) масштаб изображения в начальной точке каждой проекции равен единице и является минимальным в пределах области изображения.

Пусть x_r, y_r — координаты проекции Гаусса — Крюгера, x, y — координаты другой проекции.

Преобразование координат любой конформной проекции в координаты проекции Гаусса — Крюгера выполняется с помощью аналитической функции комплексного переменного следующего вида:

$$x_r + iy_r = f(x + iy) + X_0, \quad (\text{VI.132})$$

где X_0 — длина дуги меридиана от экватора до широты B_0 начальной точки данной проекции.

Для симметричных проекций при $y=0$ должно быть $x=x_m, y_r=0$ и $x_r=X$. При этих условиях функция (VI.132) примет вид $X - X_0 = \Delta X = f(x_m)$.

Представим эту функцию в виде ряда

$$\Delta X = d_1 x_m + d_2 x_m^2 + d_3 x_m^3 + d_4 x_m^4 + d_5 x_m^5 + \dots, \quad (\text{VI.133})$$

где

$$d_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n X}{d x_m^n} \right)_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Напишем уравнение изображения осевого меридиана в виде ряда по степеням ΔX :

$$x_m = c_1 \Delta X + c_2 \Delta X^2 + c_3 \Delta X^3 + \dots,$$

где

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n x_m}{dX^n} \right)_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Согласно принятому выше третьему условию в начале координат, т. е. при $\Delta X = 0$, должно быть

$$m_0 = \left(\frac{dx_m}{dX} \right)_0 = 1, \left(\frac{dm}{dX} \right)_0 = \left(\frac{d^2 x_m}{dX^2} \right)_0 = 0.$$

Следовательно, $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$. Тогда уравнение изображения осевого меридиана примет вид

$$x_m = \Delta X + c_3 \Delta X^3 + c_4 \Delta X^4 + c_5 \Delta X^5 + \dots \quad (\text{VI.134})$$

Обращением этого ряда получим

$$\Delta X = x_m - c_3 x_m^3 - c_4 x_m^4 + (3c_3^2 - c_5) x_m^5 + \dots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x_m в этом ряду и в ряду (VI.133), находим

$$d_1 = 1; \quad d_2 = 0; \quad d_3 = -c_3; \quad d_4 = -c_4; \quad d_5 = 3c_3^2 - c_5.$$

Заменив в равенстве (VI.133) ΔX через $x_r + iy_r - X_0$, а x_m через $x + iy$, получим

$$x_r + iy_r = X_0 + (x + iy) + d_3 (x + iy)^3 + d_4 (x + iy)^4 + d_5 (x + iy)^5 + \dots \quad (\text{VI.135})$$

После отделения действительной части от мнимой получим следующие уравнения преобразования координат:

$$\left. \begin{aligned} x_r &= X_0 + x + d_3 P_3 + d_4 P_4 + d_5 P_5 + \dots, \\ y_r &= y + d_3 Q_3 + d_4 Q_4 + d_5 Q_5 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.136})$$

где гармонические полиномы вычисляются по таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= x, & Q_1 &= y, \\ P_2 &= x^2 - y^2, & Q_2 &= 2xy, \\ P_3 &= xP_2 - yQ_2, & Q_3 &= xQ_2 + yP_2, \\ P_4 &= xP_3 - yQ_3, & Q_4 &= xQ_3 + yP_3, \\ P_5 &= xP_4 - yQ_4, & Q_5 &= xQ_4 + yP_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.137})$$

Для вычисления коэффициентов d_n используются коэффициенты c_n ряда (VI.134), соответствующего данной проекции.

Для проекции Ламберта, используя коэффициенты ряда (VI.120), найдем

$$d_3 = -\frac{V_0^2}{6N_0^2}, \quad d_4 = -\frac{V_0^2 \operatorname{tg} B_0}{24N_0^3}, \quad d_5 = \frac{V_0^2}{120N_0^4} (5 - 3 \operatorname{tg}^2 B_0).$$

Для стереографической проекции, используя коэффициенты ряда (VI.125), получаем

$$d_3 = -\frac{1}{12R_0^2}, \quad d_4 = 0, \quad d_5 = \frac{1}{80R_0^4}.$$

Примеры преобразования координат проекции Ламберта и стереографической проекции в координаты проекции Гаусса — Крюгера по формулам (VI.136) приведены в табл. 36 и 37. Исходные координаты взяты из табл. 32 и 34, величина X_0 — из табл. 29.

Таблица 36

Преобразование координат Ламберта в координаты Гаусса — Крюгера

$P_1 = x \cdot 10^{-6}$	0,111 937	P_3	-0,002 57	$d_3 \cdot 10^{18}$	-4099,74
$Q_1 = y \cdot 10^{-6}$	0,108 735	Q_3	0,002 80	$d_4 \cdot 10^{24}$	-144,47
P_2	0,000 7066	P_4	-0,000 59	x_{Γ}	4 763 666,83
Q_2	0,024 343	Q_4	0,000 03	y_{Γ}	108 723,84

Таблица 37

Преобразование координат стереографической проекции в координаты Гаусса — Крюгера

$P_1 = x \cdot 10^{-6}$	0,111 942	P_3	-0,002 57	x_{Γ}	4 763 666,82
$Q_1 = y \cdot 10^{-6}$	0,108 730	Q_3	0,002 80	y_{Γ}	108 723,83
P_2	0,000 7088	$d_3 \cdot 10^{18}$	-2 049,87		
Q_2	0,024 343				

§ 50. ПЕРЕВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ ГАУССА — КРЮГЕРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО ОСЕВОГО МЕРИДИАНА К ДРУГОМУ

На рис. 66 показаны две системы плоских конформных координат в проекции Гаусса — Крюгера, у которых долготы осевых меридианов отличаются друг от друга на величину l_0 .

Некоторая точка Q на эллипсоиде с координатами B и L после изображения ее на плоскости в первой системе будет иметь координаты x_I и y_I (рис. 66, а). Эта же точка во второй системе будет иметь координаты x_{II} и y_{II} (рис. 66, б).

В § 47 были рассмотрены часто встречающиеся в практике геодезических работ случаи, когда возникает необходимость перевычисления плоских координат x_I и y_I в координаты x_{II} и y_{II} . Очевидно, эта задача связана с переходом от одной системы плоских конформных координат к другой.

Переход от системы координат с одним осевым меридианом $L_0 = \text{const}$ к системе координат с другим осевым меридианом $L_0 \pm l_0 = \text{const}$ будем называть коротко «переход к другому осевому меридиану». В геодезической литературе такой переход часто называют «переходом из зоны в зону».

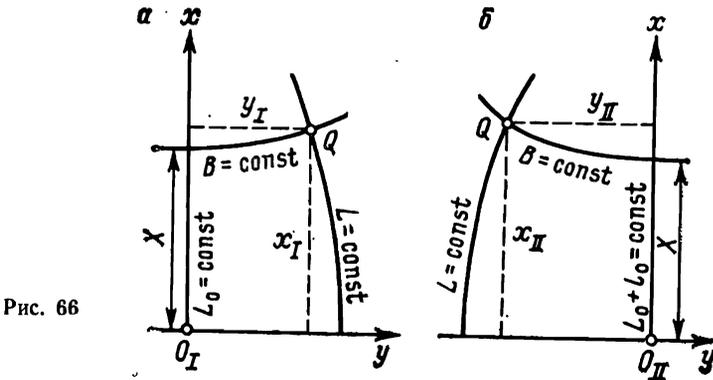


Рис. 66

При переходе к другому осевому меридиану изменяются не только плоские координаты, но и все связанные с координатами величины: масштаб, сближение меридианов, редукции длин и направлений геодезической линии, дирекционные углы и длины хорд. Здесь мы будем рассматривать только способы преобразования координат.

При переходе от одного осевого меридиана к другому разность долгот осевых меридианов чаще всего бывает постоянной величиной (6 или 3°). Но она может и отличаться от этих величин, если применяется проекция, долгота осевого меридиана которой не совпадает со стандартными долготами осевых меридианов в общегосударственной системе плоских координат.

В практике применяются два способа преобразования координат при переходе к другому осевому меридиану.

Первый способ состоит в том, что вначале заданные плоские координаты перевычисляются в геодезические координаты B и l . Затем разность долгот осевых меридианов, и по координатам B и $l \pm l_0$ вновь вычисляются плоские координаты. Такие вычисления можно выполнять, например, по формулам (VI.25) и (VI.22). При массовых преобразованиях этот способ довольно трудоемок, поэтому для его применения целесообразно использовать ЭВМ.

Второй способ состоит в непосредственном преобразовании плоских координат в плоские же без промежуточного перехода к геодезическим координатам. Этот способ проще первого и требует значительно меньше вычислительного труда, но для его применения необходимы заранее составленные таблицы, специально предназначенные для данного преобразования.

Рассмотрим этот способ с привлечением функций комплексного переменного.

Напишем уравнение проекции Гаусса — Крюгера в виде функции комплексного переменного по равенству (VI.106), в котором ΔX заменим через $\Delta x + iy$, а Δq через $\Delta q + il$. Тогда

$$\Delta x + iy = b_1 (\Delta q + il) - a_2 (\Delta q + il)^2 - b_3 (\Delta q + il)^3 + \dots, \quad (\text{VI.138})$$

где $\Delta x = x - X_0$, а длина дуги меридиана X_0 и постоянные коэффициенты b_1 , a_2 , b_3 и т. д., определяемые формулами (VI.21), вычисляются для произвольно выбранной широты B_0 .

Разность долгот $l = L - L_0$ в равенстве (VI.138) отсчитывается от осевого меридиана с долготой L_0 .

Перейдем к новому осевому меридиану, долгота которого меньше, чем L_0 , на величину l_0 . Тогда разность долгот, отсчитываемая от нового осевого меридиана, будет равна

$$L - (L_0 - l_0) = l + l_0. \quad (\text{VI.139})$$

Ясно, что плоские координаты, вычисленные от нового осевого меридиана по равенству (VI.138), будут иметь уже другие значения, а именно

$$\begin{aligned} \Delta x' + iy' = & b_1 (\Delta q + il + il_0) - \\ & - a_2 (\Delta q + il + il_0)^2 - b_3 (\Delta q + il + il_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.140})$$

Функцию (VI.140) можно представить в другом виде, как разложение в ряд по степеням только переменного аргумента $\Delta q + il$:

$$\begin{aligned} \Delta x' + iy' = & F_0 + F_1 (\Delta q + il) + F_2 (\Delta q + il)^2 + \\ & + F_3 (\Delta q + il)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{VI.141})$$

где постоянные коэффициенты F_n зависят не только от широты B_0 , но и от постоянной разности долгот l_0 . Кроме того, эти коэффициенты представляют собой комплексные числа.

Выражение для коэффициента F_0 найдем из равенства (VI.140), положив в нем $\Delta q + il = 0$.

Остальные коэффициенты F_n ($n=1, 2, 3, \dots$) равны соответствующим производным n -го порядка от функции (VI.140), в которых следует положить $\Delta q + il = 0$.

Таким образом, получаем

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= b_1 (il_0) - a_2 (il_0)^2 - b_3 (il_0)^3 + \dots, \\ F_1 &= b_1 - 2a_2 (il_0) - 3b_3 (il_0)^2 + \dots, \\ F_2 &= -a_2 - 3b_3 (il_0) + \dots, \\ F_3 &= -b_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.142})$$

Теперь найдем $\Delta q + il$ как функцию $\Delta x + iy$ посредством обращения ряда (VI.138)

$$\Delta q + il = \frac{1}{b_1} (\Delta x + iy) + \frac{a_2}{b_1^2} (\Delta x + iy)^2 + \\ + \frac{1}{b_1^3} (2a_2^2 + b_1 b_3) (\Delta x + iy)^3 + \dots$$

Подставив это значение $\Delta q + il$ в равенство (VI.141), получим

$$\Delta x' + iy' = F_0 + \frac{F_1}{b_1} (\Delta x + iy) + \left(\frac{F_1 a_2}{b_1^2} + \frac{F_2}{b_1^2} \right) (\Delta x + iy)^2 + \\ + \left[\frac{F_1}{b_1^3} (2a_2^2 + b_1 b_3) + \frac{2F_2 a_2}{b_1^3} + \frac{F_3}{b_1^3} \right] (\Delta x + iy)^3 + \dots \quad (\text{VI.143})$$

Все коэффициенты этого ряда при различных степенях комплексной переменной $\Delta x + iy$ являются постоянными комплексными величинами. Первые два коэффициента обозначим так:

$$F_0 = D_{01} + iD_{02}, \quad \frac{F_1}{b_1} = 1 + D_{11} + iD_{12}.$$

Для остальных коэффициентов дадим обозначения общего вида:

$$D_{n1} + iD_{n2},$$

где n — показатель степени бинома $(\Delta x + iy)^n$.

Таким образом, ряд (VI.143) примет такой вид:

$$\Delta x' + iy' = D_{01} + iD_{02} + (\Delta x + iy) + (D_{11} + iD_{12}) (\Delta x + iy) + \\ + (D_{21} + iD_{22}) (\Delta x + iy)^2 + (D_{31} + iD_{32}) (\Delta x + iy)^3 + \dots$$

Отделив в этом равенстве действительную часть от мнимой и учтя, что $\Delta x' = x' - X_0$ и $\Delta x = x - X_0$, получим уравнения преобразования координат в окончательном виде до членов 4-го порядка включительно:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + D_{01} + D_{11}P_1 - D_{12}Q_1 + D_{21}P_2 - D_{22}Q_2 + \\ &+ D_{31}P_3 - D_{32}Q_3 + D_{41}P_4 - D_{42}Q_4, \\ y' &= y + D_{02} + D_{11}Q_1 + D_{12}P_1 + D_{21}Q_2 + D_{22}P_2 + \\ &+ D_{31}Q_3 + D_{32}P_3 + D_{41}Q_4 + D_{42}P_4. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.144})$$

В этих уравнениях переменная часть представляет собой гармонические полиномы, которые по аналогии с формулами (VI.100) вычисляются в следующем порядке:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \Delta x = x - X_0, & Q_1 &= y, \\ P_2 &= P_1^2 - Q_1^2, & Q_2 &= 2P_1Q_1, \\ P_3 &= P_1P_2 - Q_1Q_2, & Q_3 &= P_1Q_2 + Q_1P_2, \\ P_4 &= P_1P_3 - Q_1Q_3, & Q_4 &= P_1Q_3 + Q_1P_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.145})$$

Постоянные коэффициенты D_{n1} и D_{n2} являются функциями коэффициентов a_n и b_n , определяемых формулами (VI.21), и разности долгот осевых меридианов l_0 . Они вычисляются для заранее выбранной широты B_0 .

Приведем формулы для вычисления постоянных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 D_{01} &= a_2 l_0^2 + a_4 l_0^4 + a_6 l_0^6, \\
 D_{02} &= b_1 l_0 + b_3 l_0^3 + b_5 l_0^5 + b_7 l_0^7, \\
 D_{11} &= \frac{1}{b_1} (3b_3 l_0^2 + 5b_5 l_0^4 + 7b_7 l_0^6), \\
 D_{12} &= -\frac{1}{b_1} (2a_2 l_0 + 4a_4 l_0^3 + 6a_6 l_0^5), \\
 D_{21} &= \frac{1}{b_1^2} (D_{11} a_2 - 6a_4 l_0^2 - 15a_6 l_0^4), \\
 D_{22} &= \frac{1}{b_1^2} (D_{12} a_2 - 3b_3 l_0 - 10b_5 l_0^3 - 21b_7 l_0^5), \\
 D_{31} &= \frac{1}{b_1^3} (D_{11} b_3 + 2D_{21} b_1 a_2 - 10b_5 l_0^2 - 35b_7 l_0^4), \\
 D_{32} &= \frac{1}{b_1^3} (D_{12} b_3 + 2D_{22} b_1 a_2 + 4a_4 l_0 + 20a_6 l_0^3), \\
 D_{41} &= \frac{1}{b_1^4} [-D_{11} a_4 + D_{21} (2b_1 b_3 - a_2^2) + \\
 &+ 3D_{31} b_1^2 a_2 + 15a_6 l_0^2], \\
 D_{42} &= \frac{1}{b_1^4} [-D_{12} a_4 + D_{22} (2b_1 b_3 - a_2^2) + \\
 &+ 3D_{32} b_1^2 a_2 + 5b_5 l_0 + 35b_7 l_0^3].
 \end{aligned}
 \tag{VI.146}$$

По формулам (VI.146) вычислена таблица постоянных коэффициентов для преобразования плоских конформных координат Гаусса — Крюгера при переходе от одного осевого меридиана к другому, когда разность долгот осевых меридианов равна $l_0 = 6^\circ$ (табл. 38).

Коэффициенты вычислены для различных широт B_0 от 30 до 70° с интервалом в 2° . Эти коэффициенты позволяют перевычислять координаты любой точки, расположенной в соседней шестиградусной зоне. Следовательно, три шестиградусные зоны можно превратить в одну 18-градусную зону с осевым меридианом средней зоны.

Погрешность перевычисленных координат не превышает $0,005$ м независимо от расположения точки в пределах одной шестиградусной зоны.

Последовательность действий при перевычислении координат с помощью табл. 38 будет следующей.

Коэффициенты для преобразования координат Гаусса — Крюгера при переходе к осевому меридиану знаки коэффициентов

B_0	X_0	D_{01}	D_{02}	D_{11}	D_{12}
30°	3 320 172,407	+15 205,356	+579 460,175	+275,9695	—5269,9354
32	3 541 915,327	15 779,610	567 425,680	241,7708	5583,3568
34	3 763 728,210	16 276,876	554 699,966	206,4193	5889,6932
36	3 985 613,304	16 694,748	541 298,596	170,0904	6188,5770
38	4 207 572,510	17 031,205	527 237,950	132,9636	6479,6525
40	4 429 607,368	17 284,624	512 535,211	95,2216	6762,5761
42	4 651 719,054	17 453,791	497 208,338	57,0499	7037,0177
44	4 873 908,372	17 537,898	481 276,048	18,6358	7302,6592
46	5 096 175,747	17 536,558	464 757,788	—19,8335	7559,1972
48	5 318 521,223	17 449,794	447 673,718	58,1701	7806,3392
50	5 540 944,468	17 278,050	430 044,678	96,1889	8043,8086
52	5 763 444,764	17 022,181	411 892,169	133,7047	8271,3408
54	5 986 021,021	16 683,450	393 238,323	170,5373	8488,6854
56	6 208 671,774	16 263,523	374 105,880	206,5090	8695,6047
58	6 431 395,194	15 764,462	354 518,153	241,4474	8891,8754
60	6 654 189,092	15 188,709	334 499,008	274,1851	9077,2874
62	6 877 050,935	14 539,080	314 072,830	307,5616	9251,6443
64	7 099 977,853	13 818,746	293 264,496	338,4220	9414,7620
66	7 322 966,655	13 031,224	272 099,341	367,6211	9566,4707
68	7 546 013,844	12 180,352	250 603,134	395,0190	9706,6142
70	7 769 115,634	11 270,276	228 802,040	420,4874	9835,0484

Предварительно определяют строку, в которой значение X_0 является ближайшей меньшей величиной по сравнению с заданной абсциссой x . Затем устанавливают значения $P_1 = (x - X_0) \cdot 10^{-5}$ и $Q_1 = y \cdot 10^{-5}$, по которым вычисляют гармонические полиномы (VI.145). После этого вычисляют координаты x' и y' по формулам (VI.144).

Для контроля координаты x' и y' вычисляют второй раз, используя коэффициенты, расположенные в строке с величиной X_0 , которая является ближайшей большей по сравнению с абсциссой x . Расхождение в соответствующих координатах, вычисленных дважды, не должно превышать 0,003 м.

Пример преобразования координат при переходе к соседнему западному осевому меридиану показан в табл. 39.

Координаты этой же точки, вычисленные в табл. 24 по геодезическим координатам ($B=45^\circ$, $l=+9^\circ$), имеют следующие значения:

$$x = 5\,024\,605,872 \text{ м}; \quad y = +709\,627,279 \text{ м}.$$

По формулам (VI.146) можно вычислять постоянные коэффициенты для любой широты B_0 и любой разности долгот l_0 , но не более 6° . Необходимость в вычислении такого рода коэффициентов возникает в тех случаях, когда при составлении

соседнему западному осевому меридиану ($l_0=6^\circ$). При переходе к восточному D_{02} , D_{12} , D_{22} , D_{32} и D_{42} меняются на обратные

D_{21}	D_{22}	D_{31}	D_{32}	D_{41}	D_{42}
-7,5697	-71,4537	-0,04453	+0,23066	+0,00065	+0,00147
7,8466	69,8766	0,03871	0,24344	0,00067	0,00142
8,0843	68,2156	0,03273	0,25575	0,00068	0,00136
8,2818	66,4733	0,02659	0,26761	0,00070	0,00131
8,4382	64,6531	0,02038	0,27902	0,00071	0,00126
8,5530	62,7578	0,01407	0,28995	0,00071	0,00121
8,6257	60,7907	0,00775	0,30041	0,00071	0,00115
8,6561	58,7548	0,00140	0,31036	0,00071	0,00110
8,6444	56,6532	+0,00492	0,31987	0,00071	0,00104
8,5906	54,4894	0,01120	0,32885	0,00070	0,00098
8,4953	52,2660	0,01738	0,33741	0,00069	0,00093
8,3590	49,9867	0,02343	0,34546	0,00068	0,00087
8,1826	47,6543	0,02938	0,35303	0,00066	0,00082
7,9671	45,2723	0,03511	0,36014	0,00064	0,00076
7,7136	42,8434	0,04074	0,36679	0,00061	0,00071
7,4235	40,3711	0,04600	0,37298	0,00059	0,00066
7,0983	37,8578	0,05122	0,37872	0,00056	0,00061
6,7397	35,3075	0,05600	0,38398	0,00053	0,00056
6,3494	32,7217	0,06065	0,38889	0,00050	0,00051
5,9295	30,1047	0,06490	0,39332	0,00046	0,00046
5,4817	27,4582	0,06883	0,39734	0,00042	0,00042

крупномасштабных планов и карт применяется та или иная конформная проекция, осевой меридиан которой не совпадает с каким-либо стандартным осевым меридианом проекции Гаусса — Крюгера.

Выше были приведены примеры вычисления плоских координат проекции Ламберта и стереографической проекции. Перевычисление этих координат в координаты Гаусса — Крюгера общегосударственной системы выполняют в два этапа: во-первых, перевычисляют координаты другой конформной проекции в координаты проекции Гаусса — Крюгера, сохранив прежний осевой меридиан, во-вторых, полученные таким образом координаты перевычисляют еще раз для перехода к ближайшему стандартному осевому меридиану.

В приведенных выше примерах первый этап был выполнен ранее и показан в табл. 36 и 37.

Во втором этапе предварительно вычисляют постоянные коэффициенты по формулам (VI.146) для широты $B_0=42^\circ$ и разности долгот $l_0=1^\circ$, так как долгота осевого меридиана в указанных двух проекциях была принята $L_0=64^\circ$, а долгота ближайшего стандартного осевого меридиана равна $L_0=63^\circ$.

Затем определяют значения $P_1=(x-X_0) \cdot 10^{-5}$ и $Q_1=y \cdot 10^{-5}$, вычисляют гармонические полиномы (VI.145) и, наконец, по

Т а б л и ц а 39

Даны координаты $x=4\ 989\ 413,220$ м, $y=+236\ 544,593$ м. Найти новые координаты, отнесенные к западному осевому меридиану

	$B_0 = 44^\circ$	$B_0 = 46^\circ$
P_1	+1,155 048 48	-1,067 625 27
Q_1	+2,365 445 93	+2,365 445 93
P_2	-4,261 20	-4,455 51
Q_2	5,464 41	-5,050 82
P_3	-17,848	16,704
Q_3	-3,768	-5,147
P_4	-11,7	-5,7
Q_4	-46,6	45,0
x'	5024605,871 м	5 024 605,872 м
y'	+709 627,283 м	+709 627,280 м

формулам (VI.144) вычисляют координаты Гаусса — Крюгера, отнесенные к новому осевому меридиану $L_0=63^\circ$.

Результаты вычислений во втором этапе показаны в табл. 40.

Т а б л и ц а 40

Заданные координаты: $x=4\ 763\ 666,82$ м, $y=+108\ 723,83$ м.

D_{01}	483,824	P_1	1,119 478
D_{02}	82 852,595	Q_1	1,087 238
$D_{11} \cdot 10^5$	1,622	P_2	0,071 1
$D_{12} \cdot 10^5$	-1 167,991	Q_2	2,434 3
$D_{21} \cdot 10^{10}$	-0,239	P_3	-2,6
$D_{22} \cdot 10^{10}$	-10,189	Q_3	2,8
$D_{31} \cdot 10^{15}$	0,000	x'	4 765 447,00 м
$D_{32} \cdot 10^{15}$	0,049	y'	+190 269,22 м

Для преобразования плоских координат Гаусса — Крюгера при переходе к другому осевому меридиану, когда разность долгот осевых меридианов равна 6° (так называемый переход из одной шестиградусной зоны в другую шестиградусную зону), кроме приведенной выше табл. 38, применяют целый ряд других таблиц, разработанных разными авторами и изданных в Советском Союзе. Все они отличаются друг от друга применяемыми в них методами преобразования координат и точностью вычислений. Если же разность долгот осевых меридианов равна 3° (при так называемом переходе из трехградусной зоны в соседнюю трехградусную зону), то для перевычисления координат можно рекомендовать следующие таблицы:

— с точностью до 0,003 м: таблицы, помещенные в книге В. П. Морозова [17];

— с точностью до 0,02 м: А. М. Вировец и Б. Н. Рабинович. Таблицы для преобразования прямоугольных координат. Изд. 3-е, М., Геодиздат, 1954.

Список литературы

1. *Бессель Ф. В.* Избранные геодезические сочинения. М., Геодезиздат, 1961.
2. *Бомфорд Г.* Геодезия. М., Геодезиздат, 1958.
3. *Буткевич А. В.* Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., Недра, 1964.
4. *Витковский В. В.* Практическая геодезия. Изд. 2. СПб, 1911.
5. *Ганьшин В. Н.* Геометрия земного эллипсоида. М., Недра, 1967.
6. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. Т. II. Высшая геодезия. М., Геодезиздат, 1958.
7. *Гельмерт Ф. Р.* Математические и физические теории высшей геодезии. Т. I. Математические теории. М., Геодезиздат, 1962.
8. *Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. Труды ЦНИИГАиК, вып. 171, 1966.
9. *Каврайский В. В.* Избранные труды. Т. I и II. Изд. Управления начальника гидрограф. службы ВМФ, 1956—1960.
10. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1947 (ч. I), 1948 (ч. II).
11. *Кель Н. Г.* Высшая геодезия и геодезические работы, ч. I. М.—Л.—Новосибирск, Гос. горн. изд-во, 1932.
12. *Кёниг Р. и Вейзе К.* Математические основы высшей геодезии и картографии. Земной сфероид и его конформные изображения. М., изд-во иностр. лит-ры, 1954.
13. *Кларк А.* Геодезия. Пер. с англ. В. В. Витковского. СПб, 1890.
14. *Красовский Ф. Н.* Руководство по высшей геодезии, ч. II. М., Геодезиздат, 1942.
15. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.
16. *Морозов В. П.* Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. М., ВИА, 1958.
17. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1969.
18. *Морозов В. П.* Сфероидическая геодезия. Итоги науки и техники. Серия «Геодезия и аэросъемка», 1976, т. 13. М., ВИНТИ, 1978.
19. *Слудский Ф. А.* Избранные геодезические труды. М., Недра, 1967.
20. *Урмаев Н. А.* Сфероидическая геодезия. М., РИО ВТС, 1955.
21. *Христов В. К.* Координаты Гаусса—Крюгера на эллипсоиде вращения. М., Геодезиздат, 1957.

Подробную библиографию современной советской и зарубежной литературы как по всему курсу, так и по отдельным вопросам сфероидической геодезии в особенности можно найти в работах Бомфорда [2], Буткевича [3], Ганьшина [5] и Морозова [18].

Обращение тригонометрического ряда

$$y = x + p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + p_6 \sin 6x + \dots,$$

$$x = y + q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + q_6 \sin 6y + \dots,$$

$$q_2 = -p_2 - p_2 p_4 + \frac{1}{2} p_2^3 + \dots,$$

$$q_4 = -p_4 + p_2^2 + \dots,$$

$$q_6 = -p_6 + 3p_2 p_4 - \frac{3}{2} p_2^3 + \dots.$$

Обращение степенного ряда

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

$$x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + A_5 y^5 + \dots,$$

$$A_1 = \frac{1}{a_1}, \quad A_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad A_3 = \frac{1}{a_1^3} (2a_2^2 - a_1 a_3),$$

$$A_4 = \frac{1}{a_1^4} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3),$$

$$A_5 = \frac{1}{a_1^5} (6a_1^2 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_3^2 + 14a_2^4 - a_1^3 a_5 - 21a_1 a_2^2 a_3).$$

Функции комплексного аргумента

$$\sin(x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm iy) = \operatorname{sh} x \cos y \pm i \operatorname{ch} x \sin y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm iy) = \operatorname{ch} x \cos y \pm i \operatorname{sh} x \sin y.$$

Экономизация степенных рядов

В заданном конечном степенном ряду

$$a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + a_8 x^8 + \dots + a_k x^k,$$

$$\text{где } -1 \leq x \leq +1$$

и коэффициенты известны, число членов можно уменьшить с незначительным понижением точности, если использовать для этого полиномы Чебышева:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

где $-1 \leq T_i(x) \leq +1 \quad (i=2, 4, 6, 8, \dots).$

С этой целью в последнем члене ряда величина xk заменяется его значением, полученным из соответствующего полинома Чебышева ($i=k$), после чего суммируются коэффициенты при одинаковых степенях x , а член, содержащий множитель $T_k(x)$, отбрасывается.

Например, вместо ряда восьмого порядка получим следующий преобразованный ряд:

$$\left(a_0 - \frac{a_8}{128}\right) + \left(a_2 + \frac{a_8}{4}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{5}{4}a_8\right)x^4 + \\ + (a_6 + 2a_8)x^6 \text{ с погрешностью } \frac{a_8}{128}x^8.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

$$y=f(x), \quad I = \int_a^b y dx.$$

Метод Симпсона

Интервал интегрирования делят на n равных частей (n — четное число).

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad y_k = f(x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots, n,$$

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Метод Гаусса

В пределах интервала интегрирования ($b-a$) выбирают n узловых точек. Каждой узловой точке приписывают приведенные в таблице значения v_i и R_i , соответствующие выбранному числу n .

$$x_i = a + (b-a)v_i, \quad y_i = f(x_i), \quad i=1, 2, 3, \dots, n.$$

$$I = (b-a) (R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3 + \dots + R_ny_n).$$

$n=1$	$v_1=0,5$	$R_1=1$
$n=2$	$v_1=1-v_2=0,21132487$	$R_1=R_2=0,5$
$n=3$	$v_1=1-v_3=0,1127016654$ $v_2=0,5$	$R_1=R_3=0,2777777778 = \frac{5}{18}$ $R_2=0,4444444444 = \frac{4}{9}$
$n=4$	$v_1=1-v_4=0,0694318442$ $v_2=1-v_3=0,3300094782$	$R_1=R_4=0,1739274226$ $R_2=R_3=0,3260725774$
$n=5$	$v_1=1-v_5=0,0469100770$ $v_2=1-v_4=0,2307653449$ $v_3=0,5$	$R_1=R_5=0,1184634425$ $R_2=R_4=0,2393143352$ $R_3=0,2844444444$
$n=6$	$v_1=1-v_6=0,0337652429$ $v_2=1-v_5=0,1693953068$ $v_3=1-v_4=0,3806904070$	$R_1=R_6=0,0856622462$ $R_2=R_5=0,1803807865$ $R_3=R_4=0,2339569673$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут геодезической линии начальный 93
— — — обратный 93
— — — прямой 93
- Гармонические полиномы 270
Геодезическая кривизна параллели 26
Геодезические засечки 155
Геодезические окружности 47
Геодезический азимут 26
Геодезическое изображение 115
Геоцентрическое изображение 146
Главные геодезические задачи на эллипсоиде 94
— — — в пространстве 196
Главные нормальные сечения 19
Главные радиусы кривизны 19
- Дирекционный угол 218
Дифференциал дуги меридиана 17
— — параллели 18
Дифференциальные уравнения Бесселя 119
— — геодезической линии 38
— — дуги большого круга 109
Дифференциальные формулы для геодезической линии 183
— — прямолинейного отрезка 200
— — — системы геодезических координат 206
Долгота геодезическая 10
Дуга меридиана малой длины 30
— — произвольной длины 28
— параллели 32
- Земной сфероид 4, 8
— эллипсоид 6
- Изометрические координаты 269
- Конформная коническая проекция Ламберта 273
Координатные зоны 245
Кривизна и кручение геодезической линии 35
Кривизна конформного изображения геодезической линии 235
Кривизна нормального сечения 43
- Меридиан 9
— осевой 222
- Параллель 9
Параметрические уравнения геодезической линии 40
Переход к другому осевому меридиану 283
Полярные координаты на поверхности эллипсоида 46
Поперечно-цилиндрическая проекция Кассини — Зольднера 256
— — Ламберта 257
— — UTM 255
Поправка за кривизну 238
Приведенная длина геодезической линии 51
Проекция Гаусса — Крюгера 222
— — для широкой полосы 253
Пространственные координаты геодезические 190
— — геоцентрические 189
— — топоцентрические 189
- Радиус параллели 11, 20
Радиус эквивалентного шара 34
- Сближение меридианов 216
Средний радиус кривизны 44
Стереографическая проекция России 278
Сферическая гипербола 102
Сферическое изображение 148
Сферондическая трапеция 33
Сферондический треугольник 63
- Теорема Грюнерта 90
— — Лежандра 76
- Уравнение Клеро 38
Уравнения поверхности эллипсоида 9, 12
— проекции Гаусса — Крюгера 222
Условная ордината 246
- Хордовый треугольник 88
- Шестиградусная координатная зона 245
Широта геодезическая 11
— геоцентрическая 16
— изометрическая 269
— приведенная 11
- Элементы земного эллипсоида 7

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
ГЛАВА I. ЗЕМНОЙ ЭЛЛИпсоИД	6
§ 1. Элементы земного эллипсоида	6
§ 2. Основные системы координат. Уравнения поверхности эллипсоида	9
§ 3. Основные сфероидические функции	13
§ 4. Связь между геодезической и приведенной широтами	13
§ 5. Дифференциалы дуг меридианов и параллелей	16
§ 6. Главные радиусы кривизны	18
§ 7. Производные единичных векторов для меридиана и параллели	24
§ 8. Линейный элемент поверхности	26
§ 9. Длины дуг меридиана и параллели	28
§ 10. Площадь сфероидической трапеции	33
ГЛАВА II. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И НОРМАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ	35
§ 11. Кривизна и кручение геодезической линии	35
§ 12. Уравнения геодезической линии	36
§ 13. Кривизна нормального сечения. Средний радиус кривизны	43
§ 14. Системы полярных координат на поверхности. Приведенная длина геодезической линии	46
§ 15. Элементы нормального сечения	54
§ 16. Сравнение длин дуг геодезической линии и нормального сечения	57
§ 17. Условия замены поверхности эллипсоида поверхностью шара	59
ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ	63
§ 18. Виды геодезических треугольников	63
§ 19. Поправка в измеренное направление для перехода к направлению соответствующей геодезической линии на эллипсоиде	64
§ 20. Редуцирование измеренного отрезка прямой на поверхность эллипсоида	67
§ 21. Вычисление сферического избытка	69
§ 22. Решение малого сферического треугольника как плоского с сохранением углов	73
§ 23. Решение малого сферического треугольника как плоского с сохранением длин сторон	76
§ 24. Решение плоского треугольника, вершины которого расположены над поверхностью эллипсоида	86
ГЛАВА IV. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА	93
§ 25. Виды геодезических задач и точность их решения	93
§ 26. Решение геодезических задач на шаре	97
§ 27. Общие условия решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида	111
§ 28. Решение главных геодезических задач по способу Бесселя	118
§ 29. Краткий обзор других способов решения геодезических задач на большие расстояния	142
§ 30. Определение координат с помощью засечек	155
§ 31. Решение прямой геодезической задачи на малые расстояния по способу Шрейбера	165
§ 32. Решение прямой и обратной геодезических задач на малые расстояния по формулам со средними аргументами	172
§ 33. Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге — Кутты — Мерсона	180

§ 34. Дифференциальные формулы для геодезической линии на поверхности эллипсоида	183
ГЛАВА V. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ	189
§ 35. Системы пространственных координат	189
§ 36. Решение главных геодезических задач между точками в пространстве	196
§ 37. Дифференциальные формулы для прямолинейного отрезка в пространстве	200
§ 38. Дифференциальные формулы для системы геодезических координат	206
ГЛАВА VI. ПЛОСКИЕ КОНФОРМНЫЕ КООРДИНАТЫ	213
§ 39. Применение плоских координат в геодезии	213
§ 40. Условия конформного изображения поверхности эллипсоида на плоскости	215
§ 41. Связь между полярными координатами на эллипсоиде и на плоскости	218
§ 42. Уравнения проекции Гаусса — Крюгера	222
§ 43. Сближение меридианов в проекции Гаусса — Крюгера	231
§ 44. Масштаб в проекции Гаусса — Крюгера	233
§ 45. Кривизна конформного изображения геодезической линии в проекции Гаусса — Крюгера	235
§ 46. Редуцирование геодезической линии на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера	238
§ 47. Практика применения проекции Гаусса — Крюгера в геодезических и топографических работах СССР	245
§ 48. Проекция Гаусса — Крюгера для широкой полосы	253
§ 49. Геодезические проекции и связь между ними	268
§ 50. Перевычисление плоских координат Гаусса — Крюгера при переходе от одного осевого меридиана к другому	283
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	291
ПРИЛОЖЕНИЕ	292
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	294

ИБ № 2783

ВАСИЛИЙ ПАВЛОВИЧ МОРОЗОВ

КУРС СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Издание второе, переработанное и дополненное

Редактор издательства Н. Т. Куприна
 Переплет художника В. В. Евдокимова
 Художественный редактор В. В. Шутько
 Технический редактор Л. Г. Лаврентьева
 Корректор С. В. Зими́на

Сдано в набор 08.05.79. Подписано в печать 14.11.79. Т-20044. Формат 60×90^{1/16}.
 Бумага № 2. Гарнитура литер. Печать высокая. Печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 17,31.
 Тираж 5100 экз. Заказ № 1620/7135-15. Цена 85 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19
 Московская типография № 11 Союзполиграфпрома
 при Государственном комитете СССР
 по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
 Москва, 113105, Нагатинская ул., д. 1.